Matemática IV
Transformaciones Lineales

A. Ridolfi (PT), M. Saromé (JTP)

UNCUYO - FCAI

Ingeniería Mecánica

2018

Contenido

- **Transformaciones Lineales**
- **Ejemplos**
- **Isomorfismo**

Definición (Transformaciones lineales)

Sean V y W. dos espacios vectoriales sobre el cuerpo K. Una transformación lineal de V en W es una función T de V en W tal que

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= T(\boldsymbol{x})+T(\boldsymbol{y}) \\ T(k\boldsymbol{x}) &= kT(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

para todos los vectores $\boldsymbol{x}$ *y* $\boldsymbol{y}$ *de* V *y todo escalar* k *de* K.

Ambas condiciones se pueden resumir en:

$$T(k_1\mathbf{x}+k_2\mathbf{y}) = k_1T(\mathbf{x})+k_2T(\mathbf{y})$$

Ejemplos

a) Si V es cualquier espacio vectorial, la transformación identidad I, definida por $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$, es una transformación lineal de V en V.

b) La transformación cero 0, definida por $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es una transformación lineal de V en V.

c) Sea A una matriz $m \times n$ sobre el cuerpo K. La función T definida por $T(x) = Ax$ es una transformación lineal de K^n en K^m.
En particular, cuando $K = \mathbb{R}$ tenemos las transformaciones de:
alargamiento,
rotación,
reflexión,
proyección,
cambio de base.
https://www.youtube.com/watch?v=IrggOvOSZr4
https://www.youtube.com/watch?v=LyGKycYT2v0
https://www.youtube.com/watch?v=P2LTAUO1TdA

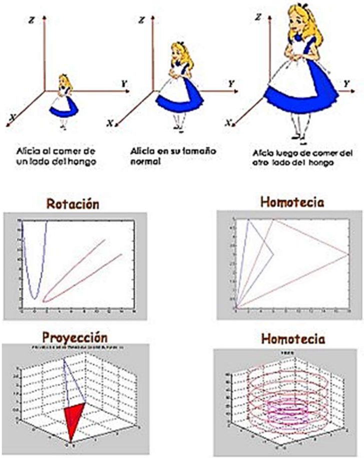

Imagen extraída de

http://algebra-ii.blogspot.com/2006/11/transformaciones-lineales.html

Ejemplos

d) Sea A una matriz $m \times n$. La función U definida por $U(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A$ es una transformación lineal de K^m en K^n.

e) Sea V el espacio vectorial de las funciones polinomios reales $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_k x^k\}$,
Transformación diferenciación $A : V \to V$ tal que

$$A_{dif} f(x) = \frac{d}{dx}(f) = c_1 + 2c_2 x + ... + kc_k x^{k-1}.$$

Transformación integración $A : V \to V$ tal que

$$A_{int} f(x) = \int_0^x f(t)\, dt = c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + ... + c_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Propiedades de las transformaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K y $L(V, W)$ el conjunto de las transformaciones lineales de V en W.

$$L(V, W) = \{T : V \to W : T \text{es una transformación lineal}\}$$

Dado $T \in L(V, W)$, consideremos los conjuntos:

Nulo de T $\quad N(T) = \{x \in V : T(x) = 0\}$

Imagen de T $\quad Im(T) = \{w \in W : w = T(x), \text{ para algún } x \in V\}$

- $N(T)$ es un subespacio de V; Nulidad:= dim($N(T)$).
- $Im(T)$ es un subespacio de W; Rango:= dim($Im(T)$).
- Si V es dimensión finita, entonces Rango + Nulidad = dim(V).
- $L(V, W)$ es un espacio vectorial.
- Si $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$ entonces $dim(L(V, W)) = nm$.

Propiedades de las transformaciones lineales

Operador Lineal: Transformación $T : V \rightarrow V$
Subespacio invariante: Subespacio S de V tal que existe un operador lineal $T : V \rightarrow V$ donde $T(S) \subset S$.
Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal

- T es inyectiva $\Leftrightarrow T(x) = T(y)$ implica que $x = y$;
- T es sobreyectiva $\Leftrightarrow Im(T) = W$;
- T es inversible $\Leftrightarrow \exists T^{-1} : W \rightarrow V \diagup T^{-1} \circ T = I$ y $T \circ T^{-1} = I$.
- T es no singular $\Leftrightarrow N(T) = \{0\}$

T inversible $\Leftrightarrow$ T inyectiva y sobreyectiva
T inyectiva $\Leftrightarrow$ T no singular $\Leftrightarrow$ T preserva conjuntos l. i.

- Si $dim(V) = dim(W) = n$ entonces

T inversible $\Leftrightarrow$ T inyectiva $\Leftrightarrow$ T sobreyectiva

Teorema

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita n y m respectivamente sobre un mismo cuerpo K. Sean B y B' bases ordenadas de V y W respectivamente. Para cada transformación lineal $T : V \rightarrow W$ existe una matriz $A_{m \times n} \in K^{mn}$ tal que

$$[T(x)]_{B'} = A\,[x]_B$$

Dem:

- Encontrar las matrices asociadas a las transformaciones: $A_{dif} : P_4 \rightarrow P_3$ y $A_{int} : P_3 \rightarrow P_4$.
  Comprobar que $A_{dif} A_{int} = I$
  Comentar que sucede con $A_{int} A_{dif}$
- $V = \mathbb{R}^2$ Encontrar la matiz que cambia de la base canónica a la base $B = \{[1,1]^T ; [-1,0]^T\}$

Teorema

Si A es la matriz que representa la transformación lineal de V a W y B es la matriz que representa la transformación lineal de U a V entonces la matriz producto AB es una transformación lineal de U a W y representa la composición de ambas transformaciones.

Verifica con un ejemplo que:

- Para rotaciones el orden de la multiplicación no importa.
- Para una rotación y una reflexión, el orden sí es importante.
- Proyectar dos veces es lo mismo que proyectar una vez, $P^2 = P$

Isomorfismo

Definición (Isomorfismo)

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Se dice que una transformación lineal $T : V \to W$ es un isomorfismo de V en W si T es inversible. En este caso se dice que V es isomorfo a W.

- Todo espacio vectorial real de dimensión finita n es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.
- El espacio fila es isomorfo al espacio columna.
- Si $dim(V) = n$; $dim(W) = m$ entonces $L(V, W)$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{n.m}$.

Bibliografía

Strang, G. Algebra lineal y sus aplicaciones, 4a Ed, Thomson, 2006.

Hoffman, K., Kunze, R. Algebra Lineal. 1°Ed, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. 1973.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN!!