EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

▶ Ecuaciones de la recta

(1) Escribe la ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta que:

a) pasa por $P(2,3)$ y tiene como vector director $\vec{v}(5,4)$;
b) pasa por $A(-1,2)$ y tiene vector director $\vec{w}(2,-2)$;
c) pasa por $B(3,-4)$ y tiene vector director $\vec{u}(-1,3)$;

Dibuja, además, la gráfica de estas rectas.

(2) Dada la recta r de ecuación paramétrica

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - 4\lambda \end{cases}$$

da a λ los valores 0, 1, 2, y -1 calculando cuatro puntos de la recta. Dibújalos y dibuja la recta. ¿En qué puntos corta la recta a los ejes?

(3) Halla un vector director y un punto de cada una de las rectas siguientes:

a) $\begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 5 + 4\lambda \end{cases}$

b) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{3}$

c) $(x,y) = (2,4) + \lambda(5,1)$

d) $y = 5x - 4$

e) $3x - y + 2 = 0$

(4) Escribe las ecuaciones de las rectas r y s que dividen el primer cuadrante en tres ángulos iguales.

(5) Escribe las ecuaciones de los ejes cartesianos y de sus bisectrices en forma vectorial y paramétrica.

(6) ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas del vector director de la recta $3x - 4y = 7$?

(7) Escribe la ecuación paramétrica y continua de la recta $3x + 2y = 7$

(8) Escribe las ecuaciones continua, explícita e implícita de la recta que pasa por el punto $P(5,4)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (1,3)$.

(9) *a*) Calcula el vértice D del paralelogramo $ABCD$ si $A = (1,2)$, $B = (5,3)$ y $C = (6,5)$.
b) Escribe la ecuación de las diagonales AC y BD.
c) Encuentra el punto de intersección de las diagonales.

(10) Deduce la ecuación de la recta cuyos puntos de intersección con los ejes son $(9,0)$ y $(0,6)$

(11) Halla el área limitada por la recta $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$, el eje de abcisas y el eje de ordenadas.

(12) Calcula el área de la región definida por las siguientes rectas:

a) $y = x$ *b*) El eje de las abcisas *c*) $3x + y = 6$

(13) **Ecuación explícita conocidos dos puntos.** Calcular la pendiente y la ordenada en el origen de la recta que pasa por los puntos $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$.

(14) **Ecuación implícita.** La ecuación implícita dada es equivalente a la ecuación $ax + by = c$. ¿Por qué?

▶ Posiciones relativas de rectas

(15) Dibuja la recta r que pasa por el punto $A(0, 2)$ y tiene como vector director $\vec{u}(-1, 3)$. Dibuja también la recta s que pasa por el punto $B(1, 1)$ y tiene como vector director $\vec{v}(1, -3)$. ¿Cómo son estas dos rectas? ¿Qué relación hay entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

(16) Sabiendo que la recta r pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(-11, -11)$ y la recta s por los puntos $(0, -1)$ y $(2, 1)$, averigua si son paralelas o no.

(17) Las rectas

$$2x + 2y - 5 = 0; \quad x - 2y + 2 = 0; \; y = -x - 2; \; \frac{x}{2} = y + 2$$

¿determinan un paralelogramo?

(18) Halla el valor de m para que la recta $\dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y+3}{2}$ sea paralela a la recta $\begin{cases} x = 2\lambda + 4 \\ y = \lambda - 1 \end{cases}$

(19) Halla la ecuación de la recta que pasa por $B(3, 5)$ y es paralela a la que pasa por los puntos $A(2, 0)$ y $C(1, 1)$.

▶ Ángulos entre dos rectas

(20) Calcula el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a) $y = x + 5; \; y = -x + 2$

b) $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{4}$; $s \equiv \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+2}{-2}$

(21) Calcula la recta perpendicular a $y = 3x - 4$ que pasa por el punto $P(-1, 2)$.

(22) El ángulo que forman 2 rectas $y = m_1x + n_1$ e $y = m_2x + n_2$, ¿de qué depende?

(23) Indica, sin calcular, qué pares de rectas forman los mismos ángulos:

a) $y = 2x; \; y = -x + 4$

b) $y = -2x + 5; \; y = x - 4$

c) $y = -x; \; y = 2x - 8$

▶ Distancias en el plano

(24) Calcula la distancia que hay entre los siguientes pares de puntos:

a) $A(0,0)$, $B(5,12)$ *b*) $A(-1,3)$, $B(4,3)$ *c*) $A(2,-3)$, $B(3,-2)$

¿Se te ocurre un método gráfico para hacerlo?

▶ La circunferencia

(25) Halla el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

a) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ *c*) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$ *d*) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

▶ La elipse

(26) Halla la ecuación de las siguientes elipses:

a) Aquella cuya distancia focal vale 6 y su eje mayor 10.

b) Aquella cuya distancia focal vale 24 y su eje menor 10.

c) Aquella cuya excentricidad vale $\dfrac{3}{5}$ y su distancia focal 12.

Todas tienen su eje mayor en el eje x.

(27) Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de sus distancias a los puntos $F'(-4,0)$ y $F(4,0)$ es 10.

(28) Hemos calculado la ecuación de la elipse con los focos situados en el eje x. Calcula la ecuación de una elipse cuyos focos están en el eje y. Supón que las coordenadas de los focos son $F(0,a)$ y $F'(0,-a)$.

▶ La hipérbola

(29) Halla la ecuación y la excentricidad de la hipérbola que tiene como focos $F'(-5,0)$, $F(5,0)$, sabiendo que $b = 2a$.

(30) Calcula los semiejes, las coordenadas de los focos y la excentricidad de la hipérbola de ecuación $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

(31) Halla el centro, vértices, focos y asíntotas en las siguientes hipérbolas:

a) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$

b) $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0$

c) $2x^2 - 3y^2 + 4x + 12y + 4 = 0$

d) $5x^2 - 4y^2 - 20x - 24y - 36 = 0$

e) $y^2 - x^2 + 2x - 2y - 1 = 0$

▶ La parábola

(32) Demuestra que si el eje de la parábola es el eje de las x y el vértice es el origen $V(0,0)$, pero el foco en lugar de a la derecha del vértice se encuentra a la izquierda $(F = (-\frac{p}{2}, 0))$, la ecuación de la parábola es $y^2 = -2px$.

(33) Demuestra que si el eje de la parábola es el eje de las y y el vértice es el origen $V(0,0)$, pero el foco en lugar de arriba del vértice se encuentra abajo $(F = (0, -\frac{p}{2}))$, la ecuación de la parábola es $x^2 = -2py$.

(34) Halla el vértice, el foco y la ecuación de la directriz de la parábola $(x-5)^2 = 2(y+1)$.

(35) Halla el vértice y el foco de la parábola $y = x^2 - 5x + 6$.a

(36) Halla la ecuación de la parábola que tiene por directriz $y + 1 = 0$ y por vértice $V = (3, 2)$. El eje de la parábola es paralelo al de ordenadas.

(37) Halla la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $y = -2$ y vértice $V = (4, 1)$.

(38) Halla la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $x = -3$ y por foco $F = (3, 0)$.

(39) Halla las coordenadas del vértice, del foco y las ecuaciones de las directrices de las siguientes parábolas:

a) $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$ *b*) $y^2 - 2x - 6y - 5 = 0$ *c*) $y = x^2 - 6x + 11$

(40) Halla las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola $x^2 = 6y$ con las siguientes curvas:

a) $2x + 5y - 18 = 0$

b) $x^2 + y^2 = 7$

c) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 4$

d) $y^2 = 6x$

(41) Determina m para que la recta $y = 4x + m$ sea tangente a la parábola $y = 3x^2 + 5$. Sugerencia: ¿cuántos puntos de intersección tiene la parábola con una recta tangente?