

Capítulo 4 - Parte 1

Matemática Elementar

Funções Reais e Gráficos

14 de junho de 2023

Igor Oliveira

`matematicaelementar@imd.ufrn.br`

Instituto Metrôpole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Apresentação da Aula

Considere as funções

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

As funções p e q são inversas uma da outra?

Apresentação da Aula

Considere as funções

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

As funções p e q são inversas uma da outra?
Elas são bijetivas?

Considere as funções

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

As funções p e q são inversas uma da outra?

Elas são bijetivas?

Quais outras informações podemos dizer acerca dessas funções?

O que É uma Função?

Definição 1

Sejam X e Y dois conjuntos quaisquer.

Uma função é uma relação $f : X \rightarrow Y$ que, a cada elemento $x \in X$, associa um e somente um elemento $y \in Y$.

Nesse caso:

- (i) Os conjuntos X e Y são chamados domínio e contradomínio de f , respectivamente;
- (ii) O conjunto

$$f(X) = \{y \in Y ; \text{ existe } x \in X \text{ onde } f(x) = y\} \subseteq Y$$

é chamado imagem de f ;

- (iii) Dado $x \in X$, o (único) elemento $y = f(x) \in Y$ correspondente é chamado imagem de x .

O que É uma Função?

Dessa forma, uma função é um terno constituído por: domínio, contradomínio e lei de associação (dos elementos do domínio com os do contradomínio). Precisamos desses três elementos para que uma função seja bem definida. Poderíamos definir função da seguinte forma:

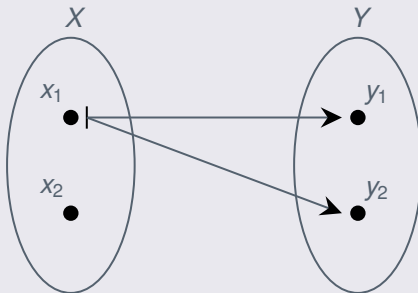
Para que uma relação $f : X \rightarrow Y$ seja uma função, ela deve satisfazer a duas condições fundamentais:

- (I) Estar bem definida em todo elemento do domínio (existência);
- (II) Não fazer corresponder mais de um elemento do contradomínio a cada elemento do domínio (unicidade).

O que É uma Função?

Exemplo 2

Sejam $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ e a relação $f : X \rightarrow Y$ definida por:



Qual(is) o(s) problema(s) com essa “função”?

O que É uma Função?

Definição 3

Uma função $f : X \rightarrow Y$ é chamada de função real se seus valores são números reais; isto é, $Y \subseteq \mathbb{R}$. Quando a variável independente assume valores reais – isto é, $X \subseteq \mathbb{R}$ –, diz-se que f é uma função de variável real. Nesse caso, pode-se utilizar a notação $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y$ para enfatizar que o domínio D da função é subconjunto de \mathbb{R} .

O que É uma Função?

Definição 3

Uma função $f : X \rightarrow Y$ é chamada de função real se seus valores são números reais; isto é, $Y \subseteq \mathbb{R}$. Quando a variável independente assume valores reais – isto é, $X \subseteq \mathbb{R}$ –, diz-se que f é uma função de variável real. Nesse caso, pode-se utilizar a notação $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y$ para enfatizar que o domínio D da função é subconjunto de \mathbb{R} .

A menos que se diga o contrário, trabalharemos, a partir desse momento, com funções reais de variável real, e, por simplicidade, chamaremos essas funções simplesmente de funções reais.

O que É uma Função?

Exemplo 4

Considere as funções reais

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Qual o domínio, contradomínio e a lei de associação de p e q ?

O que É uma Função?

Exemplo 4

Considere as funções reais

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Qual o domínio, contradomínio e a lei de associação de p e q ?

Exemplo 5

Seja $\mathcal{I}_X: X \rightarrow X$ uma função tal que $\mathcal{I}_X(x) = x$ para todo $x \in X$. Chamamos \mathcal{I}_X de função identidade do conjunto X .

Atividade 30 - Como Reconhecer Funções a Partir de Tabelas

Atividade 31 - Problemas de Domínio de Funções

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

9 Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Definição 6

Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : U \rightarrow V$ duas funções, com $Y \subseteq U$. A função composta de g com f é a função denotada por $g \circ f$, com domínio em X e contradomínio em V , que a cada elemento $x \in X$ faz corresponder o elemento $v = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in V$. Isto é:

$$\begin{array}{ccccccc} g \circ f : & X & \rightarrow & Y \subseteq U & \rightarrow & V \\ & x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array} .$$

Exemplo 7

Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função. Mostre que $f \circ \mathcal{I}_X = f$ e $\mathcal{I}_Y \circ f = f$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

11 Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Composição de Funções

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

11 Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 7

Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função. Mostre que $f \circ \mathcal{I}_X = f$ e $\mathcal{I}_Y \circ f = f$.

Exemplo 8

Qual função resulta da composição $p \circ q$?

Proposição 9 (Associatividade da composição de funções)

Considere $f : X \rightarrow Y$, $g : U \rightarrow V$ e $h : A \rightarrow B$ funções, com $B \subseteq U$ e $V \subseteq X$. Vale a seguinte igualdade:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

12 Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Atividade 32 - Encontre Funções Compostas
Atividade 33 - Modele com Funções Compostas

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

13

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Definição 10

Uma função $f : X \rightarrow Y$ é invertível se existe uma função $g : Y \rightarrow X$ tal que

(i) $f \circ g = \mathcal{I}_Y$;

(ii) $g \circ f = \mathcal{I}_X$.

Nesse caso, a função g é dita função inversa de f e denotada por $g = f^{-1}$.

Exemplo 11

A função q é inversa de p ?

Exemplo 11

A função q é inversa de p ?

Esse exemplo ilustra a importância de verificarmos as duas condições para que tenhamos uma função inversa.

Atividade 34 - Verifique Funções Inversas

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

16 Atividade Online

Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Definição 12

Considere uma função $f : X \rightarrow Y$.

- (i) f é sobrejetiva se, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$;
- (ii) f é injetiva se $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$;
- (iii) f é bijetiva se é sobrejetiva e injetiva.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

17

Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

Definição 12

Considere uma função $f : X \rightarrow Y$.

- (i) f é sobrejetiva se, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$;
- (ii) f é injetiva se $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$;
- (iii) f é bijetiva se é sobrejetiva e injetiva.

Há, ainda, formas alternativas de enunciar as definições acima:

- ▶ f é sobrejetiva se, e somente se, $f(X) = Y$;
- ▶ f é injetiva se, e somente se, $x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$;
- ▶ f é injetiva se, e somente se, para todo $y \in f(X)$, existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$;
- ▶ f é bijetiva se, e somente se, para todo $y \in Y$, existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

17 Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

Exemplo 13

As funções p e q são sobrejetivas, injetivas ou bijetivas?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

18 Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas



Teorema 14

Uma função $f : X \rightarrow Y$ é invertível se, e somente se, é bijetiva.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

19 Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas



Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

19 Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Teorema 14

Uma função $f : X \rightarrow Y$ é invertível se, e somente se, é bijetiva.

Exemplo 15

Decorre do Teorema 14 e do Exemplo 13 que as funções p e q não são invertíveis.

Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas



Teorema 16

Considere a função $f : X \rightarrow Y$. Então existe um subconjunto $Y' \subseteq Y$, tal que $f' : X \rightarrow Y'$, definida por $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, é sobrejetiva.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

20

Injetividade e Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas



Teorema 16

Considere a função $f : X \rightarrow Y$. Então existe um subconjunto $Y' \subseteq Y$, tal que $f' : X \rightarrow Y'$, definida por $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, é sobrejetiva.

Teorema 17

Considere a função $f : X \rightarrow Y$. Então existe um subconjunto $X' \subseteq X$, tal que $f' : X' \rightarrow Y$, definida por $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in X'$, é injetiva.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

20 Injetividade e Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas



Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

20 Injetividade e Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Teorema 16

Considere a função $f : X \rightarrow Y$. Então existe um subconjunto $Y' \subseteq Y$, tal que $f' : X \rightarrow Y'$, definida por $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, é sobrejetiva.

Teorema 17

Considere a função $f : X \rightarrow Y$. Então existe um subconjunto $X' \subseteq X$, tal que $f' : X' \rightarrow Y$, definida por $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in X'$, é injetiva.

Exemplo 18

Restrinja o domínio ou o contradomínio de p e q a fim de obter funções bijetivas com as mesmas leis de formação.

Atividade 35 - Determine se uma Função É Inversível
Atividade 36 - Restrinja os Domínios de Funções para
Torná-las Inversíveis

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e
Sobrejetividade

21 Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

É muito importante não pensar que uma função é uma fórmula.
Considere as funções

$$p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad p_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} .$$

Essas funções são iguais?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

22 Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

É muito importante não pensar que uma função é uma fórmula.
Considere as funções

$$p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad p_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} .$$

Essas funções são iguais?

NÃO! Note que p_2 é bijetiva e p_1 não é, mesmo tendo a mesma fórmula.

Além disso, funções podem ser definidas por mais de uma fórmula, como na função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

22 Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Atividade 38 - Cálculo de Funções Definidas por Partes

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

23

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

28

1. Em cada um dos itens abaixo, defina uma função com a lei de formação dada (indicando domínio e contradomínio). Verifique se é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva, a função

- a) Que a cada ponto do plano cartesiano associa a distância desse ponto à origem do plano;
- b) Que a cada dois números naturais associa seu mdc;
- c) Que a cada polinômio (não nulo) com coeficientes reais associa seu grau;
- d) Que a cada figura plana fechada e limitada associa a sua área;
- e) Que a cada subconjunto de \mathbb{R} associa seu complementar;
- f) Que a cada subconjunto finito de \mathbb{N} associa seu número de elementos;
- g) Que a cada subconjunto não vazio de \mathbb{N} associa seu menor elemento.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

24 Exercícios

Bibliografia

2. Considere a função $g : [0; 5] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 4x - x^2 & \text{se } x < 3 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}.$$

Determine as soluções de:

- a) $g(x) = -1$;
- b) $g(x) = 0$;
- c) $g(x) = 3$;
- d) $g(x) = 4$;
- e) $g(x) < 3$;
- f) $g(x) \geq 3$.

3. Considere a função $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} \frac{-n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Mostre que f é bijetiva.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Responda as seguintes perguntas apresentando as respectivas justificativas.

- a) f é injetiva?
- b) f é sobrejetiva?

5. Considere a função $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 2, & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{1}{1-x}, & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Mostre que f é bijetiva.

6. Considere as funções reais $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$. Demonstre, ou refute com um contraexemplo, as afirmações abaixo:

- a) Se f e g são injetivas, então $(g \circ f)$ é injetiva;
- b) Se $(g \circ f)$ é injetiva então f e g são injetivas;
- c) Se f e g são sobrejetivas, então $(g \circ f)$ é sobrejetiva;
- d) Se $(g \circ f)$ é sobrejetiva então f e g são sobrejetivas.

7. Considere $f : [3, 5; +\infty) \rightarrow [-2, 25; +\infty)$ tal que $f(x) = x^2 - 7x + 10$. Prove que f é bijetiva.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

27 Exercícios

Bibliografia

- [1] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.
A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.
9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

28

Bibliografia