
NÚMEROS REALES

EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

► Conjuntos

(1) Escribe, usando notación matemática, los siguientes conjuntos:

- a) Los resultados de tirar una moneda al aire.
- b) Resultados de tirar dos dados al aire.
- c) Las notas que puede obtener un alumno en matemáticas.

(2) Calcula la unión y la intersección de los siguientes conjuntos:

- a) $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b\}$
- b) De \mathbb{N} y \mathbb{Z}

► Repaso números racionales

(3) Clasifica los siguientes números, indicando si son naturales, enteros, racionales o reales:

$$3, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, -1'24, -13, 0'72\widehat{24}, \sqrt[3]{8}, \frac{4}{0}, \sqrt{4}$$

(4) Representa los siguientes números sobre una recta: $3, -2, \frac{1}{4}, \frac{5}{2}, -\frac{4}{3}$

(5) Calcula, simplificando al máximo el resultado:

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{3}$

b) $\frac{4}{5} - \frac{7}{4}$

c) $\frac{2}{7} \cdot \frac{8}{3}$

d) $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}}$

(6) Realiza las siguientes operaciones:

$$2 - \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{10} + 3 \cdot \frac{7}{6}}{\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(3 - \frac{5}{6}\right)}$$

(7) Despeja la x de las siguientes ecuaciones:

$$a) \frac{x}{2} = \frac{8}{5} \quad b) \frac{5}{x} = -\frac{3}{4} \quad c) \frac{7}{3} = \frac{x}{5} \quad d) \frac{5}{4} = -\frac{1}{x}$$

(8) Calcula:

$$a) \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} \quad b) \frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{5}} \quad c) \frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{c}} \quad d) \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{b}}$$

► Potencias

(9) Simplifica al máximo las siguientes expresiones usando las propiedades de las potencias, dejando el resultado como potencia:

$$\begin{array}{llll} a) 7^5 \cdot 7^{10} \cdot 7^2 & d) \frac{2^5}{2^3} & f) \frac{3^4}{3^6} & h) (-11)^3 \\ b) 2^2 \cdot 2^4 & e) \frac{7^5}{7^9} & g) (7^4)^5 & \end{array}$$

(10) Simplifica al máximo las siguientes expresiones usando las propiedades de las potencias, dejando el resultado como potencia:

$$\begin{array}{ll} a) 9^3 \cdot 27^2 & c) (-4)^4 \cdot (-8)^2 \\ b) \frac{81^2}{9^4} & \end{array}$$

(11) Simplifica al máximo las siguientes expresiones usando las propiedades de las potencias, dejando el resultado como potencia:

$$a) \frac{2^4 \cdot 5^2 \cdot 20^3}{8^2 \cdot 15^4} \quad b) \frac{(-8)^3 \cdot (-18)^2}{(-12)^5 \cdot 9^2} \quad c) \frac{a^{-1} \cdot b^{-2} \cdot c^{-7}}{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot c^4}$$

(12) Calcula:

$$a) 2^3 - (-2)^2 + (-2)^3 + 2^0 - 2^{-2} \quad b) \left(\frac{7}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 \cdot 7^{-1}$$

(13) **Operando.** Calcula, simplificando al máximo:

$$a) 2^{\frac{x}{2}} \cdot 4^{2x} \cdot 16^{\frac{4x}{5}} \quad b) \left(\frac{1}{3} - 3^{-2}\right)^{-2} \quad c) \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{x}{3}}}{5^{\frac{-3x}{4}}}$$

► Raíces n-ésimas

(14) Calcula, usando la definición de raíz n-ésima:

a) $\sqrt{81}$	c) $\sqrt[4]{625}$	e) $\sqrt[8]{256}$	g) $\sqrt{-1}$
b) $\sqrt[3]{125}$	d) $\sqrt[5]{32}$	f) $\sqrt[10]{1024}$	h) $\sqrt[3]{-1}$

(15) Resuelve las siguientes ecuaciones (usa la calculadora):

a) $x^3 = 27$	b) $x^{10} = 1024$	c) $x^5 = 4$	d) $x^7 = 10$
---------------	--------------------	--------------	---------------

(16) Calcula usando la calculadora:

a) $\sqrt[3]{25}$	c) $\sqrt[10]{21}$	e) $\sqrt{3^8}$	g) $\sqrt[10]{4^5}$
b) $\sqrt[8]{37}$	d) $\sqrt{-1}$	f) $\sqrt[3]{2^4}$	h) $\sqrt[3]{(-1)^5}$

