Beadandó dolgozat megoldások

ötödik osztály, 2019. április, 1/12

1. Összeadás és kivonás

Megoldás 1.2 $2 \cdot 5 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.17)

770 és 77. Ha a kisebbik szám x, akkor a nagyobb $10x$. Márpedig $x + 10x = 11x$, és így $11x = 847$, amiből $x = 77$.

A feladat rendesen valószínűleg kevesebbet érne, de a cél a magasabb pontszámmal most az, hogy motiváljon arra, hogy foglalkozzanak vele, ami viszont előkészíti az egyenlettel való megoldás és így az egyenletek bemutatását.

Megoldás 1.3 2 pont/db

$$4748 + 459720 = 464468 \qquad 999129 + 839015 = 1838144$$
$$25283 + 31420 = 56703 \qquad 3153 + 411269 = 414422$$
$$31853 + 8694 = 40547 \qquad 1528 + 899317 = 900845$$
$$3711 + 21175 = 24886 \qquad 829927 + 93277 = 923204$$
$$931439 + 85878 = 1017317 \qquad 95038 + 7548 = 102586$$
$$65860 - 48427 = 17433 \qquad 806605 - 13923 = 792682$$
$$792937 - 7812 = 785125 \qquad 800171 - 279714 = 520457$$
$$38378 - 6600 = 31778 \qquad 892664 - 18215 = 874449$$
$$399368 - 3946 = 395422 \qquad 64787 - 7659 = 57128$$
$$19875 - 2990 = 16885 \qquad 81466 - 2609 = 78857$$

Megoldás 1.4 2 pont/db

$$4 + (-29) + 86 = 61 \qquad 25 - (-13) + 20 = 58$$
$$93 - 56 + (-95) = -58 \qquad (-4) + (-16) + (-126) = -146$$
$$30 + 6 + (-700) = -664 \qquad (-5) + 411 + 36 = 442$$
$$56 - (-52) + 56 = 164 \qquad (-84) + 211 - 4 = 123$$
$$384 + 581 + (-751) = 214 \qquad 4 - 16 + (-434) = -446$$

Megoldás 1.5 $5 \cdot 2 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.9)

Mivel:

$$\begin{array}{llllll}
\mathbf{B}+\mathbf{B}<19, & \text{azért} & \mathbf{A}=1; & & \\
\mathbf{E}+\mathbf{E}=\mathbf{E}, & \text{azért} & \mathbf{E}=0; & & \\
\mathbf{E}=0, & \text{azért} & \mathbf{B}+\mathbf{B}=10 & \text{és} & \mathbf{B}=5; \\
\mathbf{C}+\mathbf{A}=5, & \text{azért} & \mathbf{C}=4; & & \\
\mathbf{C}=4, & \text{azért} & \mathbf{D}+\mathbf{D}=4 & \text{és} & \mathbf{D}=2.
\end{array}$$

Az összeadás tehát:

$$\begin{array}{r} 5240 \\ \underline{+5210} \\ 10450 \end{array}$$

Megoldás 1.6 20 pont

A megoldás 5050. Egy Gaussról szóló híres történet, amely a szájhagyomány útján átalakult, arról szól, hogy Gauss általános iskolai tanára, J. G. Büttner diákjait azzal akarta lefoglalni, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss mindenki megdöbbenésére másodpercek alatt előrukkolt a helyes megoldással, megvillantva matematikai éleselméjűségét: a számsor alá visszafele leírta a számokat, majd az oszlopokat összeadta, így azonos összegeket kapott:

$$1+100=2+99=3+98=...=50+51=101.$$

Ez összesen 50 darab számpárt jelentett, és így $50 \cdot 101 = 5050$.

A 20 pont a fáradságos munkát vagy a találékonyságot hivatott díjazni, valamint motivál a feladat elvégzésére és ezzel megágyaz a fenti történet és egyúttal a számtani sorok bemutatásának.

Megoldás 1.7 10 pont

A = 1, Á = 2, B = 3, C = 4, Cs = 5, D = 6, Dz = 7, Dzs = 8, E = 9, É = 10, F = 11, G = 12, Gy = 13, H = 14, I = 15, Í = 16, J = 17, K = 18, L = 19, Ly = 20, M = 21, N = 22, Ny = 23, O = 24, Ó = 25, Ö = 26, Ő = 27, P = 28, Q = 29, R = 30, S = 31, Sz = 32, T = 33, Ty = 34, U = 35, Ú = 36, Ü = 37, Ű = 38, V = 39, W = 40, X = 41, Y = 42, Z = 43, Zs = 44.

A feladat burkoltan az is, hogy megtanuljuk, hogy mi a különbség a 40 betűs magyar ábécé és a 44 betűs kiterjesztett magyar ábécé között. Ez utóbbi tartalmazza a Q, W, X, Y betűket is. Az interneten a „magyar ábécé'' keresőszó segítségével nyerhet az ember felvilágosítást erről. Emellet a adatok kódolásába is bevezet.

2. Prímszámok

Megoldás 2.2 $4+4=8$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.10)

Sárinak igaza volt és a kockák felső lapján 3, 3, és 5 vagy 5, 5 és 3 pötty lehetett.

A három kockával legfeljebb $3 \cdot 6 = 18$-at lehet dobni. Ennél kisebb, de 10-nél nagyobb törzsszámok: 11 és 13. A 11 három törzsszám összegeként csak mint $3+3+5$ kapható, a 13 pedig mint $5 + 5 + 3$. Más megoldás nincs.

Megoldás 2.3 20 pont

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181
191	193	197	199		

Megoldás 2.4 12 pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.5)

Az ötjegyű szám: 23572. Az egyjegyű törzsszámok: 2, 3, 5, 7 összege 17, és ha közülük a 2-t adjuk a 17-hez, csak akkor jutunk törzsszámhoz. Az **MA** csak 23 lehet, mert sem 25, sem 27 nem prímszám. Tehát $\mathbf{M} = 2$, $\mathbf{A} = 3$. Az **MLO** vagy 257 vagy 275 lehetne, de 275 nem törzsszám, ezért $\mathbf{L} = 5$, $\mathbf{O} = 7$.

Megoldás 2.5 2 pont/db

$$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$$
$$98 = 2 \cdot 7^2$$
$$96 = 2^5 \cdot 3$$
$$12376 = 2^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$$
$$2200 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 11$$
$$16 = 2^4$$
$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$
$$112 = 2^4 \cdot 7$$
$$2100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$286 = 2 \cdot 11 \cdot 13$$
$$2210 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$$
$$666 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37$$
$$182 = 2 \cdot 7 \cdot 13$$
$$1120 = 2^5 \cdot 5 \cdot 7$$
$$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$
$$1012 = 2^2 \cdot 11 \cdot 23$$
$$4524 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 29$$
$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$3150 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Megoldás 2.6

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.27)

Egy kész törzszsámtáblázat segítségével (lásd Feladat 2.3) könnyen megoldhatjuk a feladatot – azonban e nélkül is célhoz érhetünk.

Az *a)* kérdésre a választ megtaláljuk a *Prímszámok* segédanyag *Eratosztenész szitája* című fejezetében. De a következőképpen is gondolkodhatunk: jelöljük n-nel a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ számot, ekkor az $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, ..., $n + 11$ tíz egymást

követő szám között nincs prímszám, hiszen mindegyiknek van 1-nél nagyobb és nála kisebb osztója, mert mindegyik osztható a 2, 3, 5, 7, 11 törzsszámok valamelyikével. A prímszámtáblázatból azt olvashatjuk ki, hogy először a 114-gyel kezdődő 10 (13) egymást követő szám között nem találunk prímet. 3 pont

b) Például: $48, 49, 50, 51, 52, \underline{53}, 54, 55, 56, 57$; 3 pont

c) Például: $\underline{19}, 20, 21, 22, \underline{23}, 24, 25, 26, 57, 28$; 3 pont

d) Például: $\underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12, \underline{13}, 14, 15, 16$; 3 pont

e) Például: $\underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12$. 3 pont

Öt prímszám is előfordulhat tíz egymást követő szám között: $\underline{2}, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}$, de ennél több nem, hiszen a 2-nél nagyobb páros számok nem törzsszámok és tíz egymást követő szám között öt páros van. 3 pont

Hosszúhetény, 2019. április 14.

Beadandó dolgozat megoldások

ötödik osztály, 2019. április, 2/12

1. Összeadás és kivonás

Megoldás 1.2 $2 \cdot 5 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.17)

770 és 77. Ha a kisebbik szám x, akkor a nagyobb $10x$. Márpedig $x + 10x = 11x$, és így $11x = 847$, amiből $x = 77$.

A feladat rendesen valószínűleg kevesebbet érne, de a cél a magasabb pontszámmal most az, hogy motiváljon arra, hogy foglalkozzanak vele, ami viszont előkészíti az egyenlettel való megoldás és így az egyenletek bemutatását.

Megoldás 1.3 2 pont/db

$$660290 + 57755 = 718045$$
$$5390 + 303234 = 308624$$
$$77046 + 21752 = 98798$$
$$52862 + 4109 = 56971$$
$$3019 + 733473 = 736492$$
$$71119 - 8475 = 62644$$
$$62703 - 23824 = 38879$$
$$58881 - 49429 = 9452$$
$$39198 - 8230 = 30968$$
$$32367 - 14978 = 17389$$

$$661386 + 5502 = 666888$$
$$8946 + 6062 = 15008$$
$$949337 + 91252 = 1040589$$
$$71359 + 399114 = 470473$$
$$39062 + 68937 = 107999$$
$$89774 - 30182 = 59592$$
$$84728 - 8507 = 76221$$
$$829554 - 14645 = 814909$$
$$95363 - 2845 = 92518$$
$$394093 - 58123 = 335970$$

Megoldás 1.4 2 pont/db

$$282 + 201 + (-45) = 438$$
$$52 - 7 + 0 = 45$$
$$89 - 91 - (-569) = 567$$
$$(-135) - 6 + 1 = -140$$
$$3 - (-40) - (-69) = 112$$

$$82 + (-91) + 85 = 76$$
$$667 - 1 - (-15) = 681$$
$$(-24) + 37 - (-507) = 520$$
$$680 + 93 + (-16) = 757$$
$$(-81) - (-3) - (-16) = -62$$

Megoldás 1.5 $5 \cdot 2 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.9)

Mivel:

$$
\begin{array}{llllll}
\mathbf{B}+\mathbf{B}<19, & \text{azért} & \mathbf{A}=1; & & \\
\mathbf{E}+\mathbf{E}=\mathbf{E}, & \text{azért} & \mathbf{E}=0; & & \\
\mathbf{E}=0, & \text{azért} & \mathbf{B}+\mathbf{B}=10 & \text{és} & \mathbf{B}=5; \\
\mathbf{C}+\mathbf{A}=5, & \text{azért} & \mathbf{C}=4; & & \\
\mathbf{C}=4, & \text{azért} & \mathbf{D}+\mathbf{D}=4 & \text{és} & \mathbf{D}=2.
\end{array}
$$

Az összeadás tehát:

$$
\begin{array}{r}
5240 \\
\underline{+5210} \\
10450
\end{array}
$$

Megoldás 1.6 20 pont

A megoldás 5050. Egy Gaussról szóló híres történet, amely a szájhagyomány útján átalakult, arról szól, hogy Gauss általános iskolai tanára, J. G. Büttner diákjait azzal akarta lefoglalni, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss mindenki megdöbbenésére másodpercek alatt előrukkolt a helyes megoldással, megvillantva matematikai éleselméjűségét: a számsor alá visszafele leírta a számokat, majd az oszlopokat összeadta, így azonos összegeket kapott:

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = ... = 50 + 51 = 101.$$

Ez összesen 50 darab számpárt jelentett, és így $50 \cdot 101 = 5050$.

A 20 pont a fáradságos munkát vagy a találékonyságot hivatott díjazni, valamint motivál a feladat elvégzésére és ezzel megágyaz a fenti történet és egyúttal a számtani sorok bemutatásának.

Megoldás 1.7 10 pont

A = 1, Á = 2, B = 3, C = 4, Cs = 5, D = 6, Dz = 7, Dzs = 8, E = 9, É = 10, F = 11, G = 12, Gy = 13, H = 14, I = 15, Í = 16, J = 17, K = 18, L = 19, Ly = 20, M = 21, N = 22, Ny = 23, O = 24, Ó = 25, Ö = 26, Ő = 27, P = 28, Q = 29, R = 30, S = 31, Sz = 32, T = 33, Ty = 34, U = 35, Ú = 36, Ü = 37, Ű = 38, V = 39, W = 40, X = 41, Y = 42, Z = 43, Zs = 44.

A feladat burkoltan az is, hogy megtanuljuk, hogy mi a különbség a 40 betűs magyar ábécé és a 44 betűs kiterjesztett magyar ábécé között. Ez utóbbi tartalmazza a Q, W, X, Y betűket is. Az interneten a „magyar ábécé” keresőszó segítségével nyerhet az ember felvilágosítást erről. Emellet a adatok kódolásába is bevezet.

2. Prímszámok

Megoldás 2.2 $4 + 4 = 8$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.10)

Sárinak igaza volt és a kockák felső lapján 3, 3, és 5 vagy 5, 5 és 3 pötty lehetett.

A három kockával legfeljebb $3 \cdot 6 = 18$-at lehet dobni. Ennél kisebb, de 10-nél nagyobb törzsszámok: 11 és 13. A 11 három törzsszám összegeként csak mint $3+3+5$ kapható, a 13 pedig mint $5+5+3$. Más megoldás nincs.

Megoldás 2.3 20 pont

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181
191	193	197	199		

Megoldás 2.4 12 pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.5)

Az ötjegyű szám: 23572. Az egyjegyű törzsszámok: 2, 3, 5, 7 összege 17, és ha közülük a 2-t adjuk a 17-hez, csak akkor jutunk törzsszámhoz. Az **MA** csak 23 lehet, mert sem 25, sem 27 nem prímszám. Tehát **M** = 2, **A** = 3. Az **MLO** vagy 257 vagy 275 lehetne, de 275 nem törzsszám, ezért **L** = 5, **O** = 7.

Megoldás 2.5 2 pont/db

$$352 = 2^5 \cdot 11$$
$$204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17$$
$$1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$108 = 2^2 \cdot 3^3$$
$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$68 = 2^2 \cdot 17$$
$$12880 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23$$
$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$532 = 2^2 \cdot 7 \cdot 19$$
$$2850 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 19$$

$$16 = 2^4$$
$$900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$
$$5100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17$$
$$432 = 2^4 \cdot 3^3$$
$$312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$$
$$51870 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$$
$$1190 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$$
$$1144 = 2^3 \cdot 11 \cdot 13$$
$$112 = 2^4 \cdot 7$$
$$102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$$

Megoldás 2.6

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.27)

Egy kész törzszsámtáblázat segítségével (lásd Feladat 2.3) könnyen megoldhatjuk a feladatot – azonban e nélkül is célhoz érhetünk.

Az *a)* kérdésre a választ megtaláljuk a *Prímszámok* segédanyag *Eratosztenész szitája* című fejezetében. De a következőképpen is gondolkodhatunk: jelöljük n-nel a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ számot, ekkor az $n+2$, $n+3$, $n+4$, ..., $n+11$ tíz egymást

követő szám között nincs prímszám, hiszen mindegyiknek van 1-nél nagyobb és nála kisebb osztója, mert mindegyik osztható a 2, 3, 5, 7, 11 törzsszámok valamelyikével. A prímszámtáblázatból azt olvashatjuk ki, hogy először a 114-gyel kezdődő 10 (13) egymást követő szám között nem találunk prímet. 3 pont

b) Például: $48, 49, 50, 51, 52, \underline{53}, 54, 55, 56, 57$; 3 pont

c) Például: $\underline{19}, 20, 21, 22, \underline{23}, 24, 25, 26, 57, 28$; 3 pont

d) Például: $\underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12, \underline{13}, 14, 15, 16$; 3 pont

e) Például: $\underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12$. 3 pont

Öt prímszám is előfordulhat tíz egymást követő szám között: $\underline{2}, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}$, de ennél több nem, hiszen a 2-nél nagyobb páros számok nem törzsszámok és tíz egymást követő szám között öt páros van. 3 pont

Hosszúhetény, 2019. április 14.

Beadandó dolgozat megoldások

ötödik osztály, 2019. április, 3/12

1. Összeadás és kivonás

Megoldás 1.2 $2 \cdot 5 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.17)

770 és 77. Ha a kisebbik szám x, akkor a nagyobb $10x$. Márpedig $x + 10x = 11x$, és így $11x = 847$, amiből $x = 77$.

A feladat rendesen valószínűleg kevesebbet érne, de a cél a magasabb pontszámmal most az, hogy motiváljon arra, hogy foglalkozzanak vele, ami viszont előkészíti az egyenlettel való megoldás és így az egyenletek bemutatását.

Megoldás 1.3 2 pont/db

$$6496 + 5889 = 12385 \qquad 3663 + 994059 = 997722$$
$$86854 + 43404 = 130258 \qquad 32077 + 71979 = 104056$$
$$82993 + 168358 = 251351 \qquad 317416 + 81793 = 399209$$
$$78247 + 2241 = 80488 \qquad 299457 + 46568 = 346025$$
$$40993 + 69584 = 110577 \qquad 4151 + 90199 = 94350$$
$$38467 - 32523 = 5944 \qquad 86753 - 79973 = 6780$$
$$89982 - 75832 = 14150 \qquad 559601 - 48053 = 511548$$
$$41464 - 33330 = 8134 \qquad 56272 - 8299 = 47973$$
$$65836 - 8941 = 56895 \qquad 40958 - 21573 = 19385$$
$$65735 - 54315 = 11420 \qquad 134506 - 88419 = 46087$$

Megoldás 1.4 2 pont/db

$$62 + (-9) + (-36) = 17 \qquad (-72) + 0 + 65 = -7$$
$$8 + (-202) - 61 = -255 \qquad (-26) + (-89) + (-63) = -178$$
$$(-35) - 5 + (-66) = -106 \qquad 172 + 68 + (-873) = -633$$
$$2 - (-816) + 0 = 818 \qquad 7 - (-227) - 17 = 217$$
$$79 - (-8) - 94 = -7 \qquad (-13) + (-44) + (-62) = -119$$

Megoldás 1.5 $5 \cdot 2 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.9)

Mivel:

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{B}+\mathbf{B}<19, & \text{azért} & \mathbf{A}=1; & \\
\mathbf{E}+\mathbf{E}=\mathbf{E}, & \text{azért} & \mathbf{E}=0; & \\
\mathbf{E}=0, & \text{azért} & \mathbf{B}+\mathbf{B}=10 \quad \text{és} & \mathbf{B}=5; \\
\mathbf{C}+\mathbf{A}=5, & \text{azért} & \mathbf{C}=4; & \\
\mathbf{C}=4, & \text{azért} & \mathbf{D}+\mathbf{D}=4 \quad \text{és} & \mathbf{D}=2.
\end{array}$$

Az összeadás tehát:

$$\begin{array}{r} 5240 \\ \underline{+5210} \\ 10450 \end{array}$$

Megoldás 1.6 20 pont

A megoldás 5050. Egy Gaussról szóló híres történet, amely a szájhagyomány útján átalakult, arról szól, hogy Gauss általános iskolai tanára, J. G. Büttner diákjait azzal akarta lefoglalni, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss mindenki megdöbbenésére másodpercek alatt előrukkolt a helyes megoldással, megvillantva matematikai éleselméjűségét: a számsor alá visszafele leírta a számokat, majd az oszlopokat összeadta, így azonos összegeket kapott:

$$1+100=2+99=3+98=...=50+51=101.$$

Ez összesen 50 darab számpárt jelentett, és így $50\cdot 101=5050$.

A 20 pont a fáradságos munkát vagy a találékonyságot hivatott díjazni, valamint motivál a feladat elvégzésére és ezzel megágyaz a fenti történet és egyúttal a számtani sorok bemutatásának.

Megoldás 1.7 10 pont

A = 1, Á = 2, B = 3, C = 4, Cs = 5, D = 6, Dz = 7, Dzs = 8, E = 9, É = 10, F = 11, G = 12, Gy = 13, H = 14, I = 15, Í = 16, J = 17, K = 18, L = 19, Ly = 20, M = 21, N = 22, Ny = 23, O = 24, Ó = 25, Ö = 26, Ő = 27, P = 28, Q = 29, R = 30, S = 31, Sz = 32, T = 33, Ty = 34, U = 35, Ú = 36, Ü = 37, Ű = 38, V = 39, W = 40, X = 41, Y = 42, Z = 43, Zs = 44.

A feladat burkoltan az is, hogy megtanuljuk, hogy mi a különbség a 40 betűs magyar ábécé és a 44 betűs kiterjesztett magyar ábécé között. Ez utóbbi tartalmazza a Q, W, X, Y betűket is. Az interneten a ,,magyar ábécé'' keresőszó segítségével nyerhet az ember felvilágosítást erről. Emellet a adatok kódolásába is bevezet.

2. Prímszámok

Megoldás 2.2 $4+4=8$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.10)

Sárinak igaza volt és a kockák felső lapján 3, 3, és 5 vagy 5, 5 és 3 pötty lehetett.

A három kockával legfeljebb $3 \cdot 6 = 18$-at lehet dobni. Ennél kisebb, de 10-nél nagyobb törzsszámok: 11 és 13. A 11 három törzsszám összegeként csak mint $3{+}3{+}5$ kapható, a 13 pedig mint $5 + 5 + 3$. Más megoldás nincs.

Megoldás 2.3 20 pont

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181
191	193	197	199		

Megoldás 2.4 12 pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.5)

Az ötjegyű szám: 23572. Az egyjegyű törzsszámok: 2, 3, 5, 7 összege 17, és ha közülük a 2-t adjuk a 17-hez, csak akkor jutunk törzsszámhoz. Az **MA** csak 23 lehet, mert sem 25, sem 27 nem prímszám. Tehát $\mathbf{M} = 2$, $\mathbf{A} = 3$. Az **MLO** vagy 257 vagy 275 lehetne, de 275 nem törzsszám, ezért $\mathbf{L} = 5$, $\mathbf{O} = 7$.

Megoldás 2.5 2 pont/db

$$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$12 = 2^2 \cdot 3$$
$$1210 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2$$
$$1755 = 3^3 \cdot 5 \cdot 13$$
$$2178 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$$
$$276 = 2^2 \cdot 3 \cdot 23$$
$$40 = 2^3 \cdot 5$$
$$144 = 2^4 \cdot 3^2$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$
$$25740 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$$
$$11220 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$$
$$744 = 2^3 \cdot 3 \cdot 31$$
$$48 = 2^4 \cdot 3$$
$$176 = 2^4 \cdot 11$$
$$8 = 2^3$$
$$696 = 2^3 \cdot 3 \cdot 29$$
$$45 = 3^2 \cdot 5$$
$$990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

Megoldás 2.6

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.27)

Egy kész törzszsámtáblázat segítségével (lásd Feladat 2.3) könnyen megoldhatjuk a feladatot – azonban e nélkül is célhoz érhetünk.

Az *a)* kérdésre a választ megtaláljuk a *Prímszámok* segédanyag *Eratosztenész szitája* című fejezetében. De a következőképpen is gondolkodhatunk: jelöljük n-nel a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ számot, ekkor az $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, ..., $n + 11$ tíz egymást

követő szám között nincs prímszám, hiszen mindegyiknek van 1-nél nagyobb és nála kisebb osztója, mert mindegyik osztható a 2, 3, 5, 7, 11 törzsszámok valamelyikével. A prímszámtáblázatból azt olvashatjuk ki, hogy először a 114-gyel kezdődő 10 (13) egymást követő szám között nem találunk prímet. 3 pont

b) Például: $48, 49, 50, 51, 52, \underline{53}, 54, 55, 56, 57$; 3 pont

c) Például: $\underline{19}, 20, 21, 22, \underline{23}, 24, 25, 26, 57, 28$; 3 pont

d) Például: $\underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12, \underline{13}, 14, 15, 16$; 3 pont

e) Például: $\underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12$. 3 pont

Öt prímszám is előfordulhat tíz egymást követő szám között: $\underline{2}, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}$, de ennél több nem, hiszen a 2-nél nagyobb páros számok nem törzsszámok és tíz egymást követő szám között öt páros van. 3 pont

Hosszúhetény, 2019. április 14.

