Capítulo 1

Matemática Elementar

Conjuntos

13 de setembro de 2024

Igor Oliveira
matematicaelementar@imd.ufrn.br

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Índice

Apresentação
Introdução
Pertinência
Inclusão
União e Interseção
Complementar
Atividade Online
Conjuntos Numéricos
Atividade Online
Conjuntos Numéricos
Atividade Online
Conjuntos Numéricos
Operações
Potenciação
Atividade Online
Exercícios
Bibliografia

Motivação

Praticamente toda a matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos mesmo sendo a mais simples das ideias matemáticas. Portanto, o bom entendimento de como trabalhar com conjuntos é fundamental.

- Um conjunto é definido por seus elementos (e nada mais). Isso nos traz imediatamente que dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos.

A Noção de Conjunto

- Um conjunto é definido por seus elementos (e nada mais). Isso nos traz imediatamente que dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos.
- Dados um conjunto A e um objeto qualquer b, há somente uma pergunta cabível para nós: b é um elemento do conjunto A? Tal pergunta só admite sim ou não como resposta. Isso se dá porque, na Matemática, qualquer afirmação é verdadeira ou é falsa, sem possibilidade de uma terceira opção ou de ser as duas coisas ao mesmo tempo.

A Noção de Conjunto

- Um conjunto é definido por seus elementos (e nada mais). Isso nos traz imediatamente que dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos.
- Dados um conjunto A e um objeto qualquer b, há somente uma pergunta cabível para nós: b é um elemento do conjunto A? Tal pergunta só admite sim ou não como resposta. Isso se dá porque, na Matemática, qualquer afirmação é verdadeira ou é falsa, sem possibilidade de uma terceira opção ou de ser as duas coisas ao mesmo tempo.
  - O item anterior faz parecer que a Matemática é infalível se utilizada corretamente, mas ela não é. Gödel provou que todo sistema formal que inclua a aritmética é falho no sentido de que vai possuir verdades que não podem ser provadas – os chamados paradoxos. Antes de assistir ao vídeo `Este vídeo está mentindo`, reflita se você vai acreditar nele ou não.

Exemplo 1

Temos $V = \{a, e, i, o, u\}$ como sendo o conjunto das vogais.

A Noção de Conjunto

Exemplo 1

Temos $V = \{a, e, i, o, u\}$ como sendo o conjunto das vogais.

Exemplo 2

O conjunto P dos números primos pares pode ser representado por $P = \{x \ ; \ x \text{ é primo e par}\} = \{2\}$. Nunca escreva $P = \{\text{números primos pares}\}$.

A Relação de Pertinência

Definição 3 (Relação de Pertinência)

Dados um objeto x e um conjunto A, se for o caso de x ser um elemento de A, dizemos que x pertence a A. Para denotar esse fato, escrevemos $x \in A$.

Quando x não é um elemento de A dizemos que x não pertence a A, o que denotamos por $x \notin A$.

Definição 3 (Relação de Pertinência)

Dados um objeto x e um conjunto A, se for o caso de x ser um elemento de A, dizemos que x pertence a A. Para denotar esse fato, escrevemos $x \in A$.

Quando x não é um elemento de A dizemos que x não pertence a A, o que denotamos por $x \notin A$.

Exemplo 4

Considere P e V conforme definido anteriormente. Temos que $e \in V$ e $3 \notin P$.

Relação de Pertinência

Exemplo 5

Considere o conjunto $A = \{\{1,2\},\{2\},1\}$. Observe que existem elementos em A que são conjuntos. Além disso:

1. $\{1,2\} \in A$;
2. $\{2\} \in A$;
3. $1 \in A$;
4. $2 \notin A$.

Definição 6 (O Conjunto Vazio)

O conjunto que não possui elementos é chamado de conjunto vazio e é representado por $\emptyset$.

Definição 6 (O Conjunto Vazio)

O conjunto que não possui elementos é chamado de conjunto vazio e é representado por $\emptyset$.

