UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO | FACULTAD DE CIENCIAS APLICADAS A LA INDUSTRIA

Matemática IV - Ing. Mecánica - 2019
Dra. Andrea Ridolfi
Ing. Marcos Saromé

Guía de Actividad 2: Autovalores y autovectores

Ejercicio 1. Encuentre la matriz que proyecta todo punto en el plano sobre la recta $x+2y=0$.

Ejercicio 2. Suponga que P es la matriz proyección sobre la recta que pasa por $\mathbf{a}$.

a) ¿Por qué el producto interno de $\mathbf{x}$ con $P\mathbf{y}$ es igual al producto interno de $P\mathbf{x}$ con y?.

b) ¿Son iguales los dos ángulos? Encuentre sus cosenos si $a=(1,1,-1)$, $x=(2,0,1)$ e $y=(2,1,2)$.

c) ¿Por qué el producto interno de $P\mathbf{x}$ con $P\mathbf{y}$ siempre es el mismo? ¿Cuál es el ángulo entre $P\mathbf{x}$ y $P\mathbf{y}$?

Ejercicio 3. Proyecte el vector $b=(1,1)$ sobre las rectas que pasan por $a_1=(1,0)$ y $a_2=(1,2)$.

a) Trace las proyecciones p_1 y p_2 y sume p_1+p_2. La suma de las proyecciones no es b porque las $a's$ no son ortogonales.

b) La proyección de b sobre el plano de a_1 y a_2 es igual a b. Encuentre $P=A(A^TA)^{-1}A^T$ para $A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$.

Ejercicio 4. Este problema proyecta $b=(b_1,...,b_m)$ sobre la recta que pasa por $a=(1,...,1)$. Se resuelven m ecuaciones $ax=b$ en 1 incógnita (por mínimos cuadrados).

a) Resuelva $\mathbf{a}^T\mathbf{a}\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ para demostrar que $\hat{\mathbf{x}}$ es la media (el promedio) de las $b's$.

b) Encuentre $\mathbf{e}=\mathbf{b}-\mathbf{a}\hat{\mathbf{x}}$, la varianza $\sigma^2=\|\mathbf{e}\|^2$ y la desviación estándar $\sigma=\|\mathbf{e}\|$.

c) La recta horizontal $\hat{\mathbf{b}}=3$ es la más próxima a $\mathbf{b}=(1,2,6)$. Compruebe que $\mathbf{p}=(3,3,3)$ es perpendicular a $\mathbf{e}$, y encuentre la matriz proyección P.

Ejercicio 5. Un Ingeniero toma 4 mediciones de espesor en una caldera. La mejor solución de $x=b_1,...,x=b_4$ es el promedio $\hat{x}$ de $b_1,...,b_4$. La matriz A es la columna de $1's$. Dado el error esperado $(\hat{x}-x)^2$ como $\sigma^2(A^TA)^{-1}=$ .... Al promediar, la varianza cae desde σ^2 hasta $\frac{\sigma^2}{4}$.

Ejercicio 6. Si $A=QR$, encuentre un fórmula sencilla para la matriz proyección P sobre el espacio columna de A.
Nota: QR es la factorización de A donde las columnas de Q son ortonormales y R es una matriz triangular superior invesible.

Ejercicio 7. Resuelva $\frac{du}{dt}=Pu$ cuando P es una proyección:

$$\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

Parte de $u(0)$ crece exponencialmente mientras la parte del espacio nulo, permanece fija.

Ejercicio 8. Los valores característicos de A son iguales a los valores característicos de A^T. Esto se debe a que $det\,(A - \lambda I)$.Lo anterior es cierto porque ....
Demuestre con un ejemplo que los vectores característicos de A y A^T no son los mismos.

Ejercicio 9. Encuentre los valores característicos y los vectores característicos de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Ejercicio 10. Suponga que los valores característicos de A son $0, 3, 5$, con vectores característicos independientes u, v, w.

a) Proporcione una base para el espacio nulo y una base para el espacio columna.

b) Encuentre una solucíon particular de $Ax = v + w$. Encuentre todas las soluciones.

c) Demuestre que $Ax = u$ no tiene solucíon. (En caso de tenerla, entonces..... estaría en el espacio columna.)

Ejercicio 11. ¿Qué se hace a $Ax = \lambda x$, para demostrar los incisos a), b), y c)?

a) λ^2 es un valor caracteístico de A^2.

b) λ^{-1} es un valor característico de A^{-1}.

c) $\lambda + 1$ es un valor característico de $A + I$.

Ejercicio 12.

a) Construya matrices 2 por 2 tales que los valores característicos de $A\ B$ no sean los productos de los valores característicos de A y B, y los valores característicos de $A + B$ no sean las sumas de los valores característicos individuales.

b) Compruebe, no obstante, que la suma de los valores característicos de $A + B$ es igual a la suma de todos los valores característicos individuales de A y B, y de manera semejante para los productos. ¿Por qué es cierto lo anterior?

Ejercicio 13. Se sabe que los valores característicos de una matriz B de 3 por 3 son $0, 1, 2$. Esta información es suficiente para encontrar tres de los cuatro incisos siguientes:

a) El rango de A.

b) El determinante de BTB,

c) Los valores característicos de BTB

d) Los valores característicos de $(B + I) - 1$

Ejercicio 14. Suponga que los valores características de A son $1, 2, 4$. ¿Cuál es la traza de A^2?¿Cuál es el determinante de $(A^{-1})^T$?

Ejercicio 15. La siguiente matriz es singular con rango 1. Encuentre tres $\lambda's$ y tres vectores característicos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 16. Suponga que $A = uv^T$ es una columna multiplicada por un reglón (una matriz con rango 1).

a) Multiplique A por u, para demostrar que u es un vector característico. ¿Cuál es λ?

b) ¿Cuáles son los otros valores característicos de A (y por qué)?

c) Calcule traza (A), a partir de la suma de la diagonal y la suma de los λs.

Ejercicio 17. Si a $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, encuentre A^{100}, diagonalizando A.

Ejercicio 18. Suponga que $|A| = S\Lambda S^{-1}$. Tome determinantes para demostrar que $A = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n =$ producto de λs. Esta rápida demostracíon sólo funciona cuando A es......

Ejercicio 19. Suponga que la población de conejos r, y la poblacíon de lobos w están regidas por

$$\frac{dr}{dt} = 4r - 2w$$
$$\frac{dw}{dt} = r + w.$$

a) Este sistema es ¿estable, neutralmente estable o inestable?

b) Si inicialmente $r = 300$ y $w = 200$, ¿Cuáles son las poblaciones en el instante t?

c) Al cabo de bastante tiempo, ¿cuál es la proporción de conejos a lobos?

Ejercicio 20. Entre dos habitaciones con aforo para $v(0) = 30$ personas y $w(0) = 10$ personas se abre una puerta. El movimento entre las habitaciones es proporcional a la diferencia $v - w$:

$$\frac{dv}{dt} = w - v \qquad y \qquad \frac{dw}{dt} = v - w.$$

Demuestre que el total $v + w$ es constante (40 personas). Encuentre la matriz en $\dfrac{du}{dt} = Au$, así como sus valores característicos y vectores característicos. ¿Cuáles son v y w en $t = 1$?

Entrega

Se deben entregar obligatoriamente los ejercicios: