Matemática IV
Autovalores y Autovectores

A. Ridolfi (PT), M. Saromé (JTP)

UNCUYO - FCAI

Ingeniera Mecánica

2018

Contenido

- **Autovalores y Autovectores**
- **Digonalización de una Matiz**
- **Transformaciones de Semejanza**
- **Ortogonalidad**
- **Mínimos cuadrados**
- **Bases ortogonales y Gran Schmidt**
- **Factorización A=QR**
- **Bibliografía**

Autovalores y Autovectores

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre K y sea T un operador lineal sobre V, Un autovalor (o valor propio) de T es un escalar λ de K tal que existe un vector no nulo $\mathbf{x} \in V$ con $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Si λ es un autovalor de T entonces:

a) *Cualquier $\mathbf{x}$ no nulo tal que $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ se llama autovector (o vector propio) de T asociado al autovalor λ.*

b) *La colección de todos los $\mathbf{x}$ tal que $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ se llama espacio propio asociado a λ.*

En particular, λ es un autovalor de una matriz $A_{n\times n}$ si y sólo si $A - \lambda I$ es singular:

$$det(A - \lambda I) = 0 \qquad \text{Ecuación Característica}$$

Cada λ está asociada con vectores caractersticos $\mathbf{x}$:

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0 \qquad \text{o bien} \qquad A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Propiedades

Si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ entonces, para el mismo $\mathbf{x}$,

- El autovector $\mathbf{x}$ está en la misma línea que $A\mathbf{x}$;
- $A^n\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x}, \quad n \in \mathbb{N}$;
- $A^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x}$ (si A es inversible)
- $(A + cI)\mathbf{x} = (\lambda + c)\mathbf{x}$.

Además

- La ecuación $det(A - \lambda I) = 0$ nos otorga n autovalores.
- $det(A) = (\lambda_1)(\lambda_2)...(\lambda_n)$.
- Traza de $A = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$.
- Las proyecciones tienen $\lambda = 1$ o $\lambda = 0$.
- Las reflexiones tienen $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$.
- Las rotaciones tienen autovalores complejos:$\lambda = e^{i\theta}$ o $\lambda = e^{-i\theta}$.

Ejemplos

- A Identidad $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- A Diagonal $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
- Proyección $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- A Triangular $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & \frac{3}{4} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Si $A = LU$ los autovalores de U están en la diagonal pero **NO** son los autovalores de A

Los vectores característicos diagonalizan una matriz

Propiedad

Suponga que $A_{n\times n}$ tiene n autovectores linealmente independientes. Si estos vectores son las columnas de una matriz S, entonces $S^{-1}AS$ es una matriz diagonal y los autovalores de A esatn sobre la diagonal:

Diagonalización
$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Demostración:

Probar que $AS = S\Lambda$

Nota 1 Si los autovectores $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ corresponden a k **autovalores distintos** entonces estos autovectores son **linelamente independientes**.

Nota 2 Si los n autovalores son distintos, entonces: **La matriz puede diagonalizarse**.

Nota 3 La matriz de diagonalizacin S no es única. Las columnas de S pueden multiplicarse por constantes no nulas.

Nota 4 Matrices S que no contengan los autovectores, no producen una diagonal. El oreden de los autovectores en S es el mismo que el de los autovalores en Λ.

Nota 5 No todas las matrices son diagonalizables. autovalores repetidos pueden o NO dar autovectores linealmente independientes.

Nota 6 La invertibilidad de A depende de los autovalores no nulos.

Propiedad

Si A es diagonalizable y S diagonaliza a A, entonces S también diagonaliza a A^k y

$$\Lambda^k = (S^{-1}AS)(S^{-1}S)...(S^{-1}AS) = S^{-1}A^kS$$

.

La solución de una ecuación en diferencias $\mathbf{u}_{k+1} = A\mathbf{u}_k$ es

$$\mathbf{u}_k = A^k\mathbf{u}_0$$

Matriz exponencial $\quad e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + ...$

La solución de la ecuación diferencial (SEDO) $\frac{\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$ es

$$\mathbf{u}(t) = e^{At}\mathbf{u}_0$$

Si A es diagonalizable: $\mathbf{u}(t) = Se^{\Lambda t}S^{-1}\mathbf{u}_0 = c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + ... + c_ne^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$

Propiedad

Dos matrices diagonalizables A y B comparten los mismos autovectores (la misma matriz S) si y solo si $AB = BA$.

En este caso: Qué relación tienen los autovalores de AB con los autovalores de A y B?

Definición

Se dice que dos matrices A y B de $n \times n$ *sobre el cuerpo* K *son* *semejantes* *si existe una matriz inversible M de* $n \times n$ *sobre* K *tal que:* $B = M^{-1}AM$.

- A y B tienen los mismos autovalores.
- el autovector $\mathbf{x}$ de A corresponde al autovector $M^{-1}\mathbf{x}$ de B.
- A y B representan la misma transformación T respecto a bases diferentes:

$$[T]_{B'aB'} = [I]_{BaB'}\,[A]_{BaB}\,[I]_{BaB'}$$

Orotgonalidad

Dos vectores **u** y **v** de $\mathbb{R}^n$ son **ortogonales** si

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = u_1 v_1 + ... + u_n v_n = 0$$

Además si $\|\mathbf{u}\| = \mathbf{v} = 1$ se dicen que son **ortonormales.**

Desigualdad de Schwarz $\quad | \mathbf{u}^T\mathbf{v} | \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$

- Si los vectores no nulos $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ son mutuamente ortogonales, entonces son linealmente independientes.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es resoluble si y slo si $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = 0$ siempre que $\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}$

Problema de mínimos cuadrados

Propiedad

Cuando $Ax = b$ *es inconsistente, su solución por mínimos cuadrados que minimiza* $\|Ax - b\|^2$*:*

$$\text{Ecuaciones normales } A^T A\hat{x} = A^T b.$$

$A^T A$ *es invertible cuando las columnas de A son linealmente independientes. Así,*

$$\text{Mejor estimación:} \qquad \hat{x} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b.$$

La proyección de b sobre el espacio columna es el punto más próximo $A\hat{x}$ *:*

$$\text{Proyección } p = A\hat{x} = Pb = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T b.$$

- $A^T A$ tiene el mismo espacio nulo que A.
- Si A tiene columnas independientes, entonces $A^T A$ es cuadrada, simtrica e inversible.

Propiedad

La matriz proyección $P = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T$ tiene dos propiedades fundamentales:

a) *Es igual a su cuadrado: $P^2 = P$.*

b) *Es igual a su traspuesta: $P^T = P$.*

Al revés, cualquier matriz simétrica con $P^2 = P$ representa una proyección.

Bases ortogonales

Los vectores $q_1, ..., q_n$ son ortonormales si

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Una matriz con columnas ortonormales se denomina Q.

Propiedad

Si Q (cuadrada o rectangular) tiene columnas ortonormales, entonces $Q^T Q = I$:

$$\begin{bmatrix} \dots q_1^T \dots \\ \dots q_2^T \dots \\ \dots \\ \dots q_n^T \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_n \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Una matriz ortogonal es una matriz cuadrada con columnas ortonormales. Por tanto, Q^T es Q^{-1}. Para matrices cuadradas ortogonales, la traspuesta es la inversa.

Example (rotación)

$$Q = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}, \qquad Q^T = Q^{-1} = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

Example (permutación)

Si $\quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ entonces $\quad P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Observar que las filas también son ortonormales ya que $QQ^T = I$.

Propiedad

La multiplicación por Q ***preserva las longitudes****:*

$$\|Q\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\| \text{ para todo } \boldsymbol{x}.$$

También preserva productos internos y ángulos, ya que

$$(Q\boldsymbol{x})^T (Q\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T Q^T Q\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}.$$

Dada Q ortogonal y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{q}_1 + x_2\mathbf{q}_2 + ... + x_n\mathbf{q}_n. \tag{1}$$

Multiplicando la ecuación (**??**) por q_j^T se obtiene que

$$x_j = \mathbf{q}_j^T\mathbf{b},$$

para $j = 1, ..., n$. Así

$$\mathbf{b} = \left(\mathbf{q}_1^T\mathbf{b}\right)\mathbf{q}_1 + \left(\mathbf{q}_2^T\mathbf{b}\right)\mathbf{q}_2 + ... + \left(\mathbf{q}_n^T\mathbf{b}\right)\mathbf{q}_n.$$

El proceso de Gram-Schmid

Propiedad

El proceso de Gram-Schmidt empieza con vectores independientes $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ *y termina con vectores ortonormales* $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n$. *En el paso j resta de* a_j *sus componentes en las direcciones* $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_{j-1}$ *que ya están establecidas:*

$$\boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{a}_j - \left(\boldsymbol{q}_1^T \boldsymbol{a}_j\right) \boldsymbol{q}_1 - \ldots - \left(\boldsymbol{q}_{j-1}^T \boldsymbol{a}_j\right) \boldsymbol{q}_{j-1}.$$

Luego, $\boldsymbol{q}_j$ *es el vector unitario* $\boldsymbol{c}_j \diagup \|\boldsymbol{c}_j\|$.

Factorización A=QR

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^T a & q_1^T b & q_1^T c \\ & q_2^T b & q_2^T c \\ & & q_3^T c \end{bmatrix} = Q\,R$$

Propiedad

Toda matriz $A_{m\times n}$ con columnas independientes puede factorizarse en $A = QR$. Las columnas de Q son ortonormales y R es triangular superior e inversible. Cuando A es cuadrada, Q y R también lo son y Q es ortogonal.

Bibliografía

Strang, G. Algebra lineal y sus aplicaciones, 4a Ed, Thomson, 2006.

Hoffman, K., Kunze, R. Algebra Lineal. 1Ed, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. 1973.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN!!