Matemática IV - Ing. Mecánica - 2018
Dra. Andrea Ridolfi
Ing. Marcos Saromé

Guía de Actividad 2: Autovalores y autovectores

Ejercicio 1. La molécula de metano $CH4$ está dispuesta como si el átomo de carbono estuviese en el centro de un tetraedro regular con cuatro átomos de hidrógeno en los vértices. Si los vértices están en $(0,0,0),(1,1,0),(1,0,1)$ y $(0,1,1)$ – obseve que la longitud de todas las seis aristas es $\sqrt{2}$ de modo que el tetraedro es regular-, ¿Cuál es el coseno del ángulo formado por los rayos que van del centro $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ a los vértices? (El ángulo de enlace en si mide $109,5°$, un viejo conocido de los químicos)

Ejercicio 2. Encuentre la matriz que proyecta todo punto en el plano sobre la recta $x+2y=0$.

Ejercicio 3. Demuestre que la traza de $P = \mathbf{a}\mathbf{a}^T \backslash \mathbf{a}^T\mathbf{a}$ (que es la suma de sus elementos diagonales) siempre es igual a 1.

Ejercicio 4. Suponga que P es la matriz proyección sobre la recta que pasa por $\mathbf{a}$.

a) ¿Por qué el producto interno de $\mathbf{x}$ con $P\mathbf{y}$ es igual al producto interno de $P\mathbf{x}$ con y?.

b) ¿Son iguales los dos ángulos? Encuentre sus cosenos si $a=(1,1,-1)$, $x=(2,0,1)$ e $y=(2,1,2)$.

c) ¿Por qué el producto interno de $P\mathbf{x}$ con $P\mathbf{y}$ siempre es el mismo? ¿Cuál es el ángulo entre $P\mathbf{x}$ y $P\mathbf{y}$?

Ejercicio 5. Proyecte el vector $b=(1,1)$ sobre las rectas que pasan por $a_1=(1,0)$ y $a_2=(1,2)$.

a) Trace las proyecciones p_1 y p_2 y sume p_1+p_2. La suma de las proyecciones no es b porque las $a's$ no son ortogonales.

b) La proyección de b sobre el plano de a_1 y a_2 es igual a b. Encuentre $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ para $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6. Este problema proyecta $b=(b_1,...,b_m)$ sobre la recta que pasa por $a=(1,...,1)$. Se resuelven m ecuaciones $ax=b$ en 1 incógnita (por mínimos cuadrados).

a) Resuelva $\mathbf{a}^T\mathbf{a}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$ para demostrar que $\hat{\mathbf{x}}$ es la media (el promedio) de las $b's$.

b) Encuentre $\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{a}\hat{\mathbf{x}}$, la varianza $\sigma^2 = \|\mathbf{e}\|^2$ y la desviación estándar $\sigma = \|\mathbf{e}\|$.

c) La recta horizontal $\hat{\mathbf{b}} = 3$ es la más próxima a $\mathbf{b}=(1,2,6)$. Compruebe que $\mathbf{p}=(3,3,3)$ es perpendicular a $\mathbf{e}$, y encuentre la matriz proyección P.

Ejercicio 7. Un doctor toma 4 lecturas del ritmo cardíaco de una persona. La mejor solución de $x = b_1, ..., x = b_4$ es el promedio $\hat{x}$ de $b_1, ..., b_4$. La matriz A es la columna de $1's$. Dado el error esperado $(\hat{x} - x)^2$ como $\sigma^2(A^T A)^{-1} =$ .... Al promediar, la varianza cae desde σ^2 hasta $\frac{\sigma^2}{4}$.

Ejercicio 8. Si $A = QR$, encuentre un fórmula sencilla para la matriz proyección P sobre el espacio columna de A.

Ejercicio 9. Resuelva $\frac{du}{dt} = Pu$ cuando P es una proyección:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Parte de $u(0)$ crece exponencialmente mientras la parte del espacio nulo, permanece fija.

Ejercicio 10. Los valores característicos de A son iguales a los valores característicos de A^T. Esto se debe a que $det\,(A - \lambda I)$.Lo anterior es cierto porque ....
Demuestre con un ejemplo que los vectores característicos de A y A^T no son los mismos.

Ejercicio 11. Encuentre los valores característicos y los vectores característicos de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Ejercicio 12. Suponga que los valores característicos de A son $0, 3, 5$, con vectores característicos independientes u, v, w.

a) Proporcione una base para el espacio nulo y una base para el espacio columna.

b) Encuentre una solucíon particular de $Ax = v + w$. Encuentre todas las soluciones.

c) Demuestre que $Ax = u$ no tiene solucíon. (En caso de tenerla, entonces..... estaría en el espacio columna.)

Ejercicio 13. Suponga que A y B tienen los mismos valores característicos $\lambda_1, ..., \lambda_n$. con los mismos vectores característicos independientes $\chi_1, ..., \chi_n$. Así, $A = B$. Razón: Cualquier vector x es una combinacíon $c_1\chi_1 + ... + c_n\chi_n$. ¿Cuál es Ax? ¿Cuál es Bx?

Ejercicio 14. ¿Qué se hace a $Ax = \lambda x$, para demostrar los incisos a), b), y c)?

a) λ^2 es un valor caracteístico de A^2.

b) λ^{-1} es un valor característico de A^{-1}.

c) $\lambda + 1$ es un valor característico de $A + I$.

Ejercicio 15.

a) Construya matrices 2 por 2 tales que los valores característicos de $A\,B$ no sean los productos de los valores característicos de A y B, y los valores característicos de $A+B$ no sean las sumas de los valores característicos individuales.

b) Compruebe, no obstante, que la suma de los valores característicos de $A+B$ es igual a la suma de todos los valores característicos individuales de A y B, y de manera semejante para los productos. ¿Por qué es cierto lo anterior?

Ejercicio 16. Se sabe que los valores característicos de una matriz B de 3 por 3 son $0, 1, 2$. Esta información es suficiente para encontrar tres de los cuatro incisos siguientes:

a) El rango de A.

b) El determinante de BTB,

c) Los valores característicos de BTB

d) Los valores característicos de $(B+I)-1$

Ejercicio 17. La siguiente matriz es singular con rango 1. Encuentre tres $\lambda's$ y tres vectores característicos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 18. Si a $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, encuentre A^{100}, diagonalizando A.

Ejercicio 19. Suponga que $A = uv^T$ es una columna multiplicada por un reglón (una matriz con rango 1).

a) Multiplique A por u, para demostrar que u es un vector característico. ¿Cuál es λ?

b) ¿Cuáles son los otros valores característicos de A (y por qué)?

c) Calcule traza (A), a partir de la suma de la diagonal y la suma de los λs.

Ejercicio 20. Suponga que los valores características de A son $1, 2, 4$. ¿Cuál es la traza de A^2?¿Cuál es el determinante de $(A^{-1})^T$?

Ejercicio 21. Suponga que $A = S\Lambda S^{-1}$. Tome determinantes para demostrar que $A = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n =$ producto de λs. Esta rápida demostracíon sólo funciona cuando A es......

Ejercicio 22. Suponga que la población de conejos r, y la poblacíon de lobos w están regidas por

$$\frac{dr}{dt} = 4r - 2w$$
$$\frac{dw}{dt} = r + w.$$

a) Este sistema es ¿estable, neutralmente estable o inestable?

b) Si inicialmente $r = 300$ y $w = 200$, ¿Cuáles son las poblaciones en el instante t?

c) Al cabo de bastante tiempo, ¿cuál es la proporción de conejos a lobos?

Ejercicio 23. Entre dos habitaciones con aforo para $v(0) = 30$ personas y $w(0) = 10$ personas se abre una puerta. El movimínto entre las habitaciones es proporcional a la diferencia $v - w$:

$$\frac{dv}{dt} = w - v \qquad y \qquad \frac{dw}{dt} = v - w.$$

Demuestre que el total $v + w$ es constante (40 personas). Encuentre la matriz en $\frac{du}{dt} = Au$, así como sus valores característicos y vectores característicos. ¿Cuáles son v y w en $t = 1$?

Entrega

Se deben entregar obligatoriamente los ejercicios: