

# Capítulo 3

## Matemática Elementar

Funções Reais e Gráficos

2 de março de 2023

Igor Oliveira

`matematicaelementar@imd.ufrn.br`

Instituto Metrôpole Digital  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Natal-RN

# Índice



Introdução  
Definição de Função  
Atividade Online  
Funções Compostas  
Atividade Online  
Função Inversa  
Atividade Online  
Injetividade e Sobrejetividade  
Atividade Online  
Fórmulas e Funções  
Atividade Online  
Exercícios  
Bibliografia  
Gráfico de Função Real  
Gráficos e Transformações no Plano  
Atividade Online  
Crescimento e Pontos de Extremo  
Atividade Online  
Exercícios

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Crescimento e Pontos

# Apresentação da Aula

Considere as funções

$$\begin{array}{ccc} p: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} q: \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

As funções  $p$  e  $q$  são inversas uma da outra?

# Apresentação da Aula

Considere as funções

$$\begin{array}{ccc} p: & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} q: & \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto \sqrt{x} \end{array}.$$

As funções  $p$  e  $q$  são inversas uma da outra?  
Elas são bijetivas?

# Apresentação da Aula

Considere as funções

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{e} \quad q: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \quad \quad \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

As funções  $p$  e  $q$  são inversas uma da outra?

Elas são bijetivas?

Quais outras informações podemos dizer acerca dessas funções?

# O que É uma Função?

## Definição 1

Sejam  $X$  e  $Y$  dois conjuntos quaisquer.

Uma função é uma relação  $f : X \rightarrow Y$  que, a cada elemento  $x \in X$ , associa um e somente um elemento  $y \in Y$ .

Nesse caso:

- (i) Os conjuntos  $X$  e  $Y$  são chamados domínio e contradomínio de  $f$ , respectivamente;
- (ii) O conjunto

$$f(X) = \{y \in Y ; \text{ existe } x \in X \text{ onde } f(x) = y\} \subseteq Y$$

é chamado imagem de  $f$ ;

- (iii) Dado  $x \in X$ , o (único) elemento  $y = f(x) \in Y$  correspondente é chamado imagem de  $x$ .

# O que É uma Função?

Dessa forma, uma função é um terno constituído por: domínio, contradomínio e lei de associação (dos elementos do domínio com os do contradomínio). Precisamos desses três elementos para que uma função seja bem definida. Poderíamos definir função da seguinte forma:

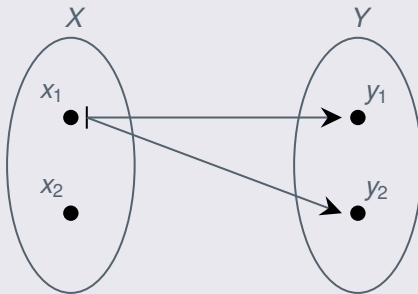
Para que uma relação  $f : X \rightarrow Y$  seja uma função, ela deve satisfazer a duas condições fundamentais:

- (I) Estar bem definida em todo elemento do domínio (existência);
- (II) Não fazer corresponder mais de um elemento do contradomínio a cada elemento do domínio (unicidade).

# O que É uma Função?

## Exemplo 2

Sejam  $X = \{x_1, x_2\}$ ,  $Y = \{y_1, y_2\}$  e a relação  $f : X \rightarrow Y$  definida por:



Qual(is) o(s) problema(s) com essa “função”?



# O que É uma Função?

## Definição 3

Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é chamada de função real se seus valores são números reais; isto é,  $Y \subseteq \mathbb{R}$ . Quando a variável independente assume valores reais – isto é,  $X \subseteq \mathbb{R}$  –, diz-se que  $f$  é uma função de variável real. Nesse caso, pode-se utilizar a notação  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y$  para enfatizar que o domínio  $D$  da função é subconjunto de  $\mathbb{R}$ .

# O que É uma Função?

## Definição 3

Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é chamada de função real se seus valores são números reais; isto é,  $Y \subseteq \mathbb{R}$ . Quando a variável independente assume valores reais – isto é,  $X \subseteq \mathbb{R}$  –, diz-se que  $f$  é uma função de variável real. Nesse caso, pode-se utilizar a notação  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y$  para enfatizar que o domínio  $D$  da função é subconjunto de  $\mathbb{R}$ .

