

# Capítulo 3

## Matemática Elementar Matrizes e Sistemas Lineares

28 de abril de 2023

Igor Oliveira

`matematicaelementar@imd.ufrn.br`

Instituto Metrôpole Digital  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Natal-RN

- Apresentação
- Matrizes
- Atividade Online
- Operações com Matrizes
- Atividade Online
- Sistemas Lineares
- Atividade Online
- Operações Elementares
- Atividade Online
- Matrizes Quadradas
- Atividade Online
- Determinante
- Exercícios
- Bibliografia

- Matemática Elementar

  - Igor Oliveira

- Apresentação

- Matrizes

- Atividade Online

- Operações com  
Matrizes

- Atividade Online

- Sistemas Lineares

- Atividade Online

- Operações  
Elementares

- Atividade Online

- Matrizes Quadradas

- Atividade Online

- Determinante

- Exercícios

- Bibliografia

## Motivação

Matrizes são, fundamentalmente, tabelas numéricas sobre as quais se definem certas operações algébricas, útil para armazenar vários dados em um só elemento. Além disso, as matrizes se aplicam ao estudo dos sistemas lineares (conforme veremos neste capítulo), bem como desempenham um papel decisivo no estudo das transformações lineares, as quais são justamente as funções estudadas na Álgebra Linear.

## Definição 1

Sejam  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . Uma matriz (real) do tipo  $m \times n$  (lê-se:  $m$  por  $n$ ) é uma “tabela” disposta em  $m$  linhas e  $n$  colunas.

Denotamos os números reais que formam a  $i$ -ésima linha de uma matriz  $A$  por  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  e sua  $j$ -ésima coluna por  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ . Assim, escrevemos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Chamamos de entradas, de uma matriz  $A$ , os reais  $a_{ij}$  que a compõem. Poderemos indicar uma matriz  $A$  do tipo  $m \times n$  com entradas  $a_{ij}$  por

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

ou, simplesmente,  $A = (a_{ij})$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

4

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 2

As matrizes  $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ , em que  $a_{ij} = i + j$  e  $B = (b_{ij})_{2 \times 4}$ , em que  $b_{ij} = i^j$ , são:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

## Definição 3

Uma matriz  $A$  do tipo  $n \times n$ , é dita quadrada de ordem  $n$ . O conjunto formado por suas entradas  $a_{ij}$  é chamado de diagonal de  $A$ . O conjunto formado pelas entradas  $a_{ij}$  tais que  $i + j = n + 1$  é chamado de diagonal secundária de  $A$ .

Uma matriz do tipo  $m \times n$  cujas entradas são todas iguais a zero chama-se nula e será denotada por  $0_{m \times n}$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

6

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Definição 3

Uma matriz  $A$  do tipo  $n \times n$ , é dita quadrada de ordem  $n$ . O conjunto formado por suas entradas  $a_{ij}$  é chamado de diagonal de  $A$ . O conjunto formado pelas entradas  $a_{ij}$  tais que  $i + j = n + 1$  é chamado de diagonal secundária de  $A$ . Uma matriz do tipo  $m \times n$  cujas entradas são todas iguais a zero chama-se nula e será denotada por  $0_{m \times n}$ .

## Exemplo 4

Dada a matriz  $A$  quadrada de ordem 3 abaixo, sua diagonal é formada pelos números 2, 4 e 1. A diagonal secundária é formada por 1, 4 e 4.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

6

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Atividade Online 17 - Use Matrizes para Representar Dados

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

7 Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia



## Definição 5 (Produto por escalar e adição de matrizes)

Dadas matrizes de mesmo tipo,  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definimos o produto por escalar  $\lambda A$  e a adição  $A + B$  por:

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

e

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

8 Operações com Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 6

Calcule:

$$A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}.$$

## Proposição 7 (Propriedades do produto por escalar e da adição)

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes de mesmo tipo  $m \times n$ , e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .  
Tem-se:

- i. Comutatividade da adição:  $A + B = B + A$ ;
- ii. Associatividade da adição:  $A + (B + C) = (A + B) + C$ ;
- iii. Elemento neutro da adição:  $A + 0_{m \times n} = A$ ;
- iv. Existência do oposto aditivo:  $A + (-A) = 0_{m \times n}$ ;
- v. Associatividade a multiplicação por escalar:  
 $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ ;
- vi. Elemento neutro da multiplicação por escalar:  $1 \cdot A = A$ ;
- vii. Distributividade, de uma em relação à outra:  
 $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$  e  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

10 Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Definição 8 (Multiplicação de matrizes)

Dadas matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{n \times p}$ , onde o número de colunas de  $A$  coincide com o número de linhas de  $B$ . Definimos o produto  $AB$  como a matriz  $P = (p_{ij})_{m \times p}$ , cujas entradas são:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

11 Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Definição 8 (Multiplicação de matrizes)

Dadas matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{n \times p}$ , onde o número de colunas de  $A$  coincide com o número de linhas de  $B$ . Definimos o produto  $AB$  como a matriz  $P = (p_{ij})_{m \times p}$ , cujas entradas são:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

## Exemplo 9

Calcule:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

11 Operações com Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Proposição 10 (Propriedades do produto de matrizes)

Sejam as matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{n \times p}$ ,  $C = (c_{ij})_{p \times q}$ ,  $D = (d_{ij})_{n \times p}$  e  $E = (e_{ij})_{m \times n}$ . Tem-se:

- i. Associatividade:  $A(BC) = (AB)C$ ;
- ii. Distributividade à esquerda, em relação a soma:  
 $A(B + D) = AB + AD$ ;
- iii. Distributividade à direita, em relação a soma:  
 $(A + E)B = AB + EB$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

12 Operações com Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Observação 11

Dadas duas matrizes  $A$  e  $B$  quadradas e de mesma ordem, os dois produtos  $AB$  e  $BA$  estão bem definidos. No entanto, de modo geral, eles **NÃO SÃO IGUAIS**, isto é, O PRODUTO DE MATRIZES QUADRADAS DE MESMA ORDEM NÃO É COMUTATIVO. Quando, excepcionalmente, ocorre a igualdade  $AB = BA$ , dizemos que  $A$  e  $B$  comutam.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

13 Operações com Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Observação 11

Dadas duas matrizes  $A$  e  $B$  quadradas e de mesma ordem, os dois produtos  $AB$  e  $BA$  estão bem definidos. No entanto, de modo geral, eles **NÃO SÃO IGUAIS**, isto é, O PRODUTO DE MATRIZES QUADRADAS DE MESMA ORDEM NÃO É COMUTATIVO. Quando, excepcionalmente, ocorre a igualdade  $AB = BA$ , dizemos que  $A$  e  $B$  comutam.

## Exemplo 12

Comprove a observação anterior comparando o produto das matrizes quadradas do Exemplo 9 com o produto abaixo:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

13 Operações com Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia



- Atividade Online 18 - Multiplicação de Matrizes por Números Escalares
- Atividade Online 19 - Some e Subtraia Matrizes
- Atividade Online 20 - Use Matrizes para Manipular Dados
- Atividade Online 21 - Multiplique Matrizes

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

14 Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

# Sistemas Lineares e Matrizes

Um sistema de  $m$  equações lineares nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pode ser representado pelas equações

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ (\dots) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Tal sistema é equivalente à equação matricial  $AX = B$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, dizemos que  $A$  é a matriz do sistema. Quando  $B = 0_{m \times 1}$ , o sistema é dito homogêneo. Observe que todo sistema homogêneo admite a solução  $X = 0_{n \times 1}$ , dita trivial.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

15 Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Definição 13 (Sistemas lineares equivalentes)

Dois sistemas lineares são ditos equivalentes quando têm o mesmo conjunto solução.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

16 Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Definição 13 (Sistemas lineares equivalentes)

Dois sistemas lineares são ditos equivalentes quando têm o mesmo conjunto solução.

## Definição 14 (Matriz aumentada de um sistema linear)

Dado um sistema linear  $AX = B$ , define-se a sua matriz aumentada  $(A|B)$ , como sendo a matriz obtida “posicionando” a matriz  $B$  à direita da matriz  $A$ , isto é,

$$(A|B) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

16 Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 15

Qual a matriz aumentada do sistema linear abaixo?

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

17 Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Atividade Online 22 - Represente Sistemas Lineares com Matrizes

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

18 Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

# Operações Elementares sobre Matrizes



Algumas operações sobre as linhas de uma matriz são ditas elementares. São elas:

- ▶  $(l_i \leftrightarrow l_j)$ : Troca de posição entre duas linhas  $l_i$  e  $l_j$ ;
- ▶  $(l_i \rightarrow \lambda l_i)$ : Multiplicação de uma linha  $l_i$  por um escalar  $\lambda \neq 0$ ;
- ▶  $(l_j \rightarrow l_j + \lambda l_i)$ : Substituição de uma linha  $l_j$  por  $l_j + \lambda l_i$ , sendo  $\lambda \neq 0$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

19 Operações Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

# Operações Elementares sobre Matrizes



Algumas operações sobre as linhas de uma matriz são ditas elementares. São elas:

- ▶  $(l_i \leftrightarrow l_j)$ : Troca de posição entre duas linhas  $l_i$  e  $l_j$ ;
- ▶  $(l_i \rightarrow \lambda l_i)$ : Multiplicação de uma linha  $l_i$  por um escalar  $\lambda \neq 0$ ;
- ▶  $(l_j \rightarrow l_j + \lambda l_i)$ : Substituição de uma linha  $l_j$  por  $l_j + \lambda l_i$ , sendo  $\lambda \neq 0$ .

## Definição 16 (Equivalência por linhas)

Diz-se que uma matriz  $B$  é linha equivalente a uma matriz  $A$  quando  $B$  é obtida de  $A$  efetuando-se nesta uma sequência de operações elementares.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

19 Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia



# Operações Elementares sobre Matrizes



Algumas operações sobre as linhas de uma matriz são ditas elementares. São elas:

- ▶  $(l_i \leftrightarrow l_j)$ : Troca de posição entre duas linhas  $l_i$  e  $l_j$ ;
- ▶  $(l_i \rightarrow \lambda l_i)$ : Multiplicação de uma linha  $l_i$  por um escalar  $\lambda \neq 0$ ;
- ▶  $(l_j \rightarrow l_j + \lambda l_i)$ : Substituição de uma linha  $l_j$  por  $l_j + \lambda l_i$ , sendo  $\lambda \neq 0$ .

## Definição 16 (Equivalência por linhas)

Diz-se que uma matriz  $B$  é linha equivalente a uma matriz  $A$  quando  $B$  é obtida de  $A$  efetuando-se nesta uma sequência de operações elementares.

## Proposição 17

Dois sistemas lineares  $AX = B$  e  $A'X = B'$  são equivalentes se suas matrizes aumentadas  $(A|B)$  e  $(A'|B')$  são linha equivalentes.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

19 Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Definição 18 (Matriz escalonada)

Diz-se que uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  é escalonada quando cumpre as seguintes condições:

- ▶ O primeiro elemento não-nulo de uma linha está à esquerda do primeiro elemento não-nulo da linha subsequente;
- ▶ As linhas nulas, caso existam, estão abaixo das demais.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

20 Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Definição 18 (Matriz escalonada)

Diz-se que uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  é escalonada quando cumpre as seguintes condições:

- ▶ O primeiro elemento não-nulo de uma linha está à esquerda do primeiro elemento não-nulo da linha subsequente;
- ▶ As linhas nulas, caso existam, estão abaixo das demais.

Para resolvermos um sistema linear, fazemos o escalonamento da matriz aumentada do sistema a fim de obtermos uma matriz escalonada que seja linha equivalente à matriz aumentada do sistema. Esse procedimento é chamado de Método de Gauss ou Eliminação Gaussiana.

## Exemplo 19

Encontre o conjunto solução para o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 4x - 3y + 5z = 4 \end{cases}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

21 Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

# Operações Elementares sobre Matrizes

## Exemplo 19

Encontre o conjunto solução para o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 4x - 3y + 5z = 4 \end{cases}.$$

## Exemplo 20

Encontre o conjunto solução para o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 4t = 9 \\ x + y - z + 2t = 7 \\ -x + 2y + z - t = 3 \\ 4y - z + 3t = 13 \end{cases}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

21 Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Atividade Online 23 - Operações sobre Linhas de uma Matriz

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

22

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Definição 21 (Matrizes triangulares e diagonais)

Uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  é dita triangular, quando ocorre uma das possibilidades:

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i > j \quad \text{ou} \quad a_{ij} = 0 \quad \forall i < j.$$

No primeiro caso, ela é dita triangular superior e, no segundo, triangular inferior. Uma matriz que é triangular superior e inferior é dita diagonal.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

23 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Definição 21 (Matrizes triangulares e diagonais)

Uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  é dita triangular, quando ocorre uma das possibilidades:

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i > j \quad \text{ou} \quad a_{ij} = 0 \quad \forall i < j.$$

No primeiro caso, ela é dita triangular superior e, no segundo, triangular inferior. Uma matriz que é triangular superior e inferior é dita diagonal.

## Exemplo 22

As matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  abaixo são, respectivamente, triangular superior, inferior e diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

23 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia



## Definição 23 (Matriz Identidade)

Uma matriz diagonal  $n \times n$  cujas entradas não nulas são todas iguais a 1 é chamada de matriz identidade de ordem  $n$ , a qual denota-se por  $I_n$  ou, simplesmente, por  $I$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

24 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Definição 23 (Matriz Identidade)

Uma matriz diagonal  $n \times n$  cujas entradas não nulas são todas iguais a 1 é chamada de matriz identidade de ordem  $n$ , a qual denota-se por  $I_n$  ou, simplesmente, por  $I$ .

A matriz identidade de ordem  $n$  é o elemento neutro da multiplicação de matrizes quadradas, pois, para toda matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$ , vale a igualdade:

$$AI = IA = A.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

24 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Definição 24 (Matrizes invertíveis)

Diz-se que uma matriz quadrada  $A$  é invertível, quando existe uma matriz quadrada  $B$ , de mesma ordem que  $A$ , tal que

$$AB = BA = I.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

25 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Definição 24 (Matrizes invertíveis)

Diz-se que uma matriz quadrada  $A$  é invertível, quando existe uma matriz quadrada  $B$ , de mesma ordem que  $A$ , tal que

$$AB = BA = I.$$

Prova-se que  $A$ , quando invertível, possui uma única matriz inversa. Tal matriz é dita a inversa de  $A$ , e denotada por  $A^{-1}$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

25 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Definição 24 (Matrizes invertíveis)

Diz-se que uma matriz quadrada  $A$  é invertível, quando existe uma matriz quadrada  $B$ , de mesma ordem que  $A$ , tal que

$$AB = BA = I.$$

Prova-se que  $A$ , quando invertível, possui uma única matriz inversa. Tal matriz é dita a inversa de  $A$ , e denotada por  $A^{-1}$ .

## Exemplo 25

Verifique que as matrizes abaixo são invertíveis multiplicando-as.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

25 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 26

Calcule a inversa das matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

26 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

# Tipos de Matrizes Quadradas

## Exemplo 26

Calcule a inversa das matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

## Exemplo 27

Qual a solução do sistema abaixo?

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2y = 4 \end{cases}$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

26 Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia

Atividade Online 24 - Determine as Matrizes Inversas  
Atividade Online 25 - Encontre a Inversa de uma Matriz  $2 \times 2$   
Atividade Online 26 - Matriz Inversa de uma Matriz  $3 \times 3$   
Atividade Online 27 - Use Matrizes para Resolver  
Sistemas de Equações

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

27

Atividade Online

Determinante

Exercícios

Bibliografia



# Determinante de Matrizes $2 \times 2$ e $3 \times 3$

## Definição 28 (Determinante de matrizes $2 \times 2$ e $3 \times 3$ )

Dadas as matrizes  $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$  e  $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ , definimos o determinante de  $A$  e  $B$ , denotados, respectivamente, por  $\det A$  e  $\det B$  como sendo

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

e

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \\ &= (b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32}) \\ &\quad - (b_{13}b_{22}b_{31} + b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33}). \end{aligned}$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

28 Determinante

Exercícios

Bibliografia

1. Determine, caso exista, a matriz  $A$ , tal que  $AB = C$ , em que

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $m \times n$  e  $n \times p$  respectivamente. A afirmação abaixo é sempre válida?

Se  $AB = 0_{m \times p}$ , então  $A = 0_{m \times n}$  ou  $B = 0_{n \times p}$ .

3. Encontre uma matriz  $A_{2 \times 2}$ , não-nula, tal que  $AA = 0_{2 \times 2}$ .

4. Determine as soluções dos seguintes sistemas lineares:

a)

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 3x + y - z = -1 \end{cases};$$

b)

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases};$$

c)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 3 \end{cases}.$$

5. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para quais matrizes  $B_{4 \times 1}$ , o sistema  $AX = B$  tem solução?

6. Mostre que, se  $A$  e  $B$  são matrizes  $n \times n$ , ambas invertíveis, então  $AB$  é invertível e vale a igualdade  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

31 Exercícios

Bibliografia

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Apresentação

Matrizes

Atividade Online

Operações com  
Matrizes

Atividade Online

Sistemas Lineares

Atividade Online

Operações  
Elementares

Atividade Online

Matrizes Quadradas

Atividade Online

Determinante

Exercícios

32 Bibliografia