Matemática IV - Ing. Mecánica - 2019
Dra. Andrea Ridolfi
Ing. Marcos Saromé

Guía de Actividad 5:

Ejercicio 1.

Probar que si m y n son enteros,

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}d\theta = \begin{cases} 0 & cuando \quad m \neq n \\ 2\pi & cuando \quad m = n \end{cases}$$

Ejercicio 2.

Aplicar la desigualdad [10], Sección 30, para probar que en todo valor x del intervalo $-1 \leq x \leq 1$, las funciones

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n d\theta \; n = 0, 2, 3, \ldots.$$

satisfacen la desigualdad $|P_n(x)| \leq 1$

Ejercicio 3.

Supongamos que una función f(z) es analítica en un punto $z_0 = z_0(t)$ de un arco diferenciable $z = z(t)(a \leq t \leq b)$ Probar que si $w(t) = f[z(t)]$, entonces

$$w'(t) = f'[z(t)]z'(t)$$

cuando $t = t_0$

Sugerencia: Escribir $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $z(t) = x(t) + iy(t)$ de modo que

$$w(t) = u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(y)]$$

Aplicar entonces la regla de la cadena para funciones de dos variaables para escribir

$$w' = u_x x' + u_y y' + i(v_x x' + v_y y')$$

y utilizar las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Ejercicio 4.

Dados los contornos C y las funciones f usar representaciones paramétricas para C, o para los fragmentos de C, con el fin de calcular:

$$\int_C f(z)dz$$

$f(z) = (z + 2)/z$ y C es

1. el semicírculo $z = 2e^{i\theta}(0 \leq \theta \leq \pi)$
2. el semicírculo $z = 2e^{i\theta}(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$

3. el círculo $z = 2e^{i\theta}(0 \leq \theta \leq 2\pi)$

Ejercicio 5.

Sean C_1 y C_2 los círculos $z = Re^{i\theta}(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ y $z = z_0 + Re^{i\theta}(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ respectivamente. Usar estas representaciones paramétrica para probar que

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_0} f(z - z_0)dz$$

cuando f es continua a trozos sobre C

Ejercicio 6.

Sea C_0 el circulo $|z - z_0| = R$ en sentido contrario al de las agujas de un reloj. Usar la representación paramétrica $z = z_0 + Re^{i\theta}(-\pi \leq \theta \leq \pi)$ para C_0 con objeto de deducir las siguientes fórmulas de integración:

1. $\int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$
2. $\int_{C_0} (z - z_0)^{n-1} dz = 0 (n = \pm 1, \pm 2, ...)$
3. $\int_{C_0} (z - z_0)^{a-1} = i\frac{2R^a}{a} \operatorname{sen}(a\pi)$ donde a es cualquier número real distinto de cero y donde se toman la rama principal del integrando y el valor principal de R^a

Ejercicio 7.

Demostrar que si f es analítica en el interior de y sobre un contorno cerrado simple C y Z_0 no esta sobre C, entonces

$$\int_C \frac{f'(z)dz}{z - z_0} = \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2}$$

Ejercicio 8.

Sea C el círculo unidad $z = e^{i\theta}(-\pi \leq \theta \leq \pi)$. Probar en primer lugar que, para cualquier constante a real,

$$\int \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i$$

A continuación, escribir la integral en términos de θ para deducir la fórmula de integración

$$\int_0^\pi e^{a\cos\theta} \cos(a \operatorname{sen}\theta) d\theta = \pi$$

Ejercicio 9.

1. Con la ayuda de la fórmula binomial:

$$(z_1 + z_2)^n = z_1^n + \frac{n}{1!} z_1^{n-1} z_2 + \frac{n(n-1)}{2!} z_1^{n-2} z_2^2 + \dots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} z_1^{n-k} z_2^k + \dots + z_2^n$$

probar que para cada valor de n, la función

$$P_n(z) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n(n = 0, 1, 2, \dots)$$

es un polinomio de grado n

2. Sea C cualquier contorno cerrado simple positivamente orientado que rodea a un punto prefijado z. Con la ayuda de la representación integral:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_c \frac{f(s)ds}{(s-z)^{n+1}}\ (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para la n-ésima derivada de una función analítica, demostrar que los polinomios del inciso 1 se pueden expresar en la forma:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C \frac{(s^2-1)^n}{(s-z)^{n+1}}ds\ (n = 0, 1, 2, \dots)$$

3. Argumentar cómo el integrando en la representación del segundo inciso se puede escribir $(s+1)^n/(s-1)$ si $z = 1$. Aplicar entonces la fórmula integral de Cauchy para probar que $P_n(1) = 1(n = 0, 1, 2, \dots.)$. Análogamente, probar que $P_n(-1) = (-1)^n(n = 0, 1, 2, \dots)$

   donde z_1 y z_2 son números complejos arbitrarios, y n es un entero positivo $(n = 1, 2, \dots)$.

Ejercicio 10.

Probar de dos maneras que la sucesión

$$z_n = -2 + i\frac{(-1)^n}{n}(n = 1, 2, \dots)$$

converge a -2.

Ejercicio 11.

Sean r_n los módulos y Θ_n los argumentos principales de los números complejos z_n del Ejercicio anterior. Demostrar que la sucesión $r_n(n = 1, 2, \dots)$ converge, pero la sucesión $\Theta_n(n = 1, 2, \dots)$ no converge.

Ejercicio 12.

Probar que

$$\text{si } lim_{n\to\infty} z_n = z \text{ entonces } lim_{n\to\infty}|z_n| = |z|$$

Ejercicio 13.

Considerando los restos $\rho_N(z)$ comprobar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z} \text{ para } |z| < 1$$

Sugerencia: Usar la identidad (Ej 18, Sec 7)

$$1 + z + z + \ldots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}(z \neq 1)$$

para probar que $\rho_N(z) = z^{N+1}/(1 - z)$

Ejercicio 14.

Escribamos $z = re^{i\theta}$,con $0 < r < 1$, en la fórmula de suma obtenida en el ejercicio anterior. Probar entonces, con ayuda del Teorema 2 de la Sección 44, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r\cos\theta - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \operatorname{sen} n\theta = \frac{r\operatorname{sen}\theta - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

cuando $0 < r < 1$. (Nótese que estas fórmulas son asimismo válidas cuando r = 0 .)

Ejercicio 15.

Demostrar que *si* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} = \overline{S}$

Ejercicio 16.

Sea c cualquier número complejo. Probar que

si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = cS$

Ejercicio 17.

Teniendo en cuenta el resultado análogo para series reales, y por referencia al Teorema 2 de la Sección 44, probar que si

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = T$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(z_n + w_n) = S + T$

Ejercicio 18.

Hallar la representación en serie de Maclaurin

$$z\cosh(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{(2n)!} \; [|z| < \infty]$$

Ejercicio 19.

Hallar la serie de Maclaurin de la función

$$f(z) = \frac{z}{z^4 + 9} = \frac{z}{9}\left(\frac{1}{1 + (z^4/9)}\right) \tag{1}$$

Ejercicio 20.

Desarrollar $\cos z$ en serie de Taylor centrada en el punto $z = \pi/2$

Ejercicio 21.

Usar la relación $\operatorname{sen} z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$, junto con los ejercicios 16 y 17, al justificar ciertos pasos, para deducir la serie de Maclaurin de $\operatorname{sen} z$ a partir de la de e^x

Ejercicio 22.

Probar que

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + ... \ (0 < |z| < \infty)$$

Ejercicio 23.

Hallar una representación para $1/(1+z)$ en potencias negativas de z que sea válida cuando $1 < |z| < \infty$

Ejercicio 24.

Representar la función $(z+1)/(z-1)$ por

1. su serie de Maclaurin, y describir la región de validez de tal representación.
2. su serie de Laurent en el dominio $1 < |z| < \infty$.

Ejercicio 25.

Hallar el desarrollo en serie de Laurent para la función $1/(z-a)$ para el dominio $|a| < |z| < \infty$, donde a es real y $-1 < a < 1$. A continuación, escribir $z = e^{i\theta}$ para obtener las fórmulas de suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{a\cos\theta - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \operatorname{sen} n\theta = \frac{a \operatorname{sen}\theta}{a - 2a\cos\theta + a^2}$$

Ejercicio 26.

1. Sea z cualquier número complejo, y sea C el círculo unidad $w = e^{i\phi}$ para $(-\pi \leq \phi \leq \pi)$ en el plano w. Usar el contorno

   $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ para $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

   para los coeficientes de una serie de Laurent, adaptando a tales series en torno al origen del plano w, para demostrar que

   $$e^{\left[\frac{z}{2}(w - \frac{1}{w})\right]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) w^n \text{ para } (-\pi \leq \phi \leq \pi)$$

   donde

   $$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\phi - z\operatorname{sen}\phi)} d\phi \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

2. Con la ayuda del Ejercicio 7, Sección 31, relativo a ciertas integrales definidas de funciones complejas pares e impares de una variable real, probar que los coeficientes del inciso 1 se pueden escribir

   $$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\phi - z\operatorname{sen}\phi) d\phi \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Ejercicio 27. (Opcional)

1. Sea f una función analítica en un dominio anular en torno del origen que contiene al círculo unidad $z = e^{i\phi}(-\pi \leq \phi \leq \pi)$. Tomando ese círculo como camino de integración en las expresiones [2] y [3], sección 47, para los coeficientes a_n y b_n en una serie de Laurent en potencias de z, probar que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})d\phi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})\left[\left(\frac{z}{e^{i\phi}}\right)^n + \left(\frac{e^{i\phi}}{z}\right)^n\right]d\phi$$

cuando z es cualquier punto del dominio anular

2. Haciendo $u(\theta) = Re[f(e^{i\theta}]$, probar que del desarrollo del item 1 se sigue que

$$u(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\phi)d\phi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u(\phi)\cos[n(\theta-\phi)]d\phi$$

Esta es una forma de escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función real $u(\theta)$ en el intervalo $-\pi \leq \theta \leq \ pi$. La restricción sobre $u(\theta)$ es más severa de lo necesasrio para que sea factible tal representación en serie de Fourier.

Ejercicio 28. En cada caso, escribir la parte principal de la función en su punto aislado y determinar si se trata de un polo, un punto esencial o un punto singular evitable.

1. $ze^{1/z}$
2. $\frac{z^2}{1+z}$
3. $\frac{\text{sen}\, z}{z}$
4. $\frac{\cos z}{z}$
5. $\frac{1}{(2-z)^3}$

Ejercicio 29. En cada caso, escribir la parte principal de la función en su punto aislado y determinar si se trata de un polo, un punto esencial o un punto singular evitable.

1. $ze^{1/z}$
2. $\frac{z^2}{1+z}$
3. $\frac{\text{sen}\, z}{z}$
4. $\frac{\cos z}{z}$

5. $\dfrac{1}{(2-z)^3}$

Ejercicio 30. Calcular, usando residuos, las integrales de las funciones singulares sobre el círculo $z = 3$, positivamente orientado

1. $\dfrac{e^{-z}}{z^2}$
2. $z^2 e^{1/z}$
3. $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$

Ejercicio 31. Usar

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i Res_{z=0} \frac{1}{z^2} f(1/z) \tag{2}$$

para calcular la integral de f a lo largo del círculo $|z| = 2$ positivamente orientado, cuando f es

1. $\dfrac{z^5}{1-z^3}$
2. $\dfrac{1}{1+z^2}$
3. $\dfrac{1}{z}$

Ejercicio 32. Sea f la función dada por: $f(z) = ze^{2z}$

a) Exprese $f(z)$ de la forma: $f(z) = u(x,y) + \mathbf{i}v(x,y)$.

b) Encuentre y dibuje el imagen de la función cuando $z = iy$ $(x = 0)$ y cuando $z = x$ $(y = 0)$

c) Represente la función f por su serie de Maclaurin indicando la región de validez de tal representación. Desarrolle todos los pasos.

d) Eevalúe la integral

$$\int_C \frac{ze^{2z}}{z - \pi\mathbf{i}} dz$$

utilizando, en el caso que corresponda, la fórmula integral de Cauchy, cuando:

i) C es la circunferencia centrada en $z_0 = 0$ y de radio $R = 1$.

ii) C es la circunferencia centrada en $z_0 = 0$ y de radio $R = 4$.

Entrega

Se deben entregar obligatoriamente los ejercicios.