

Guía de Actividad 1: Subespacios y Transformaciones Lineales

Ejercicio 1. ¿Cuáles de los siguientes son subespacios de \mathbb{R}^∞ ?

- a) Todas las sucesiones como $(1, 0, 1, 0, \dots)$ que incluyen una infinidad de ceros.
- b) Todas las sucesiones (x_1, x_2, \dots) con $x_j = 0$ a partir de un valor de j .
- c) Todas las sucesiones decrecientes: $x_{j+1} \leq x_j$ para cada j .
- d) Todas las sucesiones convergentes: $\{x_j\}$ tiene límite cuando $j \rightarrow \infty$.

Ejercicio 2. Encuentre la dimensión y una base para los cuatro subespacios fundamentales de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. Si $Ax = b$ siempre tiene por lo menos una solución, demuestre que la única solución de $A^T y = 0$ es $y = 0$. (Sugerencia ¿Cuál es el rango?)

Ejercicio 4. Falso o verdadero (Según corresponda, proporcione una razón o un contraejemplo)

- a) A y A^T tienen el mismo número de pivotes.
- b) A y A^T tienen el mismo espacio nulo izquierdo.
- c) Si el espacio renglón es igual al espacio columna, entonces $A^T = A$.
- d) Si $A^T = -A$, entonces el espacio renglón de A es igual al espacio columna.

Ejercicio 5. Encuentre una base de cada uno de los cuatro subespacios de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6. Dada la matriz

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Encuentre el rango de A , y proporcione una base de su espacio nulo.
- b) Los 3 primeros renglones de U son una base del espacio renglón de A : ¿Falso o Verdadero?
Las columnas 1, 3, 6 de U son una base del espacio columna de A : ¿falso o verdadero?
Los cuatro renglones de A son una base del espacio renglón de A : ¿falso o verdadero?.
- c) Encuentre tantos vectores b linealmente independientes como sea posible para los cuales $Ax = b$ tenga una solución.
- d) En la eliminación sobre A , ¿Qué múltiplo del tercer renglón se restó para eliminar el cuarto renglón?.

Ejercicio 7. ¿Qué matriz tiene el efecto de rotar cada vector un ángulo de 90° y luego proyectar el resultado sobre el eje x ? ¿Qué matriz representa la proyección sobre el eje x seguida de la proyección sobre el eje y ?

Ejercicio 8. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

produce un *alargamiento* en la dirección x . Trace en una misma gráfica

- 1. El círculo $x^2 + y^2 = 1$
- 2. Los puntos que resultan de multiplicar cada coordenada del círculo por A . ¿Qué forma tiene esa curva?

Ejercicio 9. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

produce una transformación por *esfuerzo cortante*, que deja el eje y sin cambio. Bosqueje este efecto en el eje x , indicando lo que le ocurre a $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(-1, 0)$ y cómo se transforma todo el eje.

Ejercicio 10. ¿Cuáles son las matrices de 3 por 3 que representan las transformaciones que:

- a) Proyectan cada vector sobre el plano $x - y$?
- b) Reflejan cada vector a través del plano $x - y$?
- c) Rotan el plano $x - y$ un ángulo de 90° , dejando sólo al eje z ?
- d) Rotan un ángulo de 90° al plano $x - y$, luego al plano $x - z$, luego al plano $y - z$?
- e) Realizan las tres rotaciones, pero cada una de un ángulo de 180° ?

Ejercicio 11. Sea $D : P_3 \rightarrow P_2$, el operador diferencial $D(p(x)) = p'(x)$. Sean $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $C = \{1, x, x^2\}$ bases para P_3 y P_2 respectivamente.

- 1. Encuentra la matriz A asociada a D con respecto a B y C .
- 2. Encuentra la matriz A' asociada a D con respecto a B' y C donde $B' = \{x^3, x^2, x, 1\}$

Ejercicio 12.

De los polinomios cúbicos P_3 a los polinomios de cuarto grado P_4 . ¿Qué matriz representa la multiplicación por $2 + 3t$? Las columnas de la matriz A de 5 por 4 provienen de la aplicación de la transformación a $1, t, t^2, t^3$.

Ejercicio 13. En el espacio P_3 de polinomios cúbicos, ¿qué matriz representa $\frac{d^2}{dt^2}$? Construya la matriz de 4×4 a partir de la base estándar $1, t, t^2, t^3$. Encuentre su espacio nulo y su espacio columna. ¿Qué significan éstos en términos de polinomios?

Ejercicio 14. En el espacio vectorial P_3 de todos los $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, sea S el subconjunto los polinomios con $\int_0^1 p(x)dx = 0$. Compruebe que S es un subespacio y encuentre una base.

Ejercicio 15. Encuentre la matriz A de 4×3 que representa un desplazamiento derecho: (x_1, x_2, x_3, x_4) se transforma en $Ax = (x_2, x_3, x_4, x_1)$. ¿Cuál es el efecto de A^2 ? Demuestre que $A^3 = A^{-1}$.

Ejercicio 16. ¿Cuáles de las siguientes transformaciones no son lineales? La entrada es $v = (v_1, v_2)$.

- a) $T(v) = (v_2, v_1)$.
- b) $T(v) = (v_1, v_1)$.
- c) $T(v) = (0, v_1)$.
- d) $T(v) = (0, 1)$.
- e) $T(v) = (v_1, 2v_2, v_1 + v_2)$.
- f) $T(v) =$ la mayor componenete de v .

Ejercicio 17.

- a) ¿Qué matriz transforma $(1, 0)$ en $(2, 5)$ y $(0, 1)$ en $(1, 3)$?
- b) ¿Qué matriz transforma $(2, 5)$ en $(1, 0)$ y $(1, 3)$ en $(0, 1)$?
- c) ¿Por qué ninguna matriz transforma $(2, 6)$ en $(1, 0)$ y $(1, 3)$ en $(0, 1)$?

Ejercicio 18.

- a) ¿Qué matriz transforma $(1, 0)$ y $(0, 1)$ en (r, t) y (s, u) ?
- b) ¿Qué matriz transforma (a, c) y (b, d) en $(1, 0)$ y $(0, 1)$?
- c) ¿Qué condición sobre a, b, c, d hace imposible el inciso b)?

Ejercicio 19. Suponga que v_1, v_2, v_3 son vectores característicos para T (esto significa que $T(v_i) = \lambda_i v_i$ para $i = 1, 2, 3$). ¿Cuál es la matriz para T cuando las bases de entrada y de salida son estos vectores?

Ejercicio 20. (Opcional) Determine la matriz de adyacencia del los siguientes grafos.

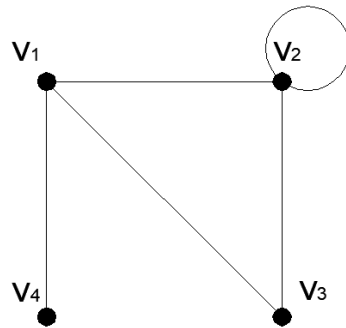


Figura 1: Grafo 1

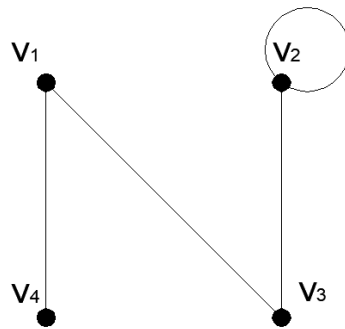


Figura 2: Grafo2

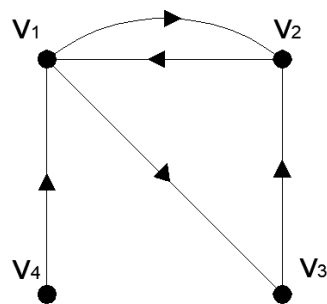


Figura 3: Digrafo1

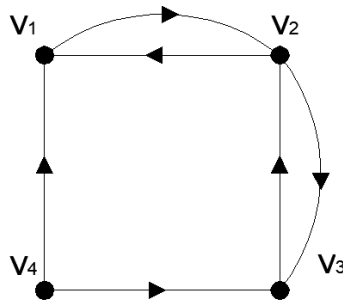


Figura 4: Digrafo2

Ejercicio 21. (Opcional) Suponga que todos los vectores x en el cuadrado unitario $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$ se transforman en Ax (A es de 2 por 2).

1. ¿Cuál es la forma de la región transformada (toda Ax ?
2. ¿Para qué matrices A esta región es cuadrada?
3. ¿Para que matrices A es una recta?
4. ¿Para que matrices A la nueva área sigue siendo 1?

Ejercicio 22. (Opcional) Compruebe que $(AB)^T$ es igual a $B^T A^T$, aunque estas son diferentes de $A^T B^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

En caso de que $AB = BA$ (¡lo cual en general no es cierto!), ¿Cómo puede demostrar que $B^T A^T = A^T B^T$

Entrega

Se deben entregar obligatoriamente los ejercicios: