



Guía de Actividad 2: Autovalores y autovectores

Ejercicio 1. Encuentre la matriz que proyecta todo punto del plano sobre la recta $x + 2y = 0$.

Ejercicio 2. Suponga que P es la matriz proyección sobre la recta que pasa por \mathbf{a} .

- a) ¿Por qué el producto interno de \mathbf{x} con $P\mathbf{y}$ es igual al producto interno de $P\mathbf{x}$ con \mathbf{y} ?
- b) ¿Son iguales los dos ángulos? Encuentre sus cosenos si $\mathbf{a} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{x} = (2, 0, 1)$ e $\mathbf{y} = (2, 1, 2)$.
- c) ¿Por qué el producto interno de $P\mathbf{x}$ con $P\mathbf{y}$ siempre es el mismo? ¿Cuál es el ángulo entre $P\mathbf{x}$ y $P\mathbf{y}$?

Ejercicio 3. Proyecte el vector $\mathbf{b} = (1, 1)$ sobre las rectas que pasan por $\mathbf{a}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{a}_2 = (1, 2)$.

- a) Trace las proyecciones p_1 y p_2 y sume $p_1 + p_2$. La suma de las proyecciones no es \mathbf{b} porque las \mathbf{a}' s no son ortogonales.
- b) La proyección de \mathbf{b} sobre el plano de \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 es igual a \mathbf{b} . Encuentre $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ para $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 4. Este problema proyecta $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ sobre la recta que pasa por $\mathbf{a} = (1, \dots, 1)$. Se resuelven m ecuaciones $\mathbf{a}x = \mathbf{b}$ en 1 incógnita (por mínimos cuadrados).

- a) Resuelva $\mathbf{a}^T \mathbf{a} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$ para demostrar que $\hat{\mathbf{x}}$ es la media (el promedio) de las b' s.
- b) Encuentre $\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{a}\hat{\mathbf{x}}$, la varianza $\sigma^2 = \|\mathbf{e}\|^2$ y la desviación estándar $\sigma = \|\mathbf{e}\|$.
- c) La recta horizontal $\hat{\mathbf{b}} = 3$ es la más próxima a $\mathbf{b} = (1, 2, 6)$. Compruebe que $\mathbf{p} = (3, 3, 3)$ es perpendicular a \mathbf{e} , y encuentre la matriz proyección P .

Ejercicio 5. Utilizar cuatro puntos $\mathbf{b} = (0, 8, 8, 20)$ para resolver los siguientes incisos.

1. Con $\mathbf{b} = 0, 8, 8, 20$ en $t = 0, 1, 3, 4$, escriba y resuelva las ecuaciones normales $A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$. Para la mejor recta como en la figura, encuentre sus cuatro alturas p_i y sus cuatro errores e_i . ¿Cuál es el valor mínimo $E^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2$?

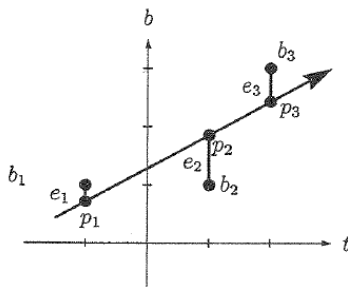


Figura 1: Proyección por mínimos cuadrados

2. La recta $C + Dt$ pasa por los ps. Con $b = 0, 8, 8, 20$ en los tiempos $t = 0, 1, 3, 4$ escriba las cuatro ecuaciones $Ax = b$ (irresoluble). Cambie las mediciones a $p = 1, 5, 13, 17$ y encuentre una solución exacta $A\hat{x} = p$.
3. Compruebe que $e = b - p = (-1, 3, -5, 3)$ es perpendicular a ambas columnas de A . ¿Cuál es la distancia más corta $\|e\|$ de b al espacio columna de A ?
4. Para la parábola más próxima $b = C + Dt + Et^2$ a los mismos cuatro puntos, escriba las ecuaciones irresolubles $Ax = b$ en tres incógnitas $x = (C, D, E)$. Escriba las tres ecuaciones normales $A^T A\hat{x} = A^T b$ (no se requiere su solución). Ahora se está ajustando una parábola a los cuatro puntos. ¿Qué ocurre en la figura?

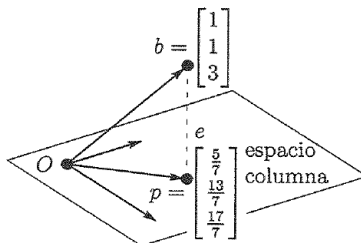


Figura 2: Proyección por mínimos cuadrados

5. Para la cúbica más próxima $b = C + Dt + Et^2 + Ft^3$ a los mismos cuatro puntos, escriba las ecuaciones $Ax = b$. Resuélvalas por eliminación. Ahora, esta cúbica pasa exactamente por los puntos. ¿Cuáles son p y e ?
6. El promedio de los cuatro tiempos es $\hat{t} = \frac{1}{4}(0 + 1 + 3 + 4) = 2$. El promedio de las cuatro bs es $\hat{b} = \frac{1}{4}(0 + 8 + 8 + 20) = 9$.
 - a) Compruebe que la mejor recta pasa por el punto central $(\hat{t}, \hat{b}) = (2, 9)$
 - b) Explique por qué $C + D\hat{t} = \hat{b}$ proviene de la primera ecuación en $A^T A\hat{x} = A^T b$

Ejercicio 6. Si $A = QR$, encuentre una fórmula sencilla para la matriz proyección P sobre el espacio columna de A .

Nota: QR es la factorización de A donde las columnas de Q son ortonormales y R es una matriz triangular superior invertible.

Ejercicio 7. Resuelva $\frac{du}{dt} = Pu$ cuando P es una proyección:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Parte de $u(0)$ crece exponencialmente mientras la parte del espacio nulo, permanece fija.

Ejercicio 8. Los valores característicos de A son iguales a los valores característicos de A^T . Lo anterior es cierto porque

Demuestre con un ejemplo que los vectores característicos de A y A^T no son los mismos.

Ejercicio 9. Encuentre los valores característicos y los vectores característicos de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Ejercicio 10. Suponga que los valores característicos de A son 0, 3, 5, con vectores característicos independientes u, v, w .

- Proporcione una base para el espacio nulo y una base para el espacio columna.
- Encuentre una solución particular de $Ax = v + w$. Encuentre todas las soluciones.
- Demuestre que $Ax = u$ no tiene solución. (En caso de tenerla, entonces..... estaría en el espacio columna.)

Ejercicio 11. ¿Qué se hace a $Ax = \lambda x$, para demostrar los incisos a), b), y c)?

- λ^2 es un valor característico de A^2 .
- λ^{-1} es un valor característico de A^{-1} .
- $\lambda + 1$ es un valor característico de $A + I$.

Ejercicio 12.

- Construya matrices 2 por 2 tales que los valores característicos de A y B no sean los productos de los valores característicos de A y B , y los valores característicos de $A + B$ no sean las sumas de los valores característicos individuales.
- Compruebe, no obstante, que la suma de los valores característicos de $A + B$ es igual a la suma de todos los valores característicos individuales de A y B , y de manera semejante para los productos. ¿Por qué es cierto lo anterior?

Ejercicio 13. Se sabe que los valores característicos de una matriz B de 3 por 3 son 0, 1, 2. Esta información es suficiente para encontrar tres de los cuatro incisos siguientes:

- a) El rango de A .
- b) El determinante de BTB ,
- c) Los valores característicos de BTB
- d) Los valores característicos de $(B + I) - 1$

Ejercicio 14. Suponga que los valores característicos de A son 1, 2, 4. ¿Cuál es la traza de A^2 ? ¿Cuál es el determinante de $(A^{-1})^T$?

Ejercicio 15. La siguiente matriz es singular con rango 1. Encuentre tres λ 's y tres vectores característicos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 16. Suponga que $A = uv^T$ es una columna multiplicada por un reglón (una matriz con rango 1).

- a) Multiplique A por u , para demostrar que u es un vector característico. ¿Cuál es λ ?
- b) ¿Cuáles son los otros valores característicos de A (y por qué)?
- c) Calcule traza (A), a partir de la suma de la diagonal y la suma de los λ s.

Ejercicio 17. Si a $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, encuentre A^{100} , diagonalizando A .

Ejercicio 18. Suponga que $|A| = SAS^{-1}$. Tome determinantes para demostrar que $A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n =$ producto de λ s. Esta rápida demostración sólo funciona cuando A es.....

Ejercicio 19. (Opcional) La ecuación de orden superior $y'' + y = 0$ puede escribirse como un sistema de primer orden si la velocidad y' se introduce como otra incógnita:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ -y \end{bmatrix}$$

Si ésta es $du/dt = Au$, ¿Cuál es la matriz A de 2 por 2? Encuentre sus valores característicos y sus vectores característicos, y calcule la solución que empieza desde $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Ejercicio 20. Suponga que la población de conejos r , y la población de lobos w están regidas por

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= 4r - 2w \\ \frac{dw}{dt} &= r + w.\end{aligned}$$

- a) Este sistema es ¿estable, neutralmente estable o inestable?
- b) Si inicialmente $r = 300$ y $w = 200$, ¿Cuáles son las poblaciones en el instante t ?
- c) Al cabo de bastante tiempo, ¿cuál es la proporción de conejos a lobos?

Ejercicio 21. Entre dos habitaciones con aforo para $v(0) = 30$ personas y $w(0) = 10$ personas se abre una puerta. El movimiento entre las habitaciones es proporcional a la diferencia $v - w$:

$$\frac{dv}{dt} = w - v \quad y \quad \frac{dw}{dt} = v - w.$$

Demuestre que el total $v + w$ es constante (40 personas). Encuentre la matriz en $\frac{du}{dt} = Au$, así como sus valores característicos y vectores característicos. ¿Cuáles son v y w en $t = 1$?

Entrega

Se deben entregar obligatoriamente los ejercicios: