EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

▶ Determinantes

(1) Calcula el determinante de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

(2) Calcula el determinante de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

(3) **PAEU2005S.** Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$. Calcúlese el determinante de A sabiendo que $A^2 - 2A + Id = 0$, donde Id es la matriz identidad y 0 es la matriz nula.

▶ Propiedades

(4) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$, calcula:

a) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

(5) Sea A una matriz 3x3 cuyo determinante vale $|A| = 3$. Sea B la matriz que se obtiene al cambiar primero la primera fila con la tercera fila y luego la segunda columna con la primera columna. Calcular $|B|$.

(6) a) Calcula el determinante de la matriz identidad de orden 3.
b) ¿Cuánto vale $|5I|$?

(7) El determinante de la matriz cuadrada A de dimensiones 3x3 vale 2. ¿Cuánto vale $|3A|$?

(8) Calcula $|A^2|$ y $|A^4|$ a partir del $|A|$.

(9) **PAEU2004S.** Sea A una matriz cuadrada de orden 4 cuyo determinante vale 3, y sea la matriz $B = \sqrt[4]{3}A$. Calcúlese el determinante de la matriz B.

(10) **PAEU2011S.** Sabemos que el determinante de una matriz cuadrada A vale -1 y que el determinante de la matriz $2A$ vale -16 ¿Cuál es el orden de la matriz A?

(11) **PAEU2004J.** Se tiene una matriz M cuadrada de orden 3 cuyas columnas son respectivamente C_1, C_2 y C_3 y cuyo determinante vale 2. Se considera la matriz A cuyas columnas son $-C_2$, $C_3 + C_2$, $3C_1$. Calcúlese razonadamente el determinante de A^{-1} en caso de que exista esa matriz.

(12) **PAEU2008S.** Sea A una matriz 3x3 de columnas C_1, C_2 y C_3 (en ese orden). Sea B la matriz de columnas C_1+C_2, $2C_1+3C_3$ y C_2 (en ese orden). Calcular el determinante de B en función del de A.

(13) **PAEU2012S, apartado b.** Sea C una matriz 2x2 de columnas C_1 y C_2 y de determinante 5, y sea B una matriz 2x2 de determinante 2. Si D es la matriz de columnas $4C_2$ y C_1-C_2, calcular el determinante de la matriz BD^{-1}.

▶ Determinantes

(14) **PAEU2009S.** Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} -x & -1 & 2x \\ 2x & -x & -1-x \\ -1 & 2x & 0 \end{vmatrix} = 0.$

▶ Matriz inversa

(15) **PAEU2011S, apartado a.** Averiguar para qué valores de m la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -m \\ 0 & m & -2 \end{bmatrix}$ no tiene inversa.

(16) **PAEU2006S.** Dada la matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a+1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, determínense los valores del número real a para los cuales existe la matriz inversa de P.

(17) **PAEU2007J, parte primera.** Hallar para qué valores de a es inversible la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 4+3a \\ 1 & a \end{bmatrix}$.

(18) **PAEU2005S.** Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Determínense los valores de m para los cuales $A + mId$ no es invertible (donde Id denota la matriz identidad).

(19) **PAEU2015J, apartado a.** Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{bmatrix}$, se pide: hallar los valores de m para que la matriz A^{10} tengan inversa.

▶ Sistemas homogéneos

(20) **PAEU2008S.** Sea a un número real. Discutir el sistema de ecuaciones siguiente, según los valores de a:

$$\begin{cases} ax + y &= 0 \\ 2x + (a-1)y &= 0 \end{cases}$$

▶ Cálculo del rango de una matriz

(21) **PAEU2009S.** Estudiar, en función del parámetro real λ, el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

(22) **PAEU2011J, apartado a.** Calcular el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

(23) **PAEU2012S, apartado a.** Determinar, en función del valor del parámetro real a, el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & a & a \end{bmatrix}$

(24) **PAEU2014J, apartado a.** Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{bmatrix}$. Discutir su rango en función de los valores de a.

(25) **PAEU2008J.** Calcular el rango de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

▶ Discusión de sistemas

(26) **PAEU2004J, apartado a.** Se considera el sistema $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & \lambda \\ x & + & y & + & \lambda z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$

Discútase según los valores del parámetro λ.

(27) **PAEU2004S, apartados a y b.** Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & ay & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & (2+a)y & + & 6z & = & 3 \end{array} \right.$$

a) ¿Existe algún valor del parámetro a para el cual el sistema sea incompatible?

b) ¿Existe algún valor del parámetro a para el cual el sistema sea compatible determinado?

(28) **PAEU2005J, apartado a.** Discútase el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & ay & - & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & az & = & 0 \\ 3x & + & (a+1)y & - & z & = & a-1 \end{array}\right.$$

, en función del valor de a.

(29) **PAEU2005S, apartado a.** Sea k un número real. Considérese el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} kx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ky & + & z & = & k \\ x & + & y & + & kz & = & k^2 \end{array}\right.$$

Discútase según los valores de k e interprétese geométricamente el resultado.

(30) **PAEU2009J.** Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 5 \\ \lambda y & + & z & = & \lambda \\ x & - & 2z & = & 3 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) Discutirlo en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Resolverlo cuando sea compatible.

(31) **PAEU2015J.** Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & my & = & -1 \\ (1-2m)x & - & y & = & m \end{array}\right.$$

se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) Resolver el sistema en los casos en que la solución no sea única.

c) Calcular los valores de m para que $x = -3$, $y = 2$ sea solución.

(32) **PAEU2015S.** Consideremos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ & & (a+3)y & & & = & 0 \\ & & & & (a+2)z & = & 1 \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

b) Resolverlo cuando sea posible.

(33) **PAEU2018S.** Tres números x, y, z cumplen lo siguiente:

- El primero de ellos, x, es la suma de los otros dos.
- El segundo, y, es la mitad del primero más el triple del tercero.

a) Demostrar que hay infinitos números que cumplen estas condiciones, encontrando una expresión general de la solución.

b) Encontrar tres números concretos que cumplan estas condiciones.