EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

▶ La exponencial

(1) ¿Por qué no podemos considerar la función $y = a^x$ con $a \leq 0$? Para verlo, dibuja la gráfica de esta función cuando: $a = 0$ y cuando $a = -1$.

(2) Calcula

a) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x$ *b*) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x$ *c*) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$ *d*) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(3) Representa las siguientes funciones de forma aproximada

a) $y = 2^x$ *b*) $y = 3^{-x}$ *c*) $y = 2^x + 3$ *d*) $y = \dfrac{1}{3^x} - 4$

(4) Escribe todas las propiedades de la función $y = e^x$.

(5) Representa la función $y = e^x$. Para ello, calcula e^1, e^2, e^3, e^4, e^5 y representa sus valores. A la vista de la gráfica, ¿qué valor es de esperar que tenga e^{10}? Calcúlalo.

(6) **Crecimiento exponencial.** En las noticias es frecuente oir hablar de que algo crece de forma exponencial, o que algo crece de forma lineal. Decir que una variable y crece de forma exponencial quiere decir que $y = a^x$, mientras que decir que crece de forma lineal indica que $y = kx$.

a) ¿Cuál de estas dos funciones crece más rápidamente?
Para verlo comparemos las dos siguientes funciones: $y = 2x$ e $y = 2^x$. Construye la tabla de valores con los primeros 10 elementos de cada una de estas funciones, y representalas gráficamente.

b) Las enfermedades contagiosas, ¿se propagan de forma lineal o exponencial? Justifica tu respuesta.

▶ El logaritmo

(7) ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

a) $\log 2 + \log 3 = \log 5$
b) $\log 2 + \log 3 = \log 6$
c) $\log 15 - \log 5 = \log 10$
d) $\log 15 - \log 5 = \log 3$
e) $\log 2x + \log 1 = \log(2x + 1)$
f) $\log x + \log 10 = 4 \iff 10x = 4$
g) $\log x + \log 5 = \log y \iff x - y = 5$

(8) Calcula, usando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 8$
b) $\log_3 27$
c) $\log_4 \frac{1}{4}$
d) $\log_{25} 5$
e) $\log_{16} 4$
f) $\log_5 \frac{1}{5}$
g) $\log_5 0'20$
h) $\log_8 0'125$
i) $\log_2 \frac{1}{32}$
j) $\log 0'1$
k) $\log 0'01$
l) $\log 10$
m) $\log 100$

(9) Calcula:

a) $\log_a a$
b) $\log_a a^2$
c) $\log_a a^3$
d) $\log_a a^n$
e) $\log_a \frac{1}{a}$
f) $\log_a \frac{1}{a^2}$
g) $\log_a \frac{1}{a^3}$
h) $\log_a \frac{1}{a^n}$
i) $\log_a \sqrt{a}$
j) $\log_a \sqrt[3]{a}$
k) $\log_a \sqrt[n]{a}$
l) $\log_a 1$
m) $\ln e$
n) $\ln e^4$
ñ) $\ln \frac{1}{e^2}$
o) $\ln \sqrt[3]{e}$

(10) Usando la calculadora, calcula:

a) $\log 1$
b) $\log 10$
c) $\log 24$
d) $\log 0$
e) $\log 103$
f) $\log(-2)$

(11) Calcula x sabiendo que:

a) $\log_3 x = 4$
b) $\log_a x = 0$
c) $\log_9 x = \frac{1}{2}$

(12) Calcula x sabiendo que:

a) $x = \log_2 32$
b) $x = \log_{25} \sqrt{5}$
c) $x = \log_8 \sqrt[4]{2}$
d) $x = \log_3 \frac{1}{27}$

(13) Calcula x sabiendo que:

a) $\log_x 10 = \frac{1}{3}$
b) $\log_x 0'00001 = -5$
c) $\log_x 2 = \frac{1}{3}$

(14) Averigua el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $\log_a a^2\sqrt{a}$
b) $\log_a 1$
c) $\log_x \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$
d) $\log_2 \sqrt[3]{64}$
e) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{64}$
f) $2^{\log_a a^2}$
g) $10^{\log_a \sqrt{a}}$
h) $10^{\log_a \sqrt{a}a^3}$
i) $\log(\log 10^{10})$
j) $\log(10^{10\log 10^2})$

(15) **Leyendo.** Lee en palabras todas las propiedades de los logaritmos.

(16) **Particularizando.** Particulariza las propiedades de los logaritmos, escribiéndolas para los logaritmos decimales y para los logaritmos neperianos.

(17) ¿Qué relación tiene que existir entre a y b para que $\log a + \log b = 0$?

(18) Demuestra que: $\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\log\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=0$

(19) Despeja y en la igualdad: $\log x+\log y=\log(x+y)$

(20) Calcula x sabiendo que: $\log x = 2(\log a + 3\log b) - \dfrac{1}{2}(2\log c + \log d)$

(21) **Cambios de base.** Escribe la fórmula del cambio de base para el caso en que b sea igual a 10.

▶ Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

(22) **Interés compuesto.** 1000 euros colocados al 5 % de interés, ¿en cuánto dinero se convierte en 3 años? ¿y en 20 años? ¿Cuántos años han de pasar para que se duplique el capital?

(23) Resuelve:

a) $2^{3x}=0'5^{3x+2}$	*c*) $10^{3+x}=1$	*e*) $5^{3-x}=125$	*g*) $3^{2x}=81$
b) $3^{4-x^2}=\dfrac{1}{9}$	*d*) $3^{2-x}=9$	*f*) $2^{-1-x^2}=\dfrac{1}{64}$	*h*) $\dfrac{1^{x+1}}{4^{x-1}}=8$

(24) Resuelve: $2^{x-1}+4^{x-3}=5$

(25) Resuelve:

a) $52=3^{4x}$ *b*) $4\cdot 2^x=100$ *c*) $9^x-3=2\cdot 3^x$ *d*) $5^{2x-1}=25$

(26) Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log x=\log 7$
b) $\log x = 5\log 2$
c) $\log x=3$
d) $\log x = 1$
e) $\log x+\log 3=10$
f) $\log x-\log 4=5$

(27) Calcula la x en las siguientes ecuaciones:

a) $\log_a x=\log_a 20-\log_a 3$
b) $\log_a x = 2\cdot(\log_a 3+5\cdot\log_a 2-\log_a 4)$
c) $\log_a x=\dfrac{3\log_a 5}{7}$

▶ Sistemas de ecuaciones

(28) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases}\log x+\log y=30\\ x+y=60\end{cases}$ *b*) $\begin{cases}x-y=25\\ \log y=\log x-1\end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=1 \\ e^x \cdot e^y = e^{11} \end{cases}$