

Capítulo 2 - Parte 2

Matemática Elementar Equações e Inequações

21 de julho de 2024

Igor Oliveira

`matematicaelementar@imd.ufrn.br`

Instituto Metrôpole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades clássicas

Atividade Online

Desigualdades clássicas

Exercícios

Bibliografia

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

Desigualdades
clássicas

Exercícios

Bibliografia

Definição 23

Uma inequação do primeiro grau é uma relação de uma das formas abaixo

$$ax + b < 0, \quad ax + b > 0,$$

$$ax + b \leq 0, \quad ax + b \geq 0,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Lemos os símbolos da seguinte maneira: $<$ (menor que), $>$ (maior que), \leq (menor ou igual que) e \geq (maior ou igual que).

O conjunto solução de uma inequação do primeiro grau é o conjunto S de números reais que satisfazem a inequação, isto é, o conjunto de números que, quando substituídos na inequação, tornam a desigualdade verdadeira.

Proposição 24 (Propriedades de inequações)

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}^*$. Valem:

- i. Invariância por adição de números reais:
 $a < b \implies a + c < b + c$;
- ii. Invariância por multiplicação de números reais positivos:
 $a < b; c > 0 \implies a \cdot c < b \cdot c$;
- iii. Mudança por multiplicação de números reais negativos:
 $a < b; c < 0 \implies a \cdot c > b \cdot c$;
- iv. Se $a < b$, então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, para $a, b \neq 0$ e com mesmo sinal;
- v. Se $a \geq 0, b \geq 0$ e $c > 0$, segue que $a < b \implies a^c < b^c$;
- vi. Se $a < 0, b < 0$ e n par, segue que $a < b \implies a^n > b^n$;
- vii. Se $a < 0, b < 0$ e n ímpar, segue que $a < b \implies a^n < b^n$;
- viii. Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$;
- ix. Para $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$. Se $a < b$ e $c < d$, então $ac < bd$.

O resultado é análogo para os tipos $>, \leq$ ou \geq .

Inequação do 1º grau

Exemplo 25

Qual o conjunto solução da inequação $8x - 4 \geq 0$?

Inequação do 1º grau

Exemplo 25

Qual o conjunto solução da inequação $8x - 4 \geq 0$?

Exemplo 26

Antes de fazer os cálculos, diga: qual dos números $a = 3456784 \cdot 3456786 + 3456785$ e $b = 3456785^2 - 3456788$ é maior?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

6

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

Desigualdades
clássicas

Exercícios

Bibliografia

Atividade Online 14 - Problemas com Inequações

Definição 27

Uma inequação do segundo grau é uma relação de uma das formas abaixo

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c > 0,$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Inequação do 2º grau

Exemplo 28

Resolva as seguintes inequações: $x^2 - 3x + 2 > 0$;
 $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

Inequação do 2º grau

Exemplo 28

Resolva as seguintes inequações: $x^2 - 3x + 2 > 0$;
 $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

Exemplo 29

Prove que a soma de um número positivo com seu inverso é sempre maior ou igual que 2.

Definição 30

O módulo (ou valor absoluto) de um número real x , denotado por $|x|$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Para resolver equações modulares, usaremos dois métodos:

- ▶ Eliminação do módulo pela definição;
- ▶ Partição em intervalos.

Exemplo 31

Resolva as equações

- (a) $|2x - 5| = 3$;
- (b) $|2x - 3| = 1 - 3x$;
- (c) $|3 - x| - |x + 1| = 4$.

Atividade Online 15 - Resolva Equações Modulares

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

11 Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

Desigualdades
clássicas

Exercícios

Bibliografia

Para solucionarmos inequações modulares, usaremos as propriedades a seguir:

Proposição 32 (Propriedades)

Sejam $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.

- (i) $|x| \geq 0$;
- (ii) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$;
- (iii) $|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ ou } x < -a$;
- (iv) $-|x| \leq x \leq |x|$.

Os resultados (ii) e (iii) também são válidos para os casos com \leq ou \geq .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

12 Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

Desigualdades
clássicas

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 33

Resolva as inequações

(a) $|2x - 5| < 3$;

(b) $|2x - 3| \geq 1 - 3x$;

(c) $|3 - x| - |x + 1| \leq 4$.

Exemplo 33

Resolva as inequações

(a) $|2x - 5| < 3$;

(b) $|2x - 3| \geq 1 - 3x$;

(c) $|3 - x| - |x + 1| \leq 4$.

Exemplo 34

Seja $x \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$|x + 1| < 0,2 \implies |2x + 2| < 0,4.$$

Para iniciar, apresentamos algumas desigualdades simples mas famosas, válidas para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$:

- ▶ $|a| \geq 0$;
- ▶ $a^2 \geq 0$;
- ▶ $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

14 Desigualdades
clássicas

Atividade Online

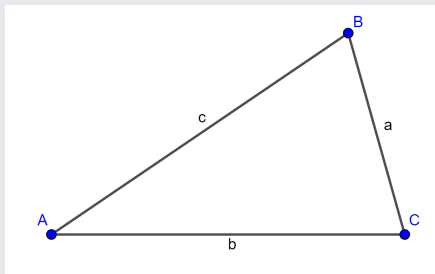
Desigualdades
clássicas

Exercícios

Bibliografia

Teorema 35 (Desigualdade Triangular)

Dado um triângulo ABC como o abaixo,



o comprimento de um dos lados é sempre inferior à soma dos comprimentos dos outros dois lados, ou seja, $a < b + c$, $b < a + c$ e $c < a + b$. A igualdade $a = b + c$ ocorre se, e somente se, os pontos A, B e C forem colineares e A estiver entre B e C.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

15 Desigualdades
clássicas

Atividade Online

Desigualdades
clássicas

Exercícios

Bibliografia

Atividade Online 16 - Relações Entre os Lados do Triângulo

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

16 Atividade Online

Desigualdades
clássicas

Exercícios

Bibliografia

Teorema 36

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Além disso, a igualdade acontece se, e somente se, $x = y$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

17 Desigualdades
clássicas

Exercícios

Bibliografia

Teorema 36

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Além disso, a igualdade acontece se, e somente se, $x = y$.

Vejamos no quadro um experimento geométrico relacionado a essa desigualdade.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

17 Desigualdades
clássicas

Exercícios

Bibliografia

Teorema 36

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Além disso, a igualdade acontece se, e somente se, $x = y$.

Vejamos no quadro um experimento geométrico relacionado a essa desigualdade.

Teorema 37

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}_+$ vale

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}.$$

Além disso, a igualdade acontece se, e somente se, $a = b$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

17 Desigualdades
clássicas

Exercícios

Bibliografia

Teorema 38 (Desigualdade das médias aritmética e geométrica)

Para quaisquer $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$ vale

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

A igualdade acontece se, e somente se, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

18 Desigualdades
clássicas

Exercícios

Bibliografia

Teorema 38 (Desigualdade das médias aritmética e geométrica)

Para quaisquer $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$ vale

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

A igualdade acontece se, e somente se, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Teorema 39 (Desigualdade das médias harmônica e geométrica)

Para quaisquer $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ vale

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

A igualdade acontece se, e somente se, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

18 Desigualdades
clássicas

Exercícios

Bibliografia

Teorema 40 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Sejam $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, então vale:

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

Além disso, a igualdade só ocorre se existir um número real α tal que $x_1 = \alpha y_1, \dots, x_n = \alpha y_n$.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

19 Desigualdades
clássicas

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 41

Duas torres são amarradas por uma corda APB que vai do topo A da primeira torre para um ponto P no chão, entre as torres, e então até o topo B da segunda torre. Qual a posição do ponto P que nos dá o comprimento mínimo da corda a ser utilizada?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

20 Desigualdades
clássicas

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 42

Prove que, num triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é sempre menor ou igual que a metade da hipotenusa. Prove, ainda, que a igualdade só ocorre quando o triângulo retângulo é isósceles.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

21 Desigualdades
clássicas

Exercícios

Bibliografia

Exemplo 43

Prove que, entre todos os triângulos retângulos de catetos a e b , e com hipotenusa c fixada, o que tem maior soma dos catetos $S = a + b$ é o triângulo isósceles.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

22 Desigualdades
clássicas

Exercícios

Bibliografia

13. Dada as frações

$$\frac{966666555557}{966666555558} \text{ e } \frac{966666555558}{966666555559},$$

qual é a maior?

14. Nove cópias de certas notas custam menos de R\$ 10,00 e dez cópias das mesmas notas (custando o mesmo preço cada uma) custam mais de R\$ 11,00. Quanto custa uma cópia das notas?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

Desigualdades
clássicas

23 Exercícios

Bibliografia

15. Ache os valores de x para os quais cada uma das seguintes inequações é válida:

a) $x^2 - 9 \geq 0$;

b) $\frac{x}{x^2 + 9} > 0$;

c) $\frac{x - 3}{x + 1} > 0$;

d) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} > 0$;

e) $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 6x + 5} \leq 0$;

f) $\frac{-x^2 - x + 6}{x^2 - 5x + 4} \leq 0$.

16. Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ a expressão quadrática $ax^2 - ax + 8$ é sempre diferente de zero?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

Desigualdades
clássicas

24 Exercícios

Bibliografia

17. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Mostre que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

18. Mostre que se r e s são números racionais positivos satisfazendo $r < s$, então existe um outro número racional q tal que $r < q < s$.

19. Com Algarismos x, y e z não todos nulos formam-se os números de dois Algarismos xy e yx , cuja soma é o número de três Algarismos zxz . Quanto valem x, y e z ?

20. Quantos são os números inteiros de 2 Algarismos que são iguais ao dobro do produto de seus Algarismos?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

Desigualdades
clássicas

25

Exercícios

Bibliografia

21. Determine o conjunto solução de cada uma das equações ou inequações modulares abaixo:

- a) $|3x - 5| = 7;$
- b) $|-x + 8| = -1;$
- c) $|x^2 - 9| = 7;$
- d) $|x^2 - 1| = 3;$
- e) $|x + 1| + |-3x + 2| = 6;$
- f) $|x - 1| \cdot |x + 2| = 3;$
- g) $|2x - 5| - 3 \leq -2;$
- h) $|x^2 - 1| \leq 3;$
- i) $|x - 1| + |x + 1| > 2;$
- j) $|x + 1| - |x - 1| < -2.$

22. Prove que $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

23. Seja $x \in \mathbb{R}$. Mostre que:

- a) $|x - 5| < 0,1 \implies |2x - 10| < 0,2;$
- b) $|x + 3| < 0,1 \implies \left| -\frac{3}{2}x + 3 - 7,5 \right| < 0,15;$
- c) $|x - 2| < \sqrt{5} - 2 \implies |x^2 - 4| < 1;$
- d) $|x - 3| < \sqrt{46} - 5 \implies |x^2 + 4x - 21| < 21.$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

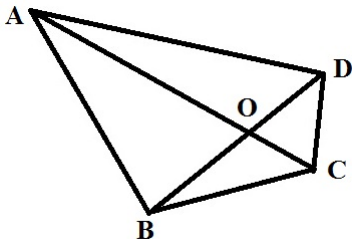
Atividade Online

Desigualdades
clássicas

26 Exercícios

Bibliografia

24. Quatro cidades rurais, *Abaeté*, *Bertioga*, *Caicó* e *Diamantina*, estão situadas geograficamente como a imagem abaixo.



A empresa *Ozymandias* deseja construir uma central de distribuição de energia para as quatro cidades de modo que a soma total das distâncias da central a cada uma das quatro cidades seja a mínima possível. Mostre que a central deve ser construída no ponto O , que é o ponto em comum dos segmentos AC e BD .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

Desigualdades
clássicas

27 Exercícios

Bibliografia

25. Três círculos que não se intersectam tem seus centros colineares (sobre uma mesma reta). Um quarto círculo os tangencia, conforme a imagem abaixo. Mostre que o raio do quarto círculo é maior que pelo menos um dos outros raios.

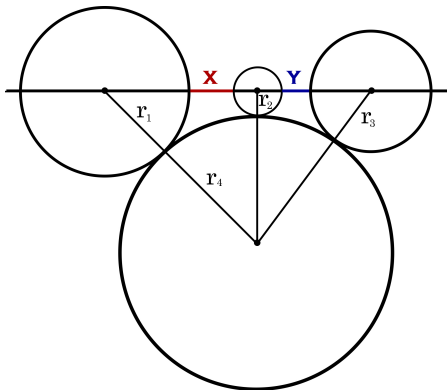


Figura: Disposição dos quatro círculos.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

Desigualdades
clássicas

28

Exercícios

Bibliografia

26. Provar que em todo triângulo a soma dos comprimentos das medianas é menor que o perímetro do triângulo e maior que o semiperímetro (metade do perímetro) dele.

27. Suponha que $0 < a < b$. Prove que

$$a < \sqrt{a \cdot b} < b.$$

28. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Mostre que

$$(ab + bc + ca) \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$

29. Use algum dos resultados da seção de Desigualdades Clássicas e mostre que $4x^3 - 4x^2 + x \geq 0$, para todo $x \geq 0$.

30. Prove que $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

31. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Prove que

$$(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

Desigualdades
clássicas

29

Exercícios

Bibliografia

32. Considere $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Faça o que se pede.

a) Use uma das desigualdades das médias para provar que

$$a^2 b^2 c^2 \leq \left(\frac{ab + bc + ac}{3} \right)^3;$$

b) Considere um paralelepípedo de lados a, b e c . Sendo V o volume e A_L a área lateral (área de todas as faces somadas) do paralelepípedo, use o resultado do item anterior (não precisa ter resolvido) para provar que

$$V \leq \sqrt{\left(\frac{A_L}{6} \right)^3};$$

c) Conclua, a partir dos resultados anteriores, que entre todos os paralelepípedos de área lateral fixada, o de maior volume é o cubo.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

Desigualdades
clássicas

30 Exercícios

Bibliografia

33. Considere $a, b, c, p \in \mathbb{R}_+^*$. Faça o que se pede.

- a) Use uma das desigualdades das médias para provar que, se $\frac{p}{2} - a, \frac{p}{2} - b, \frac{p}{2} - c \in \mathbb{R}_+^*$, então

$$\left(\frac{p}{2} - a\right) \left(\frac{p}{2} - b\right) \left(\frac{p}{2} - c\right) \leq \left(\frac{\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c}{3}\right)^3;$$

- b) Considere um triângulo de lados a, b e c , área A e perímetro p . A Fórmula de Herón diz que

$$A = \sqrt{\frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - a\right) \left(\frac{p}{2} - b\right) \left(\frac{p}{2} - c\right)}.$$

Use o resultado do item anterior para provar que

$$A \leq \sqrt{\frac{p}{2} \left(\frac{\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c}{3}\right)^3} = \frac{p^2}{12\sqrt{3}};$$

- c) Conclua, a partir dos resultados anteriores, que entre todos os triângulos de perímetro p fixado, o de maior área é o triângulo equilátero.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

Desigualdades
clássicas

31 Exercícios

Bibliografia

34. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $a_1 \cdot a_2 \dots a_n = 1$. Mostre que

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

35. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$. Prove que

$$(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

Desigualdades
clássicas

32 Exercícios

Bibliografia

36. Considere $n \in \mathbb{N}^*$. Faça o que se pede.

a) Use as desigualdades das médias para provar que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \frac{n^2}{1 + 2 + 3 + \cdots + n};$$

b) O somatório dos n primeiros números naturais não nulos é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$. Use o resultado do item anterior (não precisa ter resolvido) para provar que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \frac{2n}{n+1}.$$

37. A soma de três números positivos é 6. Prove que a soma de seus quadrados não é menor que 12.

- [1] OLIVEIRA, Krerley I M; FERNÁNDEZ, Adán J C.
Iniciação à Matemática: um Curso com Problemas e Soluções.
2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [2] OLIVEIRA, Krerley I M; FERNÁNDEZ, Adán J C.
Estágio dos Alunos Bolsistas - OBMEP 2005 - 4. Equações, Inequações e Desigualdades.
Rio de Janeiro: SBM, 2006.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Inequação do 1º grau

Atividade Online

Inequação do 2º grau

Módulos

Atividade Online

Módulos

Desigualdades
clássicas

Atividade Online

Desigualdades
clássicas

Exercícios

34

Bibliografia