Ejercicio 2.5[B]

Considere el caso de un productor que utiliza sólo un insumo, x, para producir un único producto, y, de acuerdo con la siguiente tecnología de producción:

$$f(x) = x^{\alpha}, \text{ con } \alpha \in (0,1).$$

(a) Determine cómo son los rendimientos a escala y marginales de esta función de producción.

(b) Formule el problema de maximización de beneficios.

(c) Obtenga las funciones de demanda del insumo y de oferta del producto.

(d) Verifique que la condición de segundo orden se cumple. ¿Qué rol juega en esto lo que encontró en (a)?

(e) Formule el problema de minimización de costos.

(f) Obtenga la función de costos.

(g) Plantee el problema de maximización de beneficios usando la función de costos y obtenga la función de oferta. Verifique que es la misma que ya obtuvo en (c). Verifique nuevamente la condición de segundo orden. ¿Qué propiedad de la función de costos garantiza que se cumple?

Ejercicio 2.6[B]

Considere la siguiente función de producción

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \quad \text{con } \alpha \in (0,1)$$

(a) ¿Son los retornos a escala de f crecientes, constantes o decrecientes? ¿Son los retornos marginales decrecientes? Verifique ambos resultados de manera algebraica.

(b) Formule el problema de maximización de beneficios de la firma cuando el precio por unidad de output es p y los precios de los factores son w_1 y w_2 (ambos factores variables).

(c) Derive las condiciones de primer orden del problema de maximización de beneficios planteado en el inciso anterior.

(d) Asuma que (x_1^*, x_2^*) es el vector que resuelve las condiciones de primer orden del problema formulado en (b). Multiplique la condición del factor 1 por x_1^* y la condición para el factor 2 por x_2^*. Sume ambas condiciones ¿Qué le dice esta condición respecto de la maximización de beneficios en (x_1^*, x_2^*)?

(e) La forma de las condiciones de primer orden de d) le permite expresar la (asumida) elección óptima de x_1 y x_2 como una función del nivel de producto. Incorporando esto en la expresión para los beneficios se puede obtener una expresión un tanto engorrosa para los beneficios en función de p, w_1, w_2, α e y. Sean $\alpha = 1/2$ y $w_1 = w_2 = 1$. ¿Para qué precios del producto p (si es que existe alguno) hay una solución al problema de maximización de beneficios de la firma?

En caso de encontrar tal precio, ¿cuáles son los niveles de producto que resuelven el problema de maximización de beneficios?

Considere el caso de un productor que utiliza sólo un insumo, x, para producir un único producto, y, de acuerdo con la siguiente tecnología de producción:

$$f(x) = x^{\alpha}, \text{ con } \alpha \in (0,1).$$

(a) Determine cómo son los rendimientos a escala y marginales de esta función de producción.

a) Rendimientos a escala

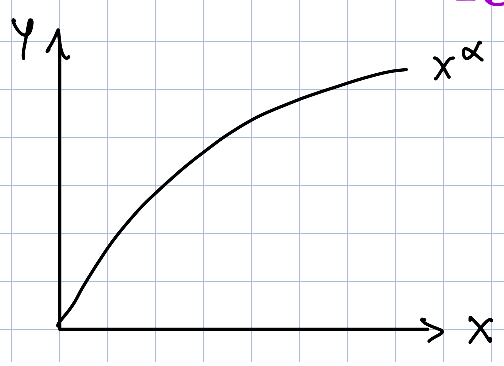
$$f(tx) = (tx)^{\alpha} = t^{\alpha} x^{\alpha} = t^{\alpha} \cdot f(x) \Rightarrow$$ Rendimientos a escala decrecientes $\swarrow$ $\alpha \in (0;1)$

Rend. marginales

$$PMg\,X = \frac{d f(x)}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} > 0$$

$$\frac{d\,PMg\,X}{dx} = f''(x) = \alpha \underbrace{(\alpha-1)}_{<0} x^{\alpha-2} < 0$$

Rendimientos marginales decrecientes



(b) Formule el problema de maximización de beneficios.

$$\pi = \underbrace{p \cdot y}_{\text{ingresos}} - \underbrace{w x}_{\text{costos}} \Rightarrow \text{Recordar: } y = x^{\alpha} = f(x)$$

$$\max_{x} \; p \cdot x^{\alpha} - wx$$

(c) Obtenga las funciones de demanda del insumo y de oferta del producto.

1° Encuentro x^*, resolviendo el problema de $\max_{x} \pi$

CPO] $$\frac{d\pi}{dx} = p\alpha x^{\alpha-1} - w = 0$$

$$p\alpha x^{\alpha-1} = w$$

$$x^{\alpha-1} = \frac{w}{p\alpha}$$

$$x = \left(\frac{w}{p\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$x^* = \left(\frac{p\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \longrightarrow \text{Demanda del insumo}$$

2° Busco y^*:

$$y = x^\alpha$$

$$y^* = (x^*)^\alpha$$

$$y^* = \left[\left(\frac{p\alpha}{w}\right)^{1/1-\alpha}\right]^\alpha$$

$$y^* = \left(\frac{p\alpha}{w}\right)^{\alpha/1-\alpha} \longrightarrow \text{Oferta del bien final}$$

(d) Verifique que la condición de segundo orden se cumple. ¿Qué rol juega en esto lo que encontró en (a)?

CSO) Para que x^* maximice la función de π:

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} < 0$$

$$\frac{d\pi}{dx} = p\alpha x^{\alpha-1} - w$$

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = p\alpha \underbrace{(\alpha-1)}_{<0} x^{\alpha-2} < 0$$

$\Rightarrow$ La función de π es cóncava $\Rightarrow$ tiene un máximo en x^*
(La $f(x)$ es cóncava)

Ejercicio 2.6$^{\mathrm{B}}$

Considere la siguiente función de producción

$$f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \quad \text{con } \alpha \in (0,1)$$

(a) ¿Son los retornos a escala de f crecientes, constantes o decrecientes? ¿Son los retornos marginales decrecientes? Verifique ambos resultados de manera algebraica.

a) Retornos a escala

$$f(tx_1; tx_2) = (tx_1)^\alpha (tx_2)^{1-\alpha} = t^\alpha x_1^\alpha t^{1-\alpha} x_2^{1-\alpha}$$
$$= t\, f(x_1; x_2)$$ Rend. Ctes a escala

Rend. Marginales

↳ Para x_1: $PMg\,x_1 = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} > 0$

$$\frac{\partial PMg\,x_1}{\partial x_1} = f_{11} = \alpha \underline{(\alpha - 1)} x_1^{\alpha-2} x_2^{1-\alpha} < 0$$

↳ Para x_2: $PMg\,x_2 = (1-\alpha) x_1^\alpha x_2^{-\alpha} > 0$

$$\frac{\partial PMg\,x_2}{\partial x_2} = f_{22} = (1-\alpha)\underline{(-\alpha)} x_1^\alpha x_2^{-\alpha-1} < 0$$

Rend. Marginales decrecientes para x_1 y x_2.

(b) Formule el problema de maximización de beneficios de la firma cuando el precio por unidad de output es p y los precios de los factores son w_1 y w_2 (ambos factores variables).

$$\max\ p\,y - w_1 x_1 - w_2 x_2 \quad \text{con} \quad y = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$$

$$\max_{x_1, x_2}\ p\, x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

(c) Derive las condiciones de primer orden del problema de maximización de beneficios planteado en el inciso anterior.

CPOs
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial x_1} = p\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} - w_1 = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial x_2} = p(1-\alpha) x_1^\alpha x_2^{-\alpha} - w_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

(d) Asuma que (x_1^*, x_2^*) es el vector que resuelve las condiciones de primer orden del problema formulado en (b). Multiplique la condición del factor 1 por x_1^* y la condición para el factor 2 por x_2^*. Sume ambas condiciones ¿Qué le dice esta condición respecto de la maximización de beneficios en (x_1^*, x_2^*)?

Multiplico a (1) por x_1^*

$$x_1^*\left(p\alpha(x_1^*)^{\alpha-1}(x_2^*)^{1-\alpha}-w_1\right)=(0)\;x_1^*$$

$$p\alpha(x_1^*)^{\alpha-1}(x_2^*)^{1-\alpha}x_1^*-w_1x_1^*=0$$

$$p\alpha(x_1^*)^{\alpha}(x_2^*)^{1-\alpha}-w_1x_1^*=0 \quad (3)$$

Multiplico a (2) por x_2^*

$$x_2^*\left(p(1-\alpha)(x_1^*)^{\alpha}(x_2^*)^{-\alpha}-w_2\right)=(0)\;x_2^*$$

$$p(1-\alpha)(x_1^*)^{\alpha}(x_2^*)^{-\alpha}x_2^*-w_2x_2^*=0$$

$$p(1-\alpha)(x_1^*)^{\alpha}(x_2^*)^{1-\alpha}-w_2x_2^*=0 \quad (4)$$

Sumo (3) + (4)

$$p\alpha(x_1^*)^{\alpha}(x_2^*)^{1-\alpha}-w_1x_1^*+p(1-\alpha)(x_1^*)^{\alpha}(x_2^*)^{1-\alpha}-w_2x_2^*=0$$

$$p(x_1^*)^{\alpha}(x_2^*)^{1-\alpha}(\cancel{\alpha}+1-\cancel{\alpha})-w_1x_1^*-w_2x_2^*=0$$

$$\underbrace{p(x_1^*)^{\alpha}(x_2^*)^{1-\alpha}-w_1x_1^*-w_2x_2^*}_{\text{es la fn de }\pi\text{ evaluada en el óptimo}}=0$$

es la fn de π evaluada en el óptimo $=0$

IMP! Si $f(x_1;x_2)$ tiene rendimientos constantes a escala, entonces los π tienen que ser 0 en el óptimo.

(e) La forma de las condiciones de primer orden de d) le permite expresar la (asumida) elección óptima de x_1 y x_2 como una función del nivel de producto. Incorporando esto en la expresión para los beneficios se puede obtener una expresión un tanto engorrosa para los beneficios en función de p, w_1, w_2, α e y. Sean $\alpha = 1/2$ y $w_1 = w_2 = 1$. ¿Para qué precios del producto p (si es que existe alguno) hay una solución al problema de maximización de beneficios de la firma?

En caso de encontrar tal precio, ¿cuáles son los niveles de producto que resuelven el problema de maximización de beneficios?

1° Busco expresar $x_1(y, p, w_1, w_2)$ y $x_2(y, p, w_1, w_2)$

CPO) $\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial x_1} = p\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} - w_1 = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial x_2} = p(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} - w_2 = 0 & (2) \end{cases}$

De (1): $\underbrace{[p \overbrace{(\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha})}^{PMg\,x_1}]}_{Img} = \underbrace{[w_1]}_{CMg}$ (5)

De (2): $\underbrace{[p(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}]}_{Img} = \underbrace{[w_2]}_{CMg}$ (6)

Divido (5) por (6): $\dfrac{\cancel{p}\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{\cancel{p}(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}} = \dfrac{w_1}{w_2}$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} x_1^{\cancel{\alpha}-1-\cancel{\alpha}} x_2^{1-\cancel{\alpha}+\cancel{\alpha}} = \frac{w_1}{w_2}$$

$$\underbrace{\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{x_2}{x_1}}_{TMST} = \underbrace{\frac{w_1}{w_2}}_{\text{precios relativos}}$$

TMST ⇕ pendiente de la isocuanta

$$x_2 = \frac{w_1}{w_2} \frac{1-\alpha}{\alpha} x_1 \quad (7)$$

Uso (7) en $y = f(x_1; x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$

$$y = x_1^{\alpha} \left(\frac{w_1}{w_2} \frac{1-\alpha}{\alpha} x_1 \right)^{1-\alpha}$$

$$y = x_1^{\alpha+1-\alpha} \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

$$y = x_1 \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

$$x_1(y) = y \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

De (7), $x_2 = \frac{w_1}{w_2}\,\frac{1-\alpha}{\alpha}\,\underbrace{y\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}}_{=x_1}$

$$x_2 = w_1^{\,1-(1-\alpha)}\; w_2^{\,-1+1-\alpha}\; (1-\alpha)^{1-(1-\alpha)}\; \alpha^{-1+1-\alpha}\; y$$

$$x_2(y) = y\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}$$

2° Reemplazo en la función de beneficios:

$$\pi = py - w_1\,x_1(y) - w_2\,x_2(y)$$

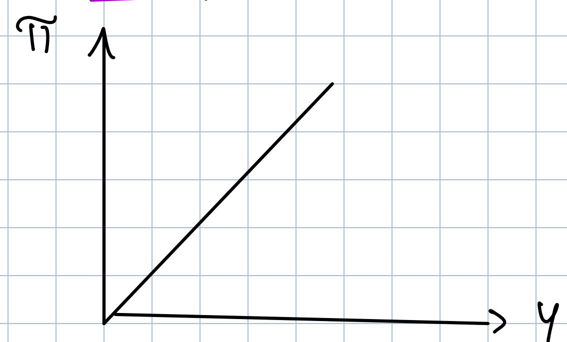
$$= p\cdot y - w_1\, y\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} - w_2\, y\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}$$

$$\pi = y\left[p - \underbrace{\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_2}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}}_{CMe\ (\text{constante})}\right]$$ → Lineal respecto a y

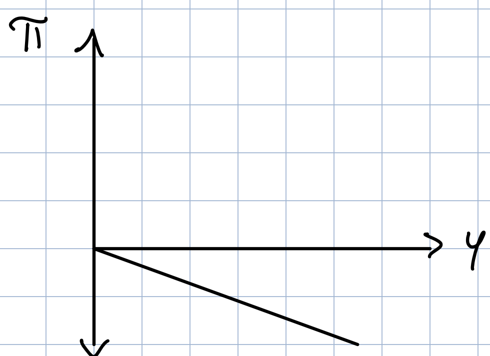
CMe (constante) ⇒ Rendimientos ctes a escala

↳ Si $p > CMe$ ⇒ querría producir $y \to +\infty$

↳ No hay solución



↳ Si $p < CMe$ ⇒ produzco $y = 0$ ⇒ $\pi = 0$



↳ Si $p = CMe$ $\Rightarrow$ Me da lo mismo producir $y \in [0; +\infty)$

Como $p = CMe \Rightarrow \pi = 0$