Matemática IV
Espacios Vectoriales

A. Ridolfi (PT), M. Saromé (JTP)

UNCUYO - FCAI

Ingeniería Mecánica

2019

Contenido

- **Noción de Espacio Vectorial**
- **Subespacios**
- **Subespacios Fundamentales**
- **Independencia lineal**
- **Base y dimensión**
- **Suma directa**
- **Bibliografía**

Definición Espacio Vectorial (V, K, +, .)

Sea K un cuerpo de escalares ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), V un conjunto de objetos (llamados vectores), $"+"$ una función (llamada adición) que asocia a cada par de vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de V un nuevo vector $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ de V (llamado suma de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$), y $"."$ una función (multiplicación escalar) que asocia a cada escalar k de K y cada vector $\mathbf{x}$ de V un vector $k\mathbf{x}$ de V (producto de k y $\mathbf{x}$). Se dice que V es un espacio vectorial sobre K si se verifican las siguientes propiedades para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ de V y todo k_1, k_2 de K

1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ (la adición es conmutativa);
2. $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$ (la adición es asociativa);
3. Existe un único elemento $\mathbf{0}$ de V (vector nulo) tal que $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$;
4. Para cada $\mathbf{x}$ de V existe un único elemento $-\mathbf{x}$ de V (elemento opuesto), tal que $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$;
5. $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$, (1 es el elemento identidad del cuerpo K);
6. $(k_1k_2)\mathbf{x}=k_1(k_2\mathbf{x})$;
7. $k(\mathbf{x}+\mathbf{y})=k\mathbf{x}+k\mathbf{y}$;
8. $(k_1+k_2)\mathbf{x}=k_1\mathbf{x}+k_2\mathbf{x}$.

Ejemplos

a. El espacio de las n-uplas K^n, en particular $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$
$(K^n, K, +, .)$; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$; $x_i \in K, i = 1, ..., n$.
$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$; $k\mathbf{x} = (kx_1, kx_2, ..., kx_n)$.

b. El espacio de matrices $m \times n$, $K^{m \times n}$.

c. El espacio de funciones de un conjunto en cuerpo.

d. El espacio de los polinomios sobre el cuerpo.
$f : K \to K$ tal que $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$; donde $a_n, ..., a_0 \in K$.

e. El espacio $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, +, .)$ (ojo!! este es distinto a $\mathbb{C}^n := (\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, +, .)$).

f. El espacio $\mathbb{R}^\infty$ (espacio de sucesiones de números reales)

Subespacios Vectoriales

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K. Un subespacio de V es un subconjunto W de V, que con las operaciones de adición y multiplicación escalar es él mismo un espacio vectorial.

Teorema

Un subconjunto no vacío W de V es un subespacio de V si, y solo si,se cumplen las propiedades:

- *Para todo par de vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ de W, la suma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ está en W.*
- *Para todo vector $\mathbf{x}$ de W y todo escalar k de K, producto $k\mathbf{x}$ está en W.*

Observación: El vector nulo siempre está en el subespacio.
El menor subespacio posible de V (en sentido de $\subset$)es?
El mayor subespacio posible de V es?

Definición

Un vector $\boldsymbol{x}$ de V se dice que es combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n$ si existen escalares $k_1, ..., k_n$ de K tales que

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{x}_1 + ... + k_n\boldsymbol{x}_n = \sum_{i=1}^{n} k_i\boldsymbol{x}_i$$

Observación:

- Un subespacio vectorial contiene a todas las combinaciones lineales de sus elementos.
- Las combinaciones lineales siempre son finitas.
- Cuando todos los esccalares son nulos de dice combinación lineal trivial
- Dados n vectores $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ de un espacio vectorial V, el subespacio generado por $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de dichos vectores y se denota por:

$$\langle \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n \rangle := \{\mathbf{w} \in V : \mathbf{w} = k_1\mathbf{x}_1 + ... + k_n\mathbf{x}_n; k_i \in K, i = 1, ..., n\}$$

.

- Dados n vectores $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ de un espacio vectorial V el menor subespacio que contiene a dichos vectores es:

$$W = \bigcap \{S : S \text{ es subespacio de } V \wedge \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\} \subset S\}$$

- El menor subespacio que contiene a n vectores $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ de un espacio vectorial V es el conjunto de todas las combinaciones lineales de dichos vectores. Es decir:

$$\bigcap_{\{\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n\} \subset S} S = \langle \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n \rangle$$

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ ¿Qué representa gráficamente los conjuntos:
  $W_1 = \langle (1, 1) \rangle$;
  $W_2 = \langle (1, 1); (-3, -3) \rangle$;
  $W_3 = \langle (1, 1)(1, -1) \rangle$

Ejemplos de Subespacios

- $\mathbb{R}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ identificando $x \in \mathbb{R}$ con $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$.
- El espacio de los polinomios sobre un cuerpo K como subespacio de las funciones de K en K.
- El conjunto de las matrices simétricas $n \times n$ como subespacio de las matrices $n \times n$ sobre un cuerpo K
- El conjunto de las matrices Hermíticas (Hermitianas o Autoadjuntas) $n \times n$ como subespacio de las matrices $n \times n$.
  Matriz ajdunta de $A \quad \rightarrow \quad A^* \left(A^H\right) := \bar{A}^T$

  $$A \quad \text{Hermítica} \Longleftrightarrow A = A^*$$

  Tarea: Escribe en forma genérica una matriz Hermítica 2×2.
- $C[a, b]; C^n[a, b]; L_1[a, b]; L_2[a, b]; ; L_\infty[a, b]$ son subespacios del conjunto de las funciones reales definidas en el intervalo $[a, b]$.
- $c_0; \ell_1; \ell_2; \ell_\infty$ son subespacios del conjunto de las funciones reales definidas $\mathbb{N}$. Tarea (P): Verificar los dos últimos ítem.

Subespacios Fundamentales

Sea A una matriz $m \times n$, al sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$ se le asocian 4 subespacios fundamentales:

- **C**(A): Espacio Columna de A
  Es el espacio generado por todas las columnas de A.

$$\mathbf{C}(A) := \langle \mathbf{a}(\bullet, 1); \ldots; \mathbf{a}(\bullet, n) \rangle$$

De quién es subespacio?

Propiedad

El sistema $Ax = b$ es resoluble si b puede expresarse como combinación lineal de las columnas de A, e.d.

$$Ax = b \text{ es resoluble} \Leftrightarrow b \in \boldsymbol{C}(A).$$

Dem:

Subespacios Fundamentales

- **N**(A): Espacio Nulo de A
  Es el espacio solución del sistema homogéneo $Ax = 0$.
  De quién es subespacio?
- **C**(A^T): Espacio Fila de A
  Es el espacio generado por todas las filas de A (o columnas de A^T).
  $$\mathbf{C}(A^T) := \langle \mathbf{a}(1, \bullet); ...; \mathbf{a}(n, \bullet) \rangle$$
  De quién es subespacio?
- **N**(A^T): Espacio Nulo Izquierdo de A
  Es el espacio solución del sistema homogéneo $A^T y = 0$ (Espacio nulo de A^T).
  De quién es subespacio?

Observación:
Si consideramos a A como una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, ¿Qué representan $C(A)$ y $N(A)$?

Independencia lineal

Sea S un subconjunto de un espacio vectorial V (sobre un cuerpo K, decimos que S es linealmente dependiente si existen vectores distintos $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ de S y escalares $k_1, ..., k_n$ de K, no todos nulos, tales que

$$k_1\mathbf{x}_1 + ... + k_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice linealmente independiente, y si además S es un conjunto finito se dice que sus vectores son linealmente independientes.
E.d. $S = \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\}$ es l.i. si, y solo si, (completar)

Ejemplo:

- En $V = P_2$ el conjunto $S_1 = \{1, x, x^2, (x+1)^2\}$ es l.d. y el conjunto $S_2 = \{1, x, (x+1)^2\}$ es l.i.
- En $V = C(R)$ el conjunto $S_1 = \{sen^2(x), cos^2(x), cos(2x)\}$ es l.d. y el conjunto $S_2 = \{1, sen(x), sen(2x)\}$ es l.i.

Definición (Base)

Una base de un e.v. V es un conjunto linealmente independiente de V que genera el espacio V.
El espacio V es de dimensión finita si tiene una base finita.

Ejemplo:

- K cuerpo; $\quad V = K^n$; $\quad S = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, ..., 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, ..., 0) \\ &. \\ &. \\ \mathbf{e}_n &= (0, ..., 0, 1) \end{aligned}$$

  Entonces S es una base de K^n (Base canónica).

- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz inversible. $S = \{\mathbf{a}(\bullet, 1); ...; \mathbf{a}(\bullet, n)\}$ es un base de $\mathbf{C}(A) = \mathbb{R}^m$.

Teorema

Sea V un e.v. generado por un conjunto finito de n vectores, entonces todo subconjunto linealmente independiente de V es finito y no contiene más de n vectores.

Corolario

Si V es un e.v. de dimensión finita, entonces todas las bases de V tienen la misma cantidad de elementos.

Así podemos definir la dimensión de un espacio vectorial de dimensión finita como el número de vectores de su base. El subespacio trivial ($S = \{0\}$) tiene dimensión 0.

Corolario

Sea V es un e.v. de dimensión finita y $n = dim(V)$, entonces

a. *Cualquier subconjunto de V con más de n vectores es linealmente dependiente.*
b. *No hay un subconjunto de V con menos de n vectores que genere a V.*

Suma de conjuntos

Sean W_1 y W_2 subconjuntos no vacíos de un espacio vectorial V, llamamos suma de conjuntos y lo denotamos $W_1 + W_2$ a:

$$W_1 + W_2 := \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in V : \mathbf{w}_1 \in W_1 \wedge \mathbf{w}_2 \in W_2\}.$$

- Si W_1 y W_2 son subespacios de V entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio de V.

Definición (Suma Directa)

Si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial V y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ llamamos suma directa de W_1 y W_2 a la suma $W_1 + W_2$ y la denotamos por

$$W_1 \oplus W_2$$

.

Ejemplo: Sea V el espacio vectorial de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sea V_p el conjunto de las funciones pares y V_i el conjunto de las funciones impares. Entonces V_p y V_i son subespacios de V, $V = V_p + V_i$ y $V_p \cap V_i = \{0\}$. Es decir $V = V_p \oplus V_i$.

Propiedad

Sean W_1 y W_2 subespacios de V tales que $W_1 + W_2 = V$ y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ Entonces para todo $\boldsymbol{x} \in V$ existen únicos vectores $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ y $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ tales que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$

Lema

Si W_1 y W_2 son subespacios de V de dimensión finita, entonces $W_1 + W_2$ es de dimensión finita y

$$dim W_1 + dim W_2 = dim\,(W_1 \cap W_2) + dim\,(W_1 + W_2)$$

En Particular $\quad \dim W_1 + \dim W_2 = \dim\,(W_1 \oplus W_2)$.

Bibliografía

Strang, G. Algebra lineal y sus aplicaciones, 4a Ed, Thomson, 2006.

Hoffman, K., Kunze, R. Algebra Lineal. 1 °Ed, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. 1973.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN!!