Matemática IV
Transformaciones Lineales

A. Ridolfi (PT), M. Saromé (JTP)

UNCUYO - FCAI

Ingeniera Mecánica

2018

Contenido

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- $C(A)$
- $N(A)$
- $C(A^T)$
- $N(A^T)$

(ver https://www.youtube.com/watch?v=ggWYkes-n6E)

Definición

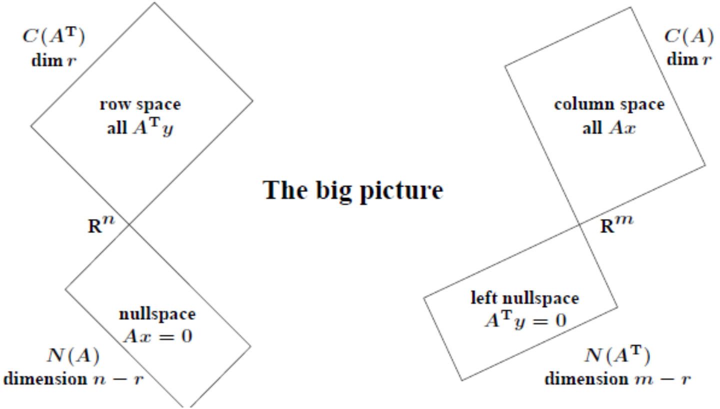
Dado un subespacio V de $\mathbb{R}^n$ el espacio de todos los vectores ortogonales a V se denomina complemento ortogonal de V y se denota por $V^\perp$.

Teorema (Teorema Fundamental del Álgebra Lineal)

Sea A una matriz $n \times m$ de rango r ($r =$ numéro de pivotes), U la matriz triangular superior producida por la eliminación gausiana de A y R la matriz reducida. Entonces:

1. *El espacio columna $C(A)$ y el espacio fila $C(A^T)$ tienen ambos dimensión r.*
2. *El espacio nulo $N(A)$ tiene dimensión $n - r$.*
3. *El espacio nulo izquierdo $N(A^T)$ tiene dimensión $m - r$.*
4. *El espacio nulo es el complemento ortogonal del espacio fila en $\mathbb{R}^n$.*
5. *El espacio nulo izquierdo es el complemento ortogonal del espacio columna en $\mathbb{R}^m$.*

$$\mathbb{R}^n = N(A) \oplus C(A^T) \qquad \text{y} \qquad C(A^T) = (N(A))^\perp$$
$$\mathbb{R}^m = C(A) \oplus N(A^T) \qquad \text{y} \qquad N(A^T) = (C(A))^\perp$$



Observa las matrices A, U: matriz triangular superior producida por la eliminación gausiana de A y R: matriz reducida de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 7 & 13 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- La eliminación produce bases para el espacio fila y el espacio nulo de A: Estas son las mismas que las de U y R.
  $C(A^T) =$
  $N(A) =$
- La eliminación produce cambios en el espacio columna y en el espacio nulo izquierdo ($C(A) \neq C(U)$), pero la dimensión no cambia.
  $C(A) =$ $\qquad C(U) =$ $\qquad C(R) =$
  $N(A^T) =$ $\qquad N(U^T) =$ $\qquad N(R^T) =$
- Si $EA = R$ entonces las $m - r$ filas de E son una base del espacio nulo izquierdo de A

Solución de $Ax = b$

Consideremos los sistemas $Ax = b$; $Ux = c$ y $Rx = d$ con $r = rg(A)$.

- Los últimos $m - r$ renglones de U y R son cero, hay solución solo si los últimos $m - r$ elementos de c y d son cero.
- El conjunto solución (si tiene) es $S = \{x_p\} + N(A)$.
- La solución completa es de la forma $x = x_p + x_n$, donde:
  - x_p se puede formar igualando las variables libres a 0 y tomando las variables pivotes de los primeros r elementos de d.
  - x_n son combinaciones de $n - r$ soluciones especiales, c/u con una variable libre igual a 1 y las otras 0, las variables pivote se obtienen de la columna correspondiente de R (con signo invertido).

Encontrar la solución completa en el ejemplo anterior para:
$b^T = (0, 6, -6)$; $\quad c^T = (0, 6, 0) \quad$ y $\quad d^T = (-9, 3, 0)$.

Una matriz A $m \times n$ es de:

- Rango total de fila si $r = m$; la matriz tiene una inversa por derecha C (e.d. $AC = I_m$).
  EXISTENCIA: $Ax = b$ tiene por lo menos una solución.
  Ejemplo:
- Rango total de columna si $r = n$; la matriz tiene una inversa por izquierda B (e.d. $BA = I_n$).
  UNICIDAD: $Ax = b$ tiene a lo sumo una solución (o ninguna).
  Ejemplo:
- Rango total si $r = n = m$: la matriz tiene inversa A^{-1} (e.d. $A^{-1}A = AA^{-1} = I$).
  EXISTENCIA Y UNICIDAD: $Ax = b$ tiene una única solución.
  Ejemplo:

Matrices de rango 1: Cada matriz de rango 1 es de la forma $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$

$C(A) = \langle \mathbf{u} \rangle$

$C(A^T) = \langle \mathbf{v} \rangle$

Ejemplo:

Definición (Transformaciones lineales)

Sean V y W. dos espacios vectoriales sobre el cuerpo K. Una transformación lineal de V en W es una función T de V en W tal que

$$
\begin{aligned}
T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}) \\
T(k\boldsymbol{x}) &= kT(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

para todos los vectores $\boldsymbol{x}$ *y* $\boldsymbol{y}$ *de V y todo escalar k de K.*

Ambas condiciones se pueden resumir en:

$$T(k_1\mathbf{x} + k_2\mathbf{y}) = k_1 T(\mathbf{x}) + k_2 T(\mathbf{y})$$

Ejemplos

a) Si V es cualquier espacio vectorial, la transformación identidad I, definida por $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$, es una transformación lineal de V en V.

b) La transformación cero 0, definida por $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es una transformación lineal de V en V.

c) Sea A una matriz $m \times n$ sobre el cuerpo K. La función T definida por $T(x) = Ax$ es una transformación lineal de K^n en K^m.
En particular, cuando $K = \mathbb{R}$ tenemos las transformaciones de:
alargamiento,
rotación,
reflexión,
proyección,
cambio de base.
https://www.youtube.com/watch?v=IrggOvOSZr4
https://www.youtube.com/watch?v=LyGKycYT2v0
https://www.youtube.com/watch?v=P2LTAUO1TdA

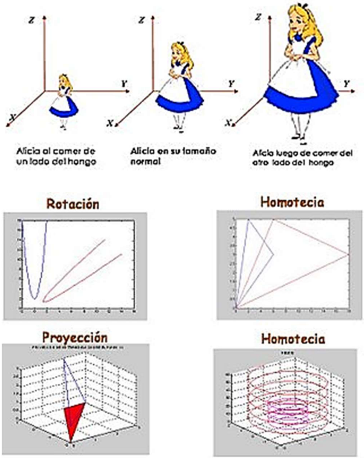


Imagen extraída de

http://algebra-ii.blogspot.com/2006/11/transformaciones-lineales.html

Ejemplos

d) Sea A una matriz $m \times n$. La función U definida por $U(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A$ es una transformación lineal de K^m en K^n.

e) Sea V el espacio vectorial de las funciones polinomios reales $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_k x^k\}$,
Transformación diferenciación $A : V \to V$ tal que

$$Af(x) = \frac{d}{dx}(f) = c_1 + 2c_2 x + ... + kc_k x^{k-1}.$$

Transformación integración $A : V \to V$ tal que

$$Af(x) = \int_0^x f(t)\,dt = c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + ... + c_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Encontrar las matrices asociadas a $A_{dif} : P_4 \to P_3$ y $A_{int} : P_3 \to P_4$.
Comprobar que $A_{dif} A_{int} = I$ Comentar que sucede con $A_{int} A_{dif}$

Teorema

Si A es la matriz que representa la transformación lineal de V a W y B es la matriz que representa la transformación lineal de U a V entonces la matriz producto AB es una transformación lineal de U a W y representa la composición de ambas transformaciones.

Verifica con un ejemplo que:

- Para rotaciones el orden de la multiplicacin no importa.
- Para una rotación y una reflexión, el orden sí es importante.
- Proyectar dos veces es lo mismo que proyectar una vez, $P^2 = P$

Propiedades de las transformaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, T una transformación lineal de V en W y sean $N(T)$, $Im(T)$ y $L(V, W)$ los conjuntos: Nulo e Imagen de T, respectivamente:

$$N(T) = \{x \in V : T(x) = 0\}, \text{ (Nulo de T)}$$
$$Im(T) = \{w \in W : w = T(x) \text{ para algún } x \in V\} \text{ Imagen de T},$$
$$L(V, W) = \{T : V \to W : T \text{es una transformación lineal}\},$$

- $N(T)$ es un subespacio de V; Nulidad:= dim($N(T)$).
- $Im(T)$ es un subespacio de W; Rango:= dim($Im(T)$).
- Si V es dimensión finita, entonces Rango + Nulidad = dim(V).
- $L(V, W)$ es un espacio vectorial.
- Si $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$ entonces $dim(L(V, W)) = nm$.

Operador Lineal: Transformación $T : V \to V$
Subespacio invariante: Subespacio S de V tal que existe un operador lineal $T : V \to V$ donde $T(S) \subset S$.

Propiedades de las transformaciones lineales

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal

- T es inyectiva $\Leftrightarrow T(x) = T(y)$ implica que $x = y$;
- T es sobreyectiva $\Leftrightarrow Im(T) = W$;
- T es inversible $\Leftrightarrow \exists T^{-1} : W \to V \diagup T^{-1} \circ T = I$ y $T \circ T^{-1} = I$.
- T es no singular $\Leftrightarrow N(T) = \{0\}$

T inversible $\Leftrightarrow$ T inyectiva y sobreyectiva

T inyectiva $\Leftrightarrow$ T no singular $\Leftrightarrow$ T preserva conjuntos l. i.

- Si $dim(V) = dim(W) = n$ entonces

  T inversible $\Leftrightarrow$ T inyectiva $\Leftrightarrow$ T sobreyectiva

Isomorfismo

Teorema

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensin finita n y m respectivamente sobre un mismo cuerpo K. Sean B y B' bases ordenadas de V y W respectivamente. Para cada transformación lineal $T : V \to W$ existe una matriz $A_{m\times n} \in K^{mn}$ tal que

$$[T(x)]_{B'} = A\,[x]_B$$

Definición (Isomorfismo)

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Se dice que una transformación lineal $T : V \to W$ es un isomorfismo de V en W si T es inversible. En este caso se dice que V es isomorfo a W.

- Todo espacio vectorial real de dimensión finita n es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.
- El espacio fila es isomorfo al espacio columna.
- Si $dim(V) = n$; $dim(W) = m$ entonces $L(V, W)$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{n.m}$

Factorización de Matrices

Propiedad (1N pagina 51)

Suponga que $A = A^T$ *puede factorizarse en* $A = LDU$ *sin intercambios de renglones. Entonces* U *es la traspuesta de* L*. La factorización simétrica se vuelve* $A = LDL^T$.

Propiedad (2B pagina 79)

Para cualquier matriz A *de* m *por* n *existe una permutación* P*, una matriz triangular inferior* L *con diagonal unitaria, y una matriz* U *escalonada de* m *por* n*, tales que* $PA = LU$.

Bibliografía

- Strang, G. Algebra lineal y sus aplicaciones, 4a Ed, Thomson, 2006.
- Hoffman, K., Kunze, R. Algebra Lineal. 1Ed, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. 1973.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN!!