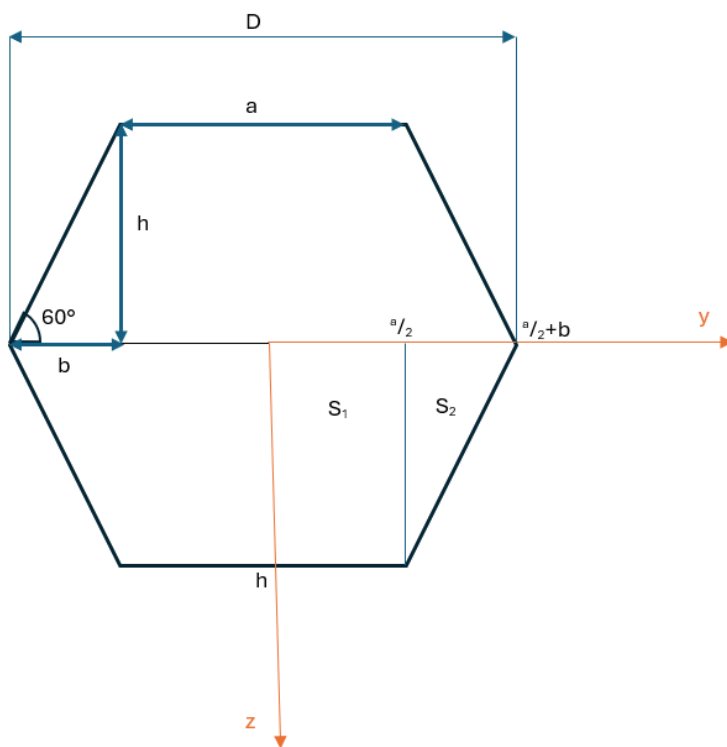


## EM1 - příklad 43

Matěj Vondráček  
FJFI ČVUT

3. ledna 2025

K výpočtům se bude hodit znát různé délky v šestiúhelníku. Označme  $a$  jako jeho stranu a  $b$  a  $h$  jako odvěšny ve vyznačeném trojúhelníku.



Ze vztahů  $D = a + 2b$  a  $\cos 60^\circ = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$  odvodíme  $a = \frac{D}{2}$  a  $b = \frac{a}{2} = \frac{D}{4}$ .  
Ze vztahu  $\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  pak odvodíme  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}D$ .

Pro hlavní centrální kvadratické momenty platí:

$$J_y = \iint_S z^2 dS$$

$$J_z = \iint_S y^2 dS$$

## 1 Kvadratický moment $J_y$

Díky symetrii vždy stačí spočítat jen jeden kvadrant a výsledek vynásobit 4. Budeme počítat nejdřív  $J_y$ , přičemž rozdělíme obsah na dva: obdélník  $S_1$  a trojúhelník  $S_2$ .

$$J_y = 4 \iint_S z^2 dS = 4 \iint_{S_1} z^2 dS + 4 \iint_{S_2} z^2 dS$$

Spočítáme nejdřív první integrál.

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} z^2 dS &= \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^h z^2 dz dy = \int_0^{\frac{a}{2}} \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} dy = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{3\sqrt{3}}{8} a^3 dy = \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{3\sqrt{3}}{8} a^3 \right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{8} a^3 \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{16} a^4 \end{aligned}$$

Ke spočítání druhého integrálu je dobré si uvědomit, že podle Steinerových vět posuvu, má na kvadratický moment vliv jen posun kolmý k ose momentu, tzn. že můžeme zjednodušit meze v integrálu a posun od osy  $z$  zanedbat. Dále potřebujeme odvodit funkci, která by vyjadřovala sklon trojúhelníku:

$$\begin{aligned} z(0) &= h = \frac{\sqrt{3}}{2} a \\ z(b) &= 0 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostáváme

$$z(y) = -\sqrt{3}y + \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Nyní jen dosadíme do integrálu:

$$\iint_{S_2} z^2 dS = \int_0^b \int_0^{-\sqrt{3}y + \frac{\sqrt{3}}{2}a} z^2 dz dy = \int_0^{\frac{a}{2}} \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^{-\sqrt{3}y + \frac{\sqrt{3}}{2}a} dy = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{a}{2}} \left( -\sqrt{3}y + \frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^3 dy$$

Použijeme substituci:

$$\begin{aligned} u &= -\sqrt{3}y + \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ du &= -\sqrt{3}dy \end{aligned}$$

Pro meze pak platí:

$$-\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}a = 0$$

$$-\sqrt{3} \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Po substituci dostáváme:

$$\iint_{S_2} z^2 dS = \frac{1}{3} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^0 -\frac{1}{\sqrt{3}} u^3 du = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \left[ \frac{u^4}{4} \right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^0 = \frac{1}{3\sqrt{3} \cdot 4} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^4 = \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{a^4}{64} = \frac{\sqrt{3}}{64} a^4$$

Pro kvadratický moment  $J_y$  tedy platí

$$J_y = 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{16} a^4 + \frac{\sqrt{3}}{64} a^4 \right) = \frac{5\sqrt{3}}{16} a^4 = \frac{5\sqrt{3}}{256} D^4$$

## 2 Kvadratický moment $J_z$

Nyní budeme počítat kvadratický moment  $J_z$ . K němu obdobně potřebujeme odvodit funkci  $y(z)$ .

$$y(0) = \frac{a}{2} + b = a$$

$$y(h) = y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{a}{2}$$

Řešením této soustavy dostáváme

$$y(z) = -\frac{1}{\sqrt{3}}z + a$$

Nyní dosadíme do integrálu:

$$\begin{aligned} J_z &= 4 \iint_S y^2 dS = 4 \int_0^h \int_0^{-\frac{1}{\sqrt{3}}z+a} y^2 dy dz = 4 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{-\frac{1}{\sqrt{3}}z+a} dz = \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}z + a \right)^3 dz \end{aligned}$$

Použijeme substituci:

$$u = -\frac{1}{\sqrt{3}}z + a$$

$$du = -\frac{1}{\sqrt{3}}dz$$

Pro meze pak platí:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2}a + a &= \frac{a}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 + a &= a \end{aligned}$$

Po dosazení do integrálu dostáváme:

$$J_z = \frac{4}{3} \int_a^{\frac{a}{2}} -\sqrt{3}u^3 du = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \left[ \frac{u^4}{4} \right]_a^{\frac{a}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \left( \frac{a^4}{16} - \frac{a^4}{4} \right) = \frac{15}{16} \frac{\sqrt{3}}{3} a^4 = \frac{5\sqrt{3}}{16} a^4 = \frac{5\sqrt{3}}{256} D^4$$