Beadandó dolgozat megoldások

ötödik osztály, 2019. április, 4/12

1. Összeadás és kivonás

Megoldás 1.2 $2 \cdot 5 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.17)

770 és 77. Ha a kisebbik szám x, akkor a nagyobb $10x$. Márpedig $x + 10x = 11x$, és így $11x = 847$, amiből $x = 77$.

A feladat rendesen valószínűleg kevesebbet érne, de a cél a magasabb pontszámmal most az, hogy motiváljon arra, hogy foglalkozzanak vele, ami viszont előkészíti az egyenlettel való megoldás és így az egyenletek bemutatását.

Megoldás 1.3 2 pont/db

$$38647 + 32499 = 71146$$
$$26801 + 51596 = 78397$$
$$7569 + 867378 = 874947$$
$$6225 + 8757 = 14982$$
$$30922 + 6891 = 37813$$
$$682380 - 5598 = 676782$$
$$674265 - 17731 = 656534$$
$$7871 - 7700 = 171$$
$$165252 - 77773 = 87479$$
$$44171 - 2742 = 41429$$

$$24084 + 79963 = 104047$$
$$343832 + 92931 = 436763$$
$$54406 + 9989 = 64395$$
$$6749 + 73546 = 80295$$
$$631073 + 25041 = 656114$$
$$41837 - 5114 = 36723$$
$$31398 - 5461 = 25937$$
$$115147 - 81878 = 33269$$
$$315012 - 23964 = 291048$$
$$105798 - 23647 = 82151$$

Megoldás 1.4 2 pont/db

$$(-28) + (-54) - 65 = -147$$
$$327 - 0 - 664 = -337$$
$$77 - 10 - (-42) = 109$$
$$73 - (-167) + 6 = 246$$
$$(-57) + 14 + 1 = -42$$

$$(-46) + (-215) + (-2) = -263$$
$$(-87) - 6 - 51 = -144$$
$$33 + (-58) + (-390) = -415$$
$$55 - 12 + 58 = 101$$
$$(-86) - 8 + (-44) = -138$$

Megoldás 1.5 $5 \cdot 2 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.9)

Mivel:

$$\begin{array}{llllll}
\mathbf{B}+\mathbf{B}<19, & \text{azért} & \mathbf{A}=1; & & \\
\mathbf{E}+\mathbf{E}=\mathbf{E}, & \text{azért} & \mathbf{E}=0; & & \\
\mathbf{E}=0, & \text{azért} & \mathbf{B}+\mathbf{B}=10 & \text{és} & \mathbf{B}=5; \\
\mathbf{C}+\mathbf{A}=5, & \text{azért} & \mathbf{C}=4; & & \\
\mathbf{C}=4, & \text{azért} & \mathbf{D}+\mathbf{D}=4 & \text{és} & \mathbf{D}=2.
\end{array}$$

Az összeadás tehát:

$$\begin{array}{r}
5240 \\
\underline{+5210} \\
10450
\end{array}$$

Megoldás 1.6 20 pont

A megoldás 5050. Egy Gaussról szóló híres történet, amely a szájhagyomány útján átalakult, arról szól, hogy Gauss általános iskolai tanára, J. G. Büttner diákjait azzal akarta lefoglalni, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss mindenki megdöbbenésére másodpercek alatt előrukkolt a helyes megoldással, megvillantva matematikai éleselméjűségét: a számsor alá visszafele leírta a számokat, majd az oszlopokat összeadta, így azonos összegeket kapott:

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = ... = 50 + 51 = 101.$$

Ez összesen 50 darab számpárt jelentett, és így $50 \cdot 101 = 5050$.

A 20 pont a fáradságos munkát vagy a találékonyságot hivatott díjazni, valamint motivál a feladat elvégzésére és ezzel megágyaz a fenti történet és egyúttal a számtani sorok bemutatásának.

Megoldás 1.7 10 pont

A = 1, Á = 2, B = 3, C = 4, Cs = 5, D = 6, Dz = 7, Dzs = 8, E = 9, É = 10, F = 11, G = 12, Gy = 13, H = 14, I = 15, Í = 16, J = 17, K = 18, L = 19, Ly = 20, M = 21, N = 22, Ny = 23, O = 24, Ó = 25, Ö = 26, Ő = 27, P = 28, Q = 29, R = 30, S = 31, Sz = 32, T = 33, Ty = 34, U = 35, Ú = 36, Ü = 37, Ű = 38, V = 39, W = 40, X = 41, Y = 42, Z = 43, Zs = 44.

A feladat burkoltan az is, hogy megtanuljuk, hogy mi a különbség a 40 betűs magyar ábécé és a 44 betűs kiterjesztett magyar ábécé között. Ez utóbbi tartalmazza a Q, W, X, Y betűket is. Az interneten a ,,magyar ábécé'' keresőszó segítségével nyerhet az ember felvilágosítást erről. Emellet a adatok kódolásába is bevezet.

2. Prímszámok

Megoldás 2.2 $4 + 4 = 8$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.10)

Sárinak igaza volt és a kockák felső lapján 3, 3, és 5 vagy 5, 5 és 3 pötty lehetett.

A három kockával legfeljebb $3 \cdot 6 = 18$-at lehet dobni. Ennél kisebb, de 10-nél nagyobb törzsszámok: 11 és 13. A 11 három törzsszám összegeként csak mint 3+3+5 kapható, a 13 pedig mint $5 + 5 + 3$. Más megoldás nincs.

Megoldás 2.3 20 pont

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181
191	193	197	199		

Megoldás 2.4 12 pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.5)

Az ötjegyű szám: 23572. Az egyjegyű törzsszámok: 2, 3, 5, 7 összege 17, és ha közülük a 2-t adjuk a 17-hez, csak akkor jutunk törzsszámhoz. Az **MA** csak 23 lehet, mert sem 25, sem 27 nem prímszám. Tehát $\mathbf{M} = 2$, $\mathbf{A} = 3$. Az **MLO** vagy 257 vagy 275 lehetne, de 275 nem törzsszám, ezért $\mathbf{L} = 5$, $\mathbf{O} = 7$.

Megoldás 2.5 2 pont/db

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$72930 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$$
$$112840 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 31$$
$$770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$
$$12 = 2^2 \cdot 3$$
$$18600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 31$$
$$200 = 2^3 \cdot 5^2$$
$$88 = 2^3 \cdot 11$$
$$3404 = 2^2 \cdot 23 \cdot 37$$
$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$64 = 2^6$$
$$56 = 2^3 \cdot 7$$
$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$
$$5104 = 2^4 \cdot 11 \cdot 29$$
$$912 = 2^4 \cdot 3 \cdot 19$$
$$13195 = 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$$
$$399 = 3 \cdot 7 \cdot 19$$
$$48 = 2^4 \cdot 3$$
$$13776 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 41$$
$$616 = 2^3 \cdot 7 \cdot 11$$

Megoldás 2.6

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.27)

Egy kész törzszsámtáblázat segítségével (lásd Feladat 2.3) könnyen megoldhatjuk a feladatot – azonban e nélkül is célhoz érhetünk.

Az *a)* kérdésre a választ megtaláljuk a *Prímszámok* segédanyag *Eratosztenész szitája* című fejezetében. De a következőképpen is gondolkodhatunk: jelöljük n-nel a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ számot, ekkor az $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, ..., $n + 11$ tíz egymást

követő szám között nincs prímszám, hiszen mindegyiknek van 1-nél nagyobb és nála kisebb osztója, mert mindegyik osztható a 2, 3, 5, 7, 11 törzsszámok valamelyikével. A prímszámtáblázatból azt olvashatjuk ki, hogy először a 114-gyel kezdődő 10 (13) egymást követő szám között nem találunk prímet. 3 pont

b) Például: $48, 49, 50, 51, 52, \underline{53}, 54, 55, 56, 57$; 3 pont

c) Például: $\underline{19}, 20, 21, 22, \underline{23}, 24, 25, 26, 57, 28$; 3 pont

d) Például: $\underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12, \underline{13}, 14, 15, 16$; 3 pont

e) Például: $\underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12$. 3 pont

Öt prímszám is előfordulhat tíz egymást követő szám között: $\underline{2}, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}$, de ennél több nem, hiszen a 2-nél nagyobb páros számok nem törzsszámok és tíz egymást követő szám között öt páros van. 3 pont

Hosszúhetény, 2019. április 14.

Beadandó dolgozat megoldások

ötödik osztály, 2019. április, 5/12

1. Összeadás és kivonás

Megoldás 1.2 $2 \cdot 5 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.17)

770 és 77. Ha a kisebbik szám x, akkor a nagyobb $10x$. Márpedig $x + 10x = 11x$, és így $11x = 847$, amiből $x = 77$.

A feladat rendesen valószínűleg kevesebbet érne, de a cél a magasabb pontszámmal most az, hogy motiváljon arra, hogy foglalkozzanak vele, ami viszont előkészíti az egyenlettel való megoldás és így az egyenletek bemutatását.

Megoldás 1.3 2 pont/db

$$317554 + 61531 = 379085$$
$$28777 + 68531 = 97308$$
$$98621 + 602043 = 700664$$
$$15775 + 2524 = 18299$$
$$6228 + 16556 = 22784$$
$$732201 - 3230 = 728971$$
$$6590 - 6210 = 380$$
$$723790 - 92424 = 631366$$
$$183084 - 91390 = 91694$$
$$6283 - 2833 = 3450$$

$$94765 + 73582 = 168347$$
$$35118 + 7781 = 42899$$
$$99602 + 18492 = 118094$$
$$30531 + 9328 = 39859$$
$$443550 + 1824 = 445374$$
$$63088 - 30729 = 32359$$
$$10601 - 9330 = 1271$$
$$89164 - 4137 = 85027$$
$$630265 - 84187 = 546078$$
$$89768 - 74068 = 15700$$

Megoldás 1.4 2 pont/db

$$(-82) - (-25) + (-21) = -78$$
$$(-29) + 414 + 95 = 480$$
$$90 + (-86) + (-4) = 0$$
$$71 - 245 - 0 = -174$$
$$0 - 57 - 34 = -91$$

$$6 + (-517) + 21 = -490$$
$$298 + 30 - 143 = 185$$
$$(-1) - (-94) - (-72) = 165$$
$$2 - 16 - (-526) = 512$$
$$(-5) + 12 - 69 = -62$$

Megoldás 1.5 $5 \cdot 2 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.9)

Mivel:

$$\begin{array}{llllll}
\mathbf{B}+\mathbf{B}<19, & \text{azért} & \mathbf{A}=1; & & \\
\mathbf{E}+\mathbf{E}=\mathbf{E}, & \text{azért} & \mathbf{E}=0; & & \\
\mathbf{E}=0, & \text{azért} & \mathbf{B}+\mathbf{B}=10 & \text{és} & \mathbf{B}=5; \\
\mathbf{C}+\mathbf{A}=5, & \text{azért} & \mathbf{C}=4; & & \\
\mathbf{C}=4, & \text{azért} & \mathbf{D}+\mathbf{D}=4 & \text{és} & \mathbf{D}=2.
\end{array}$$

Az összeadás tehát:

$$\begin{array}{r}
5240 \\
\underline{+5210} \\
10450
\end{array}$$

Megoldás 1.6 20 pont

A megoldás 5050. Egy Gaussról szóló híres történet, amely a szájhagyomány útján átalakult, arról szól, hogy Gauss általános iskolai tanára, J. G. Büttner diákjait azzal akarta lefoglalni, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss mindenki megdöbbenésére másodpercek alatt előrukkolt a helyes megoldással, megvillantva matematikai éleselméjűségét: a számsor alá visszafele leírta a számokat, majd az oszlopokat összeadta, így azonos összegeket kapott:

$$1+100=2+99=3+98=...=50+51=101.$$

Ez összesen 50 darab számpárt jelentett, és így $50 \cdot 101 = 5050$.

A 20 pont a fáradságos munkát vagy a találékonyságot hivatott díjazni, valamint motivál a feladat elvégzésére és ezzel megágyaz a fenti történet és egyúttal a számtani sorok bemutatásának.

Megoldás 1.7 10 pont

A = 1, Á = 2, B = 3, C = 4, Cs = 5, D = 6, Dz = 7, Dzs = 8, E = 9, É = 10, F = 11, G = 12, Gy = 13, H = 14, I = 15, Í = 16, J = 17, K = 18, L = 19, Ly = 20, M = 21, N = 22, Ny = 23, O = 24, Ó = 25, Ö = 26, Ő = 27, P = 28, Q = 29, R = 30, S = 31, Sz = 32, T = 33, Ty = 34, U = 35, Ú = 36, Ü = 37, Ű = 38, V = 39, W = 40, X = 41, Y = 42, Z = 43, Zs = 44.

A feladat burkoltan az is, hogy megtanuljuk, hogy mi a különbség a 40 betűs magyar ábécé és a 44 betűs kiterjesztett magyar ábécé között. Ez utóbbi tartalmazza a Q, W, X, Y betűket is. Az interneten a ,,magyar ábécé'' keresőszó segítségével nyerhet az ember felvilágosítást erről. Emellet a adatok kódolásába is bevezet.

2. Prímszámok

Megoldás 2.2 $4+4=8$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.10)

Sárinak igaza volt és a kockák felső lapján 3, 3, és 5 vagy 5, 5 és 3 pötty lehetett.

A három kockával legfeljebb $3 \cdot 6 = 18$-at lehet dobni. Ennél kisebb, de 10-nél nagyobb törzsszámok: 11 és 13. A 11 három törzsszám összegeként csak mint $3+3+5$ kapható, a 13 pedig mint $5 + 5 + 3$. Más megoldás nincs.

Megoldás 2.3 20 pont

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181
191	193	197	199		

Megoldás 2.4 12 pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.5)

Az ötjegyű szám: 23572. Az egyjegyű törzsszámok: 2, 3, 5, 7 összege 17, és ha közülük a 2-t adjuk a 17-hez, csak akkor jutunk törzsszámhoz. Az **MA** csak 23 lehet, mert sem 25, sem 27 nem prímszám. Tehát $\mathbf{M} = 2$, $\mathbf{A} = 3$. Az **MLO** vagy 257 vagy 275 lehetne, de 275 nem törzsszám, ezért $\mathbf{L} = 5$, $\mathbf{O} = 7$.

Megoldás 2.5 2 pont/db

$124 = 2^2 \cdot 31$
$132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$
$88 = 2^3 \cdot 11$
$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
$96 = 2^5 \cdot 3$
$64 = 2^6$
$72 = 2^3 \cdot 3^2$
$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$
$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$
$1815 = 3 \cdot 5 \cdot 11^2$

$280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$
$24 = 2^3 \cdot 3$
$1672 = 2^3 \cdot 11 \cdot 19$
$2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
$10472 = 2^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$
$80 = 2^4 \cdot 5$
$3420 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19$
$48 = 2^4 \cdot 3$
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
$8 = 2^3$

Megoldás 2.6

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.27)

Egy kész törzszsámtáblázat segítségével (lásd Feladat 2.3) könnyen megoldhatjuk a feladatot – azonban e nélkül is célhoz érhetünk.

Az *a)* kérdésre a választ megtaláljuk a *Prímszámok* segédanyag *Eratosztenész szitája* című fejezetében. De a következőképpen is gondolkodhatunk: jelöljük n-nel a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ számot, ekkor az $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, ..., $n + 11$ tíz egymást

követő szám között nincs prímszám, hiszen mindegyiknek van 1-nél nagyobb és nála kisebb osztója, mert mindegyik osztható a 2, 3, 5, 7, 11 törzsszámok valamelyikével. A prímszámtáblázatból azt olvashatjuk ki, hogy először a 114-gyel kezdődő 10 (13) egymást követő szám között nem találunk prímet. 3 pont

b) Például: $48, 49, 50, 51, 52, \underline{53}, 54, 55, 56, 57$; 3 pont

c) Például: $\underline{19}, 20, 21, 22, \underline{23}, 24, 25, 26, 57, 28$; 3 pont

d) Például: $\underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12, \underline{13}, 14, 15, 16$; 3 pont

e) Például: $\underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12$. 3 pont

Öt prímszám is előfordulhat tíz egymást követő szám között: $\underline{2}, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}$, de ennél több nem, hiszen a 2-nél nagyobb páros számok nem törzsszámok és tíz egymást követő szám között öt páros van. 3 pont

Hosszúhetény, 2019. április 14.

Beadandó dolgozat megoldások

ötödik osztály, 2019. április, 6/12

1. Összeadás és kivonás

Megoldás 1.2 $2 \cdot 5 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.17)

770 és 77. Ha a kisebbik szám x, akkor a nagyobb $10x$. Márpedig $x + 10x = 11x$, és így $11x = 847$, amiből $x = 77$.

A feladat rendesen valószínűleg kevesebbet érne, de a cél a magasabb pontszámmal most az, hogy motiváljon arra, hogy foglalkozzanak vele, ami viszont előkészíti az egyenlettel való megoldás és így az egyenletek bemutatását.

Megoldás 1.3 2 pont/db

$$97872 + 88446 = 186318$$
$$189120 + 1768 = 190888$$
$$9432 + 38533 = 47965$$
$$51989 + 5394 = 57383$$
$$40224 + 41449 = 81673$$
$$13974 - 7058 = 6916$$
$$961685 - 19132 = 942553$$
$$563707 - 235894 = 327813$$
$$280906 - 8208 = 272698$$
$$127086 - 73213 = 53873$$

$$496949 + 59998 = 556947$$
$$18740 + 9748 = 28488$$
$$1540 + 84726 = 86266$$
$$647350 + 307445 = 954795$$
$$5398 + 1009 = 6407$$
$$71928 - 7326 = 64602$$
$$504078 - 60835 = 443243$$
$$306908 - 7338 = 299570$$
$$50366 - 8386 = 41980$$
$$849903 - 8650 = 841253$$

Megoldás 1.4 2 pont/db

$$(-43) - 10 - 41 = -94$$
$$88 + 228 - 39 = 277$$
$$(-30) - 33 - 3 = -66$$
$$25 - 779 - (-390) = -364$$
$$(-12) - 37 + (-48) = -97$$

$$(-40) + (-83) - (-95) = -28$$
$$(-98) + 51 + (-98) = -145$$
$$13 - 64 + 96 = 45$$
$$791 + 74 - 157 = 708$$
$$65 - (-593) - (-12) = 670$$

Megoldás 1.5 $5 \cdot 2 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.9)

Mivel:

$$\begin{array}{llllll}
\mathbf{B}+\mathbf{B}<19, & \text{azért} & \mathbf{A}=1; & & \\
\mathbf{E}+\mathbf{E}=\mathbf{E}, & \text{azért} & \mathbf{E}=0; & & \\
\mathbf{E}=0, & \text{azért} & \mathbf{B}+\mathbf{B}=10 & \text{és} & \mathbf{B}=5; \\
\mathbf{C}+\mathbf{A}=5, & \text{azért} & \mathbf{C}=4; & & \\
\mathbf{C}=4, & \text{azért} & \mathbf{D}+\mathbf{D}=4 & \text{és} & \mathbf{D}=2.
\end{array}$$

Az összeadás tehát:

$$\begin{array}{r}
5240 \\
\underline{+5210} \\
10450
\end{array}$$

Megoldás 1.6 20 pont

A megoldás 5050. Egy Gaussról szóló híres történet, amely a szájhagyomány útján átalakult, arról szól, hogy Gauss általános iskolai tanára, J. G. Büttner diákjait azzal akarta lefoglalni, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss mindenki megdöbbenésére másodpercek alatt előrukkolt a helyes megoldással, megvillantva matematikai éleselméjűségét: a számsor alá visszafele leírta a számokat, majd az oszlopokat összeadta, így azonos összegeket kapott:

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = ... = 50 + 51 = 101.$$

Ez összesen 50 darab számpárt jelentett, és így $50 \cdot 101 = 5050$.

A 20 pont a fáradságos munkát vagy a találékonyságot hivatott díjazni, valamint motivál a feladat elvégzésére és ezzel megágyaz a fenti történet és egyúttal a számtani sorok bemutatásának.

Megoldás 1.7 10 pont

A = 1, Á = 2, B = 3, C = 4, Cs = 5, D = 6, Dz = 7, Dzs = 8, E = 9, É = 10, F = 11, G = 12, Gy = 13, H = 14, I = 15, Í = 16, J = 17, K = 18, L = 19, Ly = 20, M = 21, N = 22, Ny = 23, O = 24, Ó = 25, Ö = 26, Ő = 27, P = 28, Q = 29, R = 30, S = 31, Sz = 32, T = 33, Ty = 34, U = 35, Ú = 36, Ü = 37, Ű = 38, V = 39, W = 40, X = 41, Y = 42, Z = 43, Zs = 44.

A feladat burkoltan az is, hogy megtanuljuk, hogy mi a különbség a 40 betűs magyar ábécé és a 44 betűs kiterjesztett magyar ábécé között. Ez utóbbi tartalmazza a Q, W, X, Y betűket is. Az interneten a ,,magyar ábécé'' keresőszó segítségével nyerhet az ember felvilágosítást erről. Emellet a adatok kódolásába is bevezet.

2. Prímszámok

Megoldás 2.2 $4 + 4 = 8$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.10)

Sárinak igaza volt és a kockák felső lapján 3, 3, és 5 vagy 5, 5 és 3 pötty lehetett.

A három kockával legfeljebb $3 \cdot 6 = 18$-at lehet dobni. Ennél kisebb, de 10-nél nagyobb törzsszámok: 11 és 13. A 11 három törzsszám összegeként csak mint 3+3+5 kapható, a 13 pedig mint $5 + 5 + 3$. Más megoldás nincs.

Megoldás 2.3 20 pont

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181
191	193	197	199		

Megoldás 2.4 12 pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.5)

Az ötjegyű szám: 23572. Az egyjegyű törzsszámok: 2, 3, 5, 7 összege 17, és ha közülük a 2-t adjuk a 17-hez, csak akkor jutunk törzsszámhoz. Az **MA** csak 23 lehet, mert sem 25, sem 27 nem prímszám. Tehát $\mathbf{M} = 2$, $\mathbf{A} = 3$. Az **MLO** vagy 257 vagy 275 lehetne, de 275 nem törzsszám, ezért $\mathbf{L} = 5$, $\mathbf{O} = 7$.

Megoldás 2.5 2 pont/db

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$936 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$$
$$1560 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$$
$$8 = 2^3$$
$$16 = 2^4$$
$$1452 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11^2$$
$$28 = 2^2 \cdot 7$$
$$152 = 2^3 \cdot 19$$
$$132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$$
$$20 = 2^2 \cdot 5$$

$$32 = 2^5$$
$$7068 = 2^2 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 31$$
$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17$$
$$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$
$$280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$$
$$112 = 2^4 \cdot 7$$
$$50512 = 2^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 41$$

Megoldás 2.6

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.27)

Egy kész törzsszsámtáblázat segítségével (lásd Feladat 2.3) könnyen megoldhatjuk a feladatot – azonban e nélkül is célhoz érhetünk.

Az *a)* kérdésre a választ megtaláljuk a *Prímszámok* segédanyag *Eratosztenész szitája* című fejezetében. De a következőképpen is gondolkodhatunk: jelöljük n-nel a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ számot, ekkor az $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, ..., $n + 11$ tíz egymást

követő szám között nincs prímszám, hiszen mindegyiknek van 1-nél nagyobb és nála kisebb osztója, mert mindegyik osztható a 2, 3, 5, 7, 11 törzsszámok valamelyikével. A prímszámtáblázatból azt olvashatjuk ki, hogy először a 114-gyel kezdődő 10 (13) egymást követő szám között nem találunk prímet. 3 pont

b) Például: $48, 49, 50, 51, 52, \underline{53}, 54, 55, 56, 57$; 3 pont

c) Például: $\underline{19}, 20, 21, 22, \underline{23}, 24, 25, 26, 57, 28$; 3 pont

d) Például: $\underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12, \underline{13}, 14, 15, 16$; 3 pont

e) Például: $\underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12$. 3 pont

Öt prímszám is előfordulhat tíz egymást követő szám között: $\underline{2}, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}$, de ennél több nem, hiszen a 2-nél nagyobb páros számok nem törzsszámok és tíz egymást követő szám között öt páros van. 3 pont

Hosszúhetény, 2019. április 14.

Beadandó dolgozat megoldások

ötödik osztály, 2019. április, 7/12

1. Összeadás és kivonás

Megoldás 1.2 $2 \cdot 5 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.17)

770 és 77. Ha a kisebbik szám x, akkor a nagyobb $10x$. Márpedig $x + 10x = 11x$, és így $11x = 847$, amiből $x = 77$.

A feladat rendesen valószínűleg kevesebbet érne, de a cél a magasabb pontszámmal most az, hogy motiváljon arra, hogy foglalkozzanak vele, ami viszont előkészíti az egyenlettel való megoldás és így az egyenletek bemutatását.

Megoldás 1.3 2 pont/db

$9993 + 75791 = 85784$	$973854 + 943945 = 1917799$
$30259 + 2717 = 32976$	$180513 + 1748 = 182261$
$3630 + 55206 = 58836$	$4566 + 900205 = 904771$
$7099 + 32374 = 39473$	$92797 + 80887 = 173684$
$13738 + 56527 = 70265$	$2245 + 610578 = 612823$
$337020 + 33523 = 303497$	$6059 - 4789 = 1270$
$58176 - 9523 = 48653$	$755894 - 72182 = 683712$
$723092 - 6477 = 716615$	$773166 - 729825 = 43341$
$285370 - 216769 = 68601$	$58236 - 50801 = 7435$
$39076 - 4654 = 34422$	$26022 - 1325 = 24697$

Megoldás 1.4 2 pont/db

$67 + (-8) + 4 = 63$	$(-52) - 50 - 0 = -102$
$0 + 387 + (-24) = 363$	$494 - (-87) + (-43) = 538$
$(-77) - 1 + (-4) = -82$	$(-7) - (-56) + 15 = 64$
$(-92) + (-27) + (-90) = -209$	$(-44) - (-6) + (-37) = -75$
$632 + (-52) + 5 = 585$	$(-5) + 12 + (-677) = -670$

Megoldás 1.5 $5 \cdot 2 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.9)

Mivel:

$$
\begin{array}{llllll}
\mathbf{B}+\mathbf{B}<19, & \text{azért} & \mathbf{A}=1; & & \\
\mathbf{E}+\mathbf{E}=\mathbf{E}, & \text{azért} & \mathbf{E}=0; & & \\
\mathbf{E}=0, & \text{azért} & \mathbf{B}+\mathbf{B}=10 & \text{és} & \mathbf{B}=5; \\
\mathbf{C}+\mathbf{A}=5, & \text{azért} & \mathbf{C}=4; & & \\
\mathbf{C}=4, & \text{azért} & \mathbf{D}+\mathbf{D}=4 & \text{és} & \mathbf{D}=2.
\end{array}
$$

Az összeadás tehát:

$$
\begin{array}{r}
5240 \\
\underline{+5210} \\
10450
\end{array}
$$

Megoldás 1.6 20 pont

A megoldás 5050. Egy Gaussról szóló híres történet, amely a szájhagyomány útján átalakult, arról szól, hogy Gauss általános iskolai tanára, J. G. Büttner diákjait azzal akarta lefoglalni, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss mindenki megdöbbenésére másodpercek alatt előrukkolt a helyes megoldással, megvillantva matematikai éleselméjűségét: a számsor alá visszafele leírta a számokat, majd az oszlopokat összeadta, így azonos összegeket kapott:

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = ... = 50 + 51 = 101.$$

Ez összesen 50 darab számpárt jelentett, és így $50 \cdot 101 = 5050$.

A 20 pont a fáradságos munkát vagy a találékonyságot hivatott díjazni, valamint motivál a feladat elvégzésére és ezzel megágyaz a fenti történet és egyúttal a számtani sorok bemutatásának.

Megoldás 1.7 10 pont

A = 1, Á = 2, B = 3, C = 4, Cs = 5, D = 6, Dz = 7, Dzs = 8, E = 9, É = 10, F = 11, G = 12, Gy = 13, H = 14, I = 15, Í = 16, J = 17, K = 18, L = 19, Ly = 20, M = 21, N = 22, Ny = 23, O = 24, Ó = 25, Ö = 26, Ő = 27, P = 28, Q = 29, R = 30, S = 31, Sz = 32, T = 33, Ty = 34, U = 35, Ú = 36, Ü = 37, Ű = 38, V = 39, W = 40, X = 41, Y = 42, Z = 43, Zs = 44.

A feladat burkoltan az is, hogy megtanuljuk, hogy mi a különbség a 40 betűs magyar ábécé és a 44 betűs kiterjesztett magyar ábécé között. Ez utóbbi tartalmazza a Q, W, X, Y betűket is. Az interneten a ,,magyar ábécé'' keresőszó segítségével nyerhet az ember felvilágosítást erről. Emellet a adatok kódolásába is bevezet.

2. Prímszámok

Megoldás 2.2 $4 + 4 = 8$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.10)

Sárinak igaza volt és a kockák felső lapján 3, 3, és 5 vagy 5, 5 és 3 pötty lehetett.

A három kockával legfeljebb $3 \cdot 6 = 18$-at lehet dobni. Ennél kisebb, de 10-nél nagyobb törzsszámok: 11 és 13. A 11 három törzsszám összegeként csak mint 3+3+5 kapható, a 13 pedig mint $5 + 5 + 3$. Más megoldás nincs.

Megoldás 2.3 20 pont

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181
191	193	197	199		

Megoldás 2.4 12 pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.5)

Az ötjegyű szám: 23572. Az egyjegyű törzsszámok: 2, 3, 5, 7 összege 17, és ha közülük a 2-t adjuk a 17-hez, csak akkor jutunk törzsszámhoz. Az **MA** csak 23 lehet, mert sem 25, sem 27 nem prímszám. Tehát $\mathbf{M} = 2$, $\mathbf{A} = 3$. Az **MLO** vagy 257 vagy 275 lehetne, de 275 nem törzsszám, ezért $\mathbf{L} = 5$, $\mathbf{O} = 7$.

Megoldás 2.5 2 pont/db

$$8 = 2^3 \qquad 112 = 2^4 \cdot 7$$
$$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \qquad 10296 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13$$
$$63 = 3^2 \cdot 7 \qquad 912 = 2^4 \cdot 3 \cdot 19$$
$$1140 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 \qquad 3040 = 2^5 \cdot 5 \cdot 19$$
$$94710 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 41 \qquad 408 = 2^3 \cdot 3 \cdot 17$$
$$1352 = 2^3 \cdot 13^2 \qquad 4784 = 2^4 \cdot 13 \cdot 23$$
$$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \qquad 20 = 2^2 \cdot 5$$
$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 32200 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 23$$
$$966 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23 \qquad 735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$$
$$6375 = 3 \cdot 5^3 \cdot 17 \qquad 80 = 2^4 \cdot 5$$

Megoldás 2.6

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.27)

Egy kész törzszsámtáblázat segítségével (lásd Feladat 2.3) könnyen megoldhatjuk a feladatot – azonban e nélkül is célhoz érhetünk.

Az *a)* kérdésre a választ megtaláljuk a *Prímszámok* segédanyag *Eratosztenész szitája* című fejezetében. De a következőképpen is gondolkodhatunk: jelöljük n-nel a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ számot, ekkor az $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, ..., $n + 11$ tíz egymást

követő szám között nincs prímszám, hiszen mindegyiknek van 1-nél nagyobb és nála kisebb osztója, mert mindegyik osztható a 2, 3, 5, 7, 11 törzsszámok valamelyikével. A prímszámtáblázatból azt olvashatjuk ki, hogy először a 114-gyel kezdődő 10 (13) egymást követő szám között nem találunk prímet. 3 pont

b) Például: $48, 49, 50, 51, 52, \underline{53}, 54, 55, 56, 57$; 3 pont

c) Például: $\underline{19}, 20, 21, 22, \underline{23}, 24, 25, 26, 57, 28$; 3 pont

d) Például: $\underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12, \underline{13}, 14, 15, 16$; 3 pont

e) Például: $\underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12$. 3 pont

Öt prímszám is előfordulhat tíz egymást követő szám között: $\underline{2}, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}$, de ennél több nem, hiszen a 2-nél nagyobb páros számok nem törzsszámok és tíz egymást követő szám között öt páros van. 3 pont

Hosszúhetény, 2019. április 14.

Beadandó dolgozat megoldások

ötödik osztály, 2019. április, 8/12

1. Összeadás és kivonás

Megoldás 1.2 $2 \cdot 5 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.17)

770 és 77. Ha a kisebbik szám x, akkor a nagyobb $10x$. Márpedig $x + 10x = 11x$, és így $11x = 847$, amiből $x = 77$.

A feladat rendesen valószínűleg kevesebbet érne, de a cél a magasabb pontszámmal most az, hogy motiváljon arra, hogy foglalkozzanak vele, ami viszont előkészíti az egyenlettel való megoldás és így az egyenletek bemutatását.

Megoldás 1.3 2 pont/db

$$93662 + 62727 = 156389$$
$$3793 + 12374 = 16167$$
$$1465 + 91167 = 92632$$
$$97959 + 38524 = 136483$$
$$42808 + 79699 = 122507$$
$$75217 - 46325 = 28892$$
$$477451 - 3457 = 473994$$
$$771484 - 10980 = 760504$$
$$23974 - 14875 = 9099$$
$$57352 - 9721 = 47631$$

$$8688 + 47606 = 56294$$
$$937593 + 54594 = 992187$$
$$41929 + 110039 = 151968$$
$$412354 + 211881 = 624235$$
$$61669 + 475409 = 537078$$
$$92725 - 1127 = 91598$$
$$415794 - 124674 = 291120$$
$$758481 - 32176 = 726305$$
$$60656 - 56982 = 3674$$
$$995633 - 553760 = 441873$$

Megoldás 1.4 2 pont/db

$$9 + (-52) - 280 = -323$$
$$88 + (-92) + (-991) = -995$$
$$306 + (-692) - 0 = -386$$
$$586 - 94 - (-3) = 495$$
$$404 - (-50) + 83 = 537$$

$$(-88) + (-44) + 1 = -131$$
$$4 - (-3) + (-587) = -580$$
$$(-95) + (-39) + 81 = -53$$
$$88 - (-66) - (-584) = 738$$
$$(-850) + 54 + (-66) = -862$$

Megoldás 1.5 $5 \cdot 2 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.9)

Mivel:

$$\begin{array}{llllll}
\mathbf{B}+\mathbf{B}<19, & \text{azért} & \mathbf{A}=1; & & \\
\mathbf{E}+\mathbf{E}=\mathbf{E}, & \text{azért} & \mathbf{E}=0; & & \\
\mathbf{E}=0, & \text{azért} & \mathbf{B}+\mathbf{B}=10 & \text{és} & \mathbf{B}=5; \\
\mathbf{C}+\mathbf{A}=5, & \text{azért} & \mathbf{C}=4; & & \\
\mathbf{C}=4, & \text{azért} & \mathbf{D}+\mathbf{D}=4 & \text{és} & \mathbf{D}=2.
\end{array}$$

Az összeadás tehát:

$$\begin{array}{r} 5240 \\ \underline{+5210} \\ 10450 \end{array}$$

Megoldás 1.6 20 pont

A megoldás 5050. Egy Gaussról szóló híres történet, amely a szájhagyomány útján átalakult, arról szól, hogy Gauss általános iskolai tanára, J. G. Büttner diákjait azzal akarta lefoglalni, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss mindenki megdöbbenésére másodpercek alatt előrukkolt a helyes megoldással, megvillantva matematikai éleselméjűségét: a számsor alá visszafele leírta a számokat, majd az oszlopokat összeadta, így azonos összegeket kapott:

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = ... = 50 + 51 = 101.$$

Ez összesen 50 darab számpárt jelentett, és így $50 \cdot 101 = 5050$.

A 20 pont a fáradságos munkát vagy a találékonyságot hivatott díjazni, valamint motivál a feladat elvégzésére és ezzel megágyaz a fenti történet és egyúttal a számtani sorok bemutatásának.

Megoldás 1.7 10 pont

A = 1, Á = 2, B = 3, C = 4, Cs = 5, D = 6, Dz = 7, Dzs = 8, E = 9, É = 10, F = 11, G = 12, Gy = 13, H = 14, I = 15, Í = 16, J = 17, K = 18, L = 19, Ly = 20, M = 21, N = 22, Ny = 23, O = 24, Ó = 25, Ö = 26, Ő = 27, P = 28, Q = 29, R = 30, S = 31, Sz = 32, T = 33, Ty = 34, U = 35, Ú = 36, Ü = 37, Ű = 38, V = 39, W = 40, X = 41, Y = 42, Z = 43, Zs = 44.

A feladat burkoltan az is, hogy megtanuljuk, hogy mi a különbség a 40 betűs magyar ábécé és a 44 betűs kiterjesztett magyar ábécé között. Ez utóbbi tartalmazza a Q, W, X, Y betűket is. Az interneten a ,,magyar ábécé'' keresőszó segítségével nyerhet az ember felvilágosítást erről. Emellet a adatok kódolásába is bevezet.

2. Prímszámok

Megoldás 2.2 $4 + 4 = 8$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.10)

Sárinak igaza volt és a kockák felső lapján 3, 3, és 5 vagy 5, 5 és 3 pötty lehetett.

A három kockával legfeljebb $3 \cdot 6 = 18$-at lehet dobni. Ennél kisebb, de 10-nél nagyobb törzsszámok: 11 és 13. A 11 három törzsszám összegeként csak mint $3+3+5$ kapható, a 13 pedig mint $5+5+3$. Más megoldás nincs.

Megoldás 2.3 20 pont

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181
191	193	197	199		

Megoldás 2.4 12 pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.5)

Az ötjegyű szám: 23572. Az egyjegyű törzsszámok: 2, 3, 5, 7 összege 17, és ha közülük a 2-t adjuk a 17-hez, csak akkor jutunk törzsszámhoz. Az **MA** csak 23 lehet, mert sem 25, sem 27 nem prímszám. Tehát $\mathbf{M} = 2$, $\mathbf{A} = 3$. Az **MLO** vagy 257 vagy 275 lehetne, de 275 nem törzsszám, ezért $\mathbf{L} = 5$, $\mathbf{O} = 7$.

Megoldás 2.5 2 pont/db

$$350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$$
$$660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$
$$80 = 2^4 \cdot 5$$
$$40 = 2^3 \cdot 5$$
$$496 = 2^4 \cdot 31$$
$$944 = 2^4 \cdot 59$$
$$1624 = 2^3 \cdot 7 \cdot 29$$
$$32 = 2^5$$
$$480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$$
$$132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$$

$$176 = 2^4 \cdot 11$$
$$48 = 2^4 \cdot 3$$
$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$2220 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37$$
$$16 = 2^4$$
$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$11484 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 29$$
$$96 = 2^5 \cdot 3$$
$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$
$$16275 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 31$$

Megoldás 2.6

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.27)

Egy kész törzszsámtáblázat segítségével (lásd Feladat 2.3) könnyen megoldhatjuk a feladatot – azonban e nélkül is célhoz érhetünk.

Az *a)* kérdésre a választ megtaláljuk a *Prímszámok* segédanyag *Eratosztenész szitája* című fejezetében. De a következőképpen is gondolkodhatunk: jelöljük n-nel a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ számot, ekkor az $n+2$, $n+3$, $n+4$, ..., $n+11$ tíz egymást

követő szám között nincs prímszám, hiszen mindegyiknek van 1-nél nagyobb és nála kisebb osztója, mert mindegyik osztható a 2, 3, 5, 7, 11 törzsszámok valamelyikével. A prímszámtáblázatból azt olvashatjuk ki, hogy először a 114-gyel kezdődő 10 (13) egymást követő szám között nem találunk prímet. 3 pont

b) Például: $48, 49, 50, 51, 52, \underline{53}, 54, 55, 56, 57$; 3 pont

c) Például: $\underline{19}, 20, 21, 22, \underline{23}, 24, 25, 26, 57, 28$; 3 pont

d) Például: $\underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12, \underline{13}, 14, 15, 16$; 3 pont

e) Például: $\underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12$. 3 pont

Öt prímszám is előfordulhat tíz egymást követő szám között: $\underline{2}, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}$, de ennél több nem, hiszen a 2-nél nagyobb páros számok nem törzsszámok és tíz egymást követő szám között öt páros van. 3 pont

Hosszúhetény, 2019. április 14.

Beadandó dolgozat megoldások

ötödik osztály, 2019. április, 9/12

1. Összeadás és kivonás

Megoldás 1.2 $2 \cdot 5 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.17)

770 és 77. Ha a kisebbik szám x, akkor a nagyobb $10x$. Márpedig $x + 10x = 11x$, és így $11x = 847$, amiből $x = 77$.

A feladat rendesen valószínűleg kevesebbet érne, de a cél a magasabb pontszámmal most az, hogy motiváljon arra, hogy foglalkozzanak vele, ami viszont előkészíti az egyenlettel való megoldás és így az egyenletek bemutatását.

Megoldás 1.3 2 pont/db

$$39827 + 27531 = 67358$$
$$68179 + 244726 = 312905$$
$$958401 + 5186 = 963587$$
$$48319 + 697364 = 745683$$
$$2409 + 6686 = 9095$$
$$93038 - 36742 = 56296$$
$$36386 - 9325 = 27061$$
$$348484 - 292072 = 56412$$
$$76516 - 1624 = 74892$$
$$593040 - 6438 = 586602$$

$$4451 + 968976 = 973427$$
$$60906 + 51605 = 112511$$
$$6448 + 233870 = 240318$$
$$15637 + 3418 = 19055$$
$$7882 + 25754 = 33636$$
$$899201 - 65490 = 833711$$
$$82585 - 42946 = 39639$$
$$841284 - 9109 = 832175$$
$$74334 - 34925 = 39409$$
$$85381 - 77583 = 7798$$

Megoldás 1.4 2 pont/db

$$(-71) + 6 - (-12) = -53$$
$$(-5) - (-32) - (-679) = 706$$
$$(-57) + (-660) + (-960) = -1677$$
$$(-19) - 18 - 47 = -84$$
$$(-6) - (-40) - (-4) = 38$$

$$(-73) - (-711) - (-4) = 642$$
$$8 - 33 - (-59) = 34$$
$$(-425) + 21 + (-289) = -693$$
$$(-25) + 5 - 67 = -87$$
$$(-99) + (-40) + 15 = -124$$

Megoldás 1.5 $5 \cdot 2 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.9)

Mivel:

$$\begin{array}{llllll}
\mathbf{B}+\mathbf{B}<19, & \text{azért} & \mathbf{A}=1; & & \\
\mathbf{E}+\mathbf{E}=\mathbf{E}, & \text{azért} & \mathbf{E}=0; & & \\
\mathbf{E}=0, & \text{azért} & \mathbf{B}+\mathbf{B}=10 & \text{és} & \mathbf{B}=5; \\
\mathbf{C}+\mathbf{A}=5, & \text{azért} & \mathbf{C}=4; & & \\
\mathbf{C}=4, & \text{azért} & \mathbf{D}+\mathbf{D}=4 & \text{és} & \mathbf{D}=2.
\end{array}$$

Az összeadás tehát:

$$\begin{array}{r} 5240 \\ \underline{+5210} \\ 10450 \end{array}$$

Megoldás 1.6 20 pont

A megoldás 5050. Egy Gaussról szóló híres történet, amely a szájhagyomány útján átalakult, arról szól, hogy Gauss általános iskolai tanára, J. G. Büttner diákjait azzal akarta lefoglalni, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss mindenki megdöbbenésére másodpercek alatt előrukkolt a helyes megoldással, megvillantva matematikai éleselméjűségét: a számsor alá visszafele leírta a számokat, majd az oszlopokat összeadta, így azonos összegeket kapott:

$$1+100=2+99=3+98=...=50+51=101.$$

Ez összesen 50 darab számpárt jelentett, és így $50 \cdot 101 = 5050$.

A 20 pont a fáradságos munkát vagy a találékonyságot hivatott díjazni, valamint motivál a feladat elvégzésére és ezzel megágyaz a fenti történet és egyúttal a számtani sorok bemutatásának.

Megoldás 1.7 10 pont

A = 1, Á = 2, B = 3, C = 4, Cs = 5, D = 6, Dz = 7, Dzs = 8, E = 9, É = 10, F = 11, G = 12, Gy = 13, H = 14, I = 15, Í = 16, J = 17, K = 18, L = 19, Ly = 20, M = 21, N = 22, Ny = 23, O = 24, Ó = 25, Ö = 26, Ő = 27, P = 28, Q = 29, R = 30, S = 31, Sz = 32, T = 33, Ty = 34, U = 35, Ú = 36, Ü = 37, Ű = 38, V = 39, W = 40, X = 41, Y = 42, Z = 43, Zs = 44.

A feladat burkoltan az is, hogy megtanuljuk, hogy mi a különbség a 40 betűs magyar ábécé és a 44 betűs kiterjesztett magyar ábécé között. Ez utóbbi tartalmazza a Q, W, X, Y betűket is. Az interneten a „magyar ábécé'' keresőszó segítségével nyerhet az ember felvilágosítást erről. Emellet a adatok kódolásába is bevezet.

2. Prímszámok

Megoldás 2.2 $4+4=8$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.10)

Sárinak igaza volt és a kockák felső lapján 3, 3, és 5 vagy 5, 5 és 3 pötty lehetett.

A három kockával legfeljebb $3 \cdot 6 = 18$-at lehet dobni. Ennél kisebb, de 10-nél nagyobb törzsszámok: 11 és 13. A 11 három törzsszám összegeként csak mint $3+3+5$ kapható, a 13 pedig mint $5+5+3$. Más megoldás nincs.

Megoldás 2.3 20 pont

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181
191	193	197	199		

Megoldás 2.4 12 pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.5)

Az ötjegyű szám: 23572. Az egyjegyű törzsszámok: 2, 3, 5, 7 összege 17, és ha közülük a 2-t adjuk a 17-hez, csak akkor jutunk törzsszámhoz. Az **MA** csak 23 lehet, mert sem 25, sem 27 nem prímszám. Tehát $\mathbf{M} = 2$, $\mathbf{A} = 3$. Az **MLO** vagy 257 vagy 275 lehetne, de 275 nem törzsszám, ezért $\mathbf{L} = 5$, $\mathbf{O} = 7$.

Megoldás 2.5 2 pont/db

$$352 = 2^5 \cdot 11$$
$$87248 = 2^4 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 41$$
$$2380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$$
$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$
$$6840 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19$$
$$64 = 2^6$$
$$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$
$$40 = 2^3 \cdot 5$$
$$24360 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$$
$$1827 = 3^2 \cdot 7 \cdot 29$$

$$2125 = 5^3 \cdot 17$$
$$4264 = 2^3 \cdot 13 \cdot 41$$
$$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$
$$56 = 2^3 \cdot 7$$
$$48 = 2^4 \cdot 3$$
$$1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$32 = 2^5$$
$$112 = 2^4 \cdot 7$$
$$450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$
$$780 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$$

Megoldás 2.6

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.27)

Egy kész törzszsámtáblázat segítségével (lásd Feladat 2.3) könnyen megoldhatjuk a feladatot – azonban e nélkül is célhoz érhetünk.

Az *a)* kérdésre a választ megtaláljuk a *Prímszámok* segédanyag *Eratosztenész szitája* című fejezetében. De a következőképpen is gondolkodhatunk: jelöljük n-nel a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ számot, ekkor az $n+2$, $n+3$, $n+4$, ..., $n+11$ tíz egymást

követő szám között nincs prímszám, hiszen mindegyiknek van 1-nél nagyobb és nála kisebb osztója, mert mindegyik osztható a 2, 3, 5, 7, 11 törzsszámok valamelyikével. A prímszámtáblázatból azt olvashatjuk ki, hogy először a 114-gyel kezdődő 10 (13) egymást követő szám között nem találunk prímet. 3 pont

b) Például: $48, 49, 50, 51, 52, \underline{53}, 54, 55, 56, 57$; 3 pont

c) Például: $\underline{19}, 20, 21, 22, \underline{23}, 24, 25, 26, 57, 28$; 3 pont

d) Például: $\underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12, \underline{13}, 14, 15, 16$; 3 pont

e) Például: $\underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12$. 3 pont

Öt prímszám is előfordulhat tíz egymást követő szám között: $\underline{2}, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}$, de ennél több nem, hiszen a 2-nél nagyobb páros számok nem törzsszámok és tíz egymást követő szám között öt páros van. 3 pont

Hosszúhetény, 2019. április 14.

Beadandó dolgozat megoldások

ötödik osztály, 2019. április, 10/12

1. Összeadás és kivonás

Megoldás 1.2 $2 \cdot 5 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.17)

770 és 77. Ha a kisebbik szám x, akkor a nagyobb $10x$. Márpedig $x + 10x = 11x$, és így $11x = 847$, amiből $x = 77$.

A feladat rendesen valószínűleg kevesebbet érne, de a cél a magasabb pontszámmal most az, hogy motiváljon arra, hogy foglalkozzanak vele, ami viszont előkészíti az egyenlettel való megoldás és így az egyenletek bemutatását.

Megoldás 1.3 2 pont/db

$$2406 + 53887 = 56293$$
$$71689 + 170310 = 241999$$
$$62445 + 370578 = 433023$$
$$44421 + 7092 = 51513$$
$$57062 + 97454 = 154516$$
$$525493 + 10342 = 515151$$
$$82375 - 29705 = 52670$$
$$38614 - 2304 = 36310$$
$$25286 - 6848 = 18438$$
$$62792 - 1321 = 61471$$

$$334166 + 62249 = 396415$$
$$24792 + 9684 = 34476$$
$$2851 + 3263 = 6114$$
$$87512 + 70974 = 158486$$
$$17147 + 844834 = 861981$$
$$6857 - 2000 = 4857$$
$$770662 - 284530 = 486132$$
$$577518 - 291062 = 286456$$
$$347522 - 1316 = 346206$$
$$3253 - 1666 = 1587$$

Megoldás 1.4 2 pont/db

$$(-4) - 726 - (-165) = -565$$
$$9 + 475 - (-12) = 496$$
$$9 + 613 + 0 = 622$$
$$(-824) + (-96) - (-61) = -859$$
$$952 + (-84) + (-4) = 864$$

$$86 - 8 + (-299) = -221$$
$$22 - (-497) + (-2) = 517$$
$$60 - (-47) - 31 = 76$$
$$(-74) + (-91) + (-12) = -177$$
$$(-69) - (-36) + (-72) = -105$$

Megoldás 1.5 $5 \cdot 2 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.9)

Mivel:

$$\begin{array}{llllll}
\mathbf{B}+\mathbf{B}<19, & \text{azért} & \mathbf{A}=1; & & \\
\mathbf{E}+\mathbf{E}=\mathbf{E}, & \text{azért} & \mathbf{E}=0; & & \\
\mathbf{E}=0, & \text{azért} & \mathbf{B}+\mathbf{B}=10 & \text{és} & \mathbf{B}=5; \\
\mathbf{C}+\mathbf{A}=5, & \text{azért} & \mathbf{C}=4; & & \\
\mathbf{C}=4, & \text{azért} & \mathbf{D}+\mathbf{D}=4 & \text{és} & \mathbf{D}=2.
\end{array}$$

Az összeadás tehát:

$$\begin{array}{r} 5240 \\ \underline{+5210} \\ 10450 \end{array}$$

Megoldás 1.6 20 pont

A megoldás 5050. Egy Gaussról szóló híres történet, amely a szájhagyomány útján átalakult, arról szól, hogy Gauss általános iskolai tanára, J. G. Büttner diákjait azzal akarta lefoglalni, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss mindenki megdöbbenésére másodpercek alatt előrukkolt a helyes megoldással, megvillantva matematikai éleselméjűségét: a számsor alá visszafele leírta a számokat, majd az oszlopokat összeadta, így azonos összegeket kapott:

$$1+100=2+99=3+98=...=50+51=101.$$

Ez összesen 50 darab számpárt jelentett, és így $50\cdot 101=5050$.

A 20 pont a fáradságos munkát vagy a találékonyságot hivatott díjazni, valamint motivál a feladat elvégzésére és ezzel megágyaz a fenti történet és egyúttal a számtani sorok bemutatásának.

Megoldás 1.7 10 pont

A = 1, Á = 2, B = 3, C = 4, Cs = 5, D = 6, Dz = 7, Dzs = 8, E = 9, É = 10, F = 11, G = 12, Gy = 13, H = 14, I = 15, Í = 16, J = 17, K = 18, L = 19, Ly = 20, M = 21, N = 22, Ny = 23, O = 24, Ó = 25, Ö = 26, Ő = 27, P = 28, Q = 29, R = 30, S = 31, Sz = 32, T = 33, Ty = 34, U = 35, Ú = 36, Ü = 37, Ű = 38, V = 39, W = 40, X = 41, Y = 42, Z = 43, Zs = 44.

A feladat burkoltan az is, hogy megtanuljuk, hogy mi a különbség a 40 betűs magyar ábécé és a 44 betűs kiterjesztett magyar ábécé között. Ez utóbbi tartalmazza a Q, W, X, Y betűket is. Az interneten a ,,magyar ábécé'' keresőszó segítségével nyerhet az ember felvilágosítást erről. Emellet a adatok kódolásába is bevezet.

2. Prímszámok

Megoldás 2.2 $4+4=8$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.10)

Sárinak igaza volt és a kockák felső lapján 3, 3, és 5 vagy 5, 5 és 3 pötty lehetett.

A három kockával legfeljebb $3 \cdot 6 = 18$-at lehet dobni. Ennél kisebb, de 10-nél nagyobb törzsszámok: 11 és 13. A 11 három törzsszám összegeként csak mint $3+3+5$ kapható, a 13 pedig mint $5+5+3$. Más megoldás nincs.

Megoldás 2.3 20 pont

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181
191	193	197	199		

Megoldás 2.4 12 pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.5)

Az ötjegyű szám: 23572. Az egyjegyű törzsszámok: 2, 3, 5, 7 összege 17, és ha közülük a 2-t adjuk a 17-hez, csak akkor jutunk törzsszámhoz. Az **MA** csak 23 lehet, mert sem 25, sem 27 nem prímszám. Tehát $\mathbf{M} = 2$, $\mathbf{A} = 3$. Az **MLO** vagy 257 vagy 275 lehetne, de 275 nem törzsszám, ezért $\mathbf{L} = 5$, $\mathbf{O} = 7$.

Megoldás 2.5 2 pont/db

$$32 = 2^5$$
$$204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17$$
$$144 = 2^4 \cdot 3^2$$
$$4025 = 5^2 \cdot 7 \cdot 23$$
$$2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$
$$34580 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$$
$$25259 = 13 \cdot 29 \cdot 67$$
$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$
$$728 = 2^3 \cdot 7 \cdot 13$$
$$64 = 2^6$$

$$9350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 17$$
$$416 = 2^5 \cdot 13$$
$$11600 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 29$$
$$312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$$
$$16 = 2^4$$
$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$14280 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$$
$$61712 = 2^4 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 29$$
$$30184 = 2^3 \cdot 7^3 \cdot 11$$
$$1456 = 2^4 \cdot 7 \cdot 13$$

Megoldás 2.6

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.27)

Egy kész törzszsámtáblázat segítségével (lásd Feladat 2.3) könnyen megoldhatjuk a feladatot – azonban e nélkül is célhoz érhetünk.

Az *a)* kérdésre a választ megtaláljuk a *Prímszámok* segédanyag *Eratosztenész szitája* című fejezetében. De a következőképpen is gondolkodhatunk: jelöljük n-nel a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ számot, ekkor az $n+2$, $n+3$, $n+4$, ..., $n+11$ tíz egymást

követő szám között nincs prímszám, hiszen mindegyiknek van 1-nél nagyobb és nála kisebb osztója, mert mindegyik osztható a 2, 3, 5, 7, 11 törzsszámok valamelyikével. A prímszámtáblázatból azt olvashatjuk ki, hogy először a 114-gyel kezdődő 10 (13) egymást követő szám között nem találunk prímet. 3 pont

b) Például: $48, 49, 50, 51, 52, \underline{53}, 54, 55, 56, 57$; 3 pont

c) Például: $\underline{19}, 20, 21, 22, \underline{23}, 24, 25, 26, 57, 28$; 3 pont

d) Például: $\underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12, \underline{13}, 14, 15, 16$; 3 pont

e) Például: $\underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12.$ 3 pont

Öt prímszám is előfordulhat tíz egymást követő szám között: $\underline{2}, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}$, de ennél több nem, hiszen a 2-nél nagyobb páros számok nem törzsszámok és tíz egymást követő szám között öt páros van. 3 pont

Hosszúhetény, 2019. április 14.

Beadandó dolgozat megoldások

ötödik osztály, 2019. április, 11/12

1. Összeadás és kivonás

Megoldás 1.2 $2 \cdot 5 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.17)

770 és 77. Ha a kisebbik szám x, akkor a nagyobb $10x$. Márpedig $x + 10x = 11x$, és így $11x = 847$, amiből $x = 77$.

A feladat rendesen valószínűleg kevesebbet érne, de a cél a magasabb pontszámmal most az, hogy motiváljon arra, hogy foglalkozzanak vele, ami viszont előkészíti az egyenlettel való megoldás és így az egyenletek bemutatását.

Megoldás 1.3 2 pont/db

$$868467 + 74352 = 942819$$
$$3310 + 32615 = 35925$$
$$10450 + 96798 = 107248$$
$$64577 + 12946 = 77523$$
$$806824 + 8386 = 815210$$
$$950563 - 7747 = 942816$$
$$97233 - 91589 = 5644$$
$$658766 - 8400 = 650366$$
$$13696 - 8438 = 5258$$
$$807271 - 359563 = 447708$$

$$20158 + 86927 = 107085$$
$$10844 + 1852 = 12696$$
$$8151 + 697103 = 705254$$
$$2531 + 34591 = 37122$$
$$95541 + 3490 = 99031$$
$$42140 - 13424 = 28716$$
$$292894 - 18706 = 274188$$
$$51454 - 4837 = 46617$$
$$40981 - 7878 = 33103$$
$$967315 - 5341 = 961974$$

Megoldás 1.4 2 pont/db

$$(-98) - 96 + (-12) = -206$$
$$11 + 33 + 0 = 44$$
$$(-800) + 295 + 592 = 87$$
$$5 + (-39) - 7 = -41$$
$$469 + (-45) - 42 = 382$$

$$(-77) + 51 + 86 = 60$$
$$177 - (-167) + (-84) = 260$$
$$8 + (-40) - 14 = -46$$
$$30 + 54 + (-36) = 48$$
$$(-86) + (-366) + 50 = -402$$

Megoldás 1.5 $5 \cdot 2 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.9)

Mivel:

$$
\begin{array}{llllll}
\mathbf{B}+\mathbf{B}<19, & \text{azért} & \mathbf{A}=1; & & \\
\mathbf{E}+\mathbf{E}=\mathbf{E}, & \text{azért} & \mathbf{E}=0; & & \\
\mathbf{E}=0, & \text{azért} & \mathbf{B}+\mathbf{B}=10 & \text{és} & \mathbf{B}=5; \\
\mathbf{C}+\mathbf{A}=5, & \text{azért} & \mathbf{C}=4; & & \\
\mathbf{C}=4, & \text{azért} & \mathbf{D}+\mathbf{D}=4 & \text{és} & \mathbf{D}=2.
\end{array}
$$

Az összeadás tehát:

$$
\begin{array}{r}
5240 \\
\underline{+5210} \\
10450
\end{array}
$$

Megoldás 1.6 20 pont

A megoldás 5050. Egy Gaussról szóló híres történet, amely a szájhagyomány útján átalakult, arról szól, hogy Gauss általános iskolai tanára, J. G. Büttner diákjait azzal akarta lefoglalni, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss mindenki megdöbbenésére másodpercek alatt előrukkolt a helyes megoldással, megvillantva matematikai éleselméjűségét: a számsor alá visszafele leírta a számokat, majd az oszlopokat összeadta, így azonos összegeket kapott:

$$1+100=2+99=3+98=...=50+51=101.$$

Ez összesen 50 darab számpárt jelentett, és így $50\cdot 101=5050$.

A 20 pont a fáradságos munkát vagy a találékonyságot hivatott díjazni, valamint motivál a feladat elvégzésére és ezzel megágyaz a fenti történet és egyúttal a számtani sorok bemutatásának.

Megoldás 1.7 10 pont

A = 1, Á = 2, B = 3, C = 4, Cs = 5, D = 6, Dz = 7, Dzs = 8, E = 9, É = 10, F = 11, G = 12, Gy = 13, H = 14, I = 15, Í = 16, J = 17, K = 18, L = 19, Ly = 20, M = 21, N = 22, Ny = 23, O = 24, Ó = 25, Ö = 26, Ő = 27, P = 28, Q = 29, R = 30, S = 31, Sz = 32, T = 33, Ty = 34, U = 35, Ú = 36, Ü = 37, Ű = 38, V = 39, W = 40, X = 41, Y = 42, Z = 43, Zs = 44.

A feladat burkoltan az is, hogy megtanuljuk, hogy mi a különbség a 40 betűs magyar ábécé és a 44 betűs kiterjesztett magyar ábécé között. Ez utóbbi tartalmazza a Q, W, X, Y betűket is. Az interneten a ,,magyar ábécé'' keresőszó segítségével nyerhet az ember felvilágosítást erről. Emellet a adatok kódolásába is bevezet.

2. Prímszámok

Megoldás 2.2 $4+4=8$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.10)

Sárinak igaza volt és a kockák felső lapján 3, 3, és 5 vagy 5, 5 és 3 pötty lehetett.

A három kockával legfeljebb $3 \cdot 6 = 18$-at lehet dobni. Ennél kisebb, de 10-nél nagyobb törzsszámok: 11 és 13. A 11 három törzsszám összegeként csak mint $3{+}3{+}5$ kapható, a 13 pedig mint $5 + 5 + 3$. Más megoldás nincs.

Megoldás 2.3 20 pont

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181
191	193	197	199		

Megoldás 2.4 12 pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.5)

Az ötjegyű szám: 23572. Az egyjegyű törzsszámok: 2, 3, 5, 7 összege 17, és ha közülük a 2-t adjuk a 17-hez, csak akkor jutunk törzsszámhoz. Az **MA** csak 23 lehet, mert sem 25, sem 27 nem prímszám. Tehát $\mathbf{M} = 2$, $\mathbf{A} = 3$. Az **MLO** vagy 257 vagy 275 lehetne, de 275 nem törzsszám, ezért $\mathbf{L} = 5$, $\mathbf{O} = 7$.

Megoldás 2.5 2 pont/db

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$
$$12 = 2^2 \cdot 3$$
$$1320 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$
$$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$$
$$1120 = 2^5 \cdot 5 \cdot 7$$
$$74100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 19$$
$$364 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$$
$$18 = 2 \cdot 3^2$$
$$1496 = 2^3 \cdot 11 \cdot 17$$
$$56 = 2^3 \cdot 7$$

$$48 = 2^4 \cdot 3$$
$$10010 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$
$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$28200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 47$$
$$176 = 2^4 \cdot 11$$
$$8 = 2^3$$
$$5698 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37$$
$$224 = 2^5 \cdot 7$$
$$112 = 2^4 \cdot 7$$
$$1104 = 2^4 \cdot 3 \cdot 23$$

Megoldás 2.6

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.27)

Egy kész törzszsámtáblázat segítségével (lásd Feladat 2.3) könnyen megoldhatjuk a feladatot – azonban e nélkül is célhoz érhetünk.

Az *a)* kérdésre a választ megtaláljuk a *Prímszámok* segédanyag *Eratosztenész szitája* című fejezetében. De a következőképpen is gondolkodhatunk: jelöljük n-nel a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ számot, ekkor az $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, ..., $n + 11$ tíz egymást

követő szám között nincs prímszám, hiszen mindegyiknek van 1-nél nagyobb és nála kisebb osztója, mert mindegyik osztható a 2, 3, 5, 7, 11 törzsszámok valamelyikével. A prímszámtáblázatból azt olvashatjuk ki, hogy először a 114-gyel kezdődő 10 (13) egymást követő szám között nem találunk prímet. 3 pont

b) Például: $48, 49, 50, 51, 52, \underline{53}, 54, 55, 56, 57$; 3 pont

c) Például: $\underline{19}, 20, 21, 22, \underline{23}, 24, 25, 26, 57, 28$; 3 pont

d) Például: $\underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12, \underline{13}, 14, 15, 16$; 3 pont

e) Például: $\underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12$. 3 pont

Öt prímszám is előfordulhat tíz egymást követő szám között: $\underline{2}, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}$, de ennél több nem, hiszen a 2-nél nagyobb páros számok nem törzsszámok és tíz egymást követő szám között öt páros van. 3 pont

Hosszúhetény, 2019. április 14.

Beadandó dolgozat megoldások

ötödik osztály, 2019. április, 12/12

1. Összeadás és kivonás

Megoldás 1.2 $2 \cdot 5 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.17)

770 és 77. Ha a kisebbik szám x, akkor a nagyobb $10x$. Márpedig $x + 10x = 11x$, és így $11x = 847$, amiből $x = 77$.

A feladat rendesen valószínűleg kevesebbet érne, de a cél a magasabb pontszámmal most az, hogy motiváljon arra, hogy foglalkozzanak vele, ami viszont előkészíti az egyenlettel való megoldás és így az egyenletek bemutatását.

Megoldás 1.3 2 pont/db

$$9402 + 80662 = 90064 \qquad 34189 + 347684 = 381873$$
$$94892 + 38981 = 133873 \qquad 90675 + 8315 = 98990$$
$$71150 + 4424 = 75574 \qquad 5971 + 322631 = 328602$$
$$148836 + 8828 = 157664 \qquad 3276 + 19417 = 22693$$
$$420066 + 57747 = 477813 \qquad 84964 + 19579 = 104543$$
$$585501 - 57809 = 527692 \qquad 57104 - 6803 = 50301$$
$$90036 - 3758 = 86278 \qquad 61093 - 5518 = 55575$$
$$42541 - 5821 = 36720 \qquad 98522 - 9764 = 88758$$
$$605521 - 3151 = 602370 \qquad 229900 - 6930 = 222970$$
$$515349 - 29739 = 485610 \qquad 502691 - 129695 = 372996$$

Megoldás 1.4 2 pont/db

$$733 + 10 - 13 = 730 \qquad 89 + 94 - 23 = 160$$
$$(-550) - 36 + (-22) = -608 \qquad 23 + (-40) + (-90) = -107$$
$$(-665) + 6 + 3 = -656 \qquad (-54) + 89 - (-55) = 90$$
$$52 + 912 + (-180) = 784 \qquad 26 + (-48) + (-74) = -96$$
$$4 + (-1) - (-25) = 28 \qquad 584 + (-7) - 3 = 574$$

Megoldás 1.5 $5 \cdot 2 = 10$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.2.9)

Mivel:

$$\begin{array}{llllll}
\mathbf{B}+\mathbf{B}<19, & \text{azért} & \mathbf{A}=1; & & \\
\mathbf{E}+\mathbf{E}=\mathbf{E}, & \text{azért} & \mathbf{E}=0; & & \\
\mathbf{E}=0, & \text{azért} & \mathbf{B}+\mathbf{B}=10 & \text{és} & \mathbf{B}=5; \\
\mathbf{C}+\mathbf{A}=5, & \text{azért} & \mathbf{C}=4; & & \\
\mathbf{C}=4, & \text{azért} & \mathbf{D}+\mathbf{D}=4 & \text{és} & \mathbf{D}=2.
\end{array}$$

Az összeadás tehát:

$$\begin{array}{r} 5240 \\ \underline{+5210} \\ 10450 \end{array}$$

Megoldás 1.6 20 pont

A megoldás 5050. Egy Gaussról szóló híres történet, amely a szájhagyomány útján átalakult, arról szól, hogy Gauss általános iskolai tanára, J. G. Büttner diákjait azzal akarta lefoglalni, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss mindenki megdöbbenésére másodpercek alatt előrukkolt a helyes megoldással, megvillantva matematikai éleselméjűségét: a számsor alá visszafele leírta a számokat, majd az oszlopokat összeadta, így azonos összegeket kapott:

$$1+100=2+99=3+98=...=50+51=101.$$

Ez összesen 50 darab számpárt jelentett, és így $50\cdot 101=5050$.

A 20 pont a fáradságos munkát vagy a találékonyságot hivatott díjazni, valamint motivál a feladat elvégzésére és ezzel megágyaz a fenti történet és egyúttal a számtani sorok bemutatásának.

Megoldás 1.7 10 pont

A = 1, Á = 2, B = 3, C = 4, Cs = 5, D = 6, Dz = 7, Dzs = 8, E = 9, É = 10, F = 11, G = 12, Gy = 13, H = 14, I = 15, Í = 16, J = 17, K = 18, L = 19, Ly = 20, M = 21, N = 22, Ny = 23, O = 24, Ó = 25, Ö = 26, Ő = 27, P = 28, Q = 29, R = 30, S = 31, Sz = 32, T = 33, Ty = 34, U = 35, Ú = 36, Ü = 37, Ű = 38, V = 39, W = 40, X = 41, Y = 42, Z = 43, Zs = 44.

A feladat burkoltan az is, hogy megtanuljuk, hogy mi a különbség a 40 betűs magyar ábécé és a 44 betűs kiterjesztett magyar ábécé között. Ez utóbbi tartalmazza a Q, W, X, Y betűket is. Az interneten a ,,magyar ábécé'' keresőszó segítségével nyerhet az ember felvilágosítást erről. Emellet a adatok kódolásába is bevezet.

2. Prímszámok

Megoldás 2.2 $4+4=8$ pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.10)

Sárinak igaza volt és a kockák felső lapján 3, 3, és 5 vagy 5, 5 és 3 pötty lehetett.

A három kockával legfeljebb $3 \cdot 6 = 18$-at lehet dobni. Ennél kisebb, de 10-nél nagyobb törzsszámok: 11 és 13. A 11 három törzsszám összegeként csak mint $3+3+5$ kapható, a 13 pedig mint $5 + 5 + 3$. Más megoldás nincs.

Megoldás 2.3 20 pont

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181
191	193	197	199		

Megoldás 2.4 12 pont

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.5)

Az ötjegyű szám: 23572. Az egyjegyű törzsszámok: 2, 3, 5, 7 összege 17, és ha közülük a 2-t adjuk a 17-hez, csak akkor jutunk törzsszámhoz. Az **MA** csak 23 lehet, mert sem 25, sem 27 nem prímszám. Tehát $\mathbf{M} = 2$, $\mathbf{A} = 3$. Az **MLO** vagy 257 vagy 275 lehetne, de 275 nem törzsszám, ezért $\mathbf{L} = 5$, $\mathbf{O} = 7$.

Megoldás 2.5 2 pont/db

$$432 = 2^4 \cdot 3^3$$
$$348 = 2^2 \cdot 3 \cdot 29$$
$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$250 = 2 \cdot 5^3$$
$$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$
$$56100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 17$$
$$12 = 2^2 \cdot 3$$
$$760 = 2^3 \cdot 5 \cdot 19$$
$$24 = 2^3 \cdot 3$$
$$1064 = 2^3 \cdot 7 \cdot 19$$

$$1452 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11^2$$
$$468 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$$
$$48 = 2^4 \cdot 3$$
$$16 = 2^4$$
$$8364 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 41$$
$$208 = 2^4 \cdot 13$$
$$1716 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$$
$$50 = 2 \cdot 5^2$$
$$8 = 2^3$$
$$44 = 2^2 \cdot 11$$

Megoldás 2.6

Forrás: Imrecze et al.: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (III.1.27)

Egy kész törzszsámtáblázat segítségével (lásd Feladat 2.3) könnyen megoldhatjuk a feladatot – azonban e nélkül is célhoz érhetünk.

Az *a)* kérdésre a választ megtaláljuk a *Prímszámok* segédanyag *Eratosztenész szitája* című fejezetében. De a következőképpen is gondolkodhatunk: jelöljük n-nel a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ számot, ekkor az $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, ..., $n + 11$ tíz egymást

követő szám között nincs prímszám, hiszen mindegyiknek van 1-nél nagyobb és nála kisebb osztója, mert mindegyik osztható a 2, 3, 5, 7, 11 törzsszámok valamelyikével. A prímszámtáblázatból azt olvashatjuk ki, hogy először a 114-gyel kezdődő 10 (13) egymást követő szám között nem találunk prímet. 3 pont

b) Például: $48, 49, 50, 51, 52, \underline{53}, 54, 55, 56, 57$; 3 pont

c) Például: $\underline{19}, 20, 21, 22, \underline{23}, 24, 25, 26, 57, 28$; 3 pont

d) Például: $\underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12, \underline{13}, 14, 15, 16$; 3 pont

e) Például: $\underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12$. 3 pont

Öt prímszám is előfordulhat tíz egymást követő szám között: $\underline{2}, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}$, de ennél több nem, hiszen a 2-nél nagyobb páros számok nem törzsszámok és tíz egymást követő szám között öt páros van. 3 pont

Hosszúhetény, 2019. április 14.