Capítulo 3

Matemática Elementar
Matrizes e Sistemas Lineares

28 de abril de 2025

Igor Oliveira
matematicaelementar@imd.ufrn.br

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Índice

Apresentação
Matrizes
Atividade Online
Operações com Matrizes
Atividade Online
Sistemas Lineares
Atividade Online
Operações Elementares
Atividade Online
Matrizes Quadradas
Atividade Online
Determinante
Atividade Online
Determinante
Exercícios
Bibliografia

Apresentação da Aula

Motivação

Matrizes são, fundamentalmente, tabelas numéricas sobre as quais se definem certas operações algébricas, útil para armazenar vários dados em um só elemento. Além disso, as matrizes se aplicam ao estudo dos sistemas lineares (conforme veremos neste capítulo), bem como desempenham um papel decisivo no estudo das transformações lineares, as quais são justamente as funções estudadas na Álgebra Linear.

Definição de Matriz

Definição 1

Sejam $m, n \in \mathbb{N}^*$. Uma matriz (real) do tipo $m \times n$ (lê-se: m por n) é uma "tabela" disposta em m linhas e n colunas. Denotamos os números reais que formam a i-ésima linha de uma matriz A por $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ e sua j-ésima coluna por $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$. Assim, escrevemos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Chamamos de entradas, de uma matriz A, os reais a_{ij} que a compõem. Poderemos indicar uma matriz A do tipo $m \times n$ com entradas a_{ij} por

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

ou, simplesmente, $A = (a_{ij})$.

Exemplo 2

As matrizes $A = (a_{ij})_{3\times 2}$, em que $a_{ij} = i + j$ e, $B = (b_{ij})_{2\times 4}$, em que $b_{ij} = i^j$, são:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

Definição de Matriz

Definição 3

Uma matriz A do tipo $n \times n$, é dita quadrada de ordem n. O conjunto formado por suas entradas a_{ii} é chamado de diagonal de A. O conjunto formado pelas entradas a_{ij} tais que $i + j = n + 1$ é chamado de diagonal secundária de A.
Uma matriz do tipo $m \times n$ cujas entradas são todas iguais a zero chama-se nula e será denotada por $0_{m \times n}$.

Definição de Matriz

Definição 3

Uma matriz A do tipo $n \times n$, é dita quadrada de ordem n. O conjunto formado por suas entradas a_{ii} é chamado de diagonal de A. O conjunto formado pelas entradas a_{ij} tais que $i + j = n + 1$ é chamado de diagonal secundária de A.
Uma matriz do tipo $m \times n$ cujas entradas são todas iguais a zero chama-se nula e será denotada por $0_{m \times n}$.

Exemplo 4

Dada a matriz A quadrada de ordem 3 abaixo, sua diagonal é formada pelos números 2, 4 e 1. A diagonal secundária é formada por 1, 4 e 4.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Atividade Online 17 - Use Matrizes para Representar Dados

Definição 5 (Produto por escalar e adição de matrizes)

Dadas matrizes de mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos o produto por escalar λA e a adição $A + B$ por:

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

e

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Operações com Matrizes

Exemplo 6

Calcule:

$$A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}.$$

Proposição 7 (Propriedades do produto por escalar e da adição)

Sejam A, B e C matrizes de mesmo tipo $m \times n$, e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se:

i. Comutatividade da adição: $A + B = B + A$;

ii. Associatividade da adição: $A + (B + C) = (A + B) + C$;

iii. Elemento neutro da adição: $A + 0_{m\times n} = A$;

iv. Existência do oposto aditivo: $A + (-A) = 0_{m\times n}$;

v. Associatividade da multiplicação por escalar: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;

vi. Elemento neutro da multiplicação por escalar: $1 \cdot A = A$;

vii. Distributividade, de uma em relação à outra: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ e $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

Operações com Matrizes

Definição 8 (Multiplicação de matrizes)

Dadas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, onde o número de colunas de A coincide com o número de linhas de B. Definimos o produto AB como a matriz $P = (p_{ij})_{m \times p}$, cujas entradas são:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}.$$

Definição 8 (Multiplicação de matrizes)

Dadas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$, onde o número de colunas de A coincide com o número de linhas de B. Definimos o produto AB como a matriz $P = (p_{ij})_{m\times p}$, cujas entradas são:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Exemplo 9

Calcule:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Proposição 10 (Propriedades do produto de matrizes)

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$, $C = (c_{ij})_{p\times q}$, $D = (d_{ij})_{n\times p}$ e $E = (e_{ij})_{m\times n}$. Tem-se:

i. Associatividade: $A(BC) = (AB)C$;

ii. Distributividade à esquerda, em relação a soma: $A(B+D) = AB + AD$;

iii. Distributividade à direita, em relação a soma: $(A+E)B = AB + EB$.

Observação 11

Dadas duas matrizes A e B quadradas e de mesma ordem, os dois produtos AB e BA estão bem definidos. No entanto, de modo geral, eles NÃO SÃO IGUAIS, isto é, O PRODUTO DE MATRIZES QUADRADAS DE MESMA ORDEM NÃO É COMUTATIVO. Quando, excepcionalmente, ocorre a igualdade $AB = BA$, dizemos que A e B comutam.

Observação 11

Dadas duas matrizes A e B quadradas e de mesma ordem, os dois produtos AB e BA estão bem definidos. No entanto, de modo geral, eles NÃO SÃO IGUAIS, isto é, O PRODUTO DE MATRIZES QUADRADAS DE MESMA ORDEM NÃO É COMUTATIVO. Quando, excepcionalmente, ocorre a igualdade $AB = BA$, dizemos que A e B comutam.

Exemplo 12

Comprove a observação anterior comparando o produto das matrizes quadradas do Exemplo 9 com o produto abaixo:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Atividade Online

Atividade Online 18 - Multiplicação de Matrizes por Números Escalares
Atividade Online 19 - Some e Subtraia Matrizes
Atividade Online 20 - Use Matrizes para Manipular Dados
Atividade Online 21 - Multiplique Matrizes

Um sistema de m equações lineares nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pode ser representado pelas equações

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ (\ldots) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Tal sistema é equivalente à equação matricial $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, dizemos que A é a matriz do sistema. Quando $B = 0_{m\times 1}$, o sistema é dito homogêneo. Observe que todo sistema homogêneo admite a solução $X = 0_{n\times 1}$, dita trivial.

Definição 13 (Sistemas lineares equivalentes)

Dois sistemas lineares são ditos equivalentes quando têm o mesmo conjunto solução.

Definição 13 (Sistemas lineares equivalentes)

Dois sistemas lineares são ditos equivalentes quando têm o mesmo conjunto solução.

Definição 14 (Matriz aumentada de um sistema linear)

Dado um sistema linear $AX = B$, define-se a sua matriz aumentada $(A|B)$, como sendo a matriz obtida "posicionando" a matriz B à direita da matriz A, isto é,

$$(A|B) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Exemplo 15

Qual a matriz aumentada do sistema linear abaixo?

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Atividade Online

Atividade Online 22 - Represente Sistemas Lineares com Matrizes

Operações Elementares sobre Matrizes

Algumas operações sobre as linhas de uma matriz são ditas elementares. São elas:

- $(l_i \leftrightarrow l_j)$: Troca de posição entre duas linhas l_i e l_j;
- $(l_i \rightarrow \lambda l_i)$: Multiplicação de uma linha l_i por um escalar $\lambda \neq 0$;
- $(l_j \rightarrow l_j + \lambda l_i)$: Substituição de uma linha l_j por $l_j + \lambda l_i$, sendo $\lambda \neq 0$.

Operações Elementares sobre Matrizes

Algumas operações sobre as linhas de uma matriz são ditas elementares. São elas:

- ($l_i \leftrightarrow l_j$): Troca de posição entre duas linhas l_i e l_j;
- ($l_i \to \lambda l_i$): Multiplicação de uma linha l_i por um escalar $\lambda \neq 0$;
- ($l_j \to l_j + \lambda l_i$): Substituição de uma linha l_j por $l_j + \lambda l_i$, sendo $\lambda \neq 0$.

