Matemática IV - Ing. Mecánica - 2018
Dra. Andrea Ridolfi
Ing. Marcos Saromé

Guía de Actividad 4: Números Complejos y Variable Compleja

Ejercicio 1.

Demostrar que $(1+z)^2 = 1 + 2z + z^2$

Ejercicio 2.

Resolver la ecuación $z^2 + z + 1 = 0$ para $z = (x, y)$ escribiendo

$$(x, y)(x, y) + (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$$

y resolviendo entonces un par de ecuaciones lineales simultáneas en x e y
Sugerencia: Notese que ningún número real x satisface la ecuación dada para probar que $y \neq 0$.

Ejercicio 3.

Localizar los números $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$ vectorialmente, si:

1. $z_1 = 2i$, $z_2 = \dfrac{2}{3} - i$
2. $z_1 = (-\sqrt{3}, 1)$, $z_2 = (\sqrt{3}, 0)$
3. $z_1 = (-3, 1)$, $z_2 = (1, 4)$
4. $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_1 - iy_1$

Ejercicio 4.

Probar que $\sqrt{2}|z| \geq |Rez| + |Imz|$

Ejercicio 5.

Verificar las desigualdades (3). Sección 3, relativas a $Re\ z$, $Im\ z$ y $|z|$.

Ejercicio 6.

Probar que:

1. z es real si solo si $\overline{z} = z$
2. z es real o imaginario puro si y solo si $(\overline{z}^2) = z$

Ejercicio 7. Usar la fórmula de De Moivre (Sec. 7) para deducir las siguientes identidades trigonométricas:

1. $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$
2. $\operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta \operatorname{sen} - \operatorname{sen}^3\theta$

Ejercicio 8.

Establecer la identidad

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \ (z \neq 1)$$

Y usarla para deducir la identidad trigonométrica de Lagrange:

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(2n+1)\theta/2]}{2\sin(\theta/2)} (0 < \theta < 2\pi)$$

Sugerencia: En cuanto a la primera identidad, escribir $S = 1 + z + z^2 + ... + z^n$ y considerar la diferencia $S - zS$. Para deducir la segunda,, escribir $z = e^{i\theta}$ en la primera.

Ejercicio 9.

Probar que si c es cualquier raíz n-ésima de la unidad distinta de la unidad, entonces

$$1 + c + c^2 + \ldots + c^{n-1} = 0$$

Sugerencia: Utilizar la primera identidad del ejercicio anterior.

Ejercicio 10.

Para cada una de estas funciones, describir su dominio de definicion:

1. $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2}$
2. $f(z) = Arg(\frac{1}{z})$
3. $f(z) = \frac{z}{z+1}$
4. $f(z) = \frac{1}{1 - |z|^2}$

Ejercicio 11.

Dibujar la region sobre la que se aplica el sector $r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$ bajo la transormacion

1. $w = z^2$
2. $w = z^3$
3. $w = z^4$

Ejercicio 12.

Escribir $\Delta z = z - z_0$ y probar que $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ Si y sólo si $\lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0$

Ejercicio 13.

Mediante la propiedades [3],[5] y [6], Sección 13, demostrar que cuando $T(z) = \frac{az + b}{cz + d} (ad - bc \neq 0)$.

1. $\lim_{z \to \infty} T(z) = \infty$ si $c = 0$
2. $\lim_{z \to \infty} T(z) = \frac{a}{c}$ y $\lim_{z \to -d/c} T(z) = \infty$ s i $c \neq 0$

Ejercicio 14.

Consideremos la función f definida sobre el plano complejo extendido como:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{z} & \textit{cuando} \quad z \neq 0 \\ \infty & \textit{cuando} \quad z = 0 \\ 0 & \textit{cuando} \quad z = \infty \end{cases}$$

Permitiendo que los números z_0 y w_0 en la definición de continuidad, [3] de la sección 14, sean el punto del infinito, y utilizando los límites:

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} = \infty \ \lim_{z \to \infty} \frac{1}{z} = 0$$

, explicar por qué f es continua en todo el plano extendido.

Ejercicio 15.

Usar el teorema de la Sección 17 para probar que $f'(z)$ no existe en ningún punto para

1. $f(z) = \overline{z}$
2. $f(z) = z - \overline{z}$
3. $f(z) = 2x + ixy^2$
4. $f(z) = e^x e^{-iy}$

Ejercicio 16.

Demostrar, mediante el teorema de la Sección 18, que $f'(z)$ y su derivada $f''(z)$ existen en todas partes, y calcular $f''(z)$, para

1. $f(z) = iz + 2$
2. $f(z) = e^{-x} e^{-iy}$
3. $f(z) = z^3$
4. $f(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$

Ejercicio 17.

De los resultados en las secciones 17 y 18, determinar dónde existe $f'(z)$ y calcular sus valores para:

1. $f(z) = 1/z$
2. $f(z) = x^2 + iy^2$
3. $f(z) = z \ Im \ z$

Ejercicio 18.

Resolver las ecuaciones [2], sección 19, para u_x y u_y con el fin de probar que $u_x = u_r \cos\theta - u_\theta \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$ $u_y = r_r \operatorname{sen}\theta + u_\theta \frac{\cos\theta}{r}$ Usar entonces estas ecuaciones y las similares para v_x y v_y para demostrar que, en la sección 19, las ecuaciones [4] se cumplen en un punto z_0 si se satisfacen en él las ecuaciones [6]. Completar así la verificación de que las ecuaciones [6], Sección 19, son las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar.

Ejercicio 19.

Supongamos que una función $f(z) = u+iv$ es diferenciable en un punto no nulo $z_0 = r_0 exp(i\theta_0 =$) . Usar las expresiones halladas en el ejercicio anterior para u_x y v_y, junto con la forma polar [6], Sección 19 de las ecuaciones de Caucgy-Riemann, para demostrar que $f'(z_0)$ puede escribirse como:

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r)$$

Donde u_r y v_r se calculan en (r_0, θ_0)

Ejercicio 20.

1. Con ayuda de la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, deducir la forma alternativa

$$f'(z_0) = \frac{-i}{z_0}(u_\theta + iv_\theta)$$

de las expresiones para $f'(z_0)$ en el ejercicio anterior.

2. Utilizar la expresión de $f'(z_0)$ obtenida en el apartado anterior para probar que la derivada de la función $f(z) = 1/z (z \neq 0)$ en el ejemplo de la Sección 19 es $f'(z) = -1/z^2$.

Ejercicio 21.

1. Recordemos (Sección 3) que si $z = x + iy$, entonces

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ y } y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Aplicando formalmente la regla de la cadena a una función de dos variables deducir la fórmula

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y})$$

2. Definamos el operador

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}).$$

Ejercicio 22.

En cada caso, determinar los puntos singulatres de la funcion y explicar por que la funcion es analitica en todas partes excepto en esos puntos:

1. $\dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$

2. $\dfrac{z^3+i}{z^2-3z+2)}$

3. $\dfrac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$

Ejercicio 23.

Sea $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ una función analítica en un dominio D que no incluye al origen. Mediante las ecuaciones de Cauchy-Riemann en polares (Sección 19) y supuestas continuas las derivadas parciales, demostrar que la función $u(r,\theta)$ satisface en D la ecuación diferencial: $r^2 u_{rr}(r,\theta) + r u_r(r,\theta) + u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0$ Que es la forma polar de la ecuación de Laplace. Probar que lo mismo es cierto para la función $v(r,\theta)$

Ejercicio 24.

Sea $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ una función analítica en un dominio D, y que consideremos la familia de curvas de nivel $u(x,y) = c_1$ y $v(x,y) = c_2$ donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias. Probar que esas familias son ortogonales. Mas precisamente, demostrar que si $z_0 = (x_0, y_0)$ es un punto en D que es común a dos curvas particulares $u(x,y) = c_1$ y $v(x,y) = c_2$ si $f'(z_0) \neq 0$, entonces las rectas tangentes a esas curvas en (x_0, y_0) son perpendiculares. Sugerencia: de las ecuaciones $u(x,y) = c_1$ y $v(x,y) = c_2$ se sigue que:

$\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$

Ejercicio 25.

Dibujar las familias de curvas de nivel a partir de las siguientes componentes: $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

Entrega

Se deben entregar obligatoriamente los ejercicios: