

Capítulo 4 - Parte 2

Matemática Elementar

Funções Reais e Gráficos

10 de maio de 2023

Igor Oliveira

`matematicaelementar@imd.ufrn.br`

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Definição 19

Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano Π consiste num par de eixos perpendiculares OX e OY contidos nesse plano, com a mesma origem O . OX chama-se o eixo das abscissas e OY é o eixo das ordenadas. O sistema é indicado com a notação OXY . Um plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas é chamado de cartesiano.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

3 Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Definição 19

Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano Π consiste num par de eixos perpendiculares OX e OY contidos nesse plano, com a mesma origem O . OX chama-se o eixo das abscissas e OY é o eixo das ordenadas. O sistema é indicado com a notação OXY . Um plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas é chamado de cartesiano.

Fixado um sistema de coordenadas cartesianas OXY num plano Π , cada ponto P do plano possuirá um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associado e vice-versa. Dizemos que x e y são as coordenadas do ponto P e escrevemos $P = (x, y)$, onde x é a abscissa e y é a ordenada de P .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

3 Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Definição 19

Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano Π consiste num par de eixos perpendiculares OX e OY contidos nesse plano, com a mesma origem O . OX chama-se o eixo das abscissas e OY é o eixo das ordenadas. O sistema é indicado com a notação OXY . Um plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas é chamado de cartesiano.

Fixado um sistema de coordenadas cartesianas OXY num plano Π , cada ponto P do plano possuirá um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associado e vice-versa. Dizemos que x e y são as coordenadas do ponto P e escrevemos $P = (x, y)$, onde x é a abscissa e y é a ordenada de P .

Exemplo 20

Represente os pontos $P_1 = (1, 3)$, $P_2 = (-2, 0)$ e $P_3 = (0, -4)$ em um plano cartesiano.

Definição 21

Os eixos ortogonais OX e OY decompõem o plano cartesiano em quatro regiões, cada uma das quais se chama um quadrante. Dado um ponto $P = (x, y)$, dizemos que P está no:

- ▶ primeiro quadrante, se $x \geq 0$ e $y \geq 0$;
- ▶ segundo quadrante, se $x \leq 0$ e $y \geq 0$;
- ▶ terceiro quadrante, se $x \leq 0$ e $y \leq 0$;
- ▶ quarto quadrante, se $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

Definição 21

Os eixos ortogonais OX e OY decompõem o plano cartesiano em quatro regiões, cada uma das quais se chama um quadrante. Dado um ponto $P = (x, y)$, dizemos que P está no:

- ▶ primeiro quadrante, se $x \geq 0$ e $y \geq 0$;
- ▶ segundo quadrante, se $x \leq 0$ e $y \geq 0$;
- ▶ terceiro quadrante, se $x \leq 0$ e $y \leq 0$;
- ▶ quarto quadrante, se $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

Exemplo 22

Os pontos $P_1 = (1, 3)$, $P_2 = (-2, 0)$ e $P_3 = (0, -4)$ estão em quais quadrantes?

Proposição 23 (Distância entre dois pontos)

Dados os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$, a distância entre P e Q , $d(P, Q)$, é

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

5 Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Proposição 23 (Distância entre dois pontos)

Dados os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$, a distância entre P e Q , $d(P, Q)$, é

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

Exemplo 24

Dados os pontos $P_1 = (1, 3)$, $P_2 = (-2, 0)$ e $P_3 = (0, -4)$, calcule $d(P_1, P_2)$ e $d(P_2, P_3)$.

Proposição 23 (Distância entre dois pontos)

Dados os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$, a distância entre P e Q , $d(P, Q)$, é

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

Exemplo 24

Dados os pontos $P_1 = (1, 3)$, $P_2 = (-2, 0)$ e $P_3 = (0, -4)$, calcule $d(P_1, P_2)$ e $d(P_2, P_3)$.

Exemplo 25

Qual a equação que determina os pontos (x, y) pertencentes a uma circunferência centrada na origem O e de raio r ?

Exemplo 26

Dados os pontos distintos $A = (a, b)$ e $C = (c, d)$, as equações

$$\begin{cases} x = a + t(c - a) \\ y = b + t(d - b) \end{cases},$$

onde $t \in \mathbb{R}$, chamam-se as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e C .

Quais as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (-1, 3)$ e $B = (0, 2)$?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

6 Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 26

Dados os pontos distintos $A = (a, b)$ e $C = (c, d)$, as equações

$$\begin{cases} x = a + t(c - a) \\ y = b + t(d - b) \end{cases},$$

onde $t \in \mathbb{R}$, chamam-se as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e C .

Quais as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (-1, 3)$ e $B = (0, 2)$?

Exemplo 27

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que a e b não são ambos nulos. O conjunto de pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas satisfazem a equação $ax + by = c$ é uma reta.

Esboce a reta determinada pela equação $4x + 2y = -1$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

6 Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Atividade 39 - Pontos no Plano Cartesiano
Atividade 40 - Distância Entre Pontos no Primeiro Quadrante
Atividade 41 - Faça um Gráfico a Partir da Equação Geral da Reta

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

7 Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Definição 28

O gráfico de uma função real é o seguinte subconjunto do plano cartesiano \mathbb{R}^2 :

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in D, y = f(x)\}.$$

Em outras palavras, o gráfico de uma função f é o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem sua lei de associação.

Exemplo 29

Esboce o gráfico da função real

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Definição 30

Chamamos de função piso (também chamada de chão ou solo) a função real que associa a cada número real x ao maior inteiro que é menor ou igual a x . Denotamos este número por $\lfloor x \rfloor$.

Chamamos de função teto a função real que associa a cada número real x ao menor inteiro que é maior ou igual a x . Denotamos este número por $\lceil x \rceil$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

10 Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Definição 30

Chamamos de função piso (também chamada de chão ou solo) a função real que associa a cada número real x ao maior inteiro que é menor ou igual a x . Denotamos este número por $\lfloor x \rfloor$.

Chamamos de função teto a função real que associa a cada número real x ao menor inteiro que é maior ou igual a x . Denotamos este número por $\lceil x \rceil$.

Exemplo 31

Calcule $\lceil 7,5 \rceil$, $\lfloor -2,2 \rfloor$, $\lceil 4,1 \rceil$ e $\lfloor -3,9 \rfloor$.
Esboce o gráfico das funções piso e teto.

Exemplo 32

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \sin x + 1,$$

$$h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

11

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 32

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \sin x + 1,$$

$$h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = f(x + b) + a$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f , através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro b , e uma translação vertical determinada pelo parâmetro a .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

11

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 32

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \sin x + 1,$$

$$h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = f(x + b) + a$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f , através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro b , e uma translação vertical determinada pelo parâmetro a .

► O translado vertical será:

- No sentido positivo do eixo y (para cima), se $a > 0$;
- No sentido negativo do eixo y (para baixo), se $a < 0$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

11

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 32

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \sin x + 1,$$

$$h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = f(x + b) + a$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f , através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro b , e uma translação vertical determinada pelo parâmetro a .

- ▶ O translado vertical será:
 - ▶ No sentido positivo do eixo y (para cima), se $a > 0$;
 - ▶ No sentido negativo do eixo y (para baixo), se $a < 0$.
- ▶ O translado horizontal será:
 - ▶ No sentido positivo do eixo x (para a direita), se $b < 0$;
 - ▶ No sentido negativo do eixo x (para a esquerda), se $b > 0$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

11

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 33

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x,$$

$$h(x) = f(2 \cdot x) = \sin(2 \cdot x).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

12

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 33

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x,$$

$$h(x) = f(2 \cdot x) = \sin(2 \cdot x).$$

Exemplo 34

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = -1 \cdot f(x) = -1 \cdot \sin x,$$

$$h(x) = f(-1 \cdot x) = \sin(-1 \cdot x).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

12

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f , através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro d , e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro c . Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

13

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f , através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro d , e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro c . Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

- ▶ A dilatação vertical será:
 - ▶ Um esticamento se $c > 1$;
 - ▶ Um encolhimento se $0 < c < 1$;
 - ▶ Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo x se $c < -1$;
 - ▶ Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo x se $-1 < c < 0$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

13

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f , através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro d , e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro c . Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

- ▶ A dilatação vertical será:
 - ▶ Um esticamento se $c > 1$;
 - ▶ Um encolhimento se $0 < c < 1$;
 - ▶ Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo x se $c < -1$;
 - ▶ Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo x se $-1 < c < 0$.
- ▶ A dilatação horizontal será:
 - ▶ Um encolhimento se $d > 1$;
 - ▶ Um esticamento se $0 < d < 1$;
 - ▶ Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo y se $d < -1$;
 - ▶ Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo y se $-1 < d < 0$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

13

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Atividade 42 - Transladação de Funções
Atividade 43 - Identifique Transformações de Funções

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

Gráficos e
Transformações no
Plano

14 Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Definição 35

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que

- (i) f é monótona (estritamente) crescente se, para todos $x_1, x_2 \in D$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2);$$

- (ii) f é monótona não decrescente se, para todos $x_1, x_2 \in D$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2);$$

- (iii) f é monótona (estritamente) decrescente se, para todos $x_1, x_2 \in D$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2);$$

- (iv) f é monótona não crescente se, para todos $x_1, x_2 \in D$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

15 Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Nas mesmas condições da Definição 35 , se $f(x) = k \in \mathbb{R}$ para todo $x \in D$, dizemos que f é constante.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

16

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Nas mesmas condições da Definição 35, se $f(x) = k \in \mathbb{R}$ para todo $x \in D$, dizemos que f é constante.

Se $I \subseteq D$ é um intervalo, definimos a monotonicidade de f no intervalo I de maneira análoga ao feito anteriormente. Por exemplo:

f é monótona (estritamente) crescente em I se, para todos $x_1, x_2 \in I$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

16

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Definição 36

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- (i) f é limitada superiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$, para todo $x \in D$;
- (ii) f é limitada inferiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq M$, para todo $x \in D$;
- (iii) $x_0 \in D$ é um ponto de máximo absoluto de f se $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $x \in D$;
- (iv) $x_0 \in D$ é um ponto de mínimo absoluto de f se $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in D$;
- (v) $x_0 \in D$ é um ponto de máximo local de f se existe $r > 0$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$;
- (vi) $x_0 \in D$ é um ponto de mínimo local de f se existe $r > 0$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

17

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

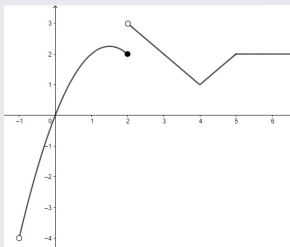
Exercícios

Bibliografia

Exemplo 37

A função $h : (-1; 6] \rightarrow \mathbb{R}$, cujo gráfico é esboçado abaixo, é

$$\text{definida por } h(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ |x - 4| + 1 & \text{se } 2 < x \leq 5 \\ 2 & \text{se } x > 5 \end{cases}.$$



Determine os intervalos de monotonicidade e os extremos de h .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

18 Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Atividade 44 - Intervalos Crescentes e Decrescentes
Atividade 45 - Mínimos e Máximos Relativos
Atividade 46 - Mínimos e Máximos Absolutos

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

19

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

7. Considere os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ distintos e pertencentes a um plano cartesiano. Responda o que se pede:

- a) Qual as equações paramétricas da reta que passa por A e B ?
- b) Mostre que o ponto $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ pertence à reta que passa por A e B ;
- c) Mostre que $d(A, M) = d(M, B)$ e conclua que M é o ponto médio do segmento AB .

8. Considere a função $f : [3; 5] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

- a) Mostre que f é decrescente.
- b) f possui máximo absoluto? Se sim, ocorre em qual ponto?
- c) f possui mínimo absoluto? Se sim, ocorre em qual ponto?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

20 Exercícios

Bibliografia

9. Considere a função $f : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Responda as seguintes perguntas apresentando as respectivas justificativas.

- a) f é monótona? Se sim, de que tipo? Se não, f possui algum intervalo de monotonicidade?
 - b) f possui máximo absoluto?
 - c) f possui mínimo absoluto?
 - d) f é limitada?
10. Considere a função real f tal que $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.
- a) Mostre que f é crescente no intervalo $(-\infty, 1]$;
 - b) Mostre que f é decrescente no intervalo $[1, +\infty)$;
 - c) Use os itens anteriores para concluir que $1 \in \mathbb{R}$ é um ponto de máximo absoluto de f .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

21 Exercícios

Bibliografia

11. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

- (a) Se f é limitada superiormente, então f tem pelo menos um máximo absoluto;
- (b) Se f é limitada superiormente, então f tem pelo menos um máximo local;
- (c) Se f tem um máximo local, então f tem um máximo absoluto;
- (d) Todo máximo local de f é máximo absoluto;
- (e) Todo máximo absoluto de f é máximo local;
- (f) Se x_0 é o ponto de extremo local de f , então é ponto de extremo local de f^2 , onde $(f^2)(x) = f(x) \cdot f(x)$;
- (g) Se x_0 é o ponto de extremo local de f^2 , então é ponto de extremo local de f .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

22 Exercícios

Bibliografia

12. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

- a) A função g pode ser ilimitada inferiormente;
- b) f é limitada superiormente ou f é limitada inferiormente.

13. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

- (a) Se f e g são crescentes, então a composta $f \circ g$ é uma função crescente;
- (b) Se f e g são crescentes, então o produto $f \cdot g$ é uma função crescente, onde $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;
- (c) Se f é crescente em $A \subseteq \mathbb{R}$ e em $B \subseteq \mathbb{R}$, então f é crescente em $A \cup B \subseteq \mathbb{R}$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

23 Exercícios

Bibliografia

14. Seja f uma função real.

- a) Suponha que f é constante. Mostre que f é não crescente e não decrescente;
- b) Suponha que f é não crescente e não decrescente. Mostre que f é constante.

Mostre que uma função real é constante se, e somente se, é não decrescente e não crescente.

15. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e A e B intervalos reais tais que $A \cap B$ é um intervalo não degenerado, ou seja, que possui pelo menos dois números. Mostre que, se f é crescente em A e em B , então f é crescente em $A \cap B$.

16. Mostre que a função inversa de uma função crescente é também uma função crescente. E a função inversa de uma função decrescente é decrescente.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

24 Exercícios

Bibliografia

17. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *par* quando se tem $f(-t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se for o caso de $f(-t) = -f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, dizemos que f é *ímpar*.

Considere a função real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Demonstre, ou refute com um contraexemplo, as afirmações abaixo:

- a) Se f é par e $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de máximo absoluto, então $-x_0 \in \mathbb{R}$ é também um ponto de máximo absoluto;
- b) Se f é ímpar e $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de mínimo absoluto, então $-x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de máximo absoluto.
- c) Se f é ímpar e limitada superiormente, então f é limitada inferiormente.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

25 Exercícios

Bibliografia

- [1] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.
A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.
9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [2] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.
A Matemática do Ensino Médio. Vol. 3.
6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função
Real

Gráficos e
Transformações no
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

26

Bibliografia