Microeconomía

Minimización de Costos. Corto y Largo Plazo. Función de Oferta - 1/2

Delfina Ricordi[1]

Universidad Torcuato Di Tella

[1] Basado en las notas de Lara Sánchez Peña

$$\boxed{F(\cdot)} \longrightarrow \max_{x_1; x_2} \; py - w_1x_1 - w_2x_2$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1^{d}(p; w) \\ x_2^{d}(p; w) \end{array}}$$

MINIMIZACIÓN DE COSTOS (LARGO PLAZO $\langle x_1, x_2$)

Dado que quiero producir "y" unidades,

¿cuál es la forma más barata de hacerlo?"

- $x_1^{c}(\ldots; y)$
- $x_2^{c}(\ldots; y)$

$$C = w_1x_1 + w_2x_2$$

Planteo:

$$\min_{\{x_1;x_2\}} \boxed{w_1 x_1 + w_2 x_2}$$

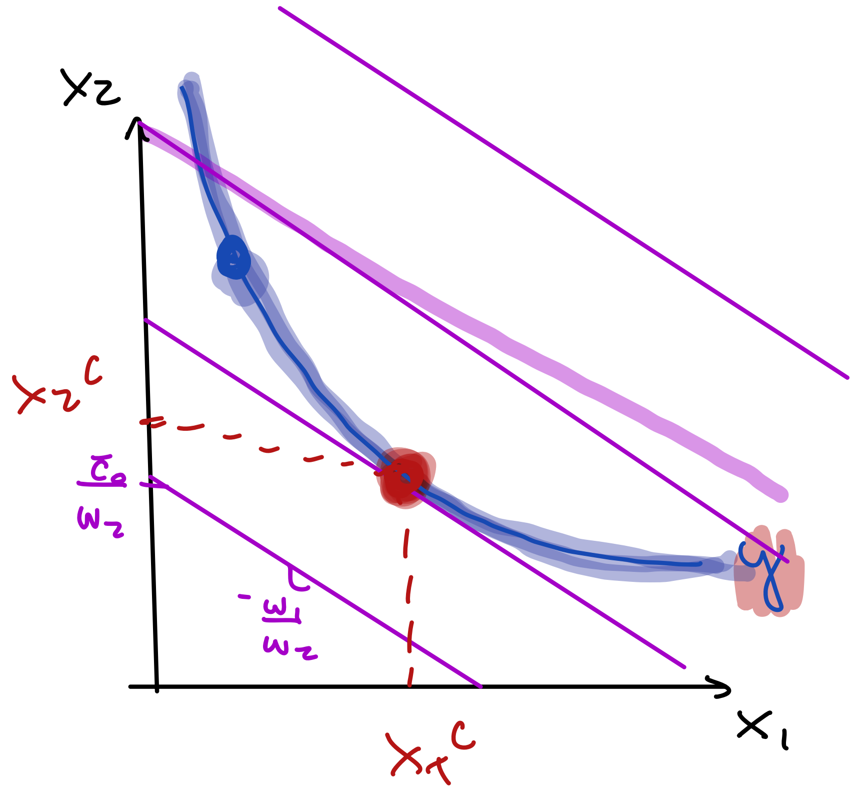
sa
$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ \boxed{y = f(x_1;x_2)} \end{cases}$$

$y \rightarrow$ EXÓGENA

GRÁFICAMENTE:

Función objetivo:

ISO-COSTO: $(x_1;x_2)$ que tienen el mismo costo



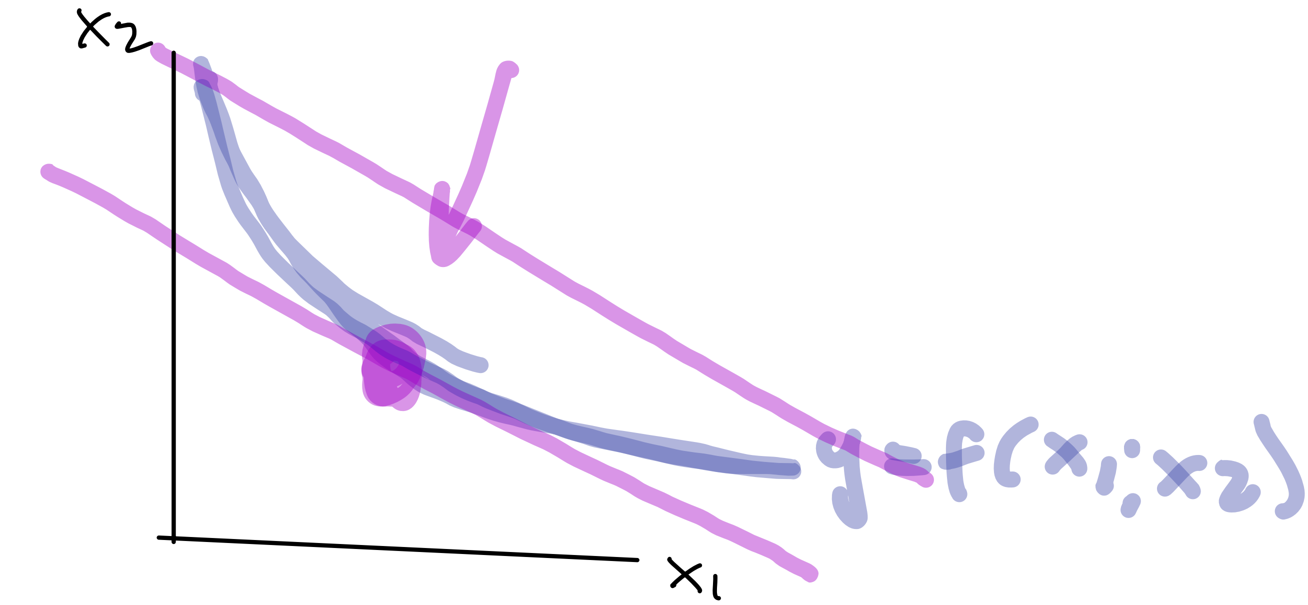
$$100 = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$\bar{c} = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$\bar{c} - w_1 x_1 = w_2 x_2$$

$$x_2 = \frac{\bar{c}}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} x_1$$

$$\frac{w_1}{w_2} = |TMST|$$



Analíticamente:

$$\min_{\{x_1;x_2\}} \; w_1x_1 + w_2x_2 \quad \text{s.a} \quad \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ f(x_1;x_2) = y \end{cases}$$

$$f(x_1;x_2) - y = 0$$

VARIABLES → ENDÓGENAS: $x_1^c(w_1;w_2;y)$, $x_2^c(w_1;w_2;y)$

→ EXÓGENAS: $(w_1;w_2;y)$

$$\mathcal{L}(x_1;x_2;\mu) = \underbrace{\overbrace{w_1x_1 + w_2x_2}^{\boxed{\$}}}_{\text{Función objetivo}} - \mu\left[\overbrace{\underbrace{f(x_1;x_2) - y}_{\text{cant. de } y}}^{\text{restricción}}\right]$$

$\boxed{\mu = 0}$ → no hay restricción

$\mu \to +$ - - - - →

$$\mathcal{L}(x_1; x_2; \mu) = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \mu\left[f(x_1; x_2) - y\right]$$

C.P.O:

$$\{x_1\}: \quad w_1 - \mu \frac{\partial f(x_1; x_2)}{\partial x_1} = 0$$

$$\{x_2\}: \quad w_2 - \mu \frac{\partial f(x_1; x_2)}{\partial x_2} = 0$$

$$\{\mu\}: \quad -\left[f(x_1; x_2) - y\right] = 0$$

$$\Updownarrow \quad f(x_1; x_2) = y$$

(1) $\quad w_1 = \mu \dfrac{\partial f(x_1; x_2)}{\partial x_1}$

(2) $\quad w_2 = \mu \dfrac{\partial f(x_1; x_2)}{\partial x_2}$

(3) $\quad f(x_1; x_2) = y$

3 EC.

3 incognitas

↓

$x_1^*; x_2^*; \mu^*$

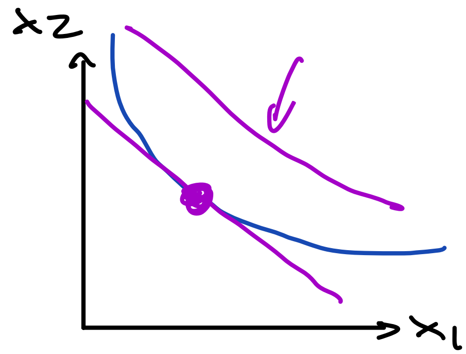
Dividimos $\frac{(1)}{(2)}$:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\boxed{\dfrac{\partial f(x_1;x_2)}{\partial x_1}} \rightarrow Pmg_1}{\boxed{\dfrac{\partial f(x_1;x_2)}{\partial x_2}} \rightarrow Pmg_2}$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{Pmg_1}{Pmg_2}$$

Condición de optimalidad $\quad \frac{w_1}{w_2} = |TMST|$

Ejemplo : $f(x_1;x_2) = \underbrace{x_1^{1/3} \quad x_2^{1/3}}$



$$\min_{\{x_1;x_2\}} \quad w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad \text{sa} \quad \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1^{1/3} x_2^{1/3} = y \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x_1;x_2;\mu) = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \mu \left[x_1^{1/3} x_2^{1/3} - y \right]$$

CPO:

$$\{x_1\} \quad w_1 - y \, \frac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}} \, x_2^{1/3} = 0$$

$$\{x_2\} \quad w_2 - y \, x_1^{1/3} \, \frac{1}{3} x_2^{-\frac{2}{3}} = 0$$

$$\{y\}: \quad x_1^{1/3} \, x_2^{1/3} = y$$

$$(1) \quad w_1 = y \, \frac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}} \, x_2^{1/3}$$

$$(2) \quad w_2 = \cancel{y} \, x_1^{1/3} \, \cancel{\frac{1}{3}} \, x_2^{-\frac{2}{3}}$$

$$(3) \quad x_1^{1/3} \, x_2^{1/3} = y$$

DIVIDIMOS $\frac{(1)}{(2)}$:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{x_1^{-\frac{2}{3}} \, x_2^{\frac{1}{3}}}{x_1^{1/3} \, x_2^{-\frac{2}{3}}} =$$

$$\frac{w_1}{w_2} = x_1^{-1} \, x_2 \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = |TMST|$$

$$x_2 = \frac{w_1}{w_2} x_1 \quad (*)$$

(*) Reemplazamos en (3):

$$x_1^{1/3} \cdot x_2^{1/3} = y$$

$$x_1^{1/3}\left[\frac{w_1}{w_2}\,x_1\right]^{1/3} = y$$

$$x_1^{1/3}\left[\frac{w_1}{w_2}\right]^{1/3} x_1^{1/3} = y$$

$$x_1^{\frac{2}{3}} = \left[\frac{w_2}{w_1}\right]^{\frac{1}{3}} y$$

$$x_1^{c}(w;y) = \left(\left[\frac{w_2}{w_1}\right]^{\cancel{\frac{1}{3}}}\right)^{\cancel{\frac{3}{2}}} \cdot y^{\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{x_1^{c}(w;y) = \left[\frac{w_2}{w_1}\right]^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}}}$$

$\underline{x_2^c}$: x_1^c en $(*)$

$$x_2^c = \frac{w_1}{w_2}\,x_1^c$$

$$x_2^c = \frac{w_1}{w_2}\left[\frac{w_2}{w_1}\right]^{\frac{1}{2}} y^{3/2}$$

$$\boxed{x_2^c(w;y) = \left[\frac{w_1}{w_2}\right]^{\frac{1}{2}} y^{3/2}}$$

Resuelve $\min_{x_1, x_2} \; w_1 x_1 + w_2 x_2$ sa $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ y = f(x) \end{cases}$

$\downarrow$

$x_1^c(w;y) \; ; \; x_2^c(w;y)$

Función de costos: $C(w;y) = w_1 \, x_1^c(w;y) + w_2 \, x_2^c(w;y)$

Ejemplo: $C(w;y) = w_1 \left[\frac{w_2}{w_1}\right]^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} + w_2 \left[\frac{w_1}{w_2}\right]^{\frac{1}{2}} y^{3/2}$

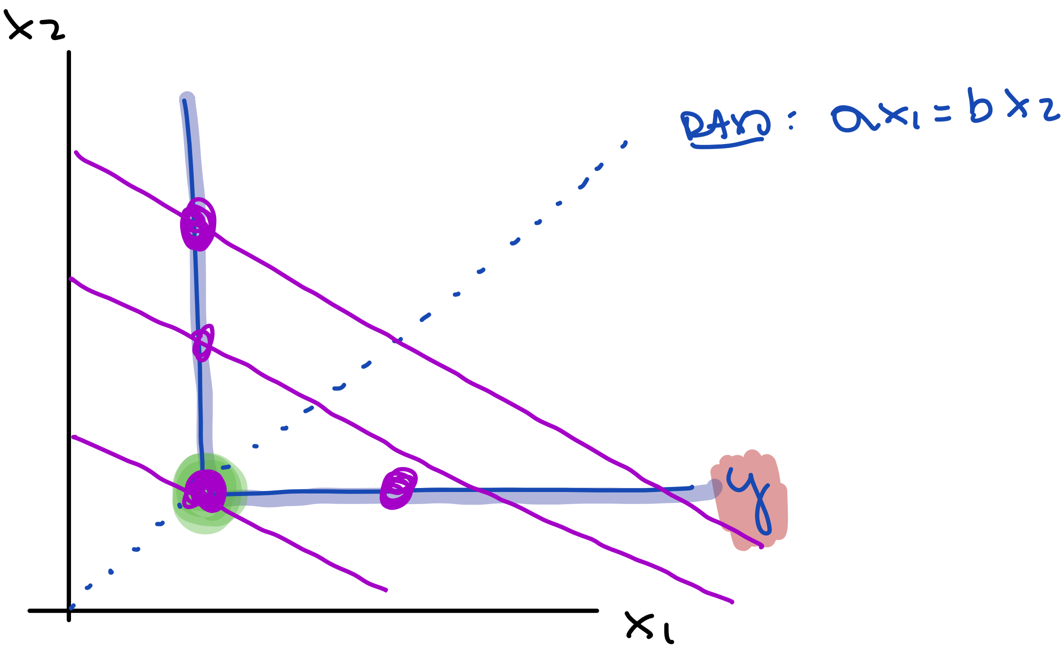
COMPLEMENTOS PERFECTOS:

$f(x_1;x_2)=\min\{ax_1;bx_2\}$

$$\min_{\{x_1;x_2\}} \; w_1x_1+w_2x_2 \qquad \text{sa} \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ \min\{ax_1;\,bx_2\}=y \end{cases}$$

GRÁFICAMENTE:

ISOCUANTA:



Condición de optimalidad:

(1) ESTAR SOBRE EL RAYO: $\boxed{ax_1}=\boxed{bx_2}$

(2) Estar sobre la restricción $\min\{ax_1;\,bx_2\}=y$

$$\min\{x_1;x_2\}=\gamma$$

$$ax_1 = y \qquad bx_2 = y$$

$$\boxed{x_1^c = \frac{y}{a} \quad \Big| \quad x_2^c = \frac{y}{b}}$$

$$x^c(w;y)$$

$$C(w;y) = w_1 \frac{y}{a} + w_2 \frac{y}{b}$$

$$C(w;y) = \left(\frac{w_1}{a} + \frac{w_2}{b}\right) y$$

SUSTITUTOS PERFECTOS: $f(x_1;x_2) = ax_1 + bx_2$

$$\min_{\{x_1;x_2\}} w_1x_1 + w_2x_2 \quad \text{sa} \quad \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ ax_1 + bx_2 = y \end{cases}$$

$\downarrow$

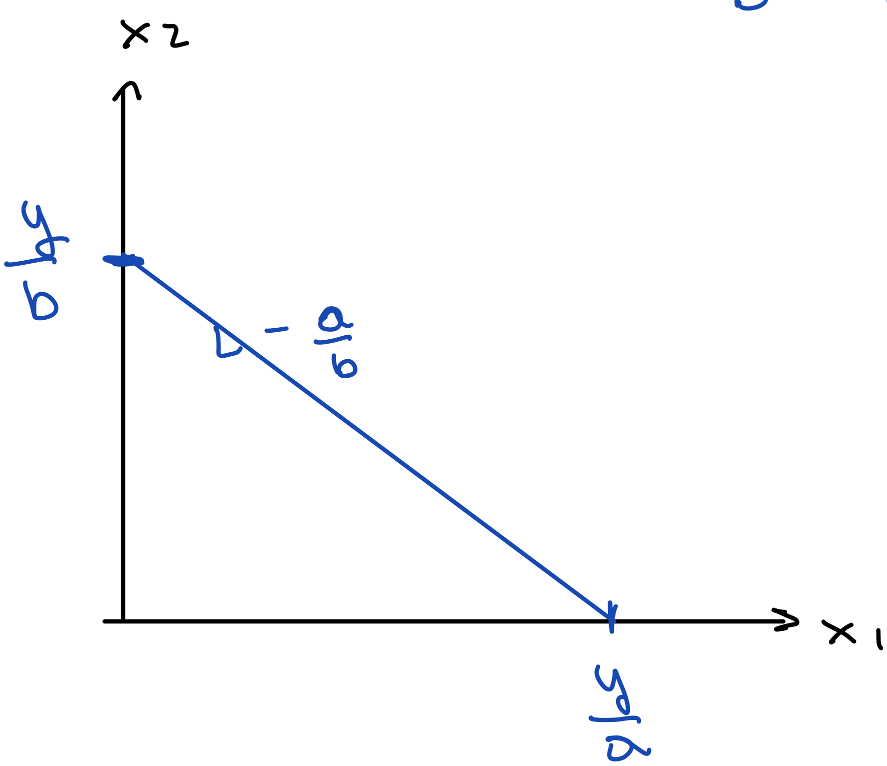
LAGRANGIANO $\rightarrow$ NO!

ISOCOSTO: $x_2 = \frac{c}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} x_1$

