▶ Polinomios de primer grado: la recta

(1) Representa las siguientes rectas:

a) $y = 2x + 3$ b) $5x - 2y = 10$ c) $y = \dfrac{2-x}{3}$

(2) Representa las rectas:

a) $y = 3$ c) $y = 0$ e) $x = -3$
b) $y = -2$ d) $x = 2$ f) $x = 0$

(3) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto A y tiene pendiente m en los siguientes casos:

a) $A(-1, 2)$ y $m = 2$ b) $A(4, 0)$ y $m = -\dfrac{1}{2}$

(4) Calcula la ecuación de la recta que pasa por:

a) $A(1, 0)$ y $B(3, -1)$ b) $A(5, 0)$ y $B(0, 2)$

(5) Representa en papel cuadriculado la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(-1, -4)$. A partir de la gráfica calcula la ecuación explícita de dicha recta.

(6) Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, 0)$ y tiene pendiente $\dfrac{2}{5}$.

(7) Calcula la ecuación de la recta:

a) que pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(2, 5)$.
b) que tiene pendiente $m = -2$ y pasa por $A(3, 1)$.

▶ Polinomios de segundo grado: la parábola

(8) Representa:

a) $y = x^2 - 1$ b) $y = x^2 + 2x + 1$ c) $y = x^2 - 2x + 1$

(9) El vértice de la parábola $y = ax^2 - 2x + c$ es $(1, 4)$. Calcula el valor de a y de c.

(10) Una empresa fue fundada hace 10 años, y la expresión

$$C(t) = -\frac{t^2}{4} + 3t + 10, \quad 0 \le t \le 10$$

indica cómo ha evolucionado su capital C (en millones de euros) en función del tiempo t (en años) transcurrido desde su fundación.

a) Representar gráficamente esa evolución.

b) ¿Cuánto alcanzó su valor máximo y a cuánto ascendió? ¿En qué período creció (o decreció) dicho capital?

c) ¿Cuál es el capital actual de la empresa? ¿Hubo algún otro momento en el que el capital de la empresa fuera el mismo que el actual?

(11) Una feria ganadera permanece abierta al público desde las 10 hasta las 20 horas. Se ha comprobado que el número de visitantes diarios queda determinado, como función de la hora del día, a través de la expresión:

$$N(t) = -20(A-t)^2 + B, \quad 10 \leq t \leq 20$$

Sabiendo que a las 17 horas se alcanza el número máximo de 1500 visitantes, se pide:

a) Determinar las constantes A y B.

b) Representar $N(t)$.

(12) Debido a un chaparrón, el caudal de agua que entra a un depósito de recogida de agua sigue la función $f(t) = -t^2 + 20t$ (t expesados en minutos y $f(t)$ en litros por minuto).

a) ¿Cuánto tiempo está entrando agua al depósito?

b) ¿Cuánto es máximo el caudal que entra? ¿Cuánto es ese caudal máximo?

c) ¿Cuántos litros se han recogido tras el chaparrón?

(13) El consumo de un motor, en un trabajo de 6 horas, viene dado por la expresión $C(t) = -t^2 + 8t + 20$, siendo t el tiempo en horas, $0 \leq t \leq 6$.

a) ¿Qué momento es el de mayor consumo? ¿Cuánto es el consumo máximo?

b) ¿Cuánto consume en total el motor en las 6 horas que dura el trabajo?

(14) El beneficio, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t, en años, viene dado por:

$$f(t) = -t^2 + 12t - 31, \quad 4 \leq t \leq 7$$

a) Representa $f(t)$.

b) ¿Para qué valor de t alcanza la empresa su beneficio máximo y a cuánto asciende? ¿para qué valor de t alcanza su beneficio mínimo y cuál es este?

(15) Se estima que los beneficios mensuales de una fábrica de golosinas, en miles de euros, vienen dados por la función $f(x) = -0'1x^2 + 2'5x - 10$, cuando se venden x toneladas del producto. Se pide:

a) Calcular la cantidad de toneladas que se ha de vender para obtener el máximo beneficio y calcular este.

b) La cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas.

(16) Se espera que, en los próximos 10 años, las ganancias (en millones de euros) de una empresa, vengan dada por la función

$$p(t) = -2t^2 + 20t + 5$$

a) Determinar cuándo las ganancias serán iguales a 5 millones de euros.

b) Determinar en qué años decrecerán las ganancias. ¿Cuándo son máximas?

c) ¿Cuáles serán las ganancias acumuladas durante los cinco primeros años?

(17) La caldera para la calefacción de cierto edificio de oficinas funciona desde las 9 hasta las 14 horas. A las 12 horas se obtiene el consumo mínimo, siendo dicho consumo mínimo de 15 litros de combustible. El combustible $C(t)$ viene dado por: $C(t) = (t - A)^2 + B$ con $9 \leq t \leq 14$. Se pide:

a) Calcular A y B.

b) Representar la función obtenida.

▶ La hipérbola

(18) Representa de forma aproximada:

a) $y = -\dfrac{1}{x}$ *b*) $y = \dfrac{1}{x+1}$ *c*) $y = \dfrac{2x+4}{3x-6}$ *d*) $y = \dfrac{5x-10}{2x-8}$

(19) Representa:

a) $y = \dfrac{9-3x}{2x+10}$ *b*) $y = \dfrac{14-7x}{2-x}$ *c*) $y = \dfrac{2x+1}{6-3x}$

(20) Representa $y = \dfrac{2x-1}{3x+2}$

(21) Según un estudio sobre la evolución de la población en una especie protegida determinada, podemos establecer el número de individuos de esta especie durante los próximos años mediante la función:

$$f(t) = \frac{50t + 500}{t+1}$$

donte t es el número de años transcurridos.

a) Calcula la población actual y la prevista para dentro de 9 años.

b) Determina los períodos en que la población aumentará y los períodos en que disminuirá.

c) Estudia si, según esta previsión, la población tenderá a estabilizarse en algún valor y, si es así, determínalo.

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

▶ Ecuaciones exponenciales

(22) Resuelve, descomponiendo el segundo miembro en factores:

a) $2^x = 8$ *d*) $2^{2x} = 1024$ *g*) $3^{x+1} = 729$ *j*) $5^{x+1} = 15625$

b) $2^x = 64$ *e*) $3^x = 27$ *h*) $3^{2x} = 6561$ *k*) $5^{2x} = 625$

c) $2^{x+1} = 512$ *f*) $3^x = 81$ *i*) $5^x = 125$ *l*) $5^x = 390625$

(23) Resuelve, utilizando logaritmos:

a) $5^x = 10$ *c*) $3^{x+1} = 80$ *e*) $2 \cdot 5^x = 250$ *g*) $3 \cdot 5^x = 75$

b) $2^x = 25$ *d*) $7^x = 39$ *f*) $3 \cdot 2^x = 24$ *h*) $7 \cdot 2^x = 224$

(24) Resuelve:

a) $2^{3x} = 0'5^{3x+2}$ *c*) $10^{3+x} = 1$ *e*) $5^{3-x} = 125$ *g*) $3^{2x} = 81$

b) $3^{4-x^2} = \dfrac{1}{9}$ *d*) $3^{2-x} = 9$ *f*) $2^{-1-x^2} = \dfrac{1}{64}$ *h*) $\dfrac{1^{x+1}}{4^{x-1}} = 8$

(25) Resuelve: $2^{x-1} + 4^{x-3} = 5$

(26) Resuelve:

a) $52 = 3^{4x}$ *b*) $4 \cdot 2^x = 100$ *c*) $9^x - 3 = 2 \cdot 3^x$ *d*) $5^{2x-1} = 25$

(27) Resuelve:

a) $(a^x)^x = (a^{24})^6$ *b*) $a^{(x-2)x} = a^x$ *c*) $5^{x-4} = 1$ *d*) $6^{(x-1)x} = 36$

(28) Resuelve:

a) $2^{x+1} - 5 \cdot 2^x + 3 = 0$ *c*) $36^x - 42 \cdot 6^x + 216 = 0$

b) $9^x - 90 \cdot 3^x + 729 = 0$ *d*) $4^x = 8^{\frac{x}{3}} + 2$

(29) Resuelve:

a) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$ *b*) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$

(30) Resuelve:

a) $3^{x-2} = 1$

b) $2^{5x+1} = 64$

c) $4 \cdot 5^{3x-1} = 100$

d) $3^{x+1} = 5$

(31) Resuelve: $4^x = 8^{\frac{x}{3}} + 2$

▶ **Ecuaciones logarítmicas**

(32) Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log x = \log 7$

b) $\log x = 5 \log 2$

c) $\log x = 3$

d) $\log x = 1$

e) $\log x + \log 3 = 10$

f) $\log x - \log 4 = 5$

(33) Calcula la x en las siguientes ecuaciones:

a) $\log_a x = \log_a 20 - \log_a 3$

b) $\log_a x = 2 \cdot (\log_a 3 + 5 \cdot \log_a 2 - \log_a 4)$

c) $\log_a x = \dfrac{3 \log_a 5}{7}$

(34) Resuelve:

a) $\log x - \log 36 = 3$

b) $\log \sqrt{x} - \log \sqrt{5} = 0'5$

c) $\log(x+4) - \log(x-5) = 1$

d) $\log(3x+1) - \log(2x-3) = 1 - \log 5$

e) $\log(2x+1)^2 + \log(3x-4)^2 = 2$

(35) Demuestra:

a) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

b) $\log(a^2 - b^2) = \log ab + \log\left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)$

(36) Calcula x sabiendo que:

a) $\log x = \dfrac{1}{2} \log a + 3 \log b - 2 \log c + 2$

b) $\log x = 2(\log a + 3 \log b) - \dfrac{1}{2}(2 \log c + \log d)$

c) $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$

(37) Resuelve:

a) $\log_2 x = 1$

b) $\log_2 x = 5$

c) $\log_2 x = -1$

d) $\log_2 x = -10$

e) $\log_x 125 = 3$

f) $\log_x \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{2}$

g) $\log_x 9 = 2$

h) $\log_x 0'001 = 3$

i) $3 \log x = 3$

j) $2 \log x = 10$

k) $3 \log x = -3$

l) $2 \log x = -10$

(38) Demuestra que $\log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \log\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = 0$

(39) Despeja y en la igualdad $\log x + \log y = \log(x+y)$

(40) Calcula x sabiendo que: $\log x = \frac{1}{2}a + 3\log b - 2\log c + 2$

(41) Resuelve: $\log(3x+1) - \log(2x-3) = 1 - \log 5$

► **Sistemas de ecuaciones**

(42) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$a)$ $\begin{cases} \log x + \log y = 30 \\ x + y = 60 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} x - y = 25 \\ \log y = \log x - 1 \end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} \log(x+y) + \log(x-y) = 1 \\ e^x \cdot e^y = e^{11} \end{cases}$

(43) Resuelve:

$a)$ $\begin{cases} x - y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} 2\log x + \log y = 5 \\ \log xy = 4 \end{cases}$

(44) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$a)$ $\begin{cases} 3^x + 3^y = 90 \\ 3^{x+y} = 729 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} 3^x + 5^y = 14 \\ 3^{2x+1} - 5^{2y+1} = 118 \end{cases}$

Sugerencia: en el segundo sistema prueba a hacer el cambio de variable $3^x = x'$, $5^y = y'$

(45) Resuelve: $\begin{cases} x - y & = 15 \\ \log x + \log y & = 2 \end{cases}$

▶ Composición de funciones

(46) Dadas las funciones $f_1(x) = 2x+1$, $f_2(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ y $f_3(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$, calcula $f_1 \circ f_2$, $f_2 \circ f_1$, $f_1 \circ f_3$, $f_3 \circ f_1$, $f_2 \circ f_3$ y $f_3 \circ f_2$.

(47) Sean $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$. Calcula $f \circ g$ y $g \circ f$.

(48) Calcula $f \circ g$ y $g \circ f$ siendo:

a) $f(x) = x^3$; $g(x) = 2x$

b) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-4}$; $g(x) = 2x - 1$

e) $f(x) = 3^x$; $g(x) = 4x^2$

f) $f(x) = \dfrac{5x^2+4}{2^x-1}$; $g(x) = x^2 + 1$

▶ Función inversa

(49) Calcula, analíticamente, la función inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x$

b) $g(x) = 2x - 1$

c) $h(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

e) $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(50) Calcula la función inversa de:

a) $y = \ln x$

b) $y = e^x$

c) $y = \log{(x+3)}$

d) $y = 3e^{4x}$

e) $y = \ln{(x+2)} - 3$

(51) Calcula, gráficamente, la función inversa de las funciones de la figura (fig. 1)

(52) Calcula analíticamente la inversa de la función e^{x+2}

(53) Calcula la función inversa de:

a) $y = \ln(x+3)$

b) $y = \sqrt{x+2}$

c) $y = 10^{2x} - 5$

d) $y = 2^{9x^2-1}$

e) $y = \log_2 x + 4$

f) $y = 2 - \log_6 x$

g) $y = 1 + e^{2x+3}$

h) $y = \ln(1 + \sqrt{x})$

▶ Funciones a trozos

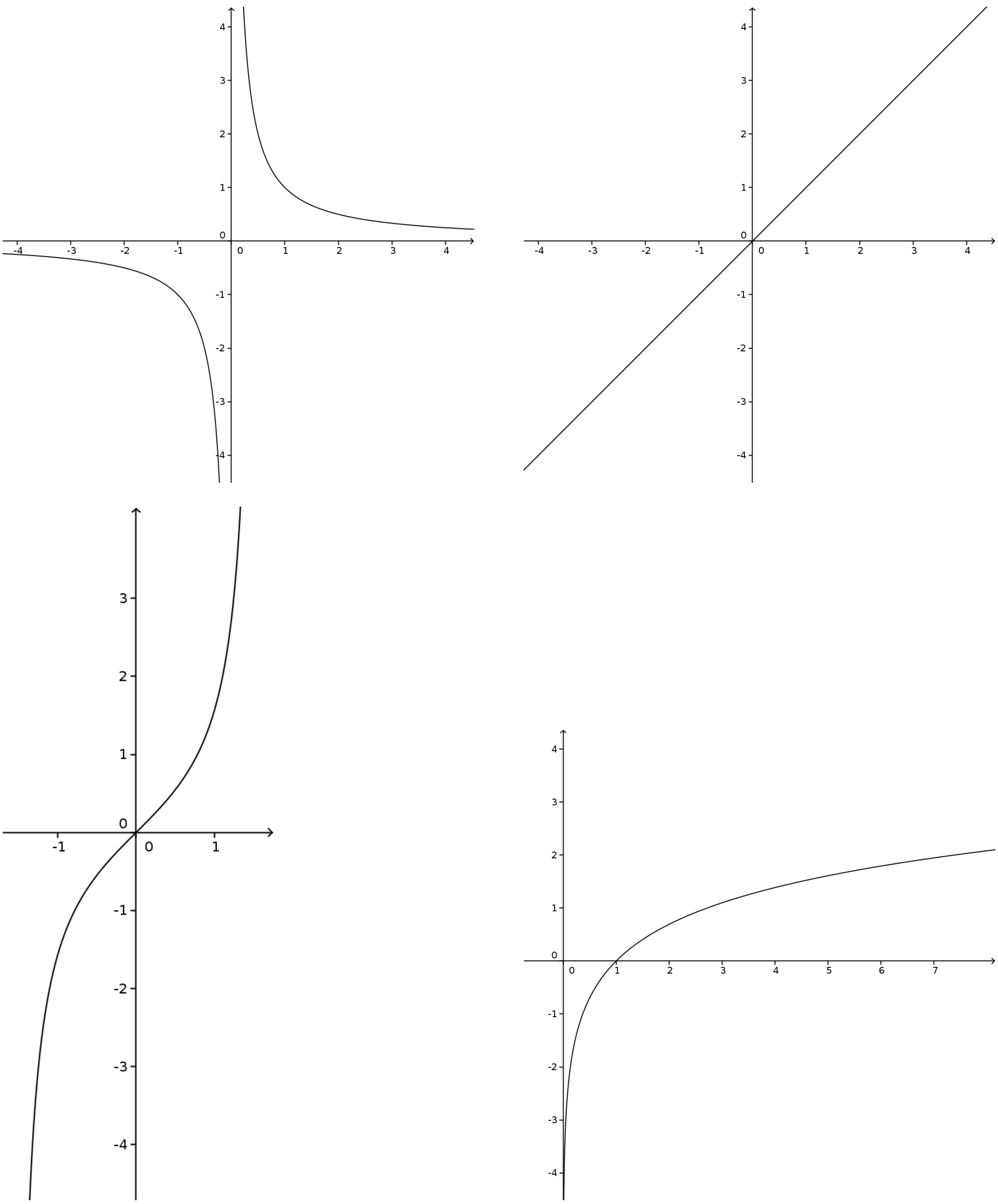

Figura 1: Calculando inversas

(54) Representa: $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 4 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

(55) Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años, y su precio $p(t)$ (en miles de euros) varió con el tiempo t (en años) que llevaba en el mercado, según la función siguiente:

$$p(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ \dfrac{5}{2} + 25 & \text{si } 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la función.

b) Averiguar en qué momentos se alcanzaron los precios máximos y mínimos y cuáles fueron esos precios.

(56) La velocidad (en metros/minuto) de un juguete viene dada por:

$$v(t) = \begin{cases} 10t - t^2 & \text{si } t \in [0,2] \cup [8,10] \\ 16 & \text{si } t \in (2,8) \end{cases}$$

siendo t el número de minutos transcurridos desde que se pone en marcha.

a) Represente la función velocidad.

b) A la vista de la gráfica, diga cuál es la velocidad máxima y en qué momento o momentos se alcanza.

c) Calcule la velocidad del juguete pasados 30 segundos desde su puesta en marcha. ¿Hay algún otro momento en el que lleva la misma velocidad? En caso afirmativo, diga en cuál.

(57) Sea la función $f(t) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Analice la continuidad en su dominio.

b) Determínese la asíntota horizontal, si la tiene.

c) Determine la asíntota vertical, si la tiene.

(58) La tasa de producción anual, en miles de toneladas, de una cantera de piedra, sigue la función:

$$f(x) = \begin{cases} 50 + 3x & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ -2x + 100 & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

siendo x el número de años desde su apertura.

a) Representar la función.

b) ¿en qué momento es máxima la tasa de producción?

c) ¿Cuándo es la tasa de producción igual a 72.000 toneladas?

d) ¿Al cabo de cuántos años se extingue la cantera?

(59) La velocidad de un artefacto viene dada por la siguiente función:

$$v(t) = \begin{cases} 10 - (t-3)^2 & 0 \leq t \leq 4 \\ \dfrac{9}{t-3} & t > 4 \end{cases}$$

donde la velocidad $v(t)$ viene dada en metros por segunda y el tiempo t en horas.

a) Estudia la continuidad de la función.

b) Calcula los intervalos en los que la función crece y decrece. Usa lo anterior para calcular la máxima velocidad alcanzada por el artefacto y el momento en que se alcanza.

c) Si dejamos que el tiempo crezca ilimitadamente ¿a qué velocidad tiende a moverse el artefacto?

(60) Sea $f(x) = \begin{cases} -4x + a & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ bx + 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$

a) Calcula a y b para que $f(x)$ sea continua.

b) Represéntala.

(61) Estudia la continuidad de la función $y = f(x)$ en el intervalo $[-4, 2]$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -3 \\ x^2 & -3 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

(62) La evolución mensual del número de socios de una entidad viene dada por:

$$f(t) = \begin{cases} -x^2 + 6x + a & 0 \leq x \leq 6 \\ 50 & 6 < x < 8 \\ 50 + (x-8)(x-12) & 8 < x \leq 12 \end{cases}$$

donde x es el número de meses.

a) Si inicialmente la entidad se fundó con 50 socios, determinar el valor de a.

b) Determinar en qué mes el número de socios fue máximo y en qué mes fue mínimo.

c) Si para cubrir los gastos, la entidad necesitaba tener más de 47 socios, ¿en qué mes tuvo pérdidas?

(63) El precio de un artículo, que ha estado los últimos 6 años en el mercado, en función del tiempo t (en años) ha seguido la siguiente función:

$$p(t) = \begin{cases} 3t^2 + 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -2t + 20 & \text{si } 2 < t \leq 6 \end{cases}$$

a) Representa $p(t)$.

b) Estudiar cuándo ha sido creciente y cuándo decreciente el precio del artículo.

c) ¿Cuál fue el precio máximo que alcanzó el artículo? ¿Cuál es el precio actual?