Definição 16 (Equivalência por linhas)

Diz-se que uma matriz B é linha equivalente a uma matriz A quando B é obtida de A efetuando-se nesta uma sequência de operações elementares.

Algumas operações sobre as linhas de uma matriz são ditas elementares. São elas:

- $(l_i \leftrightarrow l_j)$: Troca de posição entre duas linhas l_i e l_j;
- $(l_i \to \lambda l_i)$: Multiplicação de uma linha l_i por um escalar $\lambda \neq 0$;
- $(l_j \to l_j + \lambda l_i)$: Substituição de uma linha l_j por $l_j + \lambda l_i$, sendo $\lambda \neq 0$.

Definição 16 (Equivalência por linhas)

Diz-se que uma matriz B é linha equivalente a uma matriz A quando B é obtida de A efetuando-se nesta uma sequência de operações elementares.

Proposição 17

Dois sistemas lineares $AX = B$ e $A'X = B'$ são equivalentes se suas matrizes aumentadas $(A|B)$ e $(A'|B')$ são linha equivalentes.

Operações Elementares sobre Matrizes

Definição 18 (Matriz escalonada)

Diz-se que uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é escalonada quando cumpre as seguintes condições:

- O primeiro elemento não-nulo de uma linha está à esquerda do primeiro elemento não-nulo da linha subsequente;
- As linhas nulas, caso existam, estão abaixo das demais.

Definição 18 (Matriz escalonada)

Diz-se que uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é escalonada quando cumpre as seguintes condições:

- O primeiro elemento não-nulo de uma linha está à esquerda do primeiro elemento não-nulo da linha subsequente;
- As linhas nulas, caso existam, estão abaixo das demais.

Para resolvermos um sistema linear, fazemos o escalonamento da matriz aumentada do sistema a fim de obtermos uma matriz escalonada que seja linha equivalente à matriz aumentada do sistema. Esse procedimento é chamado de Método de Gauss ou Eliminação Gaussiana.

Exemplo 19

Encontre o conjunto solução para o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 4x - 3y + 5z = 4 \end{cases}.$$

Exemplo 19

Encontre o conjunto solução para o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 4x - 3y + 5z = 4 \end{cases}.$$

Exemplo 20

Encontre o conjunto solução para o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 4t = 9 \\ x + y - z + 2t = 7 \\ -x + 2y + z - t = 3 \\ 4y - z + 3t = 13 \end{cases}.$$

Atividade Online

Atividade Online 23 - Operações sobre Linhas de uma Matriz

Tipos de Matrizes Quadradas

Definição 21 (Matrizes triangulares e diagonais)

Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é dita triangular, quando ocorre uma das possibilidades:

$$a_{ij} = 0 \;\; \forall i > j \quad \text{ou} \quad a_{ij} = 0 \;\; \forall i < j.$$

No primeiro caso, ela é dita triangular superior e, no segundo, triangular inferior. Uma matriz que é triangular superior e inferior é dita diagonal.

Tipos de Matrizes Quadradas

Definição 21 (Matrizes triangulares e diagonais)

Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é dita triangular, quando ocorre uma das possibilidades:

$$a_{ij} = 0 \ \ \forall i > j \quad \text{ou} \quad a_{ij} = 0 \ \ \forall i < j.$$

No primeiro caso, ela é dita triangular superior e, no segundo, triangular inferior. Uma matriz que é triangular superior e inferior é dita diagonal.

Exemplo 22

As matrizes A, B e C abaixo são, respectivamente, triangular superior, inferior e diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definição 23 (Matriz Identidade)

Uma matriz diagonal $n \times n$ cujas entradas não obrigatoriamente nulas são todas iguais a 1 é chamada de matriz identidade de ordem n, a qual denota-se por I_n ou, simplesmente, por I.

Definição 23 (Matriz Identidade)

Uma matriz diagonal $n \times n$ cujas entradas não obrigatoriamente nulas são todas iguais a 1 é chamada de matriz identidade de ordem n, a qual denota-se por I_n ou, simplesmente, por I.

A matriz identidade de ordem n é o elemento neutro da multiplicação de matrizes quadradas, pois, para toda matriz quadrada A de ordem n, vale a igualdade:

$$AI = IA = A.$$

Além disso, dada uma matriz $B_{n\times m}$, vale também:

$$BI_m = I_nB = B.$$

Tipos de Matrizes Quadradas

Definição 24 (Matrizes invertíveis)

Diz-se que uma matriz quadrada A é invertível, quando existe uma matriz quadrada B, de mesma ordem que A, tal que

$$AB = BA = I.$$

Tipos de Matrizes Quadradas

Definição 24 (Matrizes invertíveis)

Diz-se que uma matriz quadrada A é invertível, quando existe uma matriz quadrada B, de mesma ordem que A, tal que

$$AB = BA = I.$$

Prova-se que A, quando invertível, possui uma única matriz inversa. Tal matriz é dita a inversa de A, e denotada por A^{-1}.

Definição 24 (Matrizes invertíveis)

Diz-se que uma matriz quadrada A é invertível, quando existe uma matriz quadrada B, de mesma ordem que A, tal que

$$AB = BA = I.$$

Prova-se que A, quando invertível, possui uma única matriz inversa. Tal matriz é dita a inversa de A, e denotada por A^{-1}.

Exemplo 25

Verifique que as matrizes abaixo são invertíveis multiplicando-as.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para calcular a inversa de uma matriz A, escalona-se a matriz aumentada $(A|I)$ a fim de se obter uma matriz equivalente por linhas do tipo $(I|B)$. Se for possível tal procedimento, então $B = A^{-1}$. Caso contrário, A não é invertível.

Exemplo 26

Calcule a inversa das matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tipos de Matrizes Quadradas

Para calcular a inversa de uma matriz A, escalona-se a matriz aumentada $(A|I)$ a fim de se obter uma matriz equivalente por linhas do tipo $(I|B)$. Se for possível tal procedimento, então $B = A^{-1}$. Caso contrário, A não é invertível.

Exemplo 26

Calcule a inversa das matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 27

Qual a solução do sistema abaixo?

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ \quad\; 2y = 4 \end{cases}$$

Atividade Online

Atividade Online 24 - Determine as Matrizes Inversas
Atividade Online 25 - Encontre a Inversa de uma Matriz 2x2
Atividade Online 26 - Matriz Inversa de uma Matriz 3x3
Atividade Online 27 - Use Matrizes para Resolver Sistemas de Equações

Definição 28 (Determinante de matrizes 2×2 e 3×3)

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 3}$, definimos o determinante de A e B, denotados, respectivamente, por $\det A$ e $\det B$ como sendo

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

e

$$\begin{aligned} \det B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} &= (b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32}) \\ &\quad - (b_{13}b_{22}b_{31} + b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33}). \end{aligned}$$

Exemplo 29

Calcule o determinante das matrizes A e B do Exemplo 26, ou seja,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Atividade Online

Atividade Online 28 - Determinante de uma Matriz 2x2
Atividade Online 29 - Determinante de uma Matriz 3x3

Determinante de Matrizes de Ordem n

Antes de apresentar uma definição para o determinante de uma matriz quadrada qualquer, vejamos alguns resultados mais simples sobre o determinante.

Determinante de Matrizes de Ordem n

Antes de apresentar uma definição para o determinante de uma matriz quadrada qualquer, vejamos alguns resultados mais simples sobre o determinante.

Proposição 30

Dada uma matriz $A_{n\times n}$, são equivalentes as afirmações abaixo:

i) Para toda matriz $B_{n\times 1}$, o sistema linear $AX = B$ admite uma única solução;

ii) A é invertível;

iii) $\det A \neq 0$.

Determinante de Matrizes de Ordem n

Antes de apresentar uma definição para o determinante de uma matriz quadrada qualquer, vejamos alguns resultados mais simples sobre o determinante.

Proposição 30

Dada uma matriz $A_{n\times n}$, são equivalentes as afirmações abaixo:

i) Para toda matriz $B_{n\times 1}$, o sistema linear $AX = B$ admite uma única solução;

ii) A é invertível;

iii) $\det A \neq 0$.

Exemplo 31

Considere a matriz $C_{3\times 1}$. O que a Proposição 30 pode te garantir acerca de um sistema linear $BX = C$ onde B é definida no Exemplo 26?

Proposição 32 (Propriedades)

Considere as matrizes $A_{n\times n}$ e $B_{n\times n}$, são válidas as afirmações abaixo:

i) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;

ii) Se A é invertível, então $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Determinante de Matrizes de Ordem n

Proposição 32 (Propriedades)

Considere as matrizes $A_{n\times n}$ e $B_{n\times n}$, são válidas as afirmações abaixo:

i) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;

ii) Se A é invertível, então $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Exemplo 33

Qual o determinante das matrizes C e D abaixo?

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determinante de Matrizes de Ordem n

Proposição 34 (Determinante e Operações Elementares)

Seja $A_{n\times n}$ uma matriz.

i) Se B é a matriz que resulta quando duas linhas de A são permutadas, então $\det A = -\det B$;

ii) Se B é a matriz que resulta quando uma única linha de A é multiplicada por um escalar $\lambda \neq 0$, então $\det A = \dfrac{1}{\lambda}\det B$;

iii) Se B é a matriz que resulta quando um múltiplo não-nulo de uma linha de A é somado a uma outra linha de A, então $\det A = \det B$.

O resultado é análogo quando as operações elementares são feitas sobre as colunas de A.

Determinante de Matrizes de Ordem n

Definição 35 (Permutação)

Dado $n \in \mathbb{N}^*$, uma permutação do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ é um rearranjo dos elementos desse conjunto em alguma ordem, sem omissão ou repetição.
Dizemos que uma permutação σ é par quando o rearranjo pode ser obtido por um número par de trocas de elementos a partir da ordem crescente. Caso contrário, a permutação é dita ímpar.
Definimos o sinal da permutação σ, denotado por $\operatorname{sgn} \sigma$, como sendo igual a 1 se σ for par e igual a -1 se σ for ímpar.

Definição 35 (Permutação)

Dado $n \in \mathbb{N}^*$, uma permutação do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ é um rearranjo dos elementos desse conjunto em alguma ordem, sem omissão ou repetição.
Dizemos que uma permutação σ é par quando o rearranjo pode ser obtido por um número par de trocas de elementos a partir da ordem crescente. Caso contrário, a permutação é dita ímpar.
Definimos o sinal da permutação σ, denotado por $\operatorname{sgn} \sigma$, como sendo igual a 1 se σ for par e igual a -1 se σ for ímpar.

Exemplo 36

$\sigma_1 = (3, 1, 2)$ e $\sigma_2 = (1, 3, 2)$ são permutações do conjunto $\{1, 2, 3\}$. Qual o sinal de σ_1 e σ_2?

Definição 37 (Produto Elementar)

Dado uma matriz $A_{n\times n}$ e $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dizemos que

$$a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \ldots a_{n\sigma_n}$$

é um produto elementar de A. Em outras palavras, é o produto de n entradas de A sem que haja mais de uma entrada de alguma linha ou coluna. Dizemos também que

$$\operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \ldots a_{n\sigma_n}$$

é um produto elementar com sinal de A.

Determinante de Matrizes de Ordem n

Definição 37 (Produto Elementar)

Dado uma matriz $A_{n\times n}$ e $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dizemos que

$$a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \ldots a_{n\sigma_n}$$

é um produto elementar de A. Em outras palavras, é o produto de n entradas de A sem que haja mais de uma entrada de alguma linha ou coluna. Dizemos também que

$$\operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \ldots a_{n\sigma_n}$$

é um produto elementar com sinal de A.

Definição 38 (Determinante)

Seja $A_{n\times n}$. O determinante de A é o somatório de todos os seus produtos elementares com sinal.

