Ejercicio 2.11[B]

Una empresa tiene una función de producción

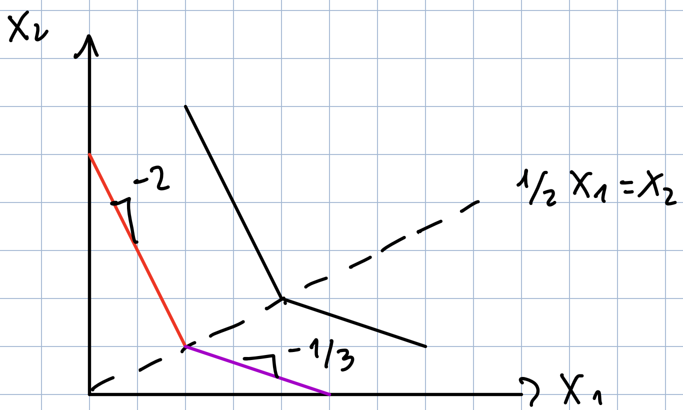
$$f(x_1, x_2) = \min\{2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2\}$$

donde x_1 y x_2 son las cantidades de los inputs 1 y 2 que utiliza la firma para producir un único producto y. El precio del insumo 1 es $w_1 = 3$ y el del insumo 2 es $w_2 = 5$. Supongamos adicionalmente que se quieren producir 10 unidades de producto. Hallar las cantidades de los insumos 1 y 2 que se van a utilizar tomando en cuenta que la empresa quiere minimizar los costos de producción.

1° Busco rayo de vértices: $2x_1 + x_2 = x_1 + 3x_2$

$x_1 = 2x_2$

$\frac{1}{2}x_1 = x_2$



2° Si $2x_1 + x_2 < x_1 + 3x_2$

Grafico $\bar{y} = 2x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = \bar{y} - 2x_1$

Para ver dónde lo grafico, despejo $2x_1 + x_2 < x_1 + 3x_2$

$\frac{1}{2}x_1 < x_2$

3° Si $2x_1 + x_2 > x_1 + 3x_2 \Rightarrow$ Grafico $x_1 + 3x = \bar{y}$

$3x_2 = \bar{y} - x_1$

$x_2 = \bar{y}/3 - 1/3\, x_1$

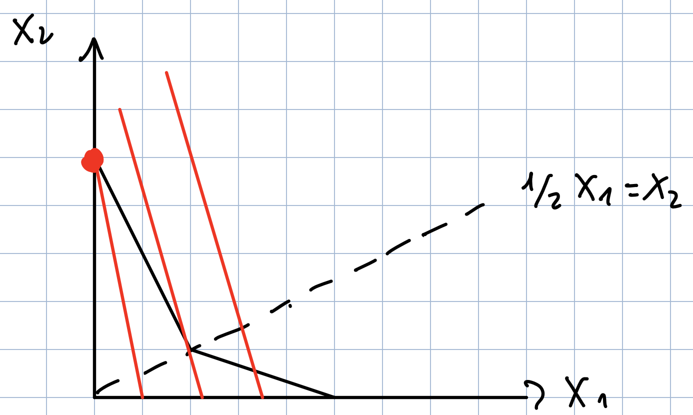
Lo grafico en $2x_1 + x_2 > x_1 + 3x_2$

$\frac{1}{2}x_1 > x_2$

Para minimizar costos comparo $\frac{w_1}{w_2}$ con las pendientes (-2) y $(-\frac{1}{3})$

Tengo 5 casos.

Caso 1: $\frac{w_1}{w_2} > 2$



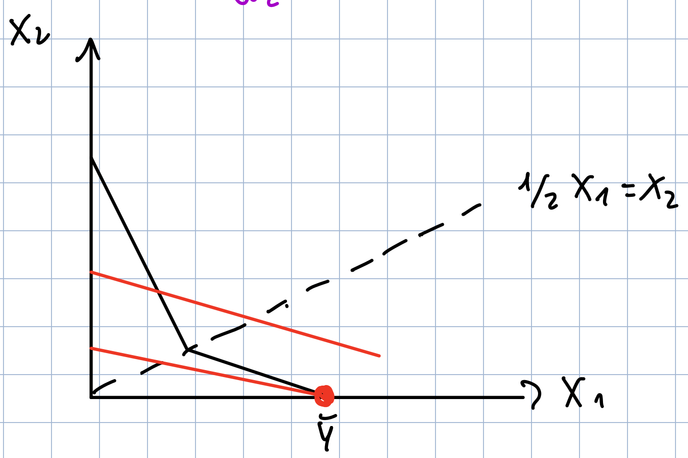
– iso cuanta
– iso costo

$\boxed{x_1^c = 0}$

Para ver x_2: $\bar{y} = 2x_1^c + x_2^c$
$\bar{y} = 2 \cdot 0 + x_2^c$

$\boxed{x_2^c = \bar{y}}$

Caso 2: $\frac{w_1}{w_2} < 1/3$



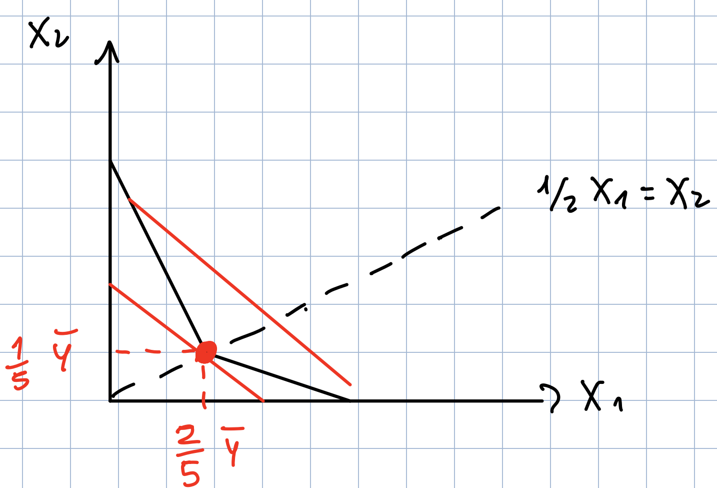
– iso cuanta
– iso costos

$\boxed{x_2^c = 0}$

$\bar{y} = x_1^c + 3x_2^c = x_1^c + 3 \cdot 0$

$\boxed{x_1^c = \bar{y}}$

Caso 3: $\frac{1}{3} < \frac{w_1}{w_2} < 2$



– iso cuanta
– iso costo

$$\begin{cases} 1/2\, x_1 = x_2 & (1) \\ \bar{y} = 2x_1 + x_2 & (2) \end{cases}$$

Uso (1) en (2)

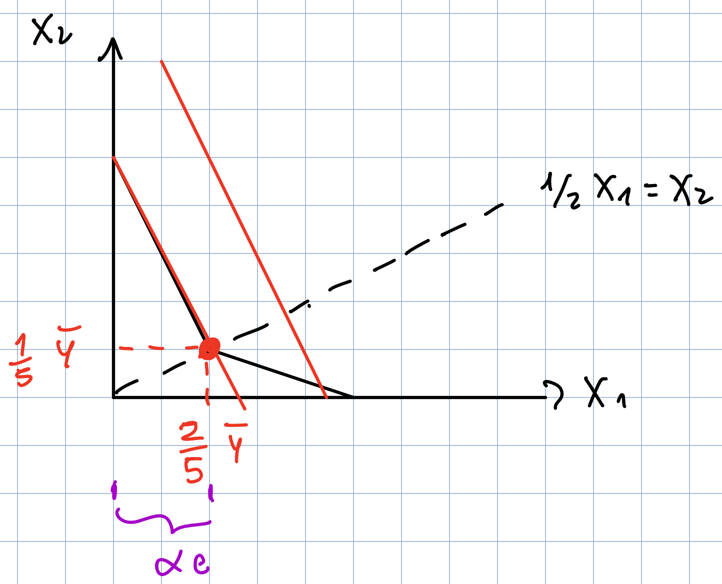
$$\bar{y} = 2x_1 + \underbrace{\frac{1}{2}x_1}_{= x_2}$$

$$\bar{y} = \frac{5}{2}x_1$$

$$\boxed{x_1^c = \frac{2}{5}\bar{y}}$$

En (1): $\boxed{x_2^c = \frac{1}{5}\bar{y}}$

Caso 4: $\frac{w_1}{w_2} = 2$



– iso cuanta

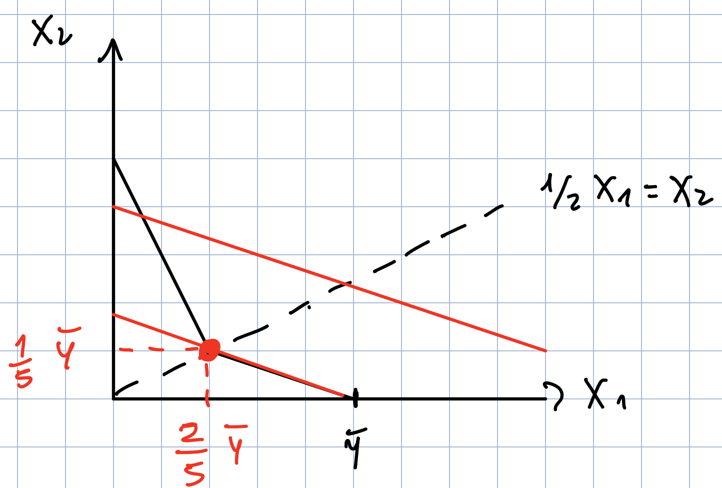
– isocosto

$$\boxed{x_1^c \in \alpha \in \left[0; \frac{2}{5}\bar{y}\right]}$$

$$\bar{y} = 2x_1^c + x_2 \Rightarrow \bar{y} = 2 \cdot \alpha + x_2^c$$

$$\boxed{x_2^c = \bar{y} - 2\alpha}$$

Caso 5: $w_1/w_2 = 1/3$



– iso cuanta

– iso costos

$$\boxed{x_1^c = B \in \left[\frac{2}{5}\bar{y}; \bar{y}\right]}$$

$$\bar{y} = x_1 + 3x_2 = B + 3x_2$$

$$\boxed{x_2^c = \frac{1}{3}\bar{y} - \frac{1}{3}B}$$

Para este ejercicio, $\frac{w_1}{w_2} = \frac{3}{5}$ y $\bar{y} = 10$

Como $\frac{1}{3} < \frac{3}{5} < 2 \Rightarrow$ corresponde a mi caso 3:

$$\begin{cases} x_1^c = \frac{2}{5}\bar{y} = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4 \\ x_2^c = \frac{1}{5}\bar{y} = \frac{1}{5} 10 = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.10[A]

Derive las funciones de costo para las siguientes tecnologías

(a) $f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$

(b) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

(c) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \min\{a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n\}$

(d) $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ $\longrightarrow$ pendiente $= a/b$: $\bar{y} - ax_1 = bx_2$

$\bar{y}/b - a/b\, x_1 = x_2$

(e) $f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\} - k$, con $k > 0$

(Ayuda: Este es un poco más difícil. Hay un pequeño problema con esta formulación. Piense cuidadosamente cuál puede ser este problema y cómo puede resolverlo)

d) Faltaba armar la función de costos

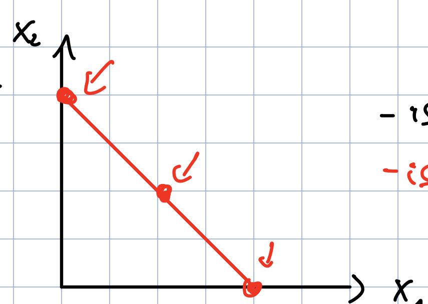
$$x_1^c = \begin{cases} \bar{y}/a & \text{si } \dfrac{w_1}{w_2} < \dfrac{a}{b} \\ \alpha \in [0; \bar{y}/a] & \text{si } \dfrac{w_1}{w_2} = \dfrac{a}{b} \\ 0 & \text{si } \dfrac{w_1}{w_2} > \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

$$x_2^c = \begin{cases} 0 & \text{si } w_1/w_2 < a/b \\ \dfrac{\bar{y}}{b} - \dfrac{a}{b}\alpha & \text{si } w_1/w_2 = a/b \\ \bar{y}/b & \text{si } w_1/w_2 > a/b \end{cases}$$

$$C(y, w_1; w_2) = \begin{cases} w_1 \cdot \bar{y}/a & \text{si } w_1/w_2 < a/b \\ w_1 \cdot \bar{y}/a = w_2 \cdot \bar{y}/b & \text{si } w_1/w_2 = a/b \\ w_2 \cdot \bar{y}/b & \text{si } w_1/w_2 > a/b \end{cases}$$

Para el caso $w_1/w_2 = a/b$:

Todos los puntos sobre la isocosto resultan en el mismo gasto



- isocuanta
- isocosto

↳ una encima de la otra

Preferencias

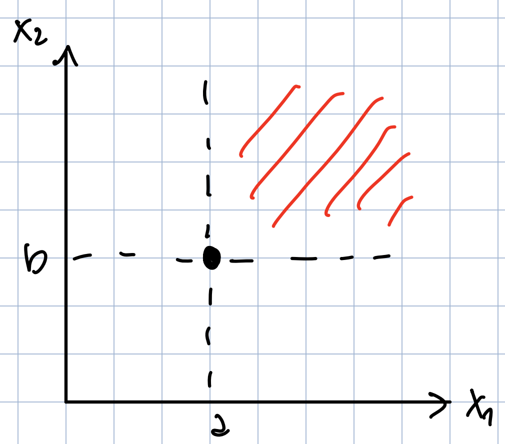
Monotonicidad

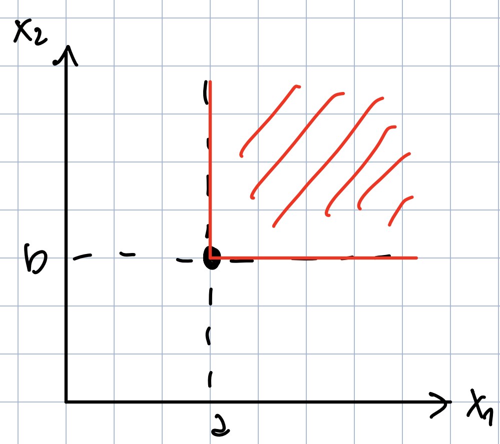
La relación de preferencia $\succeq$ es **monótona** si $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ tales que $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$, se cumple que $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.
La relación de preferencia es **estríctamente monótona** si $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$, con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, vale que $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.

Convexidad

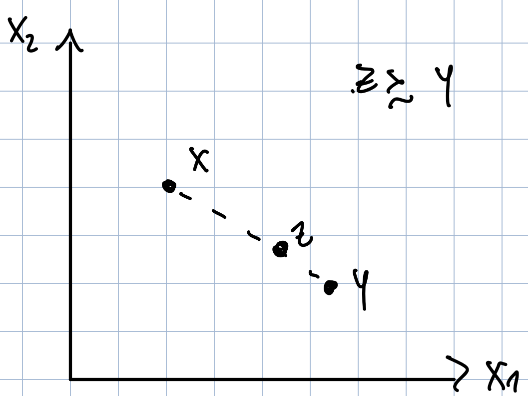
La relación de preferencia $\succeq$ es **convexa** si $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ tales que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ y para todo $\alpha \in [0;1]$, se cumple que, dado un $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}$ sucede que $\mathbf{z} \succeq \mathbf{y}$.
La relación de preferencia es **estríctamente convexa** si $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ con $\alpha \in (0;1)$ se da $\mathbf{z} \succ \mathbf{y}$.

