

# Capítulo 4 - Parte 2

## Matemática Elementar

Funções Reais e Gráficos

13 de maio de 2025

Igor Oliveira

`matematicaelementar@imd.ufrn.br`

Instituto Metrópole Digital  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Natal-RN

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 19

Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano  $\Pi$  consiste num par de eixos perpendiculares  $OX$  e  $OY$  contidos nesse plano, com a mesma origem  $O$ .  $OX$  chama-se o eixo das abscissas e  $OY$  é o eixo das ordenadas. O sistema é indicado com a notação  $OXY$ . Um plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas é chamado de cartesiano.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

3 Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 19

Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano  $\Pi$  consiste num par de eixos perpendiculares  $OX$  e  $OY$  contidos nesse plano, com a mesma origem  $O$ .  $OX$  chama-se o eixo das abscissas e  $OY$  é o eixo das ordenadas. O sistema é indicado com a notação  $OXY$ . Um plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas é chamado de cartesiano.

Fixado um sistema de coordenadas cartesianas  $OXY$  num plano  $\Pi$ , cada ponto  $P$  do plano possuirá um par ordenado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  associado e vice-versa. Dizemos que  $x$  e  $y$  são as coordenadas do ponto  $P$  e escrevemos  $P = (x, y)$ , onde  $x$  é a abscissa e  $y$  é a ordenada de  $P$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

3 Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 19

Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano  $\Pi$  consiste num par de eixos perpendiculares  $OX$  e  $OY$  contidos nesse plano, com a mesma origem  $O$ .  $OX$  chama-se o eixo das abscissas e  $OY$  é o eixo das ordenadas. O sistema é indicado com a notação  $OXY$ . Um plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas é chamado de cartesiano.

Fixado um sistema de coordenadas cartesianas  $OXY$  num plano  $\Pi$ , cada ponto  $P$  do plano possuirá um par ordenado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  associado e vice-versa. Dizemos que  $x$  e  $y$  são as coordenadas do ponto  $P$  e escrevemos  $P = (x, y)$ , onde  $x$  é a abscissa e  $y$  é a ordenada de  $P$ .

## Exemplo 20

Represente os pontos  $P_1 = (1, 3)$ ,  $P_2 = (-2, 0)$  e  $P_3 = (0, -4)$  em um plano cartesiano.

## Definição 21

Os eixos ortogonais  $OX$  e  $OY$  decompõem o plano cartesiano em quatro regiões, cada uma das quais se chama um quadrante. Dado um ponto  $P = (x, y)$ , dizemos que  $P$  está no:

- ▶ primeiro quadrante, se  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ ;
- ▶ segundo quadrante, se  $x \leq 0$  e  $y \geq 0$ ;
- ▶ terceiro quadrante, se  $x \leq 0$  e  $y \leq 0$ ;
- ▶ quarto quadrante, se  $x \geq 0$  e  $y \leq 0$ .

## Definição 21

Os eixos ortogonais  $OX$  e  $OY$  decompõem o plano cartesiano em quatro regiões, cada uma das quais se chama um quadrante. Dado um ponto  $P = (x, y)$ , dizemos que  $P$  está no:

- ▶ primeiro quadrante, se  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ ;
- ▶ segundo quadrante, se  $x \leq 0$  e  $y \geq 0$ ;
- ▶ terceiro quadrante, se  $x \leq 0$  e  $y \leq 0$ ;
- ▶ quarto quadrante, se  $x \geq 0$  e  $y \leq 0$ .

## Exemplo 22

Os pontos  $P_1 = (1, 3)$ ,  $P_2 = (-2, 0)$  e  $P_3 = (0, -4)$  estão em quais quadrantes?

## Proposição 23 (Distância entre dois pontos)

Dados os pontos  $P = (x, y)$  e  $Q = (u, v)$ , a distância entre  $P$  e  $Q$ ,  $d(P, Q)$ , é

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$



## Proposição 23 (Distância entre dois pontos)

Dados os pontos  $P = (x, y)$  e  $Q = (u, v)$ , a distância entre  $P$  e  $Q$ ,  $d(P, Q)$ , é

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

## Exemplo 24

Dados os pontos  $P_1 = (1, 3)$ ,  $P_2 = (-2, 0)$  e  $P_3 = (0, -4)$ , calcule  $d(P_1, P_2)$  e  $d(P_2, P_3)$ .

## Proposição 23 (Distância entre dois pontos)

Dados os pontos  $P = (x, y)$  e  $Q = (u, v)$ , a distância entre  $P$  e  $Q$ ,  $d(P, Q)$ , é

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

## Exemplo 24

Dados os pontos  $P_1 = (1, 3)$ ,  $P_2 = (-2, 0)$  e  $P_3 = (0, -4)$ , calcule  $d(P_1, P_2)$  e  $d(P_2, P_3)$ .

## Exemplo 25

Qual a equação que determina os pontos  $(x, y)$  pertencentes a uma circunferência centrada na origem  $O$  e de raio  $r$ ?

## Exemplo 26

Dados os pontos distintos  $A = (a, b)$  e  $C = (c, d)$ , as equações

$$\begin{cases} x = a + t(c - a) \\ y = b + t(d - b) \end{cases},$$

onde  $t \in \mathbb{R}$ , chamam-se as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos  $A$  e  $C$ .

Quais as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos  $A = (-1, 3)$  e  $B = (0, 2)$ ?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

6 Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 26

Dados os pontos distintos  $A = (a, b)$  e  $C = (c, d)$ , as equações

$$\begin{cases} x = a + t(c - a) \\ y = b + t(d - b) \end{cases},$$

onde  $t \in \mathbb{R}$ , chamam-se as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos  $A$  e  $C$ .

Quais as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos  $A = (-1, 3)$  e  $B = (0, 2)$ ?

## Exemplo 27

Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tais que  $a$  e  $b$  não são ambos nulos. O conjunto de pontos  $P = (x, y)$  cujas coordenadas satisfazem a equação  $ax + by = c$  é uma reta.

Esboce a reta determinada pela equação  $4x + 2y = -1$ .

Atividade 39 - Pontos no Plano Cartesiano  
Atividade 40 - Distância Entre Pontos no Primeiro Quadrante  
Atividade 41 - Faça um Gráfico a Partir da Equação Geral da Reta

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

7 Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 28

O gráfico de uma função real é o seguinte subconjunto do plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ :

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in D, y = f(x)\}.$$

Em outras palavras, o gráfico de uma função  $f$  é o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem sua lei de associação.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

8 Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 29

Esboce o gráfico da função real

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

## Definição 30

Chamamos de função piso (também chamada de chão ou solo) a função real que associa a cada número real  $x$  ao maior inteiro que é menor ou igual a  $x$ . Denotamos este número por  $\lfloor x \rfloor$ .

Chamamos de função teto a função real que associa a cada número real  $x$  ao menor inteiro que é maior ou igual a  $x$ . Denotamos este número por  $\lceil x \rceil$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

10 Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia



## Definição 30

Chamamos de função piso (também chamada de chão ou solo) a função real que associa a cada número real  $x$  ao maior inteiro que é menor ou igual a  $x$ . Denotamos este número por  $\lfloor x \rfloor$ .

Chamamos de função teto a função real que associa a cada número real  $x$  ao menor inteiro que é maior ou igual a  $x$ . Denotamos este número por  $\lceil x \rceil$ .

## Exemplo 31

Calcule  $\lceil 7,5 \rceil$ ,  $\lfloor -2,2 \rfloor$ ,  $\lceil 4,1 \rceil$  e  $\lfloor -3,9 \rfloor$ .  
Esboce o gráfico das funções piso e teto.

## Exemplo 32

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \sin x + 1,$$

$$h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

11 Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 32

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \sin x + 1,$$

$$h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = f(x + b) + a$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro  $b$ , e uma translação vertical determinada pelo parâmetro  $a$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

11 Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 32

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \sin x + 1,$$

$$h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = f(x + b) + a$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro  $b$ , e uma translação vertical determinada pelo parâmetro  $a$ .

► O translado vertical será:

- No sentido positivo do eixo  $y$  (para cima), se  $a > 0$ ;
- No sentido negativo do eixo  $y$  (para baixo), se  $a < 0$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

11

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 32

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \sin x + 1,$$

$$h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = f(x + b) + a$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro  $b$ , e uma translação vertical determinada pelo parâmetro  $a$ .

- ▶ O translado vertical será:
  - ▶ No sentido positivo do eixo  $y$  (para cima), se  $a > 0$ ;
  - ▶ No sentido negativo do eixo  $y$  (para baixo), se  $a < 0$ .
- ▶ O translado horizontal será:
  - ▶ No sentido positivo do eixo  $x$  (para a direita), se  $b < 0$ ;
  - ▶ No sentido negativo do eixo  $x$  (para a esquerda), se  $b > 0$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

11

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 33

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x,$$

$$h(x) = f(2 \cdot x) = \sin(2 \cdot x).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

12

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 33

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x,$$

$$h(x) = f(2 \cdot x) = \sin(2 \cdot x).$$

## Exemplo 34

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = -1 \cdot f(x) = -1 \cdot \sin x,$$

$$h(x) = f(-1 \cdot x) = \sin(-1 \cdot x).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

12

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

# Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro  $d$ , e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro  $c$ . Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

13

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia



# Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro  $d$ , e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro  $c$ . Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

- ▶ A dilatação vertical será:
  - ▶ Um esticamento se  $c > 1$ ;
  - ▶ Um encolhimento se  $0 < c < 1$ ;
  - ▶ Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo  $x$  se  $c < -1$ ;
  - ▶ Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo  $x$  se  $-1 < c < 0$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

13

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

# Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro  $d$ , e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro  $c$ . Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

- ▶ A dilatação vertical será:
  - ▶ Um esticamento se  $c > 1$ ;
  - ▶ Um encolhimento se  $0 < c < 1$ ;
  - ▶ Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo  $x$  se  $c < -1$ ;
  - ▶ Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo  $x$  se  $-1 < c < 0$ .
- ▶ A dilatação horizontal será:
  - ▶ Um encolhimento se  $d > 1$ ;
  - ▶ Um esticamento se  $0 < d < 1$ ;
  - ▶ Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo  $y$  se  $d < -1$ ;
  - ▶ Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo  $y$  se  $-1 < d < 0$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

13

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Atividade 42 - Transladação de Funções  
Atividade 43 - Identifique Transformações de Funções

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

14

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 35

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que

- (i)  $f$  é monótona (estritamente) crescente se, para todos  $x_1, x_2 \in D$ ,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2);$$

- (ii)  $f$  é monótona não decrescente se, para todos  $x_1, x_2 \in D$ ,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2);$$

- (iii)  $f$  é monótona (estritamente) decrescente se, para todos  $x_1, x_2 \in D$ ,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2);$$

- (iv)  $f$  é monótona não crescente se, para todos  $x_1, x_2 \in D$ ,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

15 Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Nas mesmas condições da Definição 35 , se  $f(x) = k \in \mathbb{R}$  para todo  $x \in D$ , dizemos que  $f$  é constante.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

16

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Nas mesmas condições da Definição 35, se  $f(x) = k \in \mathbb{R}$  para todo  $x \in D$ , dizemos que  $f$  é constante.

Se  $I \subseteq D$  é um intervalo, definimos a monotonicidade de  $f$  no intervalo  $I$  de maneira análoga ao feito anteriormente. Por exemplo:

$f$  é monótona (estritamente) crescente em  $I$  se, para todos  $x_1, x_2 \in I$ ,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

16 Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 36

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.

- (i)  $f$  é limitada superiormente se existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) \leq M$ , para todo  $x \in D$ ;
- (ii)  $f$  é limitada inferiormente se existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) \geq M$ , para todo  $x \in D$ ;
- (iii)  $x_0 \in D$  é um ponto de máximo absoluto de  $f$  se  $f(x_0) \geq f(x)$ , para todo  $x \in D$ ;
- (iv)  $x_0 \in D$  é um ponto de mínimo absoluto de  $f$  se  $f(x_0) \leq f(x)$ , para todo  $x \in D$ ;
- (v)  $x_0 \in D$  é um ponto de máximo local de  $f$  se existe  $r > 0$  tal que  $f(x_0) \geq f(x)$ , para todo  $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ ;
- (vi)  $x_0 \in D$  é um ponto de mínimo local de  $f$  se existe  $r > 0$  tal que  $f(x_0) \leq f(x)$ , para todo  $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

17

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

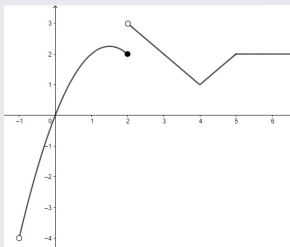
Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 37

A função  $h : (-1; 6] \rightarrow \mathbb{R}$ , cujo gráfico é esboçado abaixo, é

$$\text{definida por } h(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ |x - 4| + 1 & \text{se } 2 < x \leq 5 \\ 2 & \text{se } x > 5 \end{cases}.$$



Determine os intervalos de monotonicidade e os extremos de  $h$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

18 Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia



Atividade 44 - Intervalos Crescentes e Decrescentes  
Atividade 45 - Mínimos e Máximos Relativos  
Atividade 46 - Mínimos e Máximos Absolutos

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

19

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

**13.** Considere os pontos  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$  distintos e pertencentes a um plano cartesiano. Responda o que se pede:

- a) Qual as equações paramétricas da reta que passa por  $A$  e  $B$ ?
- b) Mostre que o ponto  $M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$  pertence à reta que passa por  $A$  e  $B$ ;
- c) Mostre que  $d(A, M) = d(M, B)$  e conclua que  $M$  é o ponto médio do segmento  $AB$ .

**14.** Mostre que  $f : (-\infty; -4] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = -x^2 - 8x - 12$ , é uma função crescente.

**15.** Seja a função  $f : [3; 5] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ .

- a) Mostre que  $f$  é decrescente.
- b)  $f$  possui máximo absoluto? Se sim, ocorre em qual ponto?
- c)  $f$  possui mínimo absoluto? Se sim, ocorre em qual ponto?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

20 Exercícios

Bibliografia

16. Considere a função  $f : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  tal que  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Responda as seguintes perguntas apresentando as respectivas justificativas.

- a)  $f$  é monótona? Se sim, de que tipo? Se não,  $f$  possui algum intervalo de monotonicidade?
  - b)  $f$  possui máximo absoluto?
  - c)  $f$  possui mínimo absoluto?
  - d)  $f$  é limitada?
17. Considere a função real  $f$  tal que  $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ .
- a) Mostre que  $f$  é crescente no intervalo  $(-\infty, 1]$ ;
  - b) Mostre que  $f$  é decrescente no intervalo  $[1, +\infty)$ ;
  - c) Use os itens anteriores para concluir que  $1 \in \mathbb{R}$  é um ponto de máximo absoluto de  $f$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

21 Exercícios

Bibliografia

# Exercícios

18. Considere a função  $f : (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = |x - 2| + 3$ .

- a)  $f$  é monótona de que tipo?
- b) Qual dos extremos absolutos  $f$  não possui?

19. Considere as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que  $f(x) = x^2 + 3$  e  $g : (-\infty; 5] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 27}$ . Faça o que se pede:

- a) Calcule  $(f \circ g)$  e  $(g \circ f)$ . Caso não seja possível, justifique;
- b) Verifique se alguma das funções compostas que você calculou no primeiro item é monótona (crescente ou decrescente);
- c) Verifique se alguma das funções compostas que você calculou no primeiro item possui máximo ou mínimo absoluto (escolha só um).

20. Verifique os exercícios do capítulo que tem as leis de formação das funções iguais. Considere como se fosse um só exercício e tente refazer cada item usando outra informação dada ou pedida pelo exercício.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

22 Exercícios

Bibliografia

**21.** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

- (a) Se  $f$  é limitada superiormente, então  $f$  tem pelo menos um máximo absoluto;
- (b) Se  $f$  é limitada superiormente, então  $f$  tem pelo menos um máximo local;
- (c) Se  $f$  tem um máximo local, então  $f$  tem um máximo absoluto;
- (d) Todo máximo local de  $f$  é máximo absoluto;
- (e) Todo máximo absoluto de  $f$  é máximo local;
- (f) Se  $x_0$  é o ponto de extremo local de  $f$ , então é ponto de extremo local de  $f^2$ , onde  $(f^2)(x) = f(x) \cdot f(x)$ ;
- (g) Se  $x_0$  é o ponto de extremo local de  $f^2$ , então é ponto de extremo local de  $f$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

23 Exercícios

Bibliografia

**22.** Seja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ . Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

- a) A função  $g$  pode ser ilimitada inferiormente;
- b)  $f$  é limitada superiormente ou  $f$  é limitada inferiormente.

**23.** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

- (a) Se  $f$  e  $g$  são crescentes, então a composta  $f \circ g$  é uma função crescente;
- (b) Se  $f$  e  $g$  são crescentes, então o produto  $f \cdot g$  é uma função crescente, onde  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ;
- (c) Se  $f$  é crescente em  $A \subseteq \mathbb{R}$  e em  $B \subseteq \mathbb{R}$ , então  $f$  é crescente em  $A \cup B \subseteq \mathbb{R}$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

24 Exercícios

Bibliografia

**24.** Seja  $f$  uma função real.

- a) Suponha que  $f$  é constante. Mostre que  $f$  é não crescente e não decrescente;
- b) Suponha que  $f$  é não crescente e não decrescente. Mostre que  $f$  é constante.

**25.** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $A$  e  $B$  intervalos reais tais que  $A \cap B$  é um intervalo não degenerado, ou seja, que possui pelo menos dois números. Mostre que, se  $f$  é crescente em  $A$  e em  $B$ , então  $f$  é crescente em  $A \cap B$ .

**26.** Mostre que a função inversa de uma função crescente é também uma função crescente. E a função inversa de uma função decrescente é decrescente.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

25 Exercícios

Bibliografia

**27.** Dizemos que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é *par* quando se tem  $f(-t) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Se for o caso de  $f(-t) = -f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , dizemos que  $f$  é *ímpar*.

Considere a função real  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Demonstre, ou refute com um contraexemplo, as afirmações abaixo:

- a) Se  $f$  é par e  $x_0 \in \mathbb{R}$  é um ponto de máximo absoluto, então  $-x_0 \in \mathbb{R}$  é também um ponto de máximo absoluto;
- b) Se  $f$  é ímpar e  $x_0 \in \mathbb{R}$  é um ponto de mínimo absoluto, então  $-x_0 \in \mathbb{R}$  é um ponto de máximo absoluto;
- c) Se  $f$  é par e limitada superiormente, então  $f$  é limitada inferiormente;
- d) Se  $f$  é ímpar e limitada superiormente, então  $f$  é limitada inferiormente.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

26 Exercícios

Bibliografia



- [1] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.  
*A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.*  
9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [2] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.  
*A Matemática do Ensino Médio. Vol. 3.*  
6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

27

Bibliografia