ISOCUANTAS: $y = ax_1 + bx_2$

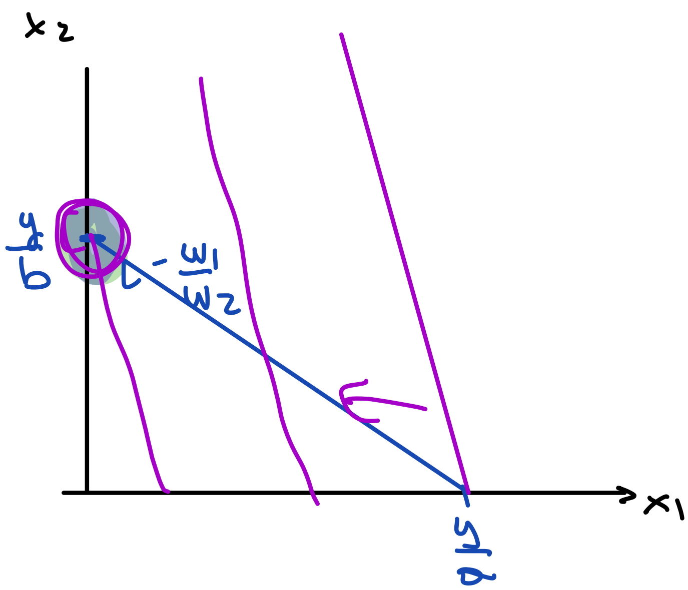
$$y - ax_1 = bx_2$$

$$x_2 = \frac{y}{b} - \frac{a}{b} x_1$$



CASO 1: $\frac{w_1}{w_2} > \frac{a}{b}$ ISOCOSTO MÁS EMPINADA

$$\boxed{\frac{w_1}{a} > \frac{w_2}{b}}$$



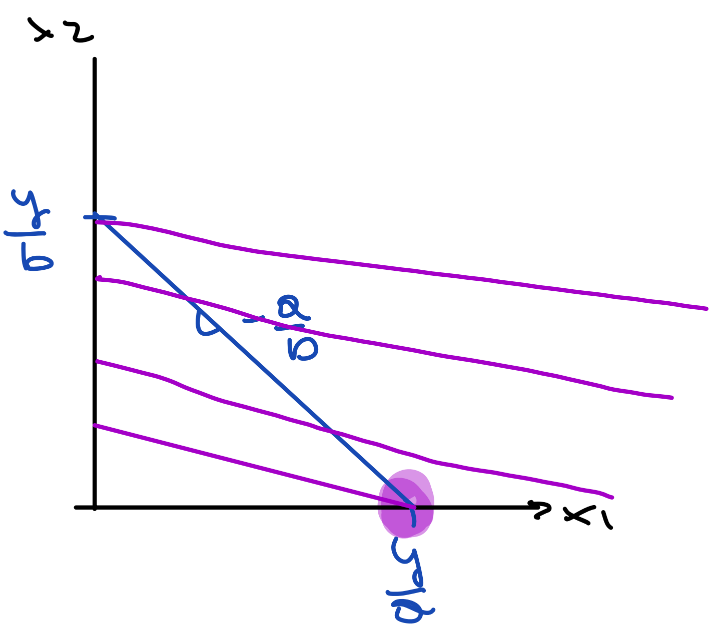
$$\boxed{x_1^c = 0}$$

$$\boxed{x_2^c = \frac{y}{b}}$$

$$c(w;y) = \cancel{w_1 x_1} + w_2 \frac{y}{b} = \frac{w_2}{b} \cdot y$$

CASO 2: $\frac{w_1}{w_2} < \frac{a}{b}$ → ISOCOSTO MÁS CHATAS

$$\frac{w_1}{a} < \frac{w_2}{b}$$

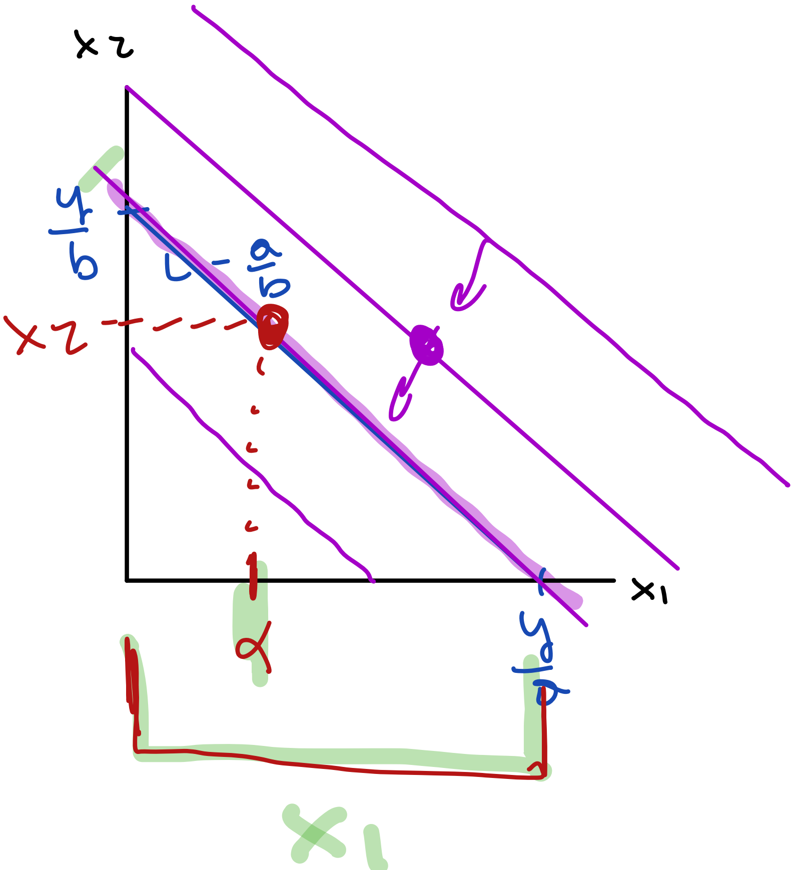


$$\boxed{x_2^c = 0}$$

$$\boxed{x_1^c = \frac{y}{a}}$$

$$C(w,y) = w_1 \frac{y}{a} + w_2 0 = \frac{w_1}{a} y$$

CASO 3: $\frac{a}{b} = \frac{w_1}{w_2}$ → son paralelas



cualquier punto sobre la ISOCUANTA es óptimo

$$x_1^c = \boxed{\alpha} \in \left[0; \frac{y}{a}\right]$$

x_2 sobre la ISOCUANTA:

$$x_2 = \frac{y}{b} - \frac{a}{b}\boxed{\alpha}$$

$$C(w,y) = w_1 \alpha + w_2 \left[\frac{y}{b} - \frac{a}{b}\alpha\right]$$

Objetivos

- Problema de la firma para maximizar beneficios.
- Demandas condicionadas.
- Función de costos, propiedades, Lema de Shephard.
- Gráficos de las curvas de costos y relación entre ellas.
- Rendimientos a escala y función de costos, ¿cómo se relacionan?

Introducción

- Si una firma está maximizando sus beneficios y decide ofrecer el nivel de producción **y**, debe estar minimizando el costo de producirlo, ya que, de lo contrario, existiría una forma más barata de obtener y unidades de producción, lo que significaría que la firma no estaría maximizando los beneficios.
- El problema de la maximización del beneficio puede dividirse en dos fases:
  - 1º: minimización de costos sujeto a producir un cierto nivel de producto y. De aquí obtendremos las **demandas condicionadas** como $x(y)$ y al reemplazarla en la función de costos obtenemos $C(y)$ que mide lo mínimo que cuesta producir y unidades.
  - 2º, **conociendo la función de costos**, la firma elige **qué cantidad** de producción maximiza los beneficios.

Minimización de costos

- ¿Por qué separar el problema? Si bien el problema de maximización no siempre tiene solución (por ej. si hay rendimientos a escala crecientes o constantes), **el problema de minimización de costos siempre la tiene**. Por lo tanto, es posible describir la forma más eficiente de producir para cualquier tipo de tecnología de producción.
- Segundo, mientras que el problema de maximización de beneficios es útil cuando la firma es perfectamente competitiva, se vuelve engorroso en otras estructuras de mercado.[2]
- Por último, desde un punto de vista puramente analítico, es generalmente más fácil resolver el problema en dos etapas que hacerlo todo junto. En particular, se simplifica enormemente la condición de segundo orden, que con muchos factores se puede volver engorrosa.

[2] Más de esto en temas siguientes.

Minimización de costos: Paso 1

- Supongamos una firma caracterizada por la función de producción $f(x_1, x_2)$.
- La firma resuelve:

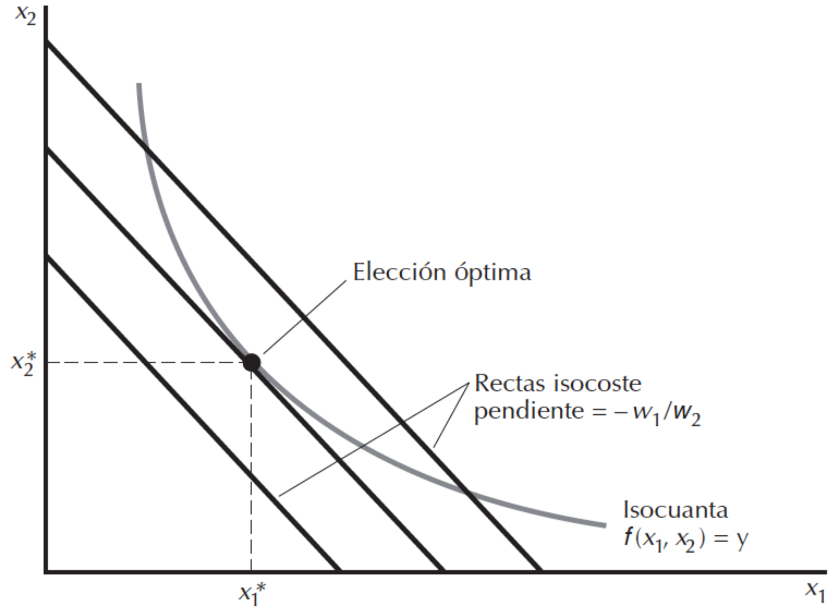
$$\min_{\{x_1, x_2\}} w_1x_1 + w_2x_2 \quad s.a. \begin{cases} y = f(x_1, x_2) \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Hay dos formas de resolverlo:
  1. Derivando y obteniendo condiciones de primer orden
  2. Analizando caso por caso (<u>por ejemplo:</u> sustitutos perfectos, complementarios perfectos)

Solución Gráfica: Curvas de Isocosto

- Veamos gráficamente el problema de minimización de costos.
  1. Graficamos la **isocuanta** sobre la cual deseamos producir. Es decir combinaciones (x_1, x_2) tal que $\overline{y} = f(x_1, x_2)$.
  2. Graficamos las **rectas isocosto**, las combinaciones de (x_1, x_2) tal que obtenemos un costo constante igual a C. Son rectas porque w_1 y w_2 están dados.

$$C = w_1 x_1 + w_2 x_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{C}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} x_1$$



Minimización de costos: Parte 1

- En este problema tenemos **variables exógenas** (w_1, w_2, y) y **variables endógenas** (x_1, x_2).
- La solución será de la forma: $x_1^c(w_1, w_2, y)$, $x_2^c(w_1, w_2, y)$. A este par de funciones de demanda de insumos las llamaremos **demandas condicionadas**.
- En el gráfico previo las isocuantas son curvas, estrictamente convexas y que no tocas los ejes, ¿qué pasa si no se cumplen esas condiciones?
- El óptimo está caracterizado por la tangencia (solución interior) entre la isocuanta (pendiente $\frac{PMg_1(x_1^c,x_2^c)}{PMg_2(x_1^c,x_2^c)}$) y la isocosto (pendiente $\frac{w_1}{w_2}$).
- Bajo las condiciones mencionadas, tenemos la siguiente condición de óptimo:

$$\boxed{|TMST(x_1, x_2)| = \frac{PMg_1(x_1^c, x_2^c)}{PMg_2(x_1^c, x_2^c)} = \frac{w_1}{w_2}} \tag{1}$$

Minimización de costos: Paso 1 - Caso 1

- Tomemos las posibles formas de resolverlo
- Si podemos utilizar el método de Lagrange, resolvemos:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \mu(f(x_1, x_2) - y)$$

- ¿En qué unidades está μ? ¿Qué mide?
- CPO:

$$\begin{aligned}
(x_1): \quad & w_1 - \mu^c \frac{\partial f(x_1^c, x_2^c)}{\partial x_1} = 0 \\
(x_2): \quad & w_2 - \mu^c \frac{\partial f(x_1^c, x_2^c)}{\partial x_2} = 0 \\
(\mu): \quad & y - f(x_1^c, x_2^c) = 0
\end{aligned}$$

- Ejemplo: $f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{1/3}$

Minimización de costos

- Reordenando los términos de la CPO, recuperamos la condición (1). Veamos la interpretación económica:
  Supongamos:

$$|TMST(x_1, x_2)| = 1 < \frac{w_1}{w_2} = 2$$

- En este caso, si la tecnología lo permite, podríamos disminuir cuanto usamos del insumo 1 en **una** unidad y aumentar el insumo 2 en **una** unidad y mantendríamos constante el nivel de producto (porque la TMST=1) y eso implicaría disminuir los costos, pues el insumo 1 sale el doble que el 2.
- Notar que, **si tenemos una solución de esquina en la que no se utiliza uno de los factores, no necesariamente se satisface la igualdad en (1)**.
- Del mismo modo, **si la función de producción tiene vértices** (complementos perfectos), no necesariamente vale la igualdad en (1).

Minimización de costos - Caso 2

Veamos como resolver dos ejemplos:

$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$	$f(x_1, x_2) = \text{mín}\{2x_1, x_2\}$

Minimización de costos

- Es importante notar la diferencia entre:
  1. las demandas **condicionadas** $x_i(w_1, w_2, y)$ para $i = 1, 2$ que encontramos en el problema de **minimización de costos** y
  2. las demandas **incondicionadas** $x_i(w_1, w_2, p)$ para $i = 1, 2$ que encontramos en el problema de **maximización de beneficios**.
- Si minimizamos costos, encontramos las demandas **condicionadas** a una cantidad específica de producto que se quiere producir y. Es decir, **tomando como dado el nivel de producto** y que se quiere alcanzar.
- Las demandas **incondicionadas** son las que nos permiten obtener el mayor beneficio **tomando como dados los precios** (de los insumos y del bien final). A partir de las demandas incondicionadas determinamos la oferta de producto $y(p, w_1, w_2) = S(p)$.

Función de costo (mínimo)

- Una vez obtenidas las demandas condicionadas de insumos, las reemplazamos en la función de costo y obtenemos la *función de costo (mínimo):*

$$C(w_1, w_2, y) = w_1 x_1^c(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^c(w_1, w_2, y)$$

- Es importante chequear que la función de costos mínimos NO depende de los insumos x_1, x_2, sino SOLO de los costos w_2, w_2 y del nivel de producto y.
- Resolvamos para los ejemplos previos:
  - $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$
  - $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
  - $f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{1/3}$

Ejemplo: Cobb-Douglas (*)

El problema es:

$$\min_{\{x_1,x_2\}} w_1x_1 + w_2x_2 \quad s.a. \quad y = x_1^{\alpha}x_2^{\beta}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) = w_1x_1 + w_2x_2 - \mu(x_1^{\alpha}x_2^{\beta} - y)$$

CPO:

$$(x_1): \quad w_1 = \mu\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} = \mu\alpha\frac{y}{x_1}$$

$$(x_2): \quad w_2 = \mu\beta x_2^{\beta-1}x_1^{\alpha} = \mu\beta\frac{y}{x_2}$$

$$(\mu): \quad y = x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$$

Ejemplo: Cobb-Douglas (*)

Combinando las primeras dos condiciones:

$$\frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{w_1}{2_2} \Longleftrightarrow x_2 = x_1 \frac{\beta}{\alpha} \frac{w_1}{w_2}$$

Reemplazando en la restricción:

$$x_1^{\alpha} \left(x_1 \frac{\beta}{\alpha} \frac{w_1}{w_2} \right)^{\beta} = y$$

Despejando x_1:

$$x_1^c(w_1, w_2, y) = \left(\frac{\alpha w_2}{\beta w_1} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$x_2^c(w_1, w_2, y) = \left(\frac{\beta w_1}{\alpha w_2} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Ejemplo: Cobb-Douglas (*)

Finalmente, la función de costo mínimo es la siguiente:

$$C(w_1, w_2, y) = w_1 \left(\frac{\alpha w_2}{\beta w_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + w_2 \left(\frac{\beta w_1}{\alpha w_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Luego,

$$C(w_1, w_2, y) = K w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

donde K es una constante.

Propiedades

La función de costo y demandas condicionadas tienen algunas propiedades de interés:

- $\frac{\partial x_i^c}{\partial w_i} \leq 0$[a]
- $x_i^c(tw_1, tw_2, y) = x_i^c(w_1, w_2, y)$[b]
- $C(tw_1, tw_2, y) = tC(w_1, w_2, y)$[c]
- **Lema de Shephard**: $\frac{\partial C}{\partial w_i} = x_i^c(w_1, w_2, y)$[d]

---

[a] Si aumenta el precio w_i se demanda menos insumo x_i^c o lo mismo. Se podría demandar lo mismo si no se demanda del bien, por ejemplo.

[b] x_i^c es HOD 0 en (w_1, w_2). Si aumenta los dos precios w_1 y w_2 en la misma proporción, como ninguno de los insumos es relativamente más barato, para producir y demando lo mismo de cada insumo en ambos casos.

[c] La función de costos es HOD 1 en w_1, w_2. Ver nota al pie b, el costo se multiplica por t.

[d] Partiendo de (x_1^c, x_2^c) que minimizan costos, si aumenta apenas w_i entonces la función de costos aumenta en x_i^c. Los demás efectos son muy pequeños.

Lema de Shephard (*)

Demostración

Diferenciando $C(\cdot) = w_1 x_1^c(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^c(w_1, w_2, y)$ contra w_1:

$$\frac{\partial C}{\partial w_1}(w_1, w_2, y) = x_1^c(w_1, w_2, y) + w_1 \frac{\partial x_1^c}{\partial w_1}(w_1, w_2, y) + w_2 \frac{\partial x_2^c}{\partial w_1}(w_1, w_2, y)$$

De las CPO, $\mu_1^c \frac{\partial f(x_1^c, x_2^c)}{\partial x_1} = w_1$ y $\mu^c \frac{\partial f(x_1^c, x_2^c)}{\partial x_2} = w_2$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial w_1}(\cdot) &= x_1^c(w_1, w_2, y) + \mu_1^c \frac{\partial f\left(x_1^c, x_2^c\right)}{\partial x_1} \frac{\partial x_1^c}{\partial w_1} + \mu_1^c \frac{\partial f\left(x_1^c, x_2^c\right)}{\partial x_2} \frac{\partial x_2^c}{\partial w_1} \\ &= x_1^c(w_1, w_2, y) + \mu_1^c \left[\underbrace{\frac{\partial f\left(x_1^c, x_2^c\right)}{\partial x_1} \frac{\partial x_1^c}{\partial w_1} + \frac{\partial f\left(x_1^c, x_2^c\right)}{\partial x_2} \frac{\partial x_2^c}{\partial w_1}}_{(B)} \right] \end{aligned}$$

Lema de Shephard (*)

Por último, de la condición de primer orden con respecto al multiplicador sabemos que

$$f\left(x_1^c(w_1, w_2, y), x_2^c(w_1, w_2, y)\right) = y, \tag{2}$$

Por lo tanto, podemos derivar (2) respecto w_1 usando regla de la cadena:

$$\frac{\partial f\left(x_1^c, x_2^c\right)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^c}{\partial w_1} + \frac{\partial f\left(x_1^c, x_2^c\right)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^c}{\partial w_1} = 0 \tag{3}$$

Entonces, por (3), sabemos que el término (B) es igual a 0. Por lo tanto,

$$\frac{\partial C}{\partial w_1}(w_1, w_2, y) = x_1^c(w_1, w_2, y)$$

$\square$

Curva de costos

- Recordemos que la curva de costos $C(w_1, w_2, y)$ establece el costo mínimo de producir una cantidad de bien final y tomando como dados los precios de los insumos ($\mathbf{w}$).
- Como vimos en la sección anterior, en el corto plazo, pueden existir costos que se pagan independientemente del nivel de producción de bien final y. Estos costos son **fijos**. En contraste, los **costos variables** son el resultado de pagar por los insumos para la producción. Luego,

$$C(w, y) = c_v(w, y) + F$$

  donde F representa los costos fijos y $c_v(w, y)$ los variables. En el ejemplo de corto plazo, $c_v(w, y) = w_1 x_1$ y $F = w_2 k$.

Costo medio

A partir de la función de costo mínimo (total) podemos definir otras curvas de costos que serán de nuestro interés:

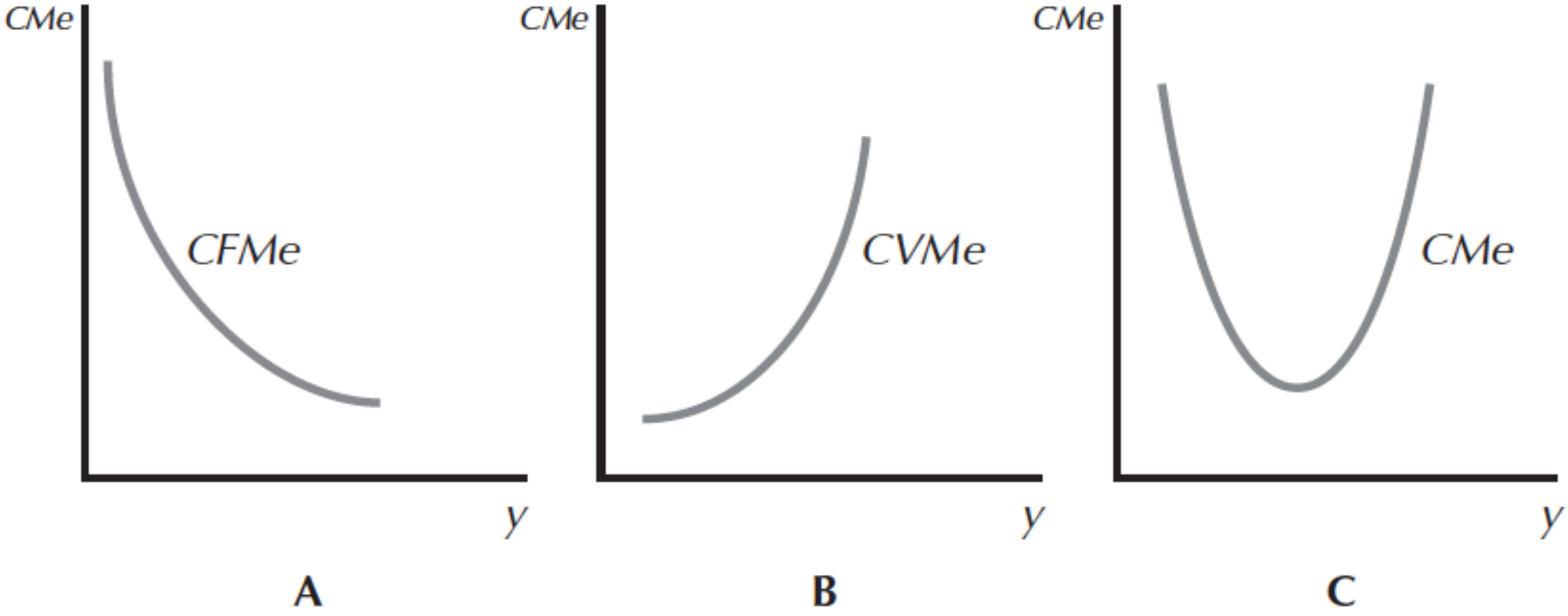
- **Costo medio:** mide el costo por unidad de bien final, es decir, el costo promedio por unidad. El costo medio tiene dos partes:
    1. costo medio variable $CMeV(y)$ y
    2. costo medio fijo $CMeF(y) = \frac{F}{y}$:

$$CMe\left(y\right) = \frac{C\left(y\right)}{y} = \frac{c_v\left(y\right)}{y} + \frac{F}{y} = CMeV\left(y\right) + CMeF\left(y\right)$$

Costo medio - propiedades

- ¿Qué propiedades tiene esta función?
- $CMeF(y) \xrightarrow{y \to +\infty} 0$ y $CMeF(y) \xrightarrow{y \to 0} +\infty$. **(Ver gráfico A)**
- Respecto a $CMeV(y)$, el costo medio variable puede ser constante, creciente o decreciente. Uno esperaría que inicialmente el $CMeV(y)$ fuera constante y/o luego creciente. **(Ver gráfico B)**
- El costo medio total en el largo plazo va a ser **(Ver gráfico C)**:
  - creciente si la tecnología $f(x_1, x_2)$ exhibe DRS.
  - decreciente si la tecnología $f(x_1, x_2)$ exhibe IRS.
  - constante si la tecnología $f(x_1, x_2)$ exhibe CRS.
- El costo medio variable en el corto plazo ($x_2 = k$ dado) va a ser:
  - creciente si la tecnología $f(x_1, k)$ exhibe DRS.
  - decreciente si la tecnología $f(x_1, k)$ exhibe IRS.
  - constante si la tecnología $f(x_1, k)$ exhibe CRS.

Costo medio - gráficos



Costo marginal & relación entre *CMg* y *CMeV*

- **Costo marginal:** el costo marginal mide cuánto aumenta el costo total cuando aumenta marginalmente la cantidad que se quiere producir y.

$$CMg(y) := C'(y) = \frac{\partial C(y)}{\partial y} = \frac{\partial c_v(y)}{\partial y}$$

- **¿Cómo se relacionan CMg y CMeV?** Como los costos variables de producir cero unidades de bien final son cero por definición, al incrementar marginalmente la producción de cero unidades a y,

$$\lim_{y \to 0} CMg(y) = \lim_{y \to 0} \frac{c_v(y) - c_v(0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{c_v(y)}{y} = \lim_{y \to 0} CMeV(y)$$

- Es decir, *CMg* y *CMeV* tienen la misma ordenada al origen. Vamos a ver más propiedades cuando veamos **rendimientos a escala**.

Relación entre CMg y $CMeV$

- **Supongamos que estamos produciendo en un punto en el cual los costos medios variables son decrecientes.** Para que los últimos decrezcan, debe suceder que cada unidad extra que se agrega sea menor que el promedio del costo variable, pues de otra manera, el promedio aumentará. Formalmente,

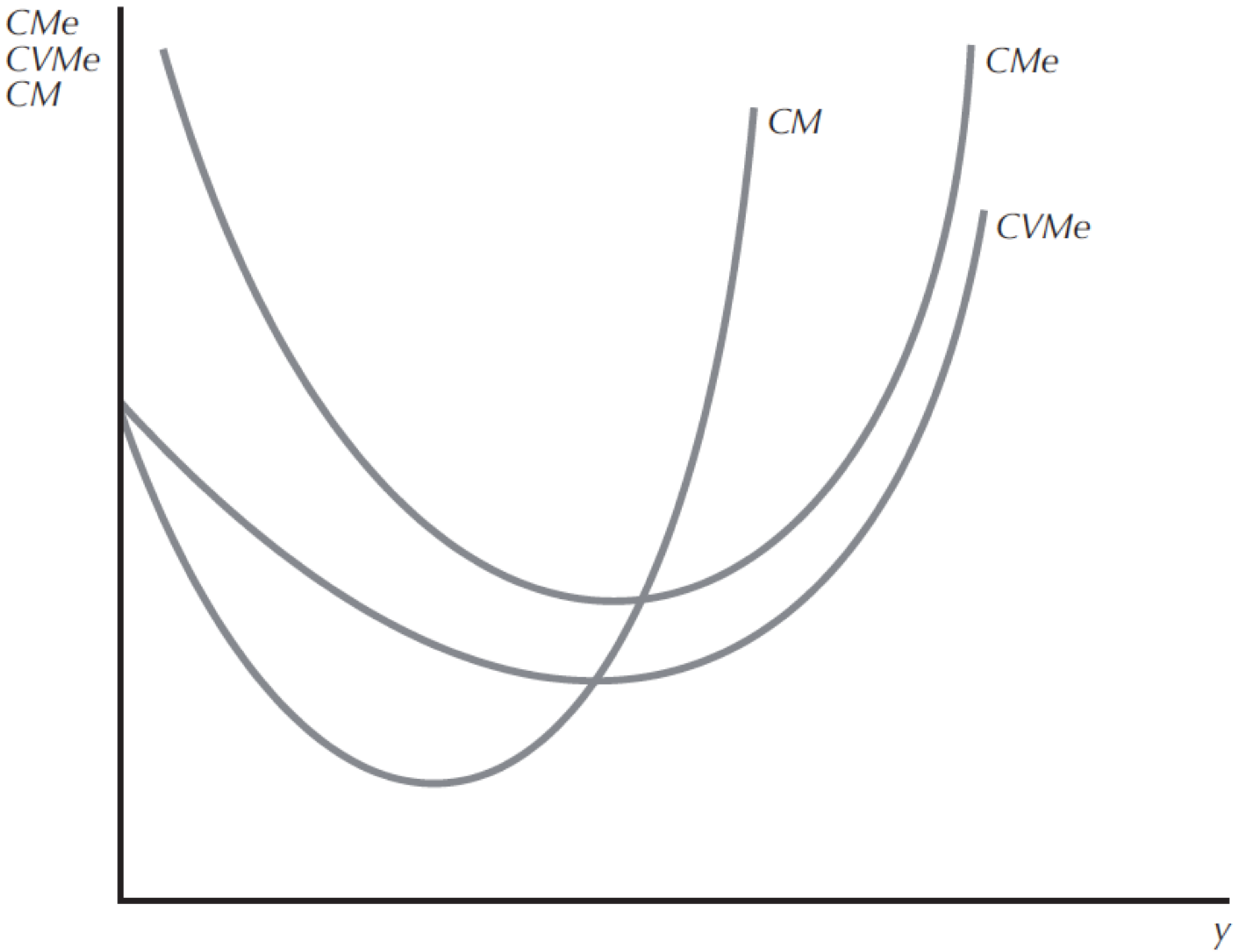
$$\frac{\partial CMeV\left(y\right)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{c_v\left(y\right)}{y}\right]=\frac{c_v'\left(y\right)y-c_v\left(y\right)}{y^2}$$

- Por lo tanto, será decreciente cuando:

$$c_v'\left(y\right)=CMg\left(y\right)<\frac{c_v\left(y\right)}{y}=CMeV(y)$$

- Es decir, cuando el costo marginal se encuentre por debajo del medio variable. El $CMeV(y)$ será creciente si $CMg(y)>CMeV(y)$. El mismo argumento vale para los costos medios totales.

Curvas de costos



Propiedad para las curvas de *CMg* y de *CMeV* & *CMe*

- Una propiedad importantísima es que la Curva *CMg(y)* pasa por los valores mínimos de las curvas de *CMe(y)* y *CMeV(y)*.
- Si $CMe(y)$ es decreciente *(creciente)* es porque al aumentar la cantidad producida y, la última unidad costó menos *(más)* que el promedio de las anteriores, es decir $CMg < CMe$ $(CMg > CMe)$.
- Para algún valor de y las curvas de CMe y CMg se cruzan. Eso ocurre cuando el CMe es igual al costo de la última unidad CMg.
- Eso quiere decir que CMe es decreciente hasta el valor de y donde $CMe(y) = CMg(y)$ y luego $CMe(y)$ es creciente. Por lo tanto si y cumple que $CMe(y) = CMg(y)$ ese valor es el mínimo de la curva $CMe(y)$.

Curvas de costos - obtener CT a partir de CMg

- Como $CMg\left(y\right) = \frac{\partial C(y)}{\partial y} = \frac{\partial c_v(y)}{\partial y}$, sucede que:

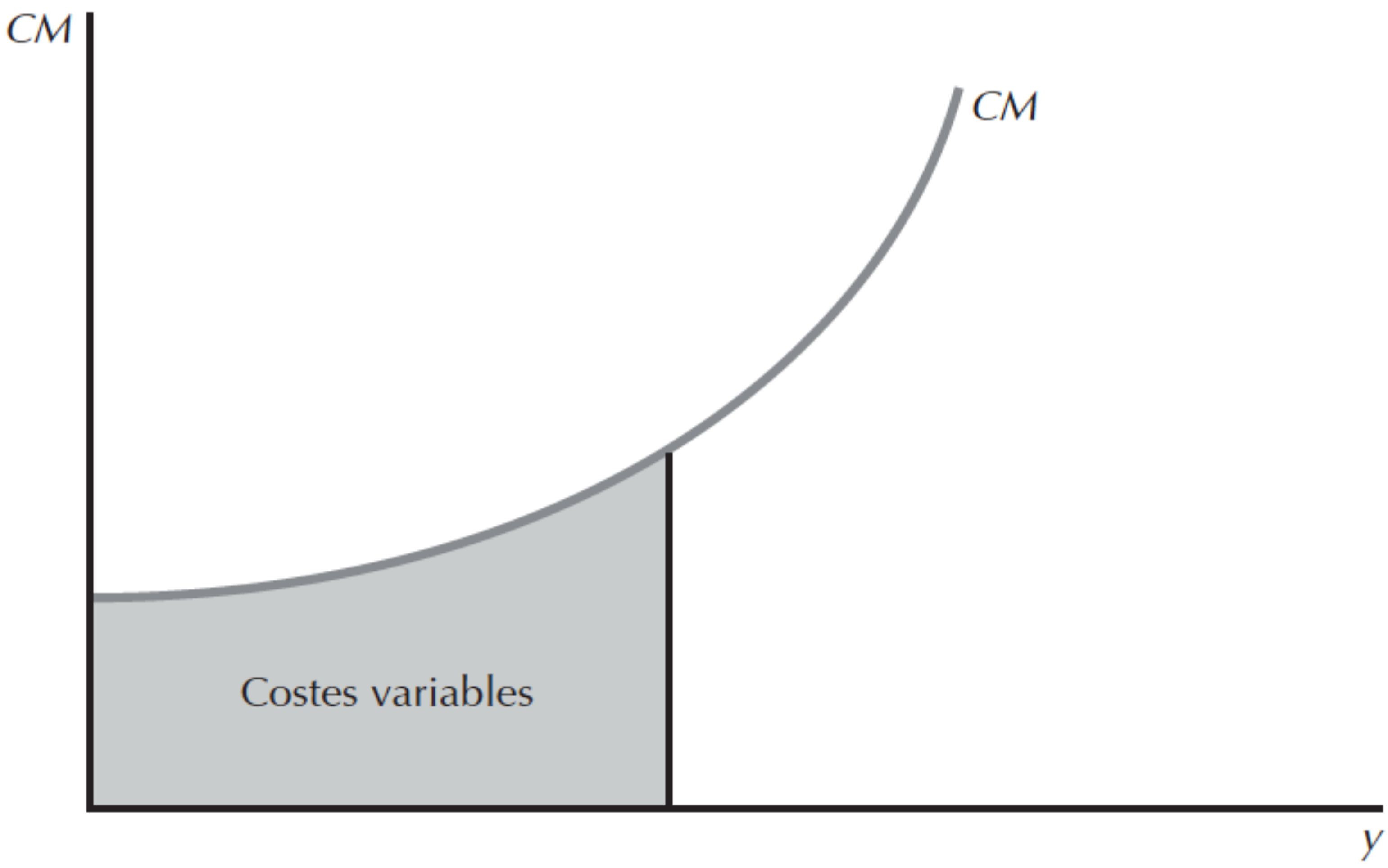
$$c_v\left(y\right) = \int\limits_0^y CMg(v)dv$$

  pues sabemos que $c_v\left(0\right) = 0$. Es decir, el área bajo la curva CMg entre 0 e y, es exactamente el costo variable de producir la cantidad y.

- Como $C\left(0\right) = F$, podemos recuperar los costos totales:

$$C(y) = F + \int\limits_0^y CMg(v)dv$$

Curvas de costos



Rendimientos a escala

Proposición

A partir de la función de costos, podemos identificar rápidamente el tipo de rendimientos a escala de la tecnología de producción. Los rendimientos a escala y la función de costos medios se relacionan:[a]

1. *f tiene* **rendimientos crecientes a escala** $\Leftrightarrow \frac{\partial CMe}{\partial y} < 0 \Leftrightarrow CMe(y) > CMg(y) \Leftrightarrow C(y)$ *es cóncava.*
2. *f tiene* **rendimientos constantes a escala** $\Leftrightarrow \frac{\partial CMe}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow CMe(y) = CMg(y)$. *Si valen* $\forall y \Leftrightarrow C(y)$ *es lineal.*
3. *f tiene* **rendimientos decrecientes a escala** $\Leftrightarrow \frac{\partial CMe}{\partial y} > 0 \Leftrightarrow CMe(y) < CMg(y) \Leftrightarrow C(y)$ *es convexa.*

---

[a] Recordar que si $f(0,0) = 0$ y además:

1. f es convexa, entonces f exhibe IRS.
2. f es lineal, entonces f exhibe CRS.
3. f es cóncava, entonces f exhibe DRS.

Rendimientos a escala - intuición

- Veamos la intuición para el caso (3). Supongamos que la tecnología de producción tiene **rendimientos decrecientes a escala**. Esto implica, que, por ejemplo, para duplicar la producción se requiere más del doble que los insumos.[3]
- Eso implica que, si se duplica la producción, el costo es más que el doble. Por lo tanto, aumenta el costo medio ($\frac{\partial CMe}{\partial y} > 0$).
- Entonces, si el costo medio es creciente, debe suceder que $CMe(y) < CMg(y)$.
- Eso implica que CT es convexo. La idea es que como el CMe es creciente, el CMg tiene que **aumentar cada vez más rápido** (o sea $C''(y) > 0$) de manera que aumente el valor promedio.
- Practiquen escribir qué sucedería en los demás casos.

[3] Esto es análogo a decir que si se duplican los insumos no alcanza para duplicar la cantidad producida.

Dos propiedades útiles de la función de costos

Proposición

Si f tiene rendimientos constantes a escala, entonces la función de costos es $C(w_1, w_2, y) = c(w_1, w_2)y$.

Proposición

Si f es cóncava, entonces C es convexa en y.

Ejemplo

- Tomemos el ejemplo de la Cobb-Douglas genérica: $y = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$
- La función de costos hallada:

$$C(w_1, w_2, y) = K w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

- Verifiquemos que si la función de producción tiene DRS ($\alpha + \beta < 1$), entonces la función de CMe es creciente:

$$C(w_1, w_2, y) = K w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$CMe = \frac{C(w_1, w_2, y)}{y} = K w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1} = K w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}}$$

$$\frac{\partial CMe}{\partial y} = \underbrace{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}_{<0} K w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1-2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} > 0 \quad \text{Luego CMe creciente}$$

Ejemplo

- Estudiemos la pendiente (con el CMg) y la concavidad de la función de costos

$$CMg = \frac{\partial C(w_1, w_2, y)}{\partial y} = \frac{1}{\alpha+\beta} K w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} \geq 0 \quad \text{Costos crecientes}$$

$$\frac{\partial^2 C(w_1, w_2, y)}{\partial^2 y} = \frac{1-(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2} K w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1-2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} \geq 0 \quad \text{Costos convexos}$$

- Para $y > 0$, tenemos que $CMg > CMe$:

$$CMg > CMe$$

$$\frac{1}{\alpha+\beta} K w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} > K w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}}$$

$$\frac{1}{\alpha+\beta} \cancel{K w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}}} > \cancel{K w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}}}$$

$$1 > \alpha + \beta$$

donde la última condición vale por hipótesis