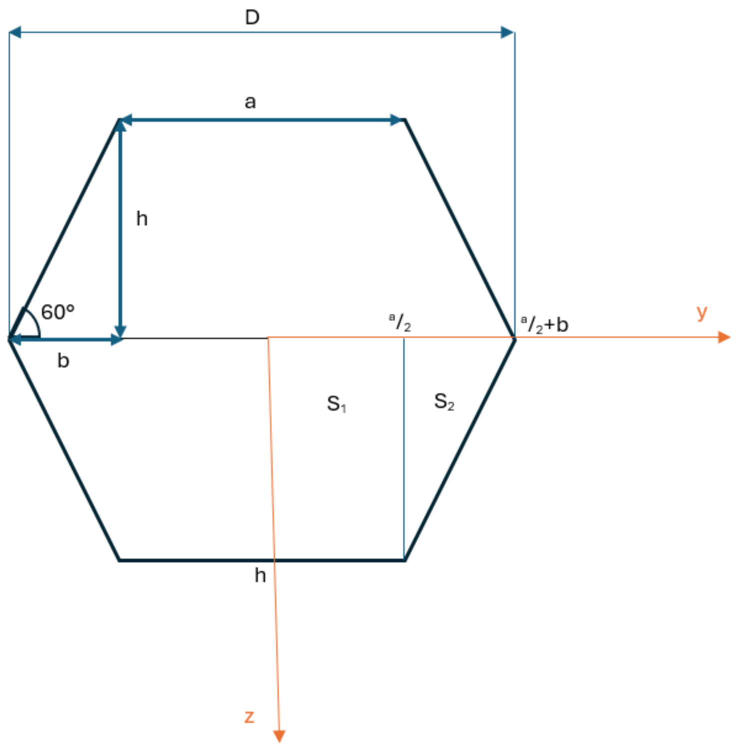
EM1 - příklad 43

Matěj Vondráček
FJFI ČVUT

3. ledna 2025

K výpočtům se bude hodit znát různé délky v šestiúhelníku. Označme a jako jeho stranu a b a h jako odvěsny ve vyznačeném trojúhelníku.



Ze vztahů $D = a + 2b$ a $\cos 60° = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ odvodíme $a = \frac{D}{2}$ a $b = \frac{a}{2} = \frac{D}{4}$.
Ze vztahu $\sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pak odvodíme $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}D$.

Pro hlavní centrální kvadratické momenty platí:

$$J_y = \iint\limits_S z^2 \mathrm{d}S$$

$$J_z = \iint\limits_S y^2 \mathrm{d}S$$

1 Kvadratický moment J_y

Díky symetrii vždy stačí spočítat jen jeden kvadrant a výsledek vynásobit 4. Budeme počítat nejdřív J_y, přičemž rozdělíme obsah na dva: obdélník S_1 a trojúhelník S_2.

$$J_y = 4 \iint\limits_S z^2 \mathrm{d}S = 4 \iint\limits_{S_1} z^2 \mathrm{d}S + 4 \iint\limits_{S_2} z^2 \mathrm{d}S$$

Spočítáme nejdřív první integrál.

$$\iint\limits_{S_1} z^2 \mathrm{d}S = \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^h z^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{a}{2}} \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3 \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{3\sqrt{3}}{8}a^3\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^3\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{16}a^4$$

Ke spočítání druhého integrálu je dobré si uvědomit, že podle Steinerových vět posuvu, má na kvadratický moment vliv jen posun kolmý k ose momentu, tzn. že můžeme zjednodušit meze v integrálu a posun od osy z zanedbat. Dále potřebujeme odvodit funkci, která by vyjadřovala sklon trojúhelníku:

$$z(0) = h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$
$$z(b) = 0$$

Řešením této soustavy dostáváme

$$z(y) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{y}{b} + \frac{\sqrt{3}}{2}a = -\frac{\sqrt{3}}{a}y + \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Nyní jen dosadíme do integrálu:

$$\iint\limits_{S_2} z^2 \mathrm{d}S = \int_0^b \int_0^{-\frac{\sqrt{3}}{a}y+\frac{\sqrt{3}}{2}a} z^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{a}{2}} \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{-\frac{\sqrt{3}}{a}y+\frac{\sqrt{3}}{2}a} \mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{a}{2}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{a}y + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3 \mathrm{d}y$$

Použijeme substituci:

$$u = -\frac{\sqrt{3}}{a}y + \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\mathrm{d}u = -\frac{\sqrt{3}}{a}\mathrm{d}y$$

Pro meze pak platí:

$$-\frac{\sqrt{3}}{a}\cdot\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}a = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{a}\cdot 0+\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Po substituci dostáváme:

$$\iint\limits_{S_2} z^2 \mathrm{d}S=\frac{1}{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{0}-\frac{2}{\sqrt{3}}u^3\mathrm{d}u=-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left[\frac{u^4}{4}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{0}=\frac{1}{3\sqrt{3}\cdot 2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^4=\frac{3}{\sqrt{3}}\frac{a^4}{32}=\frac{\sqrt{3}}{32}a^4$$

Pro kvadratický momement J_y tedy platí

$$J_y=4\left(\frac{\sqrt{3}}{16}a^4+\frac{\sqrt{3}}{32}a^4\right)=\frac{5\sqrt{3}}{16}a^4=\frac{5\sqrt{3}}{256}D^4$$

2 Kvadratický moment J_z

Nyní budeme počítat kvadratický moment J_z. K němu obdobně potřebujeme odvodit funkci $y(z)$.

$$y(0)=\frac{a}{2}+b=a$$
$$y(h)=y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=\frac{a}{2}$$

Řešením této soustavy dostáváme

$$y(z)=-\frac{1}{\sqrt{3}}z+a$$

Nyní dosadíme do integrálu:

$$J_z=4\iint\limits_S y^2\mathrm{d}S=4\int_0^h\int_0^{-\frac{1}{\sqrt{3}}z+a}y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{-\frac{1}{\sqrt{3}}z+a}\mathrm{d}z=$$
$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}z+a\right)^3\mathrm{d}z$$

Použijeme substituci:

$$u=-\frac{1}{\sqrt{3}}z+a$$
$$\mathrm{d}u=-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}z$$

Pro meze pak platí:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}a+a=\frac{a}{2}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 0+a=a$$

Po dosazení do integrálu dostáváme:

$$J_z=\frac{4}{3}\int_a^{\frac{a}{2}}-\sqrt{3}u^3\mathrm{d}u=-\frac{4\sqrt{3}}{3}\left[\frac{u^4}{4}\right]_a^{\frac{a}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{a^4}{16}-\frac{a^4}{4}\right)=\frac{15}{16}\frac{\sqrt{3}}{3}a^4=\frac{5\sqrt{3}}{16}a^4=\frac{5\sqrt{3}}{256}D^4$$