Guía de Actividad 3: Aplicaciones de Algebra Lineal

Ejercicio 1. En mecánica de medios continuos el tensor tensión de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$, también llamado tensor de tensiones o tensor de esfuerzos, es el tensor que da cuenta de la distribución de tensiones y esfuerzos internos en el medio continuo.

La forma general para un campo tensorial de tensiones en tres dimensiones está dado como (en MPa):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix},$$

en la que los términos en la diagonal principal representan esfuerzos a la tensión o a la compresión, y los términos fuera de la diagonal representan los esfuerzos cortantes.

En un sistema de referencia cuyos ejes coordenados son las direcciones principales, la matriz de tensiones que representa al tensor de tensiones en tal sistema de coordenadas es diagonal y tiene la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

En las direcciones o ejes principales, no hay tensiones tangenciales o cortantes.

El problema de determinar las tensiones principales y las direcciones principales se reduce a un problema de autovalores

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma n} &= \lambda \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\sigma n} - \lambda \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{\sigma n} - \lambda \boldsymbol{I})\, \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

en el que las incógnitas son las componentes n_1, n_2 y n_3 de la dirección principal y el valor λ es la tensión principal. Para obtener una solución no trivial (distinta de cero), el determinante de la matriz $\boldsymbol{\sigma n} - \lambda \boldsymbol{I}$ debe ser igual a cero, es decir, el sistema es singular. Expandiendo el determinante se obtiene la ecuación característica

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ I_2 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2 \\ I_3 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{xz}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xy}\sigma_{xz}\sigma_{yz} \end{aligned}$$

I_1, I_2 y I_3 se conocen como los invariantes de esfuerzos, se llaman así porque estos valores no cambian aunque cambie el sistema de referencia. Mientras que los valores de λ que hacen cero el polinomio característico, las raíces, son los valores de las tensiones principales σ_1, σ_2 y σ_3.

Se tiene un campo tensorial (en MPa) dado por la matriz que sigue:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 10 & 14 & 25 \\ 14 & 7 & 15 \\ 25 & 15 & 16 \end{bmatrix}.$$

Mediante el empleo de un *script* resuelva los siguiente ítems en Octave:

1. Determine los invariantes de tensiones o esfuerzos I_1, I_2 e I_3.

2. Encuentre los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 mediante la función `eig`.

3. Encuentre los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 por medio de una técnica de localización de raíces.

Análisis en estado estacionario de un sistema de reactores

En este problema se analiza y desarrolla el ejemplo propuesto en el Capítulo 12: Estudio de casos: ecuaciones algebraicas lineales.

– Steven C. Chapra y Raymond P. Canale, "Métodos numéricos para ingenieros", McGraw-Hill, 5ta Edición, 2007.

Antecedentes

El principio de conservación de la masa se expresa como un balance que toma en cuenta todas las fuentes y sumideros de un fluido que entra y sale de un volumen, ver Figura 7. En un periodo finito, esto se expresa como:

$$\text{Acumulación} = \text{Entradas} - \text{Salidas}. \tag{1}$$

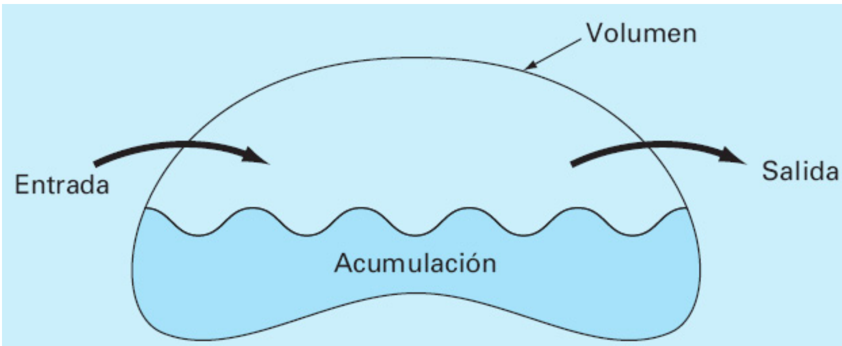

Figura 1: Una representación esquemática del balance de masa.

El balance de masa representa un ejercicio de contabilidad para la sustancia en particular que se modela. En estado estacionario, la Ecuación (1) se expresa como:

$$\text{Entradas} = \text{Salidas}. \tag{2}$$

Emplearemos el principio de conservación de la masa para determinar las concentraciones en estado estacionario de un sistema de 5 reactores conectados por tuberías. Los detalles se muestran en la Figura 2.

La matriz del sistema que se muestra en la Figura 2 queda expresada como

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -11 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

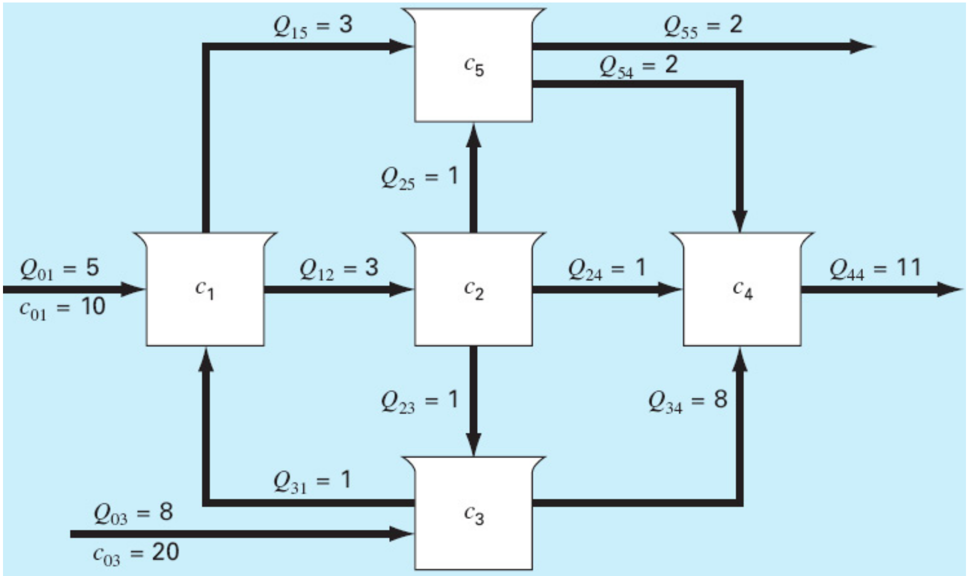

Figura 2: Una representación esquemática del sistema de 5 reactores conectados por tuberías.

Análisis

Las siguientes consideraciones pueden resultar de interés y utilidad para aquellos ingenieros que diseñan y/o manejan sistemas como éste.

Dado que $\boldsymbol{Ac} = \boldsymbol{b}$, y por lo tanto $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ nos interesa analizar las características "estructurales" de la inversa de la matriz del sistema. Calculamos la inversa, que se expresa como

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.16981 & -0.00629 & 0.01887 & 0 & 0 \\ 0.16981 & -0.33962 & 0.01887 & 0 & 0 \\ 0.01887 & -0.03774 & 0.11321 & 0 & 0 \\ 0.06003 & -0.07461 & 0.08748 & -0.09091 & -0.04545 \\ 0.16981 & -0.08962 & 0.01887 & 0 & -0.25000 \end{bmatrix}.$$

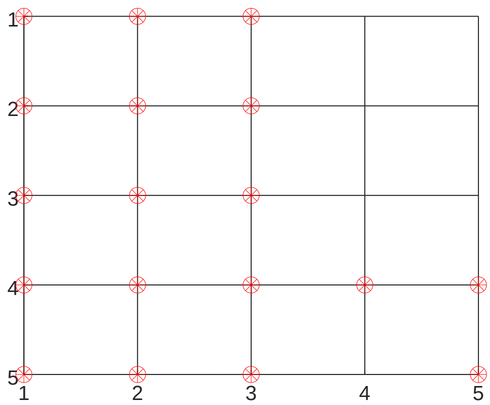

Figura 3: Patrón de esparsidad de la matriz $\boldsymbol{A}^{-1}$.

En la Figura 3 se muestra el patrón de esparsidad de la matriz $\boldsymbol{A}^{-1}$, en el cual se representan sólo los elementos distintos de cero. Esta forma de ver una dada matriz es de gran utilidad en aquellos sistemas con un gran número de entradas. Además, siempre es posible utilizar un "filtro" para poner a cero ciertos valores, por ejemplo en caso de que no se desee considerar valores menores a un cierto umbral.

Cada uno de los elementos $[A^{-1}]_{ij}$ significa el cambio en la concentración del reactor i debido a un cambio unitario en la carga del reactor j. De esta forma, los ceros en la columna 4 indican que una carga en el reactor 4 no influirá sobre los reactores 1, 2, 3 y 5. Esto es consistente con la configuración del sistema (Figura 2), la cual indica que el flujo de salida del reactor 4 no alimenta ningún otro reactor. En cambio, las cargas en cualquiera de los tres primeros reactores afectarán al sistema completo, como se indica por la ausencia de ceros en las primeras tres columnas.

Ahora, defimos el vector de carga para este problema

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} Qc_{01} \\ 0 \\ Qc_{02} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde $Qc_{01} = Q_{01}c_{01} = 50$ y $Qc_{02} = Q_{02}c_{02} = 160$, como se puede apreciar en la Figura 2.

Finalmente resolvemos la concentraciones en cada reactor para el estado estacionario

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 11.509 \\ 11.509 \\ 19.057 \\ 16.998 \\ 11.509 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2.

Sea el conjunto de 5 reactores químicos que se muestra en la Figura 2.

1. Muestre el patrón de esparsidad de $\boldsymbol{A}^{-1}$ cuando se considera un valor de umbral de $|0.02|$.
2. ¿Cómo afecta, al valor de las concentraciones resultantes, considerar un umbral de $|0.02|$ (punto anterior) en el resultado final? Explique y compare empleando valores porcentuales.
3. Considere el problema original. Si se aumenta en un 10 % el caudal de entrada $\boldsymbol{Q}_{01}$ por un mal funcionamiento de una bomba. Analice el nuevo estado estacionario del sistema. ¿Puede inferir algún tipo de acción de cara a la planificación del mantenimiento o monitoreo del sistema? Justifique.

Además de los cálculos en estado estacionario, también podríamos estar in- teresados en la respuesta transitoria de un reactor completamente mezclado. Para ello, desarrollamos expresiones matemáticas para el término de acumulación de la ecuación (1)

La acumulación representa el cambio de masa en el reactor por un cambio en el tiempo. En un sistema de volumen constante, esto se formula simplemente como

$$Acumulacion = V\frac{dc}{dt} \tag{3}$$

donde $V = volumenyc = concentracion$. Así, una formulación matemática para la acu- mulación es el volumen por la derivada de c con respecto a t. En este problema incorporaremos el término acumulación en el balance de masa general que se desarrolló en la sección 12.1. Luego lo utilizaremos para simular la diná- mica de un solo reactor y de un sistema de reactores. En el último caso, mostraremos cómo se pueden determinar los valores propios del sistema y analizaremos su dinámica. Por último, se ilustrará cómo se emplea la optimización para estimar los parámetros de los modelos de balance de masa. Las ecuaciones (1) y (3) se usan para representar el balance de masa de un solo reactor, como el que se muestra en la figura 28.1:

$$V\frac{dc}{dt} = Qc_{en} – Qc$$

Ejercicio 3. Si $c_{en} = 50\frac{mg}{3}, Q = 5\frac{m^3}{min}, V = 100m^3, c_0 = 10\frac{mg}{m^3}$, encuentra la solución analitica y representala en el gráfico.

El método de Euler ofrece un procedimiento alternativo para resolver la ecuación (28.2). En la figura 28.2 se presentan dos soluciones con diferentes tamaños de paso. Con- forme el tamaño de paso disminuye, la solución numérica converge a la solución analítica. Así, en este caso, el método numérico se utiliza para verificar el resultado analítico. Además de verificar los resultados dados en forma analítica, las técnicas numéricas son útiles en aquellas situaciones donde las soluciones analíticas son imposibles, o tan difíciles que resultan imprácticas. Por ejemplo, aparte de un reactor simple, los métodos numéricos sirven para la simulación de un sistema de cinco reactores acoplados como en la figura 12.3. El balance de masa para el primer reactor se escribe como

$$V_1\frac{dc_1}{dt} = Q_{01}c_{01} + Q_{31}c_3 - Q_{12}c_1 - Q_{15}c_1$$

o sustituyendo parárametros $(observeque Q_{01}C_{01} = 50\frac{mg}{min}, Q_{03}c_{03} = 160\frac{mg}{min}, V_1 = 50m^3, V_2 = 20m^3, V_3 = 40m^3, V_4 = 80m^3, V_5 = 100m^3)$,
De manera similar, se desarrollan balances para los otros reactores como sigue

$$\frac{dc_2}{dt} = 0.1c_1 - 0.15c_2$$
$$\frac{dc_3}{dt} = 0.025c_2 - 0.225c_3 + 4$$
$$\frac{dc_4}{dt} = 0.1c_3 - 0.1375c_4 + 0.0025c_5$$
$$\frac{dc_5}{dt} = 0.03c_1 + 0.001c_2 - 0.04c_5$$

Ejercicio 4. Si $c_{en} = 50\frac{mg}{3}, Q = 5\frac{m^3}{min}, V = 100m^3, c_0 = 10\frac{mg}{m^3}$, encuentra la solución analitica y representala en el gráfico.

Ejercicio 5.

Suponga que una batería $b_3 = 24$ Volt y una fuente de corriente $f_2 = 2$ Ampere (y cinco resistores $R_1 = 10$ ohm , $R_2 = 25$ ohm, $R_3 = 17$ ohm, $R_4 = 50$ ohm, $R_5 = 23$ ohm) conectan cuatro nodos. El nodo 4 está conectado a tierra y el potencial $x_4 = 0$ es fijo.

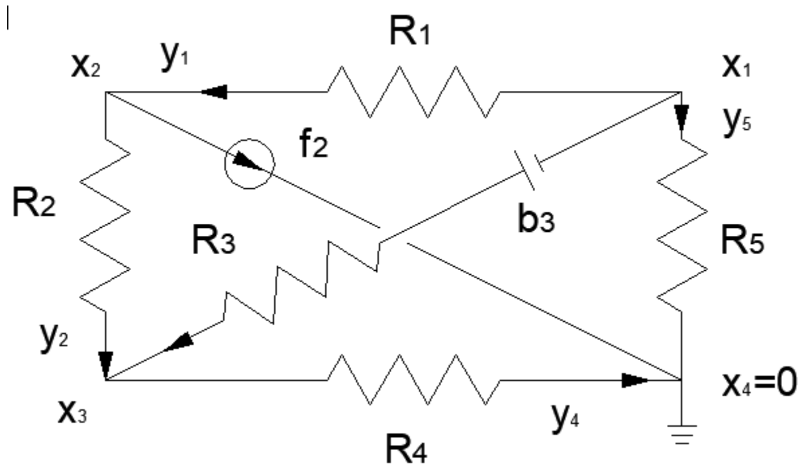

Figura 4: Circuito

Resuelva el los potenciales y las corrientes:

a) Utilizando la matriz completa de corrientes y potenciales.

b) Utilizando solo el sistema de potenciales que surge de pivotar la matriz de a y luego encuentre las corrientes.

Gráficas y Redes

Matrices de incidencia gráfica

El término gráfica hace referencia a un conjunto de nodos o vértices y a un conjunto de aristas que unen a los nodos. Las aristas son orientadas y no está permitida una arista que una a dos nodos. En estas matrices rectangulares cada elemento es 1,-1 o 0. Donde los renglones representan a las aristas y las columnas a los nodos. Si la arista va del nodo j al nodo k, entonces ese renglón tiene -1 en la columna j y +1 en la columna k. Estas matrices también se pueden dominar de conectividad o matriz topología.

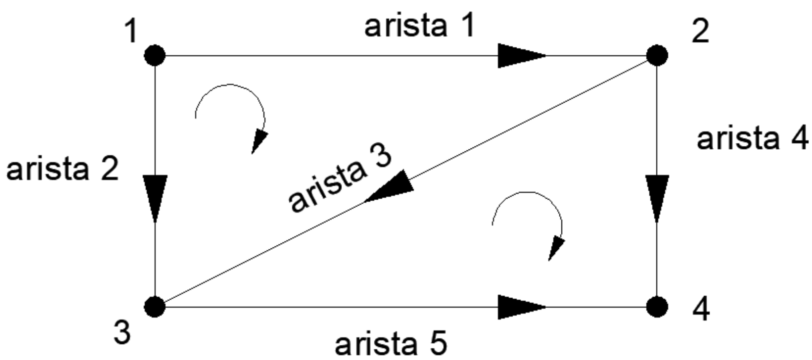

Figura 5: Redes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
nodo 1 2 3 4

Cada uno de los cuatro subespacios fundamentales tiene significado en términos de la gráfica. Espacio Nulo de A El espacio nulo de A contiene a X = (1,1,1,1), ya que Ax = 0. El espacio nulo de esta matriz es unidimensional. La ecuación Ax=b no tiene solución única (en caso de tener solución). Cualquier vector constante x = (c,c,c,c) puede sumarse a cualquier solución particular de Ax = b. Esto tiene significado si se piensa en x_1, x_2,x_3,x_4 como potenciales en los nodos. Las 5 componentes de Ax proporcionan las diferencias de potencial a través de las cinco aristas. Rango de A es 4-1 = 3. Importante: Todos los potenciales pueden aumentarse o disminuirse por la misma constante c, y las diferencias permanecen sin cambio.

Espacio columna

¿Para cuales valores de $b_1, \ldots, b_5$? Es posible resolver Ax = b. El renglón uno más el renglón 3 es igual al renglón 2. El miembro derecho requiere que $b_1 + b_3 = b_2$ El renglón 3 más el renglón 5 es igual al renglón 4. El miembro derecho debe satisfacer $b_3 + b_5 = b_4$, para que la eliminación llegue a $0 = 0$. $b_1 - b_2 + b_3 = 0$ $b_3 - b_4 + b_5 = 0$. Observar las implicancias gráficas. Ley de Kirchhoff. La suma de las diferencias de potencial alrededor de un circuito debe ser cero.

Espacio Nulo Izquierdo

Observar la implicancia gráfica de resolver $A^T y = 0$. Cada vector tiene 5 componentes, una para cada arista. Estas componentes representan las corrientes a lo largo de cada arista. Debido a que A^T es de 4x5, las ecuaciones proporcionan cuatro condiciones sobre estas 5 corrientes. Condiciones de conservación: En cada nodo el flujo de entrada es igual al flujo de salida.

$A^T y = 0$

$-y_1 - y_2 = 0$ La corriente total total hacia el nodo 1 es cero. $y_1 - y_3 - y_4 = 0$ La corriente total hacia el nodo 2 es cero. $y_2 + y_3 - y_5 = 0$ La corriente total hacia el nodo 3 es cero. $y_4 + y_5 = 0$ La corriente total hacia al nodo 4 es cero

Es decir resolver $A^T y = 0$ significa encontrar un conjunto de corrientes que no se amontonan en ningún nodo. Las soluciones más sencillas son las corrientes alrededor de circuitos pequeños. Vectores de Circuito. Las combinaciones de y_1 e y_2 llenen el espacio nulo izquierdo por lo que y_1 y y_2 son una base. La dimensión tendrá que ser $m - r = 5 - 3 = 2$. Los vectores en el espacio nulo izquierdo y en el espacio columna son perpendiculares.

Espacio Renglón

El espacio renglón de A contiene vectores en R^4 pero no a todos los vectores. Su dimensión es el rango r = 3. Su dimensión es el rango r = 3. Con la eliminación se encuentran tres renglones independientes, t también es posible ver la gráfica. Los tres primeros renglones son dependientes: (Renglon 1 + Renglón 2 = Renglon 3, y estas aristas forman un circuito). Los renglones 1, 2 y 4 son independientes porque las aristas no contienen circuitos. Nuevamente, esto ilustra el teorema fundamental: El espacio renglón es perpendicular al espacio nulo. Si festa en el espacio renglón y x está en el espacio nulo, entonces $f^T x = 0$.

Para A^T, la ley básica de la teoría de redes es la ley de la corriente de Kirchhoff: El flujo total hacia cada nodo es cero. Los números f_1, f_2,f_3,f_4 son fuentes de corriente hacia los nodos. La fuente f1 debe equilibrar a $-y_1 - y_2$, que es el flujo que sale del nodo 1. Esta es la primera ecuación en $A^T y = f$. De manera semejante en los otros tres nodos, la conservación de la carga requiere flujo de entrada = flujo de salida. Lo hermoso que A^T es exactamente la matriz derecha de la ley de la corriente.

Redes y matemáticas discretas aplicadas

Una gráfica se vuelve una red cuando a las aristas se le asignan números $c_1, \ldots c_m$. El número ci puede ser la longitud de la arista y, o cu capacidad, o su rigidez (si esta contiene un resorte), o su conductancia si contiene un resistor. Estos números van en una matriz diagonal C que es de m por m. C refleja "propiedades materiales" en contraste con la matriz de incidencia A, que proporciona información de las conexiones. En términos de electricidad. Sobre la arista i, la conductancia es c_i y la resistencia es $1/c_i$. La ley de ohm establece que la corriente y_i que pasa por el resistor es proporcional a la caída de tensión e_i :

Ley de Ohm

y_i (corriente) $= c_i e_i$(conductancia) (caída de tensión) $E = IR$ LVK: La suma de las caídas de tensión alrededor de cada circuito es cero. LCK: La suma de las corrientes y_i y (f_i) hacia cada nodo es cero Ley de Ohm $y = C(B - Ax)$ o bien $C^{-1}y + Ax = b$. Las leyes fundamentales de equilibrio combinan las leyes de Ohm y Kirchhoff en un problema central de las matemáticas aplicadas. Ecuaciones de Equilibrio $C^{-1}y + Ax = b$ $A^T y = f$

Forma de bloques

$\begin{bmatrix} C^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ f \end{bmatrix}$ Para eliminar por bloques el pivote es C^{-1}, multiplicador es $A^T C$ y la sustracción manda a A^T abajo del pivote resultando:

$$\begin{bmatrix} C^{-1} & A \\ 0 & -A^T C A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ f - A^T C b \end{bmatrix}$$

La ecuación sólo para x está en el renglón inferior, con la matriz simétrica $A^T CA$

$A^T CAx = A^T Cb – f$ Luego la sustitución hacia atrás en la primera ecuación produce y. Nada misterioso: se sustituye $y = C(b–Ax) en A^T y = f$.

Observación importante: Un potencial debe fijarse de antemano: $x_n = 0$. El n-esimo nodo está conectado a tierra, y la n-ésima columna de la matriz de incidencia original se ha eliminado. La matriz resultante es lo que ahora se entiende por A, sus n-1 columnas son independientes. La matriz cuadrada $A^T CA$, que es la clave para resolver la ecuación para x, es una matriz invertible de orden n-1.

Resolución

La primera cuestión es la ley de la corriente $A^T y = f$ en los nodos 1,2,3:

$$\begin{matrix} -y_1 & -y_3 & -y_5 & = 0 \\ y_1 & -y_2 & & = f_2 \\ y_2 & y_3 & -y_4 & = 0 \end{matrix} \text{ tiene } A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Escrita en forma de bloques se tiene

$$\begin{bmatrix} C^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & & & & & -1 & 1 & 0 \\ & R_2 & & & & 0 & -1 & 1 \\ & & R_3 & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & R_4 & & 0 & 0 & -1 \\ & & & & R_5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & & & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema es de 8 por 8, con cinco corrientes y cuatro potenciales. La eliminación de las ys reduce al sistema de 3 por 3 $A^TCAx = A^TCb - f$. La matriz A^TCA contiene los recíprocos $c_i = 1/R_i$ (porque en la eliminación se dividen los pivotes). También se muestra el cuarto renglón y la cuarta columna provenientes del nodo conectado a tierra fuera de la matriz 3x3.

Entrega

Se deben entregar obligatoriamente los ejercicios: