UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO — FACULTAD DE CIENCIAS APLICADAS A LA INDUSTRIA

Matemática IV - Ing. Mecánica - 2019
Dra. Andrea Ridolfi
Ing. Marcos Saromé

Guía de Actividad 1: Subespacios y Transformaciones Lineales

Ejercicio 1. ¿Cuáles de los siguientes son subespacios de $\mathbb{R}^\infty$?

a) Todas las sucesiones como $(1, 0, 1, 0, ...)$ que incluyen una infinidad de ceros.

b) Todas las sucesiones $(x_1, x_2, ...)$ con $x_j = 0$ a partir de un valor de j.

c) Todas las sucesiones decrecientes: $x_{j+1} \leq x_j$ para cada j.

d) Todas las sucesiones convergentes: $\{x_j\}$ tiene límite cuando $j \to \infty$.

Ejercicio 2. Encuentre la dimensión y una base para los cuatro subespacios fundamentales de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. Si $Ax = b$ siempre tiene por lo menos una solución, demuestre que la única solución de $A^T y = 0$ es $y = 0$. (Sugerencia ¿Cuál es el rango?)

Ejercicio 4. Falso o verdadero (Según corresponda, proporcione una razón o un contraejemplo)

a) A y A^T tienen el mismo número de pivotes.

b) A y A^T tienen el mismo espacio nulo izquierdo.

c) Si el espacio renglón es igual al espacio columna, entonces $A^T = A$.

d) Si $A^T = -A$, entonces el espacio renglón de A es igual al espacio columma.

Ejercicio 5. Encuentre una base de cada uno de los cuatro subespacios de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6. Dada la matriz

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre el rango de A, y proporcione una base de su espacio nulo.

b) Los 3 primeros renglones de U son una base del espacio renglón de A: ¿Falso o Verdadero? Las columnas $1, 3, 6$ de U son una base del espacio columna de A: ¿falso o verdadero? Los cuatro renglones de A son una base del espacio renglón de A: ¿falso o verdadero?.

c) Encuentre tantos vectores b linealmente independientes como sea posible para los cuales $Ax = b$ tenga una solución.

d) En la eliminación sobre A, ¿Qué múltiplo del tercer renglón se restó para eliminar el cuarto renglón?.

Ejercicio 7. ¿Qué matriz tiene el efecto de rotar cada vector un ángulo de 90º y luego proyectar el resultado sobre el eje x? ¿Qué matriz representa la proyección sobre el eje x seguida de la proyección sobre el eje y?.

Ejercicio 8. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

produce un *alargamiento* en la dirección x. Trace en una misma gráfica

1. El círculo $x^2 + y^2 = 1$
2. Los puntos que resultan de multiplicar cada coordenada del círculo por A. ¿Qué forma tiene esa curva?

Ejercicio 9. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

produce una transformación por *esfuerzo cortante*, que deja el eje y sin cambio. Bosqueje este efecto en el eje x, indicando lo que le ocurre a $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(-1, 0)$ y cómo se transforma todo el eje.

Ejercicio 10. ¿Cuáles son las matrices de 3 por 3 que representan las transformaciones que:

a) Proyectan cada vector sobre el plano $x - y$?

b) Reflejan cada vector a través del plano $x - y$?

c) Rotan el plano $x - y$ un ángulo de 90º, dejando sólo al eje z?

d) Rotan un ángulo de 90º al plano $x - y$, luego al plano $x - z$, luego al plano $y - z$?

e) Realizan las tres rotaciones, pero cada una de un ángulo de 180º?

Ejercicio 11. Sea $D : P_3 \to P_2$, el operador diferencial $D(p(x)) = p'(x)$. Sean $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $C = \{1, x, x^2\}$ bases para P_3 y P_2 respectivamente.

1. Encuentra la matriz A asociada a D con respecto a B y C .
2. Encuentra la matriz A' asociada a D con respecto a B' y C donde $B' = \{x^3, x^2, x, 1\}$

Ejercicio 12.

De los polinomios cúbicos P_3 a los polinomios de cuarto grado P_4. ¿Qué matriz representa la multiplicación por $2+3t$? Las columnas de la matriz A de 5 por 4 provienen de la aplicación de la transformación a 1, t, t^2, t^3 .

Ejercicio 13.

En el espacio P_3 de polinomios cúbicos, ¿qué matriz representa $\frac{d^2}{dt^2}$? Construya la matriz de 4×4 a partir de la base estándar $1, t, t^2, t^3$. Encuentre su espacio nulo y su espacio columna. ¿Qué significan éstos en términos de polinomios?

Ejercicio 14.

En el espacio vectorial P_3 de todos los $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, sea S el subconjunto los polinomios con $/int_0^1 p(x)dx = 0$ Compruebe que S es un subespacio y encuentre una base.

Ejercicio 15.

Encuentre la matriz A de 4×3 que representa un desplazamiento derecho: (x_1, x_2, x_3, x_4) se transforma en $Ax = (x_2, x_3, x_4, x_1)$. ¿Cuál es el efecto de A^2? Demuestre que $A^3 = A^{-1}$.

Ejercicio 16.

¿Cuáles de las siguientes transformaciones no son lineales? La entrada es $v = (v_1, v_2)$.

a) $T(v) = (v_2, v_1)$.

b) $T(v) = (v_1, v_1)$.

c) $T(v) = (0, v_1)$.

d) $T(v) = (0, 1)$.

e) $T(v) = (v_1, 2v_2, v_1 + v_2)$.

f) $T(v) =$ la mayor componenete de v.

Ejercicio 17.

a) ¿Qué matriz transforma $(1, 0)$ en $(2, 5)$ y $(0, 1)$ en $(1, 3)$?.

b) ¿Qué matriz transforma $(2, 5)$ en $(1, 0)$ y $(1, 3)$ en $(0, 1)$?.

c) ¿Por qué ninguna matriz transforma $(2, 6)$ en $(1, 0)$ y $(1, 3)$ en $(0, 1)$?

Ejercicio 18.

a) ¿Qué matriz transforma $(1, 0)$ y $(0, 1)$ en (r, t) y (s, u)?.

b) ¿Qué matriz transforma (a, c) y (b, d) en $(1, 0)$ y $(0, 1)$?.

c) ¿Qué condición sobre a, b, c, d hace imposible el inciso b)?

Ejercicio 19.

Suponga que v_1, v_2, v_3 son vectores característicos para T (esto significa que $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ para $i = 1, 2, 3$). ¿Cuál es la matriz para T cuando las bases de entrada y de salida son estos vectores?

Ejercicio 20. (Opcional) Determine la matriz de adyacencia del los siguientes grafos.

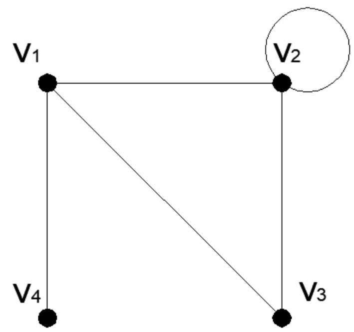

Figura 1: Grafo 1

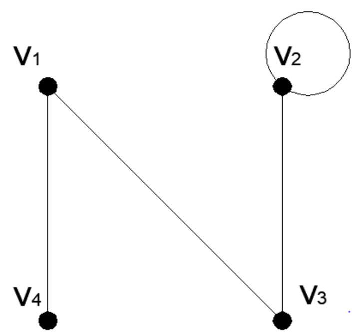

Figura 2: Grafo2

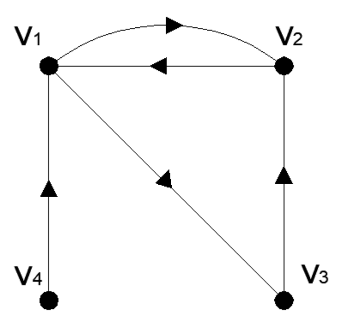

Figura 3: Digrafo1

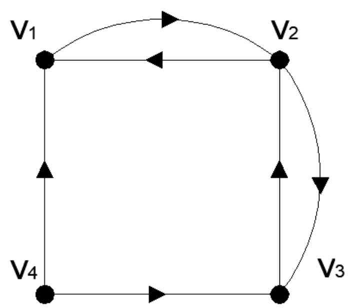

Figura 4: Digrafo2

Ejercicio 21. (Opcional) Suponga que todos los vectores x en el cuadrado unitario $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$ se transforman en Ax (A es de 2 por 2).

1. ¿Cuál es la forma de la región transformada (toda Ax?
2. ¿Para qué matrices A esta región es cuadrada?
3. ¿Para que matrices A es una recta?
4. ¿Para que matrices A la nueva área sigue siendo 1?

Ejercicio 22. (Opcional) Compruebe que $(AB)^T$ es igual a $B^T A^T$, aunque estas son diferentes de $A^T B^T$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

En caso de que $AB = BA$ (¡lo cual en general no es cierto!), ¿Cómo puede demostrar que $B^T A^T = A^T B^T$

Entrega

Se deben entregar obligatoriamente los ejercicios: