Capítulo 6

Matemática Elementar
Funções Exponenciais e Logarítmicas

17 de dezembro de 2023

Igor Oliveira
matematicaelementar@imd.ufrn.br

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Índice

Introdução
Função Exponencial
Gráfico da Função Exponencial
Atividade Online
Caracterização da Função Exponencial
Função Logarítmica
Atividade Online
Gráfico da Função Logarítmica
Atividade Online
Caracterização da Função Logarítmica
O número *e*
Atividade Online
Exercícios
Bibliografia

As funções do tipo exponenciais modelam problemas nos quais o crescimento é calculado dependendo do valor no momento anterior, como em juros compostos. Por que será que a expressão “crescimento exponencial” é sinônimo de um crescimento muito acentuado?
Além disso, a função exponencial é a única função real contínua que transforma somas em produtos, ou seja,

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

A função logarítmica, *que será apresentada na segunda parte desse capítulo*, é a inversa da função exponencial. Por isso, teremos que ela é a única função real contínua que transforma produtos em somas, ou seja,

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Definição

Definição 1

Seja a um número real positivo diferente de 1. Chamamos de função exponencial uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ com lei de formação $f(x) = a^x$. O número a é chamado de base da função exponencial.

Definição

Definição 1

Seja a um número real positivo diferente de 1. Chamamos de função exponencial uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$ com lei de formação $f(x) = a^x$. O número a é chamado de base da função exponencial.

Definição 2

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo exponencial quando $f(x) = b \cdot a^x$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, b é não nulo e a é positivo e diferente de 1.

Propriedades

Proposição 3 (Propriedades Fundamentais da Função Exponencial)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função exponencial de base a. Então, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ valem:

(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, ou seja, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$;

(ii) $a^1 = a$, ou seja, $f(1) = a$;

(iii) $$x < y \implies \begin{cases} a^x < a^y, & \text{quando} \quad a > 1 \\ a^y < a^x, & \text{quando} \quad 0 < a < 1 \end{cases}.$$

Propriedades

Devido a essas propriedades, podemos concluir os seguintes resultados acerca de uma função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$:

- $f^{-1}(0) = \emptyset$, ou seja, f não pode assumir o valor zero;
- $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
- Ao escolhermos o conjunto $\mathbb{R}_+^*$ como contradomínio de f, obtemos a sobrejetividade da função;
- f é ilimitada superiormente;
- O gráfico de f é uma linha contínua;
- f é bijetiva e crescente se $a > 1$, ou decrescente se $0 < a < 1$.

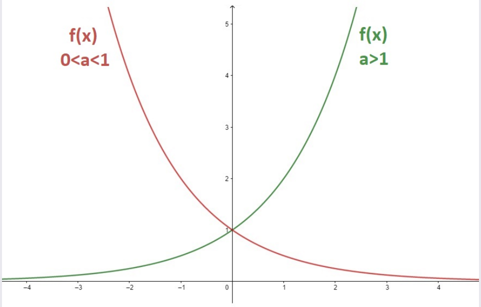
Crescimento exponencial diário

Exemplo 4

Uma alga cresce de modo que, em cada dia, ela cobre uma superfície de área igual ao dobro da coberta no dia anterior. Se esta alga cobre a superfície de um lago em 100 dias, qual é o número de dias necessários para que duas algas, da mesma espécie anterior, cubram a superfície do mesmo lago? E se forem quatro algas? Você consegue responder esta pergunta para 3 algas?

Exemplo 5

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função exponencial tal que $f(x) = a^x$. O gráfico de f é:

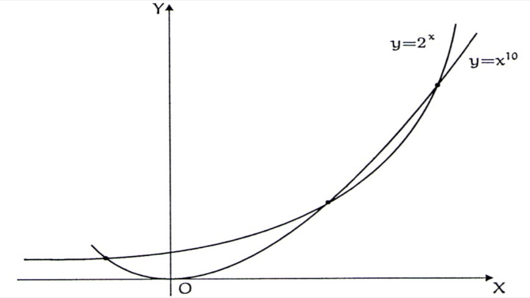


O gráfico de f nunca toca o eixo x, mas fica tão próximo quanto queiramos. Isso equivale dizer que a reta $y = 0$ é assíntota do gráfico de f.

Exemplo 6

O crescimento exponencial supera o de qualquer polinômio. Ao compararmos, por exemplo, as funções $f(x) = 2^x$ e $p(x) = x^{10}$, temos que:

$$\begin{array}{rcl} 0 < x < 1{,}077 & \Longrightarrow & 2^x > x^{10} \\ 1{,}077 < x < 58{,}77 & \Longrightarrow & x^{10} > 2^x \\ x > 58{,}77 & \Longrightarrow & 2^x > x^{10} \end{array}$$



Atividade Online

Atividade 57 - Problemas (Algébricos) de Expressões Exponenciais

Atividade 58 - Representação Gráfica de Crescimento e Decaimento Exponencial

Atividade 59 - Gráficos de Funções Exponenciais

Teorema 7 (Caracterização da Função Exponencial)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *uma função monótona injetiva. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $f(nx) = f(x)^n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $f(x) = a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *onde* $a = f(1)$*;*

(iii) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

Definição

Definição 8

A inversa da função exponencial de base a é a função logarítmica

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado logaritmo de x na base a. No caso de $a = 10$, escrevemos, por simplicidade, $\log_{10} x = \log x$.

Definição

Definição 8

A inversa da função exponencial de base a é a função logarítmica

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado logaritmo de x na base a. No caso de $a = 10$, escrevemos, por simplicidade, $\log_{10} x = \log x$.

Pela definição de função inversa, tem-se

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{e} \quad \log_a (a^x) = x.$$

Assim, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Ou seja,

$$y = \log_a x \iff a^y = x.$$

Proposição 9

Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função logarítmica tal que $f(x) = \log_a x$. Os seguintes valem para quaisquer $x, y, b \in \mathbb{R}_+^*$, $b \neq 1$ e qualquer $k \in \mathbb{R}$:

(a) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$;

(b) $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$;

(c) $\log_a 1 = 0$;

(d) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$;

(e) f é bijetiva com contradomínio $\mathbb{R}$, logo é ilimitada superiormente e inferiormente;

(f) O gráfico de f é traçado por uma linha contínua;

(g) f é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Exemplo 10

Use as aproximações dos logaritmos abaixo para calcular $\log 300$, $\log 15{,}5$, $\log 225$ e $\log_{100} 10$. Além disso, calcule o produto $17 \cdot 5$ utilizando somente a tabela abaixo e a operação de soma de números.

Base 10

TABELA DE LOGARITMOS DECIMAIS

nº	log	nº	log	nº	log	nº	log	nº	log
1	0	21	1,322219	41	1,612784	61	1,78533	81	1,908485
2	0,30103	22	1,342423	42	1,623249	62	1,792392	82	1,913814
3	0,477121	23	1,361728	43	1,633468	63	1,799341	83	1,919078
4	0,60206	24	1,380211	44	1,643453	64	1,80618	84	1,924279
5	0,69897	25	1,39794	45	1,653213	65	1,812913	85	1,929419
6	0,778151	26	1,414973	46	1,662758	66	1,819544	86	1,934498
7	0,845098	27	1,431364	47	1,672098	67	1,826075	87	1,939519
8	0,90309	28	1,447158	48	1,681241	68	1,832509	88	1,944483
9	0,954243	29	1,462398	49	1,690196	69	1,838849	89	1,94939
10	1	30	1,477121	50	1,69897	70	1,845098	90	1,954243
11	1,041393	31	1,491362	51	1,70757	71	1,851258	91	1,959041
12	1,079181	32	1,50515	52	1,716003	72	1,857332	92	1,963788
13	1,113943	33	1,518514	53	1,724276	73	1,863323	93	1,968483
14	1,146128	34	1,531479	54	1,732394	74	1,869232	94	1,973128
15	1,176091	35	1,544068	55	1,740363	75	1,875061	95	1,977724
16	1,20412	36	1,556303	56	1,748188	76	1,880814	96	1,982271
17	1,230449	37	1,568202	57	1,755875	77	1,886491	97	1,986772
18	1,255273	38	1,579784	58	1,763428	78	1,892095	98	1,991226
19	1,278754	39	1,591065	59	1,770852	79	1,897627	99	1,995635
20	1,30103	40	1,60206	60	1,778151	80	1,90309	100	2

Exemplo 11

No Exemplo 4 calculamos que, se uma alga que duplica sua área a cada dia cobre um determinado lago em 100 dias, então duas águas cobrirão o mesmo lago em 99 dias. Porém, ficou em aberto em quantos dias 3 algas cobrirão o mesmo lago. Além disso, defina uma função que calcula o número de dias que uma quantidade qualquer de algas cobre o lago.

Atividade 60 - Cálculo de Logaritmos (Avançado)
Atividade 61 - Use as Propriedades dos Logaritmos
Atividade 62 - Use a Regra da Mudança de Base dos Logaritmos

Gráfico da Função Logarítmica

Exemplo 12

Considere as funções logarítmicas tais que $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Os gráficos de f e g são apresentados abaixo.

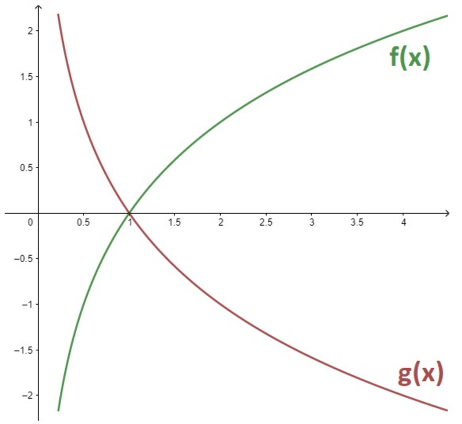
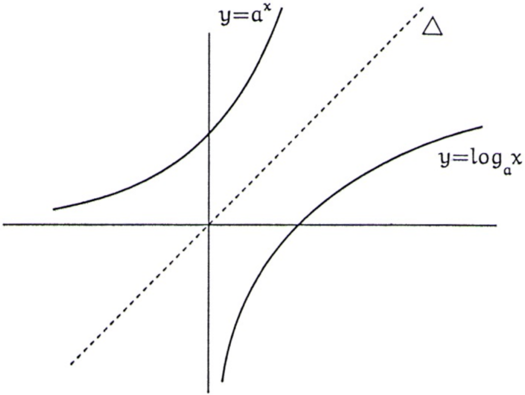


Gráfico da Função Logarítmica

Já vimos que o crescimento exponencial supera o de qualquer polinômio. Por ser a inversa da função exponencial, a função logarítmica possui um crescimento muito lento. Mesmo assim, a função logarítmica é ilimitada superiormente. Compare os gráficos abaixo:



Atividade 63 - Gráficos de Funções Logarítmicas

Teorema 13 (Caracterização da Função Logarítmica)

Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *uma função monótona injetiva tal que* $f(xy) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$*. Então existe* $a > 0$ *tal que* $f(x) = \log_a x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}_+^*$*.*

O número e

Definição 14

Definimos o número e como sendo o número cujos valores aproximados por falta são os números racionais da forma

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Em outras palavras, quanto maior for $n \in \mathbb{N}^*$, melhor a aproximação de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para e, e ela se dá na medida que desejarmos.

O número e

O número e é irracional. Um valor aproximado dessa importante constante é $e = 2{,}718281828459$.
Muito usado como base das funções exponenciais e logarítmicas, principalmente no estudo dessas funções no Cálculo Infinitesimal, o logaritmo na base e recebe uma notação e nomenclatura especial. Denotamos

$$\log_e x = \ln x$$

e o chamamos de logaritmo natural.

Atividade Online

Atividade 64 - Solução de Equações Exponenciais Usando Logaritmos: Base 10 e Base e

Atividade 65 - Problemas com Modelos Exponenciais

Exercícios

1. O gordinho Jaguatirica, certo dia, fez compras em 5 lojas de um shopping. Em cada loja, gastou metade do que possuia e pagou, na saída, R$ 2,00 de estacionamento. Se após toda essa atividade ainda ficou com R$ 20,00, que quantia ele tinha inicialmente?

2. Uma aplicação rende a *juros compostos* se o rendimento diário é somado ao capital inicial para o cálculo dos juros dos dias seguintes.
Edson faz uma aplicação que rende juros $j > 0$ em um mês. Ou seja, se ele investiu um capital inicial c_0, então ao fim de 1 mês, Edson poderia resgatar $c = c_0(1 + j)$. Leia a *Desigualdade de Bernoulli* e responda o que se pede no slide a seguir.
Desigualdade de Bernoulli: Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq -1$. Seja também $b \in \mathbb{R}$.
Caso $0 < b < 1$. Então

$$(1 + a)^b \leq 1 + ab.$$

Caso seja $b < 0$ ou $b > 1$, então

$$(1 + a)^b \geq 1 + ab.$$

Em ambos os casos, a igualdade só é satisfeita quando $a = 0$.

Exercícios

(a) Caso a aplicação renda juros composto, defina uma função do tipo exponencial que calcule o capital c_c em função do tempo t (em meses) da aplicação;

(b) Suponha que Edson precisará resgatar todo o dinheiro da aplicação em um tempo t menor que um mês. É mais vantajoso aplicar com juros simples ou com juros compostos? Compare com a função criada no Exercício sobre juros simples do capítulo anterior e utilize a Desigualdade de Bernoulli enunciada anteriormente.

(c) A conclusão do item anterior também é válida caso o tempo de aplicação fosse mais de 1 mês?

3. Edson investiu R$500,00 em um banco a uma taxa de juros de 9% ao ano. Edson tem a pretensão de retirar seu dinheiro do banco quando o montante, ou seja, o dinheiro investido mais o rendimento, chegar a R$1.000,00.
Se os juros que o banco ofereceu forem juros compostos, defina a função do tipo exponencial que modela o montante e use-a para responder quanto tempo Edson vai esperar para retirar seu dinheiro.

Exercícios

4. Use as aproximações $\log 2 \approx 0,301$, $\log 3 \approx 0,477$ e $\log 5 \approx 0,699$ para obter valores aproximados para:

(a) $\log 9$;

(b) $\log 40$;

(c) $\log 200$;

(d) $\log 3000$;

(e) $\log 0{,}003$;

(f) $\log 0{,}81$.

5. Mostre que

$$\log_{b^n} a^n = \log_b a$$

para todo $a, b, n \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$.

6. Considere $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x = 10^k y$, com $k \in \mathbb{Z}$. Qual é a relação entre $\log x$ e $\log y$?

7. Uma interpretação do logaritmo decimal é sua relação com a ordem de grandeza, isto é, com o número de algarismos na representação decimal. As questões a seguir exploram essa relação.

(a) Considere o número $x = 58.932{,}1503$. Qual é a parte inteira de $\log x$?

(b) Considere $x > 1$ um número real cuja parte inteira tem k algarismos. Use que a função logarítmica é crescente para mostrar que a parte inteira de $\log x$ é igual a $k - 1$;

(c) Generalizando o item anterior, considere o sistema de numeração posicional de base $b \geq 2$. Mostre que, se a representação de um número real $x > 1$ nesse sistema tem k algarismos, então, a parte inteira de $\log_b x$ é igual a $k - 1$.

8. (UNIRIO/1994) Um explorador descobriu, na selva amazônica, uma espécie nova de planta e, pesquisando-a durante anos, comprovou que o seu crescimento médio variava de acordo com a fórmula $A = 40 \cdot 1{,}1^t$, onde a altura média A é medida em centímetros e o tempo t em anos. Sabendo-se que $\log 2 \approx 0{,}30$ e $\log 11 \approx 1{,}04$, determine:

(a) A altura média, em centímetros, de uma planta dessa espécie aos 3 anos de vida;

(b) A idade, em anos, na qual a planta tem uma altura média de $1{,}6m$.

9. Há 4 anos uma certa doença tem uma diminuição constante de 20% dos casos anualmente. Estudos apontam que esse decréscimo se manterá nos próximos anos. Hoje, há 10.000 casos dessa doença.

(a) Defina uma função real que modele o problema. Onde é informado o tempo e a função retorna a estimativa do número de casos;

(b) Quanto tempo será necessário para que a estimativa do número de casos seja de 1.000 pessoas?

(c) Quanto tempo será preciso para a doença ser erradicada? Ou seja, para que a estimativa do número de casos seja inferior a 1.

10. O acidente do reator nuclear de Chernobyl, URSS, em 1986, lançou na atmosfera grande quantidade do isótopo radioativo estrôncio-90, cuja meia-vida (tempo necessário para que uma substância seja reduzida à metade da quantidade inicial) é de vinte e oito anos, ou seja, sendo f a função exponencial de base a que modele a quantidade de estrôncio-90 em função do tempo, tem-se $\log_a \frac{f(0)}{2} = 28$. Supondo ser este isótopo a única contaminação radioativa e sabendo que o local poderá ser considerado seguro quando a quantidade de estrôncio-90 se reduzir, por desintegração, a $\frac{1}{16}$ da quantidade inicialmente presente, em que ano o local poderá ser habitado novamente?

11. A *escala logarítmica* é utilizada para representar certas grandezas ao invés da convencional *escala linear*. Um exemplo é a escala Richter de terremotos. Nessa escala, a magnitude m de um terremoto é expressa em graus e medida através da função real:

$$m(E) = \frac{2}{3} \log \left(\frac{E}{E_0} \right).$$

Onde E é a energia liberada no terremoto, medida em kWh, e $E_0 = 10^{-3}$ kWh. Responda o que se pede no próximo slide.

Observação

O uso da calculadora só é permitido para o cálculo de potências de base 10 e expoente racional em forma de fração de números inteiros. Expresse esse resultado com duas casas decimais.

(a) Há 10 anos o Japão passou pelo seu terremoto de maior magnitude. Esse terremoto gerou um tsunami que atingiu a cidade de Fukushima, causando um acidente nuclear na usina que havia lá. O terremoto atingiu $9{,}1^\circ$ na escala Richter.
Em novembro deste ano, o maior terremoto do nosso estado completará 35 anos. Ele ocorreu na cidade de João Câmara e atingiu $5{,}1^\circ$ na escala Richter.
Calcule a energia liberada em cada um desses terremotos usando uma calculadora somente uma vez para cada uma das situações;

(b) Calcule a razão entre as energias liberadas em um terremoto de grau $n+1$ e outro de grau n, ambos na escala Richter, a fim de responder qual a relação entre elas.

Desafios

Para os exercícios abaixo, use somente as propriedades a seguir de inequações (se precisar, veja com mais detalhes na seção Inequação do 1º grau):

- $a < b; c > 0 \implies a \cdot c < b \cdot c;$
- Para $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$. Se $a < b$ e $c < d$, então $ac < bd$.

12. Mostre que a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.
13. Mostre que a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Bibliografia

[1] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C.
A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1.
9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.