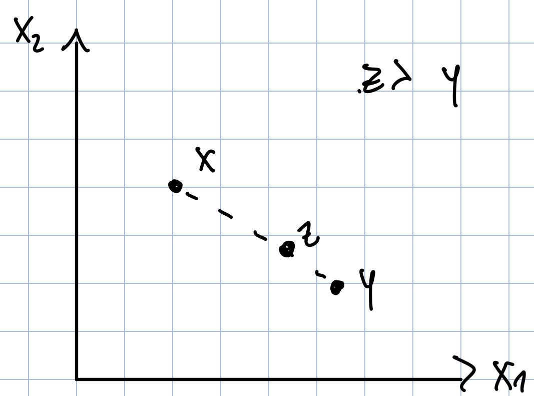
Monotonicidad $\longrightarrow$ Estricta





Convexidad $\longrightarrow$ Estricta

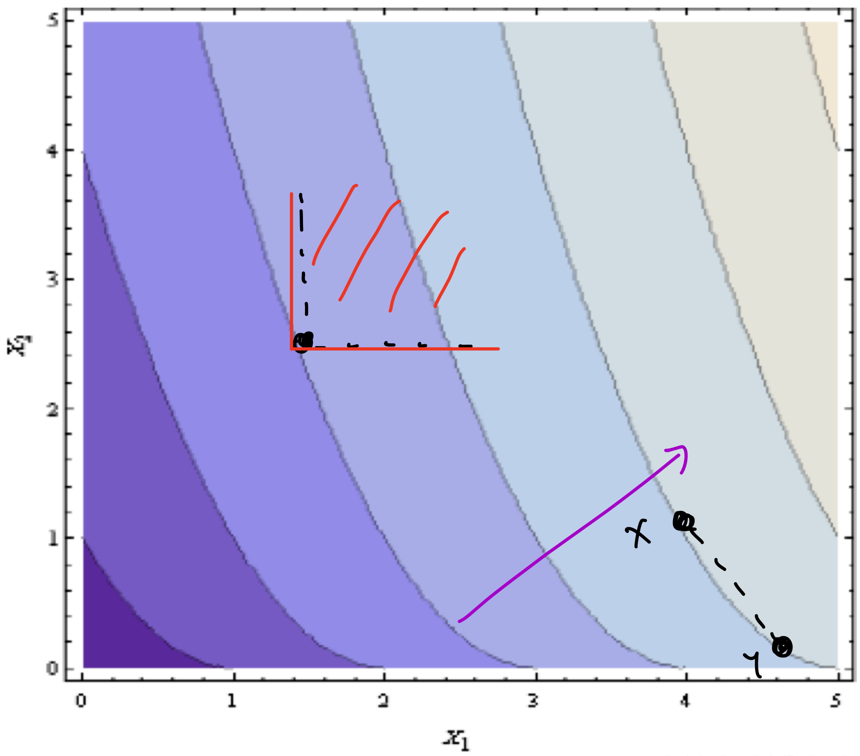




3.1)

a)

$$u(x_1; x_2) = x_1 + x_2^{1/2}$$



$\bar{U} = X_1 + X_2^{1/2}$

$\bar{U} - X_1 = X_2^{1/2}$

$(\bar{U} - X_1)^2 = X_2$

✓ Monotonicidad

✓ Monotonicidad estricta

$\frac{\partial U}{\partial X_1} > 0$ y $\frac{\partial U}{\partial X_2} > 0$

✓ Convexidad y ✓ Convexidad estricta

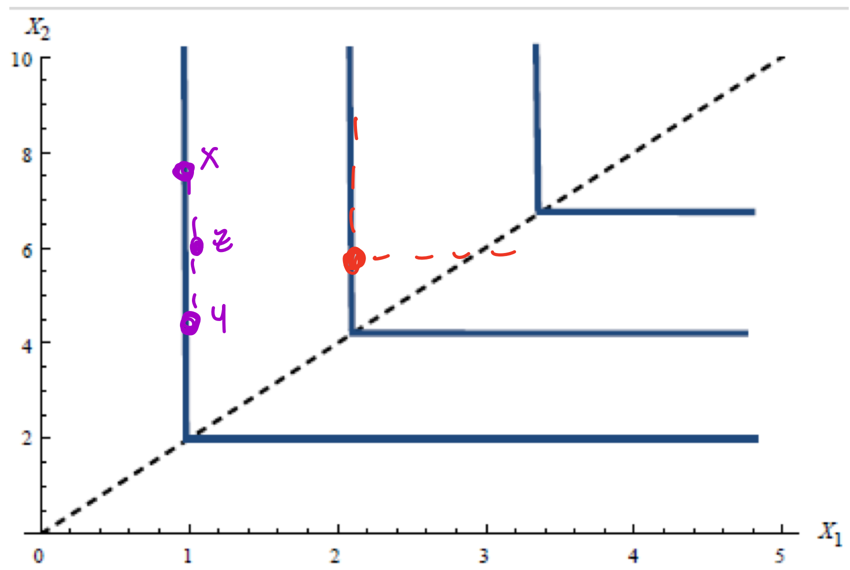
Dado que las $\succsim$ crecen hacia ↗, puedo ver convexidad calculando:

