Matemática IV
Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

A. Ridolfi (PT), M. Saromé (JTP)

UNCUYO - FCAI

Ingeniería Mecánica

2018

Contenido

- **Teorema Fundamental del Álgebra Lineal**
- **Factorización de matrices**
- **Soluciones de sistemas lineales**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- $C(A)$
- $N(A)$
- $C(A^T)$
- $N(A^T)$

(ver https://www.youtube.com/watch?v=ggWYkes-n6E)

Definición

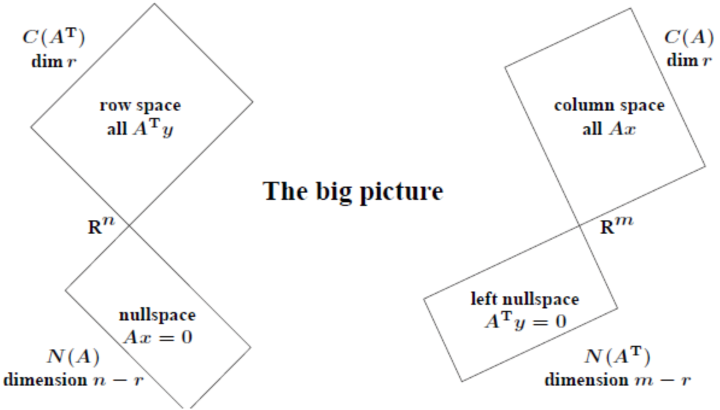
Dado un subespacio V de $\mathbb{R}^n$ el espacio de todos los vectores ortogonales a V se denomina complemento ortogonal *de V y se denota por $V^\perp$.*

Teorema (Teorema Fundamental del Álgebra Lineal)

Sea A una matriz $n \times m$ de rango r ($r =$ numéro de pivotes), U la matriz triangular superior producida por la eliminación gausiana de A y R la matriz reducida. Entonces:

1. *El espacio columna $C(A)$ y el espacio fila $C(A^T)$ tienen ambos dimensión r.*
2. *El espacio nulo $N(A)$ tiene dimensión $n - r$.*
3. *El espacio nulo izquierdo $N(A^T)$ tiene dimensión $m - r$.*
4. *El espacio nulo es el complemento ortogonal del espacio fila en $\mathbb{R}^n$.*
5. *El espacio nulo izquierdo es el complemento ortogonal del espacio columna en $\mathbb{R}^m$.*

$$\mathbb{R}^n = N(A) \oplus C(A^T) \qquad \text{y} \qquad C(A^T) = (N(A))^{\perp}$$
$$\mathbb{R}^m = C(A) \oplus N(A^T) \qquad \text{y} \qquad N(A^T) = (C(A))^{\perp}$$



Factorización de Matrices

Propiedad (1N pagina 51)

Si $A = A^T$ puede factorizarse en $A = LDU$ sin intercambios de renglones. Entonces U es la traspuesta de L. En este caso: $A = LDL^T$.

Propiedad (2B pagina 79)

Para cualquier matriz $A_{m\times n}$ existe una permutación P,, una matriz triangular inferior $L_{m\times m}$ con diagonal unitaria, y una matriz $U_{m\times n}$ escalonada tales que $PA = LU$.

$A_{4\times 6}; \quad A = LU$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[R, d] = rref\left(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}\right) = rref\left(\begin{bmatrix} U & c \end{bmatrix}\right)$$

Observa las matrices A, U: matriz triangular superior producida por la eliminación gausiana de A y R: matriz reducida de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 7 & 13 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- La eliminación produce bases para el espacio fila y el espacio nulo de A: Estas son las mismas que las de U y R.
  $C(A^T) =$
  $N(A) =$
- La eliminación produce cambios en el espacio columna y en el espacio nulo izquierdo ($C(A) \neq C(U)$), pero la dimensión no cambia.
  $C(A) =$ $\qquad C(U) =$ $\qquad C(R) =$
  $N(A^T) =$ $\qquad N(U^T) =$ $\qquad N(R^T) =$
- Si $EA = R$ entonces las $m - r$ filas de E son una base del espacio nulo izquierdo de A

Solución de $Ax = b$

Consideremos los sistemas $Ax = b$; $Ux = c$ y $Rx = d$ con $r = rg(A)$.

- Los últimos $m - r$ renglones de U y R son cero, hay solución solo si los últimos $m - r$ elementos de c y d son cero.
- El conjunto solución (si tiene) es $S = \{x_p\} + N(A)$.
- La solución completa es de la forma $x = x_p + x_n$, donde:
  - x_p se puede formar igualando las variables libres a 0 y tomando las variables pivotes de los primeros r elementos de d.
  - x_n son combinaciones de $n - r$ soluciones especiales, c/u con una variable libre igual a 1 y las otras 0, las variables pivote se obtienen de la columna correspondiente de R (con signo invertido).

Encontrar la solución completa en el ejemplo anterior para:
$b^T = (0, 6, -6)$; $\quad c^T = (0, 6, 0) \quad$ y $\quad d^T = (-9, 3, 0)$.

Una matriz A $m \times n$ es de:

- Rango total de fila si $r = m$; la matriz tiene una inversa por derecha C (e.d. $AC = I_m$).
  EXISTENCIA: $Ax = b$ tiene por lo menos una solución.
  Ejemplo:
- Rango total de columna si $r = n$; la matriz tiene una inversa por izquierda B (e.d. $BA = I_n$).
  UNICIDAD: $Ax = b$ tiene a lo sumo una solución (o ninguna).
  Ejemplo:
- Rango total si $r = n = m$: la matriz tiene inversa A^{-1} (e.d. $A^{-1}A = AA^{-1} = I$).
  EXISTENCIA Y UNICIDAD: $Ax = b$ tiene una única solución.

Ejemplo:

Matrices de rango 1: Cada matriz de rango 1 es de la forma $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$

$C(A) = \langle \mathbf{u} \rangle$; $\qquad C(A^T) = \langle \mathbf{v} \rangle$

Matriz de Vandermonde (Interpolación) Hallar el polinimio de grado n tal que $p(t_i) = b_i$; $i = 1, ..., n$

Bibliografía

- Strang, G. Algebra lineal y sus aplicaciones, 4a Ed, Thomson, 2006.
- Hoffman, K., Kunze, R. Algebra Lineal. 1°Ed, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. 1973.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN!!