

# Capítulo 4 - Parte 2

## Matemática Elementar

Funções Reais e Gráficos

21 de julho de 2024

Igor Oliveira

`matematicaelementar@imd.ufrn.br`

Instituto Metrôpole Digital  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Natal-RN

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 19

Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano  $\Pi$  consiste num par de eixos perpendiculares  $OX$  e  $OY$  contidos nesse plano, com a mesma origem  $O$ .  $OX$  chama-se o eixo das abscissas e  $OY$  é o eixo das ordenadas. O sistema é indicado com a notação  $OXY$ . Um plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas é chamado de cartesiano.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

3 Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 19

Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano  $\Pi$  consiste num par de eixos perpendiculares  $OX$  e  $OY$  contidos nesse plano, com a mesma origem  $O$ .  $OX$  chama-se o eixo das abscissas e  $OY$  é o eixo das ordenadas. O sistema é indicado com a notação  $OXY$ . Um plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas é chamado de cartesiano.

Fixado um sistema de coordenadas cartesianas  $OXY$  num plano  $\Pi$ , cada ponto  $P$  do plano possuirá um par ordenado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  associado e vice-versa. Dizemos que  $x$  e  $y$  são as coordenadas do ponto  $P$  e escrevemos  $P = (x, y)$ , onde  $x$  é a abscissa e  $y$  é a ordenada de  $P$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

3 Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 19

Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano  $\Pi$  consiste num par de eixos perpendiculares  $OX$  e  $OY$  contidos nesse plano, com a mesma origem  $O$ .  $OX$  chama-se o eixo das abscissas e  $OY$  é o eixo das ordenadas. O sistema é indicado com a notação  $OXY$ . Um plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas é chamado de cartesiano.

Fixado um sistema de coordenadas cartesianas  $OXY$  num plano  $\Pi$ , cada ponto  $P$  do plano possuirá um par ordenado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  associado e vice-versa. Dizemos que  $x$  e  $y$  são as coordenadas do ponto  $P$  e escrevemos  $P = (x, y)$ , onde  $x$  é a abscissa e  $y$  é a ordenada de  $P$ .

## Exemplo 20

Represente os pontos  $P_1 = (1, 3)$ ,  $P_2 = (-2, 0)$  e  $P_3 = (0, -4)$  em um plano cartesiano.

## Definição 21

Os eixos ortogonais  $OX$  e  $OY$  decompõem o plano cartesiano em quatro regiões, cada uma das quais se chama um quadrante. Dado um ponto  $P = (x, y)$ , dizemos que  $P$  está no:

- ▶ primeiro quadrante, se  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ ;
- ▶ segundo quadrante, se  $x \leq 0$  e  $y \geq 0$ ;
- ▶ terceiro quadrante, se  $x \leq 0$  e  $y \leq 0$ ;
- ▶ quarto quadrante, se  $x \geq 0$  e  $y \leq 0$ .

## Definição 21

Os eixos ortogonais  $OX$  e  $OY$  decompõem o plano cartesiano em quatro regiões, cada uma das quais se chama um quadrante. Dado um ponto  $P = (x, y)$ , dizemos que  $P$  está no:

- ▶ primeiro quadrante, se  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ ;
- ▶ segundo quadrante, se  $x \leq 0$  e  $y \geq 0$ ;
- ▶ terceiro quadrante, se  $x \leq 0$  e  $y \leq 0$ ;
- ▶ quarto quadrante, se  $x \geq 0$  e  $y \leq 0$ .

## Exemplo 22

Os pontos  $P_1 = (1, 3)$ ,  $P_2 = (-2, 0)$  e  $P_3 = (0, -4)$  estão em quais quadrantes?

## Proposição 23 (Distância entre dois pontos)

Dados os pontos  $P = (x, y)$  e  $Q = (u, v)$ , a distância entre  $P$  e  $Q$ ,  $d(P, Q)$ , é

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$



## Proposição 23 (Distância entre dois pontos)

Dados os pontos  $P = (x, y)$  e  $Q = (u, v)$ , a distância entre  $P$  e  $Q$ ,  $d(P, Q)$ , é

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

## Exemplo 24

Dados os pontos  $P_1 = (1, 3)$ ,  $P_2 = (-2, 0)$  e  $P_3 = (0, -4)$ , calcule  $d(P_1, P_2)$  e  $d(P_2, P_3)$ .

## Proposição 23 (Distância entre dois pontos)

Dados os pontos  $P = (x, y)$  e  $Q = (u, v)$ , a distância entre  $P$  e  $Q$ ,  $d(P, Q)$ , é

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

## Exemplo 24

Dados os pontos  $P_1 = (1, 3)$ ,  $P_2 = (-2, 0)$  e  $P_3 = (0, -4)$ , calcule  $d(P_1, P_2)$  e  $d(P_2, P_3)$ .

## Exemplo 25

Qual a equação que determina os pontos  $(x, y)$  pertencentes a uma circunferência centrada na origem  $O$  e de raio  $r$ ?

## Exemplo 26

Dados os pontos distintos  $A = (a, b)$  e  $C = (c, d)$ , as equações

$$\begin{cases} x = a + t(c - a) \\ y = b + t(d - b) \end{cases},$$

onde  $t \in \mathbb{R}$ , chamam-se as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos  $A$  e  $C$ .

Quais as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos  $A = (-1, 3)$  e  $B = (0, 2)$ ?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

6 Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 26

Dados os pontos distintos  $A = (a, b)$  e  $C = (c, d)$ , as equações

$$\begin{cases} x = a + t(c - a) \\ y = b + t(d - b) \end{cases},$$

onde  $t \in \mathbb{R}$ , chamam-se as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos  $A$  e  $C$ .

Quais as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos  $A = (-1, 3)$  e  $B = (0, 2)$ ?

## Exemplo 27

Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tais que  $a$  e  $b$  não são ambos nulos. O conjunto de pontos  $P = (x, y)$  cujas coordenadas satisfazem a equação  $ax + by = c$  é uma reta.

Esboce a reta determinada pela equação  $4x + 2y = -1$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

6 Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Atividade 39 - Pontos no Plano Cartesiano  
Atividade 40 - Distância Entre Pontos no Primeiro Quadrante  
Atividade 41 - Faça um Gráfico a Partir da Equação Geral da Reta

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

7 Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 28

O gráfico de uma função real é o seguinte subconjunto do plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ :

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in D, y = f(x)\}.$$

Em outras palavras, o gráfico de uma função  $f$  é o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem sua lei de associação.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

8 Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 29

Esboce o gráfico da função real

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

## Definição 30

Chamamos de função piso (também chamada de chão ou solo) a função real que associa a cada número real  $x$  ao maior inteiro que é menor ou igual a  $x$ . Denotamos este número por  $\lfloor x \rfloor$ .

Chamamos de função teto a função real que associa a cada número real  $x$  ao menor inteiro que é maior ou igual a  $x$ . Denotamos este número por  $\lceil x \rceil$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

10 Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia



## Definição 30

Chamamos de função piso (também chamada de chão ou solo) a função real que associa a cada número real  $x$  ao maior inteiro que é menor ou igual a  $x$ . Denotamos este número por  $\lfloor x \rfloor$ .

Chamamos de função teto a função real que associa a cada número real  $x$  ao menor inteiro que é maior ou igual a  $x$ . Denotamos este número por  $\lceil x \rceil$ .

## Exemplo 31

Calcule  $\lceil 7,5 \rceil$ ,  $\lfloor -2,2 \rfloor$ ,  $\lceil 4,1 \rceil$  e  $\lfloor -3,9 \rfloor$ .  
Esboce o gráfico das funções piso e teto.

## Exemplo 32

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \sin x + 1,$$

$$h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

11

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 32

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \sin x + 1,$$

$$h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = f(x + b) + a$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro  $b$ , e uma translação vertical determinada pelo parâmetro  $a$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

11

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 32

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \sin x + 1,$$

$$h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = f(x + b) + a$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro  $b$ , e uma translação vertical determinada pelo parâmetro  $a$ .

► O translado vertical será:

- No sentido positivo do eixo  $y$  (para cima), se  $a > 0$ ;
- No sentido negativo do eixo  $y$  (para baixo), se  $a < 0$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

11

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 32

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \sin x + 1,$$

$$h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = f(x + b) + a$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro  $b$ , e uma translação vertical determinada pelo parâmetro  $a$ .

- ▶ O translado vertical será:
  - ▶ No sentido positivo do eixo  $y$  (para cima), se  $a > 0$ ;
  - ▶ No sentido negativo do eixo  $y$  (para baixo), se  $a < 0$ .
- ▶ O translado horizontal será:
  - ▶ No sentido positivo do eixo  $x$  (para a direita), se  $b < 0$ ;
  - ▶ No sentido negativo do eixo  $x$  (para a esquerda), se  $b > 0$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

11

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 33

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x,$$

$$h(x) = f(2 \cdot x) = \sin(2 \cdot x).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

12

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 33

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x,$$

$$h(x) = f(2 \cdot x) = \sin(2 \cdot x).$$

## Exemplo 34

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = -1 \cdot f(x) = -1 \cdot \sin x,$$

$$h(x) = f(-1 \cdot x) = \sin(-1 \cdot x).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

12

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

# Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro  $d$ , e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro  $c$ . Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

13

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia



# Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro  $d$ , e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro  $c$ . Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

- ▶ A dilatação vertical será:
  - ▶ Um esticamento se  $c > 1$ ;
  - ▶ Um encolhimento se  $0 < c < 1$ ;
  - ▶ Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo  $x$  se  $c < -1$ ;
  - ▶ Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo  $x$  se  $-1 < c < 0$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

13

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

# Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro  $d$ , e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro  $c$ . Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

- ▶ A dilatação vertical será:
  - ▶ Um esticamento se  $c > 1$ ;
  - ▶ Um encolhimento se  $0 < c < 1$ ;
  - ▶ Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo  $x$  se  $c < -1$ ;
  - ▶ Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo  $x$  se  $-1 < c < 0$ .
- ▶ A dilatação horizontal será:
  - ▶ Um encolhimento se  $d > 1$ ;
  - ▶ Um esticamento se  $0 < d < 1$ ;
  - ▶ Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo  $y$  se  $d < -1$ ;
  - ▶ Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo  $y$  se  $-1 < d < 0$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

13

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Atividade 42 - Transladação de Funções  
Atividade 43 - Identifique Transformações de Funções

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

14

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 35

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que

- (i)  $f$  é monótona (estritamente) crescente se, para todos  $x_1, x_2 \in D$ ,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2);$$

- (ii)  $f$  é monótona não decrescente se, para todos  $x_1, x_2 \in D$ ,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2);$$

- (iii)  $f$  é monótona (estritamente) decrescente se, para todos  $x_1, x_2 \in D$ ,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2);$$

- (iv)  $f$  é monótona não crescente se, para todos  $x_1, x_2 \in D$ ,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

15 Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Nas mesmas condições da Definição 35 , se  $f(x) = k \in \mathbb{R}$  para todo  $x \in D$ , dizemos que  $f$  é constante.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

16

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Nas mesmas condições da Definição 35, se  $f(x) = k \in \mathbb{R}$  para todo  $x \in D$ , dizemos que  $f$  é constante.

Se  $I \subseteq D$  é um intervalo, definimos a monotonicidade de  $f$  no intervalo  $I$  de maneira análoga ao feito anteriormente. Por exemplo:

$f$  é monótona (estritamente) crescente em  $I$  se, para todos  $x_1, x_2 \in I$ ,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

16

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

## Definição 36

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.

- (i)  $f$  é limitada superiormente se existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) \leq M$ , para todo  $x \in D$ ;
- (ii)  $f$  é limitada inferiormente se existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) \geq M$ , para todo  $x \in D$ ;
- (iii)  $x_0 \in D$  é um ponto de máximo absoluto de  $f$  se  $f(x_0) \geq f(x)$ , para todo  $x \in D$ ;
- (iv)  $x_0 \in D$  é um ponto de mínimo absoluto de  $f$  se  $f(x_0) \leq f(x)$ , para todo  $x \in D$ ;
- (v)  $x_0 \in D$  é um ponto de máximo local de  $f$  se existe  $r > 0$  tal que  $f(x_0) \geq f(x)$ , para todo  $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ ;
- (vi)  $x_0 \in D$  é um ponto de mínimo local de  $f$  se existe  $r > 0$  tal que  $f(x_0) \leq f(x)$ , para todo  $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

17

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

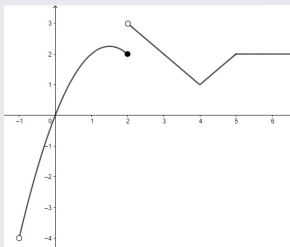
Exercícios

Bibliografia

## Exemplo 37

A função  $h : (-1; 6] \rightarrow \mathbb{R}$ , cujo gráfico é esboçado abaixo, é

$$\text{definida por } h(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ |x - 4| + 1 & \text{se } 2 < x \leq 5 \\ 2 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$



Determine os intervalos de monotonicidade e os extremos de  $h$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

18 Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia



Atividade 44 - Intervalos Crescentes e Decrescentes  
Atividade 45 - Mínimos e Máximos Relativos  
Atividade 46 - Mínimos e Máximos Absolutos

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

19

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

**11.** Considere os pontos  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$  distintos e pertencentes a um plano cartesiano. Responda o que se pede:

- a) Qual as equações paramétricas da reta que passa por  $A$  e  $B$ ?
- b) Mostre que o ponto  $M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$  pertence à reta que passa por  $A$  e  $B$ ;
- c) Mostre que  $d(A, M) = d(M, B)$  e conclua que  $M$  é o ponto médio do segmento  $AB$ .

**12.** Mostre que  $f : (-\infty; -4] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = -x^2 - 8x - 12$ , é uma função crescente.

**13.** Seja a função  $f : [3; 5] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ .

- a) Mostre que  $f$  é decrescente.
- b)  $f$  possui máximo absoluto? Se sim, ocorre em qual ponto?
- c)  $f$  possui mínimo absoluto? Se sim, ocorre em qual ponto?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

20 Exercícios

Bibliografia

14. Considere a função  $f : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  tal que  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Responda as seguintes perguntas apresentando as respectivas justificativas.

- a)  $f$  é monótona? Se sim, de que tipo? Se não,  $f$  possui algum intervalo de monotonicidade?
  - b)  $f$  possui máximo absoluto?
  - c)  $f$  possui mínimo absoluto?
  - d)  $f$  é limitada?
15. Considere a função real  $f$  tal que  $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ .
- a) Mostre que  $f$  é crescente no intervalo  $(-\infty, 1]$ ;
  - b) Mostre que  $f$  é decrescente no intervalo  $[1, +\infty)$ ;
  - c) Use os itens anteriores para concluir que  $1 \in \mathbb{R}$  é um ponto de máximo absoluto de  $f$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

21 Exercícios

Bibliografia

**16.** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

- (a) Se  $f$  é limitada superiormente, então  $f$  tem pelo menos um máximo absoluto;
- (b) Se  $f$  é limitada superiormente, então  $f$  tem pelo menos um máximo local;
- (c) Se  $f$  tem um máximo local, então  $f$  tem um máximo absoluto;
- (d) Todo máximo local de  $f$  é máximo absoluto;
- (e) Todo máximo absoluto de  $f$  é máximo local;
- (f) Se  $x_0$  é o ponto de extremo local de  $f$ , então é ponto de extremo local de  $f^2$ , onde  $(f^2)(x) = f(x) \cdot f(x)$ ;
- (g) Se  $x_0$  é o ponto de extremo local de  $f^2$ , então é ponto de extremo local de  $f$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

22 Exercícios

Bibliografia

**17.** Seja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ . Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

- a) A função  $g$  pode ser ilimitada inferiormente;
- b)  $f$  é limitada superiormente ou  $f$  é limitada inferiormente.

**18.** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

- (a) Se  $f$  e  $g$  são crescentes, então a composta  $f \circ g$  é uma função crescente;
- (b) Se  $f$  e  $g$  são crescentes, então o produto  $f \cdot g$  é uma função crescente, onde  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ;
- (c) Se  $f$  é crescente em  $A \subseteq \mathbb{R}$  e em  $B \subseteq \mathbb{R}$ , então  $f$  é crescente em  $A \cup B \subseteq \mathbb{R}$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

23 Exercícios

Bibliografia

**19.** Seja  $f$  uma função real.

- a) Suponha que  $f$  é constante. Mostre que  $f$  é não crescente e não decrescente;
- b) Suponha que  $f$  é não crescente e não decrescente. Mostre que  $f$  é constante.

**20.** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $A$  e  $B$  intervalos reais tais que  $A \cap B$  é um intervalo não degenerado, ou seja, que possui pelo menos dois números. Mostre que, se  $f$  é crescente em  $A$  e em  $B$ , então  $f$  é crescente em  $A \cap B$ .

**21.** Mostre que a função inversa de uma função crescente é também uma função crescente. E a função inversa de uma função decrescente é decrescente.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

24 Exercícios

Bibliografia

**22.** Dizemos que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é *par* quando se tem  $f(-t) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Se for o caso de  $f(-t) = -f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , dizemos que  $f$  é *ímpar*.

Considere a função real  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Demonstre, ou refute com um contraexemplo, as afirmações abaixo:

- a) Se  $f$  é par e  $x_0 \in \mathbb{R}$  é um ponto de máximo absoluto, então  $-x_0 \in \mathbb{R}$  é também um ponto de máximo absoluto;
- b) Se  $f$  é ímpar e  $x_0 \in \mathbb{R}$  é um ponto de mínimo absoluto, então  $-x_0 \in \mathbb{R}$  é um ponto de máximo absoluto;
- c) Se  $f$  é ímpar e limitada superiormente, então  $f$  é limitada inferiormente.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos de Extremo

Atividade Online

25 Exercícios

Bibliografia

- [1] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.  
*A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.*  
9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [2] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.  
*A Matemática do Ensino Médio. Vol. 3.*  
6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Plano Cartesiano

Atividade Online

Gráficos de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos  
de Extremo

Atividade Online

Exercícios

26 Bibliografia