

Matemática IV

Autovalores y Autovectores

A. Ridolfi (PT), M. Saromé (JTP)

UNCUYO - FCAI



Ingeniería Mecánica



2019

- **Autovalores y Autovectores**
- **Ortogonalidad**
- **Mínimos cuadrados**
- **Bases ortogonales y Gran Schmidt**
- **Factorización $A=QR$**
- **Digonalización de una Matiz**
- **Transformaciones de Semejanza**
- **Bibliografía**

Autovalores y Autovectores

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre K y sea T un operador lineal sobre V , Un **autovalor (o valor propio)** de T es un escalar λ de K tal que existe un vector no nulo $\mathbf{x} \in V$ con $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Si λ es un autovalor de T entonces:

- a) Cualquier \mathbf{x} no nulo tal que $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ se llama **autovector (o vector propio)** de T asociado al autovalor λ .
- b) La colección de todos los \mathbf{x} tal que $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ se llama **espacio propio** asociado a λ .

En particular, λ es un autovalor de una matriz $A_{n \times n}$ si y sólo si $A - \lambda I$ es singular:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \text{Ecuación Característica}$$

Cada λ está asociada con vectores característicos \mathbf{x} :

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{o bien} \quad A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ entonces, para el mismo \mathbf{x} ,

- El autovector \mathbf{x} está en la misma línea que $A\mathbf{x}$;
- $A^n\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x}$, $n \in \mathbb{N}$;
- $A^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x}$ (si A es inversible)
- $(A + cI)\mathbf{x} = (\lambda + c)\mathbf{x}$.

Además

- La ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$ nos otorga n autovalores.
- $\det(A) = (\lambda_1)(\lambda_2)\dots(\lambda_n)$.
- Traza de $A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.
- Las proyecciones tienen $\lambda = 1$ o $\lambda = 0$.
- Las reflexiones tienen $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$.
- Las rotaciones tienen autovalores complejos: $\lambda = e^{i\theta}$ o $\lambda = e^{-i\theta}$.

Ejemplos

- A Identidad $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- A Diagonal $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

- Proyección $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

- A Triangular $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & \frac{3}{4} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

Si $A = LU$ los autovalores de U están en la diagonal pero **NO** son los autovalores de A

producto interno (escalar/punto) $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$

Dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} de \mathbb{R}^n son **ortogonales** si

$$\mathbf{u}^T \mathbf{v} = 0$$

Además si $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$ se dicen que son **ortonormales**.

- Si los vectores no nulos $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ son mutuamente ortogonales, entonces son linealmente independientes.

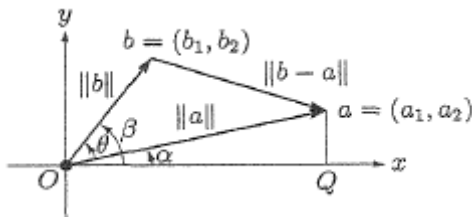
Dem:

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es resoluble si y sólo si $\mathbf{y}^T \mathbf{b} = 0$ siempre que $\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}$

Dem:

Coseno de ángulo entre vectores

$$\cos(\theta) = \cos(\beta)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$



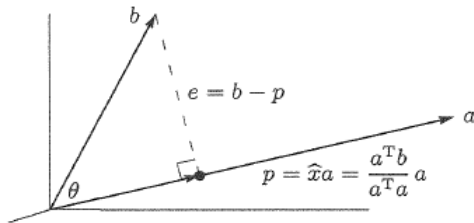
Ley de los cosenos $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}\|^2 - 2\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{a}\|\cos(\theta)$

Desigualdad de Schwarz $|\mathbf{a}^T \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$

La igualdad se cumple si y sólo si \mathbf{b} es múltiplo de \mathbf{a} .

Proyecciones

La proyección del vector \mathbf{b} sobre la recta en dirección de \mathbf{a} es $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{x}}\mathbf{a}$



$$\mathbf{a}^T \mathbf{e} = \mathbf{a}^T (\mathbf{b} - \hat{\mathbf{x}}\mathbf{a}) = 0$$

- Matriz de Proyección $P = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}$
- $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{x}}\mathbf{a} = P\mathbf{b}$
- \mathbf{p} es el punto sobre la recta en dirección de \mathbf{a} más próximo a \mathbf{b} .

Problema de mínimos cuadrados

Propiedad

Cuando $Ax = b$ es inconsistente, su solución por mínimos cuadrados que minimiza $\|Ax - b\|^2$:

$$\text{Ecuaciones normales } A^T A \hat{x} = A^T b.$$

$A^T A$ es invertible cuando las columnas de A son linealmente independientes. Así,

$$\text{Mejor estimación: } \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

La proyección de b sobre el espacio columna es el punto más próximo $A\hat{x}$:

$$\text{Proyección } p = A\hat{x} = Pb = A(A^T A)^{-1} A^T b.$$

- $A^T A$ tiene el mismo espacio nulo que A .

Dem:

- Si A tiene columnas independientes, entonces $A^T A$ es cuadrada, simétrica e inversible.

Dem:

Propiedad

La matriz proyección $P = A (A^T A)^{-1} A^T$ tiene dos propiedades fundamentales:

- a) *Es igual a su cuadrado: $P^2 = P$.*
- b) *Es igual a su traspuesta: $P^T = P$.*

Al revés, cualquier matriz simétrica con $P^2 = P$ representa una proyección.

Bases ortogonales

Los vectores q_1, \dots, q_n son ortonormales si

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Una matriz con columnas ortonormales se denomina Q .

Propiedad

Si Q (cuadrada o rectangular) tiene columnas ortonormales, entonces $Q^T Q = I$:

$$\begin{bmatrix} \dots q_1^T \dots \\ \dots q_2^T \dots \\ \dots \\ \dots q_n^T \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_n \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Una matriz ortogonal es una matriz cuadrada con columnas ortonormales. Por tanto, Q^T es Q^{-1} . Para matrices cuadradas ortogonales, la traspuesta es la inversa.

Ejemplo (rotación)

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad Q^T = Q^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Ejemplo (permutación)

Si $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ entonces $P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Observar que las filas también son ortonormales ya que $QQ^T = I$.

Propiedad

La multiplicación por Q **preserva las longitudes**:

$$\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| \text{ para todo } \mathbf{x}.$$

También preserva productos internos y ángulos, ya que

$$(Q\mathbf{x})^T (Q\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T Q^T Q \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}.$$

Dada Q ortogonal y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{b} = x_1 \mathbf{q}_1 + x_2 \mathbf{q}_2 + \dots + x_n \mathbf{q}_n. \quad (1)$$

Multiplicando la ecuación (1) por \mathbf{q}_j^T se obtiene que

$$x_j = \mathbf{q}_j^T \mathbf{b},$$

para $j = 1, \dots, n$. Así

$$\mathbf{b} = (\mathbf{q}_1^T \mathbf{b}) \mathbf{q}_1 + (\mathbf{q}_2^T \mathbf{b}) \mathbf{q}_2 + \dots + (\mathbf{q}_n^T \mathbf{b}) \mathbf{q}_n.$$

Propiedad

El proceso de Gram-Schmidt empieza con vectores independientes $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ y termina con vectores ortonormales $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$. En el paso j resta de \mathbf{a}_j sus componentes en las direcciones $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{j-1}$ que ya están establecidas:

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{a}_j - \left(\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_j \right) \mathbf{q}_1 - \dots - \left(\mathbf{q}_{j-1}^T \mathbf{a}_j \right) \mathbf{q}_{j-1}.$$

Luego, \mathbf{q}_j es el vector unitario $\mathbf{c}_j / \|\mathbf{c}_j\|$.

Factorización $A=QR$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^T a & q_1^T b & q_1^T c \\ q_2^T a & q_2^T b & q_2^T c \\ q_3^T a & q_3^T b & q_3^T c \end{bmatrix} = QR$$

Propiedad

Toda matriz $A_{m \times n}$ con columnas independientes puede factorizarse en $A = QR$. Las columnas de Q son ortonormales y R es triangular superior e invertible. Cuando A es cuadrada, Q y R también lo son y Q es ortogonal.

Los vectores característicos diagonalizan una matriz

Propiedad

Suponga que $A_{n \times n}$ tiene n autovectores linealmente independientes. Si estos vectores son las columnas de una matriz S , entonces $S^{-1}AS$ es una matriz diagonal y los autovalores de A están sobre la diagonal:

Diagonalización $S^{-1}AS = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Demostración:

Probar que $AS = S\Lambda$

- Nota 1** Si los autovectores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ corresponden a k **autovalores distintos** entonces estos autovectores son **linealmente independientes**.
- Nota 2** Si los n autovalores son distintos, entonces: **La matriz puede diagonalizarse**.
- Nota 3** La matriz de diagonalización S no es única. Las columnas de S pueden multiplicarse por constantes no nulas.
- Nota 4** Matrices S que no contengan los autovectores, no producen una diagonal. El orden de los autovectores en S es el mismo que el de los autovalores en Λ .
- Nota 5** No todas las matrices son diagonalizables. autovalores repetidos pueden o NO dar autovectores linealmente independientes.
- Nota 6** La invertibilidad de A depende de los autovalores no nulos.

Propiedad

Si A es diagonalizable y S diagonaliza a A , entonces S también diagonaliza a A^k y

$$\Lambda^k = (S^{-1}AS)(S^{-1}S)\dots(S^{-1}AS) = S^{-1}A^kS$$

La solución de una ecuación en diferencias $\mathbf{u}_{k+1} = A\mathbf{u}_k$ es

$$\mathbf{u}_k = A^k \mathbf{u}_0$$

Matriz exponencial $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$

La solución de la ecuación diferencial (SEDO) $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$ es

$$\mathbf{u}(t) = e^{At} \mathbf{u}_0$$

Si A es diagonalizable: $\mathbf{u}(t) = Se^{\Lambda t}S^{-1}\mathbf{u}_0 = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n$

Propiedad

Dos matrices diagonalizables A y B comparten los mismos autovectores (la misma matriz S) si y solo si $AB = BA$.

En este caso: Qué relación tienen los autovalores de AB con los autovalores de A y B ?

Definición

*Se dice que dos matrices A y B de $n \times n$ sobre el cuerpo K son **semejantes** si existe una matriz inversible M de $n \times n$ sobre K tal que: $B = M^{-1}AM$.*

- A y B tienen los mismos autovalores.
- el autovector \mathbf{x} de A corresponde al autovector $M^{-1}\mathbf{x}$ de B .
- A y B representan la misma transformación T respecto a bases diferentes:

$$[T]_{B'aB'} = [I]_{BaB'} [A]_{BaB} [I]_{BaB'}$$



Strang, G. Algebra lineal y sus aplicaciones, 4a Ed, Thomson, 2006.



Hoffman, K., Kunze, R. Algebra Lineal. 1 ºEd, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. 1973.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN!!

