Capítulo 4 - Parte 2

Matemática Elementar

Funções Reais e Gráficos

21 de julho de 2024

Igor Oliveira

matematicaelementar@imd.ufrn.br

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Índice

Plano Cartesiano
Atividade Online
Gráficos de Função Real
Gráficos e Transformações no Plano
Atividade Online
Crescimento e Pontos de Extremo
Atividade Online
Exercícios
Bibliografia

Definição 19

Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano Π consiste num par de eixos perpendiculares OX e OY contidos nesse plano, com a mesma origem O. OX chama-se o eixo das abcissas e OY é o eixo das ordenadas. O sistema é indicado com a notação OXY. Um plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas é chamado de cartesiano.

O Plano Cartesiano

Definição 19

Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano Π consiste num par de eixos perpendiculares OX e OY contidos nesse plano, com a mesma origem O. OX chama-se o eixo das abcissas e OY é o eixo das ordenadas. O sistema é indicado com a notação OXY. Um plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas é chamado de cartesiano.

Fixado um sistema de coordenadas cartesianas OXY num plano Π, cada ponto P do plano possuirá um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associado e vice-versa. Dizemos que x e y são as coordenadas do ponto P e escrevemos $P = (x, y)$, onde x é a abcissa e y é a ordenada de P.

O Plano Cartesiano

Definição 19

Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano Π consiste num par de eixos perpendiculares OX e OY contidos nesse plano, com a mesma origem O. OX chama-se o eixo das abcissas e OY é o eixo das ordenadas. O sistema é indicado com a notação OXY. Um plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas é chamado de cartesiano.

Fixado um sistema de coordenadas cartesianas OXY num plano Π, cada ponto P do plano possuirá um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associado e vice-versa. Dizemos que x e y são as coordenadas do ponto P e escrevemos $P = (x, y)$, onde x é a abcissa e y é a ordenada de P.

Exemplo 20

Represente os pontos $P_1 = (1, 3)$, $P_2 = (-2, 0)$ e $P_3 = (0, -4)$ em um plano cartesiano.

Definição 21

Os eixos ortogonais OX e OY decompõem o plano cartesiano em quatro regiões, cada uma das quais se chama um quadrante. Dado um ponto $P = (x, y)$, dizemos que P está no:

- primeiro quadrante, se $x \geq 0$ e $y \geq 0$;
- segundo quadrante, se $x \leq 0$ e $y \geq 0$;
- terceiro quadrante, se $x \leq 0$ e $y \leq 0$;
- quarto quadrante, se $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

Definição 21

Os eixos ortogonais OX e OY decompõem o plano cartesiano em quatro regiões, cada uma das quais se chama um quadrante. Dado um ponto $P = (x, y)$, dizemos que P está no:

- primeiro quadrante, se $x \geq 0$ e $y \geq 0$;
- segundo quadrante, se $x \leq 0$ e $y \geq 0$;
- terceiro quadrante, se $x \leq 0$ e $y \leq 0$;
- quarto quadrante, se $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

Exemplo 22

Os pontos $P_1 = (1, 3)$, $P_2 = (-2, 0)$ e $P_3 = (0, -4)$ estão em quais quadrantes?

Proposição 23 (Distância entre dois pontos)

Dados os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$, a distância entre P e Q, $d(P, Q)$, é

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

Proposição 23 (Distância entre dois pontos)

Dados os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$, a distância entre P e Q, $d(P, Q)$, é

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

Exemplo 24

Dados os pontos $P_1 = (1, 3)$, $P_2 = (-2, 0)$ e $P_3 = (0, -4)$, calcule $d(P_1, P_2)$ e $d(P_2, P_3)$.

Proposição 23 (Distância entre dois pontos)

Dados os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$, a distância entre P e Q, $d(P, Q)$, é

$$d(P, Q) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}.$$

Exemplo 24

Dados os pontos $P_1 = (1, 3)$, $P_2 = (-2, 0)$ e $P_3 = (0, -4)$, calcule $d(P_1, P_2)$ e $d(P_2, P_3)$.

Exemplo 25

Qual a equação que determina os pontos (x, y) pertencentes a uma circunferência centrada na origem O e de raio r?

Exemplo 26

Dados os pontos distintos $A = (a, b)$ e $C = (c, d)$, as equações

$$\begin{cases} x = a + t(c - a) \\ y = b + t(d - b) \end{cases},$$

onde $t \in \mathbb{R}$, chamam-se as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e C.
Quais as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (-1, 3)$ e $B = (0, 2)$?

Exemplo 26

Dados os pontos distintos $A = (a, b)$ e $C = (c, d)$, as equações

$$\begin{cases} x = a + t(c - a) \\ y = b + t(d - b) \end{cases},$$

onde $t \in \mathbb{R}$, chamam-se as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e C.
Quais as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (-1, 3)$ e $B = (0, 2)$?

Exemplo 27

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que a e b não são ambos nulos. O conjunto de pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas satisfazem a equação $ax + by = c$ é uma reta.
Esboce a reta determinada pela equação $4x + 2y = -1$.

Atividade Online

Atividade 39 - Pontos no Plano Cartesiano
Atividade 40 - Distância Entre Pontos no Primeiro Quadrante
Atividade 41 - Faça um Gráfico a Partir da Equação Geral da Reta

Gráfico de Função Real

Definição 28

O gráfico de uma função real é o seguinte subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$:

$$G(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \in D, y = f(x)\right\}.$$

Em outras palavras, o gráfico de uma função f é o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem sua lei de associação.

Exemplo 29

Esboce o gráfico da função real

$$
\begin{array}{rccl}
f: & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\
 & x & \mapsto & \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases} .
\end{array}
$$

Gráfico de Função Real

Definição 30

Chamamos de <u>função piso</u> (também chamada de <u>chão</u> ou <u>solo</u>) a função real que associa a cada número real x ao maior inteiro que é menor ou igual a x. Denotamos este número por $\lfloor x \rfloor$.
Chamamos de <u>função teto</u> a função real que associa a cada número real x ao menor inteiro que é maior ou igual a x. Denotamos este número por $\lceil x \rceil$.

Definição 30

Chamamos de função piso (também chamada de chão ou solo) a função real que associa a cada número real x ao maior inteiro que é menor ou igual a x. Denotamos este número por $\lfloor x \rfloor$.
Chamamos de função teto a função real que associa a cada número real x ao menor inteiro que é maior ou igual a x. Denotamos este número por $\lceil x \rceil$.

Exemplo 31

Calcule $\lfloor 7{,}5 \rfloor$, $\lfloor -2{,}2 \rfloor$, $\lceil 4{,}1 \rceil$ e $\lceil -3{,}9 \rceil$.
Esboce o gráfico das funções piso e teto.

Exemplo 32

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$f(x) = \operatorname{sen} x$,
$g(x) = f(x) + 1 = \operatorname{sen} x + 1$,
$h(x) = f(x + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$.

Exemplo 32

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$f(x) = \operatorname{sen} x$,
$g(x) = f(x) + 1 = \operatorname{sen} x + 1$,
$h(x) = f(x + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$.

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = f(x + b) + a$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f, através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro b, e uma translação vertical determinada pelo parâmetro a.

Translações de gráficos

Exemplo 32

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$f(x) = \text{sen } x$,
$g(x) = f(x) + 1 = \text{sen } x + 1$,
$h(x) = f(x + \frac{\pi}{2}) = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$.

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = f(x + b) + a$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f, através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro b, e uma translação vertical determinada pelo parâmetro a.

- O translado vertical será:
  - No sentido positivo do eixo y (para cima), se $a > 0$;
  - No sentido negativo do eixo y (para baixo), se $a < 0$.

Translações de gráficos

Exemplo 32

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$f(x) = \text{sen}\, x$,
$g(x) = f(x) + 1 = \text{sen}\, x + 1$,
$h(x) = f(x + \frac{\pi}{2}) = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$.

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = f(x + b) + a$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f, através de uma translação horizontal determinada pelo parâmetro b, e uma translação vertical determinada pelo parâmetro a.

- O translado vertical será:
  - No sentido positivo do eixo y (para cima), se $a > 0$;
  - No sentido negativo do eixo y (para baixo), se $a < 0$.
- O translado horizontal será:
  - No sentido positivo do eixo x (para a direita), se $b < 0$;
  - No sentido negativo do eixo x (para a esquerda), se $b > 0$.

Dilatações de gráficos

Exemplo 33

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$f(x) = \text{sen}\, x$,
$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\, x$,
$h(x) = f(2 \cdot x) = \text{sen}(2 \cdot x)$.

Exemplo 33

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$f(x) = \operatorname{sen} x$,
$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} x$,
$h(x) = f(2 \cdot x) = \operatorname{sen}(2 \cdot x)$.

Exemplo 34

Compare os gráficos das funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
$f(x) = \operatorname{sen} x$,
$g(x) = -1 \cdot f(x) = -1 \cdot \operatorname{sen} x$,
$h(x) = f(-1 \cdot x) = \operatorname{sen}(-1 \cdot x)$.

Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f, através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro d, e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro c. Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f, através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro d, e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro c. Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

- A dilatação vertical será:
  - Um esticamento se $c > 1$;
  - Um encolhimento se $0 < c < 1$;
  - Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo x se $c < -1$;
  - Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo x se $-1 < c < 0$.

Dilatações de gráficos

Dessa forma, se a função real g é tal que $g(x) = c \cdot f(d \cdot x)$, então o gráfico de g pode ser obtido, do gráfico de f, através de uma dilatação horizontal determinada pelo parâmetro d, e uma dilatação vertical determinada pelo parâmetro c. Se o parâmetro for negativo, haverá, também, uma reflexão.

- A dilatação vertical será:
  - Um esticamento se $c > 1$;
  - Um encolhimento se $0 < c < 1$;
  - Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo x se $c < -1$;
  - Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo x se $-1 < c < 0$.
- A dilatação horizontal será:
  - Um encolhimento se $d > 1$;
  - Um esticamento se $0 < d < 1$;
  - Um encolhimento composto com reflexão em relação ao eixo y se $d < -1$;
  - Um esticamento composto com reflexão em relação ao eixo y se $-1 < d < 0$.

Atividade Online

Atividade 42 - Transladação de Funções

Atividade 43 - Identifique Transformações de Funções

Funções Monótonas

Definição 35

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que

(i) f é monótona (estritamente) crescente se, para todos $x_1, x_2 \in D$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2);$$

(ii) f é monótona não decrescente se, para todos $x_1, x_2 \in D$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2);$$

(iii) f é monótona (estritamente) decrescente se, para todos $x_1, x_2 \in D$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2);$$

(iv) f é monótona não crescente se, para todos $x_1, x_2 \in D$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

Nas mesmas condições da Definição 35 , se $f(x) = k \in \mathbb{R}$ para todo $x \in D$, dizemos que f é constante.

Nas mesmas condições da Definição 35 , se $f(x) = k \in \mathbb{R}$ para todo $x \in D$, dizemos que f é constante.
Se $I \subseteq D$ é um intervalo, definimos a monotonicidade de f no intervalo I de maneira análoga ao feito anteriormente. Por exemplo:
f é monótona (estritamente) crescente em I se, para todos $x_1, x_2 \in I$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Definição 36

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

(i) f é limitada superiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$, para todo $x \in D$;

(ii) f é limitada inferiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq M$, para todo $x \in D$;

(iii) $x_0 \in D$ é um ponto de máximo absoluto de f se $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $x \in D$;

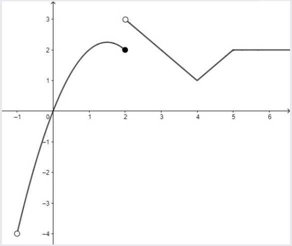
(iv) $x_0 \in D$ é um ponto de mínimo absoluto de f se $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in D$;

(v) $x_0 \in D$ é um ponto de máximo local de f se existe $r > 0$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$;

(vi) $x_0 \in D$ é um ponto de mínimo local de f se existe $r > 0$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$.

Exemplo 37

A função $h : (-1; 6] \to \mathbb{R}$, cujo gráfico é esboçado abaixo, é definida por
$$h(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ |x-4| + 1 & \text{se } 2 < x \leq 5 \\ 2 & \text{se } x > 5 \end{cases}.$$



Determine os intervalos de monotonicidade e os extremos de h.

Atividade Online

Atividade 44 - Intervalos Crescentes e Decrescentes
Atividade 45 - Mínimos e Máximos Relativos
Atividade 46 - Mínimos e Máximos Absolutos

11. Considere os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ distintos e pertencentes a um plano cartesiano. Responda o que se pede:

a) Qual as equações paramétricas da reta que passa por A e B?

b) Mostre que o ponto $M = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ pertence à reta que passa por A e B;

c) Mostre que $d(A, M) = d(M, B)$ e conclua que M é o ponto médio do segmento AB.

12. Mostre que $f : (-\infty; -4] \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = -x^2 - 8x - 12$, é uma função crescente.

13. Seja a função $f : [3; 5] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

a) Mostre que f é decrescente.

b) f possui máximo absoluto? Se sim, ocorre em qual ponto?

c) f possui mínimo absoluto? Se sim, ocorre em qual ponto?

Exercícios

14. Considere a função $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Responda as seguintes perguntas apresentando as respectivas justificativas.

a) f é monótona? Se sim, de que tipo? Se não, f possui algum intervalo de monotonicidade?
b) f possui máximo absoluto?
c) f possui mínimo absoluto?
d) f é limitada?

15. Considere a função real f tal que $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.

a) Mostre que f é crescente no intervalo $(-\infty, 1]$;
b) Mostre que f é decrescente no intervalo $[1, +\infty)$;
c) Use os itens anteriores para concluir que $1 \in \mathbb{R}$ é um ponto de máximo absoluto de f.

16. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

(a) Se f é limitada superiormente, então f tem pelo menos um máximo absoluto;

(b) Se f é limitada superiormente, então f tem pelo menos um máximo local;

(c) Se f tem um máximo local, então f tem um máximo absoluto;

(d) Todo máximo local de f é máximo absoluto;

(e) Todo máximo absoluto de f é máximo local;

(f) Se x_0 é o ponto de extremo local de f, então é ponto de extremo local de f^2, onde $(f^2)(x) = f(x) \cdot f(x)$;

(g) Se x_0 é o ponto de extremo local de f^2, então é ponto de extremo local de f.

17. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

a) A função g pode ser ilimitada inferiormente;

b) f é limitada superiormente ou f é limitada inferiormente.

18. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.

(a) Se f e g são crescentes, então a composta $f \circ g$ é uma função crescente;

(b) Se f e g são crescentes, então o produto $f \cdot g$ é uma função crescente, onde $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;

(c) Se f é crescente em $A \subseteq \mathbb{R}$ e em $B \subseteq \mathbb{R}$, então f é crescente em $A \cup B \subseteq \mathbb{R}$.

Exercícios

19. Seja f uma função real.

a) Suponha que f é constante. Mostre que f é não crescente e não decrescente;

b) Suponha que f é não crescente e não decrescente. Mostre que f é constante.

20. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e A e B intervalos reais tais que $A \cap B$ é um intervalo não degenerado, ou seja, que possui pelo menos dois números. Mostre que, se f é crescente em A e em B, então f é crescente em $A \cap B$.

21. Mostre que a função inversa de uma função crescente é também uma função crescente. E a função inversa de uma função decrescente é decrescente.

22. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *par* quando se tem $f(-t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se for o caso de $f(-t) = -f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, dizemos que f é *ímpar*.
Considere a função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Demonstre, ou refute com um contraexemplo, as afirmações abaixo:

a) Se f é par e $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de máximo absoluto, então $-x_0 \in \mathbb{R}$ é também um ponto de máximo absoluto;

b) Se f é ímpar e $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de mínimo absoluto, então $-x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de máximo absoluto.

c) Se f é ímpar e limitada superiormente, então f é limitada inferiormente.

Bibliografia

[1] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C. *A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[2] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C. *A Matemática do Ensino Médio. Vol. 3*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.