

# Capítulo 4 - Parte 1

## Matemática Elementar

Funções Reais e Gráficos

12 de maio de 2023

Igor Oliveira

`matematicaelementar@imd.ufrn.br`

Instituto Metrópole Digital  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Natal-RN

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

# Apresentação da Aula

Considere as funções

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

As funções  $p$  e  $q$  são inversas uma da outra?

Considere as funções

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

As funções  $p$  e  $q$  são inversas uma da outra?  
Elas são bijetivas?

Considere as funções

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

As funções  $p$  e  $q$  são inversas uma da outra?

Elas são bijetivas?

Quais outras informações podemos dizer acerca dessas funções?

# O que É uma Função?

## Definição 1

Sejam  $X$  e  $Y$  dois conjuntos quaisquer.

Uma função é uma relação  $f : X \rightarrow Y$  que, a cada elemento  $x \in X$ , associa um e somente um elemento  $y \in Y$ .

Nesse caso:

- (i) Os conjuntos  $X$  e  $Y$  são chamados domínio e contradomínio de  $f$ , respectivamente;
- (ii) O conjunto

$$f(X) = \{y \in Y ; \text{ existe } x \in X \text{ onde } f(x) = y\} \subseteq Y$$

é chamado imagem de  $f$ ;

- (iii) Dado  $x \in X$ , o (único) elemento  $y = f(x) \in Y$  correspondente é chamado imagem de  $x$ .

# O que É uma Função?

Dessa forma, uma função é um terno constituído por: domínio, contradomínio e lei de associação (dos elementos do domínio com os do contradomínio). Precisamos desses três elementos para que uma função seja bem definida. Poderíamos definir função da seguinte forma:

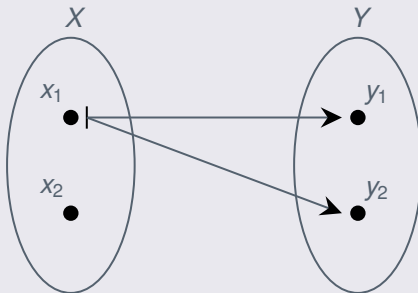
Para que uma relação  $f : X \rightarrow Y$  seja uma função, ela deve satisfazer a duas condições fundamentais:

- (I) Estar bem definida em todo elemento do domínio (existência);
- (II) Não fazer corresponder mais de um elemento do contradomínio a cada elemento do domínio (unicidade).

# O que É uma Função?

## Exemplo 2

Sejam  $X = \{x_1, x_2\}$ ,  $Y = \{y_1, y_2\}$  e a relação  $f : X \rightarrow Y$  definida por:



Qual(is) o(s) problema(s) com essa “função”?



# O que É uma Função?

## Definição 3

Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é chamada de função real se seus valores são números reais; isto é,  $Y \subseteq \mathbb{R}$ . Quando a variável independente assume valores reais – isto é,  $X \subseteq \mathbb{R}$  –, diz-se que  $f$  é uma função de variável real. Nesse caso, pode-se utilizar a notação  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y$  para enfatizar que o domínio  $D$  da função é subconjunto de  $\mathbb{R}$ .

# O que É uma Função?

## Definição 3

Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é chamada de função real se seus valores são números reais; isto é,  $Y \subseteq \mathbb{R}$ . Quando a variável independente assume valores reais – isto é,  $X \subseteq \mathbb{R}$  –, diz-se que  $f$  é uma função de variável real. Nesse caso, pode-se utilizar a notação  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y$  para enfatizar que o domínio  $D$  da função é subconjunto de  $\mathbb{R}$ .

A menos que se diga o contrário, trabalharemos, a partir desse momento, com funções reais de variável real, e, por simplicidade, chamaremos essas funções simplesmente de funções reais.

# O que É uma Função?

## Exemplo 4

Considere as funções reais

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Qual o domínio, contradomínio e a lei de associação de  $p$  e  $q$ ?

# O que É uma Função?

## Exemplo 4

Considere as funções reais

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Qual o domínio, contradomínio e a lei de associação de  $p$  e  $q$ ?

## Exemplo 5

Seja  $\mathcal{I}_X : X \rightarrow X$  uma função tal que  $\mathcal{I}_X(x) = x$  para todo  $x \in X$ . Chamamos  $\mathcal{I}_X$  de função identidade do conjunto  $X$ .

Atividade 30 - Como Reconhecer Funções a Partir de Tabelas

Atividade 31 - Problemas de Domínio de Funções

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

9 Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 6

Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : U \rightarrow V$  duas funções, com  $Y \subseteq U$ . A função composta de  $g$  com  $f$  é a função denotada por  $g \circ f$ , com domínio em  $X$  e contradomínio em  $V$ , que a cada elemento  $x \in X$  faz corresponder o elemento  $v = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in V$ . Isto é:

$$\begin{array}{ccccccc} g \circ f : & X & \rightarrow & Y \subseteq U & \rightarrow & V \\ & x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array} .$$

## Exemplo 7

Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Mostre que  $f \circ \mathcal{I}_X = f$  e  $\mathcal{I}_Y \circ f = f$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

11 Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

# Composição de Funções

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

11 Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 7

Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Mostre que  $f \circ \mathcal{I}_X = f$  e  $\mathcal{I}_Y \circ f = f$ .

## Exemplo 8

Qual função resulta da composição  $p \circ q$ ?



## Proposição 9 (Associatividade da composição de funções)

Considere  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : U \rightarrow V$  e  $h : A \rightarrow B$  funções, com  $B \subseteq U$  e  $V \subseteq X$ . Vale a seguinte igualdade:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

12 Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Atividade 32 - Encontre Funções Compostas  
Atividade 33 - Modele com Funções Compostas

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

13

**Atividade Online**

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 10

Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é invertível se existe uma função  $g : Y \rightarrow X$  tal que

(i)  $f \circ g = \mathcal{I}_Y$ ;

(ii)  $g \circ f = \mathcal{I}_X$ .

Nesse caso, a função  $g$  é dita função inversa de  $f$  e denotada por  $g = f^{-1}$ .

## Exemplo 11

A função  $q$  é inversa de  $p$ ?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

15 Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 11

A função  $q$  é inversa de  $p$ ?

Esse exemplo ilustra a importância de verificarmos as duas condições para que tenhamos uma função inversa.

## Atividade 34 - Verifique Funções Inversas

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

16 Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 12

Considere uma função  $f : X \rightarrow Y$ .

- (i)  $f$  é sobrejetiva se, para todo  $y \in Y$ , existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ ;
- (ii)  $f$  é injetiva se  $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ ;
- (iii)  $f$  é bijetiva se é sobrejetiva e injetiva.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

17

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

# Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

## Definição 12

Considere uma função  $f : X \rightarrow Y$ .

- (i)  $f$  é sobrejetiva se, para todo  $y \in Y$ , existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ ;
- (ii)  $f$  é injetiva se  $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ ;
- (iii)  $f$  é bijetiva se é sobrejetiva e injetiva.

Há, ainda, formas alternativas de enunciar as definições acima:

- ▶  $f$  é sobrejetiva se, e somente se,  $f(X) = Y$ ;
- ▶  $f$  é injetiva se, e somente se,  $x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ ;
- ▶  $f$  é injetiva se, e somente se, para todo  $y \in f(X)$ , existe um único  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ ;
- ▶  $f$  é bijetiva se, e somente se, para todo  $y \in Y$ , existe um único  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

17 Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia



# Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

## Exemplo 13

As funções  $p$  e  $q$  são sobrejetivas, injetivas ou bijetivas?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

18 Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

# Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas



## Teorema 14

*Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é invertível se, e somente se, é bijetiva.*

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

19

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

# Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas



Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

19 Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Teorema 14

*Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é invertível se, e somente se, é bijetiva.*

## Exemplo 15

Decorre do Teorema 14 e do Exemplo 13 que as funções  $p$  e  $q$  não são invertíveis.

# Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas



## Teorema 16

*Considere a função  $f : X \rightarrow Y$ . Então existe um subconjunto  $Y' \subseteq Y$ , tal que  $f' : X \rightarrow Y'$ , definida por  $f'(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ , é sobrejetiva.*

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

20

Injetividade e Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

# Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas



## Teorema 16

*Considere a função  $f : X \rightarrow Y$ . Então existe um subconjunto  $Y' \subseteq Y$ , tal que  $f' : X \rightarrow Y'$ , definida por  $f'(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ , é sobrejetiva.*

## Teorema 17

*Considere a função  $f : X \rightarrow Y$ . Então existe um subconjunto  $X' \subseteq X$ , tal que  $f' : X' \rightarrow Y$ , definida por  $f'(x) = f(x)$  para todo  $x \in X'$ , é injetiva.*

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

20 Injetividade e Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

# Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas



Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

20 Injetividade e Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Teorema 16

*Considere a função  $f : X \rightarrow Y$ . Então existe um subconjunto  $Y' \subseteq Y$ , tal que  $f' : X \rightarrow Y'$ , definida por  $f'(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ , é sobrejetiva.*

## Teorema 17

*Considere a função  $f : X \rightarrow Y$ . Então existe um subconjunto  $X' \subseteq X$ , tal que  $f' : X' \rightarrow Y$ , definida por  $f'(x) = f(x)$  para todo  $x \in X'$ , é injetiva.*

## Exemplo 18

Restrinja o domínio ou o contradomínio de  $p$  e  $q$  a fim de obter funções bijetivas com as mesmas leis de formação.

Atividade 35 - Determine se uma Função É Inversível  
Atividade 36 - Restrinja os Domínios de Funções para  
Torná-las Inversíveis

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

21 Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

É muito importante não pensar que uma função é uma fórmula.  
Considere as funções

$$p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad p_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} .$$

Essas funções são iguais?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

22 Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia



É muito importante não pensar que uma função é uma fórmula.  
Considere as funções

$$p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad p_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} .$$

Essas funções são iguais?

NÃO! Note que  $p_2$  é bijetiva e  $p_1$  não é, mesmo tendo a mesma fórmula.

Além disso, funções podem ser definidas por mais de uma fórmula, como na função  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

22 **Fórmulas e Funções**

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Atividade 38 - Cálculo de Funções Definidas por Partes

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

23

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

1. Em cada um dos itens abaixo, defina uma função com a lei de formação dada (indicando domínio e contradomínio). Verifique se é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva, a função

- a) Que a cada ponto do plano cartesiano associa a distância desse ponto à origem do plano;
- b) Que a cada dois números naturais associa seu mdc;
- c) Que a cada polinômio (não nulo) com coeficientes reais associa seu grau;
- d) Que a cada figura plana fechada e limitada associa a sua área;
- e) Que a cada subconjunto de  $\mathbb{R}$  associa seu complementar;
- f) Que a cada subconjunto finito de  $\mathbb{N}$  associa seu número de elementos;
- g) Que a cada subconjunto não vazio de  $\mathbb{N}$  associa seu menor elemento.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

24 Exercícios

Bibliografia

2. Considere a função  $g : [0; 5] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 4x - x^2 & \text{se } x < 3 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}.$$

Determine as soluções de:

- a)  $g(x) = -1$ ;
- b)  $g(x) = 0$ ;
- c)  $g(x) = 3$ ;
- d)  $g(x) = 4$ ;
- e)  $g(x) < 3$ ;
- f)  $g(x) \geq 3$ .

3. Considere a função  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que

$$f(n) = \begin{cases} \frac{-n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Mostre que  $f$  é bijetiva.

4. Considere a função  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  tal que  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

Responda as seguintes perguntas apresentando as respectivas justificativas.

- a)  $f$  é injetiva?
- b)  $f$  é sobrejetiva?

5. Considere a função  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 2, & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{1}{1-x}, & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Mostre que  $f$  é bijetiva.

6. Considere as funções reais  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$ . Demonstre, ou refute com um contraexemplo, as afirmações abaixo:

- a) Se  $f$  e  $g$  são injetivas, então  $(g \circ f)$  é injetiva;
  - b) Se  $(g \circ f)$  é injetiva então  $f$  e  $g$  são injetivas;
  - c) Se  $f$  e  $g$  são sobrejetivas, então  $(g \circ f)$  é sobrejetiva;
  - d) Se  $(g \circ f)$  é sobrejetiva então  $f$  e  $g$  são sobrejetivas.
7. Considere  $f : [3; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2 - 7x + 10$ .
- a) Defina uma função bijetiva  $f'$  tal que  $f'(x) = f(x)$  para todo  $x$  pertencente ao domínio de  $f'$ ;
  - b) Prove que  $f'$ , definida por você, é bijetiva.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

27 Exercícios

Bibliografia

- [1] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.  
*A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.*  
9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

28

Bibliografia