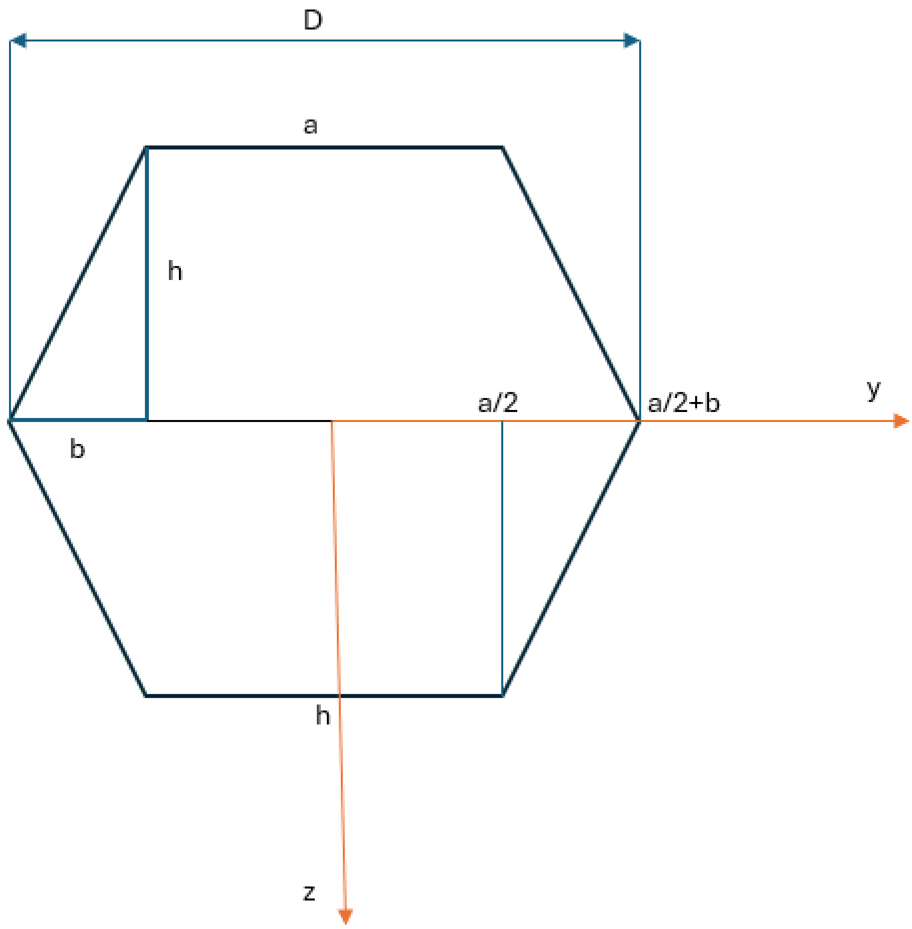
Příklad 43

22. prosince 2024

K výpočtům se bude hodit znát různé délky v šestiúhelníku. Označme a jako jeho stranu a b a h jako odvěsny ve vyznačeném trojúhelníku.



Ze vztahů $D = a + 2b$ a $\cos 60° = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ odvodíme $a = \frac{D}{2}$ a $b = \frac{a}{2}$.
Ze vztahů $\sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ odvodíme $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
Pro centrální kvadratické momenty platí:

$$J_y = \iint\limits_S z^2 \mathrm{d}S$$

$$J_z = \iint\limits_S y^2 \mathrm{d}S$$

Díky symetrii vždy stačí spočítat jen jeden kvadrant a výsledek vynásobit 4. Budeme počítat nejdřív J_y, přičemž rozdělíme obsah na dva: obdélník S_1 a trojúhelník S_2.

$$J_y = \iint\limits_S z^2 \mathrm{d}S = \iint\limits_{S_1} z^2 \mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} z^2 \mathrm{d}S$$

Spočítáme nejdřív první integrál.

$$\iint\limits_{S_1} z^2 \mathrm{d}S = \int_0^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}y \int_0^h z^2 \mathrm{d}z = [y]_0^{\frac{a}{2}} \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{a}{2} \frac{\frac{3^{\frac{3}{2}}}{8} a^3}{3} = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{48} a^4$$

Ke spočítání druhého integrálu je dobré si uvědomit, že podle Steinerových vět posuvu, má na kvadratický moment vliv jen posun kolmý k ose momentu, tzn. že můžeme zjednodušit meze v integrálu:

$$\iint\limits_{S_2} z^2 \mathrm{d}S = \int_0^h \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} z^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h \int_0^b z^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Dále potřebujeme odvodit funkci, která by vyjadřovala sklon trojúhelníku:

$$z(0) = h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$z(b) = 0$$

Řešením této soustavy dostáváme

$$z(y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{b} + \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

Nyní jen dosadíme do integrálu:

$$\iint\limits_{S_2} z^2 \mathrm{d}S = \int_0^h \int_0^b \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{b} y + \frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \int_0^b \left(\frac{3a^2}{4b^2} y^2 - \frac{3a^2}{2b} y + \frac{3a^2}{4}\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} a \left[\frac{3a^2}{4b^2} \frac{y^3}{3} - \frac{3a^2}{2b} \frac{y^2}{2} + \frac{3a^2}{4} y\right]_0^b = \frac{\sqrt{3}}{2} a \left(\frac{3a^2 b^3}{12b^2} - \frac{3a^2 b^2}{4b} + \frac{3a^2 b}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} a \left(\frac{3a^2 b}{12} - \frac{3a^2 b}{4} + \frac{3a^2 b}{4}\right) == \frac{\sqrt{3}}{2} a \left(\frac{3a^3}{24}\right) = \frac{\sqrt{3}}{48} a^4$$

Pro kvadratický momement J_y tedy platí

$$J_y = 4\left(\frac{3^{\frac{3}{2}}}{48} + \frac{\sqrt{3}}{48}\right)a^4 = \frac{3+\sqrt{3}}{12}\left(\frac{D}{2}\right)^4 = 3,608D^4 \cdot 10^{-2}$$

Nyní budeme počítat kvadratický moment J_z. K němu opět potřebujeme odvodit funkci $y(z)$.

$$y(0) = \frac{a}{2} + b = a$$

$$y(h) = y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{a}{2}$$

Řešením této soustavy dostáváme

$$y(z) = -\frac{1}{\sqrt{3}}z + a$$

Nyní dosadíme do integrálu:

$$J_z = 4\iint\limits_S y^2 \mathrm{d}S = 4\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}z + a\right)^2 \mathrm{d}z = 4\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(\frac{1}{3}z^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}za + a^2\right)\mathrm{d}z$$

$$= 4\,[y]_0^a\left[\frac{1}{9}z^3 - \frac{1}{\sqrt{3}}z^2a + za^2\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{24} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^4 = \frac{7\sqrt{3}}{6}\left(\frac{D}{2}\right)^4 = 1,263D^4 \cdot 10^{-1}$$