$\frac{d X_2}{d X_1} < 0$ y $\frac{d^2 X_2}{d X_1^2} > 0$ → Convexa estricta

$= 0$ → Convexa

d)

$$u(x_1; x_2) = k \min\{2x_1; x_2\} + 3$$



✓ Monótona

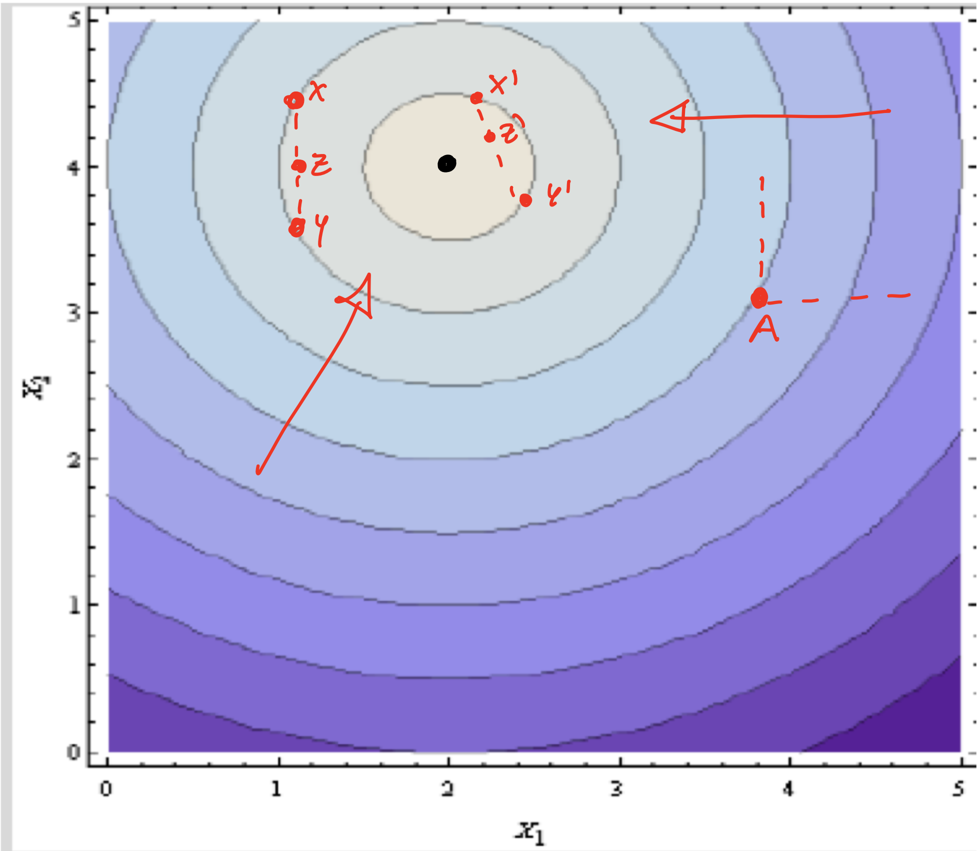
✗ Monótona estricta

✓ Convexa

✗ Convexidad estricta

f)

$$u(x_1; x_2) = -\sqrt{(x_1-2)^2+(x_2-4)^2}$$



Estas preferencias tienen un punto de saciedad global en (2; 4). Para verlo notemos que en ese punto ocurre que:

$$U(2;4) = -\sqrt{(2-2)^2+(4-4)^2} = 0$$

Mientras que, para cualquier otro par $(x_1; x_2)$ ocurre que $(x_1-2)^2>0$ o $(x_2-4)^2>0$, de manera tal que

$$U\left((x_1;x_2) \neq (2,4)\right) < 0$$

Entonces, en (2; 4) el consumidor alcanza su máxima utilidad posible. Esto quiere decir que las curvas de indiferencia crecen hacia ese punto. (ver flechas)

Evaluemos MONOTONICIDAD

↳ Tomo el punto A: notemos que con cantidades mayores de x_1 y x_2 no necesariamente se logra una mejor felicidad. De hecho, como me alejo del punto de saciedad global, por lo que la utilidad cae. Entonces, no es monótona y, por lo tanto, tampoco puede ser monótona estricta.

Evaluemos CONVEXIDAD

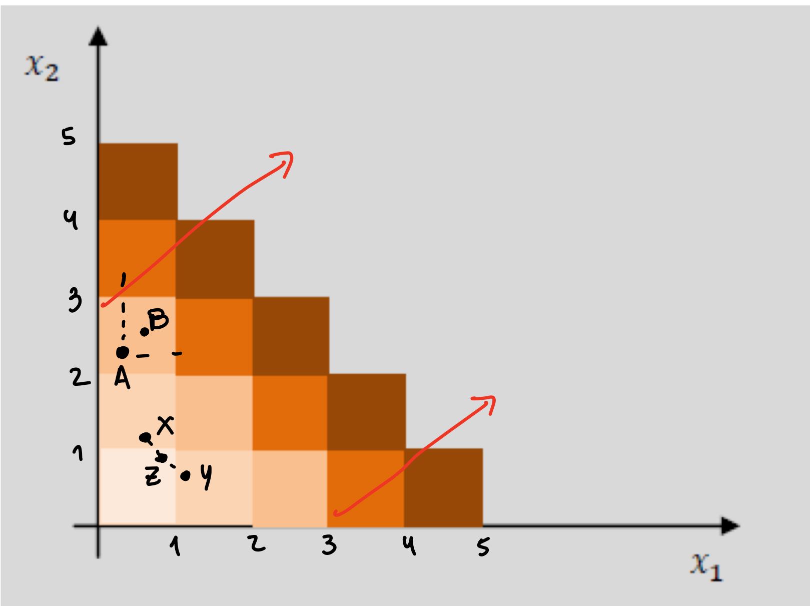
↳ Tomemos los puntos x e y: al hacer una combinación lineal entre esas canastas, cualquier z queda más cerca del punto de saciedad global y, por lo tanto, $z \succ y$.

↳ Tomemos los puntos x' e y': cualquier z' sobre la combinación lineal entre x' e y' queda más cerca del punto de saciedad global y, por lo tanto, $z' \succ y'$.

↳ Entonces, es convexa y es estrictamente convexa.

g)

$$u(x_1; x_2) = Int(x_1) + Int(x_2)$$



- Estas preferencias crecen hacia el noreste (↗).

- La función $Int(x_1)$ toma la parte entera de x_1. Es decir,
  $Int(3,5) = 3$
  $Int(3,9999) = 3$
  $Int(4,0001) = 4$
  $Int(4,9999) = 4$

- Si ↑ mi consumo de x_1 o x_2 en menos que una unidad, mi utilidad no siempre crece

Analicemos MONOTONICIDAD

↳ Tomo el punto A. Si ↑ x_1 y ↑ x_2, no necesariamente llego a canastas mejores, ya que si no aumento las cantidades lo suficiente como para incrementar las partes enteras de x_1 y x_2, puedo ir a una canasta como B, que da la misma utilidad que A.

↳ Por lo tanto, no es monótona (y no puede ser monótona estricta)

Analicemos CONVEXIDAD

↳ Notemos que si tomo puntos como x e y, hay algún z sobre su combinación lineal que me deja en una utilidad más baja.

↳ Por lo tanto, no es convexa (y no puede ser convexa estricta)