

Matemática IV

Espacios Vectoriales

A. Ridolfi (PT), M. Saromé (JTP)

UNCUYO - FCAI



Ingeniería Mecánica



2019

- **Noción de Espacio Vectorial**
- **Subespacios**
- **Subespacios Fundamentales**
- **Independencia lineal**
- **Base y dimensión**
- **Suma directa**
- **Bibliografía**

Definición Espacio Vectorial ($V, K, +, \cdot$)

Sea K un cuerpo de escalares (\mathbb{R} ó \mathbb{C}), V un conjunto de objetos (llamados vectores), " $+$ " una función (llamada **adición**) que asocia a cada par de vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} de V un nuevo vector $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ de V (llamado suma de \mathbf{x} e \mathbf{y}), y " \cdot " una función (**multiplicación escalar**) que asocia a cada escalar k de K y cada vector \mathbf{x} de V un vector $k\mathbf{x}$ de V (producto de k y \mathbf{x}). Se dice que **V es un espacio vectorial sobre K** si se verifican las siguientes propiedades para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ de V y todo k_1, k_2 de K

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (la adición es conmutativa);
2. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ (la adición es asociativa);
3. Existe un único elemento $\mathbf{0}$ de V (vector nulo) tal que $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;
4. Para cada \mathbf{x} de V existe un único elemento $-\mathbf{x}$ de V (elemento opuesto), tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$;
5. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$, (1 es el elemento identidad del cuerpo K);
6. $(k_1 k_2)\mathbf{x} = k_1(k_2\mathbf{x})$;
7. $k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = k\mathbf{x} + k\mathbf{y}$;
8. $(k_1 + k_2)\mathbf{x} = k_1\mathbf{x} + k_2\mathbf{x}$.

- a. El espacio de las n -uplas K^n , en particular \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n
 $(K^n, K, +, \cdot)$; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$; $x_i \in K, i = 1, \dots, n$.
 $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$; $k\mathbf{x} = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$.
- b. El espacio de matrices $m \times n$, $K^{m \times n}$.
- c. El espacio de funciones de un conjunto en cuerpo.
- d. El espacio de los polinomios sobre el cuerpo.
 $f : K \rightarrow K$ tal que $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$; donde $a_n, \dots, a_0 \in K$.
- e. El espacio $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ (ojo!! este es distinto a $\mathbb{C}^n := (\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, +, \cdot)$).
- f. El espacio \mathbb{R}^∞ (espacio de sucesiones de números reales)

Subespacios Vectoriales

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K . Un subespacio de V es un subconjunto W de V , que con las operaciones de adición y multiplicación escalar es él mismo un espacio vectorial.

Teorema

Un subconjunto no vacío W de V es un subespacio de V si, y solo si, se cumplen las propiedades:

- *Para todo par de vectores \mathbf{x}, \mathbf{y} de W , la suma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ está en W .*
- *Para todo vector \mathbf{x} de W y todo escalar k de K , producto $k\mathbf{x}$ está en W .*

Observación: **El vector nulo siempre está en el subespacio.**

El menor subespacio posible de V (en sentido de \subset) es?

El mayor subespacio posible de V es?

Definición

Un vector \mathbf{x} de V se dice que es combinación lineal de los vectores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ si existen escalares k_1, \dots, k_n de K tales que

$$\mathbf{x} = k_1 \mathbf{x}_1 + \dots + k_n \mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{x}_i$$

Observación:

- Un subespacio vectorial contiene a todas las combinaciones lineales de sus elementos.
- Las combinaciones lineales siempre son finitas.
- Cuando todos los escalares son nulos se dice **combinación lineal trivial**
- Dados n vectores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ de un espacio vectorial V , el **subespacio generado por** $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de dichos vectores y se denota por:

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle := \{ \mathbf{w} \in V : \mathbf{w} = k_1 \mathbf{x}_1 + \dots + k_n \mathbf{x}_n; k_i \in K, i = 1, \dots, n \}$$

- Dados n vectores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ de un espacio vectorial V el **menor subespacio** que contiene a dichos vectores es:

$$W = \bigcap \{S : S \text{ es subespacio de } V \wedge \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset S\}$$

- El menor subespacio que contiene a n vectores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ de un espacio vectorial V es el conjunto de todas las combinaciones lineales de dichos vectores. Es decir:

$$\bigcap_{\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset S} S = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle$$

- En el espacio vectorial \mathbb{R}^2 ¿Qué representa gráficamente los conjuntos:

$$W_1 = \langle (1, 1) \rangle;$$

$$W_2 = \langle (1, 1); (-3, -3) \rangle;$$

$$W_3 = \langle (1, 1)(1, -1) \rangle$$

Ejemplos de Subespacios

- \mathbb{R} es un subespacio de \mathbb{R}^2 identificando $x \in \mathbb{R}$ con $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$.
- El espacio de los polinomios sobre un cuerpo K como subespacio de las funciones de K en K .
- El conjunto de las matrices simétricas $n \times n$ como subespacio de las matrices $n \times n$ sobre un cuerpo K
- El conjunto de las matrices Hermíticas (Hermitianas o Autoadjuntas) $n \times n$ como subespacio de las matrices $n \times n$.
Matriz adjunta de $A \rightarrow A^* (A^H) := \bar{A}^T$

$$A \text{ Hermítica} \iff A = A^*$$

Tarea: Escribe en forma genérica una matriz Hermítica 2×2 .

- $C[a, b]; C^n[a, b]; L_1[a, b]; L_2[a, b]; ; L_\infty[a, b]$ son subespacios del conjunto de las funciones reales definidas en el intervalo $[a, b]$.
- $c_0; \ell_1; \ell_2; \ell_\infty$ son subespacios del conjunto de las funciones reales definidas \mathbb{N} . **Tarea (P):** Verificar los dos últimos ítem.

Subespacios Fundamentales

Sea A una matriz $m \times n$, al sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$ se le asocian 4 subespacios fundamentales:

- **$C(A)$: Espacio Columna de A**

Es el espacio generado por todas las columnas de A .

$$C(A) := \langle \mathbf{a}(\bullet, 1); \dots; \mathbf{a}(\bullet, n) \rangle$$

De quién es subespacio?

Propiedad

El sistema $Ax = b$ es resoluble si b puede expresarse como combinación lineal de las columnas de A , e.d.

$$Ax = b \text{ es resoluble} \Leftrightarrow b \in C(A).$$

Dem:

Subespacios Fundamentales

- **$N(A)$: Espacio Nulo de A**

Es el espacio solución del sistema homogéneo $Ax = 0$.

De quién es subespacio?

- **$C(A^T)$: Espacio Fila de A**

Es el espacio generado por todas las filas de A (o columnas de A^T).

$$C(A^T) := \langle \mathbf{a}(1, \bullet); \dots; \mathbf{a}(n, \bullet) \rangle$$

De quién es subespacio?

- **$N(A^T)$: Espacio Nulo Izquierdo de A**

Es el espacio solución del sistema homogéneo $A^T y = 0$ (Espacio nulo de A^T).

De quién es subespacio?

Observación:

Si consideramos a A como una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , ¿Qué representan $C(A)$ y $N(A)$?

Independencia lineal

Sea S un subconjunto de un espacio vectorial V (sobre un cuerpo K), decimos que S es **linealmente dependiente** si existen vectores distintos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ de S y escalares k_1, \dots, k_n de K , no todos nulos, tales que

$$k_1 \mathbf{x}_1 + \dots + k_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice **linealmente independiente**, y si además S es un conjunto finito se dice que sus vectores son linealmente independientes.

E.d. $S = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ es l.i. si, y solo si, (completar)

Ejemplo:

- En $V = P_2$ el conjunto $S_1 = \{1, x, x^2, (x+1)^2\}$ es l.d. y el conjunto $S_2 = \{1, x, (x+1)^2\}$ es l.i.
- En $V = C(R)$ el conjunto $S_1 = \{\operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x), \cos(2x)\}$ es l.d. y el conjunto $S_2 = \{1, \operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(2x)\}$ es l.i.

Definición (Base)

Una base de un e.v. V es un conjunto linealmente independiente de V que genera el espacio V .

Observación:

- Cualquier subconjunto l. i. de V puede extenderse a una base, **agregando** vectores, si es necesario.
- Cualquier subconjunto generador de V puede reducirse a una base, **eliminando** vectores, si es necesario.

Definición (Coordenada)

*Dada una base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de un e.v. V y un vector no nulo $\mathbf{w} \in V$, existe una **única** combinación lineal de los vectores bases tal que $\mathbf{w} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \dots + k_n \mathbf{v}_n$. Los escalares k_1, k_2, \dots, k_n se llaman coordenadas del vector w respecto de la base B y se denota:*

$$[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}.$$

- K cuerpo; $V = K^n$; $S = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, donde

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

Entonces S es una base de K^n (**Base canónica**).

- Las columnas de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ son l. i. si y solo si $N(A) = \{\mathbf{0}\}$. Así A tiene inversa por izquierda y $B = \{\mathbf{a}(\bullet, 1); \dots; \mathbf{a}(\bullet, n)\}$ es un base de $\mathbf{C}(A) = \mathbb{R}^m$.
- En $V = \mathbb{R}^3$ Halla una base para el plano $x - 2y + 3z = 0$ y una para el conjunto de los vectores perpendiculares al plano.
- En $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$, encuentra una base para el subespacio de matrices diagonales.
- En $V = C^2(\mathbb{R})$, encuentre una base para el subespacio de las funciones que satisfacen: $y'' - 2y = 0$.

Teorema

Sea V un e.v. generado por un conjunto finito de n vectores, entonces todo subconjunto l. i. de V es finito y no contiene más de n vectores.

Corolario

Si V es un e.v. generado por un conjunto finito de vectores, entonces todas las bases de V tienen la misma cantidad de elementos.

Dem:

Así podemos definir la **dimensión** de un espacio vectorial de dimensión finita como el número de vectores de su base.

- El espacio V es de **dimensión finita** si tiene una base finita.
- El **subespacio trivial** ($S = \{0\}$) tiene dimensión 0.
- Si $\dim(V) = n$, todo subconjunto de V con más de n vectores es linealmente dependiente.
- Si $\dim(V) = n$, no hay un subconjunto de V con menos de n vectores que genere a V .

Suma de conjuntos

Sean W_1 y W_2 subconjuntos no vacíos de un espacio vectorial V , llamamos **suma de conjuntos** y lo denotamos $W_1 + W_2$ a:

$$W_1 + W_2 := \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in V : \mathbf{w}_1 \in W_1 \wedge \mathbf{w}_2 \in W_2\}.$$

- Si W_1 y W_2 son subespacios de V entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio de V .

Definición (Suma Directa)

*Si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial V y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ llamamos **suma directa** de W_1 y W_2 a la suma $W_1 + W_2$ y la denotamos por*

$$W_1 \oplus W_2$$

Ejemplo: Sea V el espacio vectorial de las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sea V_p el conjunto de las funciones pares y V_i el conjunto de las funciones impares. Entonces V_p y V_i son subespacios de V , $V = V_p + V_i$ y $V_p \cap V_i = \{0\}$. Es decir $V = V_p \oplus V_i$.

Propiedad

Sean W_1 y W_2 subespacios de V tales que $W_1 + W_2 = V$ y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ Entonces para todo $\mathbf{x} \in V$ existen únicos vectores $\mathbf{w}_1 \in W_1$ y $\mathbf{w}_2 \in W_2$ tales que $\mathbf{x} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$

Lema

Si W_1 y W_2 son subespacios de V de dimensión finita, entonces $W_1 + W_2$ es de dimensión finita y

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim (W_1 \cap W_2) + \dim (W_1 + W_2)$$

En Particular $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim (W_1 \oplus W_2)$.



Strang, G. Algebra lineal y sus aplicaciones, 4a Ed, Thomson, 2006.



Hoffman, K., Kunze, R. Algebra Lineal. 1 ºEd, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. 1973.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN!!

