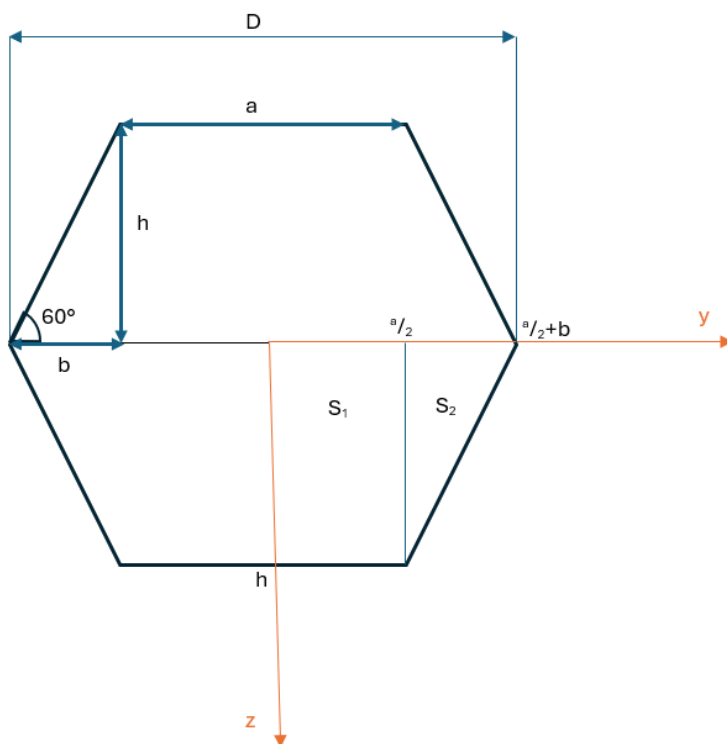


EM1 - příklad 43

Matěj Vondráček
FJFI ČVUT

23. prosince 2024

K výpočtům se bude hodit znát různé délky v šestiúhelníku. Označme a jako jeho stranu a b a h jako odvěsny ve vyznačeném trojúhelníku.



Ze vztahů $D = a + 2b$ a $\cos 60^\circ = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ odvodíme $a = \frac{D}{2}$ a $b = \frac{a}{2}$.
Ze vztahu $\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pak odvodíme $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Pro hlavní centrální kvadratické momenty platí:

$$J_y = \iint_S z^2 dS$$

$$J_z = \iint_S y^2 dS$$

1 Kvadratický moment J_y

Díky symetrii vždy stačí spočítat jen jeden kvadrant a výsledek vynásobit 4. Budeme počítat nejdřív J_y , přičemž rozdělíme obsah na dva: obdélník S_1 a trojúhelník S_2 .

$$J_y = \iint_S z^2 dS = \iint_{S_1} z^2 dS + \iint_{S_2} z^2 dS$$

Spočítáme nejdřív první integrál.

$$\iint_{S_1} z^2 dS = \int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_0^h z^2 dz = [y]_0^{\frac{a}{2}} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{a}{2} \frac{\frac{3^{\frac{3}{2}}}{8} a^3}{3} = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{48} a^4$$

Ke spočítání druhého integrálu je dobré si uvědomit, že podle Steinerových vět posuvu, má na kvadratický moment vliv jen posun kolmý k ose momentu, tzn. že můžeme zjednodušit meze v integrálu:

$$\iint_{S_2} z^2 dS = \int_0^h \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} z^2 dy dz = \int_0^h \int_0^b z^2 dy dz$$

Dále potřebujeme odvodit funkci, která by vyjadřovala sklon trojúhelníku:

$$\begin{aligned} z(0) &= h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ z(b) &= 0 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostáváme

$$z(y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{b} y + \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

Nyní jen dosadíme do integrálu:

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} z^2 dS &= \int_0^h \int_0^b \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{b} y + \frac{\sqrt{3}}{2} a \right)^2 dy dz = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \int_0^b \left(\frac{3a^2}{4b^2} y^2 - \frac{3a^2}{2b} y + \frac{3a^2}{4} \right) dy dz = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} a \left[\frac{3a^2}{4b^2} \frac{y^3}{3} - \frac{3a^2}{2b} \frac{y^2}{2} + \frac{3a^2}{4} y \right]_0^b = \frac{\sqrt{3}}{2} a \left(\frac{3a^2 b^3}{12b^2} - \frac{3a^2 b^2}{4b} + \frac{3a^2 b}{4} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} a \left(\frac{3a^2 b}{12} - \frac{3a^2 b}{4} + \frac{3a^2 b}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} a \left(\frac{3a^3}{24} \right) = \frac{\sqrt{3}}{48} a^4 \end{aligned}$$

Pro kvadratický moment J_y tedy platí

$$J_y = 4 \left(\frac{3^{\frac{3}{2}}}{48} + \frac{\sqrt{3}}{48} \right) a^4 = \frac{3^{\frac{3}{2}} + \sqrt{3}}{12} \left(\frac{D}{2} \right)^4 = \frac{3^{\frac{3}{2}} + \sqrt{3}}{192} D^4 = 3,608 D^4 \cdot 10^{-2}$$

2 Kvadratický moment J_z

Nyní budeme počítat kvadratický moment J_z . K němu obdobně potřebujeme odvodit funkci $y(z)$.

$$y(0) = \frac{a}{2} + b = a$$
$$y(h) = y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{a}{2}$$

Řešením této soustavy dostáváme

$$y(z) = -\frac{1}{\sqrt{3}}z + a$$

Nyní dosadíme do integrálu:

$$\begin{aligned} J_z &= 4 \iint_S y^2 dS = 4 \int_0^a dy \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}z + a\right)^2 dz = 4 \int_0^a dy \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left(\frac{1}{3}z^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}za + a^2\right) dz = \\ &= 4 [y]_0^a \left[\frac{1}{9}z^3 - \frac{1}{\sqrt{3}}z^2a + za^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{24} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a^4 = \frac{7\sqrt{3}}{6} \left(\frac{D}{2} \right)^4 = \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{96} D^4 = 1,263 D^4 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$