



Guía de Actividad 4: Variable Compleja y Funciones

Ejercicio 1.

Localizar los números $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$ vectorialmente, si:

1. $z_1 = 2i$, $z_2 = \frac{2}{3} - i$
2. $z_1 = (-\sqrt{3}, 1)$, $z_2 = (\sqrt{3}, 0)$
3. $z_1 = (-3, 1)$, $z_2 = (1, 4)$
4. $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_1 - iy_1$

Ejercicio 2.

Usando el hecho de que $|z_1 - z_2|$ es la distancia entre los puntos z_1 y z_2 dar un argumento geométrico para ver que

1. La ecuación $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ representa una elipse con focos en $(0, \pm 4)$.
2. La ecuación $|z - 1| = |z + i|$ representa la recta de pendiente -1 que pasa por el origen.

Ejercicio 3.

Probar que:

1. z es real si solo si $\bar{z} = z$
2. z es real o imaginario puro si y solo si $(\bar{z}^2) = z$

Ejercicio 4. Usar la fórmula de De Moivre (Sec. 7) para deducir las siguientes identidades trigonométricas:

1. $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$
2. $\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin^3 \theta$

Ejercicio 5.

Establecer la identidad

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad (z \neq 1)$$

Y usarla para deducir la identidad trigonométrica de Lagrange:

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(2n+1)\theta/2]}{2 \sin(\theta/2)} \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

Sugerencia: En cuanto a la primera identidad, escribir $S = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$ y considerar la diferencia $S - zS$. Para deducir la segunda,, escribir $z = e^{i\theta}$ en la primera.

Ejercicio 6.

Probar que si c es cualquier raíz n -ésima de la unidad distinta de la unidad, entonces

$$1 + c + c^2 + \dots + c^{n-1} = 0$$

Sugerencia: Utilizar la primera identidad del ejercicio anterior.

Ejercicio 7.

Para cada una de estas funciones, describir su dominio de definicion:

1. $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2}$

2. $f(z) = \text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right)$

3. $f(z) = \frac{z}{z + 1}$

Ejercicio 8.

Dibujar la region sobre la que se aplica el sector $r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$ bajo la transformación

1. $w = z^2$

2. $w = z^3$

3. $w = z^4$

Ejercicio 9.

Escribir $\Delta z = z - z_0$ y probar que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \text{ Si y sólo si } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0$$

Ejercicio 10.

Mediante las propiedades [3],[5] y [6], Sección 13, demostrar que cuando

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} (ad - bc \neq 0).$$

1. $\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \infty$ si $c = 0$

2. $\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \frac{a}{c}$ y $\lim_{z \rightarrow -d/c} T(z) = \infty$ si $c \neq 0$

Ejercicio 11.

Consideremos la función f definida sobre el plano complejo extendido como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{cuando } z \neq 0 \\ \infty & \text{cuando } z = 0 \\ 0 & \text{cuando } z = \infty \end{cases}$$

Permitiendo que los números z_0 y w_0 en la definición de continuidad, [3] de la sección 14, sean el punto del infinito, y utilizando los límites:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0$$

, explicar por qué f es continua en todo el plano extendido.

Ejercicio 12. Mediante los resultados de la sección 16 probar que:

1. a) un polinomio

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n \text{ con } a_n \neq 0$$

de grado n ($n \geq 1$) es diferenciable en todas partes, con derivada:

$$P'(z) = a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}$$

2. los coeficientes del polinomio $P(z)$ del inciso anterior se pueden expresar como:

$$a_0 = P(0); a_1 = \frac{P'(0)}{1!}; \dots; a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$$

Ejercicio 13.

Usar el teorema de la Sección 7 para probar que $f'(z)$ no existe en ningún punto para

1. $f(z) = \bar{z}$
2. $f(z) = z - \bar{z}$
3. $f(z) = 2x + ixy^2$
4. $f(z) = e^x e^{-iy}$

Ejercicio 14.

Demostrar, mediante el teorema de la Sección 18, que $f'(z)$ y su derivada $f''(z)$ existen en todas partes, y calcular $f''(z)$, para

1. $f(z) = iz + 2$
2. $f(z) = e^{-x} e^{-iy}$
3. $f(z) = z^3$
4. $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

Ejercicio 15.

De los resultados en las secciones 17 y 18, determinar dónde existe $f'(z)$ y calcular sus valores para:

1. $f(z) = 1/z$
2. $f(z) = x^2 + iy^2$

3. $f(z) = z \operatorname{Im} z$

Ejercicio 16.

Resolver las ecuaciones [2], sección 19, para u_x y u_y con el fin de probar que $u_x = u_r \cos \theta - u_\theta \frac{\sin \theta}{r}$ y $u_y = r_r \sin \theta + u_\theta \frac{\cos \theta}{r}$. Usar entonces estas ecuaciones y las similares para v_x y v_y para demostrar que, en la sección 19, las ecuaciones [4] se cumplen en un punto z_0 si se satisfacen en él las ecuaciones [6]. Completar así la verificación de que las ecuaciones [6], Sección 19, son las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar.

Ejercicio 17.

Supongamos que una función $f(z) = u + iv$ es diferenciable en un punto no nulo $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$. Usar las expresiones halladas en el ejercicio anterior para u_x y v_y , junto con la forma polar [6], Sección 19 de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, para demostrar que $f'(z_0)$ puede escribirse como:

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r)$$

Donde u_r y v_r se calculan en (r_0, θ_0)

Ejercicio 18.

1. Con ayuda de la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, deducir la forma alternativa

$$f'(z_0) = \frac{-i}{z_0}(u_\theta + iv_\theta)$$

de las expresiones para $f'(z_0)$ en el ejercicio anterior.

2. Utilizar la expresión de $f'(z_0)$ obtenida en el apartado anterior para probar que la derivada de la función $f(z) = 1/z$ ($z \neq 0$) en el ejemplo de la Sección 19 es $f'(z) = -1/z^2$.

Ejercicio 19.

1. Recordemos que si $z = x + iy$, entonces

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ y } y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Aplicando formalmente la regla de la cadena a una función de dos variables deducir la fórmula

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

2. Definamos el operador

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Ejercicio 20.

En cada caso, determinar los puntos singulares de la función y explicar por qué la función es analítica en todas partes excepto en esos puntos:

1. $\frac{2z+1}{z(z^2+1)}$
2. $\frac{z^3+i}{z^2-3z+2}$
3. $\frac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$

Ejercicio 21.

Sea $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ una función analítica en un dominio D que no incluye al origen. Mediante las ecuaciones de Cauchy-Riemann en polares (Sección 19) y supuestas continuas las derivadas parciales, demostrar que la función $u(r, \theta)$ satisface en D la ecuación diferencial: $r^2 u_{rr}(r, \theta) + ru_r(r, \theta) + u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0$ Que es la forma polar de la ecuación de Laplace. Probar que lo mismo es cierto para la función $v(r, \theta)$

Ejercicio 22.

Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica en un dominio D , y que consideremos la familia de curvas de nivel $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias. Probar que esas familias son ortogonales. Mas precisamente, demostrar que si $z_0 = (x_0, y_0)$ es un punto en D que es común a dos curvas particulares $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ si $f'(z_0) \neq 0$, entonces las rectas tangentes a esas curvas en (x_0, y_0) son perpendiculares. Sugerencia: de las ecuaciones $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ se sigue que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Ejercicio 23.

Dibujar las familias de curvas de nivel a partir de las siguientes componentes: $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$

Ejercicio 24.

Supongamos que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ satisface las condiciones [1] y [2] de la sección 22. Seguir los pasos indicados para probar que $f(z)$ debe ser la función:

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

1. Obtener las ecuaciones $u_x = u$, $v_x = v$ y usarlas a continuación para mostrar que existen funciones reales ϕ y ψ de la variable real y tales que:

$$u(x, y) = e^x \phi(y) \text{ y } v(x, y) = e^x \psi(y)$$

2. Usar la armonicidad de u (Sección 21) para obtener la ecuación diferencial $\phi''(y) + \phi(y) = 0$ y mostrar así que $\phi(y) = A \cos y + B \sin y$, donde A y B son números reales.

3. Tras notar que $\psi(y) = A \operatorname{sen} y - B \cos y$ y que:

$$u(x, 0) + iv(x, 0) = e^x$$

hallar A y B . Concluir que:

$$u(x, y) = e^x \cos y \text{ y } v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$$

Ejercicio 25.

Probar que:

1. $\log(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i$

2. $\log(1 - i) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}i$

Ejercicio 26.

Sabiendo que la rama $\log z = \ln r + i\theta$ ($r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$) de la función logaritmo es analítica en todo punto z del dominio indicado, hallar su derivada mediante derivación de ambos lados de la identidad $e^{\log z} = z$ y usando la regla de la cadena.

Entrega

Se deben entregar obligatoriamente los ejercicios: