Matemática IV
Series

A. Ridolfi (PT), M. Saromé (JTP)

UNCUYO - FCAI

Ingeniería Mecánica

2019

Contenido

Criterio de convergencia para series numéricas

Criterio del cociente Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, si existe $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ entonces:

- Si $L < 1$ la serie converge absolutamente.
- Si $L > 1$ la serie diverge.
- Si $L = 1$ el criterio no decide.

Criterio de la raíz Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, si existe $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ entonces:

- Si $L < 1$ la serie converge absolutamente.
- Si $L > 1$ la serie diverge.
- Si $L = 1$ el criterio no decide.

Serie de Potencias

Una serie de potencias centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$ es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

- La serie siempre converge cuando $z = z_0$
- Dando un valor a z, la s. de p. se convierte en una serie numérica.
- Se puede considerar la función:

  $$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

  con dominio: $D_S = \{w \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - z_0)^n \quad converge\}$
- Se dice que la s. de p. converge absolutamente en una región A si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z - z_0|^n$ converge para cada $z \in A$.
- Se dice que la s. de p. converge uniformemente en una región A si, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\rho_N(z)| = |S(z) = S_N(z)| < \epsilon$ para todo $N > N_0(\epsilon)$ y para todo $z \in A$. (N_0 no depende de z)

Teorema (Lema de Abel)

Si para $\rho \geq 0$ la sucesión $\{|a_n|\rho^n\}$ es acotada, entonces la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente para $|z-z_0| < \rho$ y uniformemente para $|z-z_0| \leq r < \rho$

Consecuencia: Existe un número $R \geq 0$ llamado radio de convergencia tal que la serie de potencia converge absolutamente en $B(z_0, R)$, llamdo disco de convergencia, uniformemente en $\overline{B}(z_0, r)$ cuando $r < R$ y no converge fuera de $\overline{B}(z_0, R)$.
$R = 0$ cuando la serie sólo converge en z_0.
$R = +\infty$ cuando la serie converge para todo $z \in \mathbb{C}$.

El radio de convergencia se puede obtener como:

$$R := sup\{r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty\} = \frac{1}{lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

Propiedades de las Series de Potencias

- $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1} \quad \text{en} \quad B(z_0, R)$
- Si $R > 0$,entonces $S(z)$ es analítica en $B(z_0, R)$
- Si C es un contorno en $B(z_0, R)$ y $g(z)$ es continua en C:

$$\int_C g(z)S(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z)(z-z_0)^n dz$$

  en particular:

$$\int_C S(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-z_0)^n dz$$

- **Producto de Cauchy:** Si $S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ y $S_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ convergen en $B(z_0, R)$ entonces

$$S_1(z)S_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \qquad donde \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}$$

Serie de Taylor

Teorema

Sea f una función analítica en $B(z_0, R)$, entonces f admite representción en serie de potencias en $B(z_0, R)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad para \quad |z - z_0| < R.$$

donde

$$a_n = \frac{f^{(}n)(z_0)}{n!} \quad para\, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Demostración:

Este es el desarrollo de f en serie de Taylor alrededor de z_0

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots$$

Ejemplos:

- $f(z) = e^z; \qquad z_0 = 0$
- $f(z) = sen(z); \qquad z_0 = 0$
- $f(z) = \frac{1}{1-z}; \qquad z_0 = 0$
- $f(z) = \frac{1}{z}; \qquad z_0 = 1$

Teorema (Unicidad de la Serie de Taylor)

Si una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

converge a $f(z)$ en todo punto interior a un círculo $|z - z_0| < R$, entonces es la serie de Taylor de f alrededor de z_0 (en potencias de $z - z_0$).

Teorema

Sea f una función analítica en $A = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, *y sea C cualquier entorno cerrado simple orientado positivamente, dentro del anillo A, rodeando* z_0. *Entonces* $f(z)$ *admite representación en serie:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{1}$$

para $R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ *donde:*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Desarrollando la serie:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \ldots$$

El desarrollo (1) de f se puede escribir como:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{2}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Tanto a la serie (1) como a la (2) se la llaman Serie de Laurent

Observar!! $\quad b_1 = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \quad \Rightarrow \quad \int_C f(z) dz = (2\pi i) b_1$

Ejemplos

Determina la región y encuentra los desarrollos en serie de las siguientes funciones alrededor de $z_0 = 0$

1. $f(z) = e^{1/z}$
2. $f(z) = \frac{1}{z}$

   calcular $\int_C \frac{1}{z^n}$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
3. $f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{(z-2)}$

Teorema (Unicidad de la Serie de Laurent)

Si una serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

converge a $f(z)$ en todo punto del anillo $R_1 < |z - z_0| < R_2$, entonces es la serie de Laurent de f en potencias de $z - z_0$.

Residuos

z_0 es un punto sigular aislado de f si f es analítica en el entorno reducido $0 < |z - z_0| < \epsilon$
En este caso f tiene representación en serie de Laurent

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ... + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + ...$$

donde

$$\int_C f(z)dz = (2\pi i)b_1$$

b_1 se llama residuo de f en el punto singular aislado z_0 y se denota

$$b_1 := \mathrm{Res}(f, z_0)$$

Ejemplo: Calcula $\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz$ sobre el círculo $|z| = 2$

Teorema (Teorema de los residuos)

Si C es un contorno cerrado simple orientado positivamente y la función f es analítica sobre y dentro de C excepto en un número finito de puntos singulares z_k, $\quad k = 1, 2, ..., n$ interiores a C, entonces

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

Ejemplo: Calcula $\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$ sobre el círculo $|z| = 2$

Bibliografía

Churchill, Ruel V. y Brown, James W. Variable Compleja y Aplicaciones, 5ta Ed, McGrawHill, 1992.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN!!