Números reales

EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

▶ Repaso números racionales

(1) Clasifica los siguientes números, indicando si son naturales, enteros o racionales:

$$2, \frac{3}{2}, -3'8, -5, 0.\widehat{3}, \frac{4}{0}$$

(2) Representa los siguientes números sobre una recta: 3, -2, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$, $-\frac{4}{3}$

(3) Calcula, simplificando al máximo el resultado:

a) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{3}$ *b*) $\dfrac{4}{5}-\dfrac{7}{4}$ *c*) $\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{8}{3}$ *d*) $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}}$

(4) Realiza las siguientes operaciones:

$$2-\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{10}+3\cdot\frac{7}{6}}{\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(3-\frac{5}{6}\right)}$$

▶ Clasificación de números

(5) Clasifica los siguientes números, idnicando de qué tipo se trata:

$$\sqrt{7}, 1'25, -2, 4, \frac{10}{3}, \sqrt{25}, -\frac{9}{3}$$

(6) Las siguientes magnitudes ¿cón qué tipo de números se miden?

a) El peso de una persona.
b) Las notas de un alumno.
c) El tiempo.
d) La longitud.
e) El número de hermanos de una persona.
f) El dinero que tienes en el banco.

(7) Todo número racional ¿es real? Justifica tu respuesta.

(8) Todo número real ¿es racional? Justifica tu respuesta.

▶ Representación

(9) **Representación de raíces.** Representa los siguientes números sobre la recta. Para ello, usa escuadra, cartabón y compás:

$$\sqrt{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2+\frac{\sqrt{2}}{2}, 3-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

▶ Conjuntos

(10) Pon un par de ejemplos de conjuntos.

(11) Escribe, usando notación matemática, los siguientes conjuntos:

a) Los resultados de tirar una moneda al aire.
b) Resultados de tirar dos dados al aire.
c) Las notas que puede obtener un alumno en matemáticas.

(12) El conjunto de los números naturales ¿es un subconjunto del conjunto de los números reales? ¿por qué?

(13) Calcula la unión y la intersección de los siguientes conjuntos:

a) $A=\{a,b,c\}$ y $B=\{b\}$
b) De $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$
c) De $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$

▶ Intervalos

(14) Escribe la definición de los siguientes intervalos:

a) $[0,10]$
b) $[-2,\sqrt{10}]$
c) $[-11,-5)$
d) $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$
e) $(20,30]$
f) $\left(-1,\frac{5}{3}\right)$
g) $(-4,4)$
h) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

(15) Representa los intervalos del ejercicio anterior.

(16) Representa los siguientes intervalos:

a) $[-1,1]\cup(2,4)$
b) $(0,4)\cup(4,5)$
c) $[-4,4]\cup[-2,2]$
d) $(0,4]\cup[4,5)$
e) $(-\infty,4]\cup[5,6]$
f) $(0,\infty)\cup[-2,-1)$
g) $(-\infty,0]\cup[-3,3]$
h) $(-\infty,4]\cup(-4,-1]$
i) $[4,5]\cup(4,\infty)$
j) $[-1,\infty)\cup(4,\infty)$
k) $(-\infty,-3)\cup(-3,\infty)$
l) $[3,3]\cup[4,4]$

(17) Algunos de los siguientes intervalos están mal escritos. Indica cuáles y dónde está el error:

a) $(2, 3)$ *c*) $[\frac{4}{0}, \infty)$ *e*) $[0, \infty]$ *g*) $(\infty, 4)$ *i*) $(0, 0)$

b) $(1, -1)$ *d*) $(-\infty, \infty)$ *f*) $(3, \infty)$ *h*) $[-1, -2]$ *j*) $[0, 0]$

▶ Números aproximados

(18) **Truncamiento.** Trunca:

a) $0.\widehat{3}$ en la segunda cifra.

b) $3.\widehat{204}$ en la cuarta cifra.

c) $\frac{1}{7}$ en la segunda cifra.

d) π en la cuarta cifra.

(19) **Redondeo.** Redondea:

a) $1.\widehat{6}$ en la cuarta cifra.

b) $3'123789$ en la segunda cifra.

c) $0'24\widehat{7}$ en la quinta cifra.

d) π en la cuarta cifra.

(20) **Error absoluto.** Calcula el error absoluto que has cometido en los dos ejercicios anteriores.

(21) **Notas de alumnos.** A continuación se muestran las notas de 10 alumnos obtenidas en la primera evaluación:

$$9'7; 4'2; 6'8; 4'6; 7'5; 4'5; 1'2; 4'9; 5'5; 5'1$$

Como bien sabes las notas que aparecen a final de curso no tienen ninguna cifra decimal. El profesor se ve obligado a eliminar las cifras decimales. Para ello puede o bien truncar o bien redondear. Calcula las notas que tendrían los alumnos en cada uno de los casos: cuando se truncan o cuando se redondean.

(22) **Operando.**. Calcula, redondeando en la segunda cifra decimal:

a) $1.\widehat{3} + 2.\widehat{5}$ *b*) $3'25874 - 2.\widehat{62}$ *c*) 2π *d*) π^2

Potencias

EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

▶ Potencias

(1) Simplifica al máximo las siguientes expresiones usando las propiedades de las potencias, dejando el resultado como potencia:

a) $7^5 \cdot 7^{10} \cdot 7^2$

b) $5^7 \cdot 5^2$

c) $\dfrac{2^5}{2^3}$

d) $\dfrac{3^4}{3^6}$

e) $(7^4)^5$

f) $(-11)^3$

(2) Simplifica al máximo las siguientes expresiones usando las propiedades de las potencias, dejando el resultado como potencia:

a) $9^3 \cdot 27^2$

b) $\dfrac{81^2}{9^4}$

c) $(-4)^4 \cdot (-8)^2$

(3) Simplifica al máximo las siguientes expresiones usando las propiedades de las potencias, dejando el resultado como potencia:

a) $\dfrac{(-8)^3 \cdot (-18)^2}{(-12)^5 \cdot 9^2}$

b) $\dfrac{a^{-1} \cdot b^{-2} \cdot c^{-7}}{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot c^4}$

(4) Calcula x:

a) $2^x = 4^3$

b) $27^2 = 3^x$

c) $10^{2x} \cdot 100 = 0'01$

d) $81^x = \dfrac{9^2}{3}$

▶ Raíces n-ésimas

(5) Calcula, usando la definición de raíz n-ésima:

a) $\sqrt{81}$

b) $\sqrt[3]{125}$

c) $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt[5]{32}$

e) $\sqrt[8]{256}$

f) $\sqrt[10]{1024}$

g) $\sqrt{-1}$

h) $\sqrt[3]{-1}$

(6) Calcula usando la calculadora:

a) $\sqrt[3]{25}$

b) $\sqrt[8]{37}$

c) $\sqrt[10]{21}$

d) $\sqrt{-1}$

e) $\sqrt[2]{3^8}$

f) $\sqrt[3]{2^4}$

g) $\sqrt[10]{4^5}$

h) $\sqrt[3]{(-1)^5}$

▶ Forma exponencial de las raíces n-ésimas

(7) Expresa en forma de potencia:

a) $\sqrt[8]{20}$ *b)* $\sqrt[3]{4^2}$ *c)* $\sqrt[21]{3^4}$ *d)* $\sqrt[8]{2^{10}}$ *e)* $\sqrt[7]{x^5}$

(8) Calcula:

a) $9^{\frac{1}{2}}$ *b)* $8^{\frac{1}{3}}$ *c)* $256^{\frac{1}{4}}$ *d)* $4^{\frac{3}{2}}$ *e)* $21^{\frac{2}{3}}$

(9) ¿Cuánto vale $\sqrt[n]{a^n}$?

(10) **De ampliación. Potencias de exponente real.** ¿Cuánto vale a^x cuando $x \in \mathbb{R}$? Esto es, ¿cuánto vale $2^{\sqrt{2}}$ ó $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}}$? Busca en la biblioteca la definición de este tipo de potencias.

▶ Operaciones con raíces

(11) **Simplificación.** Simplifica:

a) $\sqrt[6]{5^2}$ *b)* $\sqrt[4]{49}$ *c)* $\sqrt[3]{x^6}$ *d)* $\sqrt[10]{a^5}$

(12) **Producto.** Calcula:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ *b)* $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ *c)* $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{4}$ *d)* $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$

(13) **División.** Calcula:

a) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ *c)* $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{625}}$ *e)* $\sqrt{\dfrac{25}{9}}$ *g)* $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ *d)* $\dfrac{\sqrt[10]{2048}}{\sqrt[10]{2}}$ *f)* $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}$ *h)* $\sqrt{\dfrac{a^4}{b^2}}$

(14) **Raíces de raíces.** Expresa como una única raíz las siguientes raíces de raíces:

a) $\sqrt{\sqrt{16}}$ *b)* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{22}}$ *c)* $\sqrt[5]{\sqrt[2]{1024}}$ *d)* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$

▶ Suma y resta de raíces

(15) **Sacar factores.** Descompón los radicandos en números primos y saca todos los factores que puedas fuera de la raíz:

a) $\sqrt{3^4 \cdot 2}$ *d)* $\sqrt[3]{84 \cdot 14}$ *g)* $\sqrt[3]{40}$ *j)* $\sqrt{49x^2}$

b) $\sqrt[5]{2^5 \cdot 3^{10} \cdot 7}$ *e)* $\sqrt{75}$ *h)* $\sqrt[3]{882}$ *k)* $\sqrt{50x}$

c) $\sqrt{125 \cdot 98}$ *f)* $\sqrt{900}$ *i)* $\sqrt{4x}$ *l)* $\sqrt[3]{81x^4}$

(16) **Sumas y restas.** Calcula, simplificando al máximo:

a) $2\sqrt{3}-4\sqrt{5}+3\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{2}+2\sqrt{8}-5\sqrt{18}$

c) $\sqrt{24}-3\sqrt{150}$

d) $2\sqrt{162}-3\sqrt{16}+2\sqrt{75}-\sqrt{72}$

▶ **Racionalización de denominadores**

(17) **Cuando la raíz aparece multiplicando.** Racionaliza:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{4}{3\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

(18) Calcula:

a) $(1+\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3})$

b) $(2+\sqrt{5})\cdot(2-\sqrt{5})$

c) $(4+3\sqrt{7})\cdot(4-3\sqrt{7})$

d) $(2-5\sqrt{2})\cdot(2+5\sqrt{2})$

e) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5})$

f) $(3\sqrt{2}+4\sqrt{7})\cdot(3\sqrt{2}-4\sqrt{7})$

(19) **Cuando la raíz aparece sumando.** Racionaliza:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+4}$ b) $\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-6}$ d) $\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{5}{1+2\sqrt{5}}$

f) $\dfrac{2}{3\sqrt{2}-3}$ g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ i) $\dfrac{4}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ j) $\dfrac{3}{3\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

(20) Calcula, simplificando al máximo:

a) $3\sqrt{2}-\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ b) $5\sqrt{7}+\dfrac{2}{3\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{4-\sqrt{4}}{1-\sqrt{2}}-\dfrac{5}{1+\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

▶ **Logaritmos**

(21) Calcula, usando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 8$

b) $\log_3 27$

c) $\log_4 \frac{1}{4}$

d) $\log_6 216$

e) $\log_{25} 5$

f) $\log_{16} 4$

g) $\log_{16} 4$

h) $\log_{100} 10$

i) $\log_5 \frac{1}{5}$

j) $\log_5 0'20$

k) $\log_8 0'125$

l) $\log_2 \frac{1}{32}$

m) $\log 0'1$

n) $\log 0'01$

ñ) $\log 10$

o) $\log 100$

a) $\log_a a$

b) $\log_a a^2$

c) $\log_a a^3$

d) $\log_a a^n$

e) $\log_a \frac{1}{a}$

f) $\log_a \frac{1}{a^2}$

g) $\log_a \frac{1}{a^3}$

h) $\log_a \frac{1}{a^n}$

i) $\log_a \sqrt{a}$

j) $\log_a \sqrt[3]{a}$

k) $\log_a \sqrt[n]{a}$

l) $\log_a 1$

(22) Usando la calculadora, calcula:

a) $\log 1$	*c*) $\log 24$	*e*) $\log 103$
b) $\log 10$	*d*) $\log 0$	*f*) $\log(-2)$

(23) Calcula, usando la calculadora, los logaritmos decimales de los siguientes números:

a) $0'2$, $0'4$, $0'6$, $0'8$, $0'9$

b) 1, 2, 4, 6, 8, 9

c) 10, 20, 40, 60, 80, 90, 97, 98, 99

d) 100, 200, 400, 600, 800, 900, 997, 998, 999

e) 1000, 2000, 4000, 6000, 8000, 9990, 9998, 9999

¿Observas algo?

(24) Resuelve:

a) $\log x = \log 3$	*d*) $\log x^3 = 9$	*g*) $2\log x - \log 4 = \log 10$
b) $\log_2 x = 4$	*e*) $2\log x = \log 4$	
c) $\log 100 = x$	*f*) $\log 3 + \log x = \log 4$	*h*) $\log_x 4 + \log_x 25 = 2$

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

► **Retos**

(1) Prueba que $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

Polinomios

EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

▶ Repaso

(1) **Definición.** Indica cuál es el grado de los siguientes polinomios:

a) $p(x) = 2 + 3x - 5x^2 + 6x^3 - 7x^8$

b) $q(x) = 10x^{100}$

c) $r(x) = \dfrac{1}{2}$

d) $s(x) = 2x^2 + 4x^4 + 6x^6$

(2) **Valor de un polinomio en un punto.** Calcula $p(0)$, $p(2)$, $p\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $p(-1)$, $p\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ en los siguientes casos:

a) $p(x) = 3 - 5x + 2x^2$

b) $p(x) = 2 - 6x + x^2 - x^3$

(3) **Suma.** Calcula $p(x) + q(x)$ siendo:

a) $p(x) = 5 - 3x + 4x^3$; $q(x) = 7x + 5 - 2x^3 - 4x^2$

b) $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$; $q(x) = 4 - 3x + 2x^2$

(4) **Resta.** Calcula $p(x) - q(x)$ siendo:

a) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$; $q(x) = 1 + 3x^3 + 5x^5$

b) $q(x) = 4 - 3x + 2x^2 - x^3$; $q(x) = -1 + 2x^2 + x^3$

(5) **Multiplicación.** Calcula $p(x) \cdot q(x)$ siendo:

a) $p(x) = 1 + x^2$; $q(x) = 3 - x$

b) $p(x) = 2 - 3x + 4x^- x^5$; $q(x) = 4 + 5x - 2x^2$

(6) **De ampliación. C** alcula $p(x) + q(x)$, $p(x) - q(x)$, y $p(x) \cdot q(x)$, siendo
$p(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 + x^{10}$
$q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}$

▶ Identidades notables

(7) Quita paréntesis:

a) $(\sqrt{2} + 2)^2$ *b*) $(2\sqrt{3} - 1) \cdot (2\sqrt{3} + 1)$ *c*) $(x^2 + 3xy)^2$

▶ División de polinomios

(8) **División de monomios.** Calcula:

a) $\dfrac{10x^3}{5x^2}$ *b)* $\dfrac{5x^5}{3x}$ *c)* $\dfrac{20x^4}{2x^2}$ *d)* $\dfrac{3x^6}{7x^3}$

(9) ¿Por qué no podemos dividir dos monomios ax^n y bx^m cuando $m > n$? (Sugerencia: piensa en un ejemplo)

(10) **División de números.** Divide, expresándo el resultado en la forma $D = d \cdot c + r$

a) $\dfrac{200}{7}$ *b)* $\dfrac{37}{5}$ *c)* $\dfrac{12034}{3}$ *d)* $\dfrac{2349}{8}$

¿Sabrías calcular el cociente y el resto con la calculadora?

(11) **División de polinomios.** Divide, expresándo el resultado en la forma $D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$

a) $\dfrac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1}{x^2 - 1}$ *b)* $\dfrac{2x^5 + 1}{x^3 + 2x^2 + 1}$ *c)* $\dfrac{x^4 + 2x^3 - x + 2}{2x - 1}$

(12) **De ampliación. Prueba de división** Realiza la siguiente división $\dfrac{x^8 + x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 2x - 1}$ comprobando que el resultado es correcto (para ello comprueba que se satisface la igualdad $D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$).

▶ Regla de ruffini

(13) **Regla de Ruffini.** Realiza las siguientes divisiones:

a) $\dfrac{3x^4 - 2x^2 + 1}{x - 1}$ *c)* $\dfrac{2x^6}{x + 1}$

b) $\dfrac{5x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x - 2}{x + 2}$ *d)* $\dfrac{5x^3 - 2x^2 + 7}{x - 3}$

(14) **Cálculo de $p(a)$.** Calcula, usando los dos métodos explicados:

a) $p(2)$; $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$ *c)* $r(-2)$; $r(x) = 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 4$

b) $q(0)$; $q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ *d)* $s(-3)$; $s(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 5x + 6$

(15) **De ampliación. Mezclándolo todo** Realiza las siguientes operaciones:

$$\frac{(x^2 + 3x - 1)^2 \cdot (4x - 5) - (3x + 4)^2}{x + 1}$$

▶ Cálculo de las raíces de un polinomio

(16) **Definición.** Indica si los siguientes números son raíces o no de los siguientes polinomios:

a) $p(x) = 2x + 1$; $r = -\dfrac{1}{2}$

b) $q(x) = x^2 + 2x + 1$; $r = 0$

c) $s(x) = 2x^3 - x^2 - 1$; $r = 1$

d) $t(x) = 5x^4 - 10$; $r = 2$

(17) **Número de raíces.** Indica cuántas raíces como máximo tienen los siguientes polinomios:

a) $p(x) = 3x^3 - 4$

b) $q(x) = 5x$

c) $r(x) = 8x^4 - 3x^2 + 2$

d) $s(x) = 5x^5 - 2x$

(18) **Polinomios de primer grado.** Calcula las raíces de los siguientes polinomios:

a) $x + 1$ *b*) $5x - 3$ *c*) $2x + 24$ *d*) $3x$ *e*) $ax + b$

(19) **Polinomios de segundo grado.** Calcula las raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 6x + 8$

b) $2x^2 - 7x + 3$

c) $2x^2 + 3x - 1$

d) $3x^2 + 6x + 3$

e) $x^2 + 4$

f) $2x^2 - 3x + 2$

(20) **Divisores de un número.** Calcula los divisores de los siguientes números:

a) 14 *b*) 15 *c*) 16 *d*) 24 *e*) 135 *f*) 450 *g*) 540

(21) **Polinomios de grado 3 o superior.** Calcula las raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

b) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$

c) $4x^3 - 20x^2 + 27x + 3$

d) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

e) $x^4 - 2x^3 - 25x^2 + 26x + 120$

▶ Factorización de polinomios

(22) **De primer grado.** Factoriza:

a) $x - 3$ *b*) $2(x+4)$ *c*) $3x + 6$ *d*) $5x - 10$ *e*) $2x + 3$ *f*) $7x - 4$

(23) **De segundo grado.** Factoriza:

a) $x^2 - 5x + 6$

b) $x^2 + x - 2$

c) $x^2 + 7x + 12$

d) $4x^2 - 8x + 3$

e) $3x^2 - 5x + 2$

f) $x^2 - 6x + 9$

g) $x^2 + 4x + 4$

h) $4x^2 - 12x + 9$

i) $25x^2 + 20x + 4$

j) $x^2 + 2x + 4$

k) $3x^2 - x + 2$

l) $x^2 - 5$

m) $2x^3 - 14x$

(24) **De tercer grado.** Factoriza:

a) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

b) $x^3 + 5x^2 + 2x + 10$

c) $5x^3 - 15x^2 + 14x - 8$

d) $x^3 - 3x^2 - 2x + 6$

(25) Factoriza el siguiente polinomio $6x^4 - 9x^3 - 36x^2 + 45x + 30$ sabiendo que una de sus raíces es $x = -\frac{1}{2}$.

(26) **Identidades notables I.** Calcula:

a) $(x + a)^2$

b) $(x - a)^2$

c) $(x - a)(x + a)$

(27) **Identidades notables II.** Factoriza, sin operar:

a) $x^2 - 1$

b) $x^4 - 81$

c) $x^2 + 6x + 9$

d) $9x^2 + 30x + 25$

e) $4x^2 + 8x + 4$

f) $x^2 - 10x + 25$

g) $16x^2 - 8x + 1$

h) $4x^2 - 12x + 9$

(28) Factoriza sin operar:

a) $p(x) = x \cdot (2x - 3) + (2x - 3)$

b) $p(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 16)$

▶ Fracciones algebraicas

(29) **Simplificación.** Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$

(30) **Operaciones.** Calcula:

a) $\dfrac{2x - 1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{3x + 4}{x^2} + \dfrac{2}{x - 1}$

c) $\dfrac{4}{x + 1} - \dfrac{3x}{x^2 - 1}$

d) $\dfrac{5x^3}{2x^2 - 2} \cdot \dfrac{x + 1}{x^2}$

e) $\dfrac{\frac{x - 4}{x - 3}}{\frac{x + 4}{x^2 - 9}}$

Ecuaciones

▶ Repaso ecuaciones

(1) Los orígenes del álgebra.

A continuación se muestra una página del libro “Juegos de lógica y matemáticas”, de Franco Agostini. Léela.

El término “álgebra” procede del árabe al-jabr, nombre con el que el matemático Al-Khuwarismi, que fue el primero que lo empleó, designaba los pasos ideados por él para solucionar esas expresiones matemáticas peculiares que reciben el nombre de ecuaciones. Posteriormente el significado de al-jabr se fue ampliando y hoy día abarca un campo de las matemáticas muy amplio y variado.

Muhammad Ibn Musa Al-Khuwarismi era un matemático y astrónomo árabe, que murió alrededor del año 850 y que trabajó en Bagdad en la “Casa de la Sabiduría”, centro cultural fundado por el califa Al-Ma-Mun alrededor del 825. Este sabio, que posteriormente se haría muy famoso en Europa occidental, escribió varios libros de matemáticas, de geometría y de astronomía. Su aritmética exponía el sistema hindú de numeración. Su obra original sobre la aritmética se perdió y sólo ha llegado a nosotros una traducción latina del siglo XII, bajo el título de *Algorithmi de numero indorum* (Algoritmos sobre el cálculo numérico hindú). En esta obra, posiblemente una reelaboración y traducción de algún texto hindú, Al-Khuwarismi expone de forma tan clara el nuevo sistema d enumeración hindú que se cree que dio origen a la difusión por Europa de la errada convicción de que los árabes fueron los inventores de nuestro sistema de numeración. Del título de la traducción latina procede la denominación del término propio de las matemáticas modernas “algoritmos”; evidentemente, una deformación del nombre Al-Khuwarismi y que actualmente indica, en general, “cualquier norma de procedimiento o de operación” en el cálculo.

No obstante, la obra más importante de este matemático árabe fue *Al-jabr wa'l muqabalah*, que significa literalmente “ciencia de la reducción y la confrontación”. Este texto, del que precisamente se derivó el término “álgebra”, ha llegado hasta nosotros en dos versiones, una árabe y una latina cuyo título es *Liber algebrae et almocabula*. Contiene un tratado sobre las ecuaciones lineales y cuadráticas.

Las obras de Al-Khuwarismi tuvieron una importancia capital en la historia de las matemáticas; fueron, en efecto, una de las vías principales por las que el sistema de numeración hindú y el álgebra penetraron en la cultura de Europa occidental.

Por tanto, en su origen, el término al-jabr indicaba algunos pasaje matemáticos, algunas transformaciones algebraicas, que simplificaban y aceleraban la consecución de la solución.

Volvamos ahora por un momento a nuestros conocimientos escolásticos y examinemos una ecuación cualquiera. Por ejemplo, una de primer grado y con una incógnita:

$$5x + 1 = 3(2x - 1)$$

En general una ecuación se presenta como una equivalencia en que aparecen una o más incógnitas. Es la traducción numérica de un problema cuya solución consiste en buscar los valores de x que posibilitan la veracidad de la equivalencia de las expresiones algebraicas indicadas; en nuestro caso, resolverá la ecuación significa encontrar aquellos valores de x que posibilitan la veracidad de la expresión algebraica o, en otras palabras, significa buscar aquellos números que, al sustituir a la x, hacen que el primer miembro (situado a la izquierda del signo igual) resulte ser igual al segundo miembro (situado a la derecha del signo igual).

En las obras del matemático Al-Khuwarismi se exponen todos los procedimientos de solución de las ecuaciones que, quizá de forma algo mecánica, aprendimos en el colegio. Recordemos, por ejemplo, el principio de la reducción de los términos y el traslado de un miembro al otro de un término invirtiendo su signo. Tomemos la ecuación considerada y procedamos a su solución:

$$5x + 1 = 6x - 3$$

Agregando -1 y restando 6x en ambos miembros, la ecuación se convierte en

$$5x + 1 - 1 - 6x = 6x - 1 - 3 - 6x$$

y eliminando términos opuestos, obtenemos

$$5x - 6x = -1 - 3$$

Observemos ahora que la aplicación del principio de agregar y restar en ambos miembros de la ecuación las mismas cantidades, puede simplificarse en la operación de traslado de los términos de uno a otro miembro con la correspondiente inversión del signo. Es decir:

$$\begin{aligned} 5x + 1 &= 6x - 3 \\ 5x - 6x &= -1 - 3 \end{aligned}$$

Reduciendo entonces los términos similares, se obtiene:

$$-1x = -4$$

Para operar una inversión de signo podemos multiplicar ambos miembros de la ecuación por -1, ya que, multiplicando un número negativo, el resultado es un número positivo; y se obtiene:

$$(-1)(-1x) = (-1)(-4)$$

de donde se deduce:

$$x = 4$$

Este último resultado es la solución de la ecuación. Obsérvese cómo la solución obtenida verifica, es decir, "hace ciertas" todas las ecuaciones que constituyen los pasos necesarios para llegar a la solución. Es decir, si sustituimos la x por un 4 en la primera ecuación obtendremos:

$$\begin{aligned} 5x + 1 &= 3(2x - 1) \\ 5(4) + 1 &= 3(2 \cdot 4 - 1) \\ 20 + 1 &= 3(8 - 1) \\ 21 &= 24 - 3 \\ 21 &= 21 \end{aligned}$$

E, igualmente, sustituyendo la x por un 4 en la ecuación siguiente, obtendremos:

$$\begin{aligned} 5x - 6x &= -1 - 3 \\ 5(4) - 6(4) &= -1 - 3 \\ 20 - 24 &= -4 \\ -4 &= -4 \end{aligned}$$

¡y así sucesivamente! Queda ya claro que resolver una ecuación significa transformar la ecuación examinada en otras equivalentes, simplificándolas cada vez más hasta obtener la solución.

a) Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones (escribe una V para indicar que son verdaderas, y una F para indicar que son falsas):

1) Al-Ma-Mun escribió varios libros de matemáticas, geometría y astronomía
2) El sistema de numeración hindú fue inventado por los árabes
3) La obra más importante de Al-Khuwarismi es la "ciencia de la reducción y la confrontación"
4) En una ecuación, en general, solo puede aparecer una incógnita

b) Busca el significado de las palabras marcadas en el texto, y rellena las siguientes definiciones (usa tus propias palabras, no las copies de ningún sitio):

1) Ecuación:
2) Sistema hindú de numeración:
3) Algoritmo:
4) Escolástico:
5) Incógnita:

c) Responde a las siguientes preguntas:

1) ¿Por qué se difundió en Europa la idea equivocada de que nuestro sistema de numeración procede de los árabes y no de los hindúes?
2) ¿De dónde procede el término "álgebra"?

d) En el texto viene un ejemplo de cómo "pasar un miembro de la ecuación de un lado al otro lado":

1) Generaliza el razonamiento, demostrando que: $x + a = b => x = b - a$
2) ¿Podrías razonar de igual forma demostrando las otras reglas que conoces para resolver la ecuación de 1^{er} grado?

▶ Repaso ecuaciones de segundo grado

(2) Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + 3x - 10 = 0$ *b*) $3x^2 + 5x = 0$ *c*) $2x^2 - 8 = 0$

(3) Resuelve la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ y representa sus soluciones de forma exacta en la recta. Para representarla usa regla y compás.

(4) En el texto se estudian los casos en que b ó c sean cero.

a) ¿Por qué no se estudia el caso en que a sea igual a cero?

b) ¿Por qué no se analiza el caso en que tanto b como c sean cero a la vez?

(5) **De ampliación. ¿** Serías capaz de demostrar que la solución de una ecuación de segundo grado es realmente la solución?

(6) **De ampliación. S** e llama ecuación de tercer grado a las ecuaciones de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. La solución de esta ecuación se atribuye a Cardano. Busca en un libro de matemáticas cuál es esta solución y cómo se deduce. (Sugerencia: un libro donde puedes encontrar resuelta esta y otras ecuaciones es el "álgebra" de Euler, disponible en internet).

▶ Ecuaciones bicuadradas

(7) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$

b) $2x^4 + 2x - 4 = 0$

c) $9x^4 - 9x^2 + 2 = 0$

d) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$

e) $16x^4 + 400x^2 + 125 = 0$

f) $3x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

g) $x^4 - 81 = 0$

(8) Escribe los distintos pasos que tienes que seguir para resolver las ecuaciones del tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Este tipo de ecuaciones se llaman ecuaciones bicuadradas.

(9) **Cambios de variable.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$ (Llama $z = x^3$)

b) $(x+1)^2 + 2(x+1) + 1 = 0$ (Llama $z = x + 1$)

c) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} + 1 = 0$ (Llama $z = \dfrac{1}{x}$)

d) $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ (Llama $z = \sqrt{x}$)

Para ello razona de forma parecida a como lo hiciste en el caso de ecuaciones bicuadradas.

(10) **De ampliación. Cambios de variable II** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $8z^2 - 54z + 85 = 0$

b) $8\left(y^2 + \dfrac{1}{y^2}\right) - 54\left(y + \dfrac{1}{y}\right) + 101 = 0$ (Llama $z = y + \dfrac{1}{y}$)

c) $8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$ (Llama $y = 2^x$)

Este problema está sacado del libro "Cómo plantear y resolver problemas" de G. Polya.

▶ Ecuaciones con la x en el denominador

(11) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{5x}{2x-1} + 3 = \dfrac{4x}{2x-1}$

b) $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{x} = 5$

c) $\dfrac{4}{x-2} + 1 = \dfrac{3}{x+2}$

d) $\dfrac{3x}{x^2-9} + \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{5}{x-3}$

(12) **De ampliación. Entendiendo por qué introducimos soluciones falsas** ¿Por qué introducimos *soluciones falsas* al resolver ecuaciones con la x en el denominador? Para ello veamos cómo resolvemos una ecuación concreta:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{x} + 3 = 4x \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{2+3x}{x} = 4x \\ \Rightarrow\ &2 + 3x = 4x^2 \\ \Longleftrightarrow\ &4x^2 - 3x - 2 = 0 \end{aligned}$$

Observa que al pasar de una ecuación a otra en unas ocasiones usamos el símbolo $\Longleftrightarrow$ y en otras el símbolo $\Rightarrow$. ¿Por qué?

▶ Ecuaciones con radicales

(13) **Ecuaciones con una raíz.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x+3} = 5$

b) $2\sqrt{x-2} = 8$

c) $3 - \sqrt{x+1} = 9$

d) $x - \sqrt{x-3} = 5$

e) $\dfrac{x}{2} = 1 + 2\sqrt{x+5}$

f) $4x + 8\sqrt{x-1} = 1$

(14) **Ecuaciones con dos raíces.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{2x+2} - 3\sqrt{x-3} = -2$

b) $2\sqrt{2x+5} + 5\sqrt{4x+2} = 4$

c) $3\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+15} = 3x+1$

(15) **De ampliación. Mezclando ecuaciones** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{\sqrt{2x^2+7}}{3} = x^2$

b) $\dfrac{3}{x^2+5} + \dfrac{4}{x^2-5} + \dfrac{11}{3} = 0$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{8}{x} = 3$

▶ Ecuaciones con polinomios factorizados

(16) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x(2x-3) = 0$

b) $(5x+10)(3x+4) = 0$

c) $8(x+2) - 3x(x+2) = 0$

d) $3x(x^2-3x+2) = 0$

e) $9(x-3)(x^2-7x+10) = 0$

f) $\dfrac{(9x^2-9x+2)(16x^2-32x+7)}{2} = 0$

▶ Repaso sistemas de ecuaciones lineales 2x2

(17) Un sistema de ecuaciones lineales ¿cuántas soluciones pueden tener?

(18) Resuelve utilizando el método de sustitución:

a) $\begin{cases} x+3y = -1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y = 5 \\ 4x - 3y = -15 \end{cases}$

(19) Resuelve utilizando el método de igualación:

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 8x - y = 1 \end{cases}$

(20) Resuelve utilizando el método de reducción:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 16 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 2x + 8y = 21 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$

▶ Resolución gráfica de s. de ecuaciones lineales 2x2

(21) Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 4x + 10y = 20 \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$

▶ Desigualdades

(22) Pasa los números indicados de un lado al otro de la igualdad, comprobando que el resultado obtenido es cierto:

a) $4 + 5 < 20$; Pasa el 4
b) $8 - 10 > -10$; Pasa el 10
c) $5 \cdot 4 \geq 20$; Pasa el 5
d) $(-3) \cdot 7 < 3$; Pasa el -3
e) $\dfrac{10}{2} < 35$; Pasa el 2
f) $\dfrac{21}{-3} < -1$; Pasa el -3

(23) El cuadrado de un número mayor que 1 ¿es mayor o menor que dicho número?

(24) El inverso de un número x es $1/x$. Si x es mayor que 1, ¿cómo es su inverso? ¿es mayor o menor que 1? Y si x es menor que 1, ¿cómo es su inverso?

▶ Inecuaciones

(25) ¿Podrías escribir una inecuación de la forma $f(x) < 0$ como una inecuación de la forma $g(x) > 0$?

(26) **Inecuaciones de primer grado.** Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2x + 3 > 5$
b) $5x - 4 < 6$
c) $3 - 4x > 1$
d) $2x + 3 \leq 5x - 2$

e) $2(3+x)+3(5-x)<4(x-2)+5(3+x)-2$

f) $3(-x-2)-2(4+x)>2(2x+3)+x-1$

(27) **Indíce de masa corporal.** Según la Asociación Española Contra el Cáncer (AECC) el sobrepeso y la obesidad es una de las causas que explica la aparición de ciertos cánceres. Para medir si una persona pasa de su peso se usa el llamado índice de masa corporal IMC que se define como

$$\text{IMC} = \frac{\text{Peso (kg)}}{\text{Altura}^2}$$

La siguiente tabla indica cómo se clasifican las personas en función de su IMC:

	IMC
Bajo peso	< 18,5
Normopeso	18,5-24,9
Sobrepeso	25 - 29,9
Obeso	> 30

Calcula el rango de valores entre los que debe de estar comprendido tu peso para que se considere normal. Si no conoces tu altura, mídete.

(28) **Sistemas de 2 inecuaciones.** Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x+5 \leq 10 \\ 2x-3 < -5+3x \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x+4 > 3x-2 \\ -2x+5 > 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+4 > \dfrac{x}{2}+5 \\ 7x-7 \geq 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -\dfrac{5}{3} > 1 \\ 3x+5 < 3 \end{cases}$

▶ Inecuaciones de segundo grado

(29) Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^2+x-2>0$

b) $4x^2-16x+7\geq 0$

c) $x^2+3x<0$

d) $x^2-x-1\leq 0$

e) $x^2+2x+1>0$

f) $4x^2-4x+1\geq 0$

g) $5x^2-100x+5<0$

h) $9x^2+24x+16\leq 0$

i) $x^2+1>0$

j) $3x^2+2x+1\geq 0$

k) $x^2-3x+4x<0$

l) $x^2+100\leq 0$

(30) Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 - 4 > 0$

b) $2x^2 - 18 \leq 0$

c) $3x^2 - 48 < 0$

d) $2x^2 - 10 \leq 0$

▶ **Problemas**

▶ **Traducción al lenguaje algebraico (repaso)**

(31) Traduce al lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

a) Un número.

b) El doble de un número.

c) El triple de un número.

d) La mitad de un número.

e) La tercera parte de un número.

f) El cuadrado de un número.

g) El triple de la mitad de un número.

h) El cuadrado del triple de un número.

i) La suma de dos números vale 50.

j) La diferencia de dos números vale 50.

k) El producto de dos números vale 3.

(32) Traduce los siguientes enunciados:

a) Piensa un número. Multiplicalo por 3. Súmale 2. Multipícalo por 4. Réstale 10 veces el número que pensaste. Dime el número.

b) Piensa un número. Súmale 5. Multiplícalo por 2. Quítale 6. Divídelo entre 2. Dime el número.

c) Piensa un número. Restale 4. Multiplícalo por 5. Súmale 30. Quítale el número que pensaste. Divídelo entre 2. Dime el número.

▶ **Charadas**

(33) ¿Quién es el hijo del padre de mi abuelo?

(34) Te dices para ti mismo: "Yo soy un hombre. Si el hijo de este otro hombre es el padre de mi hijo, ¿qué relación de parentesco hay entre este hombre y yo?"

(35) Un hombre estaba mirando un retrato y alguien le preguntó: "¿De quién es esa fotografía?", a lo que él respondió: "Ni hermanos ni hermanas tengo, pero el padre de este hombre es el hijo de mi padre." ¿De quién era la fotografía que estaba mirando el hombre?

(36) Y si en la situación anterior, el hombre hubiese respondido:“Ni hermanos ni hermanas tengo, pero el hijo de este hombre es el hijo de mi padre”. ¿De quién sería la fotografía?

▶ Ecuaciones de segundo grado

(37) ¿Cuánto debe valer m para que la ecuación $x^2 - (m+2)x + m^2 = 0$ tenga una raíz doble?

(38) ¿Cuánto debe valer m para que la ecuación $mx^2 - mx + 2 = 0$ tenga una raíz doble?

(39) ¿Cuánto debe valer a para que la ecuación $x^2 - 5x + a = 0$ no tenga solución?

▶ Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

(40) Supongamos que metemos 10.000 euros en un banco, que nos da un 5 % de interés anual. ¿Cuántos años han de transcurrir para que nuestro capital se duplique?

(41) En una ciudad hay 100.000 habitantes. Suponiendo que la población crece a un ritmo del 3 % anual, ¿cuántos años han de transcurrir para que se triplique la población?

(42) Pedro, en un viaje al extranjero, ha cogido la llamada gripe “P”. Esta gripe es muy contagiosa. Para poder estudiar cómo se propaga supongamos que cada día va a haber el doble de contagiados. Suponiendo que inicialmente el único contagiado es Pedro y que hay 46 millones de españoles, ¿cuántos días han de transcurrir para que se contagie toda España?

(43) **De ampliación. Rumores** Para hacer este problema es necesario que recuerdes las sucesiones geométricas estudiadas el año pasado. Si no te resultará muy complicado.

A continuación se muestra un extracto del libro “Matemáticas recreativas” de Yakob Perelman:

> ¡Es sorprendente cómo se difunde un rumor entre el vecindario de una ciudad! A veces, no han transcurrido aún dos horas desde que ha ocurrido un suceso, visto por algunas personas, cuando la novedad ha recorrido ya toda la ciudadM; todos lo conocen, todos lo han oído. Esta rapidez parece sorprendente, sencillamente maravillosa.
>
> Sin embargo, si hacemos cálculos, se verá claro que no hay en ello milagro alguno; todo se explica debido a ciertas propiedades de los números y no se debe a peculiaridades misteriosas de los rumores mismos.
>
> Examinemos, como ejemplo, el siguiente caso:
>
> A las ocho de la mañana, llegó a la ciudad de 50.000 hatitantes un vecino de la capital de la nación que traía una nueva de interés general. En la casa donde se hospedó, el viajero comunicó la noticia a sólo tres vecinos de la ciudad; convengamos en que esto transcurrió en un cuarto de hora, por ejemplo.
>
> Así pues, a las ocho y cuarto de la mañana conocían la noticia, en la ciudad, sólo cuatro personas: el recién llegado y tres vecinos.

Conocida la noticia, cada uno de estos tres vecinos se apresuró a comunicarla a tres más, en lo que emplearon también un cuarto de hora. Es decir, que a la media hora de haber llegado la noticia, la conocían en la ciudad $4 + 3 \cdot 3 = 13$ personas.

Cada uno de los nuevos conocedores la comunicó en el siguiente cuarto de hora a otros 3 ciudadanos; así a las 8:45 de la mañana, conocían la noticia $13 + 3 \cdot 9 = 40$ ciudadanos.

¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que conozcan la noticia los 50.000 habitantes de la ciudad? Resuelve el problema con ecuaciones, no tanteando.

▶ <u>Sistemas de ecuaciones 2x2</u>

(44) La suma de las cifras de un número es 6. Si cambiamos la cifra de las unidades por las decenas el número aumenta en 18 unidades. Calcula el número.

(45) La suma de las cifras de un número es 7. Si cambiamos la cifra de las unidades por las decenas el número aumenta en 45 unidades. Calcula el número.

(46) La suma de las cifras de un número es 11. Si cambiamos la cifra de las unidades por las decenas el número disminuye en 63 unidades. Calcula el número.

(47) La suma de las cifras de un número es 8. Si cambiamos la cifra de las unidades por las decenas el número disminuye en 54 unidades. Calcula el número.

▶ <u>Problemas varios</u>

A continuación se proponen una serie de problemas. No todos necesariamente conducen a ecuaciones, algunos basta con entenderlos para poder resolverlos.

(48) **Edades.** Ana tiene 35 años y su hijo, Alfonso, 8 años. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la mitad de la edad de Ana sea igual al doble de la edad de su hijo?

(49) **Números.** Encuentra dos números cuya suma vale 61 y cuyo producto vale 918.

(50) **Rectángulo.** Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro vale 50 y su área 150.

(51) **Asistencia a clase.** Si no se quiere perder el derecho de matrícula en la Escuela Oficial de Idiomas hay que asistir como mínimo un 60 %. Si son 80 el número de horas del curso, ¿a cuántas clases como mínimo tiene que acudir un alumno para no perder el derecho de matrícula?

(52) **Tantos por cien I.** Si el 80 % de la nota de cada evaluación corresponde a la nota obtenida en los exámenes y el 20 % restante a la actitud:

  a) ¿Qué nota tiene que sacar un alumno con un 10 en actitud para aprobar (sacar mínimo un 5)?

  b) Y si tiene un 0 en actitud, ¿qué nota tiene que sacar?

(53) **Tantos por cien II.** Según un telediario los precios de los pisos se incrementaron un 66 % desde el 2001 al 2011. Este incremento ¿es mucho? ¿poco?

Esto lo podemos averiguar de dos formas:

a) Calcula el tanto por cien medio que se incrementaron los precios de los pisos cada año. Compáralo con el IPC medio de esos años.

b) Busca en la página del INE los IPCs correspondientes a los años del 2001 al 2011. ¿Qué incremento sufrieron los precios por culpa de estos IPCs?

(54) **Nota de examen.** En una evaluación se hacen dos examenes: el primero de dos temas, y el segundo de un tema. Haciendo una media ponderada (el primer examen pesa el doble que el segundo), ¿qué nota tendrá que obtener un alumno en el segundo examen para aprobar toda la evaluación, suponiendo que en el primer examen hubiese sacado un 4?

(55) **!!!Un problema del siglo XI.** Según cuenta Yakob Perelman, en su libro "Algebra recreativa", el siguiente problema aparece en las obras de un matemático del siglo XI:

> A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, una frente a la otra. La altura de una es de 30 codos, y la de la otra, de 20. La distancia entre sus troncos, 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro. De súbito los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzaron y alcanzaron el pez al mismo tiempo.
>
> ¿A qué distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez?

Sugerencia: empieza haciendo un dibujo de la situación.

(56) **Velocidad de la luz.** Sabiendo que la luz viaja a 300.000 km/s, ¿qué distancia recorre en 1 nanosegundo?

(57) **Radio de la tierra.** El metro se define inicialmente de tal manera que el perímetro de la tierra sea de 40.000 km. Con esta definición, calcula el radio de la tierra.

(58) **Velocidad de la tierra en torno al sol.** Calcula la velocidad, en km/s, a la que se mueve la tierra en torno al sol. Datos: distancia de la tierra al sol $= 1'50 \cdot 10^{11}$ m; año $\backsimeq$ 365 días.

(59) **Velocidad de la luz.** La luz ¿cuántos centímetros recorre en 1 nanosegundo? (velocidad de la luz = 300.000 km/s)

(60) **Agua en una persona.** El 70 % de las células es agua. Una persona que pesa 60 kg, ¿cuánta agua tiene?

(61) **Composición del aire.** El aire está fundamentalmente formado por un 79 % de nitrógeno y un 21 % de oxígeno.

a) Cuando respiras, ¿cuál es el gas que más entra en tus pulmones?

b) El nitrógeno ¿es venenoso?

c) ¿Cuántos litros de oxígeno hay en 10 litros de aire?

▶ **Problemas de física, química y biología**

(62) **Coches I.** Dos coches salen a la vez, el primero desde Salamanca hacia Madrid, y el segundo desde Madrid a Salamanca. Sabiendo que el primero viaja a 120 km/h y el segundo a 100 km/h, ¿a qué distancia de Salamanca se encontrarán? (distancia Salamanca-Madrid = 210 km)

(63) **Coches II.** Juan y Roberto viven en Madrid y deciden ir a Málaga a pasar las vacaciones. Juan sale de Madrid a las 9 de la mañana a una velocidad de 100 km/h, mientras que Roberto sale a las 10 con una velocidad de 120 km/h. ¿A qué distancia de Madrid Roberto alcanzará a Juan? ¿A qué hora?

(64) **Tiro parabólico I.** Cuando tiramos una pelota su altura h, se puede calcular mediante la siguiente fórmula: $h = v_{oy}t - 5t^2$, donde v_{oy} es la velocidad inicial con que lanzamos la piedra hacia arriba. En está fórmula la altura se da en metros y el tiempo en segundos. Si dejamos caer una pelota:

a) ¿Qué distancia recorre en 1 segundo? ¿y en 2 s?

b) ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 1 metro?

(65) **Tiro parabólico II.** Si tiramos una pelota hacia abajo a una velocidad de 10 m/s desde la azotea de un edificio de 60 m de alto, ¿cuánto tiempo tardará en llegar al suelo? ¿con qué velocidad llegará?

(66) **Ley de la gravitación universal I.** ¿A qué altura sobre el nivel del mar habría que subir un objeto para que su peso sea la mitad que a ese nivel? (Radio de la tierra = 6370 km)

(67) **Ley de la gravitación universal II.** ¿En qué punto se equilibran las atracciones que ejercen la tierra y la luna sobre un cuerpo? (distancia tierra-luna = 384.000 km; la masa de la tierra es 81 veces mayor que la de la luna).

(68) **!!!Profundidad de un pozo.** Determinar la profundidad de un pozo si el sonido producido por una piedra que se suelta en su brocal al chocar con el fondo se oye 2 segundos después. (Velocidad del sonido = 340 m/s).

(69) **Composición química de algunos elementos.**

a) ¿Qué tanto por cien de oxígeno hay en el agua (H_2O)?

b) ¿Qué tanto por cien de carbono hay en el dióxido de carbono (CO_2)?

c) ¿Qué tanto por cien de nitrógeno hay en el amoníaco (NH_3)?

Pesos atómicos: H = 1; C = 12; N = 14; O = 16.

(70) **División celular I.** Una célula en un cultivo se divide cada 15 minutos. Suponiendo que inicialmente tenemos 1 célula de este tipo, ¿cuántas células habrá transcurridos 2 días? Y si en lugar de 15 minutos fuese de 20 minutos, ¿sabrías responder a la pregunta?

(71) **División celular II.** La selección natural es una fuerza poderosa en la evolución porque las células con pequeñas ventajas de crecimiento superan rápidamente a sus competidoras. Para ilustrar este proceso, considera un cultivo celular que contiene un millón de células bacterianas que se duplican cada 20 minutos. Una célula del cultivo adquiere una mutación que le permite dividirse con mayor rapidez, con un tiempo de generación de 15 minutos solamente. Considerando que el suministro de alimentos es ilimitado y que no hay muerte celular, ¿cuánto tiempo transcurrirá hasta que la progenie de la célula mutada predomine en el cultivo?

Problema sacado del libro "Introducción a la Biología Celular".

(72) **División celular III.** En el hombre hay aproximadamente 10^{13} células. Consider que una célula adquiere una mutación que le permite dividirse en forma descontrolada (es decir, se convierte en una célula neoplásica). Algunas células cancerosas pueden crecer con un tiempo de generación de 24 horas aproximadamente. Si ninguna de las células noplásicas muere, ¿cuánto tiempo transcurrirá hasta que las 10^{13} células de su organismo se conviertan en células tumorales? (Indicación $10^{13} \backsimeq 2^{43}$)

Problema sacado del libro "Introducción a la Biología Celular".

Semejanza

EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

▶ Notación

(1) Escribe cómo se llaman las siguientes letras griegas: δ, α, Ω, θ, Φ.

(2) Escribe las siguientes letras en minúsculas y mayúsculas: delta, fi, alfa, omega, gamma, zeta y beta.

(3) **De ampliación. T** anto en matemáticas como en física es muy habitual usar letras griegas.

a) Busca cómo es el alfabeto griego y escribe tu nombre usándolo.

b) Lee el siguiente mensaje: $\Sigma\iota$ $\beta\epsilon\beta\epsilon\sigma$ $\nu\o\kappa\o\nu\delta\upsilon\theta\kappa\alpha\sigma$

▶ Resumen teoremas y conceptos básicos

(4) Mira la figura fig. 1. Calcula β en los siguientes casos:

a) $\alpha = 30^{\text{o}}$ *b*) $\alpha = 60^{\text{o}}$ *c*) $\alpha = 90^{\text{o}}$ *d*) $\alpha = 120^{\text{o}}$

¿Serías capaz de dar una fórmula que permita calcular β a partir de α?

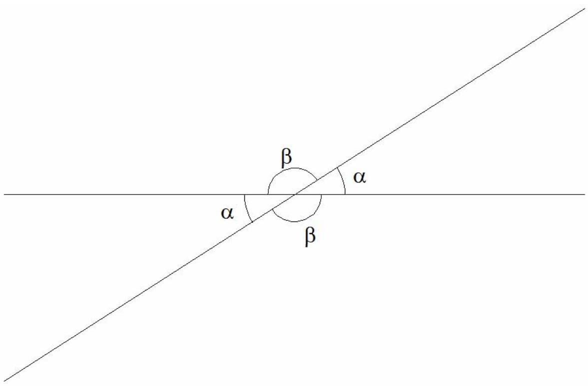


Figura 1:

(5) En la figura 2 calcula β en los siguientes casos:

a) $\alpha = 20^{\text{o}}$ *b*) $\alpha = 45^{\text{o}}$ *c*) $\alpha = 60^{\text{o}}$ *d*) $\alpha = 85^{\text{o}}$

¿Serías capaz de dar una fórmula que permita calcular β a partir de α?

(6) Los ángulos que no son rectos de un triángulo rectángulo ¿son complementarios? Justifica tu respuesta.

(7) En la figura 3 calcula el ángulo $\angle EDF$ a partir del ángulo $\angle CAD$. El ángulo $\angle ADE$ es de 90 grados.

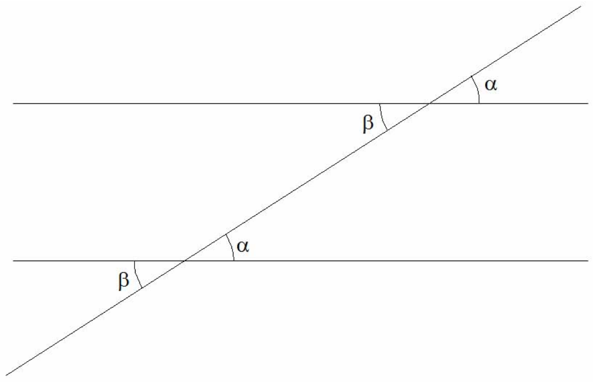


Figura 2:

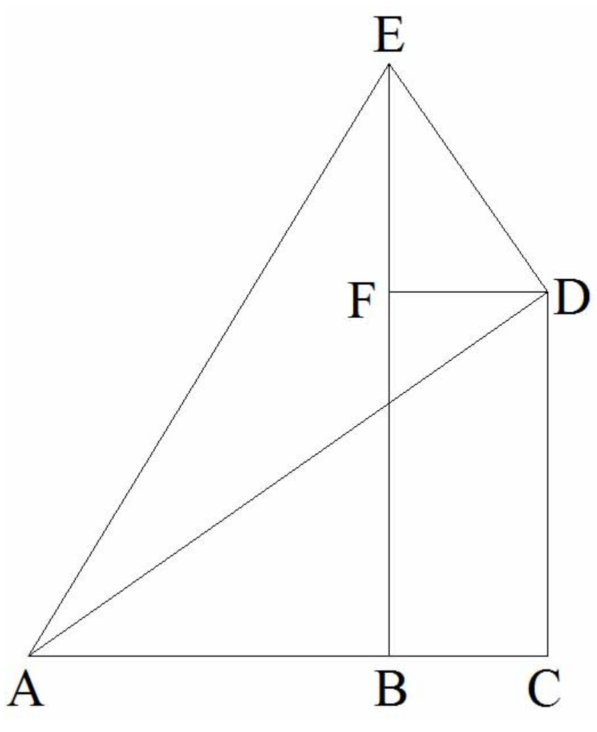


Figura 3:

(8) Dibuja un triángulo cualquiera, trazando las tres alturas.

▶ **Planos**

(9) ¿Qué quiere decir que la escala de un plano sea 1:100? ¿Y 1:1000?

(10) Supón que tenemos un plano cuya escala es 1:1000.

a) 1 mm en el plano ¿cuántos mm son en la realidad?

b) 1 cm en el plano ¿cuántos cm son en la realidad?

c) 1 m en el plano ¿cuántos m son en la realidad? (¿crees que tiene sentido esta pregunta? Justifica tu respuesta)

(11) **Diseñando un coche.** La figura (fig. 4) es un plano a escala de un coche. Rellena los rectángulos en blanco indicando las medidas que faltan.

(12) **La torre Eiffel.** La figura (fig. 5) es un plano a escala de la torre Eiffel. Rellena los rectángulos en blanco indicando las medidas que faltan.

(13) **De ampliación. La guerra de las galaxias** La figura (fig. 6) muestra una de las máquinas que aparece en la guerra de las galaxias. Haz una estimación de las dimensiones más importantes (altura, ancho, distancia entre las patas, ...).

(14) **Amueblando la habitación.**

a) Haz un dibujo a escala del plano de tu habitación, indicando dónde se encuentra la puerta, las ventanas y el radiador. Señala la escala que usas.

b) En otra hoja haz un dibujo de los muebles que tienes en tu habitación: la cama, el armario, una mesa de estudio, ... Recórtalos.

c) Juega a colocar los muebles de tu habitación de formas diferentes. ¿Podrías colocarlos de la forma más adecuada para ti?

d) Una vez que hayas colocado los muebles, mide sobre el plano obtenido el ancho del pasillo que te queda, la distancia de la cama a la puerta, ... ¿Pasaría una persona comodamente por ahí?

(15) **Campo de fútbol.** Basándote en las medidas dadas en la figura (fig. 7), haz un dibujo a escala de un campo de fútbol. ¿Qué escala has usado?

(16) **Tamaños de rascacielos.** La siguiente tabla muestra las dimensiones de los rascacielos más altos del mundo en el 2011, según la Wikipedia:

Pos.	Nombre	Ciudad	Altura (m)
1	Burj Khalifa	Dubái	828
2	Torres Abraj Al Bait	La Meca	601
3	Taipei 101	Taipéi	509
4	Shanghai World Financial Center	Shangai	492
5	International Commerce Center	Hong Kong	484
193	Torre Caja Madrid	Madrid	250

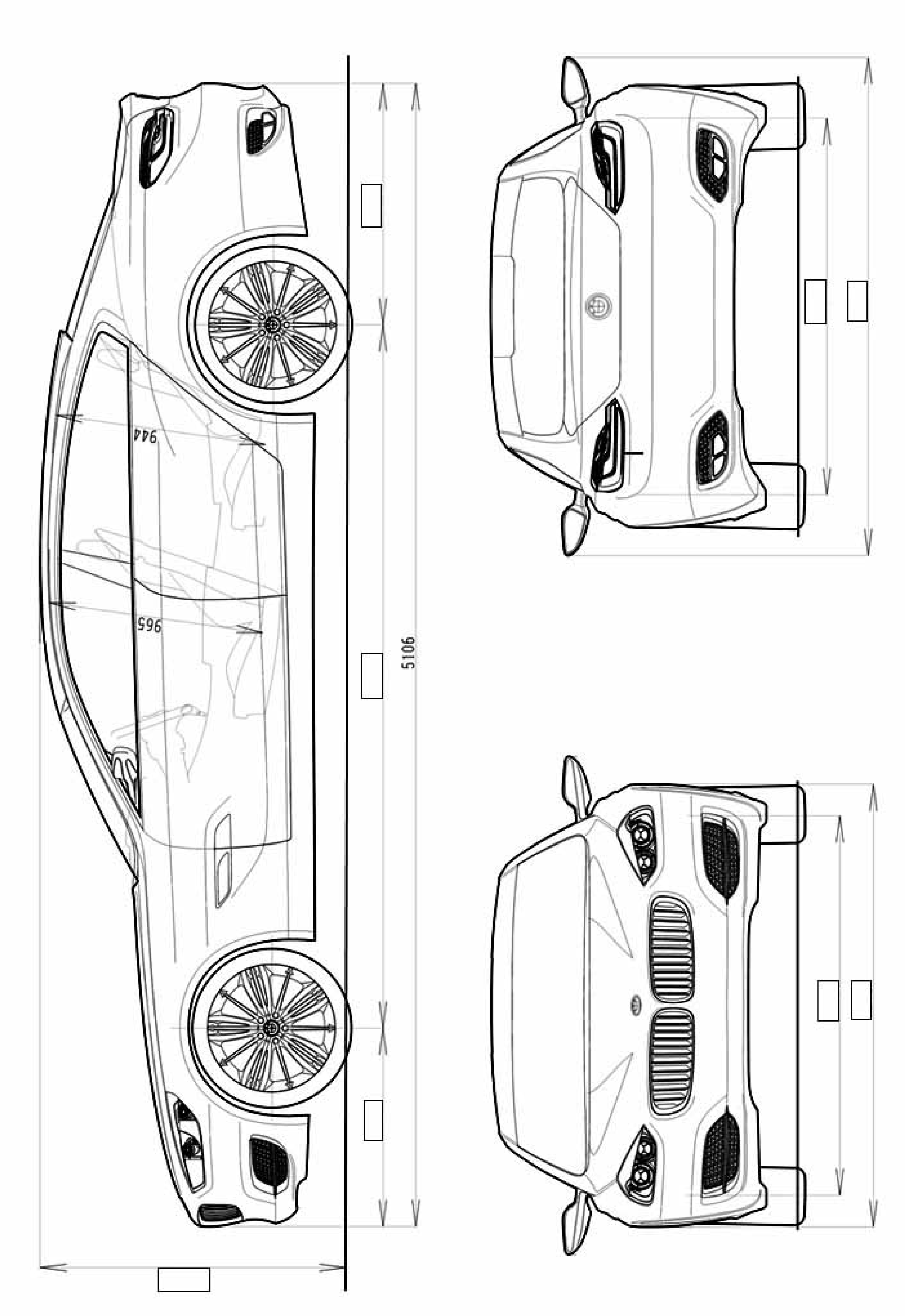


Figura 4: Diseño de un coche

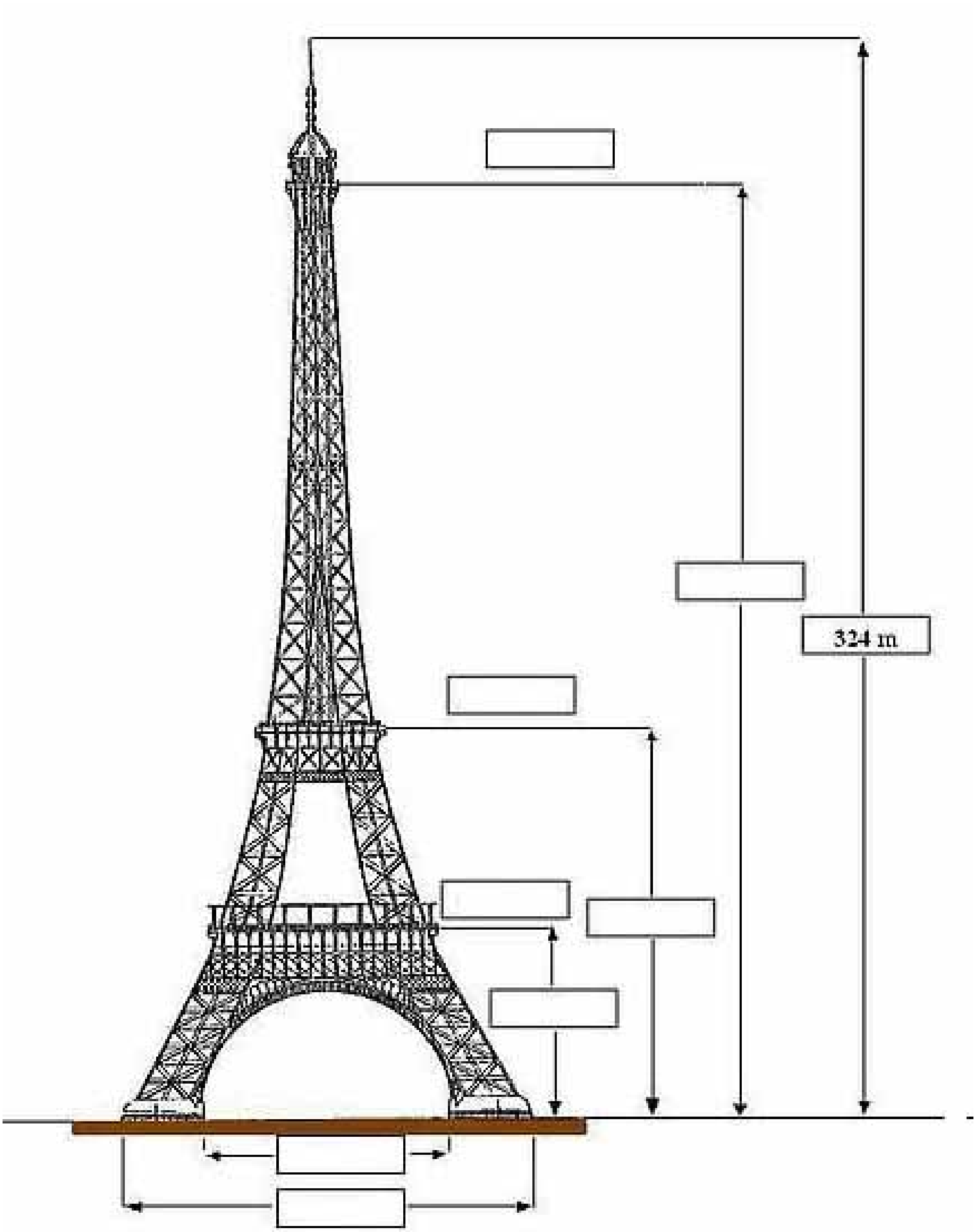


Figura 5: Torre Eiffel

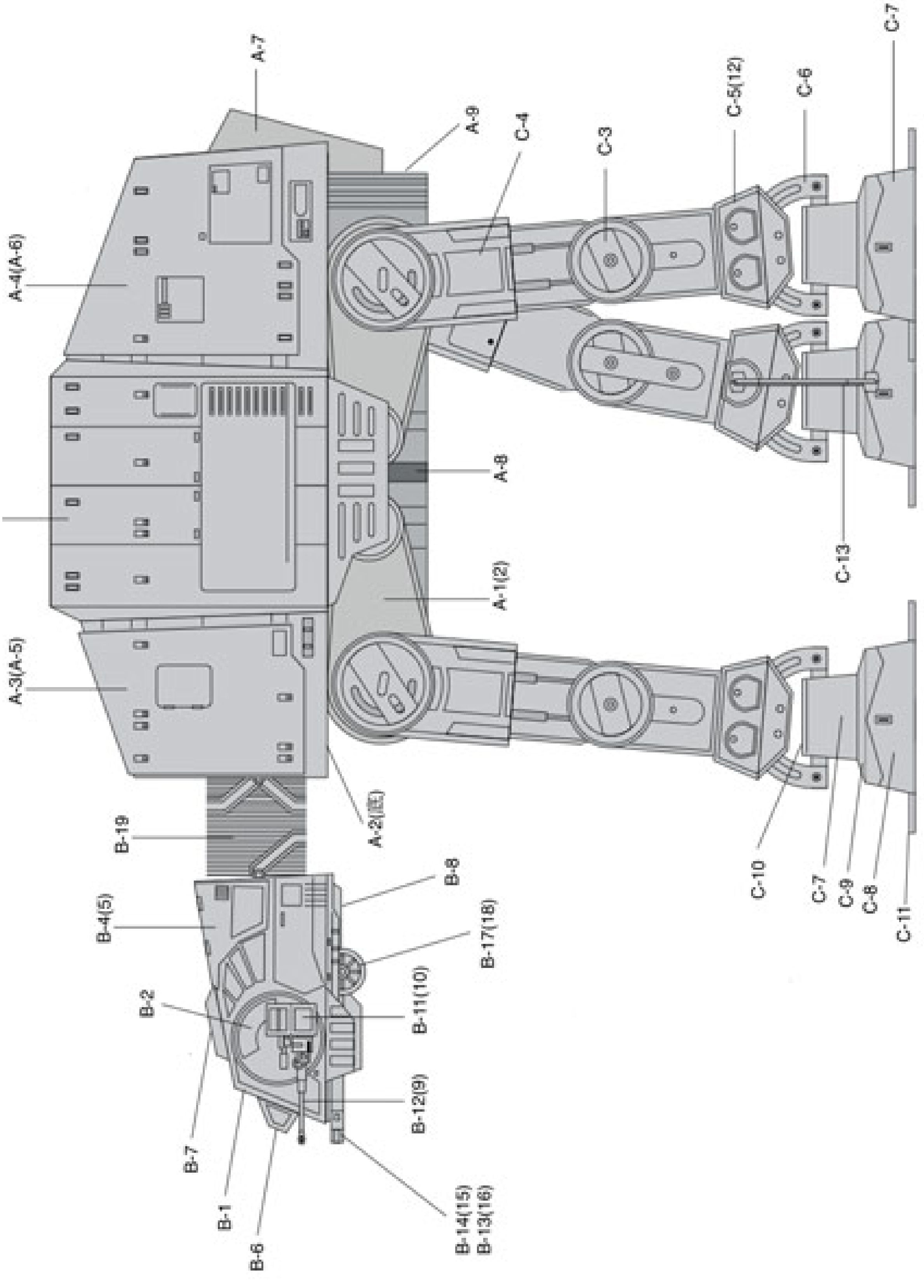


Figura 6: Máquina de la guerra de las galaxias

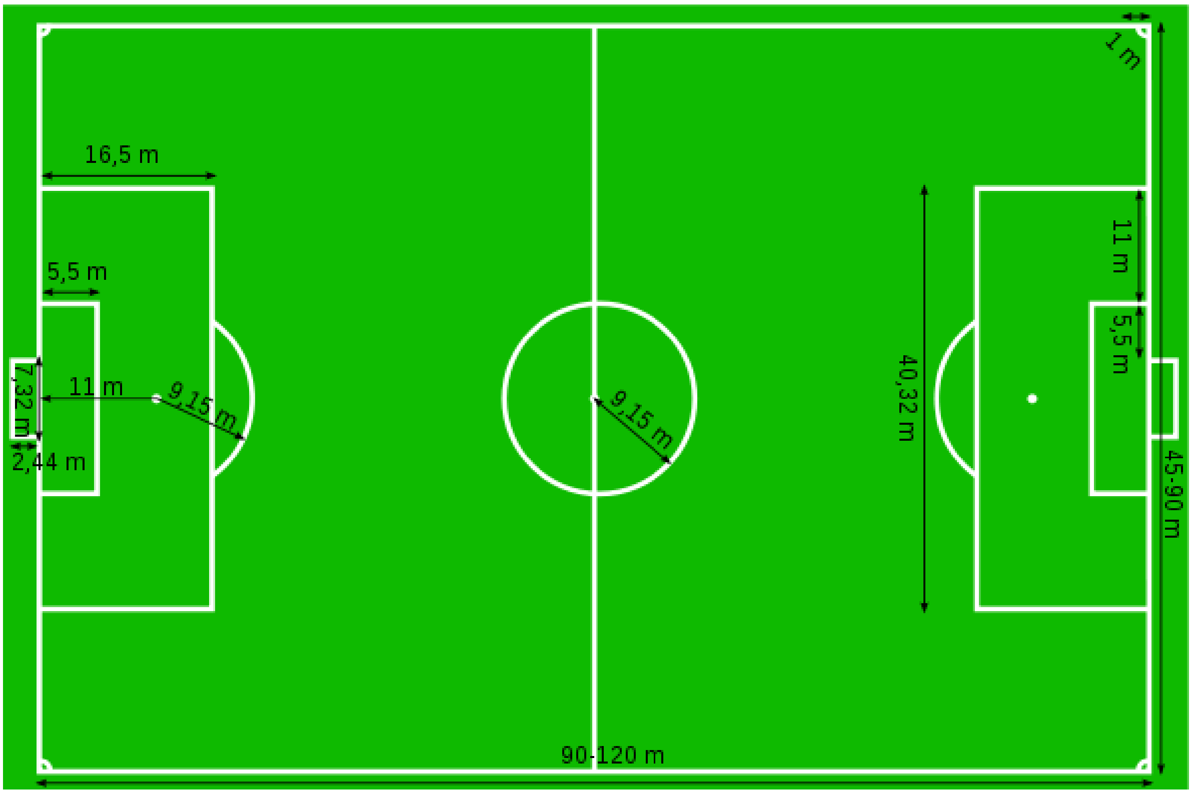


Figura 7: Campo de fútbol

a) Haz un dibujo a escala de cada uno de ellos, indicando la escala usada.

b) Averigua si a día de hoy hay algún rascacielos mayor.

c) Añade dos columnas más a la tabla, una que indique el país al que pertenece el rascacielos y la otra que nos diga la latitud y longitud de la ciudad en la que se encuentra.

(17) **Planos de ciudad.** FALTA: darles el plano de Nueva York y que midan la distancia entre algunos puntos famosos.

(18) **La tierra.** La siguiente tabla muestra las distintas capas que forman la tierra:

Profundidad (km)	Nombre
0-35	Corteza
35-60	Manto superior
35-2890	Manto
2890-5100	Núcleo externo
5100-6378	Núcleo interno

a) Haz un dibujo a escala de un corte de la tierra, indicándo las distintas capas que la forman y la escala usada.

b) La tabla anterior procede de la wikipedia, no teniendo ninguna garantía de ser ciertos. Busca en un libro de geología si son correctos o no. La wikipedia ¿es de fiar? ¿Por qué? Razona tu respuesta.

(19) **La atmósfera terrestre.** La siguiente tabla muestra las distintas capas que forman la atmósfera terrestre:

Altura (km)	Nombre
6-20	Troposfera
20-50	Estratosfera
50-85	Mesosfera
85-690	Termosfera
690-10.000	Exosfera

a) Haz un dibujo a escala de la atmósfera, indicando la escala usada.

b) La tabla anterior procede de la wikipedia. Comprueba con un libro serio si los datos son correctos o no.

(20) **Nuestro universo: tamaños de los planetas.** La siguiente tabla muestra los radios de algunos planetas y del sol.

Nombre	Radio (km)	R/R_T
Mercurio	$2'42?$	
Venus	$6'10$	
Tierra	$6'37$	
(Luna)	$(1'74)$	
Marte	$3'37$	
Júpiter	$69'9$	
Saturno	$58'5$	
Urano	$23'3$	
Neptuno	$22'1$	
Sol	$6'96 \cdot 10^5$	

a) Completa la tabla calculando la razón R/R_T (R_T = radio de la tierra).

b) Haz un dibujo a escala que te permita comparar los tamaños de forma visual. Deja indicada la escala usada.

(Datos extraídos del libro de Mecánica de A.P. French)

(21) **Nuestro universo.** La siguiente tabla muestra la distancia, en miles de kilómetros, del sol a los planetas:

Nombre	Distancia (10^3 km)
Mercurio	57.910
Venus	108.200
Tierra	146.600
Marte	227.940
Júpiter	778.330
Saturno	1.429.400
Urano	2.870.990
Neptuno	4.504.300

Haz un dibujo a escala de nuestro universo. Recuerda que los planetas siguen trayectorias casi circulares en torno al sol. (Sugerencia: te puede ayudar calcular d/d_T siendo d la distancia de un planeta al sol y d_T la distancia a la tierra).

▶ Semejanza de figuras

(22) ¿Todas las esferas son semejantes?

▶ Semejanza de polígonos

(23) Averigua si las figuras del dibujo (fig. 8) son semejantes y, en caso de serlo, calcula la razón de semejanza.

(24) Indica si las siguientes figuras son semejantes o no, y en caso de serlo averigua la razón:

a) Un triángulo y un rectángulo.

b) Dos cuadrados de lado 2.

c) Dos pentágonos cualesquiera.

d) Dos pentágonos regulares.

e) Dos triángulos rectángulos, el primero de lados (3, 4, 5) y el segundo de lados (5, 12, 13).

▶ Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes

(25) Comprueba que la relación de los perímetros de figuras semejantes es igual a la razón de semejanza para:

a) Los cuadrados semejantes a un cuadrado de lado 2.

b) Las circunferencias semejantes a una de radio 3.

(26) **De ampliación.** ¿ Serías capaz de demostrarlo en general para cualquier polígono? Para ello:

a) Intenta demostrarlo para los triángulos.

b) A continuación demuéstralo para los cuadriláteros.

c) ¿Puedes ya demostrarlo en general?

(27) Comprueba que la relación entre las áreas de figuras semejantes es igual a la razón de semejanza elevada al cuadrado para:

a) Triángulos equiláteros semejantes a uno de lado 1.

b) Hexágonos regulares semejantes a uno de lado 2.

c) Círculos semejantes a uno de radio 3.

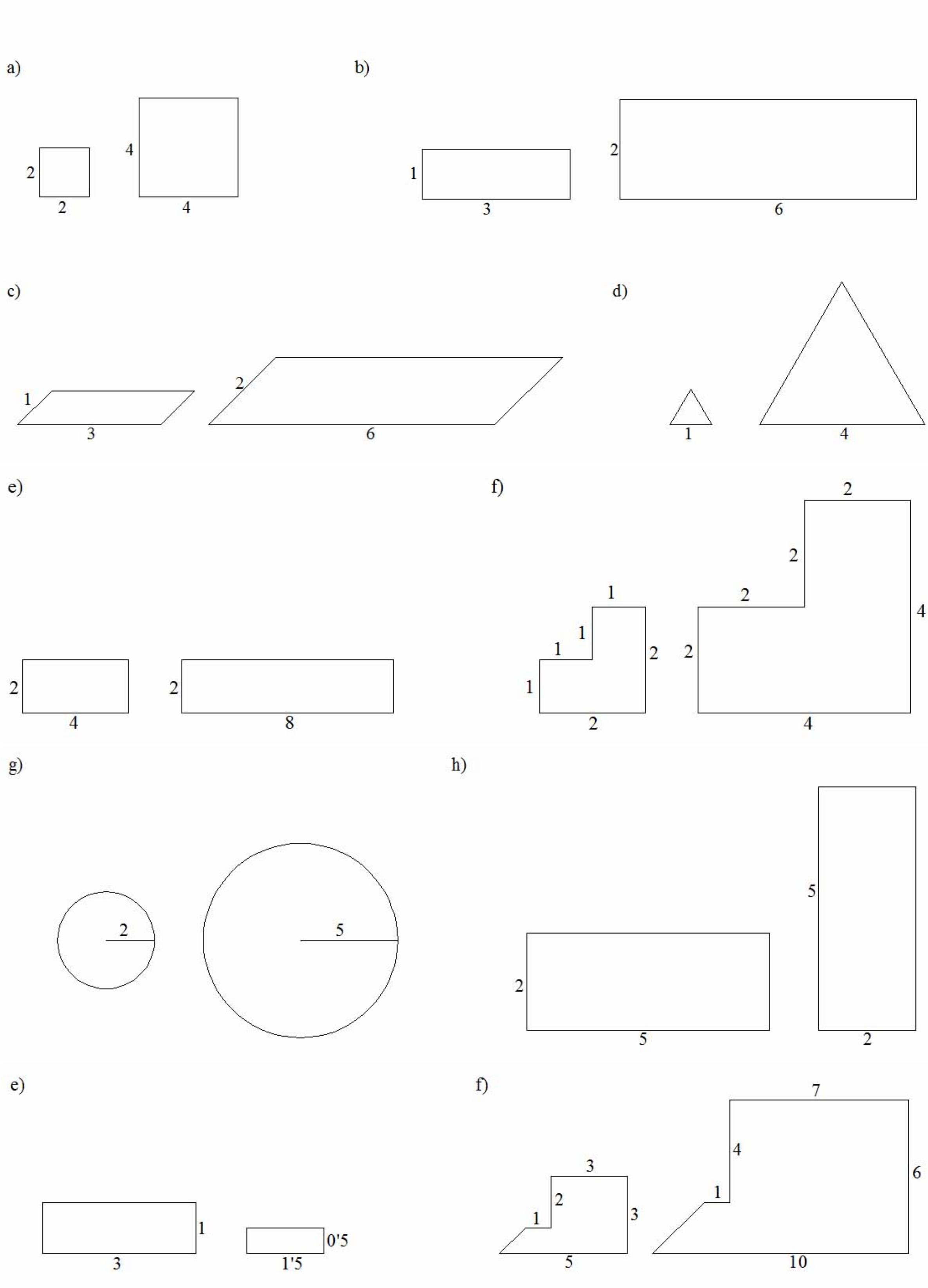


Figura 8: ¿Son semejantes estas figuras?

(28) Comprueba que la relación entre los volúmenes de figuras semejantes es igual a la razón de semejanza elevada al cubo para:

a) Cilindros semejantes a uno de radio 1 y altura 3. (Volumen cilindro = área de la base x altura)

b) Conos semejantes a uno de radio 2 y altura 4. (Volumen de un cono = 1/3 área de la base x altura)

c) Esferas semejantes a una de radio 4. (Volumen esfera = $\frac{4}{3}\pi r^3$)

(29) Un prisma de madera de dimensiones 8 x 4 x 2 cm pesa 8 g. ¿Cuánto pesará un prisma de 4 x 2 x 1 cm?

(30) **La torre Eiffel.** La torre Eiffel, toda de hierro, mide 300 m de altura y pesa 9000 toneladas. ¿Cuánto pesará su modelo exacto, también hecho de hierro, de 30 cm de altura? (1 tonelada son 1000 kg)

(Del libro: "¿Sabe usted física?" de Yacov Perelman)

(31) **La duplicación del cubo.** A continuación se muestra un extracto del libro "Historia de la matemática" de Carl B. Boyer, pág. 97:

> Se dice que Pericles murió de la peste que se llevó quizá como una cuarta parte de la población ateniense, y la profunda impresión que produjo esta catástrofe fue probablemente el origen de un segudno problema matemático famoso. Según las informaciones que nos han llegado, se envió una delegación al oráculo de Apolo en Delos para preguntar cómo podría conjurarse la peste, a lo que el oráculo contestó que era necesario duplicar el altar cúbico dedicado a Apolo. Al parecer, los atenienses duplicaron diligentemente las dimensiones del altar, pero esto no sirvió de nada para detener la peste; obviamente el altar había aumentado ocho veces su volumen en vez de dos. Este es, según la leyenda, el origen del problema de la *duplicación del cubo*, que se suele conocer también desde entonces como el *problema de Delos*: dada la arista de un cubo, construir, usando únicamente la regla y el compás, la arista de otro cubo que tenga volumen doble que el del primero. Por la misma época circuló aún por Atenas un tercer problema famoso: dado un ángulo arbitrario, construir, con regla y compás únicamente, un ángulo igual a un tercio del ángulo dado. Estos tres problemas, la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo han sido conocidos desde entonces como *los tres problemas clásicos* de la antigüedad. Más de 2.200 años más tarde se iba a demostrar que todos estos tres problemas eran insolubles ...

a) Resuelve el problema de la duplicación del cubo.

b) En el texto se dice que en el siglo XIX se demostró que este problema no tiene solución, pero sin embargo en el apartado anterior lo has resuelto. ¿Cómo es posible?

c) **De ampliación. La cuadratura del círculo** El texto habla de tres problemas clásicos, pero solo explica dos de ellos. Averigüa en qué consiste el tercer problema, el problema de la cuadratura del círculo. En el libro de Carl Boyer puedes encontrar la descripción.

▶ Semejanza de triángulos

▶ Descomposición de una curva cerrada en triángulos

(32) Para hacer este ejercicio usa regla y compás:

a) Dibuja una circunferencia.

b) Inscribe en ella un cuadrado.

c) Dividiendo en dos partes iguales cada lado del cuadrado puedes dibujar fácilmente un polígono de 8 lados inscritos en la circunferencia.

d) Usando el mismo método del apartado anterior inscribe un polígono de 16, 32, ... lados en la circunferencia.

Con lo hecho ¿sabrías a qué polígono se aproxima una circunferencia?

(33) Divide los polígonos de la figura (9) en triángulos:

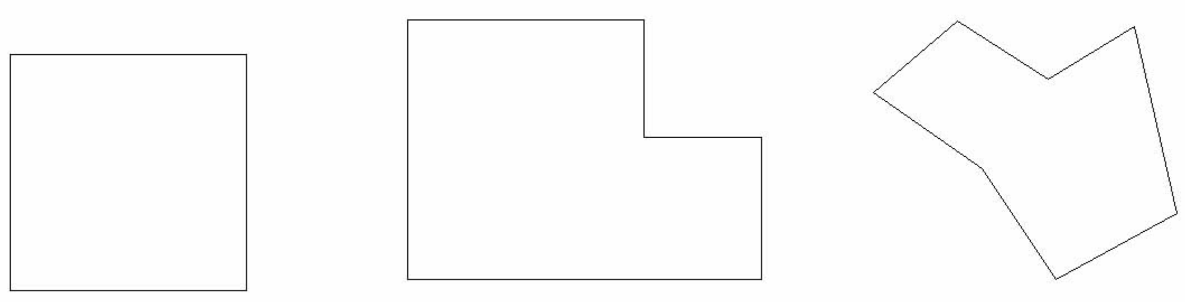


Figura 9:

▶ Criterios de semejanza de triángulos

(34) Los siguientes triángulos ¿tienen los ángulos iguales? Primero responde a esta pregunta usando los criterios de semejanza de triángulos, después dibújalos comprobando tu respuesta.

a) Triángulos de lados $(3, 4, 5)$ y $(6, 8, 10)$

b) Triángulos de lados $(4, 4, 3)$ y $(12, 12, 9)$

c) Triángulos de lados $(3, 4, 5)$ y $(5, 12, 13)$

(35) Indica si los triángulos de la figura (fig. 10) son semejantes o no, indicando el por qué.

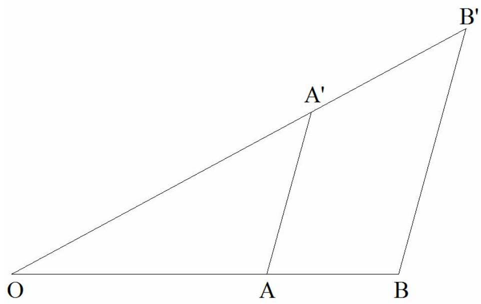


Figura 10:

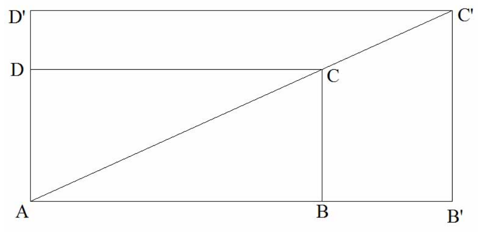


Figura 11:

(36) Indica si los dos rectángulos de la figura (fig. 11) son semejantes. Justifica tu respuesta.

(37) Indica si los siguientes triángulos de la figura (fig. 12) son semejantes.

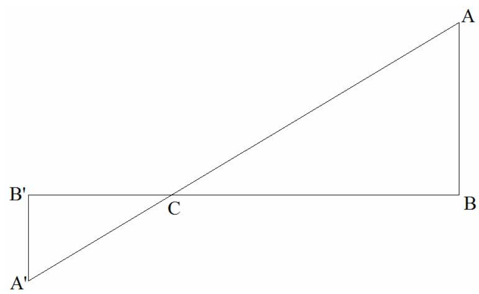


Figura 12:

(38) **Imagen a través de una lente.** Calcula las distancias H y d indicadas en la figura (fig. 13).

▶ Teorema de tales

(39) **De ampliación. Distinas formas de escribir el Teorema de Tales** El teorema de Tales se puede escribir de muy diversas formas. Una de ellas dice que

$$\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}, \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}, \text{ y } \frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'}$$

Demuestra que esta forma de dar el teorema de Tales es equivalente a la explicada.

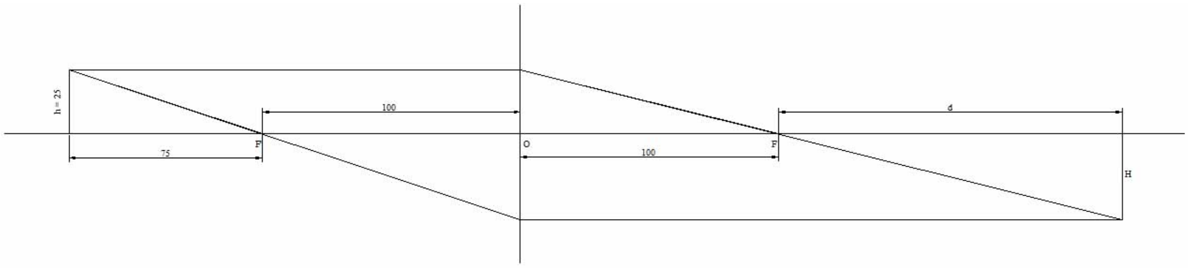


Figura 13: Imagen a través de una lente

(40) **División de un segmento en partes iguales.**

a) Traza un segmento de 7 cm y divídelo en 5 partes iguales.

b) Para hacer la división has tenido que trazar una línea auxiliar, y cinco marcas iguales sobre ella. Traza otras cinco marcas iguales pero mayores que las que has usado. ¿Estas nuevas marcas te dividirán el segmento también en 5 partes iguales?

c) Ahora traza una línea auxiliar diferente y cinco marcas iguales sobre esta nueva línea. ¿Te dividirá en 5 partes iguales el segmento?

(41) **Demostrando el método de división.** Traza un segmento cualquiera y divídelo en dos partes iguales usando el método explicado. Basándote en el dibujo y usando el teorema de Tales demuestra que el segmento AB ha quedado realmente dividido en 2 partes iguales. ¿Puedes hacer un razonamiento parecido para el caso en que $n = 3$? ¿Y si $n = 4$? ¿Serías capaz de razonar en general, justificando el método explicado?

(42) **Anchura de un río.** Intentamos medir la anchura de un río usando el método de Tales, y para ello hacemos lo siguiente: nos fijamos en un punto en el otro lado del río. Caminamos 6 metros por la orilla. Clavamos una estaca. Caminamos otros 3 metros y nos giramos 90 grados alejándonos del río. Al separarnos 4 metros vemos la estaca alineada con el punto de referencia. ¿Qué ancho tiene el río?

(43) **Método de Euclides para medir alturas.** Un método atribuido a Euclides para medir la altura de un edificio es el siguiente: colocamos un espejo en el suelo totalmente horizontal delante del edificio cuya altura queremos medir. Nos alejamos del edificio mirando al espejo, que está en el suelo, hasta que veamos reflejado el tejado del edificio. A continuación medimos la distancia que nos hemos alejado. En el dibujo puedes ver un pequeño esquema del método empleado. ¿Sabrías calcular la altura del edificio?

(44) **De ampliación. Modernizándonos** En la actualidad resulta muy sencillo medir la altura de un edificio con una cámara de fotos. ¿Sabrías hacerlo? Sin embargo con este método se puede cometer más error que con el de Tales. ¿Sabrías decir por qué?

(45) **Método de Euclides para medir profundidades.** Euclides inventó un método para medir la profundidad de un pozo. Para ello basta con coger una vara y manteniéndola en vertical, separarse del pozo. Cuando la esquina del fondo del pozo

esté alineada con el extremo superior de la vara tenemos la situación detallada en la figura. ¿Sabrías calcular la profundidad del pozo?

(46) De campo: usando el método de Tales mide la altura de tu instituto.

(47) **De ampliación. Tales de Mileto** Tales de Mileto es un matemático griego que vivió antes de que naciera Jesucristo. En este capítulo hemos hablado de dos teoremas que demostró. ¿Qué más cosas descubrió? Averigua todo lo que puedas sobre él.

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

▶ Escalas

1) **Mirando por el microscopio.** Poner pag 13, de Introducción a la biología. También el problema 1-19.

▶ Teorema de Tales

2) Sean dos circunferencias de radios 10 y 20 cm respectivamente. Supongamos que se encuentran a 50 cm de distancia. Trazemos las rectas que sean tangentes a ambas circunferencias. Obtenemos dos rectas tangentes exteriores y dos rectas tangentes interiores. Calcula la distancia que existe entre los puntos de tangencia para cada una de las rectas.

3) **Balanzas.** Una balanza está formada por dos brazos, uno de 10 cm y otro de 40 cm. Si el brazo de 40 cm sube 1 cm, ¿cuánto baja el de 10 cm?

▶ Resolución de triángulos rectángulos

4) Resolver el triángulo rectángulo de lados $(5, 12, 13)$.

5) *a*) Dibuja un pentágono regular de 6 cm de lado $ABCDE$.
   b) Dibuja las siguientes líneas: AC, CE, EB, BD, DA.
   c) Calcula el valor de todos los ángulos que aparecen en el dibujo.
   d) Calcula el lado del pentágono pequeño. Para ello fijate en el triángulo ACD. ¿puedes ver algún triángulo semejante a ACD que involucre la incógnita?
   e) Ha lo mismo para un pentágono de lado cualquiera a. ¿Cuánto vale el lado del pentágono pequeño?

6) *a*) Dibuja un hexágono regular de 6 cm de lado $ABCDEF$.
   b) Dibuja las siguientes líneas: AC, CE, EA, BD, DF y FB.
   c) Calcula el lado del hexágono pequeño.
   d) Calcula el lado del hexágono pequeño para un hexágono de lado cualquiera a.

Trigonometría

EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

▶ Razones trigonométricas de ángulos agudos

(1) Completa las siguientes frases:

a) El seno de un ángulo es igual a la razón entre el cateto ——— y ———.

b) El coseno de un ángulo es igual a la razón entre el cateto ——— y ———.

c) La tangente de un ángulo es igual a la razón entre ———y ———.

(2) **Razones trigonométricas de 45° .** Cálcula las razones trigonométricas de 45° . Para ello, traza un cuadrado y su diagonal.

(3) **Ángulo complementario.** Si conoces las razones trigonométricas de un ángulo θ, ¿podrías calcular las razones trigonométricas de su complementario? Sugerencia: Dibuja un triángulo donde aparezca el ángulo θ y su complementario.

(4) Calcula las razones trigonométricas del ángulo α. FALTA: dibujarles el mismo triángulo que en la figura de teoría pero cambiando el orden de A, B, C, para que salgan distintas fórmulas.

(5) **De ampliación.** ¿ Serías capaz de calcular las razones trigonométricas del ángulo de 72° ? Para ello, traza un pentágono y ...

▶ Fórmulas básicas

(6) **De ampliación. Generalizando** Hemos demostrado las fórmulas para ángulos agudos. ¿Serías capaz de demostrarlas para cualquier ángulo?

(7) Calcula las razones trigonométricas de un ángulo sabiendo que:

a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$

c) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{9}$

e) $\operatorname{tg}\theta = 1$

f) $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{16}$

(8) **De ampliación. Otra fórmula básica** Serías capaz de demostrar que $1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

▶ Uso de la calculadora

(9) Completa:

a) 27.54° =

b) 98.12° =

c) 60.12° =

d) 20° 3'44" =

e) 35° 32'12" =

f) 87° 20'56" =

(10) ¿Serías capaz de calcular usando la calculadora cuántas horas, minutos y segundos son 10.76 horas?

(11) Calcula, usando la calculadora:

a) $\operatorname{sen} 10^\circ$

b) $\operatorname{sen} 23^\circ$

c) $\operatorname{sen} 45^\circ$

d) $\cos 30^\circ$

e) $\operatorname{tg} 45^\circ$

f) $\operatorname{tg} 90^\circ$

(12) **Ecuaciones sencillas.** Usando la calculadora resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen} x = 0'1$

b) $\operatorname{sen} x = 2$

c) $\cos x = -0'4$

d) $\cos x = 0'95$

e) $\operatorname{tg} x = 5$

f) $\operatorname{tg} x = -15$

▶ Aplicación: resolución de triángulos rectángulos

(13) Completa la siguiente tabla. Para ello tendrás que resolver los triángulos correspondientes. Puedes usar la calculadora.

a	b	c	B	C
9	12			
1	$0'5$			
	5	12		
	7	24		
4			40	
3				20
	6			35
	1		45	

(14) Diseña una estrategia para resolver un triángulo rectángulo cuando conocemos:

a) Dos catetos.

b) Un cateto y la altura.

c) Un cateto y su proyección.

d) Un cateto y la proyección del otro cateto.

e) La altura y una proyección de un lado.

f) Las proyecciones de los catetos.

(15) Rellena la siguiente tabla:

a	b	c	h	m	n
25	7				
10			4.8		
$\sqrt{3}$				$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
	9	40			
	2		$\sqrt{2}$		
	3				$\frac{9}{13}\sqrt{13}$
	3			$\frac{16}{5}$	
			$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
				$1'92$	$11'08$

siendo a la hipotenusa, b y c los catetos, h la altura, y m y n las proyecciones de los catetos c y b respectivamente. Cada fila correspone a las dimensiones de un triángulo.

Si no sabes qué fórmula aplicar, prueba a sustituir los datos en *todas* las fórmulas y ver si de alguna de ellas puedes despejar algún otro dato.

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

▶ Razones trigonométricas

(1) Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

a) 15 grados.

b) $22'5$ grados.

c) $112'5$ grados.

d) 205 grados.

▶ Descomposición de vectores

(2) **Lanzando una pelota al aire.** Supongamos que lanzamos una pelota al aire con velocidad $v = 20$ m/s y ángulo $\alpha = 45°$. ¿Qué distancia habrá avanzado en 10 segundos?

(3) **El plano inclinado.** Una caja de 10 kg se encuentra en reposo sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal. ¿Cuál es la fuerza de rozamiento del suelo sobre la caja?

Geometría analítica

EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

▶ Sistemas de ejes coordenados. repaso

(1) **Dibujando coordenadas.** Dibuja las siguientes series de puntos:

a) $A(0,0)$, $B(0,10)$, $C(5,10)$, $D(5,8)$, $E(2,8)$, $F(2,6)$, $G(4,6)$, $H(4,4)$, $I(2,4)$, $J(2,2)$, $K(5,2)$, $L(5,0)$, trazando los segmentos AB, BC, ..., HI, IA.

b) $A(0,-3)$, $B(4,1)$, $C(4,3)$, $D(3,4)$, $E(2,4)$, $F(0,2)$, $G(-2,4)$, $H(-3,4)$, $I(-4,3)$, $J(-4,1)$, trazando los segmentos AB, BC,..., GH, IJ.

c) $A(6,2)$, $B(8,0)$, $C(6,-2)$, $D(6,-1)$, $E(0,-1)$, $F(-1,-2)$, $G(-4,-2)$, $H(-3,0)$, $I(-4,2)$, $J(-1,2)$, $K(0,1)$, $L(6,1)$, trazando los segmentos AB, BC, ..., KL.

(2) **Coordenadas de polígonos.** Calcula las coordenadas de los polígonos de la figura (fig. 14).

(3) **De ampliación. Coordenadas de un octógono** ¿Serías capaz de calcular las coordenadas de un octógono? Prueba a colocarlo en distintos lugares, como en el ejercicio anterior.

▶ Distancia entre dos puntos

(4) Calcula el punto medio del segmento AB, siendo $A = (-1,4)$ y $B = (2,-3)$.

(5) Calcula la distancia y el punto medio de los segmentos AB tales que:

a) $A = (0,0)$, $B = (3,4)$

b) $A = (2,3)$, $B = (3,7)$

c) $A = (-1,2)$, $B = (1,2)$

d) $A = (-2,-3)$, $B = (3,-2)$

e) $A = (-1,-2)$, $B = (2,1)$

f) $A = (a_x, a_y)$, $B = (-a_x, -a_y)$

Haz un dibujo representando los puntos.

(6) Calcula el punto medio, usando coordenadas, del segmento AB.

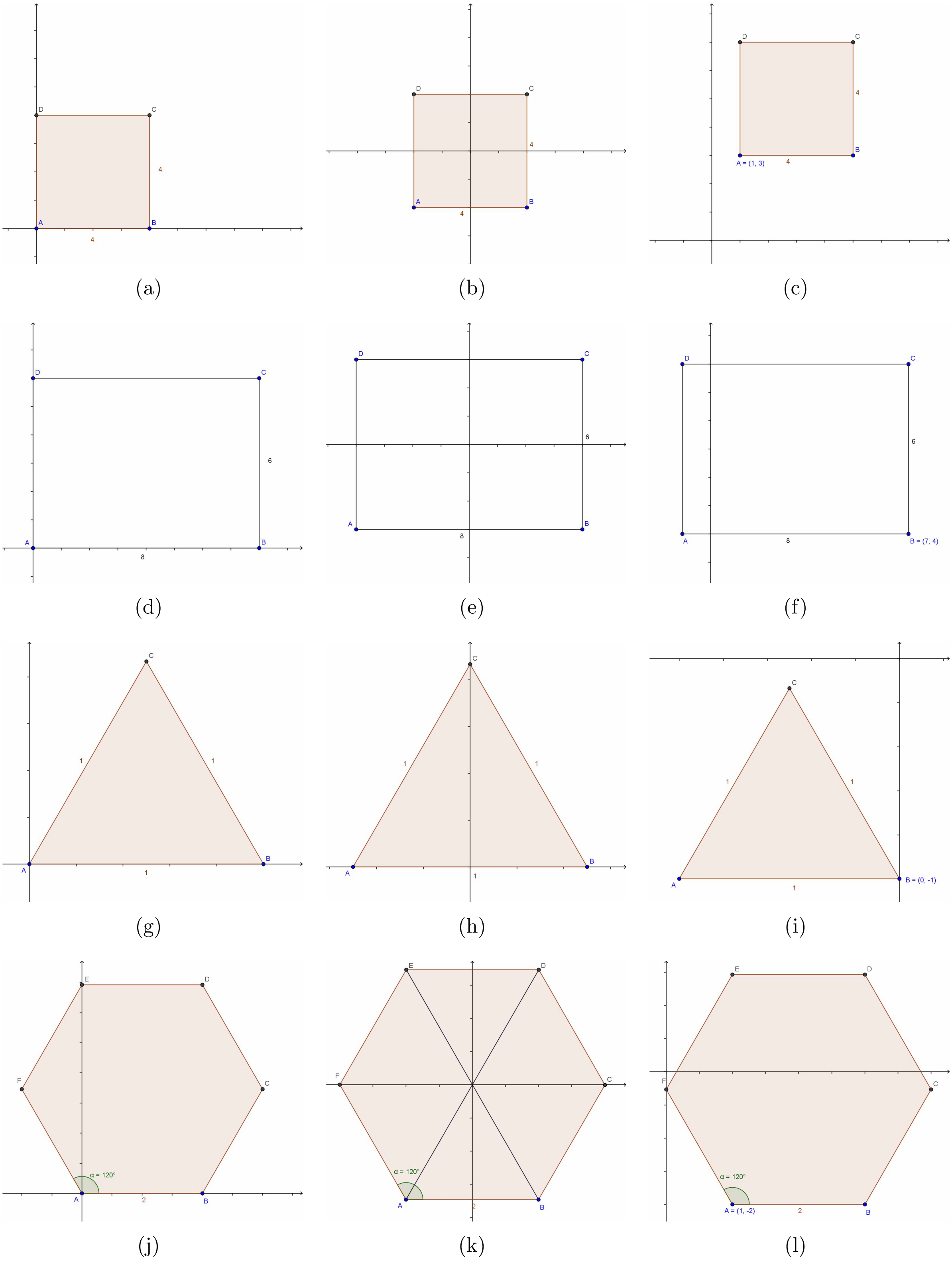
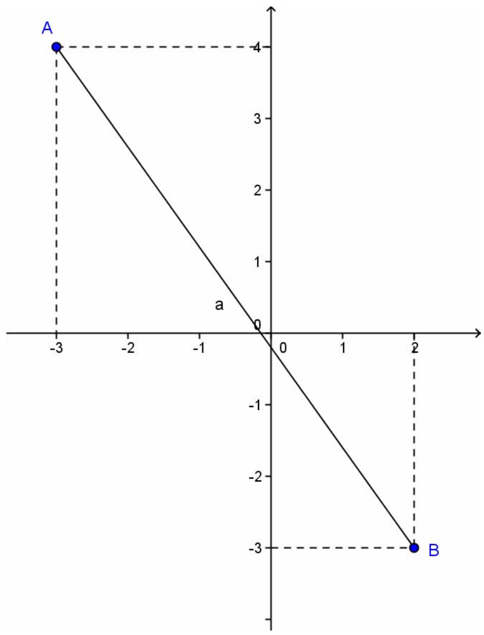


Figura 14: Ejercicio



(7) Demostrar que AB= BA. Sugerencia: escribe la definición en cada caso y mira a ver si son iguales. Si te lías usando letras pon un ejemplo numérico.

(8) Calcula los puntos que dividen al segmento de extremos $A(1,3)$ y $B(5,7)$ en cuatro partes iguales.

(9) Dibuja un rectángulo ABCD de lados 2 x 1, colocando el punto A en el origen de coordenadas y el lado AB en el eje x. Toma el lado AB = 2.

a) Calcula las coordenadas de los puntos A, B, C y D.

b) Calcula la longitud de los segmentos AC y BD.

c) Calcula los puntos medios de AC y de BD.

(10) Dibuja un triángulo equilátero ABC de lado 2, tomando como origen de coordenadas el punto B y C situado en el eje x.

a) Calcula las coordenadas de A, B y C.

b) Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados. Llámalos A', B', C'.

c) Calcula el punto medio del segmento BB'.

d) Calcula la distancia BB'.

(11) Dibuja un hexágono regular $ABCDEF$ de lado 2, tomando como origen de coordenadas el punto A y situando B en el eje x.

a) Calcula las coordenadas de todos los vértices del polígono.

b) Calcula las distancias AC, AD y AE.

c) Calcula el punto medio de AC y AD.

▶ **La recta**

(12) ¿Qué gráfica tienen los polinomios de primer grado?

(13) Identifica la pendiente y la ordenada en el origen en las siguientes rectas:

a) $y = -x$

b) $y = 2x - \dfrac{3}{2}$

c) $y = \dfrac{x}{3}$

d) $y = -\dfrac{2x}{5} - 4$

e) $y = 20$

(14) Representa las siguientes funciones:

a) $y = x$	*d*) $y = 2x - 1$	*g*) $y = -x + 4$
b) $y = -x$	*e*) $y = -3x + 2$	*h*) $y = 2x + 4$
c) $y = 1$	*f*) $y = 2x + 3$	*i*) $y = -3x - 3$

(15) Sin calcular la tabla de valores, usando el significado de la pendiente y de la ordenada en el origen, representa las siguientes rectas:

a) $y = x$

b) $y = -x$

c) $y = 2x + 5$

d) $y = -3x + 4$

e) $y = 4x - 2$

f) $y = 3$

(16) Usando la calculadora, calcula el ángulo de inclinación de cada una de las rectas del ejercicio anterior.

▶ Forma implícita de una recta

(17) Pasa de forma implícita a explícita las siguientes funciones:

a) $x - 2y = -1$

b) $2x - 3y = 2$

(18) Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones:

a) $3x - 2y = 4$

b) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} = \dfrac{1}{3}$

(19) Representa las siguientes funciones:

a) $3x + 6y = 12$ *b*) $-x + y = 2$ *c*) $2y - 3x = 4$ *d*) $3y + 2x = 5$

▶ Cálculo de la ecuación de una recta

(20) **Conocidos m y A.** Calcula la ecuación de la recta cuya pendiente es m y pasa por el punto A, en los siguientes casos:

a) $A=(1,1)$; $m=-2$.   *b*) $A=(3,2)$; $m=\frac{1}{3}$.   *c*) $A=(-1,5)$; $m=0$.

(21) **Conocidos un punto y el ángulo.** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto A y forma un ángulo α grados con el eje de las x, siendo:

a) $A=(2,4)$, $\alpha=45$ *b*) $A=(3,5)$, $\alpha=30$

(22) **Conocidos dos puntos.** Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(1,-2)$ y $B(3,2)$.

b) $A(1,\frac{1}{2})$ y $B(4,-1)$.

c) $A(-1,-\frac{7}{3})$ y $B(\frac{1}{2},-\frac{4}{3})$. $y=\frac{2x-5}{3}$

(23) **De ampliación. Fórmula general** Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_0(x_0,y_0)$ y $P_1(x_1,y_1)$.

▶ Rectas paralelas y perpendiculares

▶ Rectas paralelas

(24) ¿Cuál es la pendiente de una recta que forma un ángulo de 45 grados con el eje de las abcisas? ¿Tienen la misma pendiente independientemente de la ordenada en el origen?

(25) Identifica cuáles de las siguientes rectas son paralelas:

a) $y=2x+1$

b) $y=\frac{x+1}{2}$

c) $y=\frac{1}{2}x-2$

d) $y=\frac{4x-3}{2}$

(26) Calcula las rectas paralelas a:

a) $y=2x+1$ y que pasa por $(0,3)$.

b) $2x+3y=12$ y que pasa por $(1,2)$.

c) $y=-\frac{x}{2}-4$ y que pasa por $(-1,3)$.

d) $3x+2y=6$ y que pasa por $(2,4)$.

▶ Rectas perpendiculares

(27) Calcula las rectas perpendiculares a:

a) $y=x$, que pasa por $(0,0)$

b) $y=-x$, que pasa por $(0,0)$

c) $y=2x+1$, que pasa por $(1,2)$

d) $y = 4x - 2$, que pasa por $(2, 3)$

e) $2x + 5y = 10$, que pasa por $(1, 1)$

f) $3x - 2y = 4$, que pasa por $(-1, -2)$

(28) Averigua el valor que tiene que tener a para que las siguientes rectas sean perpendiculares:

a) $y = 2x + a$, $y = ax - 4$

b) $2x + ay = 4$, $ax + 2y = 10$

Funciones

EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

▶ **Repaso conceptos básicos**

(1) **Ejemplos de funciones.** Pon un par de ejemplos de funciones. Si estudias física, busca en tu libro un par de ejemplos de funciones escribiendo su expresión analítica.

(2) **¿Cómo evolucionan tus notas con el tiempo?.**

a) Construye una tabla con dos columnas. En la primera escribe el curso, y en la segunda las notas finales que obtuviste en matemáticas.

b) Representa la gráfica anterior. Viendo la gráfica ¿tus notas han mejorado o empeorado?

c) Haz lo mismo con las notas de lengua.

(3) **Evolución al cabo del año de la temperatura en Salamanca.** La siguiente tabla muestra las temperaturas mínimas y máximas medias de Salamanca de los años 1971-2000 (datos sacados de la página de AEMET):

Mes	TM	Tm	Mes	TM	Tm
Enero	7.9	-0.7	Julio	29.3	12.8
Febrero	10.8	0.3	Agosto	28.7	12.4
Marzo	7.0	1.4	Septiembre	24.5	9.9
Abril	15.7	3.5	Octubre	18.2	6.1
Mayo	19.7	7.0	Noviembre	12.4	2.2
Junio	25.2	10.5	Diciembre	8.8	0.7

donde la columna TM nos da la temperatura media máxima y Tm la temperatura media mínima, ambas medidas en grados celsius.

En una misma gráfica representa la evolución de las temperaturas en función del mes. ¿Tiene sentido unir los puntos mediante una curva?

(4) **Cálculo de $f(a)$.** Calcula $f(x)$ en $x = a$, simplificando al máximo, en los siguientes casos:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; $x = -2$

b) $f(x) = x - 7$; $x = a + 4$

c) $f(x) = x^2 - 3x$; $x = b - 2$

d) $f(x) = 5(x + 2)^2 - x + 2$; $x = c - 2$

(5) **Volumen de la esfera.** El volumen de la esfera es $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, siendo V el volumen y r el radio.

a) ¿El volumen depende del radio?

b) ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?

c) Representa la función $V = V(r)$.

▶ **Características de una función**

(6) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{2x}{x-3}$

b) $y = \dfrac{x+4}{x^2-5x+6}$

c) $y = \sqrt{x+2}$

d) $y = \sqrt{10-5x}$

(7) **Entendiendo la continuidad.**

a) Supón que cerramos una olla a presión vacía, y la ponemos al fuego. La temperatura del aire encerrado ¿aumentará de forma continua o discontinua?

b) La altura de una persona varía con el tiempo. ¿Lo hará de forma continua o discontinua?

c) El conductor de un coche arranca. Pisa el acelerador hasta alcanzar una velocidad de 100 km/h. La velocidad ¿varía de forma continua o discontinua?

d) Tu paga es de esperar que varie con el tiempo. ¿Lo hace de forma continua o discontinua?

(8) **Temperatura en Sevilla.** La gráfica (fig. 15) muestra la evolución de la temperatura en Sevilla un 28 de febrero. Redacta un informe donde expliques cómo evoluciona la temperatura a lo largo del día.

Figura 15: Temperatura en Salamanca

(9) **Altura de una persona.** Representa cómo evoluciona la altura de una persona desde que nace hasta que muere. ¿Tiene igual forma la gráfica de un hombre y la de una mujer o se diferencian en algo? Usa tu sentido común.

(10) **Funciones periódicas.** Indica si los siguientes procesos son periódicos o no:

a) El movimiento de la tierra en torno al sol.

b) La evolución de la temperatura a lo largo del tiempo.

c) La altura de una persona a lo largo del tiempo.

d) Estiramos un muelle y lo soltamos, fijándonos en cómo evoluciona su longitud con el tiempo.

▶ La recta

(11) **Cambios de unidades.**

a) Indica la función que nos permite pasar de euros a dólares.

b) 23 metros ¿cuántos kilómetros son?

c) La tierra se mueve a 30 km/s en torno al sol. ¿Cuántos kilómetros recorre en una hora?

d) Si vas 120 km/h ¿cuántos metros recorres en un segundo?

(12) **La circunferencia.**

a) El perímetro de una circunferencia ¿es directamente proporcional a su radio?

b) Representa la función $P = P(r)$ siendo P el perímetro y r el radio.

c) ¿Se trata de una función lineal?

d) Calcula el perímetro de una circunferencia de radio 4 sabiendo que el perímetro de una circunferencia de radio 1 es 2π. Para ello usa la función $P = P(r)$.¿Podrías usar una regla de tres para calcularlo?

(13) **Gases.** La ley de Boyle-Mariotte nos dice que a presión constante el volumen de un gas es directamente proporcional a su temperatura.

a) Escribe la función $V = V(T)$, siendo V el volumen y T la temperatura.

b) Representa esta función, indicando las unidades de V y de T.

c) ¿Es una función lineal?

d) Supongamos que tenemos un gas que ocupa $22'4$ litros a 273 grados kelvin. ¿Qué volumen ocupará a 20º C?

e) ¿Sabrías cuantas moléculas tiene ese gas? Escribe el número con palabras, sin usar números.

(14) **¿Qué es más económico: bañarse o ducharse?.**

Existe el dicho de que es más económico ducharse que bañarse. Pero ¿realmente esto es así? Veamos qué consumo de agua tiene bañarse y qué consumo de agua tiene ducharse.

a) Supongamos que nos duchamos. Y supongamos que por la ducha sale un litro por segundo. ¿Cuánta agua habremos consumido después de 1 segundo? ¿Y después de 2? ¿Y de 3? ¿Y de t segundos? Representa el consumo de agua en función del tiempo.

b) Supongamos que nos bañamos en una bañera normal que podemos llenar con 150 litros (¿sabrías medir el volumen de tu bañera?). Para bañarnos, llenamos la bañera al completo. ¿Cuánta agua habremos consumido después de 1 segundo? ¿Y después de 2? ¿Y de 3? ¿y de t segundos? Representa el consumo de agua en función del tiempo. Usa los mismos ejes que usaste para representar el agua consumida al ducharnos, pero haz la gráfica en otro color, para que se pueda distinguir fácilmente qué gráfica corresponde a ducharse y qué gráfica corresponde a bañarse.

c) Viendo las dos gráficas ¿podrías decir si es más económico ducharse que bañarse?

d) **De ampliación. Y** si la velocidad a la que sale el agua no fuese 1 litro por segundo, sino v, ¿serías capaz de responder a las preguntas anteriores?

(15) **Movimiento uniforme.** Juan sale en coche desde Salamanca con dirección a Madrid, viajando a una velocidad constante de 30 m/s. El espacio recorrido por Juan s transcurridos t segundos viene dado por la fórmula $s = 30t$.

a) El espacio recorrido ¿es directamente proporcional al tiempo?

b) Representa esta función.

c) Calcula el tiempo que tarda Juan en recorrer 200 kilómetros.

(16) **La segunda ley de Newton.** La segunda ley de Newton dice que la fuerza F que se ejerce sobre una partícula de masa m es directamente proporcional a su aceleración a. Escribe la función que relaciona la fuerza con la aceleración.

(17) **La energía potencial.** La energía potencial de una masa m sobre la tierra viene dada por la función $U = mgh$. Representa $U = U(h)$, donde h indica la altura a la que se encuentra la masa m sobre la superficie de la tierra. Considera que la masa es 1 kg. ($g = 9'80 m/s^2$)

▶ La parábola

(18) **Representando parábolas.** Representa las siguientes parábolas:

a) $f(x) = x^2 + 3x - 4$ *c*) $f(x) = 2x^2 + x + 1$ *e*) $y = -x^2 + 4x - 4$

b) $y = x^2$ *d*) $y = -2x^2 - x + 1$ *f*) $y = -2x^2 - 2$

(19) **Trasladando parábolas.** Representa:

a) $y = x^2$ *b*) $y = (x - 2)^2$ *c*) $y = (x + 2)^2$

¿Serías capaz de representar $y = (x - a)^2$?

(20) **El área de un círculo.** El área de un círculo es $A = \pi r^2$.

a) Representa esta función.

b) ¿Se trata de una función lineal?

c) Calcula el área de un círculo de radio 4 sabiendo que el área de un círculo de radio 1 es π. ¿Puedes resolver este problema usando una regla de 3?

(21) **Dejando caer una piedra.** Cuando soltamos una piedra, esta recorre 5 metros en un segundo.

a) ¿Cuánto recorrerá en 2 segundos? ¿y en 3?

b) La función que relaciona la distancia recorrida por la piedra en función del tiempo es $h = 5t^2$.

1) Representa esta función.
2) ¿Se trata de una función lineal?
3) ¿Se puede usar una regla de tres para responder a la primera pregunta?

(22) **La energía cinética.** La energía cinética de una partícula viene dada por la expresión $T = \frac{1}{2}mv^2$. Representa $T = T(v)$.

(23) **Problemas.** ¿Cuánto deben de valer a y b para que el vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + 1$ sea el punto $(1, 1)$.

(24) **De ampliación. E** n física habrás estudiado que la posición de una piedra que se lanza al aire es:

$$x = x_0 + v_{ox}t$$
$$y = y_0 + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

siempre y cuando supongamos que no hay rozamiento.

a) Calcula la función $y = y(x)$.

b) Represéntala. ¿Cómo se llama esta función?

▶ La hipérbola

(25) **Frases hechas.** Comenta la siguiente frase: "La belleza es inversamente proporcional a la inteligencia". ¿Qué quiere decir? ¿Estas de acuerdo?

(26) Representa las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{2}{x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{4}{x+3}$

c) $y = \dfrac{1}{2x-4}$

(27) **La ley de Boyle-Mariotte.** En física, al estudiar los gases, se postula la siguiente ley: $PV = nRT$, donde P es la presión del gas, V su volumen y T la temperatura. En todo lo que sigue vamos a suponer que mantenemos la temperatura constante (n y R son dos constantes).

a) Representa la función $V = V(P)$.

b) Supón que metemos en un cilindro con un pistón un gas de este tipo, y manteniendo la temperatura constante, vamos apretando con el pistón, modificando el volumen. Usando la gráfica anterior explica qué ocurrirá.

(28) **La energía potencial.** La energía potencial U de un punto situado a una distancia r de una masa m viene dada por la siguiente expresión: $U = -\frac{Gm}{r}$, donde G es una constante. Fijada la masa m, la energía potencial es función de r. Representa $U = U(r)$

(29) **La ley de la gravitación universal.** La ley de la gravitación universal es $F = G\frac{mM}{r^2}$. Representa la función $F = F(r)$.

▶ La exponencial

(30) **Leyendo el periódico.** En la radio, en la televisión o en el periódico es fácil encontrar frases del tipo: "tiene un crecimiento exponencial" o "tiene un crecimiento lineal". Aunque la primera frase se refiere a que la función de la que están hablando es una función exponencial, y la segunda una función lineal, en la práctica una frase se refiere a que la función crece muy rápidamente o muy lentamente. ¿Cuál de las dos frases indica que el crecimiento es muy lento? ¿y cuál de las dos que es muy rápido?

(31) **Contagios de enfermedades.** Pedro ha ido de viaje al extranjero y ha cogido la llamada gripe "P". Esta gripe es muy contagiosa. Para poder estudiar cómo se propaga supongamos que cada día cada persona con gripe P contagia a una persona sana. Esto es, cada día va a haber el doble de contagiados.

a) El número de contagiados C ¿depende del número de días transcurridos n?

b) Calcula la función $C = C(n)$. ¿Conoces está función?

c) Representa la función $C = C(n)$ (de forma aproximada).

d) El número de españoles es de 46 millones aproximadamente. Suponiendo que el número de españoles permanece constante, representa el número de españoles en función del número de días transcurridos. Para ello, usa los mismos ejes que usaste en el apartado anterior.

e) Sobre la gráfica anterior, ¿sabrías identificar cuándo todos los españoles estarán contagiados?

f) Usando esa misma gráfica ¿podrías representar como varía el número de personas sanas con el tiempo?

▶ El logaritmo

(32) Representa las funciones $f(x) = \log x$ y $g(x) = \log -x$.

▶ Funciones definidas con 2 trozos

(33) Representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 0 \\ 2x+1 & x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 10^x & x \leq 1 \\ x^2-1 & x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \log(-x) & -5 < x < 0 \\ -\dfrac{x+5}{3} & 0 \leq x < 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -2x^2+12x-16 & -2 \leq x < 1 \\ -\dfrac{3}{x+5} & 1 \leq x < 10 \end{cases}$

(34) **Correos.**

En la página de correos www.correos.es puedes encontrar lo que cuesta enviar un paquete por la península. En el año 2010 los precios eran los siguientes:

Peso	Precio
hasta 1 kg	6 €
hasta 2 kg	6'6 €
hasta 5 kg	7'6 €
hasta 10 kg	8'7 €
hasta 15 kg	11'45 €
hasta 20 kg	13,8 €

a) ¿Cuál es la variable independiente? ¿y la dependiente?

b) Escribe la expresión analítica de la función.

c) Represéntala.

d) **De ampliación. B** usca en internet la tarifa vigente para el presente año, y representa la función en la misma gráfica. Compara las dos gráficas. Enviar un paquete de 7 kg ¿cuesta mucho más ahora que en el 2010?

▶ Análisis de enunciados y gráficas

(35) ¿Cómo evoluciona la posición de la tierra respecto del sol con el tiempo? Calcula su expresión analítica y dibuja su gráfica.

(Sugerencia: supón que la tierra gira a velocidad constante en una circunferencia alrededor del sol y que tarda 365 días en hacerlo).

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

▶ Geometría

(1) **El cilindro.** El volumen de un cilindro es de radio r y altura h viene dado por la siguiente expresión: $V = \pi r^2 h$. El volumen V depende de dos variables: de h y de r.

a) ¿Qué tipo de función es $V = V(h)$? ¿y $V = V(r)$?

b) Representa $V = V(h)$

c) Represeneta $V = V(r)$

(2) **La esfera.** La superficie de una esfera es $S = 4\pi r^2$.

a) ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?

b) ¿Qué tipo de relación hay entre estas dos variables?

c) Representa la función.

▶ Física

(3) **La ley de la gravitación universal.** Como sabes la ley de la gravitación universal es

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

¿Serías capaz de leer está formula? ¿Cómo depende F de las masas? ¿Directa o inversamente proporcional? ¿y de r?

(4) **Fuerza normal a la velocidad.** Supongamos que sobre un objeto que se mueve en una circunferencia de radio r con velocidad v se ejerce una fuerza F. Esta fuerza la podemos descomponer en dos: una componente paralela a la velocidad y otra perpendicular. La componente perpendicular de la fuerza F_p se relaciona con la velocidad a través de la siguiente fórmula

$$F_p = m\frac{v^2}{r}$$

donde m es la masa del objeto, v su velocidad y r el radio de la circunferencia que describe.

a) ¿Serías capaz de leer está fórmula?

b) Representa la fuerza F_p en función de la distancia.

(5) **Radio de un núcleo.** El radio R de un núcleo de un átomo viene dado por la siguiente expresión

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$$

donde R_0 es una constante igual aproximadamente a $1'5$ fm, y A es el número atómico del átomo. Representa la función $R = R(A)$.

Estadística descriptiva

EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

▶ Estadística descriptiva

(1) Elabora una encuesta para tus compañeros. En ella, plantea preguntas que puedan tener información de interés.

(2) Cuando las elecciones ¿se realiza un censo o una muestra?

(3) La siguiente tabla muestra datos de 4 alumnos:

Nombre	Edad	Sexo	Altura	Peso	Color de pelo	Nº de hermanos
Ana	16	M	1.65	55.8	Moreno	3
Juan	18	H	1.94	94.5	Moreno	4
Sofía	17	M	1.55	48.2	Rubio	2
Roberto	16	H	1.75	65.4	Moreno	0

Identifica: la población, las variables que nos interesan de cada individuo así como su tipo (cualitativa, discreta o continua).

(4) Cuando vas al médico, éste suele tomar una serie de datos. Indica de qué tipo son cada una de las siguientes variables:

a) Sexo.

b) Edad.

c) Presión sanguínea.

d) Fumador (sí, no)

e) Bebedor de alcohol (habitual, esporádico, abstemio).

▶ Variables cualitativas

(5) **¿De qué color tienen el pelo los españoles?.**

Se pretende investigar el color de pelo de un adolescente. Para ello, se toma nota de los colores de pelo de los alumnos de una clase de 15 alumnos, obteniendo los siguientes resultados:

C C C M M R M M M R C C C C C

donde C indica castaño, M moreno, y R rubio.

a) Identifica la población, la muestra, la variable, el tipo de variable y construye la tabla de frecuencias absoluta y relativa.

b) Representa gráficamente los datos en un diagrama de barras y en un diagrama de sectores.

(6) **Defunciones en los hospitales españoles.** Según datos del Instituto Nacional de Estadística (INE) las causas de muerte más significativas en los hospitales españoles en 1996 fueron

Trastornos del aparato circulatorio	133.499
Tumores	89.204
Trastornos del aparato respiratorio	34.718
Trastornos del aparato digestivo	18.861
Trastornos del sistema inmunológico (incluye el SIDA)	5.504
Causas externas de traumatismos y envenenamientos (incluye accidentes de tráfico)	16.324

a) Halla el porcentaje de cada una de las causas de defunción y exprésalo con valores enteros. ¿Qué porcentajes se debió a tumores?

b) Dibuja un diagrama de barras de la distribución de las causas de muerte en los hospitales españoles. Identifica bien cada barra.

c) ¿También sería correcto utilizar un diagrama de sectores para representar los datos? Justifica tu respuesta.

(Problema de David S. Moore)

(7) **Origen de la electricidad.** La siguiente tabla muestra el origen de la electricidad en el año 2012, según datos de Iberdrola:

Fuente	%
Nuclear	$20'4\,\%$
Fuel/Gas	$3'2\,\%$
Carbón	$8'4\,\%$
Gas Natural	$21'2\,\%$
Cogeneración	$9'2\,\%$
Cogeneración de alta eficiencia	$2'4\,\%$
Renovables	$34'0\,\%$
Otras	$1'2\,\%$

Representa estos datos mediante un diagrama de barras y uno de sectores.

▶ **Variables discretas**

(8) **Notas de matemáticas.** Para averiguar si los estudiantes de instituto son buenos en matemáticas o no, se toman las notas obtenidas por 20 alumnos de primero de bachillerato en matemáticas, obteniendo los siguientes resultados:

5 6 8 1 2 9 7 6 8 5 3 2 7 3 2 6 9 1 4 7

a) Identifica la población, la muestra, la variable, el tipo de variable y construye la tabla de frecuencias absoluta y relativa.

b) Representa la tabla de frecuencias anterior. Hazlo usando un diagrama de barras y el polígono de frecuencias correspondiente.

c) ¿Cuántos alumnos han aprobado? ¿Cuántos han sacado más de un 7? Construir la tabla de frecuencias acumuladas, tanto absoluta como relativa.

d) Haz un diagrama de barras de la tabla de frecuencias acumuladas.

▶ Media, desviación típica y varianza

(9) **Pulsaciones del corazón.** Mídete el número de pulsaciones que da tu corazón durante 30 segundos. Repite el experimento 10 veces, anotando los resultados. Construye la tabla de frecuencias y calcula la media y la desviación típica.

(10) **Nacimientos de niños españoles.** A continuación se muestra el tanto por cien de varones que nacieron en España entre los años 2001 y 2010:

Año	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
% nacimientos	$51'4$	$51'6$	$51'5$	$51'7$	$51'5$	$51'6$	$51'6$	$51'6$	$51'7$	$51'6$

Calcula la media y la desviación típica.

(11) **Número de hermanos.** A continuación se muestra el número de hermanos que tienen un grupo de 20 chic@s:

0 1 2 1 1 1 0 0 2 1 1 1 1 1 2 0 0 0 1 3

Calcula la media y la desviación típica.

(12) **Notas en una oposición.**

A continuación se muestran tres ejemplos con los resultados obtenidos por tres opositores en un examen de oposición:

a) 5.4, 6.3, 4.9, 5.8, 6.0

b) 5.4, 6.3, 4.9, 5.8, 0.0

c) 5.4, 6.3, 4.9, 5.8, 9.0

a) Calcula la media y la desviación típica de cada uno de ellos.

b) En un examen real de oposición las observaciones atípicas se suelen eliminar. Vuelve a calcular la media y la desviación típica pero eliminando aquellas observaciones atípicas.

▶ Los cinco números resumen

(13) **Analizando las notas obtenidas.** Construye la tabla de frecuencias con las notas que obtuviste en la primera evaluación. Dibuja el diagrama de barras. Calcula los cinco números resumenes y haz el diagrama de caja-bigote.

Haz lo mismo con tus notas de la segunda evaluación. ¿Han mejorado o empeorado?

(14) **Notas alumnos 3º ESO.** A continuación se dan las notas obtenidas por un grupo de alumnos de 3º de la ESO en diferentes materias:

Física y Química	4, 3, 4, 6, 1, 6, 1, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 6, 1, 1, 1, 5
Lengua	8, 6, 8, 7, 7, 8, 6, 6, 6, 3, 7, 9, 3, 8, 4, 3, 6, 5

a) Construye la tabla de frecuencias absolutas para cada asignatura.

b) ¿Tiene sentido calcular la tabla con las frecuencias acumuladas? En caso afirmativo indica por qué y calcúlalas.

c) Dibuja el diagrama de barras correspondiente.

d) Calcula la media y la desviación típica.

e) Comparando las medias, ¿cuáles son las asignaturas con mejores resultados? ¿y las peores?

f) Calcula los 5 números resumen.

g) Representa en un mismo diagrama los 5 diagramas de caja-bigote correspondientes a cada asignatura.

h) A la vista del diagrama anterior, ¿qué conclusiones se obtienen del grupo? En general, el grupo ¿es bueno o malo? ¿Cuál es la asignatura que peor se les da? ¿Y la que mejor?

▶ **Variables continuas**

(15) **Densidad de la tierra.** En 1798 el científico inglés Henry Cavendish midió la densidad de la tierra haciendo un cuidadoso experimiento con una balanza de torsión. He aquí sus 23 medidas de la misma cantidad (la densidad de la tierra respecto a la del agua) realizadas con el mismo instrumento:

5.36	5.62	5.27	5.46	5.53	5.57
5.29	5.29	5.39	5.30	5.10	5.79
5.58	5.44	5.42	5.75	5.34	5.63
5.65	5.34	5.47	5.68	5.85	

a) Construye la tabla de frecuencias correspondiente.

b) Haz un histograma con la distribución de frecuencias.

c) Describe esta distribución. ¿Es aproximádamente simétrica o claramente sesgada? ¿Hay algún valor atípico o algún salto?

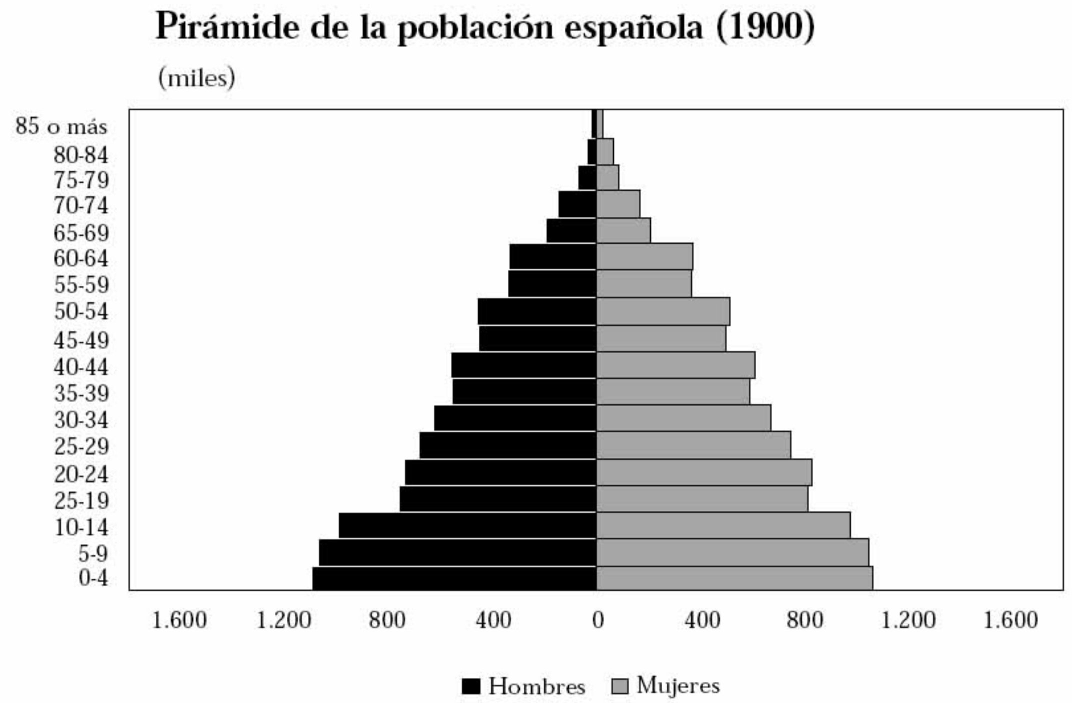
d) Calcula la media y la desviación típica.

(Sacado del libro "Las matemáticas en la vida cotidiana")

(16) **Pirámide de población española.**

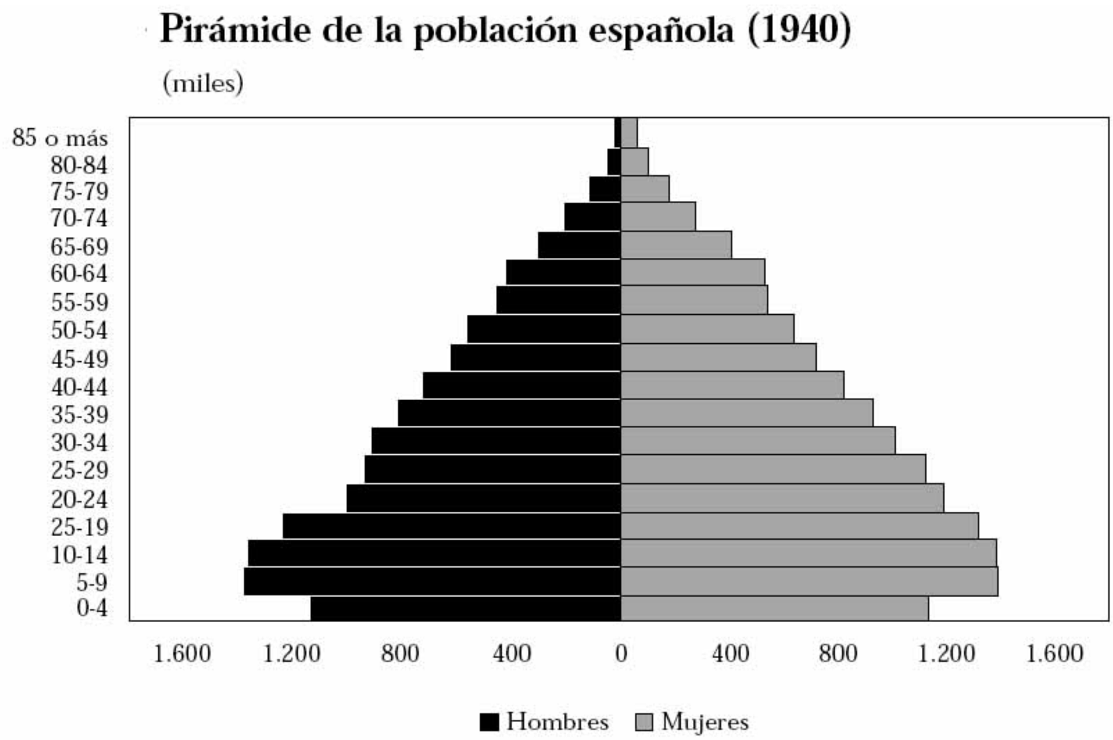
Haz un análisis crítico de las figuras (fig. 16), (fig. 17), (fig. 18), (fig. 19) , que muestran la pirámide de población de España en 4 años diferentes.

Fuente : *Esperanza de población en España a lo largo del siglo XX*, publicado por el INE.



Fuente: Censo de 1900.

Figura 16: Piramide de población española (1900)



Fuente: Censo de 1940.

Figura 17: Piramide de población española (1940)

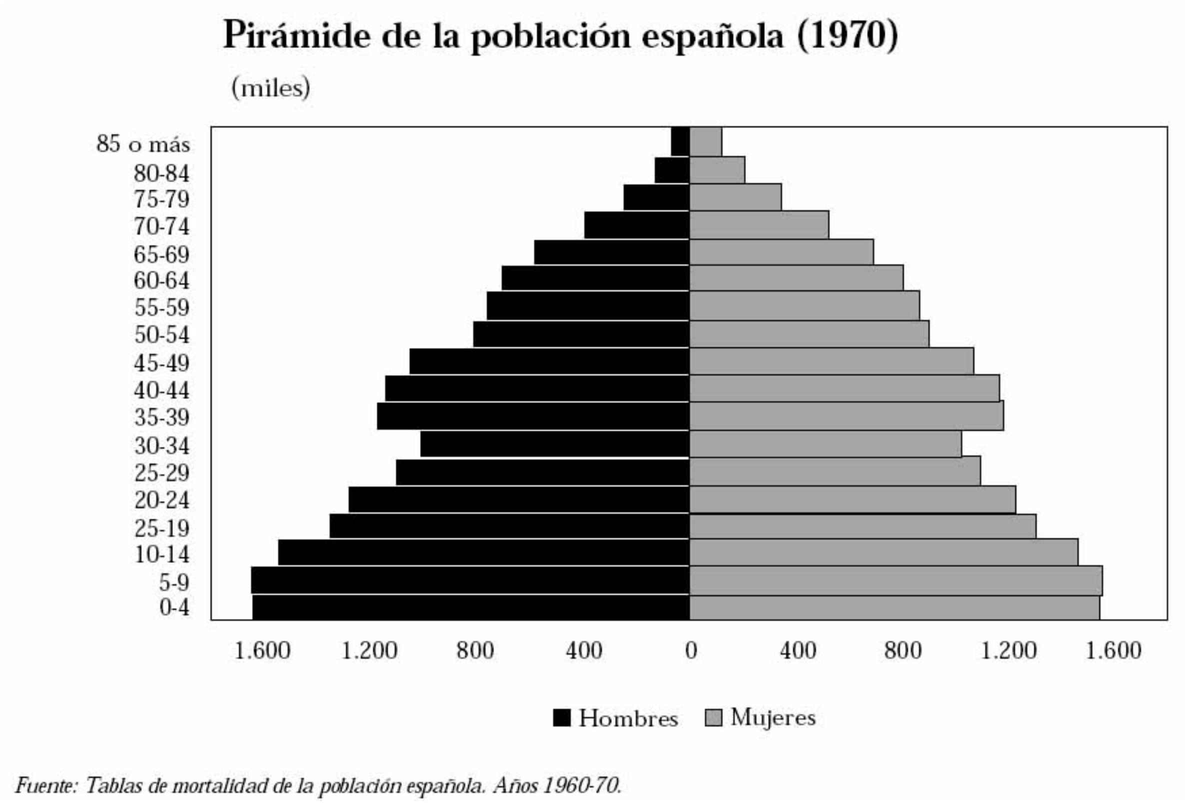


Figura 18: Piramide de población española (1970)

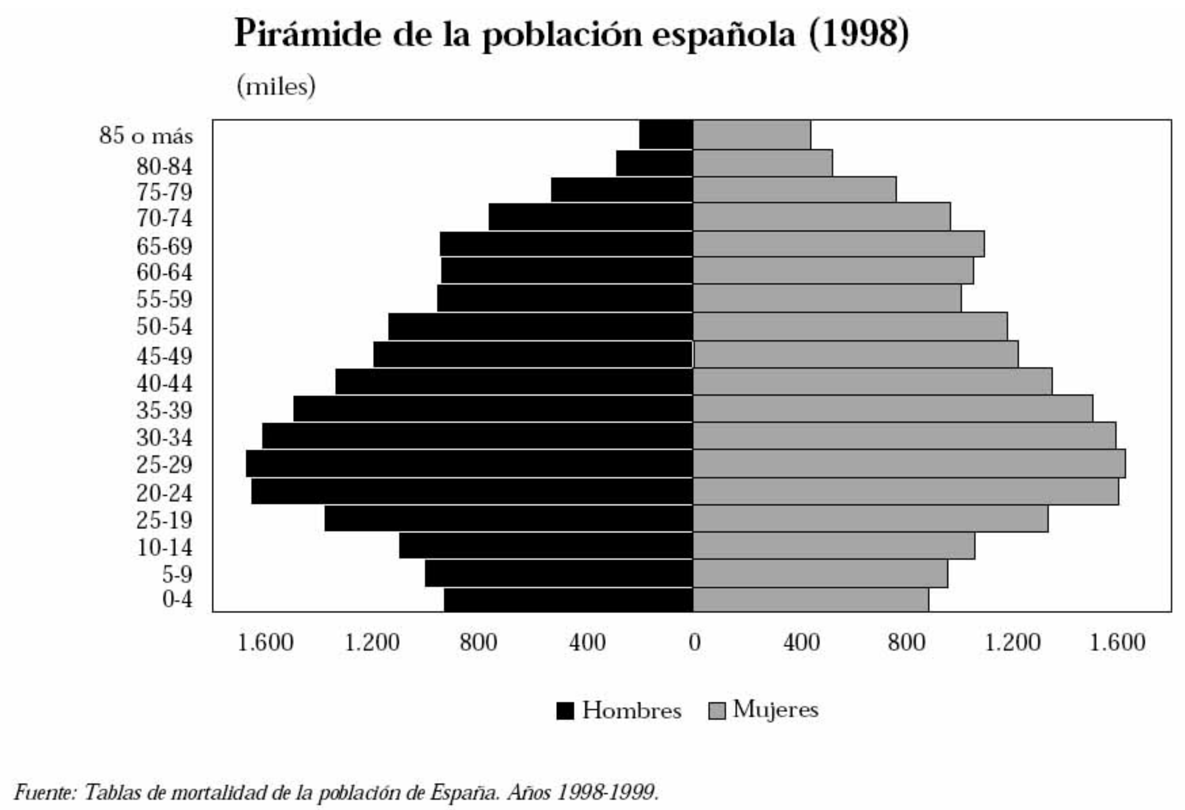


Figura 19: Piramide de población española (1998)

(1) **Estudios de los salmantinos.**

La siguiente tabla muestra el tipo de estudios que tenían los salmantinos en el año 2010:

No sabe leer ni escribir	16.773
Sin la ESO	65.610
Con la ESO exclusivamente	34.234
Con bachillerato, FP II ó títulos equivalentes superiores	50.948

a) Representa estos datos. Haz un diagrama de barras y un diagrama de sectores.

b) ¿Cuál de los dos diagramas es más claro para representar la información?

Fuente: la página del ayuntamiento de Salamanca.

(2) **Armas asesinas.**

El Anuario Estadístico de 1997 de los Estados Unidos, proporciona datos del FBI sobre asesinatos en 1995. En ese año, el $55'8\,\%$ de todos los asesinatos se cometieron con pistolas, el $12'4\,\%$ con otras armas de fuego, el $12'6\,\%$ con armas blancas, el $5'9\,\%$ con alguna parte del cuerpo (en general las manos y los pies) y el $4'5\,\%$ con algún objeto contundente. Representa gráficamente estos datos. ¿Necesitas la categoría de "otros métodos"?

(Problema de David S. Moore)

► **Variables cuantitativas**

(3) **Pirámide de población salmantina.**

La siguiente tabla muestra la distribución de los salmantinos función de la edad que había en el año 2010:

Años	Hombres	Mujeres
00 a 04	2.568	2.461
05 a 09	3.007	2.828
10 a 14	3.037	2.842
15 a 19	3.571	3.429
20 a 24	4.382	4.273
25 a 29	5.336	5.128
30 a 34	5.226	5.335
35 a 39	5.011	5.715
40 a 44	5.193	5.941
45 a 49	5.229	6.077
50 a 54	4.897	5.634
55 a 59	4.370	5.172
60 a 64	4.121	5.055
65 a 69	3.405	4.195
70 a 74	3.521	4.672
75 a 79	3.052	4.561
80 a 84	2.235	3.644
85 a 89	1.180	2.432
90 a 94	445	1.177
95 a ...	160	435

Fuente: la página del ayuntamiento de Salamanca.

(4) **Desde Salamanca a Barco de Ávila.**

Un profesor de matemáticas viaja todos los días desde Salamanca a Barco de Ávila, separados unos 100 km, anotando el tiempo que tarda en realizar 38 viajes.

1h 10'	1h 10'	1h 9'	1h 8'	1h 9'	1h 11'	1h 8'	1h 6'	1h 7'	1h 10'
1h 10'	1h 7'	1h 11'	1h 7'	58'	1h 7'	1h 11'	1h 12'	1h 9'	1h 8'
1h 8'	1h 3'	1h 4'	1h 5'	1h 8'	1h 2'	1h 4'	1h 3'	1h 5'	1h 8'
1h 7'	1h 7'	1h 3'	1h 7'	1h 8'	1h 4'	1h 6'	1h 7'		

a) Construye la tabla de frecuencias absolutas, relativas, y acumuladas.

b) Dibuja el histograma correspondiente.

c) ¿Qué tipo de forma tiene la distribución? ¿Existe alguna observación atípica?

d) Calcula la media y la varianza.

e) Calcula los cinco números resumen.

(5) **Alfredo Di Stefano.**

Antes de ir a España y fichar por el Real Madrid en la temporada 1952/1953 y posteriormente por el Real Club Deportivo Español de Barcelona la temporada 1964/65, Alfredo Di Stefano jugó en varios equipos suramericanos: River Plate de Buenos Aires, Huracán de Buenos Aires y Millonarios de Bogotá.

Mientras jugó en Suramérica el número de goles por temporada en la liga fue

Temporada	**Goles**	**Temporada**	**Goles**
1944/45	0	1948/49	24
1945/46	11	1949/50	23
1946/47	27	1950/51	32
1947/48	14	1951/52	19

Mientras jugó en España el número de goles por temporada en la liga fue

Temporada	**Goles**	**Temporada**	**Goles**
1953/54	28	1960/61	21
1954/55	25	1961/62	10
1955/56	24	1962/63	12
1956/57	31	1963/64	11
1957/58	19	1964/65	7
1958/59	23	1965/66	4
1959/60	12		

Calcula los cinco números resumen correspondientes al tiempo que Di Stefano jugó en Suramérica y al tiempo que jugó en España. Sitúa los dos diagramas de caja en un mismo gráfico y compara las dos distribuciones.

(Problema de David S. Moore)

(6) **Viviendas construidas en Salamanca.**

A continuación se muestra el número de viviendas construidas en Salamanca desde 1991 hasta el 2010:

Año	Núm. viviendas	Año	Núm. viviendas
1991	2.353	2001	4.094
1992	1.993	2002	3.629
1993	2.428	2003	3.294
1994	2.471	2004	3.906
1995	1.996	2005	4.350
1996	2.764	2006	4.368
1997	3.735	2007	4.342
1998	2.466	2008	3.841
1999	2.628	2009	2.927
2000	2.628	2010	1.443

a) Para ver cómo evoluciona una variable en el tiempo se suele construir un gráfico temporal. Este gráfico es la representación de la tabla anterior como función. Constrúyelo. Para ello, en el eje de las x pon el tiempo y en el eje de las y por el número de viviendas construidas y marca los puntos dados en la tabla. Puedes construir rectángulos alrededor de ellos, como en el diagrama de barras, o unirlos para formar una polígonal. A tu elección.

b) ¿Qué media de viviendas se construyeron en la decada de los 90 en Salamanca? ¿Y en la del 2000 al 2010? *(Sugerencia: como hay pocos datos y muy variados no es necesario construir la tabla de frecuencias, aunque si quieres puedes construirla)* Si hay alguna observación atípica, calcula la media con ella y sin ella.

c) ¿Y cuáles son las desviaciones típicas correspondientes a cada década?

d) ¿Cuál es la media de viviendas construidas en Salamanca desde 1991 hasta el año 2010? ¿Y su desviación típica?

e) Compara todas las medias obtenidas. A la vista del gráfico temporal, ¿es de esperar este resultado?

f) Calcula los cinco números resumen para la decada de los 90 y la decada del 2000 al 2010. Represéntalos en un mismo gráfico en un diagrama caja-bigote. ¿Qué conclusiones obtienes?

(Fuente: La gaceta de Salamanca, 27 de marzo del 2011)

(7) **Notas alumnos 4º ESO (I).**

A continuación se dan las notas obtenidas por un grupo de alumnos de 4º de la ESO en diferentes materias:

Biología	6, 5, 7, 8, 4, 7, 3, 6, 7, 3, 6, 9, 2, 6, 3, 4, 2, 5
C. Sociales	9, 5, 9, 5, 4, 5, 3, 5, 5, 2, 5, 7, 3, 7, 4, 1, 3, 6
Física y Química	4, 3, 4, 6, 1, 6, 1, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 6, 1, 1, 1, 5
Lengua	8, 6, 8, 7, 7, 8, 6, 6, 6, 3, 7, 9, 3, 8, 4, 3, 6, 5
Matemáticas	8, 5, 7, 7, 4, 8, 5, 6, 4, 2, 6, 7, 2, 7, 3, 1, 2, 5

a) Construye la tabla de frecuencias absolutas para cada asignatura.

b) ¿Tiene sentido calcular la tabla con las frecuencias acumuladas? En caso afirmativo indica por qué y calcúlalas.

c) Dibuja el diagrama de barras correspondiente.

d) A la vista de los diagramas de barras anteriores indica

1) Qué asignaturas son las que mejor se le da al grupo y cuáles las que peor.
2) La forma de cada una de las distribuciones.
3) En qué distribuciones de notas la media va a ser una buena medida de tendencia central y en cuáles no.

e) Calcula la media y la desviación típica.

f) Comparando las medias, ¿cuáles son las asignaturas con mejores resultados? ¿y las peores?

g) Calcula los 5 números resumen.

h) Representa en un mismo diagrama los 5 diagramas de caja-bigote correspondientes a cada asignatura.

i) A la vista del diagrama anterior, ¿qué conclusiones se obtienen del grupo? En general, el grupo ¿es bueno o malo? ¿Cuál es la asignatura que peor se les da? ¿Y la que mejor?

(8) **Notas alumnos 4º ESO (II).**

En el problema anterior nos hemos centrado en analizar si el grupo es bueno o no. Ahora estudiemos a los alumnos en particular, viendo cómo son. La siguiente tabla muestra las notas obtenidas por varios de los alumnos:

Jorge	4, 3, 4, 6, 3, 1, 8, 5, 3, 4, 3
Ana	6, 10, 7, 8, 7, 6, 9, 8, 8, 7, 7
Tamara	8, 7, 9, 8, 6, 4, 8, 7, 8, 7, 7
Pedro	6, 2, 3, 7, 4, 1, 5, 6, 3, 2, 7
Erika	6, 9, 7, 8, 9, 7, 7, 8, 9, 7, 6

a) Construye la tabla de frecuencias de cada uno de los alumnos.

b) Dibuja el diagrama de barras correspondiente.

c) A la vista de los diagramas ¿cuál es el mejor estudiante? ¿y el peor?

d) Calcula la media y la desviación típica.

e) Comparando las medias, ¿cuáles son los mejores alumnos? ¿y los peores?

f) Calcula los cinco números resumen.

g) Dibuja, en un mismo diagrama, los diagramas caja-bigote correspondiente a las notas de cada alumno.

h) A la vista del diagrama anterior ¿qué conclusiones obtienes? ¿cuáles son los mejores alumnos? ¿y los peores?

(9) **De ampliación. .** Cocinando

En los libros de cocina es bastante habitual encontrar frases del tipo "échese una cuchara de azúcar" ó "échese una cucharilla de sal". Esta es una alternativa a decir "échese 18 gramos de azúcar" ó "7 gramos de sal". Ahora bien, al echar una cuchara de azúcar ¿cuántos gramos de azúcar estamos echando?

Según algunos cocineros una cuchara de azúcar equivale a 18 gramos, mientras que una cucharilla de azúcar equivale a 5 gramos. ¿Cómo podemos comprobar que esto realmente es así?

Para ello realiza el siguiente experimento un mínimo de 20 veces: coges una cuchara y la llenas al ras de azúcar. Vuelcas su contenido en un peso y lo pesas, anotando el resultado. Con ello obtendrás 20 medidas. Usando estas medidas:

a) Construye la tabla de frecuencias.

b) Represéntalas en un histograma.

c) Describe el histograma.

d) A la vista del histograma ¿crees que es correcto decir que una cuchara de azúcar contiene 18 gramos?

(10) **Médicos suizos (I).**

Un estudio en Suiza examinó el número de cesáreas llevadas a cabo por 15 médicos (hombres) durante un año. Sus resultados fueron

27, 50, 33, 25, 86, 25, 85, 31, 37, 44, 20, 36, 59, 34, 28

a) Dibuja un histograma con estos datos. Fíjate en que existen dos observaciones atípicas.

b) Halla la media y la mediana del número de cesáreas. ¿Cómo se puede explicar, a partir de las observaciones atípicas, la diferencia entre ambas?

c) Halla la media y la mediana del número de cesáreas sin las dos observaciones atípicas. Los resultados en (b) y (c), ¿ilustran la robustez de la mediana y la falta de robustez de la media?

d) Calcula los cinco números resumen y represéntalos en un diagrama de caja.

De David S. Moore.

(11) **Médicos suizos (II).**

El mismo estudio del ejemplo proporcionó también el número de cesáreas llevadas a cabo por 10 doctoras:

5, 7, 10, 14, 18, 19, 25, 29, 31, 33

a) Dibuja el histograma correspondiente.

b) Halla los cinco números resumen, representándolos en un diagrama de caja.

c) Compara las cesáreas realizadas por los hombres con las realizadas por las mujeres. ¿Cuáles son tus conclusiones?

De David S. Moore.

(12) **Doctoras.**

Los datos sobre el porcentaje de mujeres que se doctoraron en distintas disciplinas en EE UU durante 1994 (según el 1997 *Statistical Abstract of the United States*) son los siguientes:

Informática	$15'4\,\%$	Biología	$40'7\,\%$
Pedagogía	$60'8\,\%$	Física	$21'7\,\%$
Ingeniería	$11'1\,\%$	Psicología	$62'2\,\%$

a) Presenta estos datos en forma de diagrama de barras.

b) ¿Sería también correcto utilizar un diagrama de sectores para mostrar estos datos? Justifica tu respuesta.

(Problema de David S. Moore)

(13) **Defunciones en los hospitales españoles.**

Según datos del Instituto Nacional de Estadística (INE) las causas de muerte más significativas en los hospitales españoles en 1996 fueron

Trastornos del aparato circulatorio	133.499
Tumores	89.204
Trastornos del aparato respiratorio	34.718
Trastornos del aparato digestivo	18.861
Trastornos del sistema inmunológico (incluye el SIDA)	5.504
Causas externas de traumatismos y envenenamientos (incluye accidentes de tráfico)	16.324

a) Halla el porcentaje de cada una de las causas de defunción y exprésalo con valores enteros. ¿Qué porcentajes se debió a tumores?

b) Dibuja un diagrama de barras de la distribución de las causas de muerte en los hospitales españoles. Identifica bien cada barra.

c) ¿También sería correcto utilizar un diagrama de sectores para representar los datos? Justifica tu respuesta.

(Problema de David S. Moore)

COMBINATORIA

EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

▶ Números combinatorios

(1) Usando la definición, indica cuánto valen los siguientes factoriales:

a) $2!$ *b*) $3!$ *c*) $4!$ *d*) $10!$ *e*) $20!$

(2) Calcula, usando la calculadora, los siguientes factoriales:

a) $5!$ *b*) $10!$ *c*) $100!$ *d*) $0!$ *e*) $-7!$ *f*) $(-7)!$

(3) ¿Cuánto vale $(-1)!$? ¿Y $(-35)!$?

(4) Calcula, sin usar la calculadora:

a) $\dfrac{4!}{3!}$

b) $\dfrac{6!}{5!}$

c) $\dfrac{m!}{(m-1)!}$

d) $\dfrac{5!}{3!}$

e) $\dfrac{7!}{5!}$

f) $\dfrac{m!}{(m-2)!}$

g) $\dfrac{m!}{(m-n)!}$

(5) Escribe las primeras 7 filas del triángulo de Pascal.

(6) Usando la fórmula $\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ calcula

a) $\binom{0}{0}$ *b*) $\binom{5}{1}$ *c*) $\binom{5}{4}$ *d*) $\binom{7}{2}$ *e*) $\binom{7}{5}$

(7) Usando la calculadora calcula:

a) $\binom{3}{0}$ *b*) $\binom{8}{6}$ *c*) $\binom{10}{8}$ *d*) $\binom{15}{20}$

▶ Binomio de Newton

(8) Desarrolla, usando el binomio de Newton, las siguientes potencias:

a) $(a+b)^2$

b) $(1+x)^3$

c) $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^4$

d) $(a+b)^5$

(9) ¿Cuál es el término de quinto grado del polinomio $(x+2)^7$?

(10) ¿Cuál es el término de grado 25 del polinomio $(2x+1)^{40}$?

▶ Binomio de Newton: $(a-b)^n$

(11) Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(a-b)^2$ *b*) $(2-x)^3$ *c*) $(a-b)^6$

▶ Binomio de Newton: $(1+x^2)^n$

(12) Desarrolla:

a) $\left(-\frac{1}{2}+x^3\right)^2$ *b*) $\left(\frac{x}{2}+y^2\right)^3$ *c*) $(a+a^2)^4$ *d*) $(x-2xy^3)^5$

▶ Regla de multiplicación

(13) En mi calle hay 20 edificios; cada edificio tiene 7 plantas, y hay dos pisos en cada planta. Cada piso tiene 5 habitaciones, y en cada habitación hay 3 armarios. En cada armario hay 6 estantes y en cada estante hay 15 libros. ¿Cuántos libros hay en mi calle?

(14) Una heladería vende 10 tipos de sabores de helados, en 3 formatos diferentes de cono: pequeño, medio y grande. ¿Cuántos helados (sabor-tamaño) diferentes puede vender?

(15) ¿Cuántas matrículas se pueden matricular con 5 números y 2 letras?

▶ Variaciones y combinaciones

(16) Escribe las variaciones sin repetición de 4 elementos tomados de 2 en 2.

(17) Escribe las permutaciones de 4 elementos.

(18) Escribe las combinaciones de 3 elementos tomados de 2 en 2.

(19) En una bolsa hay 4 canicas de diferentes colores: negra, blanca, amarilla y roja. Sacamos 3 de las bolas. Si nos importa el orden,

a) ¿de cuántas formas posibles podemos sacar las canicas?

b) ¿cuáles son los posibles resultados?

(20) Calcula:

a) $V_{5,3}$ *b*) $V_{10,4}$ *c*) $V_{4,3}$ *d*) $V_{3,2}$

(21) Para calcular $V_{m,n}$

a) ¿Cuántos números tienes que multiplicar?

b) ¿Desde qué número empiezas?

(22) En una carrera participan 10 atletas. De cuántas formas distintas pueden adjudicarse las medallas de oro, plata y bronce.

▶ **Permutaciones**

(23) **Condimentando ensaladas.** Algunos cocineros recomiendan, para condimentar una ensalada, echar primero el vinagre, luego la sal y por último el aceite. Sin embargo, algunas amas de casa prefieren echar primero el aceite, luego el vinagre, finalizando con la sal. ¿De qué otras formas podemos condimentar la ensalada? ¿Cuáles son estas formas?

▶ **Variaciones con repetición**

(24) **Tirando 2 monedas al aire.** Si tiramos dos monedas al aire ¿cuáles son los posibles resultados? y ¿cuántos resultados posibles hay?

Y si tiramos una moneda dos veces, ¿cuáles y cuántos son los posibles resultados?

(25) **Tirando 3 monedas al aire.** Si tiramos 3 monedas al aire, ¿cuáles son los posibles resultados? y ¿cuántos resultados posibles hay?

(26) **Tirando n monedas al aire.** Si tiramos n monedas al aire ¿cuántos resultados posibles hay?

(27) **Jugando a los dados.**

a) Supongamos que tiramos dos dados al aire. ¿Cuántos son los posibles resultados? ¿Cuáles son?

b) ¿Y si tiramos 3 dados?

(28) **La quiniela.** ¿Cuántas posibles quinielas podemos hacer?

(29) **Proteínas.** Las proteínas se forman a partir de 20 aminoácidos que se combinan de diferentes formas. A la hora de combinarse importa el orden en que se colocan los aminoácidos. ¿De cuántas formas posibles se pueden combinar los 20 aminoácidos para generar una proteína de 200 aminoácidos de largo? (en la realidad, las células no permiten que se combinen los aminoácidos de cualquier forma).

(30) **ADN.** Las moléculas de ADN se forman a partir de 4 nucleótidos básicos. A la hora de combinarse importa el orden en que se colocan los nucleótidos. ¿De cuántas formas posibles se pueden combinar los 4 nucleótidos para formar una molécula de ADN de 10.000 nucleótidos de largo?

(31) **Matrículas.** Con el sistema actual de matriculación, en el que una matrícula está formada por 4 números y 3 letras, ¿cuántos coches se pueden matricular?

Para responder a esta pregunta responde a los siguientes apartados:

a) Si las matriculas estuvieran formadas exclusivamente por 4 números, ¿cuántos coches se podrían matricular?

b) Y si estuviesen formadas por 3 letras, ¿cuántas habrían?

c) Con los números anteriores tendrías que ser capaz de calcular el número máximo de coches que podemos matricular. *(Sugerencia: matrículas que empiezen por 0001, ¿cuántas hay?)*

▶ Combinaciones sin repetición

(32) ¿De cuántas formas se pueden combinar 10 elementos tomados de 4 en 4?

(33) **Lotería primitiva.** En un boleto de primitiva se marcan 6 números entre el 1 y el 49. ¿De cuántas formas diferentes podemos rellenar un boleto de primitiva?

(34) **Baraja de cartas.** ¿De cuántas formas se pueden elegir 2 cartas de una baraja con 40 cartas? Supón que importa el orden. ¿Cómo cambia el resultado si no importa el orden?

(35) **Oposiciones.** Para sacar la oposición de profesor de matemáticas hay que explicar un tema de entre 72. Para seleccionar el tema el tribunal de oposición saca dos bolas de un bombo lleno con 72 bolas numeradas del 1 al 72. ¿Cuántas combinaciones de bolas distintas se pueden sacar?

(36) **PISA.** Un instituto ha sido seleccionado para realizar el informe PISA. Los examinadores selecciionan a 35 alumnos de un total de 60. ¿De cuántas formas posibles se pueden seleccionar los alumnos?

(37) **Apretón de manos.** A una reunión asisten 50 personas. Si cada persona le da la mano a todas las demás, ¿cuántos apretones de manos hay?

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

(1) Escribe el triángulo de Pascal hasta la fila sexta.

(2) ¿Cuál es el término de séptimo grado en el desarrollo de $(x+2)^{100}$?

(3) Escribe el desarrollo del binomio:

a) $(a+b)^6$ *b*) $(x+1)^5$ *c*) $(x-3)^4$ *d*) $(2-x)^5$

(4) Escribe el desarrollo del binomio:

a) $(a-2a^2)^4$

b) $(2x-3x^2y)^5$

c) $\left(2-\dfrac{x}{2}\right)^3$

d) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$

e) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4$

f) $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^5$

(5) Desarrolla, usando el binomio de Newton, las siguientes potencias:

a) $(a+b)^2$

b) $(a-b)^2$

c) $(1+x)^3$

d) $(2-x)^3$

e) $\left(\frac{x}{2}+y^2\right)^4$

f) $\left(-\frac{1}{2}+x^3\right)^4$

g) $(a+b)^5$

h) $(a-b)^6$

(6) ¿Cuál es el término de quinto grado en el desarrollo de $(x+2)^7$?

(7) Calcula las siguientes potencias:

a) $(a+a^2)^4$ *b*) $(x-2xy^3)^5$

(8) **De ampliación. Bits** Los ordenadores internamente trabajan con bits, “unidades de memoria” donde se almacenan 0 ó 1. Si usamos dos bits podemos escribir: 00, 01, 10 y 11. El 00 puede representar la letra A, el 01 la B, el 10 la C y el 11 la D. De esta forma podríamos representar las letras de la A hasta la D. Si usamos en lugar de 2 bits, 3 bits, podemos representar más letras.

a) ¿Cuál es el mínimo número de bits necesario para poder representar todas las letras mayúsculas?

b) ¿Y para representar las letras mayúsculas y las minúsculas?

Probabilidad

EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

▶ Conjuntos

(1) **Elección en 4º de la ESO.** Cuando se le pregunta a los 20 alumnos de un grupo de 4º de la ESO qué quiere estudiar, responden los siguiente:

a) Un 50 % se plantea hacer el bachillerato de ciencias.

b) Un 70 % se plantea hacer el bachillerato de letras.

c) Un alumno no sabe qué hacer.

Llamando A = {alumnos que quieren hacer el bachillerato de ciencias}, B = {alumnos que quieren hacer el de letras}, C = {toda la clase}, D={alumnos que no saben qué hacer}, responde los siguientes apartados:

a) Los conjuntos A y B ¿son disjuntos?

b) Haz un diagrama de Venn identificando todos los conjuntos que aparecen.

c) En el diagrama de Venn identifica los siguientes conjuntos:

1) Alumnos que tienen una idea de qué estudiar.
2) Alumnos que no saben qué estudiar.
3) Alumnos que se plantean estudiar el bachillerato de ciencias.
4) Alumnos que dudan entre estudiar el bachillerato de ciencias y el de letras.

d) ¿Qué significado tiene el complementario de $A \cup B$? ¿Y $A \cap B$?

e) Anota el número de elementos que tiene cada conjunto.

f) Calcula el número de:

1) Alumnos que tienen claro que quieren estudiar.
2) Alumnos que dudan entre estudiar un bachillerato u otro.
3) Alumnos que solo quieren hacer el bachillerato de ciencias.
4) Alumnos que solo quieren hacer el bachillerato de letras.

(2) Calcula:

a) $A \cup A$ *d*) $A \cup \emptyset$ *g*) $A \cup (A \cup B)$ *j*) $A \cap (A \cap B)$

b) $A \cap A$ *e*) $A \cap S$ *h*) $A \cap (A \cup B)$

c) $A \cap \emptyset$ *f*) $A \cup S$ *i*) $A \cup (A \cap B)$

Siendo S el conjunto universo.

(3) Haz un diagrama de Venn identificando los siguientes sucesos:

a) $\overline{A} \cap \overline{B}$ *c*) $\overline{A \cup B}$ *e*) $\overline{A} \cup B$

b) $\overline{A} \cup \overline{B}$ *d*) $\overline{A} \cap B$

(4) Calcula $\overline{\overline{A}}$ a partir de A.

▶ Probabilidad

(5) **Tirando una moneda.** Tira una moneda 20 veces anotando el número de veces que sale cara y el número de veces que sale cruz. Junta los resultados que has obtenido con los obtenidos por tus compañeros. Calcula el tanto por cien de caras. ¿Será una buena estimación de la probabilidad de que una moneda salga cara al tirarla?

▶ Regla de laplace

(6) Calcula $p(\varnothing)$ y $p(S)$.

(7) **Tirando dos monedas.** Supongamos que tiramos dos monedas al aire.

a) ¿Es un experimento aleatorio? ¿Por qué?

b) Identifica el espacio muestral.

c) Identifica los siguientes sucesos:

1) Sacar dos caras.
2) No sacar ninguna cara.
3) Que las dos monedas sean iguales.
4) Que las dos monedas sean diferentes.

d) Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

e) Supón que apuestas un euro a que salen dos caras. Después de haber jugado 100.000 partidas, ¿cuánto es de esperar que hayas ganado o perdido?

(8) **Tirando un dado.** Supongamos que tiramos un dado al aire.

a) ¿Es un experimento aleatorio? ¿Por qué?

b) Identifica el espacio muestral.

c) Identifica los siguientes sucesos:

1) Sacar un 1.
2) Sacar un número par.
3) Sacar un número mayor que 4.
4) Sacar un número primo.

d) Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

e) Supón que apuestas un euro a que sale un número mayor que 4. Después de haber jugado 100.000 partidas, ¿cuánto es de esperar que hayas ganado o perdido?

(9) **Tirando dos dados.** Supongamos que lanzamos dos dados al aire.

a) ¿Es un experimento aleatorio? ¿Por qué?

b) Identifica el espacio muestral.

c) Identifica los siguientes sucesos:

1) Sacar dos unos.
2) Que los dos dados sean iguales.
3) Que los dos dados sean diferentes.
4) Que la suma de los dos dados sea 5.

d) Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

(10) **Dados pintados.** Supongamos que tenemos un dado con dos caras pintadas de rojo y el resto de negro. Tiramos el dado y nos fijamos en el color de la cara superior:

a) ¿Es un experimento aleatorio? ¿Por qué?

b) Identifica el espacio muestral.

c) Identifica los siguientes sucesos:

1) Sacar una cara roja.
2) Sacar una cara negra.

d) Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

(11) **Baraja española.** Una baraja española está formada por 40 cartas, 4 palos de 10 cartas cada una. Los palos son: oros, bastos, espadas y copas. Supongamos que barajamos las cartas y extraemos una:

a) ¿Es un experimento aleatorio? ¿Por qué?

b) Identifica el espacio muestral.

c) Identifica los siguientes sucesos:

1) Sacar el as de oros.
2) Sacar un as.
3) Sacar una copa.
4) No sacar un basto.
5) Sacar una figura (sota, caballo o rey).

d) Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

Supongamos que has extraído una carta y has obtenido un as. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer otra carta salga de nuevo otro as?

(12) **Sacando una canicas (I).** Supongamos que tenemos una bolsa con 2 canicas negras y 3 blancas, y extraemos una.

a) ¿Es un experimento aleatorio? ¿Por qué?

b) Identifica el espacio muestral.

c) Identifica los siguientes sucesos:

1) Sacar una canica negra.
2) Sacar una canica blanca.

d) Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

(13) **Sacando una canicas (II).** Supongamos que tenemos una bolsa con 2 canicas negras, 3 blancas y 4 rojas, y extraemos una.

a) ¿Es un experimento aleatorio? ¿Por qué?

b) Identifica el espacio muestral.

c) Identifica los siguientes sucesos:

1) Sacar una canica negra.
2) Sacar una canica blanca.
3) Sacar una canica roja.
4) Sacar una canica blanca o roja.
5) Sacar una canica negra o blanca.

d) Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

(14) **Sacando dos canicas con y sin reemplazamiento.** Supongamos que tenemos una bolsa con 2 canicas negras y 4 blancas.

a) Calcula la probabilidad de sacar una canica negra.

b) Supón que después de haber sacado la canica negra, la volvemos a meter, y volvemos a sacar una canica. ¿Cuál es la probabilidad de que esta segunda canica sea negra? ¿y de que sea blanca?

c) Y si en lugar de volverla a meter, sacamos otra canica, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda canica sea negra? ¿y de que sea blanca?

d) Responde a las preguntas anteriores pero suponiendo que la primera canica que sacamos era blanca.

(15) **Fechas.** Supongamos que un año tenga 365 días y que todos los partos son naturales, y no están provocados por los médicos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de nacer el 31 de diciembre?

b) ¿Cuál es la probabilidad de nacer en abril?

c) Si cogemos a 50 millones de personas, ¿cuántas personas habrán nacido el 31 de diciembre? ¿y cuántas habrán nacido en abril?

d) ¿Cuántos españoles habrán nacido en diciembre?

e) Hay algunas personas que creen que los días de luna llena se producen más nacimientos que el resto de los días. Si esto fuese verdad querría decir que la probabilidad de que una mujer tenga un niño un día de luna llena es mayor que el resto de los días, no cumpliéndose lo obtenido por la regla de Laplace. ¿Cómo podrías averiguar la probabilidad real de que un niñó nazca un día determinado del año? Pregunta a tu profesor de física si hay algún motivo por el que la luna llena pudiese influir sobre el parto de una mujer.

▶ Probabilidad de que no suceda algo

(16) **Entendiendo frases.** Indica qué quieren decir las siguientes frases:

a) Tiramos dos monedas. Sea A el suceso "al menos una de ellas es cara". ¿Qué quiere decir "no A"?

b) No es verdad que no sea un hombre.

(17) **Tirando 3 monedas.** Supongamos que tiramos 3 monedas al aire.

a) Escribe el espacio muestral.

b) Identifica los siguientes sucesos:

1) A = Al menos una de las monedas es cara.
2) B = Ninguna de las monedas es cara.

c) ¿Los sucesos anteriores son complementarios?

d) Usando la regla de Laplace, calcula la probabilidad de los dos sucesos anteriores.

e) Se puede calcular $p(A)$ a partir de $p(B)$ sin usar la regla de Laplace. Hazlo.

(18) **Tirando 5 monedas.** Calcula la probabilidad de que al tirar 5 monedas, al menos una de ellas sea cara. La probabilidad de que al tirar 5 monedas todas sean cruces es del 3 %.

(19) **Tirando dos dados.** Tiramos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar un doble 3?

(20) **Probabilidad de tener una niña.** Si la probabilidad de tener un niño es del 51'6 % ¿cuál es la probabilidad de tener una niña?

► Sucesos independientes

(21) **Tirando dos monedas.** Supongamos que tiramos dos monedas al aire.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras?

b) ¿Y dos cruces?

c) ¿Y de obtener en una cara y en otra cruz?

d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una cara?

Para ello usa el hecho de que el resultado de una moneda no depende de lo que se obtenga en la otra moneda.

(22) **Sacando caras.** Responde a las siguientes preguntas usando dos métodos diferentes: la regla de Laplace y la independencia de sucesos.

a) Supongamos que tiramos 3 monedas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar tres caras? ¿Y de sacar al menos una cara?

b) Y si tiramos 4, ¿cuál es la probabilidad de sacar 4 caras? ¿Y de sacar al menos una cara?

c) Y, en general, al tirar n monedas, ¿cuál es la probabilidad de que todas las monedas sean caras? ¿Y de sacar al menos una cara?

► Sucesos dependientes. Probabilidad condicionada

(23) La siguiente tabla nos dice el número de personas que fuman clasificadas por su sexo:

	Hombre	Mujer	
Fuma	18	44	= 62
No fuma	27	11	= 38
	45	55	

Llamemos F = personas que fuman, N = personas que no fuman, H = ser hombre, M = ser mujer Eligamos una persona al azar

a) ¿Cuál es la probabilidad de que fume? (P(F))

b) ¿y de que no fume?

c) ¿y de ser hombre?

d) ¿y de ser mujer?

e) ¿Qué tanto por cien de las mujeres fuman? ¿y no fuman? $(P(F|M), P(N|M))$

f) ¿Qué tanto por cien de los hombres fuman? ¿y no fuman? $(P(F|H), P(N|H))$

g) ¿Qué tanto por cien de los fumadores son hombres? ¿y mujeres? $(P(H|F), P(M|F))$

(24) **Extrayendo cartas.** Una baraja española tiene 40 cartas. Cuál es la probabilidad de:

a) Sacar un as.

b) Sacar el as de oros.

c) Sacar dos ases.

d) Sacar los cuatro ases.

(25) **Likes en YouTube.** En cierta ocasión en una revista comentaban que el cantante famoso J.V. era el peor valorado en toda la historia de YouTube. Para ello se basaban en el número de "me gusta" y "no me gusta" de una de sus canciones. Los datos eran parecidos a los siguientes:

el vídeo tenía unas 6 millones de visitas
había 99 "no me gusta"
y 1 "me gusta"

Claramente se ve que un 99 % de los votos son "no me gusta" frente a un 1 % que votó "me gusta". A la vista de estos datos es obvio que este cantante no gusta para nada. Pero resulta chocante que sea uno de los cantantes que más discos ha vendido, teniendo fama internacional. ¿Qué opinas?

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

(1) Tiramos una moneda equilibrada 3 veces. Calcula la probabilidad de obtener:

a) 3 caras.

b) sacar primero una cara, segundo una cruz y tercero una cara (en ese orden).

c) 2 caras y una cruz.

d) que el número de caras sea mayor o igual al número de cruces.

(2) **La segunda consumición.** Un bar, para atraer clientes, decide jugarse a cara-cruz la segunda consumición. Si el cliente acierta, la segunda consumición es gratis, y si falla la tiene que pagar.

a) Calcula la probabilidad de que un cliente acierte.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tenga que pagar la segunda consumición?

c) Supón que eres el dueño del bar, y sabes que tienes que vender como mínimo un refresco a 2 euros si no quieres tener pérdidas. ¿A qué precio tienes que vender los refrescos para estar seguro de no perder dinero? Ten en cuenta que tienes que vender a 2 euros *cada* consumición, pero que habrá algunos clientes que no van a pagar la segunda consumición.

(3) **Tirando 4 monedas.** Supongamos que tiramos 4 monedas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que salgan 2 caras y 2 cruces?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga 1 cara? ¿ninguna? ¿3? ¿4? (Esto es, sea x el número de caras que obtenemos; ¿cuánto vale $p(x)$ para todos los posibles valores de x?)

c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos una cara?

(4) **Uno de árboles.** Tenemos 3 monedas, una de 1 céntimo, otra de 10 céntimos y la última de 1 euro. La probabilidad de que salga una cara en la moneda de 1 céntimo es $\frac{1}{3}$ ($\frac{2}{3}$ la de que salga cruz). La probabilidad de que salga una cara en la moneda de 10 céntimos es de $\frac{3}{4}$ y la de que salga cara en la moneda de 1 euro $\frac{3}{5}$. Calcula, construyendo el árbol correspondiente, la probabilidad de que al tirar las 3 monedas haya un número impar de caras.

(5) La probabilidad de que un cazador novato cobre una pieza es 0'4. Si lo intenta 5 veces, calcula la probabilidad de que cobre una pieza al menos 3 veces.

(6) Tenemos 2 bolsas de caramelos, la primera contiene 15 caramelos de naranja y 10 de limón, y la segunda, 20 de naranja y 25 de limón. Elegimos una de las bolsas al azar y extraemos un caramelo. Calcular:

a) La probabilidad de que el caramelo sea naranja.

(7) En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente 3 dados equilibrados de 6 caras, se pide calcular la probabilidad de:

a) Obtener 3 unos.

b) Obtener al menos un 2.

c) Obtener una suma de 4.

(8) Una caja tiene 3 monedas. Una moneda es normal, otra tiene 2 caras y la tercera está trucada de forma que la probabilidad de obtener cara es de $\frac{1}{3}$. Las 3 monedas tienen igual probabilidad de ser elegidas.

a) Si se elige al azar una moneda y se lanza al aire ¿cuál es la probabilidad de que salga cara?

b) Si lanzamos la moneda trucada dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que salga una cara y una cruz?

(9) Un cartero reparte al azar 3 cartas entre 3 destinatarios. Calcula la probabilidad de que al menos una de las 3 cartas llegue a su destino correcto.

(10) Una urna A contiene 5 bolas blancas y 3 negras, y otra urna B contiene 3 blancas y 4 negras. Se elige una urna al azar y se extrae una bola. Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea negra.

(11) Sonia y Manuel tiran, cada uno, un dado numerado del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que Sonia saque mayor puntuación que Manuel?

(12) Tres hombres, A, B y C disparan a un objetivo. Las probabilidades de que cada uno de ellos alcance su objetivo son $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$, respectivamente. Calcular:

a) La probabilidad de que todos alcancen el objetivo.

b) La probabilidad de que ninguno alcance el objetivo.

c) La probabilidad de que al menos uno de ellos alcance el objetivo.

(13) Se tienen 2 urnas A y B. En la primera hay 2 bolas blancas, 3 negras y 1 roja, y en la segunda hay 3 bolas blancas, 1 negra y 1 verde.

a) Se extrae una bola de cada urna, calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color.

b) Se lanza una moneda, si se obtiene cara se extraen dos bolas de la urna A y si se obtiene cruz, se extraen 2 bolas de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que ambas bolas sean blancas.

(14) En una clase hay 30 alumnos, de los cuales 3 son pelirrojos, 15 son rubios, y el resto, morenos. Si elegimos al azar dos alumnos de esa clase, calcula la probabilidad de que:

a) Tengan el mismo color de pelo.

b) Al menos uno sea rubio.

(15) En un bombo hay 4 bolas numeradas del 1 al 4. Se hacen 2 extracciones sin reponer la bola sacada. Se pide:

a) Probabilidad de que la segunda bola sea el 4.

b) Probabilidad de que la suma de ambas bolas sea 5.

(16) Una bolsa contiene 3 cartas: una es roja por las 2 caras, otra tiene una cara blanca y otra roja y la tercera tiene una cara negra y la otra blanca. Se saca una carta al azar y se muestra, también al azar, una de sus caras.

a) ¿cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea roja?

b) ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?

c) Si la cara mostrada es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja?