PREPARANDO EXAMEN 04

▶ Derivadas de polinomios

(1) Deriva:

a) $f(x) = 2x^3$

b) $g(x) = -5x^{12}$

c) $h(x) = 4x$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{2}$

e) $g(x) = \dfrac{10}{x^3}$

f) $h(x) = -\dfrac{3}{x^7}$

g) $f(x) = \dfrac{5}{7x}$

h) $g(x) = \dfrac{1}{x^9}$

i) $h(x) = 8\sqrt{x}$

j) $f(x) = -2\sqrt[3]{x^2}$

k) $g(x) = 5\sqrt{x^4}$

l) $h(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x^7}}{3}$

m) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

n) $g(x) = \dfrac{5}{\sqrt[4]{x^3}}$

ñ) $h(x) = \dfrac{-3}{\sqrt[3]{x^5}}$

(2) Calcula la derivada de los siguientes polinomios:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$

b) $g(x) = 3x^{10} + 4x^7 - 2x + 1$

c) $y = 5x^3 - 2x$

(3) Deriva:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{5}{x^3}$

b) $g(x) = -\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^4} - \dfrac{7}{x^6}$

c) $y = 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x^3} + 4\sqrt[3]{x^5}$

d) $y = \dfrac{3}{\sqrt{x}} - \dfrac{5}{2\sqrt[3]{x^2}} + 5$

e) $f(x) = 3x + \dfrac{5}{x} + \sqrt{x}$

f) $g(x) = 8 - 2x^2 + \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^4}}$

▶ Derivada del producto

(4) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = xe^x$

b) $y = x^3e^x$

c) $y = x\ln x$

d) $y = x^2\ln x$

e) $y = (3x^2 - 2)\cdot\ln x$

▶ Derivada de la división

(5) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{2x+4}{3x-2}$

b) $y = \dfrac{4x-5}{7x+6}$

c) $y = \dfrac{x^2-7x+2}{3x-4}$

d) $y = \dfrac{5x^3+4x-3}{2x+1}$

▶ Regla de la cadena

(6) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x+1}$

b) $y = \sqrt{3x^2-5x+4}$

c) $y = \sqrt{(x+1)^3}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{5x-6}}$

e) $y = \dfrac{5}{\sqrt{(x^2-1)^5}}$

f) $y = (2x+3)^5$

g) $y = (4x^2+2x-1)^7$

h) $y = e^{5x^2-3x+1}$

i) $y = \ln(4x^2-3x+1)$

j) $y = \ln(2x^5-3x^2+8)$

(7) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = e^{-x}$

b) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

c) $y = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

d) $y = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

(8) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3}{x^4}$

b) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

c) $f(x) = (x^2-x)\sqrt[3]{x}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+2x}{2}}$

e) $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} + 1$

(9) Calcula la derivada de:

a) $f(x) = 2+3x^2-4x^3$

b) $f(x) = 3\sqrt{x} + 4\sqrt[5]{3} - 2\sqrt[3]{4}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{5}{x^3}$

d) $y = (3x+5x+2)^7$

e) $y = \sqrt{x^5-3x^2+4}$

▶ Derivada segunda

(10) Calcula la derivada segunda de las siguientes funciones:

a) $y = 3x+5$

b) $y = 4x^2-3x+2$

c) $y = 7x^3-5x^2+4$

d) $y = e^x$

e) $y = \ln x$

(11) Calcula la derivada segunda de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

b) $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x+3}$

c) $y = \dfrac{x^2+2x-3}{3x+4}$

▶ Recta tangente

(12) Halla la recta tangente a la curva $y = x^2 - 4x + 5$ en el punto $x = 2$

(13) **PAEU 2006.** Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3 - 3x^2$ en $x = -1$.

(14) Dibuja la parábola $f(x) = x^2 - 5x$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto $P(1, 2)$.

(15) Halla la ecuación de la recta tangente en $x = 2$ a la función $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2$.

(16) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = e^{2-x}$ en el punto donde esta corta al eje de ordenadas.

(17) a) Calcular los puntos del gráfico de la curva $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ donde la recta tangente tiene pendiente $-\dfrac{1}{3}$.

b) Determinar la reta tangente en esos puntos.

▶ Estudio del crecimiento/decrecimiento. Máximos y mínimos.

(18) Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$:

a) Calcula su dominio.

b) Calcula sus puntos de corte con los ejes.

c) Calcula sus asíntotas.

d) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.

e) Represéntala.

(19) El consumo de agua, en metros cúbicos mensuales, de una empresa varía durante el primer semestre del año de acuerdo con la función: $C(t) = 8t^3 - 84t^2 + 240t$ con $0 \leq t \leq 6$. Se pide:

a) ¿En qué meses de este primer semestre se producen los consumos máximo y mínimo?

b) Determinar el valor de dichos consumos máximo y mínimo.

c) Determinar los períodos de crecimiento y decrecimiento del consumo en estos 6 meses.

(20) El número de visitantes que acuden a una exposición fotográfica durante las 2 semanas de duración de la misma, ha variado según la función:

$$N(t) = -t^3 + 24t^2 - 117t + 570 \ , \ 1 \leq t \leq 14$$

a) ¿cuántos visitantes hubo el día de inauguración? ¿y el día de la clausura?

b) ¿Qué día tuvo lugar la asistencia máxima de visitantes? ¿y la mínima?

c) ¿cuáles fueron los valores máximo y mínimo de visitantes?

▶ **Ejercicios a más**

Que no te despisten los enunciados de los siguientes ejercicios. En la mayoría de ellos lo que tienes que hacer es estudiar el crecimiento/decrecimiento de la función, calcular máximos y mínimos, calcular los puntos de corte con los ejes o calcular el valor de la función en un cierto punto.

(21) **PAEU 2002.** El consumo de gasolina de cierto coche viene dado por la función $y(x) = \dfrac{x^2}{400} - \dfrac{9x}{20} + \dfrac{113}{4}$ donde x es la velocidad en km/h e $y(x)$ es el consumo en litros cada 100 km.

a) Calcula cuál es el consumo mínimo y a qué velocidad se obtiene.

b) Estudia (representando la correspondiente gráfica) el consumo de gasolina en función de la velocidad.

(22) **PAEU 2007.** Una discoteca abre sus puertas a las 10 de la noche sin ningún cliente y las cierra cuando se han marchado todos. Se supone que la función que representa el número de clientes (N) en función del número de horas que lleva abierto, t, es $N(t) = 80t - 10t^2$

a) Determina a qué hora el número de clientes es máximo ¿Cuántos clientes hay en ese momento?

b) ¿A qué hora cerrará la discoteca?

(23) **PAEU 2011.** El número de visitantes diarios a una feria de turismo viene dado por la función $V(t) = -30(t^2 - 14t - 11)$, donde $t \in (0, 10)$ es el tiempo (en horas) transcurrido desde la apertura de la feria.

a) ¿Cuándo aumenta la afluencia de público y cuándo disminuye? ¿En qué momento alcanza el número máximo de visitantes?

b) Determina ese número máximo de visitantes.

(24) **PAEU 2012.** El rendimiento de una máquina, a lo largo de las 7 horas que permanece en funcionamiento cada día, viene dado por la función $f(x) = x^3 - 10'5x^2 + 30x$, donde $x \in (0, 7)$ indica el número de horas transcurridas desde que la máquina se pone en marcha.

a) Determina en qué momento se produce el máximo y el mínimo rendimiento.

b) Calcula el rendimiento de la máquina en esos dos momentos del día.

(25) **PAEU 2013.** Un estudio realizado por una empresa de producción de películas de acción prueba que el coste anual (en millones de euros) de contratación de los actores secundarios que utiliza en sus películas sigue la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 60x + 800}{100x}$, donde $x > 0$ es el número de actores secundarios contratados. Calcula el número de actores secundarios contratados que hace mínimo el coste de contratación. ¿A qué cantidad asciende ese coste mínimo?

(26) **PAEU 2003.** Dada la curva de ecuación $y = -x^3 + 27x$ se pide: Halla los máximos y mínimos de la curva.

(27) **PAEU 2004.** En una determinada empresa se fabrican x unidades de un producto, y la función de beneficio viene dada por $B(x) = -x^2 + 12x - 20$

a) Calcula el número de unidades producidas x que deben fabricarse para que no haya beneficios ni pérdidas.

b) Calcula el número de unidades x que deben fabricarse para que el beneficio sea máximo ¿A cuánto asciende ese beneficio máximo?

(28) **PAEU 2006.** Se sabe que la derivada de la función $f(x)$ viene dada por $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función original $f(x)$.

b) Obtén la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 2$ sabiendo que $f(2) = 5$

(29) **PAEU 2008.** Sea $C(t)$ el dinero en miles de euros que hay depositado en un día en una sucursal bancaria, en función del tiempo t en horas desde que la sucursal está abierta. Sabiendo que $C'(t) = t^2 - 7t + 10$ y que la sucursal permaneció abierta un total de 8 horas, obtén los máximos y mínimos locales de la función $C(t)$.

(30) **PAEU 2011.** Los beneficios diarios de una fábrica, en miles de euros, vienen dados por la función $f(x) = -x^2 + 24x - 100$, donde x indica el número de unidades que se producen al día.

a) Calcula el número de unidades que han de producirse diariamente para obtener el máximo beneficio.

b) Calcula el máximo beneficio que puede obtenerse en un día.

(31) **PAEU 2012.** Halla la expresión de la función $f(x)$ polinómica de grado 3, sabiendo que tiene un mínimo relativo en el punto $(1, 1)$, que su derivada $f'(x)$ tiene una raíz en el punto de abcisa $x = -3$ y que corta al eje de ordenadas en el punto $(0, 11)$.

(32) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos, de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

(33) Supongamos que el valor V, en euros, de un producto disminuye con el tiempo t, en meses, donde:

$$V(t) = 50 - \frac{25t^2}{(t+2)^2},\ t \geq 0$$

a) Calcular el valor inicial del producto $V(0)$. ¿a partir de qué mes el valor del producto es inferior a 34 euros?

b) Determinar la velocidad de depreciación del producto, es decir, $V'(t)$.

c) Hallar el $\lim_{t\to\infty} V(t)$. ¿Hay algún valor por debajo del cual nunca caerá V? Justificar tu respuesta.

(34) El precio en euros, P, de un producto depende del número de días, x, transcurridos desde que dicho producto se puso en venta. La función que relaciona x y P es: $P(x) = -\frac{x^2}{3} + 20x + 375$.

a) Determinar si la función tiene un máximo.

b) Si el producto se retira del mercado porque el precio es nulo, ¿cuándo ocurre esto?

c) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función.

(35) Un estudio acerca de la presencia de gases contaminantes en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación viene dado por la función:

$$C(t) = -0'2t^2 + 4t + 25\ ,\ 0 \leq t \leq 25$$

t = años transcurridos desde el año 2000.

a) ¿en qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?

b) ¿en qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero?

c) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $C(t)$ en $t = 8$.

(36) El número de usuarios del transporte público en una cierta ciudad varía a lo largo del primer semestre del año de acuerdo con la función:

$$N(t) = 1800t^3 - 18900t^2 + 4000t\ ,\ 1 \leq t < 6$$

donde $N(t)$ representa el número de usuarios en el mes t del primer trimestre.

Determinar:

a) Los meses de mayor y de menor número de usuarios en el primer trimestre.

b) Los valores máximo y mínimo de usuarios en dicho trimestre.

(37) La temperatura de una habitación entre las 17 horas y las 20 hoas de cierto día queda descrita bastante bien a partir de la siguiente función ($T(x)$ representa la temperatura a las x horas):

$$T(x) = 37 \cdot \frac{x^2}{2} - 342x - \frac{x^3}{3} + 2124, \quad 17 \leq x \leq 20$$

a) Indica los intervalos de tiempo en que la temperatura subió y aquellos en que bajó.

b) Dibuja la función ¿cuándo se alcanzan la temperatura más alta y más baja? ¿cuánto valen?

c) ¿La función tiene algún máximo o mínimo relativo que no sea absoluto?

(38) La cotización de las acciones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley: $C(x) = x^3 - 45x^2 + 243x + 30000$, siendo x el número de días:

a) ¿Cuál ha sido la cotización en Bolsa el día 2?

b) Determina los días en que alcanza las cotizaciones máxima y mínima.

c) Calcula esas cotizaciones máxima y mínima.