Matemática IV
Transformaciones Lineales

A. Ridolfi (PT), M. Saromé (JTP)

UNCUYO - FCAI

Ingeniera Mecánica

2018

Contenido

- **Teorema Fundamental del Álgebra Lineal**
- **Soluciones de sistemas lineales**
- **Transformaciones Lineales**
- **Ejemplos**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- $C(A)$
- $N(A)$
- $C(A^T)$
- $N(A^T)$

(ver https://www.youtube.com/watch?v=ggWYkes-n6E)

Definición

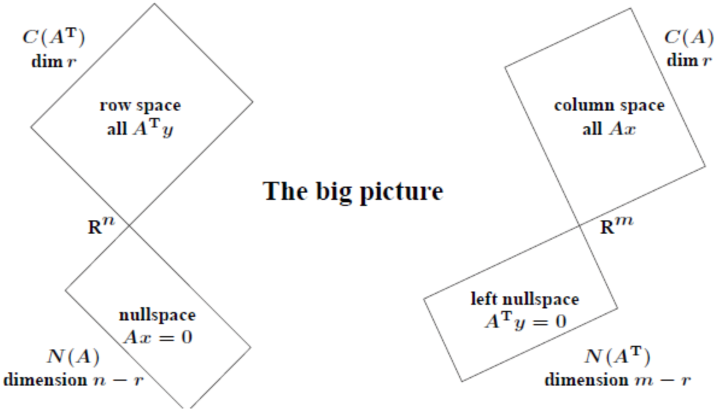
Dado un subespacio V de $\mathbb{R}^n$ el espacio de todos los vectores ortogonales a V se denomina complemento ortogonal *de V y se denota por $V^\perp$.*

Teorema (Teorema Fundamental del Álgebra Lineal)

Sea A una matriz $n \times m$ de rango r ($r =$ numéro de pivotes), U la matriz triangular superior producida por la eliminación gausiana de A y R la matriz reducida. Entonces:

1. *El espacio columna $C(A)$ y el espacio fila $C(A^T)$ tienen ambos dimensión r.*
2. *El espacio nulo $N(A)$ tiene dimensión $n - r$.*
3. *El espacio nulo izquierdo $N(A^T)$ tiene dimensión $m - r$.*
4. *El espacio nulo es el complemento ortogonal del espacio fila en $\mathbb{R}^n$.*
5. *El espacio nulo izquierdo es el complemento ortogonal del espacio columna en $\mathbb{R}^m$.*

$$\mathbb{R}^n = N(A) \oplus C(A^T) \qquad \text{y} \qquad C(A^T) = (N(A))^{\perp}$$
$$\mathbb{R}^m = C(A) \oplus N(A^T) \qquad \text{y} \qquad N(A^T) = (C(A))^{\perp}$$



Observa las matrices A, U: matriz triangular superior producida por la eliminación gausiana de A y R: matriz reducida de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 7 & 13 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- La eliminación produce bases para el espacio fila y el espacio nulo de A: Estas son las mismas que las de U y R.
  $C(A^T) =$
  $N(A) =$
- La eliminación produce cambios en el espacio columna y en el espacio nulo izquierdo ($C(A) \neq C(U)$), pero la dimensión no cambia.
  $C(A) =$ $\qquad$ $C(U) =$ $\qquad$ $C(R) =$
  $N(A^T) =$ $\qquad$ $N(U^T) =$ $\qquad$ $N(R^T) =$
- Si $EA = R$ entonces las $m - r$ filas de E son una base del espacio nulo izquierdo de A

Solución de $Ax = b$

Consideremos los sistemas $Ax = b$; $Ux = c$ y $Rx = d$ con $r = rg(A)$.

- Los últimos $m - r$ renglones de U y R son cero, hay solución solo si los últimos $m - r$ elementos de c y d son cero.
- El conjunto solución (si tiene) es $S = \{x_p\} + N(A)$.
- La solución completa es de la forma $x = x_p + x_n$, donde:
    - x_p se puede formar igualando las variables libres a 0 y tomando las variables pivotes de los primeros r elementos de d.
    - x_n son combinaciones de $n - r$ soluciones especiales, c/u con una variable libre igual a 1 y las otras 0, las variables pivote se obtienen de la columna correspondiente de R (con signo invertido).

Encontrar la solución completa en el ejemplo anterior para:
$b^T = (0, 6, -6)$; $\quad c^T = (0, 6, 0) \quad$ y $\quad d^T = (-9, 3, 0)$.

Una matriz A $m \times n$ es de:

- Rango total de fila si $r = m$; la matriz tiene una inversa por derecha C (e.d. $AC = I_m$).
  EXISTENCIA: $Ax = b$ tiene por lo menos una solución.
  Ejemplo:
- Rango total de columna si $r = n$; la matriz tiene una inversa por izquierda B (e.d. $BA = I_n$).
  UNICIDAD: $Ax = b$ tiene a lo sumo una solución (o ninguna).
  Ejemplo:
- Rango total si $r = n = m$: la matriz tiene inversa A^{-1} (e.d. $A^{-1}A = AA^{-1} = I$).
  EXISTENCIA Y UNICIDAD: $Ax = b$ tiene una única solución.
  Ejemplo:

Matrices de rango 1: Cada matriz de rango 1 es de la forma $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$
$C(A) = \langle \mathbf{u} \rangle$
$C(A^T) = \langle \mathbf{v} \rangle$
Ejemplo:

Definición (Transformaciones lineales)

Sean V y W. dos espacios vectoriales sobre el cuerpo K. Una transformación lineal de V en W es una función T de V en W tal que

$$T\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\right)=T(\boldsymbol{x})+T(\boldsymbol{y})$$
$$T\left(k\boldsymbol{x}\right)=kT(\boldsymbol{x})$$

para todos los vectores $\boldsymbol{x}$ *y* $\boldsymbol{y}$ *de* V *y todo escalar* k *de* K.

Ambas condiciones se pueden resumir en:

$$T\left(k_1\mathbf{x}+k_2\mathbf{y}\right)=k_1T(\mathbf{x})+k_2T(\mathbf{y})$$

Ejemplos

a) Si V es cualquier espacio vectorial, la transformación identidad I, definida por $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$, es una transformación lineal de V en V.

b) La transformación cero 0, definida por $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es una transformación lineal de V en V.

c) Sea A una matriz $m \times n$ sobre el cuerpo K. La función T definida por $T(x) = Ax$ es una transformación lineal de K^n en K^m.
En particular, cuando $K = \mathbb{R}$ tenemos las transformaciones de:
alargamiento,
rotación,
reflexión,
proyección,
cambio de base.
https://www.youtube.com/watch?v=IrggOvOSZr4
https://www.youtube.com/watch?v=LyGKycYT2v0
https://www.youtube.com/watch?v=P2LTAUO1TdA

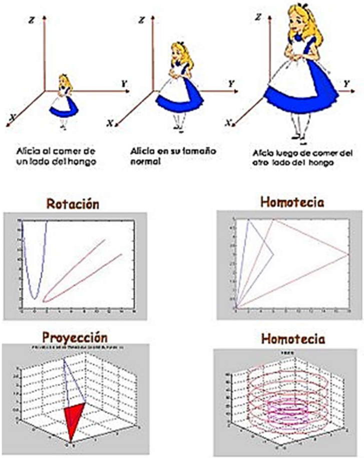


Imagen extraída de

http://algebra-ii.blogspot.com/2006/11/transformaciones-lineales.html

Ejemplos

d) Sea A una matriz $m \times n$. La función U definida por $U(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A$ es una transformación lineal de K^m en K^n.

e) Sea V el espacio vectorial de las funciones polinomios reales $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_k x^k\}$,
Transformación diferenciación $A : V \to V$ tal que

$$Af(x) = \frac{d}{dx}(f) = c_1 + 2c_2 x + \ldots + kc_k x^{k-1}.$$

Transformación integración $A : V \to V$ tal que

$$Af(x) = \int_0^x f(t)\,dt = c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + c_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Encontrar las matrices asociadas a $A_{dif} : P_3 \to P_3$ y $A_{int} : P_3 \to P_4$.
Comprobar que $A_{int} A_{dif} = I$

Factorización de Matrices

Propiedad (1N pagina 51)

Suponga que $A = A^T$ *puede factorizarse en* $A = LDU$ *sin intercambios de renglones. Entonces* U *es la traspuesta de* L*. La factorización simétrica se vuelve* $A = LDL^T$.

Propiedad (2B pagina 79)

Para cualquier matriz A *de* m *por* n *existe una permutación* P*, una matriz triangular inferior* L *con diagonal unitaria, y una matriz* U *escalonada de* m *por* n*, tales que* $PA = LU$.

Bibliografía

- Strang, G. Algebra lineal y sus aplicaciones, 4a Ed, Thomson, 2006.
- Hoffman, K., Kunze, R. Algebra Lineal. 1Ed, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. 1973.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN!!