

Matemática IV

Transformaciones Lineales

A. Ridolfi (PT), M. Saromé (JTP)

UNCUYO - FCAI



Ingeniería Mecánica



2018

- **Teorema Fundamental del Álgebra Lineal**
- **Factorización de matrices**
- **Soluciones de sistemas lineales**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- $C(A)$
- $N(A)$
- $C(A^T)$
- $N(A^T)$

(ver <https://www.youtube.com/watch?v=ggWYkes-n6E>)

Definición

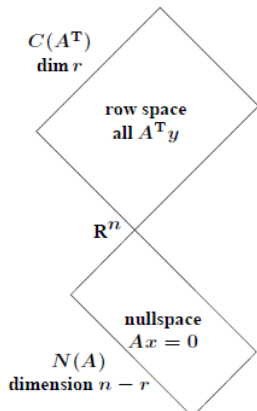
Dado un subespacio V de \mathbb{R}^n el espacio de todos los vectores ortogonales a V se denomina **complemento ortogonal** de V y se denota por V^\perp .

Teorema (Teorema Fundamental del Álgebra Lineal)

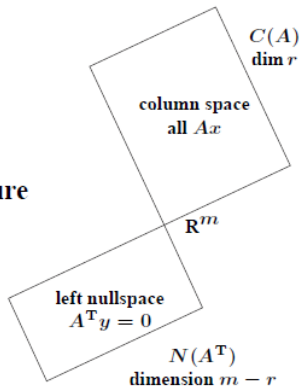
Sea A una matriz $n \times m$ de rango r ($r =$ número de pivotes), U la matriz triangular superior producida por la eliminación gaussiana de A y R la matriz reducida. Entonces:

- 1 El espacio columna $C(A)$ y el espacio fila $C(A^T)$ tienen ambos dimensión r .
- 2 El espacio nulo $N(A)$ tiene dimensión $n - r$.
- 3 El espacio nulo izquierdo $N(A^T)$ tiene dimensión $m - r$.
- 4 El espacio nulo es el complemento ortogonal del espacio fila en \mathbb{R}^n .
- 5 El espacio nulo izquierdo es el complemento ortogonal del espacio columna en \mathbb{R}^m .

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^n = N(A) \oplus C(A^T) & y & C(A^T) = (N(A))^\perp \\ \mathbb{R}^m = C(A) \oplus N(A^T) & y & N(A^T) = (C(A))^\perp \end{array}$$



The big picture



Factorización de Matrices

Propiedad (1N pagina 51)

Si $A = A^T$ puede factorizarse en $A = LDU$ sin intercambios de renglones. Entonces U es la traspuesta de L . En este caso: $A = LDL^T$.

Propiedad (2B pagina 79)

Para cualquier matriz $A_{m \times n}$ existe una permutación P , una matriz triangular inferior $L_{m \times m}$ con diagonal unitaria, y una matriz $U_{m \times n}$ escalonada tales que $PA = LU$.

$$A_{4 \times 6}; \quad A = LU$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[R, d] = \text{rref}([A \quad b]) = \text{rref}([U \quad c])$$

Observa las matrices A , U : matriz triangular superior producida por la eliminación gaussiana de A y R : matriz reducida de A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 7 & 13 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- La eliminación produce bases para el espacio fila y el espacio nulo de A : Estas son las mismas que las de U y R .

$$C(A^T) =$$

$$N(A) =$$

- La eliminación produce cambios en el espacio columna y en el espacio nulo izquierdo ($C(A) \neq C(U)$), pero la dimensión no cambia.

$$C(A) =$$

$$C(U) =$$

$$C(R) =$$

$$N(A^T) =$$

$$N(U^T) =$$

$$N(R^T) =$$

- Si $EA = R$ entonces las $m - r$ filas de E son una base del espacio nulo izquierdo de A

Solución de $Ax = b$

Consideremos los sistemas $Ax = b$; $Ux = c$ y $Rx = d$ con $r = \text{rg}(A)$.

- Los últimos $m - r$ renglones de U y R son cero, hay solución solo si los últimos $m - r$ elementos de c y d son cero.
- El conjunto solución (si tiene) es $S = \{x_p\} + N(A)$.
- La solución completa es de la forma $x = x_p + x_n$, donde:
 - x_p se puede formar igualando las variables libres a 0 y tomando las variables pivotes de los primeros r elementos de d .
 - x_n son combinaciones de $n - r$ soluciones especiales, c/u con una variable libre igual a 1 y las otras 0, las variables pivote se obtienen de la columna correspondiente de R (con signo invertido).

Encontrar la solución completa en el ejemplo anterior para:

$$b^T = (0, 6, -6); \quad c^T = (0, 6, 0) \quad \text{y} \quad d^T = (-9, 3, 0).$$

Una matriz A $m \times n$ es de:

- **Rango total de fila** si $r = m$; la matriz tiene una inversa por derecha C (e.d. $AC = I_m$).

EXISTENCIA: $Ax = b$ tiene por lo menos una solución.

Ejemplo:

- **Rango total de columna** si $r = n$; la matriz tiene una inversa por izquierda B (e.d. $BA = I_n$).

UNICIDAD: $Ax = b$ tiene a lo sumo una solución (o ninguna).

Ejemplo:

- **Rango total** si $r = n = m$: la matriz tiene inversa A^{-1} (e.d. $A^{-1}A = AA^{-1} = I$).

EXISTENCIA Y UNICIDAD: $Ax = b$ tiene una única solución.

Ejemplo:

Matrices de rango 1: Cada matriz de rango 1 es de la forma $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$

$$C(A) = \langle \mathbf{u} \rangle; \quad C(A^T) = \langle \mathbf{v} \rangle$$

Matriz de Vandermonde (Interpolación) Hallar el polinomio de grado n tal que $p(t_i) = b_i$; $i = 1, \dots, n$



Strang, G. Algebra lineal y sus aplicaciones, 4a Ed, Thomson, 2006.



Hoffman, K., Kunze, R. Algebra Lineal. 1 ºEd, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. 1973.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN!!

