EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

▶ Asíntotas

(1) Una función ¿puede tener una asíntota horizontal y una oblícua a la vez?

(2) La exponencial $y = e^x$ ¿tiene asíntotas?

(3) Calcula $\lim_{x \to \infty} \ln x$.

(4) **PAEU2004J.** Sea la función $y = 2e^{-2|x|}$. Calcula sus asíntotas. ¿Es continua?

(5) **PAEU2011J,a.** Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

(6) Sea la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$. Calcula sus asíntotas.

(7) **EBAU2017S, parte.** Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$. Calcular el dominio y sus asíntotas.

(8) Halla las asíntotas de la curva $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$.

(9) Calcula las asíntotas de:

a) $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$

b) $f(x) = \dfrac{9x - 3}{x^2 - 2x}$

(10) **EBAU2008J.** Calcular las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2 + 1}$.

▶ Continuidad

(11) *a*) La tangente de x ($f(x) = \operatorname{tg} x$) es ¿continua en todo $\mathbb{R}$? ¿Cuál es su dominio de definición?

b) ¿Y el arcotangente de x? ¿es continuo en todo $\mathbb{R}$? ¿Cuál es su dominio de definición?

(12) Determinar los valores de a y b para que la siguiente función sea continua en todos sus puntos:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{a}{x} + b & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

(13) Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -4 \\ x + 2 & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ \dfrac{8}{x} & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

(14) **EBAU2015S.** Consideremos la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, \text{ si } x \leq 2 \\ \ln(x-1), \text{ si } x > 2 \end{cases}$ Hallar los valores de a, b y c para que $f(x)$ sea continua en toda la recta real y tenga un extremo relativo en el punto $(1, -1)$.

(15) Sea la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 4 & \text{si } x < 0 \\ -a(x-2)^2 + 4a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Determina los valores de a que hacen continua la función en $x = 0$.

(16) **PAEU2005J.** Estúdiese, según los valores de los números reales α y β, la continuidad de la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(17) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x+1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

(18) **EBAU2012S, parte.** Aplicando la definición, estudiar la continuidad de la función f dada por $f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{\ln^2 x}{x-1} & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ en el punto $x = 1$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

▶ **Propiedades de funciones básicas**

(19) **EBAU2015S, parte.** Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. Calcular dominio, puntos de corte y sus asíntotas.

(20) ¿Cuál es el dominio de la función $y = x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

(21) Calcula el dominio, puntos de corte con los ejes de la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-2}{2x-1}\right)$

▶ **Teoremas**

(22) **EBAU2017J.**

a) Enunciar el teorema de Bolzano e interpretarlo geométricamente.

b) Encontrar un intervalo en el que $p(x) = x^6 + x^4 - 1$ tenga al menos una raíz.

(23) **EBAU2007J.** Demostrar que las curvas $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$ se cortan en algún punto del intervalo $\left(2\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right)$.

(24) **EBAU2007J,b.** Sea la función $f(x) = x + e^{-x}$. Demostrar que existe algún número real c tal que $c + e^{-c} = 4$.

(25) **EBAU2008J.** Demostrar que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(1, 2)$.

(26) **EBAU2009S.** Probar que la ecuación $x^{2009} - e^x + 2 = 0$ tiene alguna solución.