Proposição 39 (Determinante de matrizes triangulares)

Seja $A_{n\times n}$ uma matriz triangular. Então

$$\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

Proposição 39 (Determinante de matrizes triangulares)

Seja $A_{n\times n}$ uma matriz triangular. Então

$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Exemplo 40

Calcule o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -8 & -4 & -6 & -2 & -9 \end{bmatrix}.$$

Determinante de Matrizes de Ordem n

Definição 41 (Matriz menor e cofator)

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$, definimos a matriz menor ij de A, denotada por A_{ij}, como sendo a matriz obtida a partir de A excluindo-se a linha i e a coluna j. Definimos também o cofator de a_{ij}, como sendo

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}.$$

Determinante de Matrizes de Ordem n

Definição 41 (Matriz menor e cofator)

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$, definimos a matriz menor ij de A, denotada por A_{ij}, como sendo a matriz obtida a partir de A excluindo-se a linha i e a coluna j. Definimos também o cofator de a_{ij}, como sendo

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}.$$

Proposição 42 (Determinante a partir de cofatores)

Seja $A_{n\times n}$ uma matriz. Fixada uma linha i ou uma coluna j de A, teremos, respectivamente:

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

ou

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$

Exemplo 43

Calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}.$$

Exercícios

1. Determine, caso exista, a matriz A, tal que $AB = C$, em que

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Sejam A e B matrizes $m \times n$ e $n \times p$ respectivamente. A afirmação abaixo é sempre válida?

$$\text{Se } AB = 0_{m\times p}, \text{ então } A = 0_{m\times n} \text{ ou } B = 0_{n\times p}.$$

3. Encontre uma matriz $A_{2\times 2}$, não-nula, tal que $AA = 0_{2\times 2}$.

4. Determine as soluções dos seguintes sistemas lineares:

a)

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 3x + y - z = -1 \end{cases};$$

b)

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases};$$

c)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 3 \end{cases}.$$

METRÓPOLE DIGITAL

5. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para quais matrizes $B_{4\times 1}$, o sistema $AX = B$ tem solução?

6. Mostre que, se A e B são matrizes $n \times n$, ambas invertíveis, então AB é invertível e vale a igualdade $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

7. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Mostre, através de um contra-exemplo, que a seguinte igualdade não é sempre válida:

$$\det(A + B) = \det A + \det B.$$

Exercícios

8. Calcule a matriz inversa, se existir, e o determinante das matrizes abaixo:

a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

b)

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix};$$

c)

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercícios

9. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^{-1}, caso A seja invertível, e calcule as soluções do sistema linear $AX = B$, onde $B = 0_{3\times 1}$.

10. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det A$ e para quais matrizes $B_{3\times 1}$ o sistema $AX = B$ tem solução.

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -9 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det A$ e, caso A seja invertível, $\det A^{-1}$. Além disso, para quais matrizes $B_{5\times 1}$ o sistema linear $AX = B$ possui alguma solução?

Exercícios

12. Considere as Matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule:

a) $A \cdot B$;
b) $\det(A \cdot B)$;
c) $\det(A + B)$;
d) A inversa da matriz $A + B$, caso exista;
e) A solução do sistema $AX = C$, onde

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

13. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 & -1 \\ -2 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Responda, em qualquer ordem, as perguntas abaixo:

a) Qual o conjunto solução do sistema linear homogêneo $AX = B_{4\times1}$?

b) A matriz A é invertível? Se sim, qual a sua inversa?

c) Qual o determinante de A?

Exercícios

14. Encontre uma matriz quadrada A, de ordem 2 e não-nula, tal que $AA = 0_{2\times 2}$. Em seguida, SEM USAR A FÓRMULA da Definição 28, mostre que $\det A = 0$. Para finalizar, para quais matrizes $B_{2\times 1}$ a solução do sistema $AX = B$ é única?

15. Através do uso das operações elementares, mostre que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)\,.$$

16. Prove a Proposição 39, ou seja, que o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto das entradas de sua diagonal.

17. Seja A uma matriz $n \times n$ com mais de $n^2 - n$ entradas nulas. Mostre que $\det A = 0$.

18. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n linha equivalentes. Mostre que, se $\det A = 0$, então $\det B = 0$. No caso de $\det A \neq 0$, sob que condições teremos $\det A = \det B$?

Bibliografia

[1] LIMA, Ronaldo F.
Álgebra Linear Essencial.
Acesso em `www.ronaldofreiredelima.com`

[2] BOLDRINI, José L. (et al).
Álgebra linear.
3. ed. São Paulo, SP: Harbra, 1986.