Exemplo 7

Quais outros conjuntos você conhece? Que tal pensar sobre o conjunto $A = \{x \,;\, x \notin A\}$?

A Relação de Inclusão

Definição 8 (Relação de Inclusão)

Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A for também elemento de B, diz-se que A é um subconjunto de B, que A está contido em B, ou que A é parte de B. Para indicar esse fato, usa-se a notação $A \subseteq B$.

Quando A não é um subconjunto de B, escreve-se $A \not\subseteq B$. Em outras palavras, existe pelo menos um elemento a tal que $a \in A$ e $a \notin B$.

Quando $A \subseteq B$, dizemos que B contém A e escrevemos $B \supseteq A$.

Exemplo 9

Sejam T o conjunto de todos os triângulos e P o conjunto dos polígonos do plano. Todo triângulo é um polígono, logo $T \subseteq P$.

Exemplo 9

Sejam T o conjunto de todos os triângulos e P o conjunto dos polígonos do plano. Todo triângulo é um polígono, logo $T \subseteq P$.

Exemplo 10

Na Geometria, uma reta, um plano e o espaço são conjuntos. Seus elementos são pontos.
Quando dizemos que uma reta r está no plano Π, estamos afirmando que r está contida em Π ou, equivalentemente, que r é um subconjunto de Π, pois todos os pontos que pertencem a r pertencem também a Π.
Nesse caso, deve-se escrever $r \subseteq \Pi$. Porém, não é correto dizer que r pertence a Π, nem escrever $r \in \Pi$. Os elementos do conjunto Π são pontos e não retas.

A Relação de Inclusão

Exemplo 11

Considere os conjuntos $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $I = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{0, 2, 4, 6\}$. Analisando o cenário, podemos concluir que:

1. $I \subseteq N$. Observe que todos os elementos de I também são elementos de N.
2. $P \not\subseteq N$. Observe que nem todos os elementos de P são elementos de N, pois $0 \in P$ mas $0 \notin N$.

A Relação de Inclusão

Proposição 12 (Inclusão universal do $\emptyset$)

Para todo conjunto A, vale $\emptyset \subseteq A$.

Proposição 12 (Inclusão universal do $\emptyset$)

Para todo conjunto A, vale $\emptyset \subseteq A$.

Definição 13 (Inclusão Própria)

Dizemos que um conjunto A é um subconjunto próprio de B quando $A \subseteq B$ e $A \neq B$. Denotamos esse fato por $A \subsetneq B$.

Proposição 14 (Propriedades da inclusão)

Sejam A, B e C conjuntos. Tem-se:

i. Reflexividade: $A \subseteq A$;

ii. Antissimetria: $A = B$ se, e somente se, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$;

iii. Transitividade: Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

Exemplo 15

Considere os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{1, 4\}$. Analisando o cenário, podemos concluir que:

1. $A \subseteq B$, mas $B \not\subseteq A$, então não poderíamos ter $A = B$.
2. $A \subseteq B$, mas $B \not\subseteq C$ e $A \not\subseteq C$. Até poderia ocorrer a inclusão $A \subseteq C$, mas isso só seria obrigatório se tivéssemos $B \subseteq C$ além de $A \subseteq B$.

Definição 16 (Conjunto das Partes)

Dado um conjunto A, chamamos de conjunto das partes de A o conjunto formado por todos os seus subconjuntos, e denotamo-lo $\mathcal{P}(A)$.

Definição 16 (Conjunto das Partes)

Dado um conjunto A, chamamos de conjunto das partes de A o conjunto formado por todos os seus subconjuntos, e denotamo-lo $\mathcal{P}(A)$.

Exemplo 17

Dado $A = \{1, 2, 3\}$, determine $\mathcal{P}(A)$.

União e Interseção de Conjuntos

Definição 18 (União e Interseção)

Dados os conjuntos A e B:

i. A união $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B;

ii. A interseção $A \cap B$ é o conjunto formado por elementos que pertencem a ambos A e B.

Definição 18 (União e Interseção)

Dados os conjuntos A e B:

i. A união $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B;

ii. A interseção $A \cap B$ é o conjunto formado por elementos que pertencem a ambos A e B.

Exemplo 19

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 5\}$. Determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

União e Interseção de Conjuntos

Definição 18 (União e Interseção)

Dados os conjuntos A e B:

i. A <u>união</u> $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B;

ii. A <u>interseção</u> $A \cap B$ é o conjunto formado por elementos que pertencem a ambos A e B.

Exemplo 19

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 5\}$. Determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

Definição 20 (Conjuntos disjuntos)

Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A e B são <u>conjuntos disjuntos</u> quando $A \cap B = \emptyset$.

Algumas propriedades das operações de união e interseção de conjuntos dizem respeito a um conjunto chamado de *conjunto universo*, que denotaremos por $\mathcal{U}$. Esse conjunto deve ser fixado a fim de que fique claro quais são os possíveis objetos que podem ser elementos dos conjuntos a serem abordados. Uma vez fixado $\mathcal{U}$, todos os elementos considerados pertencerão a $\mathcal{U}$ e todos os conjuntos serão subconjuntos de $\mathcal{U}$.

Exemplo 21

Na geometria plana, $\mathcal{U}$ é o plano onde os elementos são pontos, e todos os conjuntos são constituídos por pontos desse plano. As retas servem como exemplos desses conjuntos; portanto, são subconjuntos de $\mathcal{U}$ (não elementos! Conforme vimos no Exemplo 10).

União e Interseção de Conjuntos

Proposição 22 (Propriedades da união e interseção)

Sejam A, B e C conjuntos. Tem-se:

i. $A \subseteq (A \cup B)$ e $(A \cap B) \subseteq A$;

ii. União/interseção com o universo: $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ e $A \cap \mathcal{U} = A$;

iii. União/interseção com o vazio: $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$;

iv. Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$;

v. Associatividade: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

vi. Distributividade, de uma em relação à outra: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Proposição 22 (Propriedades da união e interseção)

Sejam A, B e C conjuntos. Tem-se:

i. $A \subseteq (A \cup B)$ e $(A \cap B) \subseteq A$;

ii. União/interseção com o universo: $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ e $A \cap \mathcal{U} = A$;

iii. União/interseção com o vazio: $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$;

iv. Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$;

v. Associatividade: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

vi. Distributividade, de uma em relação à outra: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Exemplo 23

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5\}$ e $C = \{3, 4\}$. Calcule $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $(A \cap B) \cup C$.

O Complementar de um Conjunto

Definição 24 (Complementar)

Dado um conjunto A (isto é, um subconjunto de $\mathcal{U}$), chama-se complementar de A ao conjunto A^C formado pelos elementos de $\mathcal{U}$ que não pertencem a A.

Definição 24 (Complementar)

Dado um conjunto A (isto é, um subconjunto de $\mathcal{U}$), chama-se complementar de A ao conjunto A^C formado pelos elementos de $\mathcal{U}$ que não pertencem a A.

Exemplo 25

Seja $\mathcal{U}$ o conjunto dos triângulos. Qual o complementar do conjunto dos triângulos escalenos?

O Complementar de um Conjunto

Proposição 26 (Propriedades do complementar)

Fixado um conjunto universo $\mathcal{U}$, sejam A e B conjuntos. Tem-se:

i. $\mathcal{U}^C = \emptyset$ e $\emptyset^C = \mathcal{U}$;

ii. ${A^C}^C = A$ (Todo conjunto é complementar do seu complementar);

iii. Se $A \subseteq B$ então $B^C \subseteq A^C$ (se um conjunto está contido em outro, seu complementar contém o complementar desse outro);

iv. $A \cup A^C = \mathcal{U}$ e $A \cap A^C = \emptyset$;

v. Leis de DeMorgan: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ e $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

O Complementar de um Conjunto

Exemplo 27

Sejam $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 5\}$. Calcule $(A \cup B)^C$, $A^C \cap B^C$ e $A^C \cup B^C$.

Definição 28 (Diferença)

A diferença entre dois conjuntos A e B é definida por:

$$B \setminus A = \{x \; ; \; x \in B \text{ e } x \notin A\}.$$

Definição 28 (Diferença)

A diferença entre dois conjuntos A e B é definida por:

$$B \setminus A = \{x \,;\; x \in B \text{ e } x \notin A\}.$$

- Note que $A^C = \mathcal{U} \setminus A$ e $B \setminus A = B \cap A^C$;
- Em geral, não temos $B \setminus A = A \setminus B$. O exemplo a seguir comprova essa afirmação.

O Complementar de um Conjunto

Definição 28 (Diferença)

A diferença entre dois conjuntos A e B é definida por:

$$B \setminus A = \{x\ ;\ x \in B \text{ e } x \notin A\}\,.$$

- Note que $A^C = \mathcal{U} \setminus A$ e $B \setminus A = B \cap A^C$;
- Em geral, não temos $B \setminus A = A \setminus B$. O exemplo a seguir comprova essa afirmação.

Exemplo 29

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 5\}$. Determine $A \setminus B$ e $B \setminus A$.

Atividade 01 - Notação Básica de Conjunto

Naturais

Definição 30

Ao conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ damos o nome de conjunto dos números naturais.

Naturais

Definição 30

Ao conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ damos o nome de conjunto dos números naturais.

- Denotamos $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ por $\mathbb{N}^*$.
- Usamos o conjunto dos números naturais para contar coisas, como casas, animais, etc.

Inteiros

Definição 31

Ao conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -m-1, -m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ damos o nome de conjunto dos números inteiros.

Definição 31

Ao conjunto
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -m-1, -m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ damos o nome de conjunto dos números inteiros.

Notação

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ (Inteiros não negativos);
$\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$ (Inteiros positivos);
$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -m-1, -m, \ldots, -1, 0\}$ (Inteiros não positivos);
$\mathbb{Z}_-^* = \mathbb{Z}_- \setminus \{0\}$ (Inteiros negativos).

Racionais

Definição 32

Ao conjunto $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \ ; \ p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$ damos o nome de conjunto dos números racionais.

Racionais

Definição 32

Ao conjunto $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,;\, p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$ damos o nome de conjunto dos números racionais.

A representação decimal de um número racional é finita ou é uma dízima periódica (infinita).

Exemplo 33

Reescreva as frações $\dfrac{12}{30}$ e $\dfrac{3}{9}$ em forma de número decimal. Além disso, reescreva os números 0,6; 1,37; 0,222 . . . ; 0,313131 . . . e 1,123123123 . . . em forma de fração irredutível, ou seja, já simplificada.

Atividade 02 - Conversão de Dízimas Periódicas Compostas em Frações

Definição 34

O conjunto dos números irracionais é constituído por todos os números que possuem uma representação decimal infinita e não periódica.

Definição 34

O conjunto dos números irracionais é constituído por todos os números que possuem uma representação decimal infinita e não periódica.

Exemplo 35

$\sqrt{2}$, e e π são números irracionais.

Você sabia que existem infinitos "maiores" que outros? Qual conjunto você diria que tem mais elementos: racionais ou irracionais?

Problema

O Grande Hotel Georg Cantor tinha uma infinidade de quartos, numerados consecutivamente, um para cada número natural. Todos eram igualmente confortáveis. Num fim de semana prolongado, o hotel estava com seus quartos todos ocupados, quando chega um visitante. A recepcionista vai logo dizendo:

-Sinto muito, mas não há vagas.

Ouvindo isto, o gerente interveio:

-Podemos abrigar o cavalheiro sim, senhora.

E ordena:

Problema

O Grande Hotel Georg Cantor tinha uma infinidade de quartos, numerados consecutivamente, um para cada número natural. Todos eram igualmente confortáveis. Num fim de semana prolongado, o hotel estava com seus quartos todos ocupados, quando chega um visitante. A recepcionista vai logo dizendo:
-Sinto muito, mas não há vagas.
Ouvindo isto, o gerente interveio:
-Podemos abrigar o cavalheiro sim, senhora.
E ordena:
Transfira o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, passe o do quarto 2 para o quarto 3 e assim por diante. Quem estiver no quarto n, mude para o quarto $n+1$. Isto manterá todos alojados e deixará disponível o quarto 1 para o recém chegado.

Problema

O Grande Hotel Georg Cantor tinha uma infinidade de quartos, numerados consecutivamente, um para cada número natural. Todos eram igualmente confortáveis. Num fim de semana prolongado, o hotel estava com seus quartos todos ocupados, quando chega um visitante. A recepcionista vai logo dizendo:
-Sinto muito, mas não há vagas.
Ouvindo isto, o gerente interveio:
-Podemos abrigar o cavalheiro sim, senhora.
E ordena:
Transfira o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, passe o do quarto 2 para o quarto 3 e assim por diante. Quem estiver no quarto n, mude para o quarto $n+1$. Isto manterá todos alojados e deixará disponível o quarto 1 para o recém chegado. Logo depois chegou um ônibus com 30 passageiros, todos querendo hospedagem. Como deve proceder a recepcionista para acomodar todos?

Problema

O Grande Hotel Georg Cantor tinha uma infinidade de quartos, numerados consecutivamente, um para cada número natural. Todos eram igualmente confortáveis. Num fim de semana prolongado, o hotel estava com seus quartos todos ocupados, quando chega um visitante. A recepcionista vai logo dizendo:
-Sinto muito, mas não há vagas.
Ouvindo isto, o gerente interveio:
-Podemos abrigar o cavalheiro sim, senhora.
E ordena:
Transfira o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, passe o do quarto 2 para o quarto 3 e assim por diante. Quem estiver no quarto n, mude para o quarto $n+1$. Isto manterá todos alojados e deixará disponível o quarto 1 para o recém chegado. Logo depois chegou um ônibus com 30 passageiros, todos querendo hospedagem. Como deve proceder a recepcionista para acomodar todos?
Horas depois, chegou um trem com uma infinidade de passageiros. Como proceder para acomodá-los?

Atividade 03 - Classifique Números: Racionais e Irracionais
Atividade 04 - Expressões Racionais Versus Irracionais

Definição 36

À reunião de $\mathbb{Q}$ com o conjunto dos números irracionais, nomeamos de conjunto dos números reais. Denotamos por $\mathbb{R}$.

Definição 36

À reunião de $\mathbb{Q}$ com o conjunto dos números irracionais, nomeamos de conjunto dos números reais. Denotamos por $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \ ; \ x \text{ é irracional}\}$;
- Usamos os números reais para medir algo. A cada número real está associado um ponto na reta graduada e vice-versa;
- Entre dois números reais distintos sempre há pelo menos um número racional e um irracional. `Este vídeo` do Khan Academy mostra que entre dois racionais distintos sempre há pelo menos um número irracional;
- A igualdade $0,999\cdots = 1$ é verdadeira?

Intervalos Reais

Definição 37

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Definimos o intervalo aberto de a a b, denotado por (a, b), como sendo o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}.$$

Definimos o intervalo fechado de a a b, denotado por $[a, b]$, como sendo o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}.$$

Além dos intervalos da definição anterior, nas mesmas condições, temos os seguintes:

- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$;
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$;

Intervalos Reais

Além dos intervalos da definição anterior, nas mesmas condições, temos os seguintes:

- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$;
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$;
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$;
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}$;
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$;
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$;
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Definição 38

Chamamos $i = \sqrt{-1}$ de número imaginário, e ao conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi \ ; \ a, b \in \mathbb{R}\}$ damos o nome de conjunto dos números complexos.

Definição 38

Chamamos $i = \sqrt{-1}$ de número imaginário, e ao conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi \ ; \ a, b \in \mathbb{R}\}$ damos o nome de conjunto dos números complexos.

Seja $a + bi \in \mathbb{C}$. Nomeamos o número $a - bi$ de conjugado de $a + bi$.
Temos a seguinte cadeia de inclusões próprias: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.

Operações

Definimos duas operações básicas com os elementos dos conjuntos numéricos: a adição e a multiplicação. A subtração e a divisão provêm da adição e da multiplicação, respectivamente.

- Adição
  - Subtração: é a soma de números negativos;
- Multiplicação
  - Divisão: é a multiplicação de números da forma $\frac{1}{q}$.

Você está bem treinado nas operações com frações? Dê uma treinada `aqui` no Khan Academy!

Definição 39

A potência $n \in \mathbb{N}^*$ de um número real a é definida como sendo a multiplicação de a por ele mesmo n vezes, ou seja:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ vezes}}.$$

Potenciação

Definição 39

A potência $n \in \mathbb{N}^*$ de um número real a é definida como sendo a multiplicação de a por ele mesmo n vezes, ou seja:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ vezes}}.$$

Definição 40

Quando $a \neq 0$, $a^0 = 1$. 0^0 é uma indeterminação;
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;
$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, para $n > 0$.

É importante ressaltar que é comum definir $0^0 = 1$ dependendo da abordagem que se quer com as potências. Saiba mais `aqui`.

Proposição 41 (Propriedades)

Sejam $a, b, n, m \in \mathbb{R}$ a menos que se diga o contrário.

i. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
ii. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$;
iii. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
iv. $a^{m^n} = a^{\overbrace{m \cdot m \ldots m}^{n \text{ vezes}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
v. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
vi. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;
vii. $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, $n \neq 0$.

Observação 42

Seja $a \in \mathbb{R}$. Temos que $\sqrt{a^2} = |a|$. Mais geralmente, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ para n par.

É errado dizer que $\sqrt{4} = \pm 2$. O correto é $\sqrt{4} = 2$, mesmo que escrevas $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2}$.

Tal erro é comum, e o fator de confusão é que responder o conjunto solução da equação $x^2 = 4$ não é equivalente a responder qual a raiz de 4, e sim responder quais números que elevados ao quadrado são iguais a 4.

Atividade Online

Atividade 05 - Introdução às Propriedades da Potenciação (Expoentes Racionais)
Atividade 06 - Propriedades da Potenciação (Expoentes Racionais)
Atividade 07 - Simplifique Raízes Quadradas (Variáveis)
Atividade 08 - Simplifique Expressões de Raiz Quadrada

Exercícios

1. De que outras formas podemos representar o conjunto vazio utilizando as duas notações de definição de conjuntos que conhecemos?

2. Decida quais das afirmações a seguir estão corretas. Justifique suas respostas.

a) $\emptyset \in \emptyset$;

b) $\emptyset \subseteq \emptyset$;

c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$;

d) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$.

3. Dê exemplos de conjuntos A, B e C, justificando, que satisfaçam:

a) $A \supseteq B$;

b) $A \not\supseteq B$;

c) $A \subsetneq B$;

d) $A \subseteq B$, $B \not\subseteq C$ e $A \subseteq C$;

e) $A \not\subseteq B$, $B \subseteq C$ e $A \not\subseteq C$.

4. Considere $A = \{x \in \mathbb{Z}_+ \; ; \; x < 3\}$. Calcule $\mathcal{P}(A)$.

5. Dê exemplos de conjuntos A, B e C, justificando com os cálculos, que satisfaçam:

a) $A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$. Qual o conjunto que será sempre igual a $A \cup (B \cap C)$?

b) $A \subseteq B$ mas $A^C \not\subseteq B^C$. Qual inclusão é sempre válida envolvendo A^C e B^C?

c) $A \subsetneq B$;

d) $(A \cap B)^C \neq A^C \cap B^C$. Qual o conjunto que será sempre igual a $(A \cap B)^C$?

6. As igualdades abaixo acerca dos conjuntos A, B e C não são válidas geralmente. Em cada um dos itens, dê exemplos que ilustram esses fatos.

a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

7. Sejam A, B conjuntos quaisquer. Classifique como verdadeiro ou falso cada sentença abaixo. Justifique ou dê um contra-exemplo no caso da sentença ser falsa.

a) $(A \setminus B) \subseteq B$;

b) $(A \setminus B) \subseteq (A \cup B)$.

8. Sejam A, B e C conjuntos tais que $A \cup B \cup C = \mathcal{U}$. Em cada um dos itens, use propriedades para obter um conjunto igual a esses escrito somente com uniões de conjuntos.

a) $A \cup (B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C^C) \cup C$;

b) $\left[(A^C \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)\right]^C$;

c) $\left[(A \cup B^C \cup C) \cup (B \cup C^C)\right]^C$;

d) $\left[(A \cup B^C \cup C) \cap (B \cap C^C)\right]^C$.

9. Sejam A, B, C, D conjuntos. Use propriedades do nosso material para obter um conjunto igual ao abaixo escrito somente com interseções de, no máximo, 3 conjuntos.

$$[A^C \cap B \cap (C \cup D^C)^C] \cup [A \cap (B^C \cup C)^C \cap D].$$

10. O `Diagrama de Venn` para os conjuntos X, Y, Z decompõe o plano em oito regiões. Numere essas regiões e exprima cada um dos conjuntos abaixo como reunião de algumas dessas regiões. (Por exemplo: $X \cap Y = 1 \cup 2$.)

a. $\left(X^C \cup Y\right)^C$;

b. $\left(X^C \cup Y\right) \cup Z^C$;

c. $\left(X^C \cap Y\right) \cup \left(X \cap Z^C\right)$;

d. $(X \cup Y)^C \cap Z$.

11. Exprimindo cada membro como reunião de regiões numeradas, verifique as igualdades:

a. $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;

b. $X \cup (Y \cap Z)^C = X \cup Y^C \cup Z^C$.

12. Reduza as expressões abaixo a um intervalo ou a união de intervalos disjuntos.

a. $[12; 36) \cup [-2; 37]$;

b. $(-\infty; -2) \cap (-1; \frac{-1}{2})$;

c. $([4; 6] \cup (5; 8]) \cap ([4; 6] \cup [4; 9))$;

d. $[2; +\infty)^C$;

e. $([3; 5] \cup [6; 9])^C$;

f. $\left([2; 5]^C \cap (-\infty; 6)\right)^C$;

g. $((2; 4] \cap (1; 4)) \cup (7; 12]$;

h. $[\frac{\pi}{6}; 2\pi] \cup [\pi; 3\pi)$;

i. $(\pi; +\infty) \setminus \mathbb{R}$;

j. $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3]$.

Exercícios

13. Faça os testes do Khan Academy das unidades que envolvam frações em `Aritmética`. Ao final, revise os assuntos que você teve problema.

14. Faça o estudo completo (vídeos e exercícios) no Khan Academy da unidade `Números Irracionais`.

15. Faça o estudo completo (vídeos e exercícios) no Khan Academy da unidade `Radicais e Expoentes Racionais`.

Bibliografia

[1] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.
A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.
9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[2] LIMA, Elon L.
Números e Funções Reais.
1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[3] OLIVEIRA, Krerley I M; FERNÁNDEZ, Adán J C.
Iniciação à Matemática: um Curso com Problemas e Soluções.
2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[4] MEDEIROS, Valéria Z; CALDEIRA, André M; SILVA, Luiza M O; MACHADO, Maria A S.
Pré-Cálculo.
2. ed. Rio de Janeiro: Cengage Learning, 2009.