EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

▶ Coordenadas de un vector

(1) Las coordenadas de un vector contenido en el plano XY tienen $z = 0$. ¿Cómo son las coordenadas de un vector contenido en el plano YZ? ¿y las de uno contenido en el plnao XZ?

(2) Sabiendo que $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, 1, 0)$ y $\vec{c} = (-1, 1, 1)$, calcula:

a) $\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$

b) $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$

(3) Calcula dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que: $\vec{u} - \vec{v} = (1, 0, 0)$ y $\vec{u} + \vec{v} = (0, 0, 1)$.

(4) Calcula el módulo de los vectores:

a) $\vec{a} = (1, 2, 3)$ *b*) $\vec{b} = (-1, 0, 4)$

(5) Calcula la longitud del segmento de extremos $A(1, 1, 1)$ y $B(-2, 1, 0)$.

(6) Calcula un vector unitario en la dirección de:

a) $\vec{v} = (1, 1, 1)$ *b*) $\vec{v} = (3, 4, 0)$

▶ Aplicaciones

(7) Indica si los siguientes vectores son paralelos:

a) $\vec{u} = (3, 2, -1)$ y $\vec{v} = (6, 4, 2)$ *b*) $\vec{a} = (2, -1, 3)$ y $\vec{b} = (-4, 2, -6)$

(8) Calcula un vector paralelo a $\vec{u} = (5, 0, 1)$.

(9) Calcula el punto medio del segmento de extremos $A(-1, 1, -1)$ y $B(2, 3, 1)$.

(10) Indica si los siguientes puntos están alineados:

a) $A(1, -1, 2)$, $B(0, 1, -1)$ y $C(2, 1, 4)$. *b*) $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$ y $C(2, 5, 8)$.

▶ Producto escalar

(11) Calcula el producto escalar de:

a) Dos vectores de módulos 2 y 5 que forman un ángulo de $60°$.

b) Los vectores $\vec{a} = (2, -1, 4)$ y $\vec{b} = (1, 2, -1)$.

(12) Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1, -1, 1)$ y $\vec{v} = (2, -5, 3)$.

(13) Indica si los siguientes vectores son perpendiculares:

a) $\vec{u} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v} = (2, -1, 1)$

b) $\vec{u} = (-1, 3, 1)$ y $\vec{v} = (2, -1, 5)$

▶ Producto vectorial

(14) Calcula el producto vectorial de:

a) $\hat{\imath} \times \hat{\imath}$

b) $\hat{\imath} \times \hat{\jmath}$

c) $\hat{\imath} \times \hat{k}$

d) $\hat{\jmath} \times \hat{\imath}$

e) $\hat{\jmath} \times \hat{\jmath}$

f) $\hat{\jmath} \times \hat{k}$

g) $\hat{k} \times \hat{\imath}$

h) $\hat{k} \times \hat{\jmath}$

i) $\hat{k} \times \hat{k}$

(15) Calcula el producto vectorial de:

a) $\vec{u} = (1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, 1)$

b) $\vec{u} = (1, -1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 2, -1)$

(16) **PAEU2011S.** Calcular un vector unitario y ortogonal a los vectores $v = (1, 2, 0)$ y $w = (-1, 0, 1)$.

(17) **PAEU2008J.** Sabiendo que tres de los vértices de un paralelogramo son los puntos $A(1, 1, 2)$, $B(1, 1, 4)$ y $C(3, 3, 6)$, hallar el área del mismo.

(18) **PAEU2007J.** Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $A(1, 1, 0)$, $B(2, -1, 0)$ y $C(2, 4, 0)$.

(19) **PAEU2014S.** Hallar las coordenadas de un vector de módulo 1 que sea perpendicular a los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, siendo $P(1, 3, -1)$, $Q(2, 0, 1)$ y $R(-1, 1, 0)$.

▶ Producto mixto

(20) Calcula el producto mixto de $\vec{a} = (1, 2, 3)$ y $\vec{b} = (1, 0, 1)$ y $\vec{c} = (1, -1, 1)$

(21) **PAEU2007S.** Sea A el punto medio del segmento de extremos $P(3, 2, 1)$ y $Q(-1, 0, 1)$. Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, $B(2, 1, 3)$, $C(1, 2, 3)$ y $D(3, 4, 1)$.

▶ Ecuaciones de la recta

(22) Escribe todas las ecuaciones de la recta que pasa por:

a) el punto $P_0(2, 0, 1)$ y tiene vector director $\vec{u} = (1, 0, 1)$.

b) el punto $P_0(1, 1, -1)$ y tiene vector director $\vec{u} = (1, 1, 0)$.

(23) En la explicación se ha hecho hincapié en que no se puede dividir entre cero. Sin embargo, es muy habitual oir decir a los matemáticos y físicos que algo entre cero es infinito. ¿Cómo es posible decir semejante cosa cuando es totalmente erróneo dividir entre cero?

(24) Indica un punto y un vector director de cada una de las siguientes rectas:

a) $r \equiv \begin{cases} x &= 1-\lambda \\ y &= 2\lambda \\ z &= 3+4\lambda \end{cases}$

b) $r \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$

(25) ¿De qué forma son las coordenadas de los vectores directores de las siguientes rectas?

a) Las rectas contenidas en el plano XY.

b) Las rectas contenidas en el plano XZ.

c) Las rectas contenidas en el plano YZ.

▶ Ecuaciones del plano

(26) Los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de un plano tienen que ser linealmente independientes. ¿Por qué?

(27) Escribe la ecuación paramétrica del plano que pasa por el punto $P_0(1,1,2)$ y tiene vector director $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(0,1,-1)$.

(28) Haz un dibujo de los planos que pasan por el punto $P_0(1,0,0)$ y cuyo vector normal es

a) el vector $\hat{\imath}$. *b*) el vector $\hat{\jmath}$. *c*) el vector $\hat{k}$.

(29) Haz un dibujo de los planos cuyas ecuaciones generales son:

a) $x=0$ *b*) $y=0$ *c*) $z=0$

(30) Calcula la ecuación general del plano que tienen un vector perpendicular $\vec{n} = (-1,5,2)$ y pasa por el punto $P_0(1,-1,2)$.

(31) Calcula un vector normal y un punto de los siguientes planos:

a) $2x-3y+z-2=0$ *b*) $x+2z+4=0$ *c*) $x=0$

(32) **PAEU2010S.** Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto $A(1,0,-1)$, es perpendicular al plano $\pi \equiv x-y+2z+1=0$ y es paralelo a la recta r : $\begin{cases} z &= 0 \\ x-2y &= 0 \end{cases}$

▶ Combinación lineal de vectores

(33) ¿Existe algún vector del plano XY linealmente independiente de los vectores $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$? Esto es, ¿eres capaz de encontrar un vector del plano XY que no sea combinación lineal de $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$?

(34) ¿Existe algún vector del espacio que sea linealmente independiente de los vectores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$?

(35) Escribe una combinación lineal de los vectores $\vec{a} = (1, 2, 3)$ y $\vec{b} = (0, 2, 4)$.

(36) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos, ¿podemos decir que son linealmente dependientes? Justifica tu respuesta.

▶ Método de Gauss

(37) Resuelve, usando matrices, los siguientes sistemas:

$$a)\ \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & & = & 2 \end{array}\right. \qquad c)\ \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & -1 \\ x & + & 3y & + & 4z & = & 2 \\ & & 3y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

$$b)\ \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 3y & - & 3z & = & 8 \end{array}\right.$$

▶ Rango de una matriz

(38) Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad e)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad d)\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

▶ Posiciones relativas de 2 rectas

(39) **PAEU2015S.** Sean las rectas $r \equiv x = y = z$ y $s \equiv \left\{\begin{array}{rl} x - y & = 1 \\ x - 3z & = 1 \end{array}\right.$

a) Comprobar que las rectas r y s se cruzan.

b) Calcular la recta que corta perpendicularmente a las rectas r y s.

(40) **PAEU2009J.** Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(3, 1, 2)$, y sea s la recta de ecuaciones $s \equiv \left\{\begin{array}{rl} x - 2z & = 1 \\ y - 2 & = 0 \end{array}\right.$. Se pide:

a) Estudiar su posición relativa.

b) Si fuera posible, calcular su punto de intersección.

c) Calcular, si existe, un plano que las contenga.

(41) **PAEU2016J.** Consideremos las rectas $r \equiv \dfrac{x}{2} = y = \dfrac{z-1}{2}$ y $s \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z$.

a) Comprobar que las rectas r y s se cruzan.

b) Hallar la ecuacióin de la recta que pasa por el origen de coordenadas y cort a las rectas r y s.

▶ Posiciones relativas de 1 recta y 1 plano

(42) **PAEU2011J.**

a) Determinar la posición relativa de la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{ll} y - x & = 1 \\ z - 2x & = 0 \end{array} \right.$ y el plano $\pi \equiv x - y = 0$

b) Hallar el plano perpendicular a π que contiene a r.

(43) **PAEU2006S.** Hállese el valor de a para el que la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{ll} x - y + 2z & = 1 \\ 2x + y - 5z & = 2 \end{array} \right.$ y el plano $\pi \equiv ax - y + z + 1 = 0$ son paralelos.

▶ Distancias

(44) **PAEU2006J.** Calcúlese la distancia del punto $P(1,1,1)$ a la recta: $r \equiv \left\{ \begin{array}{ll} x & = -2 + 2\lambda \\ y & = 0 \\ z & = -\lambda \end{array} \right.$

(45) **PAEU2014S.** Sea el punto $A(1,1,3)$ y la recta de ecuación $\left\{ \begin{array}{ll} x - y + 2 & = 0 \\ z & = 2 \end{array} \right.$. Calcular la distancia del punto A a la recta r.

(46) **PAEU2009J.** Calcular la distancia entre las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{ll} 3x - y & = -1 \\ 7x - z & = -4 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad s \equiv x - 2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$$

▶ Ángulos

(47) **PAEU2013J.** Sea la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{ll} x & = 1 \\ y - z & = 4 \end{array} \right.$. Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano $\pi \equiv x - y - 3 = 0$.

▶ Puntos simétricos

(48) **PAEU2007S.** Determinar el punto simétrico de $P(4, 0, 3)$ respecto del plano de ecuación $x = y$.

(49) **PAEU2010J.** Dados el punto $P(1, 1, -1)$, la recta $r \equiv x = \dfrac{y+6}{4} = z - 3$ y el plano $\pi \equiv 6x + 6z - 12 = 0$, se pide:

a) Hallar el punto simétrico de P respecto del plano π.

b) Hallar los puntos Q de r que distan de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ unidades de longitud de π.

(50) **PAEU2010S.**

a) Determinar las coordenadas del punto simétrico de $A(-2, 1, 6)$ respecto de la recta

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{1}$$

b) Hallar la distancia de A a r.

(51) **PAEU2018J.** Determinar la recta s que es simétrica de $r \equiv x + 2 = y = z - 2$, respecto del plano $\pi \equiv x - z + 2 = 0$.

▶ Ejercicios varios

(52) **PAEU2015J.** Calcular la recta que corta perpendicularmente al eje OZ y que pasa por el punto $P = (1, 2, 3)$.

(53) **PAEU2008S.** Se consideran las rectas r y s de ecuaciones respectivas

$$r \equiv \begin{cases} y &= 1 \\ z &= 0 \end{cases} \quad , \; s \equiv \begin{cases} x &= 0 \\ z &= 2 \end{cases}$$

Determinar la recta que corta perpendicularmente a r y s.

(54) **PAEU2012J.** Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P(2, 1, 3)$ y $Q(1, 3, 1)$; los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R(-4, 7, -6)$.

a) Calcular la ecuación de la recta r.

b) Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

c) Hallar las coordenadas de uno de los otros vértices.

(55) **PAEU2013J.** Sean los puntos $A(1, 2, -1)$, $P(0, 0, 5)$, $Q(1, 0, 4)$ y $R(0, 1, 6)$.

a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A, es paralela al plano que pasa por los puntos P, Q y R, y tal que la primera componente de su vector director es el doble que la segunda.

b) Hallar la distancia del punto A al plano que pasa por P, Q y R.

(56) **PAEU2014J.** Calcular la recta contenida en el plano $\pi_1 : x + y + z = 3$, paralela al plano $\pi_2 : x = 0$, y que pasa por el punto simétrico de $B(-1, 1, 1)$ respecto de π_2.

(57) **PAEU2013S.** Sean el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$, la recta $r \equiv x = y = z$ y el punto $A(3, 2, 1)$. Hallar los puntos de r que equidistan de A y de π.