Matemática IV
Integrales en Variable Compleja

A. Ridolfi (PT), M. Saromé (JTP)

UNCUYO - FCAI

Ingeniera Mecánica

2018

Contenido

- Arco de Jordan (Arco simple) : curva dada por $z(t)$ continua y que no se corta a sí misma.
- Arco diferenciable: curva dada por $z(t)$ con derivada $z'(t)$ continua.
- Arco suave: curva dada por $z(t)$ con derivada $z'(t)$ continua y no nula $(z'(t) \neq 0)$.
- Contorno: arco suave a trozo (pede cortarse a s mismo)
- Contorno cerrado simple: Curva de Jordan suave y cerrada.
- Región conexa: conjunto conexo (dos puntos cualquiera del conjunto se pueden unir por un arco dentro del conjunto).
- Región simplemente conexa: Todo arco cerrado dentro de la región tiene su interior contenido en la regin (no tiene agujeros).

Primitivas

Definición

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f : D \to \mathbb{C}$ una función continua. Se dice F es una primitiva en D de f si $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D$.

Teorema

Sea $f(z)$ una función continua en un dominio D. Son equivalentes:

a) *f tiene una primitiva F en D.*

b) *Las integrales de línea a través de contornos contenidos en D que une los puntos z_1 y z_2 tienen el mismo valor (independencia de la trayectoria). Además:*

$$\int_C f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_1) - F(z_2)$$

c) *Las integrales de línea a través de contornos cerrados contenidos (junto con su inerior) en D tienen el mismo valor (cero).*

Teorema (Cauchy-Goursat)

Si una función f es analtica en un contorno cerrado simple C y en los puntos interiores a C entonces:

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Teorema (Extensión del T. C-G)

Si una función f es analtica en un dominio simplemente conexo E entonces:

$$\int_C f(z)dz = 0$$

para todo contorno cerrado (no necesariamente simple) C contenido en E.

Demostración:

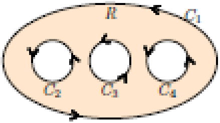
- Si f es analítica en un dominio simplemente conexo E tiene una

Consecuencias

Teorema

Si R es la regin comprendida en el interior del contorno cerrrado simple con orientación positiva C y el exterior de los contornos cerrados simples con orientación negativa $C_1; ...; C_n$(con interiores disjuntos) y f es analítica en R entonces:

$$\int_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{C_i} f(z)dz$$



$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz + \int_{-C_3} f(z)dz + \int_{-C_4} f(z)dz = 0$$

Fórmula integral de Cauchy

Teorema (Fórmula integral de Cauchy)

Sea f es analítica en el interior del contorno cerrado simple con orientación positiva C y sobre C.

a) *Si z_0 está en el interior de C entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

b) *Si z_0 está en el exterior de C entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

Teorema (Fórmula integral de Cauchy para la derivada)

Sea f es analítica en el interior del contorno cerrrado simple con orientación positiva C y sobre C. Si z_0 está en el interior de C entonces f tiene dervada de todos los rdenes en z_0 y

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz; \qquad n \in \mathbb{N}$$

Si f es analítica en un punto, sus derivadas de todos los ódenes son funciones analíticas en ese punto.

Teorema (de Morera)

Si f es continua en un dominio D y si $\int_C f(z)dz = 0$ para todo contorno cerrado C en D, entonces f es analítica en D.

Lema: Si f es analítica en un entorno $B(z_0, \epsilon)$ y si $\|f(z)\| \leq \|f(z_0)\|$ para todo $z \in B(z_0, \epsilon)$, entonces f es constante con valor $f(z_0)$ en ese entorno.

Teorema (Principio del Módulo Máximo)

Si una función f es analítica y no constante en un dominio D, entonces f no tiene un valor máximo en D.

Si f es continua en una región cerrada y acotada R, analtica y no constante en el interior de R, entonces el máximo valor de $\|f(z)\|$ en R se alcanza y ocurre en la frontera de R.

- Si f es entera y acotada en $\mathbb{C}$ entonces f es constante en $\mathbb{C}$.

Teorema (Fundamental del Álgebra)

Todo polinomio $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$; ($a_n \neq 0$) tiene al menos un cero.

Bibliografía

Churchill, Ruel V. y Brown, James W. Variable Compleja y Aplicaciones, 5ta Ed, McGrawHill, 1992.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN!!