Capítulo 5

Matemática Elementar
Funções Polinomiais

13 de setembro de 2024

Igor Oliveira
matematicaelementar@imd.ufrn.br

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Índice

Introdução
Função Linear
Função Afim
Atividade Online
Função Quadrática
Atividade Online
Funções Polinomiais
Atividade Online
Funções Polinomiais
Atividade Online
Exercícios
Bibliografia

Apresentação da Aula

É algo comum escutar a seguinte frase: "Em matemática eu resolvo tudo com regra de três".
Será mesmo que isso é possível? Por exemplo, o lado do quadrado e sua área são proporcionais?

Função Linear

Definição 1

Chamamos de função linear uma função real com lei de formação $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}$.

Definição 1

Chamamos de função linear uma função real com lei de formação $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}$.

A função linear é usada para modelar problemas de proporcionalidade direta. Quando duas grandezas são diretamente proporcionais, podemos escrevê-las sob a lei de formação de uma função linear.

Note que, sabendo que uma função é linear, o valor de a é igual a $f(1)$.

Definição 1

Chamamos de função linear uma função real com lei de formação $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}$.

A função linear é usada para modelar problemas de proporcionalidade direta. Quando duas grandezas são diretamente proporcionais, podemos escrevê-las sob a lei de formação de uma função linear.
Note que, sabendo que uma função é linear, o valor de a é igual a $f(1)$.
No caso das grandezas inversamente proporcionais, a função matemática que modela tal problema é uma função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tal que $f(x) = \frac{a}{x}$. Nesse caso, também temos a particularidade de $f(1) = a \in \mathbb{R}^*$.

Teorema 2 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) *f é linear;*

(ii) *$f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;*

(iii) *$f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.*

Nas hipóteses do Teorema, tem-se $a = f(1) > 0$. No caso de se supor f decrescente, vale um resultado análogo, com $a < 0$.

A importância desse Teorema está no seguinte fato: se queremos saber se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função linear, basta verificar duas coisas:

1ª: f deve ser crescente ou decrescente. (Estamos deixando de lado o caso trivial de f ser identicamente nula);

2ª: $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{Z}$. No caso de $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, basta verificar essa última condição para $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3

O lado de um quadrado é proporcional à sua área? Em outras palavras, essas duas grandezas podem ser relacionadas por meio de uma função linear?

Definição 4

Uma função real chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em uma função afim na qual $f(x) = ax + b$, chamamos o valor a de taxa de variação da função ou de taxa de crescimento. Vale observar que é muito comum chamá-lo de coeficiente angular. Esse termo não é apropriado pois define-se coeficiente angular para retas, e não para funções, mesmo que vejamos que o gráfico de uma função afim seja uma reta.

Exemplo 5

A função identidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim, assim como suas translações $g(x) = x + b$. São, ainda, casos particulares de funções afins as funções lineares $f(x) = ax$ e as funções constantes $f(x) = b$.

Exemplo 5

A função identidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim, assim como suas translações $g(x) = x + b$. São, ainda, casos particulares de funções afins as funções lineares $f(x) = ax$ e as funções constantes $f(x) = b$.

Exemplo 6

O preço a se pagar por uma corrida de táxi é dado por uma função afim $f : x \mapsto ax + b$, em que x é a distância percorrida (usualmente medida em quilômetros), o valor inicial b é a chamada *bandeirada* e o coeficiente a é o preço de cada quilômetro rodado.

Exemplo 7

A escala *N* de temperaturas foi feita com base nas temperaturas máxima e mínima em Nova Iguaçu. A correspondência com a escala Celsius é a seguinte:

°N	°C
0	18
100	43

Modele o problema com funções afim que transformem a temperatura em °N em °C e vice-versa. Qual a relação entre essas duas funções? Em que temperatura ferve a água na escala *N*?

Gráfico da Função Afim

Proposição 8

O gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta.

Gráfico da Função Afim

Proposição 8

O gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta.

Note que, para desenhar o gráfico de uma função afim, basta conhecer dois pontos, pois uma reta é inteiramente determinada por dois pontos.

Atividade Online

OBSERVAÇÃO: No Khan Academy é definido função linear como função afim. Ou seja, para eles é qualquer função que o gráfico é uma reta (ou pontos colineares).

`Atividade 47 - Problemas de Modelos de Funções Lineares`

`Atividade 48 - Problemas de Como Escrever Equações Lineares`

`Atividade 49 - Funções Lineares e Não Lineares`

Função Quadrática

Definição 9

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 10

Seja f uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a > 0$.
Então f não é limitada superiormente e o ponto $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ é o mínimo absoluto da função.
Caso tenhamos $a < 0$, então f não é limitada inferiormente e o ponto $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ é o máximo absoluto da função.

Proposição 10

Seja f uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a > 0$.
Então f não é limitada superiormente e o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o mínimo absoluto da função.
Caso tenhamos $a < 0$, então f não é limitada inferiormente e o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o máximo absoluto da função.

Proposição 11

Seja f uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Se $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$, então x_1 e x_2 são equidistantes de $-\frac{b}{2a}$, ou seja, $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$.

O Gráfico da Função Quadrática

Exemplo 12

O gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é uma parábola cujo foco é $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$. Ademais, o vértice da parábola é a origem do plano cartesiano.

O Gráfico da Função Quadrática

Exemplo 12

O gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é uma parábola cujo foco é $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$. Ademais, o vértice da parábola é a origem do plano cartesiano.

Proposição 13

O gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola, tem a reta $x = -\frac{b}{2a}$ como eixo de simetria e o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o vértice da parábola.

Atividade 50 - Problemas com Expressões do Segundo Grau (Forma Padrão)
Atividade 51 - Faça o Gráfico de Parábolas em Todas as Formas
Atividade 52 - Deslocamento de Parábolas
Atividade 53 - Dimensionar e Refletir Parábolas

Definição 14

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0,$$

onde $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ é uma lista ordenada de números reais e X é um símbolo, chamado de indeterminada, sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \ldots X$ (i fatores). Ao maior número n tal que $a_n \neq 0$ damos o nome de grau do polinômio $p(X)$.

Definição 14

Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ é uma lista ordenada de números reais e X é um símbolo, chamado de indeterminada, sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \ldots X$ (i fatores). Ao maior número n tal que $a_n \neq 0$ damos o nome de grau do polinômio $p(X)$.

Dizemos que dois polinômios $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ e $q(X) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ são iguais quando $n = m$ e $a_i = b_i$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Atividade Online

Atividade 54 - Identidades Polinomiais

Funções Polinomiais

Definição 15

Diz-se que $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma <u>função polinomial</u> quando existem números reais $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \qquad (1)$$

Os elementos de $p^{-1}(0)$ são chamados de <u>raízes de p</u>.

Exemplo 16

Além das funções lineares, afins e quadráticas, a soma e o produto de funções polinomiais são funções polinomiais. Considere a função polinomial p tal que

$$p(x) = (x - \alpha)\left(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}x + \alpha^{n-1}\right) = x^n - \alpha^n.$$

Nesse caso, dizemos que $p(x)$ é divisível por $x - \alpha$.

Proposição 17

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é raiz da função polinomial $p(x)$ de grau n, então existe uma função polinomial $q(x)$, de grau $n-1$, tal que

$$p(x) = (x-\alpha)\,q(x).$$

Além disso, $p(x)$ não pode ter mais do que n raízes.

Proposição 17

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é raiz da função polinomial $p(x)$ de grau n, então existe uma função polinomial $q(x)$, de grau $n-1$, tal que

$$p(x) = (x - \alpha)\, q(x).$$

Além disso, $p(x)$ não pode ter mais do que n raízes.

Uma função polinomial p chama-se identicamente nula quando se tem $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, p tem uma infinidade de raízes, já que todo número real é raiz de p. Esse caso não contradiz a proposição anterior, já que o grau de uma função polinomial não está definido para a função identicamente nula.

Teorema 18

Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial de grau n e coeficientes inteiros. Se $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível e raiz de $p(x)$, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Teorema 18

Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial de grau n e coeficientes inteiros. Se $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível e raiz de $p(x)$, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Este Teorema nos permite encontrar facilmente as raízes racionais de um polinômio, caso exista alguma. Basta listar os divisores p de a_0, os divisores q de a_n e testar se $p\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ para todas as possíveis frações $\frac{p}{q}$. Caso haja alguma raiz racional de $p(x)$, ela estará entre as frações obtidas.

Exemplo 19

Encontre todas as raízes do polinômio
$p(x) = 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 12x - 8 = 0$.

Proposição 20 (Fórmula de Interpolação de Lagrange)

Dados $n+1$ números reais distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e fixados arbitrariamente os valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe um, e somente um, polinômio p de grau menor ou igual a n tal que

$$p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = y_1, \ldots, \quad p(x_n) = y_n.$$

$p(x)$ pode ser obtido pela fórmula:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \right].$$

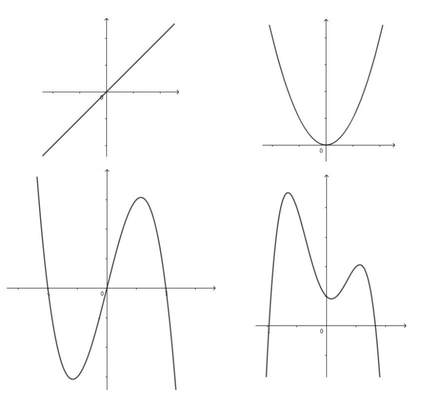
Gráficos de Funções Polinomiais

Quando se deseja traçar o gráfico, ao menos um esboço, de uma função polinomial, certas informações são de grande utilidade. Listaremos algumas delas.
Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$.

- Se n é par, então para $|x|$ suficientemente grande, $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n;
- Se n é ímpar, então $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n para valores positivos muito grandes de x e tem o sinal oposto de a_n para valores negativos muito grandes, em módulo, de x.

Exemplo 21

Identifique se n é par ou ímpar e qual o sinal de a_n para cada um dos gráficos de funções polinomiais $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ abaixo:



Gráficos de Funções Polinomiais

Sejam p e q dois polinômios.

- Se o grau de p é maior do que o grau de q, então para todo x com valor absoluto suficientemente grande, tem-se $|p(x)| > |q(x)|$;

Gráficos de Funções Polinomiais

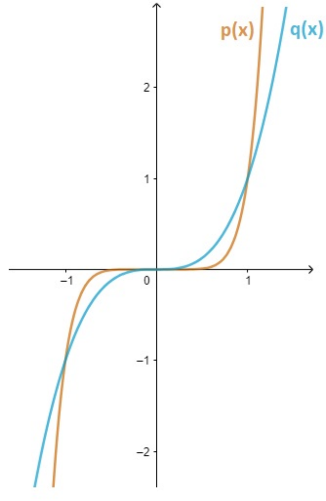
Sejam p e q dois polinômios.

- Se o grau de p é maior do que o grau de q, então para todo x com valor absoluto suficientemente grande, tem-se $|p(x)| > |q(x)|$;
- Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Se $p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$, então, p deve possuir uma raiz entre x_1 e x_2.

Exemplo 22

Considere os polinômios $p(x) = x^7$ e $q(x) = x^3$. Quando $0 < |x| < 1$, temos que $|p(x)| < |q(x)|$. Porém, quando $|x| > 1$, temos que $|p(x)| > |q(x)|$. Além disso, em ambos os casos, $p(-1) = q(-1) = -1 < 0$ e $p(1) = q(1) = 1 > 0$. Assim, os polinômios possuem, cada um, ao menos uma raiz no intervalo $(-1, 1)$ – a saber, $x = 0$.

Exemplo 22 (Continuação)



Atividade Online

Atividade 55 - Zeros de Polinômios (Forma Fatorada)
Atividade 56 - Zeros de Polinômios (com Fatoração)

Exercícios

1. Mostre que uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fica inteiramente determinada quando conhecemos $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$. Em outras palavras, calcule $a, b \in \mathbb{R}$ onde $f(x) = ax + b$.

2. Pessoas apressadas podem diminuir o tempo gasto em uma escada rolante subindo alguns degraus da escada no percurso. Para uma certa escada, observa-se que uma pessoa gasta 30 seg na escada quando sobre 5 degraus e 20 seg quando sobe 10 degraus. Quantos são os degraus da escada e qual o tempo gasto no percurso?

3. Uma aplicação financeira rende a *juros simples* quando os juros são calculados somente sobre a aplicação inicial durante todo o período de tempo.

Edson faz uma aplicação que rende juros $j > 0$ em um mês. Ou seja, se ele investiu um capital inicial c_0, então ao fim de 1 mês, Edson poderia resgatar $c = c_0(1 + j)$. Caso a aplicação renda juros simples, defina uma função afim que calcule o capital c_s em função do tempo t (em meses) da aplicação.

4. Edson investiu R$500,00 em um banco a uma taxa de juros de 9% ao ano. Edson tem a pretensão de retirar seu dinheiro do banco quando o montante, ou seja, o dinheiro investido mais o rendimento, chegar a R$1.000,00.

Se os juros que o banco ofereceu forem juros simples, defina a função afim que modela o montante e use-a para responder quanto tempo Edson vai esperar para retirar seu dinheiro.

5. Para cada uma das funções quadráticas abaixo, escreva-a na forma $f(x) = a(x-m)^2 + k$. A seguir, calcule suas raízes (se existirem), o eixo de simetria de seu gráfico e seu valor mínimo e máximo.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 23$;
b) $f(x) = 8x - 2x^2$;
c) $f(x) = 2x^2 - 16x + 46$.

6. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 7x + 12$.

a) Calcule as raízes de f e qual $x_0 \in \mathbb{R}$ é mínimo absoluto de f;
b) Mostre que f é monótona (crescente ou decrescente) no intervalo $(-\infty, x_0] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq x_0\}$.

Exercícios

7. Encontre os valores mínimo e máximo assumidos pela função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ em cada um dos intervalos abaixo:

a) $[1, 4]$;

b) $[6, 10]$.

Dica: Esboce o gráfico de f nos intervalos indicados para visualizar melhor os valores mínimo e máximo assumidos pela função.

8. Considere $f : [3; +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 7x + 10$.

a) Defina uma função bijetiva f' tal que $f'(x) = f(x)$ para todo x pertencente ao domínio de f';

b) Prove que f', definida por você, é bijetiva.

9. Considere $f : [-5; 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^2 - 2x + 8$.

a) Faça um esboço do gráfico da função f e aponte os extremos absolutos da função;

b) Defina uma função bijetiva f' onde $f'(x) = f(x)$ para todo x pertencente ao intervalo que será o domínio de f' e que preserve os extremos de f;

c) Prove que f' é monótona.

10. Os alunos de uma turma fizeram uma coleta para juntar 405 reais, custo de uma excursão. Todos contribuíram igualmente. Na última hora, dois alunos desistiram. Com isso, a parte de cada um sofreu um aumento de um real e vinte centavos. Quantos alunos tem a turma?

11. Considere a função polinomial $p(x) = x^2 - 2$.

a) Usando o Teorema de raízes racionais prove que $p(x)$ não possui raízes racionais;

b) Mostre que $\sqrt{2}$ é raiz de $p(x)$;

c) Conclua que $\sqrt{2}$ é irracional.

12. Considere a função polinomial $p(x) = x^2 - q$, onde $q \in \mathbb{N}^*$ é um número primo.

a) Usando o Teorema de raízes racionais prove que $p(x)$ não possui raízes racionais;

b) Mostre que $\sqrt{q}$ é raiz de $p(x)$;

c) Conclua que $\sqrt{q}$ é irracional.

13. Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x$. Utilize o Teorema das Raízes Racionais pelo menos uma vez para encontrar todas as raízes reais de $p(x)$.
Dica: Antes de aplicar o Teorema das Raízes Racionais, identifique uma das raízes de $p(x)$ e fatore $p(x)$ para então usar o Teorema.
Porque é preciso usar a dica ao invés de aplicar o Teorema diretamente em $p(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x$?
14. Determine o polinômio $p(x)$ de menor grau possível tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 1$, $p(3) = 4$ e $p(4) = 3$.
15. Mostre que, se n é um número par, então o polinômio $p(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$ não possui raiz real.
Dica: Note que, para $x \neq 1$, $p(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Proceda supondo, por contradição, que existe $a \neq 1$ raiz de $p(x)$.

Bibliografia

[1] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo César P; Wagner, Eduardo; MORGADO, Augusto C. *A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.