A menos que se diga o contrário, trabalharemos, a partir desse momento, com funções reais de variável real, e, por simplicidade, chamaremos essas funções simplesmente de funções reais.

# O que É uma Função?

## Exemplo 4

Considere as funções reais

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Qual o domínio, contradomínio e a lei de associação de  $p$  e  $q$ ?

# O que É uma Função?

## Exemplo 4

Considere as funções reais

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

Qual o domínio, contradomínio e a lei de associação de  $p$  e  $q$ ?

## Exemplo 5

Seja  $\mathcal{I}_X: X \rightarrow X$  uma função tal que  $\mathcal{I}_X(x) = x$  para todo  $x \in X$ . Chamamos  $\mathcal{I}_X$  de função identidade do conjunto  $X$ .

Atividade 17 - Como Reconhecer Funções a Partir de Tabelas

Atividade 18 - Problemas de Domínio de Funções

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

9 Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

## Definição 6

Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : U \rightarrow V$  duas funções, com  $Y \subseteq U$ . A função composta de  $g$  com  $f$  é a função denotada por  $g \circ f$ , com domínio em  $X$  e contradomínio em  $V$ , que a cada elemento  $x \in X$  faz corresponder o elemento  $v = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in V$ . Isto é:

$$\begin{array}{ccccccc} g \circ f : & X & \rightarrow & Y \subseteq U & \rightarrow & V \\ & x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array} .$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

10 Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

## Exemplo 7

Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Mostre que  $f \circ \mathcal{I}_X = f$  e  $\mathcal{I}_Y \circ f = f$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

11 Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

# Composição de Funções

## Exemplo 7

Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Mostre que  $f \circ \mathcal{I}_X = f$  e  $\mathcal{I}_Y \circ f = f$ .

## Exemplo 8

Qual função resulta da composição  $p \circ q$ ?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

11 Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online



## Proposição 9 (Associatividade da composição de funções)

Considere  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : U \rightarrow V$  e  $h : A \rightarrow B$  funções, com  $B \subseteq U$  e  $V \subseteq X$ . Vale a seguinte igualdade:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

12 Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Atividade 19 - Encontre Funções Compostas  
Atividade 20 - Modele com Funções Compostas

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

13 Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

## Definição 10

Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é invertível se existe uma função  $g : Y \rightarrow X$  tal que

(i)  $f \circ g = \mathcal{I}_Y$ ;

(ii)  $g \circ f = \mathcal{I}_X$ .

Nesse caso, a função  $g$  é dita função inversa de  $f$  e denotada por  $g = f^{-1}$ .

## Exemplo 11

A função  $q$  é inversa de  $p$ ?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

15 Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

## Exemplo 11

A função  $q$  é inversa de  $p$ ?

Esse exemplo ilustra a importância de verificarmos as duas condições para que tenhamos uma função inversa.

## Atividade 21 - Verifique Funções Inversas

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

16 Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

47

Crescimento e Pontos

# Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas



## Definição 12

Considere uma função  $f : X \rightarrow Y$ .

- (i)  $f$  é sobrejetiva se, para todo  $y \in Y$ , existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ ;
- (ii)  $f$  é injetiva se  $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ ;
- (iii)  $f$  é bijetiva se é sobrejetiva e injetiva.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

17 Injetividade e Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

# Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

## Definição 12

Considere uma função  $f : X \rightarrow Y$ .

- (i)  $f$  é sobrejetiva se, para todo  $y \in Y$ , existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ ;
- (ii)  $f$  é injetiva se  $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ ;
- (iii)  $f$  é bijetiva se é sobrejetiva e injetiva.

Há, ainda, formas alternativas de enunciar as definições acima:

- ▶  $f$  é sobrejetiva se, e somente se,  $f(X) = Y$ ;
- ▶  $f$  é injetiva se, e somente se,  $x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ ;
- ▶  $f$  é injetiva se, e somente se, para todo  $y \in f(X)$ , existe um único  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ ;
- ▶  $f$  é bijetiva se, e somente se, para todo  $y \in Y$ , existe um único  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

17 Injetividade e Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online



# Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas

## Exemplo 13

As funções  $p$  e  $q$  são sobrejetivas, injetivas ou bijetivas?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

18 Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

# Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas



## Teorema 14

*Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é invertível se, e somente se, é bijetiva.*

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

19 Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

47

Crescimento e Pontos

# Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas



## Teorema 14

*Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é invertível se, e somente se, é bijetiva.*

## Exemplo 15

Decorre do Teorema 14 e do Exemplo 13 que as funções  $p$  e  $q$  não são invertíveis.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

19 Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

47

Crescimento e Pontos

# Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas



## Teorema 16

*Considere a função  $f : X \rightarrow Y$ . Então existe um subconjunto  $Y' \subseteq Y$ , tal que  $f' : X \rightarrow Y'$ , definida por  $f'(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ , é sobrejetiva.*

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

20

Injetividade e Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

47

Crescimento e Pontos

# Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas



## Teorema 16

Considere a função  $f : X \rightarrow Y$ . Então existe um subconjunto  $Y' \subseteq Y$ , tal que  $f' : X \rightarrow Y'$ , definida por  $f'(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ , é sobrejetiva.

## Teorema 17

Considere a função  $f : X \rightarrow Y$ . Então existe um subconjunto  $X' \subseteq X$ , tal que  $f' : X' \rightarrow Y$ , definida por  $f'(x) = f(x)$  para todo  $x \in X'$ , é injetiva.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

20 Injetividade e Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

47

Crescimento e Pontes

# Funções Injetivas, Sobrejetivas e Bijetivas



Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

20 Injetividade e Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função Real

Gráficos e Transformações no Plano

Atividade Online

47

## Teorema 16

*Considere a função  $f : X \rightarrow Y$ . Então existe um subconjunto  $Y' \subseteq Y$ , tal que  $f' : X \rightarrow Y'$ , definida por  $f'(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ , é sobrejetiva.*

## Teorema 17

*Considere a função  $f : X \rightarrow Y$ . Então existe um subconjunto  $X' \subseteq X$ , tal que  $f' : X' \rightarrow Y$ , definida por  $f'(x) = f(x)$  para todo  $x \in X'$ , é injetiva.*

## Exemplo 18

Restrinja o domínio ou o contradomínio de  $p$  e  $q$  a fim de obter funções bijetivas com as mesmas leis de formação.

Atividade 22 - Determine se uma Função É Inversível  
Atividade 23 - Restrinja os Domínios de Funções para  
Torná-las Inversíveis

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

21 Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

# Fórmulas e Funções

É muito importante não pensar que uma função é uma fórmula.  
Considere as funções

$$p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad p_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} .$$

Essas funções são iguais?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

22 Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online



É muito importante não pensar que uma função é uma fórmula.  
Considere as funções

$$p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad p_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} .$$

Essas funções são iguais?

NÃO! Note que  $p_2$  é bijetiva e  $p_1$  não é, mesmo tendo a mesma fórmula.

Além disso, funções podem ser definidas por mais de uma fórmula, como na função  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

22 Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

## Atividade 24 - Cálculo de Funções Definidas por Partes

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

23

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

47

Crescimento e Pontos

1. Em cada um dos itens abaixo, defina uma função com a lei de formação dada (indicando domínio e contradomínio). Verifique se é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva, a função

- (a) Que a cada ponto do plano cartesiano associa a distância desse ponto à origem do plano;
- (b) Que a cada dois números naturais associa seu mdc;
- (c) Que a cada polinômio (não nulo) com coeficientes reais associa seu grau;
- (d) Que a cada figura plana fechada e limitada associa a sua área;
- (e) Que a cada subconjunto de  $\mathbb{R}$  associa seu complementar;
- (f) Que a cada subconjunto finito de  $\mathbb{N}$  associa seu número de elementos;
- (g) Que a cada subconjunto não vazio de  $\mathbb{N}$  associa seu menor elemento.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

24 Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

2. Considere a função  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que

$$f(n) = \begin{cases} \frac{-n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Mostre que  $f$  é bijetiva.

3. Considere a função  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 2, & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{1}{1-x}, & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Mostre que  $f$  é bijetiva.

4. Considere a função  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  tal que  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

Responda as seguintes perguntas apresentando as respectivas justificativas.

- a)  $f$  é injetiva?
- b)  $f$  é sobrejetiva?

5. Considere as funções reais  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$ . Demonstre, ou refute com um contraexemplo, as afirmações abaixo:

- a) Se  $f$  e  $g$  são injetivas, então  $(g \circ f)$  é injetiva;
- b) Se  $(g \circ f)$  é injetiva então  $f$  e  $g$  são injetivas;
- c) Se  $f$  e  $g$  são sobrejetivas, então  $(g \circ f)$  é sobrejetiva;
- d) Se  $(g \circ f)$  é sobrejetiva então  $f$  e  $g$  são sobrejetivas.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

26 Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

6. Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função e seja  $A$  um subconjunto de  $X$ .  
Define-se

$$f(A) = \{f(x) ; x \in A\} \subseteq Y.$$

Se  $A$  e  $B$  são subconjuntos de  $X$ :

- (a) Mostre que  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ;
- (b) Mostre que  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ ;
- (c) É possível afirmar que  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  para todos  $A, B \subseteq X$ ? Justifique.
- (d) Determine que condições deve satisfazer  $f$  para que a afirmação feita no item (c) seja verdadeira.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

27 Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

7. Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Dado  $y \in Y$ , definimos a contraimagem ou imagem inversa de  $y$  como sendo o seguinte subconjunto de  $X$ :

$$f^{-1}(y) = \{x \in X ; f(x) = y\}.$$

- (a) Se  $f$  é injetiva e  $y$  é um elemento qualquer de  $Y$ , o que se pode afirmar sobre a imagem inversa  $f^{-1}(y)$ ?
- (b) Se  $f$  é sobrejetiva e  $y$  é um elemento qualquer de  $Y$ , o que se pode afirmar sobre a imagem inversa  $f^{-1}(y)$ ?
- (c) Se  $f$  é bijetiva e  $y$  é um elemento qualquer de  $Y$ , o que se pode afirmar sobre a imagem inversa  $f^{-1}(y)$ ?

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

28 Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

8. Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Dado  $A \subseteq Y$ , definimos a contraimagem ou imagem inversa de  $A$  como sendo o seguinte subconjunto de  $X$ :

$$f^{-1}(A) = \{x \in X ; f(x) \in A\}.$$

Mostre que

(a)  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B);$

(b)  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

29 Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online



# Exercícios - Desafios

9. Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Mostre que, se existem  $g_1 : Y \rightarrow X$  e  $g_2 : Y \rightarrow X$  tais que  $f \circ g_1 = \mathcal{I}_Y$  e  $g_2 \circ f = \mathcal{I}_X$ , então  $g_1 = g_2$  (portanto, neste caso,  $f$  será invertível).

10. Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Mostre que

(a)  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ , para todo  $B \subseteq Y$ ;

(b)  $f(f^{-1}(B)) = B$ , para todo  $B \subseteq Y$  se, e somente se,  $f$  é sobrejetiva.

11. Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Mostre que

(a)  $f(f^{-1}(A)) \supseteq A$ , para todo  $A \subseteq X$ ;

(b)  $f(f^{-1}(A)) = A$ , para todo  $A \subseteq X$  se, e somente se,  $f$  é injetiva.

12. Mostre que existe uma injeção  $f : X \rightarrow Y$  se, e somente se, existe uma sobrejeção  $g : Y \rightarrow X$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

30 Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

- [1] IEZZI, Gelson; et al.  
*Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 1 - Conjuntos e Funções.*  
São Paulo: Editora Atual.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

31 Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

47

Crescimento e Pontes

# Função Real



Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

32

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

47

Crescimento e Pontes

## Definição 19

O gráfico de uma função real é o seguinte subconjunto do plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ :

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in D, y = f(x)\}.$$

Em outras palavras, o gráfico de uma função  $f$  é o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem sua lei de associação.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

33 Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

47 Crescimento e Pontos

## Exemplo 20

Esboce o gráfico da função real

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

## Exemplo 21

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \sin x + 1,$$

$$h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

35 Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

47 Crescimento e Pontos

## Exemplo 21

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \sin x + 1,$$

$$h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = f(x + b) + a$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro  $b$ , e uma translação vertical determinada pelo parâmetro  $a$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

35

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

47

Crescimento e Pontos

## Exemplo 21

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \sin x + 1,$$

$$h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = f(x + b) + a$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro  $b$ , e uma translação vertical determinada pelo parâmetro  $a$ .

► O translado vertical será:

- No sentido positivo do eixo  $y$  (para cima), se  $a > 0$ ;
- No sentido negativo do eixo  $y$  (para baixo), se  $a < 0$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

35

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

47

Crescimento e Pontes



## Exemplo 21

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \sin x + 1,$$

$$h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = f(x + b) + a$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro  $b$ , e uma translação vertical determinada pelo parâmetro  $a$ .

- ▶ O translado vertical será:
  - ▶ No sentido positivo do eixo  $y$  (para cima), se  $a > 0$ ;
  - ▶ No sentido negativo do eixo  $y$  (para baixo), se  $a < 0$ .
- ▶ O translado horizontal será:
  - ▶ No sentido positivo do eixo  $x$  (para a direita), se  $b < 0$ ;
  - ▶ No sentido negativo do eixo  $x$  (para a esquerda), se  $b > 0$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

35

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

47

Crescimento e Pontos

## Exemplo 22

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x,$$

$$h(x) = f(2 \cdot x) = \sin(2 \cdot x).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

36 Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

47 Crescimento e Pontos

## Exemplo 22

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x,$$

$$h(x) = f(2 \cdot x) = \sin(2 \cdot x).$$

## Exemplo 23

Compare os gráficos das funções reais  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sin x,$$

$$g(x) = -1 \cdot f(x) = -1 \cdot \sin x,$$

$$h(x) = f(-1 \cdot x) = \sin(-1 \cdot x).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

36 Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

47 Crescimento e Pontos

# Dilatações de gráficos



Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro  $d$ , e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro  $c$ . Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

37

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

47

Atividade Online

Crescimento e Pontos

# Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro  $d$ , e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro  $c$ . Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

- ▶ A dilatação vertical será:
  - ▶ Um esticamento se  $c > 1$ ;
  - ▶ Um encolhimento se  $0 < c < 1$ ;
  - ▶ Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo  $x$  se  $c < -1$ ;
  - ▶ Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo  $x$  se  $-1 < c < 0$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

37

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

47

Atividade Online

Crescimento e Pontos

# Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real  $g$  é tal que  $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$ , então o gráfico de  $g$  pode ser obtido, do gráfico de  $f$ , através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro  $d$ , e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro  $c$ . Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

- ▶ A dilatação vertical será:
  - ▶ Um esticamento se  $c > 1$ ;
  - ▶ Um encolhimento se  $0 < c < 1$ ;
  - ▶ Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo  $x$  se  $c < -1$ ;
  - ▶ Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo  $x$  se  $-1 < c < 0$ .
- ▶ A dilatação horizontal será:
  - ▶ Um encolhimento se  $d > 1$ ;
  - ▶ Um esticamento se  $0 < d < 1$ ;
  - ▶ Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo  $y$  se  $d < -1$ ;
  - ▶ Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo  $y$  se  $-1 < d < 0$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

37

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

47

Crescimento e Pontos

Atividade 10 - Deslocamento de Funções  
Atividade 11 - Como Transformar Funções  
Veja o desempenho na Missão Álgebra II.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

## Definição 24

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que

- (i)  $f$  é monótona (estritamente) crescente se, para todos  $x_1, x_2 \in D$ ,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2);$$

- (ii)  $f$  é monótona não decrescente se, para todos  $x_1, x_2 \in D$ ,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2);$$

- (iii)  $f$  é monótona (estritamente) decrescente se, para todos  $x_1, x_2 \in D$ ,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2);$$

- (iv)  $f$  é monótona não crescente se, para todos  $x_1, x_2 \in D$ ,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online



# Funções Monótonas



Nas mesmas condições da Definição 24 , se  $f(x) = k \in \mathbb{R}$  para todo  $x \in D$ , dizemos que  $f$  é constante.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Nas mesmas condições da Definição 24, se  $f(x) = k \in \mathbb{R}$  para todo  $x \in D$ , dizemos que  $f$  é constante.

Se  $I \subseteq D$  é um intervalo, definimos a monotonicidade de  $f$  no intervalo  $I$  de maneira análoga ao feito anteriormente. Por exemplo:

$f$  é monótona (estritamente) crescente em  $I$  se, para todos  $x_1, x_2 \in I$ ,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

## Definição 25

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.

- (i)  $f$  é limitada superiormente se existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) \leq M$ , para todo  $x \in D$ ;
- (ii)  $f$  é limitada inferiormente se existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) \geq M$ , para todo  $x \in D$ ;
- (iii)  $x_0 \in D$  é um ponto de máximo absoluto de  $f$  se  $f(x_0) \geq f(x)$ , para todo  $x \in D$ ;
- (iv)  $x_0 \in D$  é um ponto de mínimo absoluto de  $f$  se  $f(x_0) \leq f(x)$ , para todo  $x \in D$ ;
- (v)  $x_0 \in D$  é um ponto de máximo local de  $f$  se existe  $r > 0$  tal que  $f(x_0) \geq f(x)$ , para todo  $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ ;
- (vi)  $x_0 \in D$  é um ponto de mínimo local de  $f$  se existe  $r > 0$  tal que  $f(x_0) \leq f(x)$ , para todo  $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

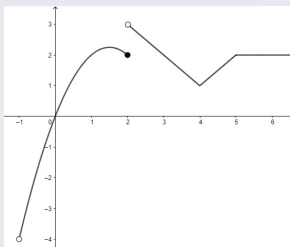
Atividade Online

# Exemplo

## Exemplo 26

A função  $h : (-1; 6] \rightarrow \mathbb{R}$ , cujo gráfico é esboçado abaixo, é

$$\text{definida por } h(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ |x - 4| + 1 & \text{se } 2 < x \leq 5 \\ 2 & \text{se } x > 5 \end{cases}.$$



Determine os intervalos de monotonicidade e os extremos de  $h$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

Atividade 12 - Intervalos Crescentes e Decrescentes

Atividade 13 - Mínimos e Máximos Relativos

Atividade 14 - Mínimos e Máximos Absolutos

Veja o desempenho na Missão Álgebra I.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

13. Considere a função  $g : [0; 5] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 4x - x^2 & \text{se } x < 3 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}.$$

Determine as soluções de:

- (a)  $g(x) = -1$ ;
- (b)  $g(x) = 0$ ;
- (c)  $g(x) = 3$ ;
- (d)  $g(x) = 4$ ;
- (e)  $g(x) < 3$ ;
- (f)  $g(x) \geq 3$ .

**14.** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

- (a) Se  $f$  é limitada superiormente, então  $f$  tem pelo menos um máximo absoluto;
- (b) Se  $f$  é limitada superiormente, então  $f$  tem pelo menos um máximo local;
- (c) Se  $f$  tem um máximo local, então  $f$  tem um máximo absoluto;
- (d) Todo máximo local de  $f$  é máximo absoluto;
- (e) Todo máximo absoluto de  $f$  é máximo local;
- (f) Se  $x_0$  é o ponto de extremo local de  $f$ , então é ponto de extremo local de  $f^2$ , onde  $(f^2)(x) = f(x) \cdot f(x)$ ;
- (g) Se  $x_0$  é o ponto de extremo local de  $f^2$ , então é ponto de extremo local de  $f$ .

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online

**15.** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

- (a) Se  $f$  e  $g$  são crescentes, então a composta  $f \circ g$  é uma função crescente;
- (b) Se  $f$  e  $g$  são crescentes, então o produto  $f \cdot g$  é uma função crescente, onde  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ;
- (c) Se  $f$  é crescente em  $A \subseteq \mathbb{R}$  e em  $B \subseteq \mathbb{R}$ , então  $f$  é crescente em  $A \cup B \subseteq \mathbb{R}$ .

**16.** Mostre que a função inversa de uma função crescente é também uma função crescente. E a função inversa de uma função decrescente é decrescente.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online



- [1] IEZZI, Gelson; et al.  
*Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 1 -  
Conjuntos e Funções.*  
São Paulo: Editora Atual.

Matemática Elementar

Igor Oliveira

Introdução

Definição de Função

Atividade Online

Funções Compostas

Atividade Online

Função Inversa

Atividade Online

Injetividade e  
Sobrejetividade

Atividade Online

Fórmulas e Funções

Atividade Online

Exercícios

Bibliografia

Gráfico de Função  
Real

Gráficos e  
Transformações no  
Plano

Atividade Online