BACHELIER EN INFORMATIQUE, ORIENTATION DÉVELOPPEMENT D'APPLICATIONS

[INAF0001-B-a] Sciences mathématiques 1 – Mathématique pour l'informatique

Vincent Spies
Haute École Robert Schuman

Année académique 2024-2025

1 Logique

1.1 Logique des propositions

1.1.1 Propositions

On appelle une proposition une affirmation qui est soit vraie, soit fausse. La proposition doit être sous la forme d'une phrase déclarative susceptible de n'avoir qu'une seule valeur de vérité. Lesquels des énoncés suivants sont ou ne sont pas des propositions.

1. $3 - 2 = 1$: *Est une proposition*
2. 100 est divisible par 11. *Est une proposition*
3. Mon frère possède une maison. *Est une proposition*.
4. Regarde là-haut! *N'est pas une proposition*
5. Quel jour sommes-nous? *N'est pas une proposition*
6. n est un nombre pair. *Est une proposition*.
7. L'Écosse était indépendante. *Est une proposition*.

1.1.2 Tables de vérité

Si une proposition P est vraie, on lui attribue la valeur 1, sinon 0.

- Si on ne considère qu'une seule proposition, seules deux situations sont possibles, on les liste par un tableau:

P
1
0

- Si on envisage simultanément plusieurs propositions P et Q, 4 situations sont possibles:

P	Q
1	1
1	0
0	1
0	0

On appelle ces tables des **tables de vérité**.

1.1.3 Exercice

Quelles sont toutes les situations possibles de 3 propositions notées P, Q et R?

solution

P	Q	R
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

- 1 proposition: 2^1 = 2 possibilités
- 2 propositions: 2^2 = 4 possibilités
- 3 propositions: 2^3 = 8 possibilités
- 10 propositions: 2^{10} = 1024 possibilités

1.1.4 Opérateurs logiques – Négation et conjonction

- Soit P une proposition. La négation de P, notée $\neg P$, est définie par la table de vérité suivante:

P	$\neg P$
1	0
0	1

- Soient P et Q des propositions, la conjonction de P et Q, notée $P \wedge Q$, est définie par la table de vérité suivante: (le «et»). On appelle la proposition $R : P \wedge Q$

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1.1.5 Opérateurs logiques – Disjonction

- Soient P et Q des propositions, la disjonction de P et Q, notée $P \vee Q$, est définie par la table de vérité suivante:

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Note: On fera attention à l'usage des parenthèses. L'opérateur $\neg$ portera, en l'absence de parenthèses, sur la proposition qui le suit immédiatement.

$\neg Q \vee P \equiv (\neg Q) \vee P \not\equiv \neg(Q \vee P)$

P	Q	¬Q	¬Q v P
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

P	Q	Q v P	¬ (Q v P)
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Exercice Établissez la table de vérité des propositions composées suivantes:

1. $((\neg P) \vee Q) \wedge \neg(P \wedge R)$

solution

P	Q	R	¬P	¬P v Q	P ∧ R	¬(P ∧ R)	(¬P v Q) ∧ ¬(P ∧ R)
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0

1. $(P \wedge \neg(Q \wedge R)) \vee (\neg R)$

solution

P	Q	R	Q ∧ R	¬(Q ∧ R)	P ∧ ¬(Q ∧ R)	¬ R	(P ∧ ¬(Q ∧ R)) ∨ (¬ R)
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0

1.1.6 Autres opérateurs

- L'implication de P vers Q se note $P \Rightarrow Q$. Elle se lit: « Si P, alors Q ». Sa table de vérité est définie comme:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exemple: P: «Il pleut», et Q: «Je prends mon parapluie».

Note. Si $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors on dit que:

- P est une condition suffisante de Q (première ligne de la table).
- Q est une condition nécessaire de P (dernière ligne de la table).

- La **réciproque** de $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$.
- La **contraposée** de $P \Rightarrow Q$ est l'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
- On dira que P est équivalent à Q si la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ est vraie. On écrira cette dernière de manière condensée comme suit: $P \Leftrightarrow Q$.

Exercice Rappel:

P	Q	P => Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

1. Établir la table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$.

solution

P	Q	P => Q	Q => P	(P => Q) ∧ (Q => P)
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Donc on a:

P	Q	P <=> Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1. Établir la table de vérité de: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow P)$

solution

P	Q	P => Q	Q => P	(P => Q) <=> (Q => P)
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

«S'il pleut, alors je prends mon parapluie.» Ne revient pas à dire «Si je prends mon parapluie, alors il pleut.»

1. Établir la table de vérité de $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

solution

P	Q	P => Q	¬Q	¬P	¬Q => ¬P	(P ⇒ Q) ⇔ (¬Q ⇒ ¬ P)
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

On dira que: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ est une **tautologie**.

On écrira: $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Dire «S'il pleut, alors je prends mon parapluie», revient toujours à dire: «Si je ne prends pas mon parapluie, alors il ne pleut pas».

1. Dire à un enfant: « Si tu manges tes légumes, tu auras du dessert », revient-il à dire: « Si tu ne manges pas tes légumes, tu n'auras pas de dessert » ?
   Utiliser les propositions suivantes:

   L: tu manges tes légumes
   D: tu auras du dessert

solution

- «Si tu manges tes légumes, alors tu auras du dessert»:

  $L \Rightarrow D$

- «Si tu ne manges pas tes légumes, alors tu n'auras pas de dessert»:

  $\neg L \Rightarrow \neg D$

L	D	L ⇒ D	¬ L	¬ D	¬ L ⇒ ¬ D	(L ⇒ D)⇔ (¬ L ⇒ ¬ D)
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1

$(L \Rightarrow D) \Leftrightarrow (\neg L \Rightarrow \neg D)$ est-elle une tautologie? **NON**

1.1.7 Règles et propriétés

- Pour éviter l'accumulation de parenthèses, nous attribuons un ordre de priorité décroissant aux signes suivants:
  1. $\neg$
  2. $\vee$ et $\wedge$
  3. $\Rightarrow$
  4. $\Leftrightarrow$
  5. Exemple_: Que vaut: $(P \Rightarrow (\neg Q)) \Leftrightarrow (R \wedge S)$.

     $((P \Rightarrow (\neg Q)) \Leftrightarrow (R \wedge S))$
- <u>Exercice supplémentaire</u>: Table de vérité de: $(P \Rightarrow (\neg R)) \Leftrightarrow (R \wedge S)$ (notée Q)
- Nous écrirons $P \equiv Q$ pour signifier que la proposition $P \Leftrightarrow Q$ est vraie.

- Soulignons quelques tautologies importantes:
  - $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$
  - $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$
  - $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

Réalisation des tables de vérité Montrer que: $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$ (négation d'une implication)

Revient à montrer que $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$ est une tautologie.

Exercice 1 Faire la table de vérité de la proposition suivante, notée T

$\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

solution

P	Q	P => Q	¬(P => Q)	¬Q	P ∧ ¬Q	¬(P=>Q) <=> P ∧ ¬ Q
0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1

Donc $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$ est une tautologie.

On écrira: $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$

Exercice 2 Exprimez la proposition suivante en terme de $\vee$ et $\neg$.

$P \Rightarrow Q \equiv \neg(\neg(P \Rightarrow Q)) \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$

Table de vérité de $\neg(P \wedge \neg Q)$

solution

P	Q	¬P	¬ Q	P ∧ ¬Q	¬(P ∧ ¬Q)	P ⇒ Q	¬P ∨ Q
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1

P: «Il pleut.» Q: «Je prends mon parapluie.»

$P \Rightarrow Q$: «S'il pleut, alors je prends mon parapluie».

Ça revient à dire

$\neg(P \wedge \neg Q)$: «Il est faux qu'il pleuve et que je ne prenne pas mon parapluie.»

Ça revient à dire:

$\neg P \vee Q$: «Il ne pleut pas ou je prends mon parapluie.»

En résumé, si on liste tous les cas vrai de la table de vérité: «Soit il ne pleut pas et je prends mon parapluie, soit il ne pleut pas et je ne prends pas mon parapluie, soit il pleut et je prends mon parapluie».

Ou bien: «Il n'arrive pas qu'il pleuve et que je ne prenne pas mon parapluie».

1.1.8 Règles et propriétés (suite)

Nous pouvons déjà citer, comme propriété de la disjonction et de l'injonction, la commutativité, l'associativité et la double distributivité. Nous avons également les propriétés suivantes:

1. $P \vee P \equiv P$
2. $P \wedge P \equiv P$
3. $P \vee 0 \equiv P$
4. $P \wedge 1 \equiv P$
5. $P \vee 1 \equiv 1$
6. $P \wedge 0 \equiv 0$
7. $\neg 1 \equiv 0$
8. $\neg 0 \equiv 1$
9. $P \vee \neg P \equiv 1$
10. $P \wedge \neg P \equiv 0$
11. $\neg\neg P \equiv P$

1. $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ (De Morgan (1))
2. $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ (De Morgan (2))

1.1.9 Exercices

Exercice 1 *Rappel*:

- Réciproque de $P \Rightarrow Q$ est: $Q \Rightarrow P$
- Contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\neg Q \Rightarrow \neg P$ (**tautologie**)

Écrire la réciproque et la contraposée de chacune des implications suivantes:

1. Si $2 + 3 = 5$, alors je suis le roi de Prusse.

   On pose: P: «2+3=5» et Q: «Je suis le roi de Prusse».

   Écrire la réciproque et la contraposée de $P \Rightarrow Q$

   > **solution**
   >
   > **Réciproque**: $Q \Rightarrow P$: «Si je suis le roi de Prusse, alors "2+3=5"»
   >
   > **Contraposée**: $\neg Q \Rightarrow \neg P$: «Si je ne suis pas le roi de Prusse, alors "2+3≠5"»

2. S'il fait beau et si je ne suis pas trop fatigué, alors je vais me promener.

   > **solution**
   >
   > **Méthode 1**:
   >
   > - P: «Il fait beau et je ne suis pas trop fatigué.»
   > - Q: «Je vais me promener.»
   >
   > La proposition devient: $P \Rightarrow Q$.
   >
   > - *Réciproque*: $Q \Rightarrow P$: «Si je vais me promener, alors il fait beau et je ne suis pas trop fatigué.»
   > - *Contraposée*: $\neg Q \Rightarrow \neg P$: «Si je ne vais pas me promener, alors il est faux qu'il fasse beau et que je ne suis pas trop fatigué.»
   >
   > **Méthode 2**:
   >
   > - P: «Il fait beau.»

- Q: «Je suis trop fatigué.»
- R: «Je vais me promener»

La proposition devient: $P \land \neg Q \Rightarrow R$

- *Réciproque*: $R \Rightarrow P \land \neg Q$: «Si je vais me promener, alors il fait beau et je ne suis pas trop fatigué.»
- *Contraposée*: $\neg R \Rightarrow \neg(P \land \neg Q)$

  La contraposée peut s'écrire comme suit via la loi de De Morgan:

  $\neg R \Rightarrow \neg(P \land \neg Q) \equiv \neg R \Rightarrow \neg P \lor Q$

  «Si je ne vais pas me promener, alors il ne fait pas beau **ou** je suis trop fatigué.»

3. Si je gagne à la loterie, alors je sabre le champagne et achète une voiture.

solution

On pose les propositions suivantes:

- P: Je gagne à la loterie.
- Q: Je sabre le champagne.
- R: J'achète une voiture.

La proposition initiale devient: $P \Rightarrow Q \land R$

- *Réciproque*: $Q \land R \Rightarrow P$: «Si je sabre le champagne et que j'achète une voiture, alors je gagne à la loterie.»
- *Contraposée*: $\neg(Q \land R) \Rightarrow \neg P$:

  La proposition s'écrit comme suit via de Morgan:

  $\neg Q \lor \neg R \Rightarrow \neg P$

  «Si je ne sabre pas le champagne ou que je n'achète pas de voiture, alors je n'ai pas gagné à la loterie.»

Faire la table de vérité suivante:

$P \land Q \Rightarrow R \iff P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

solution

On obtient une tautologie. Donc: $\big(P \land Q \Rightarrow R\big) \equiv \big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big)$

Remarque: les parenthèses sont importantes:

$\big(P \land Q \Rightarrow R\big) \not\equiv \big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R\big)$

Exercice 2 Règle de distributivité:

- $(P \lor Q) \land R \equiv (P \land R) \lor (Q \land R)$
- $(P \land Q) \lor R \equiv (P \lor R) \land (Q \lor R)$

Utiliser les lois d'équivalence pour simplifier les propositions suivantes:

1. $\neg(P \lor (Q \land \neg R)) \land Q$

solution

```
   ¬(P ∨ (Q ∧ ¬R)) ∧ Q
 ≡ (¬P ∧ ¬(Q ∧ ¬R)) ∧ Q   # par de Morgan
 ≡ ¬P ∧ ¬(Q ∧ ¬R) ∧ Q     # parenthèse inutile
 ≡ ¬P ∧ (¬Q ∨ R) ∧ Q      # par de Morgan
 ≡ ¬P ∧ ((¬Q ∨ R) ∧ Q)    # par de Morgan
 ≡ ¬P ∧ ((¬Q ∧ Q) ∨ (R ∧ Q)) # distributivite
 ≡ ¬P ∧ (0 ∨ (R ∧ Q))     # propriété
 ≡ ¬P ∧ (R ∧ Q)           # propriété
 ≡ ¬P ∧ Q ∧ R             # même priorité opérations
```

2. $\neg(\neg P \vee Q) \vee (P \wedge \neg R)$

solution

```
  ¬(¬P ∨ Q) ∨ (P ∧ ¬R)
≡ (P ∧ ¬Q) ∨ (P ∧ ¬R)   # de Morgan
≡ P ∧ (¬Q ∨ ¬R)         # mise en évidence
≡ P ∧ ¬(Q ∧ R)          # de Morgan
```

3. $(P \wedge R) \vee (\neg R \wedge (P \vee Q))$

solution

```
  (P ∧ R) ∨ (¬R ∧ (P∨Q))

≡ ((P ∧ R) ∨ ¬R)    ∧ ((P ∧ R) ∨ (P ∨ Q))
≡ ((P∨¬R) ∧ (R∨¬R)) ∧ ((P ∧ R) ∨ (P ∨ Q))
≡ ((P∨¬R) ∧ 1)      ∧ ((P ∧ R) ∨ (P ∨ Q))
≡ (P∨¬R)            ∧ ((P ∧ R) ∨ (P ∨ Q))
≡ (P∨¬R)            ∧ ((P ∧ R) ∨ P ∨ Q)
≡ (P∨¬R)            ∧ (((P ∧ R) ∨ P) ∨ Q)
≡ (P∨¬R)            ∧ (P ∨ Q)
≡ P ∨ (¬R ∧ Q)

Simplifier:

  (P ∧ R) ∨ P
≡ (P ∨ P) ∧ (R ∨ P) # distribue
≡ P ∧ (R ∨ P)       # propriété
≡ (P ∧ R) ∨ (P ∧ P) # distribue
≡ (P ∧ R) ∨ P       # on retrouve ce qu'on
                    # avait avant...
On tourne en rond...

  (P ∧ R) ∨ P
≡ (P ∧ R) ∨ (P ∧ 1)   # propriété
≡ P ∧ (R ∨ 1)         # mise en évidence
```

```
≡ P ∧ 1                 # propriété
≡ P

Donc au final: (P ∧ R) ∨ P ≡ P
```

Table de vérité de $(P \wedge R) \vee P \iff P$

P	R	P∧R	(P∧R)∨P	(P∧R)∨P⇔P
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Exercice 3 Mettre les énoncés suivants sous forme d'une proposition:

1. S'il fait beau, je ne prends pas mon parapluie.

solution

- P: «Il fait beau.»
- Q: «Je prends mon parapluie.»

$P \Rightarrow \neg Q$

2. Si je prends mon parapluie, il fait beau.

solution

- P: «Il fait beau.»
- Q: «Je prends mon parapluie.»

$Q \Rightarrow P$

3. J'irai me promener si tu y vas.

solution

Revient à dire: «Si tu vas te promener, alors j'irai me promener».

- P: «Je vais me promener.»
- Q: «Tu vas te promener.»

$Q \Rightarrow P$

4. Je n'irai me promener que si tu y vas.

solution

P	Q	P => Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Contraposée: ¬Q ⇒ ¬P: «Si tu ne vas pas te promener, alors je n'irai pas me promener.»

1. Qu'il vente ou qu'il pleuve, je vais me promener.

solution

```
Qu'il vente ou qu'il pleuve, je       vais    me promener.
[--------condition---------] [verbe] [sujet] [complement]
```

Négation de la phrase: Il est faux de dire: «Qu'il vente ou qu'il pleuve, je vais me promener.»

On a: «S'il y a du vent ou s'il pleut, je ne vais pas me promener.»

- P: il y a du vent
- Q: il pleut
- R: Je vais me promener

Pour retrouver la proposition initiale, on reprend la négation: $\neg(P \vee Q \Rightarrow \neg R) \equiv (P \vee Q) \wedge R$

Rappel: $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$

C'est bon comme ça

1. Pierre est sincère bien qu'il fasse erreur.
2. Pierre réussira ses examens pourvu qu'il ne tombe pas malade.
3. Si Pierre dit qu'il est allé à l'école, c'est qu'il ment.
4. Cette porte ne peut être à la fois ouverte et fermée.

1.1.10 Exercices supplémentaires

À faire en exercice.

1. Exprimer $P \Rightarrow Q$ avec $\wedge$ et $\vee$.
2. Simplifier $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$
3. Simplifier $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
4. Montrer que: $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow P \wedge Q \Rightarrow R$
5. Montrer que $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R)$ est une tautologie.

1.2 Logique des prédicats

1.2.1 Prédicats

Definition 1.1

Les **prédicats** sont des propositions qui dépendent d'une variable.

Exemple: On a vu que la phrase « n est un nombre entier » est une *proposition*, celle-ci dépend d'un paramètre n, c'est donc un prédicat.

La question que l'on peut se poser est pour combien de valeurs de n la proposition précédente est vraie ou fausse ? (Aucune, une seule, plusieurs, toutes?)

$\rightarrow$ Pour y répondre, nous allons introduire des **quantificateurs**.

1.2.2 Quantificateurs

Definition 1.2

Le **quantificateur universel** s'exprime comme:

$$\forall x : P(x).$$

Cela signifie: « Pour toutes les valeurs de x, $P(x) = 1$ ».

Definition 1.3

Le **quantificateur existentiel** s'exprime comme:

$$\exists x : P(x).$$

Cela signifie: « Il existe au moins une valeur de x telle que $P(x) = 1$ ».

On peut définir deux autres quantificateurs existentiels:

- $!x : P(x)$ signifie: « Il existe au plus une valeur de x telle que $P(x) = 1$ ».
- $\exists!x : P(x)$ signifie: « Il existe une et une seule valeur de x telle que $P(x) = 1$ ».

1.2.3 Négation des quantificateurs

Definition 1.4

La **négation du quantificateur universel** s'écrit:

$$\neg\forall x : P(x).$$

Cela signifie: « Il est faux que toute valeur de x soit telle que $P(x) = 1$ ».

Cette proposition est équivalente à:

$$\exists x : \neg P(x)$$

qui signifie: « Il y a au moins une valeur de x telle que $P(x) = 0$ ».

Definition 1.5

La négation du quantificateur existentiel s'écrit:

$$\neg\exists x : P(x).$$

Cela signifie: « Il est faux qu'il existe au moins une valeur de x telle que $P(x) = 1$ ». Cette proposition est équivalente à:

$$\forall x : \neg P(x)$$

qui signifie « Toutes les valeurs de x sont telles que $P(x) \neq 1$. »

1.2.4 Exercices

Exercice 1 Considérons la proposition $P(x)$: « L'humain x est mortel ». Écrire les propositions suivantes sous forme de proposition avec quantificateur:

1. Tous les humains sont mortels.
2. Tous les humains sont immortels.
3. Aucun humain n'est mortel.
4. Aucun humain n'est immortel.
5. Il existe des humains mortels.
6. Il existe des humains immortels.

solution

1. $\forall x : P(x)$
2. $\forall x : \neg P(x)$
3. $\neg\exists x : P(x) \equiv \forall x : \neg P(x)$
4. $\neg\exists x : \neg P(x) \equiv \forall x : \neg\neg P(x) \equiv \forall x : P(x)$
5. $\exists x : P(x)$
6. $\exists x : \neg P(x)$

Remarque/:

Écrivez la négation de «Tous les chats vont au paradis»

C(x): Le chat x va au paradis

$\forall x : C(x)$

La négation: $\neg \forall x : C(x) \equiv \exists x : \neg C(x)$

«Tous les chats ne vont pas au paradis» «Il existe au moins un chat qui ne va pas au paradis»

Exercice 2 En considérant deux cas décrits ci-après, traduire la proposition « [Tous les entiers qui sont supérieurs (strictement) à 5] [ne sont pas] [inférieurs (strictement) à 15]»

solution

Méthode 1

- P(x): l'entier x est supérieur (strictement) à 5
- Q(x): l'entier x est inférieur (strictement) à 15

La négation de la proposition est:

« [Tous les entiers qui sont supérieurs (strictement) à 5] [sont] [inférieurs (strictement) à 15]»

$\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$ <—— La proposition est fausse, contre-exemple: 16

On reprend la négation de la négation pour avoir la proposition initiale.

$\neg \forall x : P(x) \Rightarrow Q(x) \equiv \exists x : \neg(P(x) \Rightarrow Q(x)) \equiv \exists x : P(x) \wedge \neg Q(x)$

La proposition devient: Il existe au moins un entier qui est supérieur à 5 mais pas inférieur à 15.

Méthode 2

- E(x): x est un entier
- P(x): x est supérieur (strictement) à 5
- Q(x): x est inférieur (strictement) à 15

« [Tous les entiers qui sont supérieurs (strictement) à 5] [sont] [inférieurs (strictement) à 15]»

$\forall x : E(x) \wedge P(x) \Rightarrow Q(x)$ (1)

$\forall x : E(x) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x))$

Tautologie: $A \wedge B \Rightarrow C \equiv A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

On prend la négation de (1):

$\neg \forall x : E(x) \wedge P(x) \Rightarrow Q(x)$

$\equiv \exists x : \neg(E(x) \wedge P(x) \Rightarrow Q(x))$

$\equiv \exists x : E(x) \wedge P(x) \wedge \neg Q(x)$

Il existe un entier, qui est supérieur à 5, et qui n'est pas inférieur à 15.

1.2.5 Variable liée

- La valeur de vérité de $\forall x : P(x)$ ne dépend pas de x, contrairement à la valeur de vérité de $P(x)$. On dira alors que la variable x est liée au quantificateur $\forall$. Nous pouvons remplacer x par toute autre dénomination:

  $$\forall x : P(x) \equiv \forall a : P(a) \equiv \forall K : P(K) \equiv \ldots$$

  De même pour le quantificateur existentiel.

- Nous adopterons les notations suivantes pour désigner qu'un objet lié à un quantificateur peut appartenir à un ensemble:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \forall x \in A : P(x) & \equiv & \forall x : (x \in A \Rightarrow P(x)) \\ \exists x \in A : P(x) & \equiv & \exists x : (x \in A \wedge P(x)) \end{array}}$$

Exemple 1:

- A: l'ensemble (set) de tous les entiers ($A = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$)
- $I(x)$: x est un entier

  On a: $I(x) \Leftrightarrow x \in A$
- P(x): x ne possède pas de décimales non nulles.

$$\forall x : I(x) \Rightarrow P(x) \equiv \forall x : x \in A \Rightarrow P(x) \equiv \forall x \in A : P(x)$$

Exemple 2:

- Q(x): x est un multiple de 10

$$\exists x : I(x) \wedge Q(x) \equiv \exists x : x \in A \wedge Q(x) \equiv \exists x \in A : Q(x)$$

Exercice Montrer que la négation des propositions précédentes sont respectivement:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \neg\forall x \in A : P(x) & \equiv & \exists x \in A : \neg P(x) \\ \neg\exists x \in A : P(x) & \equiv & \forall x \in A : \neg P(x) \end{array}}$$

1.2.6 Quantificateur en cascade

Exemple: Considérons y un nombre entier.

$\forall x : P(x, y) \equiv \forall z : P(z, y) \equiv \forall \phi : P(\phi, y)$

Soit $P(x, y)$. Dans la proposition $\forall x : P(x, y)$, la variable x est liée à $\forall$ mais y reste libre. La valeur de vérité de cette proposition dépend de la valeur de y, qui peut donc être quantifiée. On peut avoir:

- $\exists y, \forall x : P(x, y)$: On peut trouver une valeur de y telle que, pour toutes valeurs de x, $P(x, y) = 1$.
- $\forall y, \forall x : P(x, y)$: Pour toutes valeur de y et de x, $P(x, y) = 1$.

  Notation abusive: $\forall x, y : P(x, y)$

Remarque: On ne peut permuter des quantificateurs que quand ils sont de même nature et consécutifs.

$\forall x, \forall y, \exists z, \exists o : P(x, y, z, o) \equiv \forall y, \forall x, \exists z, \exists o : P(x, y, z, o) \equiv \forall x, \forall y, \exists o, \exists z : P(x, y, z, o) \equiv \forall y, \forall x, \exists o, \exists z : P(x, y, z, o)$

Exemple: Supposons que A est l'ensemble des serrures, et B l'ensemble des clés et que $P(x, y)$ signifie « y ouvre x », alors les deux propositions suivantes ne sont pas équivalents.

$$\begin{array}{rl} & \forall x \in A, \exists y \in B : P(x, y) \\ \not\equiv & \exists y \in B, \forall x \in A : P(x, y) \end{array}$$

solution

Le premier: chaque serrure peut être ouverte par au moins une clé

Le deuxième: il existe un passe-partout: il existe au moins une clé qui ouvre toutes les serrures.

1.2.7 Ordre de propriété

On attribue un *ordre de priorité croissant* aux différents symboles:

Croissant: du moins prioritaire au plus prioritaire.

1. Les quantificateurs placés en tête de formule séparés par « : »
2. $\Leftrightarrow$
3. $\Rightarrow$
4. $\wedge$ et $\vee$
5. Les quantificateurs, à l'exception de ceux du point 1
6. $\neg$
7. Tout autre signe

Exemple: Ajouter les parenthèses à la proposition suivante:

$$\forall a, \forall b : (\forall t(t \in a \Leftrightarrow t \in b)) \Rightarrow a = b$$

1.2.8 Exercices

Exercice 1 Formaliser la proposition « Les absents ont tous tort » avec les prédicats suivants:

- $a(x)$: x est absent,
- $t(x)$: x a tort.

solution

$\forall x : a(x) \Rightarrow t(x)$

Si on note $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les absents. on a: $a(x) \Leftrightarrow x \in \mathcal{A}$

La proposition se réécrit: $\forall x : x \in \mathcal{A} \Rightarrow t(x)$

Dont l'écriture est équivalente à: $\forall x \in \mathcal{A} : t(x)$

Exercice 2 Que vaut la valeur de vérité de la proposition $\forall x \in \mathbb{Z} : x \neq x^2$?

solution

On note: $P \equiv \forall x \in \mathbb{Z} : x \neq x^2$

«Intuition» que P est faux, donc $\neg P$ est vrai.

$\neg P \equiv \neg \forall x \in \mathbb{Z} : x \neq x^2 \equiv \exists x \in \mathbb{Z} : \neg(x \neq x^2) \equiv \exists x \in \mathbb{Z} : x = x^2$

Il suffit de prendre $x = 1$. On a bien: $1 = 1^2$.

Donc $\neg P$ est vrai Donc P est fausse.

Exercice 3 Écrire la négation des propositions suivantes:

1. $\forall x \in A, \exists y \in B, \exists z \in C, \exists t \in B : P(x, y, z, t)$.
2. $\forall x, \exists y : P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$
3. $\forall x : (\exists y : P(x, y)) \Rightarrow R(x)$
4. $(\forall x, \exists y : P(x, y)) \Rightarrow (\forall z : R(z))$

solution

1. $\exists x \in A, \forall y \in B, \forall z \in C, \forall t \in B : \neg P(x, y, z, t)$
2. $\exists x, \forall y : P(x, y) \wedge \neg Q(x, y)$
3. Si on note: $Q(x) \equiv \exists y : P(x, y)$

   On a: $\forall x : (\exists y : P(x, y)) \Rightarrow R(x) \equiv \forall x : Q(x) \Rightarrow R(x)$

   Négation:

   $\neg \forall x : Q(x) \Rightarrow R(x) \equiv \exists x : Q(x) \wedge \neg R(x) \equiv \exists x : (\exists y : P(x, y)) \wedge \neg R(x)$

   (a) La proposition est équivalente à:

   $\equiv (\forall x, \exists y : P(x, y)) \Rightarrow (\forall x : R(x)) \equiv (\forall x, \exists y : P(x, y)) \Rightarrow (\forall y : R(y))$

   La négation:

   $\neg\Big((\forall x, \exists y : P(x, y)) \Rightarrow (\forall z : R(z))\Big) \equiv (\forall x, \exists y : P(x, y) \wedge \neg(\forall z : R(z)) \equiv (\forall x, \exists y : P(x, y) \wedge (\exists z : \neg R(z)$

Exercices 4 On considère les prédicats suivants:

- $e(x)$: x est étudiant de la HERS
- $v(x)$: x est un vélo
- $p(x, y)$: x possède un y

Traduire les propositions suivantes:

1. $\forall x : v(x) \Rightarrow \exists z : (e(z) \wedge p(z, x))$

   On note:

   - $\mathcal{V}$: l'ensemble des vélos: $\forall x : v(x) \Leftrightarrow x \in \mathcal{V}$
   - $\mathcal{E}$: l'ensemble des étudiants: $\forall x : e(x) \Leftrightarrow x \in \mathcal{E}$

   On réécrit la proposition comme suit:

   $\forall x : x \in \mathcal{V} \Rightarrow \exists z : z \in \mathcal{E} \wedge p(z, x)$

   $\equiv \forall x \in \mathcal{V}, \exists z \in \mathcal{E} : p(z, x)$

1. $\forall x : e(x) \Rightarrow \big(\forall z, y : (v(z) \wedge v(y) \wedge (z \neq y)) \Rightarrow (\neg p(x, y) \vee \neg p(x, z))\big)$
2. $\exists x : e(x) \wedge (\forall y : v(y) \Rightarrow \neg p(x, y))$

solution

1. Chaque vélo a au moins un étudiant comme propriétaire.
2. - Chaque étudiant possède au plus un vélo
   - Chaque étudiant possède au maximum un vélo
   - Chaque étudiant possède un seul vélo ou aucun

Q	R	¬Q	¬R	¬Q ∨ ¬R
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

3. Il y a au moins un étudiant qui n'a pas de vélo.

Exercice 5 Soit un tableau T d'entiers de taille infinie dont le premier élément est d'indice 1. Si i est un nombre naturel, alors:

- La proposition $P(T, i)$ est vraie si et seulement si l'élément d'indice i du tableau T est pair.
- La proposition $I(T, i)$ est vraie si et seulement si l'élément d'indice i du tableau T est impair.

Répondez aux questions suivantes:

1. Écrivez mathématiquement la proposition suivante: «Tout élément pair du tableau T est suivi *directement* par un élément impair.»

   Exemple:

   ```
   indices (i):  1  2  3  4  5  6  7  8   9  10, ...
            T = [1, 3, 5, 4, 7, 9, 9, 9, 10, 11, ...]
                           _              __
   ```

   $\forall i \in \mathbb{N}_0 : P(T, i) \Rightarrow I(T, i + 1)$

2. Écrivez mathématiquement la proposition suivante: «Tous les éléments du tableau sont soit pairs, soit impairs, mais jamais les deux à la fois.»

   «xor» signifie «ou exclusif» ou «ou non inclusif», xor n'existe pas...

   «P xor Q» $\equiv$ (¬P ∧ Q) ∨ (P ∧ ¬Q) $\equiv$ ¬(P ⇔ Q)

   $\forall i \in \mathbb{N}_0 : \neg(P(T, i) \Leftrightarrow I(T, i)) \equiv \forall i \in \mathbb{N}_0 : (\neg P(T, i) \wedge I(T, i)) \vee (P(T, i) \wedge \neg I(T, i))$

P	Q	«P xor Q»	¬ P ∧ Q	P ∧ ¬ Q	(¬P ∧ Q) ∨ (P ∧ ¬Q)	¬(P ⇔ Q)
0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0

3. Que signifie en bon français la proposition mathématique suivante:

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : I(T, i) \Rightarrow (\exists j \in \mathbb{N}_0 : j > i \wedge P(T, j))$$

Évitez d'utiliser les expressions «il existe», «pour tout». Il ne doit pas s'agir un transcription «mot à mot» de l'expression.

Chaque élément impair du tableau est suivi, directement ou non, par (au moins) un élément pair.

```
indices (i):  1  2  3  4  5  6  7  8   9  10, ...
        T = [1, 3, 5, 4, 7, 9, 9, 9, 10, 11, ...]
```

i = 1 et j = 4: 4 > 1 et T(1) = 1 (donc I(T,1)) et T(4) = 4 (donc P(T,4)) i = 2 et j = 4: 4 > 2 et T(2) = 2 et T(4) = 4 i = 3 et j = 9: 9 > 2 et T(3) = 3 et T(9) = 10

1.2.9 Références

- S. Thiry, *Initiation à la démarche mathématique*, Librairie des sciences de Namur, 2015.
- R. Coulangeon, *Fondements pour les Mathématiques et l'Informatique*, Université Bordeaux, chapitre 1, 2012-2013, http://www.math.u-bordeaux1.fr/~rcoulang/fmi2012.html, consulté en septembre 2023.
- E. Lehman et T. Leighton, *Mathematics for Computer Science*, chapitre 1, 2004, http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spr10/cos433/mathcs.pdf, consulté en septembre 2023.
- J. Vélu et al, *Mathématique pour l'informatique - Exercices & Problèmes*, chapitre 8, Dunod 2008.
- X. Chanet et P. Vert, *Mathématique pour l'informatique (Pour le BTS SIO)*, chapitre 4, dunod 2015.

2 Ensembles

2.1 Définitions

2.1.1 Définitions d'ensembles

Definition 2.1

Un **ensemble** est une collection *clairement définie* d'objets (ces derniers sont appelés éléments de l'ensemble).

On écrira $x \in E$ pour signifier qu'un objet x appartient à un ensemble E.

On peut décrire un ensemble de deux manières:

- En énumérant tous les éléments de l'ensemble.
  Exemple: $X = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
- En précisant une propriété claire caractérisant les éléments de l'ensemble.
  L'ensemble est de la forme: $E = \{x \,|\, p(x)\}$, où $p(x)$ est une proposition. L'appartenance à l'ensemble E et la proposition $p(x)$ sont liées par:
  $$\forall x : (x \in E) \Leftrightarrow p(x).$$

Exemple: $X = \{x \,|\, x \text{ est un entier}, x \geq 0, x < 9, x \text{ est pair}\}$.

- On dira qu'un ensemble est vide s'il ne contient aucun élément. (*Notation*: $\emptyset$ ou $\{\}$).

  {} = ∅: 0 élément {{}} = {∅}: 1 élément {{∅}}: 1 élément
- Deux ensembles sont égaux s'ils sont constitués des mêmes éléments, i.e.:
  $$(A = B) \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Notations d'ensembles fréquemment utilisées:

- L'ensemble des nombres entiers naturels: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- L'ensemble des nombres entiers: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- L'ensemble des nombres rationnels: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$.
- L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, où chaque nombre est un développement décimal illimité (précédé ou non d'un signe $-$).

2.2 Inclusion d'ensembles

2.2.1 Inclusion

Un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tous les éléments de A sont éléments de B, i.e.:

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B).$$

- L'égalité entre deux ensembles A et B peut se réécrire comme suit:
  $$(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A).$$
- On dira qu'un ensemble A n'est pas inclus dans un ensemble B si au moins un élément de A n'appartient pas à B, i.e.:
  $$(A \nsubseteq B) \Leftrightarrow (\exists x : x \in A \wedge x \notin B).$$

2.2.2 Exercice 1

On considère les ensembles A et B suivants:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$B = \{1, 3, 5\}$$
$$C = \{2, 5, 8, 9\}$$

6 éléments dans A, 3 éléments, 4 éléments

Vérifier si les expressions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $2 \in A$
2. $2 \in B$
3. $\{2\} \subseteq B$
4. $\{8, 9\} \subseteq B$
5. $\{1, 3, 5\} \subseteq A$
6. $\{1, 3, 5\} \subseteq B$
7. $B \in A$
8. $B \subseteq A$
9. $C \in A$
10. $C \subseteq A$

2.2.3 Ensembles particuliers

- L'**ensemble vide** est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\{\}$ ou $\emptyset$.
- Une **famille** ou **classe** est un ensemble d'ensembles.
- Une **partie** d'un ensemble A est un ensemble inclus dans A.

Exemple: $X = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.

On appelle la famille des parties d'un ensemble X (que l'on note $\mathcal{P}(X)$), l'ensemble des parties de X, c'est-à-dire l'ensemble de tous les ensembles inclus dans X. On a: $\mathcal{P}(X) = \{A \,|\, A \subseteq X\}$.

Par exemple:

- X = {1}. Que vaut P(X)?

  P(X) = {∅, {1}} #P(X) = |P(X)| = 2 (nombre d'éléments dans l'ensemble P(X))
- X = {1, 2}. Que vaut P(X)?

  P(X) = {∅, {1}, {2}, {1,2}} #P(X) = |P(X)| = 4
- X = {1, 2, 3}. Que vaut P(X) ? P(X) = {∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {2,3}, {1,3}, {1,2,3}} #P(X) = |P(X)| = 8

Si X a 1 élément: P(X) aura 2 éléments Si X a 2 éléments: P(X) aura 4 éléments Si X a 3 éléments: P(X) aura 8 éléments

Donc, si X contient n éléments, P(X) contiendra 2^n éléments

Parfois on note: $\mathcal{P}(X) = 2^X$

2.2.4 Exercices 2

On considère les ensembles A et B suivants:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$B = \{\{1, 2\}, \{4\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

Vérifier si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $2 \in B$
2. $\{2\} \subseteq B$
3. $\{4\} \in B$
4. $\{4\} \subseteq B$
5. $\{1, 2, 4\} \subseteq B$
6. $\{\{1, 2\}, \{4\}\} \subseteq B$
7. $A \subseteq B$
8. $A \in B$
9. $\{A\} \subseteq B$
10. $\emptyset \subseteq A$
11. $\emptyset \in \emptyset$
12. $\emptyset \subseteq \emptyset$

2.3 Opérations sur les ensembles

2.3.1 Opérations sur les ensembles

Considérons trois ensembles A, B, E tels que $A, B \subseteq E$.

- L'**union** entre A et B est l'ensemble formé par les éléments de ces deux ensembles, i.e.

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}.$$

- L'**intersection** entre A et B est l'ensemble des éléments appartenant aux deux ensembles, i.e.

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\}.$$

- Le **complémentaire** de l'ensemble A relativement à E est l'ensemble formé par les éléments qui appartiennent à E mais qui n'appartiennent pas à A, i.e.

$$A^c = \{x \,|\, x \in E \wedge x \notin A\}.$$

Nous dirons également que deux ensembles A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

2.3.2 Exercice 3

On considère les ensembles A et B suivants:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$B = \{1, 3, 5\},$$
$$C = \{2, 5, 8, 9\}$$

Déterminer les ensembles résultant des opérations suivantes:

1. $A \cup B$
2. $A \cup C$
3. $B \cup C$
4. $A \cap B$
5. $A \cap C$

6. $B \cap C$

Quel est le complémentaire de B par rapport à A? $B^c = \{2, 4, 6\}$: «Les éléments appartenant à A mais n'appartenant pas à B»

solution

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$
3. $B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 8, 9\}$
4. $A \cap B = \{1, 3, 5\}$
5. $A \cap C = \{2, 5\}$
6. $B \cap C = \{5\}$
7. $B \cap \{4, 6, 8\} = \emptyset = \{\}$

Il n'y a pas de notion d'ordre dans les ensembles:

$A = B \iff (\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

$\{1, 2\} = \{2, 1\}$

2.3.3 Exercice 4

On considère les ensembles A et B suivants:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$B = \{\{1, 2\}, \{4\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} .$$

Déterminer les ensembles résultant des opérations suivantes:

1. $\{1, 2\} \cap A$
2. $\{1, 2\} \cap B$
3. $\{4\} \cup A$
4. $\{4\} \cup B$
5. $\{4\} \cap A$
6. $\{4\} \cap B$
7. {{4}} ∪ B
8. {{4}} ∩ B

solution

1. A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6 , {1,2}, {4}, {1,2,3,4,5,6}}
2. A ∩ B = ∅
3. {1,2} ∪ A = A = {1,2,3,4,5,6}
4. {1, 2, A} = {1, 2, {1,2,3,4,5,6}}

5. {1, 2}
6. ∅
7. A
8. {4, {1,2}, {4}, {1,2,3,4,5,6}}
9. {4}
10. ∅

2.4 Cardinal, puissance et partition

Cardinal d'un ensemble

Definition 2.2

Le cardinal d'un ensemble A fini, noté $\#A$ ou $|A|$, est le nombre d'éléments que l'ensemble A contient.

Proposition 2.1

Soient A, B et C trois ensembles finis. Nous avons les deux égalités suivantes:

$$\begin{aligned}|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &\quad + |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

Exemple Considérons les ensembles A, B, C suivants:

$$A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{1, 2, 5, 6\},\ C = \{1, 4, 6, 7\}.$$

Évaluez $|A \cup B \cup C|$

solution

A ∪ B ∪ C = {1,2,3,4,5,6,7}

```
|A \cup B \cup C | = 7
```

7 = |A| + |B| + |C| - |A ∩ B| - |A ∩ C| - |B ∩ C| + |A ∩ B ∩ C| = 4 + 4 + 4 - 2 - 2 - 2 + 1 = 12 - 6 + 1 = 7

Famille des parties d'un ensemble La famille (ou classe) des parties d'un ensemble, parfois appelée puissance d'un ensemble, correspond à l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble donné.

Mathématiquement, la famille des parties d'un ensemble E, noté $\mathcal{P}(E)$ ou 2^E, est définie par:

$$\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subseteq E\}$$

Remarque: Un ensemble d'ensembles est appelé famille ou classe.

Partition d'un ensemble La partition d'un ensemble A, notée P_A, est une découpe de A en sous-ensembles non vides deux à deux disjoints, i.e.:

$$P_A = \{A_i \mid i \in I\}$$

tel que:

1. $\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$,
2. $\forall i, j \in I : i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$,
3. $\cup_{i \in I} A_i = A$.

Exemple Considérons l'ensemble $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, et les sous-ensembles suivants:

$$A_1 = \{a, c, d\},\ A_2 = \{b, f\},\ A_3 = \{e\},\ A_4 = \{a, e\}.$$

On a:

- La classe $\{A_1, A_2, A_4\}$ ne forme pas une partition de A.
- La classe $\{A_1, A_2, A_3\}$ forme une partition de A.

3 Symbole de sommation

i#+STARTUP: latexpreview

3.1 Sommation à un indice

3.1.1 Définitions

Exemple introductif On considère les nombres, pour $n \in \mathbb{N}_0$, suivants:

$$1, 2, \ldots, n.$$

Leur somme S vaut: $S = 1 + 2 + \cdots + n$.

$$S = \sum_{i=1}^{n} i$$

En notant $x_i = i$, cette somme peut s'écrire comme: $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, ce que l'on notera:

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Cas particulier: par exemple: $x_i = i$, si on veut écrire:
$\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \sum_{i=1}^{5} x_i$

Définition

Definition 3.1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \overset{\text{def.}}{=} x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

On peut écrire, de manière plus générale, pour $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = \begin{cases} x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n & \text{si } n \geq m, \\ 0 & \text{si } n < m. \end{cases}$$

$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : i \mapsto x(i)$

Remarque L'indice i dans la somme peut être remplacé par n'importe quel autre indice. (Il faut le changer partout où il intervient). On a:

$$\sum_{\boxed{i}=m}^{n} x_{\boxed{i}} = \sum_{\boxed{k}=m}^{n} x_{\boxed{k}} = \sum_{\boxed{j}=m}^{n} x_{\boxed{j}} = \ldots$$

Exercices Considérons le tableau suivant:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	3	5	1	7	23	7	8	2	3	3

Déterminez la valeurs des sommes suivantes:

1. $\sum_{i=1}^{3} x_i$
2. $\sum_{i=1}^{5} 2x_i$
3. $\sum_{k=1}^{5} x_{2k}$
4. $\sum_{k=1}^{4} (2x_k + 1)$
5. $\sum_{j=1}^{4} 2x_j + 1$
6. $\sum_{i=1}^{4} x_{2i+1}$
7. $\sum_{i=1}^{4} x_i + \sum_{k=5}^{7} x_k$
8. $\sum_{i=1}^{3} i\, x_i$
9. $3 \sum_{i=5}^{10} (x_i - 1)$
10. $\sum_{i=1}^{10} (x_i - 6.2)$

Solution

1. $\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3$ = 3 + 5 + 1 = 9
2. $\sum_{i=1}^{5} 2x_i = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5$

   $= 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ = 2(3 + 5 + 1 + 7 + 23) = 2 (39) = 78
3. $\sum_{k=1}^{5} x_{2k}$ = $x_{2(1)} + x_{2(2)} + x_{2(3)} + x_{2(4)} + x_{2(5)} = x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10} = 5 + 7 + 7 + 2 + 3 = 24$
4. $\sum_{k=1}^{4} (2x_k + 1) = 2x_1 + 1 + 2x_2 + 1 + 2x_3 + 1 + 2x_4 + 1$

   $= 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4 = 2(3 + 5 + 1 + 7) + 4 = 36$
5. $1 + \sum_{j=1}^{4} (2x_j) = 1 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 + 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 1 + 2(3 + 5 + 1 + 7) = 33$

6. $\sum_{i=1}^{4} x_{2i+1} = x_{2(1)+1} + x_{2(2)+1} + x_{2(3)+1} + x_{2(4)+1} = x_3 + x_5 + x_7 + x_9 = 1 + 23 + 8 + 3 = 35$
7. $\sum_{i=1}^{4} x_i + \sum_{k=5}^{7} x_k$

   $= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7) = \sum_{i=1}^{7} x_i = 3 + 5 + 1 + 7 + 23 + 7 + 8 = 54$
8. $\sum_{i=1}^{3} i\, x_i$

$= 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 + (2)(5) + (3)(1) = 16$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	3	5	1	7	23	7	8	2	3	3

1. $3\sum_{i=5}^{10}(x_i - 1)$

   $= 3\big((x_5 - 1) + (x_6 - 1) + (x_7 - 1) + (x_8 - 1) + (x_9 - 1) + (x_{10} - 1)\big) = 3(x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} - 6)$
   $= 3(23 + 7 + 8 + 2 + 3 + 3 - 6) = 120$
2. $\sum_{i=1}^{10}(x_i - 6.2) = (x_1 - 6.2) + (x_2 - 6.2) + (x_3 - 6.2) + (x_4 - 6.2) + (x_5 - 6.2) + (x_6 - 6.2) + (x_7 - 6.2) + (x_8 - 6.2) + (x_9 - 6.2) + (x_{10} - 6.2) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} - (10)(6.2)$
   $= 3 + 5 + 1 + 7 + 23 + 7 + 8 + 2 + 3 + 3 - 62 = 0$

Exercices

1. Évaluer $S = \sum_{i=2}^{4} \frac{i+1}{i-1}$
2. Montrer, pour $m \in \mathbb{N}_0$:
3. Supposons que la formule suivante soit vraie, pour

   calculer:

   (a) La somme des carrés des 50 premiers nombres naturels strictement positifs,

$n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

   (a) La somme des carrés des nombres suivants: $70, 71, 72, 73, 74, 75$.

solution

```
int somme_carre(int n) { ... }
somme_carre(5)  == 1² + 2² + 3² + 4² + 5²
somme_carre(10) == 1² + 2² + ... + 10²
somme_carre(75) == 1² + 2² + ... + 75²
somme_carre(69) == 1² + 2² + ... + 69²
somme_carre(75) - somme_carre(69) = 70² + 71² + 72² + 73² + 74² + 75²
```

3.2:

Avec la formule, calculer: $70^2 + 71^2 + ... + 75^2$ $\sum_{k=1}^{75} k^2 - \sum_{k=1}^{69} k^2 = \frac{(75)(76)(151)}{6} - \frac{(69)(70)(139)}{6}$ = 31555

3.1.2 Propriétés – L'additivité

Exemple introductif L'égalité suivante est-elle vraie?

$$\sum_{i=1}^{3} x_i + y_i = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{3} y_j\right)$$

Propriété

Proposition 3.1

L'additivité du symbole de sommation est vraie. On a donc les deux égalités suivantes:

$$\sum_{i=m}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=m}^{n} x_i + \sum_{i=m}^{n} y_i \tag{1}$$

$$\sum_{i=m}^{n}(x_i - y_i) = \sum_{i=m}^{n} x_i - \sum_{i=m}^{n} y_i. \tag{2}$$

3.1.3 Propriétés – Mise en évidence

Exemple introductif Considérons une constante $c \in \mathbb{R}$. L'égalité suivante est-elle vraie?

$$\sum_{i=-2}^{3} c\, x_i = c \sum_{i=-2}^{3} x_i$$

Propriété

Proposition 3.2

Soit $c \in \mathbb{R}$. La propriété de **mise en évidence** est satisfaite, i.e.:

$$\sum_{i=m}^{n} cx_i = c\sum_{i=m}^{n} x_i. \tag{3}$$

3.1.4 Propriétés – Somme de termes identiques

Exemple introductif Considérons $x_i = 3$ pour tout i. Que vaut $\sum_{i=1}^{3} x_i$?

Propriété

Proposition 3.3

Soient $c \in \mathbb{R}$, et $n \geq m$. Si $x_i = c$, pour $i = m, \ldots, n$, alors la **somme des termes constants et égaux**

entre eux vaut:

$$\sum_{i=m}^{n} x_i \stackrel{\text{not.}}{=} \sum_{i=m}^{n} c = (n-m+1)c \tag{4}$$

3.1.5 Propriétés – Téléscopage

Exemple introductif Évaluez $\sum_{i=2}^{100} \frac{1}{i} - \frac{1}{i-1}$.

Si on note $x_i = \frac{1}{i}$, on a: $x_{i-1} = \frac{1}{i-1}$, la somme devient:

$\sum_{i=2}^{100} x_i - x_{i-1}$

Propriété

Proposition 3.4

La propriété suivante, pour $n \geq m$, est connue sous le nom de **téléscopage**:

$$\sum_{i=m}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_{m-1} \tag{5}$$

3.2 Sommation à plusieurs indices

3.2.1 Définitions

Definition 3.2

Lorsque l'on a plusieurs indices pour sommer une quantité, on utilise deux symboles de sommation. On la définit comme suit:

$$\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=p}^{q} x_{ij} = \sum_{i=m}^{n} \left[\sum_{j=p}^{q} x_{ij} \right] \tag{6}$$

3.2.2 Remarques

- On peut montrer que l'ordre dans lequel les sommations sont effectuées n'a pas d'importance, i.e.:

$$\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=p}^{q} x_{ij} = \sum_{j=p}^{q} \sum_{i=m}^{n} x_{ij}$$

- On notera néanmoins qu'on ne peut pas modifier l'ordre des indices sur l'expression sommée. Par exemple, on remarque:

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=2}^{3} x_{ij} \neq \sum_{j=2}^{3} \sum_{i=1}^{3} x_{ji}$$

Exemple Le code suivant représente cette somme $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=2}^{3} x_{ij}$

```
int i, j;
double s = 0;
for (i = 1; i <= 3; i++) {
  for (j = 2; j <= 3; j++) {
    s = s + x(i,j);
  }
 }
```

Prenons comme exemple $\forall \mu, \nu \in \mathbb{N} : x_{\mu\nu} = 2\mu - \nu^2$

```
int x(int mu, int nu) {
  return 2*mu - nu*nu;
}

int s = 0;
for (int i = 1; i <= 3; i++) {
  for (int j = 2; j <= 3; j++) {
    s = s + x(i,j);
  }
 }
printf("%d\n", s);
```

```
-15
```

$\forall \mu, \nu \in \mathbb{N} : x_{\mu\nu} = 2\mu - \nu^2$

Calculer $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}$

$$\sum_{i=1}^{3} \overbrace{\boxed{\sum_{j=1}^{3} x_{ij}}}^{= y_i}$$

La somme devient: $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = \sum_{i=1}^{3} y_i = y_1 + y_2 + y_3$

- $y_1 = \sum_{j=1}^{3} x_{1j} = x_{11} + x_{12} + x_{13} = (2)(1) - (1)^2 + (2)(1) - (2)^2 + (2)(1) - (3)^2 = 2 - 1 + 2 - 4 + 2 - 9 = -8$
- $y_2 = \sum_{j=1}^{3} x_{2j} = x_{21} + x_{22} + x_{23} = (2)(2) - (1)^2 + (2)(2) - (2)^2 + (2)(2) - (3)^2 = 4 - 1 + 4 - 4 + 4 - 9 = -2$
- $y_3 = \sum_{j=1}^{3} x_{3j} = x_{31} + x_{32} + x_{33} = (2)(3) - (1)^2 + (2)(3) - (2)^2 + (2)(3) - (3)^2 = 6 - 1 + 6 - 4 + 6 - 9$ $= 18 - 1 - 4 - 9 = 4$

Donc on a: $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = -8 - 2 + 4 = -6$

Exemple d'application

NOSOLUTIONS:

Éts	Devoir 1	Devoir 2
Jean	8	9
Charles	12	15
Justine	9	11

Ou en terme de matrice de dimension (3,2)

$$M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 12 & 15 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$$

- La moyenne de l'étudiant 1: $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} x_{1j}$
- La moyenne obtenue au devoir 2: $\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_{i2}$
- Moyenne classe: $\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_{ij}$

3.2.3 Exercices

Considérez $x_{ij} = 2i - j^2$ et calculez:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ij}$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ji}$
3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} x_{ij} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ij}$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i}^{3} x_{ij}$
5. $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i} x_{ij}$

solution

1. $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ij}$

   On pose: $y_i = \sum_{j=1}^{2} x_{ij}$

   On a: $S = \sum_{i=1}^{2} y_i = y_1 + y_2$

   - $y_1 = \sum_{j=1}^{2} x_{1j} = x_{11} + x_{12} = 1 + -2 = -1$
   - $y_2 = \sum_{j=1}^{2} x_{2j} = x_{21} + x_{22} = 3 + 0 = 3$

   Donc: $S = -1 + 3 = 2$

Considérez $x_{ij} = 2i - j^2$ et calculez:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ji}$

   On pose: $y_i = \sum_{j=1}^{2} x_{ji}$

   Donc: $S = \sum_{i=1}^{2} y_i = y_1 + y_2$

   - $y_1 = \sum_{j=1}^{2} x_{j1} = x_{11} + x_{21} = 1 + 3 = 4$
   - $y_2 = \sum_{j=1}^{2} x_{j2} = x_{12} + x_{22} = -2 + 0 = -2$

   D'où: S = 4 - 2 = 2

2. $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} x_{ij}$

   (on doit arriver au même résultat que 1.)

3. $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i}^{3} x_{ij}$

   On pose: $y_i = \sum_{j=i}^{3} x_{ij}$

   On a: $S = \sum_{i=1}^{3} y_i = y_1 + y_2 + y_3$

   - $y_1 = \sum_{j=1}^{3} x_{1j} = x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 - 2 - 7 = -8$
   - $y_2 = \sum_{j=2}^{3} x_{2j} = x_{22} + x_{23} = 0 - 5 = -5$
   - $y_3 = \sum_{j=3}^{3} x_{3j} = x_{33} = -3$

   D'où: $S = -8 - 5 - 3 = -16$

4. $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{i} x_{ij}$

   On pose: $y_i = \sum_{j=1}^{i} x_{ij}$

   Donc: $S = \sum_{i=1}^{3} y_i = y_1 + y_2 + y_3$

   - $y_1 = \sum_{j=1}^{1} x_{1j} = x_{11} = 1$
   - $y_2 = \sum_{j=1}^{2} x_{2j} = x_{21} + x_{22} = 3 + 0 = 3$
   - $y_3 = \sum_{j=1}^{3} x_{3j} = x_{31} + x_{32} + x_{33} = 5 + 2 - 3 = 4$

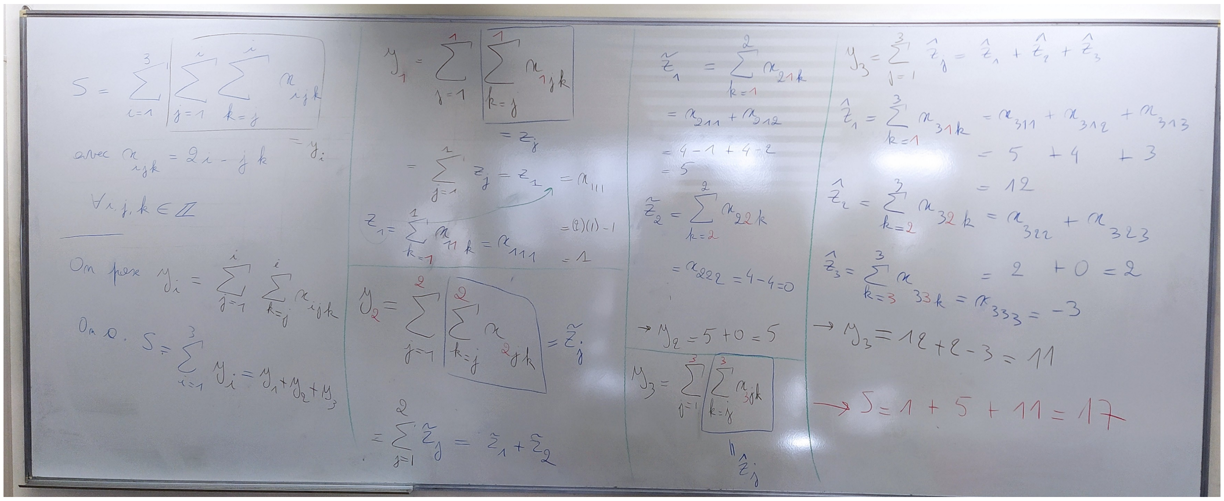
   D'où: $S = 1 + 3 + 4 = 8$

Déterminer:

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=j}^{i} x_{ijk}$$

Avec $\forall i, j, k \in \mathbb{Z} : x_{ijk} = 2i - jk$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=j}^{i} x_{ijk}$$



3.2.4 Applications

Exercice 1 $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Avec ce résultat, évaluer:

1. La somme des n premiers nombres **pairs** strictement positifs.
   (a) La somme des 5 premiers nombres pairs strictement positifs: 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30
   (b) La somme des 1000 premiers nombres pairs strictement positifs:

   solution

   $S = 2 + 4 + \dots$

   $= \sum_{i=1}^{1000} 2i = 2\sum_{i=1}^{1000} i = 2\frac{1000(1001)}{2} = (1000)(1001)$

2. La somme des $(n+1)$ premiers nombres impairs.
   (a) La somme des 5 premiers nombres impairs: 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25
   (b) Que vaut la somme des 50 premiers nombres impairs:

   solution

   $S = 1 + 3 + 5 + \dots$

   $= \sum_{i=0}^{49}(2i+1) = \sum_{i=0}^{49} 2i + \sum_{i=0}^{49} 1 = 2\sum_{i=0}^{49} i + \sum_{i=0}^{49} 1$

   $= 2\sum_{i=0}^{49} i + 1(49 - 0 + 1)$

   = $2\sum_{i=1}^{49} i + 50$ = $2\frac{49(50)}{2} + 50 = 50(49+1) = 50^2$

1. Déterminer y_1 en sachant que:

$$n \in \mathbb{N}_0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 55, \quad \sum_{i=2}^{n} y_i = 20 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = 90$$

solution

$90 = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = x_1 + y_1 + \sum_{i=2}^{n}(x_i + y_i)$

$= x_1 + y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i + \sum_{i=2}^{n} y_i$

$= y_1 + x_1 + \sum_{i=2}^{n}(x_i) + 20$

$= y_1 + \sum_{i=1}^{n}(x_i) + 20$

$= y_1 + 55 + 20 = y_1 + 75$

Donc: $y_1 = 90 - 75 = 15$

1. Démontrer les deux égalités suivantes:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \forall q \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Somme des 100 premiers nombres:

S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100 S = 100 + 99 + 98 + 97 + ... + 2 + 1

2S = 101 + 101 + 101 + ... + 101 + 101 2S = 100(101)

S = 100(101) / 2 = 10100 = 5050

3.3 Application

3.3.1 Exercices

1. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Avec ce résultat, évaluer:
   (a) La somme des $(n+1)$ premiers nombres impairs. (En déduire la somme des 50 premiers nombres impairs).
   (b) La somme des n premiers nombres pairs strictement positifs. (En déduire la somme des 1000 premiers premiers nombres pairs strictement positifs).

pdf

1. Déterminer y_1 en sachant que:

$$n \in \mathbb{N}_0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 55, \quad \sum_{i=2}^{n} y_i = 20 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = 90$$

2. Démontrer les deux égalités suivantes:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \forall q \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

3.4 Références

- S. Thiry, *Initiation à la démarche mathématique*, Librairie des sciences de Namur, 2015.
- *Les symboles $\sum$ et $\prod$. Le binôme de newton.*, partie 1, https://www.maths-france.fr/MathSup/Cours/06-sigma-binome.pdf, consulté en septembre 2020.

4 Démonstrations par récurrence

4.1 Démonstration par récurrence

4.1.1 Introduction

Un théorème est constitué d'hypothèses et d'une conclusion: si les hypothèses sont vraies, alors un théorème permet d'affirmer que la conclusion l'est aussi.

C'est-à-dire, notons, sous forme de propositions ou de prédicats, H les hypothèses et C la conclusion d'un théorème, démontrer ce théorème revient à démontrer que la proposition $(H \Rightarrow C)$ est vraie.

Nous allons établir plusieurs stratégies de démonstration en fonction de la forme des hypothèses et de la conclusion. Nous verrons également la démonstration par récurrence, utile lors de la définition de fonctions (ou procédures) récursives.

4.1.2 Démonstration par récurrence

On souhaite démontrer qu'une propriété est vérifiée pour tous les nombres entiers. Comme il en existe une infinité, on ne peut pas tous les tester. On adopte alors une stratégie de démonstration dite *par récurrence*. Le principe est de vérifier un cas de base (la propriété est satisfaite en 0), puis de considérer une nombre n quelconque, et de montrer que: si la propriété est satisfaite en n, alors elle l'est aussi en $n+1$.

Considérons un théorème dont la conclusion est de la forme $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$. La démonstration consiste en deux points:

1. **Pas initial:** démontrer que l'on a $P(0)$.
2. **Pas de récurrence:** démontrer que l'on a:

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

La stratégie de démonstration du point 2 est:

Hypothèses	Conclusion
	$\forall n : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Hypothèses	Conclusion
$n \in \mathbb{N}$	$P(n+1)$
P(n)	

Exercices Démontrer les récurrence les égalités suivantes:

Exercice 1 $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

solution

La proposition peut s'écrire:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : P(n)$$

avec $P(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Démonstration par récurrence:

1. Cas de base: $n = 1$.

   A-t-on: $P(1)$ est vrai? i.e. $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ **OK**

2. Pas de récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

   Soit $n \in \mathbb{N}_0$ *arbitraire*.

   Démontrer: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

P	Q	P => Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

   Si P(n) est faux, l'implication est toujours vrai.

   Donc, on va supposer que P(n) est vrai, et montrer que dans ce cas, P(n+1) est vrai aussi. On appelle ça: L'**hypothèse de récurrence**.

   Supposons (**hypothèse de récurrence**) que $P(n)$ soit vrai. Montrons alors que $P(n+1)$ est vrai aussi.

$$P(n+1) \equiv \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

   $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{\text{HR}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n-1 + n + n+1)

= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n-1 + n) + n+1

Exercice 2

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\} : \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exercice 3

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 4

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

1. Solution
   (a) Cas de base: $n = 1$
      - LHS: $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2}$
      - RHS: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

   (b) Pas de récurrence:

   $$\forall n \in \mathbb{N}_0 : P(n) \implies P(n+1)$$

   Avec $P(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

   Soit $n \in \mathbb{N}_0$ arbitraire, et supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie, i.e.: $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+2}$

   On a: $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)}$

   = $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \sum_{i=n+1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)}$

   = $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

   $\stackrel{\text{HR}}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

   $= 1 - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

   On a:

   $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2}$

Exercice 5 $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R} : x > -1 \implies (1+x)^n \geq 1 + nx$

1. Solution

   $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R} : x > -1 \implies (1+x)^n \geq 1 + nx$

   $\equiv \forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : x > -1 \implies (1+x)^n \geq 1 + nx$

   Soit $x \in \mathbb{R}$ arbitraire. Montrons:

   $\forall n \in \mathbb{N} : x > -1 \implies (1+x)^n \geq 1 + nx$

   Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Cas de base: $n = 0$.

   Montrons: $x > -1 \implies (1+x)^0 \geq 1 + 0x$

   On suppose que $x > -1$. Donc $(1+x)^0 = 1 \geq 1$

   Rappel: 0^0 est une forme indéterminée ($\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$)

   Pas de récurrence:

   $P(n) \equiv x > -1 \implies (1+x)^n \geq 1 + nx$

   Montrons: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \implies P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ arbitraire. On suppose $P(n)$ est vraie. Mq $P(n+1)$ est vraie.

i.e. $x > -1 \implies (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

Supposons $x > -1$. Mq $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

Indication: faire intervenir $(1+x)^n \ldots$

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$

Par H.R.: $(1+x)^n \geq 1 + nx \iff (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \iff (1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2$ $\iff (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$

car $nx^2 \geq 0$

```
Rappels:

        2 < 3
     (2)2 < (2)3
        4 < 6

         2  <     3
     (-3)2  > (-3)3
        -6  > -9
```

Exercice 6 $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

1. Solution

   Cas de base: $n = 1$.

   - LHS: $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$
   - RHS: $\frac{1^2(2)^2}{4} = 1$

   LHS = RHS **OK**

   Pas de récurrence:

   On note: $P(n) \equiv \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   Montrons que: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : P(n) \implies P(n+1)$

   Soit $n \in \mathbb{N}_0$ arbitraire. Et supposons (H.R.) que $P(n)$ est vraie. Mq $P(n+1)$ est vraie, i.e.

   $$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

   $\sum_{k=1}^{n+1} k^3$

   $= \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^3$

   $= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

   $= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$

   $= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4(n+1))$

$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

On remarque: $n^2 + 4(n+1) = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$

Exercice 7 Soit la suite définie par: $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = \frac{u_n}{1+u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ Montrer: $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{2}{2n+1}$

1. Solution 7

   Cas de base: $n = 0$: $u_0 = \frac{2}{2(0)+1} = 0$ ok

   Pas de récurrence: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n = \frac{2}{2n+1}$. Mq $u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1} = \frac{2}{2n+3}$

   Par définition de la suite:

   $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+3}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1}\frac{2n+1}{2n+3} = \frac{2}{2n+3}$

   Rappel: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{d}{c}$

Exercice 8 Montrer: $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}_0$

1. Solution Cas de base: $n = 1$: $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 = 2^1 - 1 = 1$ **OK**

   Pas de récurrence: Soit $n \in \mathbb{N}_0$. On suppose $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$. Mq $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

   $\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + \sum_{i=n}^{n} 2^i = 2^n - 1 + 2^n = 2^n(1+1) - 1 = 2^n(2) - 1 = 2^{n+1} - 1$

5 Notions de correspondance

5.1 Correspondance - définitions de base

5.1.1 Couple et produit cartésien

On appelle un couple de deux objets a et b, un objet, noté (a,b), qui satisfait à la proposition suivante:

$$\forall a, b, c, d : (a,b) = (c,d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d).$$

On dira que a est l'**origine** du couple (a,b), et b son **extrémité**.

Remarque: Quelle est la différence entre (a,b) et $\{a,b\}$?

La notion de couples de deux objets peut être généralisée à n objets: on parlera de nuplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (tuple).

5.1.2 Graphe

On désigne par graphe un ensemble de couples. Nous introduisons la première projection, notée pr_1, et la seconde projection, notée pr_2, d'un graphe comme suit:

$$\mathrm{pr}_1 G = \{x \mid \exists y : (x,y) \in G\}$$
$$\mathrm{pr}_2 G = \{y \mid \exists x : (x,y) \in G\}$$

5.1.3 Produit cartésien

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Le **produit cartésien** de deux ensembles A et B, noté $A \times B$, est défini comme l'ensemble des couples dont l'origine appartient à A et l'extrémité à B, i.e. on a :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \land b \in B\}$$

On peut généraliser la notion de produit cartésien à un nombre quelconque d'en- sembles :

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1 \land a_2 \in A_2 \land \cdots \land a_n \in A_n\}$

Exemple: A = {1,2} et B = {6, 7}

A x B = {(1,6), (1,7), (2,6), (2,7)}

Exemples: $G \subseteq A \times B$

- $G = \emptyset$
- $G = \{(1, 6)\}$
- $G = \{(1, 7)\}$
- $G = \{(1, 6), (2, 6), (2, 7)\}$
- ...

$$\mathrm{pr}_1 G = \{x \,|\, \exists y : (x, y) \in G\}$$
$$\mathrm{pr}_2 G = \{y \,|\, \exists x : (x, y) \in G\}$$

$G = \{(1, 6), (2, 6), (2, 7)\}$

Ici, $\mathrm{pr}_1 G = \{1, 2\}$ et $\mathrm{pr}_2 G = \{6, 7\}$

$1 \in \mathrm{pr}_1 G$ car $\exists y : (1, y) \in G$? Prendre $y = 6$

5.1.4 Correspondance

Une **correspondance** f sur un ensemble A et à valeurs dans un ensemble B est un triplet $f = (G, A, B)$, avec $G \subseteq A \times B$.

G est appelé **graphe** de f , A son **domaine** et B l'*ensemble de valeurs* de f .

On définit respectivement le domaine de définition de f et l'image de f par:

- $\mathrm{Dom} f = \mathrm{pr}1G$,
- $\mathrm{Im} f = \mathrm{pr}2G$.

Si $(x, y) \in G$, alors on dira que y est l'image de x par f .

Exercice Considérons la correspondance $f = (G, A, B)$ où:

$$\begin{aligned}A &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\},\\ B &= \{b_1, b_2, b_3, b_4\},\\ G &= \{(a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_4, b_2), (a_5, b_3)\}.\end{aligned}$$

Illustrer cette correspondance par un diagramme sagital et par une représentation cartésienne.

On a bien: $G \subseteq A \times B$

5.2 Réciproque d'un correspondance

Considérons une correspondance $f = (G, A, B)$. Nous définissons sa réciproque, notée f^{-1}, par:

$$f^{-1} = (G^{-1}, B, A),$$

où $G^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in G\}$ est appelé graphe réciproque de G.

Remarque: En réalisant le diagramme sagital de la réciproque de la correspondance de l'exercice précédant, on peut observer que celui-ci est obtenu en inversant les flèches.

5.3 Relation sur un ensemble

Une relation sur un ensemble A est une correspondance définie sur A et à valeur dans A. Une relation f sur A est donc définie comme:

$$f = (G, A, A), \qquad \text{avec } G \subseteq A \times A.$$

Exercice Considérons la relation $f = (G, A, A)$ telle que:

$$\begin{aligned}A &= \{1, 2, 3, 4, 5\}\\ G &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 3), (3, 3), (3, 5), (3, 1), (3, 2)\}\end{aligned}$$

Représenter le graphe dirigé (appelé digraphe) de f où chaque élément de A est représenté par un cercle (appelé sommet) contenant la représentation de cet élément, et où chaque couple $(a, b) \in G$ est représenté par une flèche (appelée arête).

5.3.1 Relation particulière

La relation identité sur A, notée $\mathbb{1}_A$ ou Id_A, est définie par:

$$\mathbb{1}_A = (G, A, A), \qquad \text{avec } G = \{(x, x) \mid x \in A\}.$$

Nous pouvons remarquer que:

- Dom $\mathbb{1}_A =$ Im $\mathbb{1}_A = A$,
- $(\mathbb{1}_A)^{-1} = \mathbb{1}_A$.

Exercice Soit l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$. Représenter le digraphe de $\mathbb{1}_A$.

5.4 Propriétés d'une correspondance

Propriétés d'une correspondance Considérons une correspondance $f = (G, A, B)$. On dira que f est:

1. Partout définie: si $\mathrm{pr}_1 G = A$.
2. Surjective: si $\mathrm{pr}_2 G = B$.
3. Fonctionnelle: si

$$\forall a \in A, \forall b_1, b_2 \in B : (a, b_1) \in G \wedge (a, b_2) \in G \Rightarrow b_1 = b_2$$

   ou de manière équivalente:

$$\forall a \in A, !b \in B : (a, b) \in G$$

4. Injective: si

$$\forall a_1, a_2 \in A, \forall b \in B : (a_1, b) \in G, (a_2, b) \in G \Rightarrow a_1 = a_2$$

   ou de manière équivalente:

$$\forall b \in B, !a \in A : (a, b) \in G$$

5.5 Différents types de correspondances

5.5.1 Fonction et application

Considérons une correspondance $f = (G, A, B)$. On appelle fonction une correspondance fonctionnelle. On a, dès lors, que tout élément du domaine de f a exactement une image.

On notera une fonction comme:

$$f : A \to B, a \mapsto f(a),$$

où $f(a)$ est l'unique image de a.

Une application est une fonction partout définie. On a donc que tout élément de A possède exactement une image.

Notons D ce domaine ($\mathrm{Dom}(f)$), f' est une application:

$f' : D \to B, a \mapsto f'(x)$

5.5.2 Restriction d'une application

Nous définissons la restriction de l'application f à l'ensemble A', notée $f_{|A'}$ par:

$$f_{|A'} = (G \cap (A' \times B), A', B).$$

Exercice Considérons l'application $f = (G, A, B)$ telle que:

$$
\begin{aligned}
A &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \\
B &= \{b_1, b_2, b_3, b_4\} \\
G &= \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_2), (a_4, b_3)
\end{aligned}
$$

Considérons, de plus, l'ensemble $A' = \{a_1, a_3\}$. Représenter le diagramme sagittal de f et de $f_{|A'}$.

5.5.3 Injection, surjection, bijection

- Une **injection** est une application injective.
- Une **surjection** est une application surjective.
- Une **bijection** est une application bijective (i.e. injective et surjective).

5.6 Composée de correspondance

5.6.1 Composée de deux graphes

Considérons deux graphes G et H. On définit la composée $H \circ G$ (qui se lit « H après G ») comme suit:

$$H \circ G = \{(x, z) \,|\, \exists y : (x, y) \in G \wedge (y, z) \in H\}$$

Exercice Considérons les ensembles:

$$
\begin{aligned}
H &= \{(1, 3), (2, 5), (5, 8), (7, 1)\} \\
G &= \{(1, 2), (3, 4), (3, 5), (5, 7)\} \\
S &= \{(1, 3), (2, 4), (3, 6)\}
\end{aligned}
$$

Déterminer les ensembles suivantes:

- $H \circ G$
- $H \circ S$
- $G \circ H$
- $G \circ S$
- $S \circ H$
- $S \circ G$

5.6.2 Composée de deux correspondances

Considérons deux correspondances f et g tel que l'ensemble des valeurs de f est identique au domaine de g, i.e.

$$f = (G, A, B), \quad g = (H, B, C).$$

On peut alors définir la composée $g \circ f$ comme:

$$g \circ f = (H \circ G, A, C).$$

Considérons trois correspondances $f = (G, A, B)$, $g = (H, B, C)$ et $h = (K, C, D)$. Nous avons les trois égalités suivantes:

1. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (associativité de la composition de correspondances)

   $((h \circ g) \circ f) \circ h$

1. $\mathbb{1}_B \circ f = f \circ \mathbb{1}_A = f$
2. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (**important!**)

Exercice

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \\ C &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\ G &= \{(1, 3), (2, 5), (5, 8), (7, 1)\} \\ H &= \{(1, 2), (3, 4), (3, 5), (5, 7)\} \end{aligned}$$

$$f = (G, C, B), \quad g = (H, B, C).$$

$f^{-1} = (G^{-1}, B, C)$ $G^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in G\}$

Déterminer:

1. $f \circ g$
2. f^{-1}
3. g^{-1}
4. $g^{-1} \circ f^{-1}$
5. $(f \circ g)^{-1}$