(17) Expresa en forma de potencia:

a) $\sqrt[8]{20}$	b) $\sqrt[3]{4^2}$	c) $\sqrt[21]{3^4}$	d) $\sqrt[8]{2^{10}}$	e) $\sqrt[7]{x^5}$
-------------------	--------------------	---------------------	-----------------------	--------------------

(18) Calcula:

a) $9^{\frac{1}{2}}$	b) $8^{\frac{1}{3}}$	c) $256^{\frac{1}{4}}$	d) $4^{\frac{3}{2}}$
----------------------	----------------------	------------------------	----------------------

(19) ¿Cuánto vale $\sqrt[n]{a^n}$?

(20) **Simplificación.** Simplifica:

a) $\sqrt[6]{5^2}$	b) $\sqrt[4]{49}$	c) $\sqrt[3]{x^6}$	d) $\sqrt[10]{a^5}$
--------------------	-------------------	--------------------	---------------------

(21) **Producto.** Calcula:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$	b) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$	c) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{4}$	d) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$
-------------------------------	------------------------------------	------------------------------------	------------------------------

(22) **División.** Calcula:

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$	c) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{625}}$	e) $\sqrt{\frac{25}{9}}$	g) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$
b) $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$	d) $\frac{\sqrt[10]{2048}}{\sqrt[10]{2}}$	f) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$	h) $\sqrt{\frac{a^4}{b^2}}$

(23) **Raíces de raíces.** Expresa como una única raíz las siguientes raíces de raíces:

a) $\sqrt{\sqrt{16}}$	b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{22}}$	c) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$	d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$
-----------------------	-----------------------------	----------------------------	----------------------------

(24) **Sacar factores.** Descompón los radicandos en números primos y saca todos los factores que puedas fuera de la raíz:

a) $\sqrt{3^4 \cdot 2}$	d) $\sqrt[3]{84 \cdot 14}$	g) $\sqrt[3]{40}$	j) $\sqrt{49x^2}$
b) $\sqrt[5]{2^5 \cdot 3^{10} \cdot 7}$	e) $\sqrt{75}$	h) $\sqrt[3]{882}$	k) $\sqrt{50x}$
c) $\sqrt{125 \cdot 98}$	f) $\sqrt{900}$	i) $\sqrt{4x}$	l) $\sqrt[3]{81x^4}$

(25) **Sumas y restas.** Calcula, simplificando al máximo:

a) $2\sqrt{3} - 4\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$	c) $\sqrt{24} - 3\sqrt{150}$
b) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{8} - 5\sqrt{18}$	d) $2\sqrt{162} - 3\sqrt{16} + 2\sqrt{75} - \sqrt{72}$

(26) **Cuando la raíz aparece dividiendo.** Racionaliza:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$	b) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$	c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$
-------------------------	--------------------------	--------------------------------

(27) Calcula:

a) $(1 + \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{3})$	c) $(3\sqrt{2} + 4\sqrt{7}) \cdot (3\sqrt{2} - 4\sqrt{7})$
b) $(4 + 3\sqrt{7}) \cdot (4 - 3\sqrt{7})$	

(28) **Cuando la raíz aparece sumando.** Racionaliza:

a) $\frac{1}{\sqrt{3} + 4}$	b) $\frac{1}{1 - \sqrt{3}}$	c) $\frac{2}{3\sqrt{2} - 3}$	d) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$	e) $\frac{3}{3\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}$
-----------------------------	-----------------------------	------------------------------	------------------------------------	--------------------------------------

(29) Calcula, simplificando al máximo:

a) $3\sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{2}}$	b) $\frac{2 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{5}} - \frac{3 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{5}}$
-------------------------------------	--

(30) Indica si es verdadera o falsa la siguiente expresión:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) - 1 = 0$$

Puedes usar la calculadora.

► Desigualdades

(31) a) Si $x > 0$ ¿ $-x$ es positivo o negativo?

b) Si $x < 0$ ¿ $-x$ es positivo o negativo?

(32) Si $a > b$, ¿ $a - b$ es positivo o negativo?

► Intervalos

(33) Escribe la definición de los siguientes intervalos:

$$\begin{array}{lll} a) [0, 10] & c) (20, 30] & e) (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ b) \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) & d) \left(-1, \frac{5}{3}\right) & \end{array}$$

(34) Representa los intervalos del ejercicio anterior.

(35) Representa los siguientes intervalos:

$$\begin{array}{lll} a) [-1, 1] \cup (2, 4) & c) (0, \infty) \cup [-2, -1] & e) [3, 3] \cup [4, 4] \\ b) (0, 4] \cup [4, 5) & d) (-\infty, -3) \cup (-3, \infty) & \end{array}$$

(36) Sea A un punto, y sea OA la distancia de este punto al origen. Sea x la coordenada del punto A. Si A está a la derecha de O es evidente que $x = OA$, pero si A está a la izquierda $x \neq OA$. ¿Cuánto vale x en este caso?

(37) Algunos de los siguientes intervalos están mal escritos. Indica cuáles y dónde está el error:

$$\begin{array}{lllll} a) (2, 3) & c) \left[\frac{4}{0}, \infty\right) & e) [0, \infty] & g) (\infty, 4) & i) [0, 0] \\ b) (1, -1) & d) (-\infty, \infty) & f) (3, \infty) & h) [-1, -2] & j) (0, 0) \end{array}$$

(38) Escribe un entorno de 3, otro de -1 y otro de 7.

► Valor absoluto

(39) **Memorizando definición.** Calcula:

$$\begin{array}{llll} a) |10| & b) |-2^5| & c) |0| & d) \left|-\frac{3}{4}\right| \end{array}$$

(40) ¿Es verdad que $(-5, 5) = \{x \in \mathbb{R} / |x| < 5\}$? Justifica tu respuesta.

(41) Haz un dibujo justificando las siguientes equivalencias:

$$\begin{array}{l} a) |x - 5| < 3 \iff 2 < x < 8 \\ b) |x + 4| < 2 \iff -6 < x < -2 \\ c) -2 < x < 2 \iff |x| < 2 \end{array}$$

(42) Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} a) |x| = 7 & c) |2 - x| = 3 & e) |5 - x| < 2 \\ b) |x| = -2 & d) 2 - |x + 5| = 4 & f) |x - 2| \geq 6 \end{array}$$

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

- (1) **Media aritmética.** Probar que la media aritmética de dos números está comprendida entre los dos números. Esto es, que si

$$a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$$

- (2) **Cuando la raíz aparece multiplicando.** Racionaliza:

a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$

b) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$

- (3) Calcula:

a) $(2 + \sqrt{5}) \cdot (2 - \sqrt{5})$

c) $(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})$

b) $(2 - 5\sqrt{2}) \cdot (2 + 5\sqrt{2})$

- (4) **Cuando la raíz aparece sumando.** Racionaliza:

a) $\frac{1}{5 + \sqrt{5}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2} - 6}$

c) $\frac{5}{1 + 2\sqrt{5}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

e) $\frac{4}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

- (5) Calcula, simplificando al máximo:

a) $5\sqrt{7} + \frac{2}{3\sqrt{7}}$

b) $\frac{4 - \sqrt{4}}{1 - \sqrt{2}} - \frac{5}{1 + \sqrt{2}}$

c) $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

- (6) Expresa como una única raíz:

a) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}}$

- (7) Escribe la definición de los siguientes intervalos:

a) $[-2, \sqrt{10}]$

b) $[-11, -5]$

c) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

- (8) Representa los siguientes intervalos:

a) $(0, 4) \cup (4, 5)$

d) $(-\infty, 0] \cup [-3, 3]$

g) $[-1, \infty) \cup (4, \infty)$

b) $[-4, 4] \cup [-2, 2]$

e) $(-\infty, 4] \cup (-4, -1]$

c) $(-\infty, 4] \cup [5, 6]$

f) $[4, 5] \cup (4, \infty)$

- (9) Expresa en forma de intervalo los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{lll} a) \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 4\} & c) \{x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 4\} & e) \{x \in \mathbb{R} / |x + 2| > 5\} \\ b) \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 5\} & d) \{x \in \mathbb{R} / |x - 3| < 4\} & \end{array}$$

(10) Representa el conjunto de puntos que satisface que

$$\begin{array}{lll} a) |x - 2| > 3 & b) |4 + x| \geq 5 & c) |x| > 4 \end{array}$$

(11) Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} a) |x - 5| = 2 & b) |7 - x| = 4 & c) |2x + 5| = 9 \end{array}$$