Matemática IV
Variable Compleja

A. Ridolfi (PT), M. Saromé (JTP)

UNCUYO - FCAI

Ingeniería Mecánica

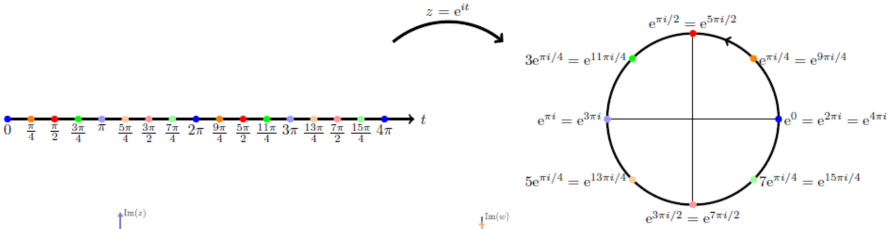
2019

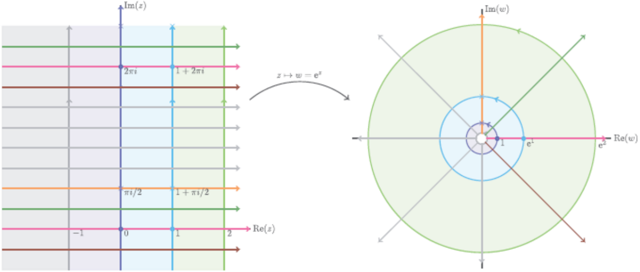
Contenido

Función exponencial

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\} \quad / \qquad f(z) = e^z = e^x\,(cos(y) + \imath sen(y))$$

- $e^0 = 1$
- $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$
- $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$
- $e^{z+2\pi i} = e^z$ (función periódica con periodo imaginario puro $2\pi i$)
- $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$
- $(e^z)^n = e^{nz}, \qquad n \in \mathbb{Z}$
- $\|e^z\| = e^x; \qquad arg(e^z) = y + 2n\pi$
- $e^z \neq 0, \qquad \forall z \in \mathbb{C}$


$z = e^{it}$
t
0 $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{4}$ π $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{2}$ $\frac{7\pi}{4}$ 2π $\frac{9\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{2}$ $\frac{11\pi}{4}$ 3π $\frac{13\pi}{4}$ $\frac{7\pi}{2}$ $\frac{15\pi}{4}$ 4π
$e^{\pi i/2} = e^{5\pi i/2}$
$3e^{\pi i/4} = e^{11\pi i/4}$
$e^{\pi i/4} = e^{9\pi i/4}$
$e^{\pi i} = e^{3\pi i}$
$e^{0} = e^{2\pi i} = e^{4\pi i}$
$5e^{\pi i/4} = e^{13\pi i/4}$
$7e^{\pi i/4} = e^{15\pi i/4}$
$e^{3\pi i/2} = e^{7\pi i/2}$


Im(z)
$2\pi i$
$1 + 2\pi i$
$\pi i/2$
$1 + \pi i/2$
-1
0
1
2
Re(z)
$z \mapsto w = e^z$
Im(w)
Re(w)
1
e^1
e^2

Funciones elementales

Funciones trigonométricas

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad / \qquad f(z) = sen(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$h : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad / \qquad h(z) = cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

- $\frac{d}{dz}(sen(z)) = cos(z)$; $\qquad \frac{d}{dz}(cos(z)) = -sen(z)$
- $sen(-z) = -sen(z)$; $\qquad cos(-z) = cos(z)$
- $cos^2(z) + sen^2(z) = 1$
- $sen(z + 2\pi) = sen(z)$; $\qquad cos(z + 2\pi) = cos(z)$.
  funciones periódicas con periodo 2π
- $cos(z) = cos(x)cosh(y) + isen(x)senh(y) = u(x, y) + iv(x, y)$
- $sen(z) = sen(x)cosh(y) + icos(x)senh(y) = u(x, y) + iv(x, y)$
  No son funciones acotadas.
- $sen(z) = 0 \Leftrightarrow z = n\pi$; $\qquad n \in \mathbb{Z}$.
- $cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = (n + 1/2)\pi$; $\qquad n \in \mathbb{Z}$.
  Sus ceros son reales.

Funciones hiperbólicas

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad / \qquad f(z) = senh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$h : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad / \qquad h(z) = cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

- $\frac{d}{dz}(senh(z)) = cosh(z)$; $\qquad \frac{d}{dz}(cosh(z)) = senh(z)$
- $senh(z) = -isen(iz)$; $\qquad cosh(z) = cos(z)$
- $cosh^2(z) - senh^2(z) = 1$
- $sen(z + 2\pi) = sen(z)$; $\qquad cos(z + 2\pi) = cos(z)$.
- Para x real, $cosh(x)$ es real y positivo, y $senh(x)$ es real.

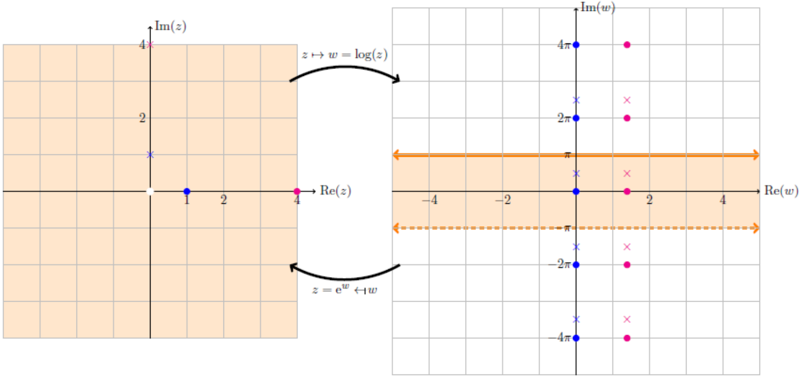
Función Logaritmo

$$f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} \quad / \qquad f(z) = log(z) = log(\|z\|) + i arg(z)$$

- $arg(z)$ tiene infinitos valore por lo tanto $log(z)$ en una función multivaluada.
- Si elegimos una **rama** de $arg(z)$ (es decir $\alpha < arg(z) < \alpha + 2\pi$) entonces $log(z)$ es una función univaluada y analítica.

Potencias complejas

$$z^a := e^{a.log(z)} \qquad \text{con } z \neq 0$$


Im(z)
4
2
1
2
4
Re(z)
z ↦ w = log(z)
z = e^w ↤ w
Im(w)
4π
2π
π
−π
−2π
−4π
−4
−2
2
4
Re(w)

Definición

Sea $A \subset \mathbb{C}$,un conjunto y $a \in \mathbb{C}$ un número complejo. Se dice que a es:

- *un **punto interior** de A si existe una bola centrada en a totalmente contenida en el conjunto A.*
- *un **punto de acumulación** de A si toda bola centrada en a, sin su centro, tiene intersección no vacía con el conjunto A.*
- *un **punto frontera** de A si toda bola centrada en a, tiene intersección no vacía con el conjunto A y con su complemento A^C.*
- *un **punto aislado** de A si pertene al conjunto A pero no es punto de acumulación de A.*

Definición

Sea $A \subset \mathbb{C}$,un conjunto y $a \in \mathbb{C}$ un número complejo. Se dice que A es:

- *Acotado si A está incluída en una bola centrada en 0.*
- *Abierto si todos sus puntos son interiores.*
- *Cerrado si su complemento A^C es abierto.*
- *Conexo si cada par de puntos z_1 y z_2 de A puede unirse por una línea pligonal enteramente contenida en A.*
- *Compacto si es cerrado y acotado.*

Definición

*Sea $A \subset \mathbb{C}$, una función $f : A \to \mathbb{C}$ se dice **analítica** (holomorfa / regular) en un **conjunto abierto** si tiene derivada en todo punto de ese abierto.*

- *Dado $S \subset \mathbb{C}$ se dice que f es analítica en S si f es analítica en un conjunto abierto que contiene a S.*
- *Se dice que f es analítica en z_0 si f es analítica en $B(z_0, \epsilon)$.*
- *Se dice que f es **entera•** si f es analítica en $\mathbb{C}$.*
- *Se dice que z_0 es un **punto singular** de f si f es analítica en $B^r(z_0, \epsilon)$ y no es analítica en z_0.*

Ejemplo:

- $f(z) = \dfrac{1}{z}$ es analítica en todo $z \neq 0$, es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$.
- $f(z) = \|z\|^2$ no es analítica (en ningún punto).

Propiedades

La suma, el producto, el cociente (bajo la restricción de no dividir por cero) y la composición (siempre que esté definida) de funciones analíticas en un dominio D es analítica en D.
Diminio: región abierta y conexa.
Condiciones necesarias para que una función sea analítica en un dominio D:

- Que f sea continua en D;
- Que se cumplan las ecuaciones de Cauchy- Riemann en D.

Condición suficiente para que una función ($f = u + iv$) sea analítica en un dominio D:

- que $u_x; u_y; v_x; v_y$ sean continuas en D y que
- se cumplan las ecuaciones de Cauchy- Riemann en D.

Propiedad: Si $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$ (D dominio), entonces $f(z) = cte.$ en D.

Definición

*Un campo escalar $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice que es **armónica** en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ si*

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = 0 \tag{1}$$

para todo $(x, y) \in D$.

La ecuación (1) se conoce como **Ecuación de Laplace** y se denota por

$$\Delta h = 0$$

Videos sobre Laplaceano:
https://www.youtube.com/watch?v=9ha1e0z5MEc
https://www.youtube.com/watch?v=Ec3-DIOadFU

Armónicas conjugadas

Teorema

Si una función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en un dominio D entonces las funciones u y v son armónicas en D.

Dem:(Hacer)

Si dos funciones u y v son armónicas en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ y sus derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy- Riemann en D se dice que v **es armónica conjugada** de u

Teorema

Una función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en un dominio D si y sólo si v es una armónica conjugada de u.

Ejemplo:

$$h(z) = z^2 e^z$$

$u = Re(h(z))$ es armónica en $\mathbb{R}^2$

$v = Im(h(z))$ es armónica en $\mathbb{R}^2$.

Nota 1 Si v es armónica conjugada de u y u es armónica conjugada de v entonces ambas funciones son constantes.

Nota 2 Si v es armónica conjugada de u entonces $-u$ es armónica conjugada de v, ya que

$$f = u + iv; \qquad \Leftrightarrow \qquad -if = v - iu$$

- Dada la función armónica: $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$
  ¿Cuál es la armónica conjugada de u?

Bibliografía

Churchill, Ruel V. y Brown, James W. Variable Compleja y Aplicaciones, 5ta Ed, McGrawHill, 1992.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN!!