EJERCICIOS PARA PRACTICAR

(1) Deriva:

a) $y = x^3e^x$

b) $y = x^2 \operatorname{sen} x$

c) $y = x \cos x$

d) $y = x \ln x$

e) $y = \dfrac{-x^{10} + 7x^2}{5x^6 - 4}$

f) $y = \operatorname{sen}^2 x$

g) $y = \operatorname{cotg} x$

(2) Dadas las rectas $y = 3x + b$ y la parábola $y = x^2$.

a) Calcula la abcisa del punto dond ela recta tangente a la parábola es paralela a la recta dada.

b) Calcula el valor del parámetro b para que la recta sea tangente a la parábola.

(3) Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x \ln x$ en el punto $(1, 0)$.

(4) Considérese la función $y = |x| + |x - 2|$.

a) Exprese $f(x)$ como una función definida a trozos.

b) Represente $f(x)$.

c) Escriba el intervalo abierto de la recta real formado por los puntos en los que $f(x)$ es derivable y se anule su derivada.

(5) Deriva:

a) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} 2x - \operatorname{tg} 3x$ en $x = 0$

b) $g(x) = \sqrt{e^{x^2-4} + \cos \pi x}$ en $x = 2$

(6) Representa $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 1}$

(7) Dada la función $f(x) = Ax^3 + Bx$ sabemos que pasa por el punto $P(1, 1)$ y además que en ese punto tiene tangente paralela a la recta $y = -3x$.

a) De acuerdo a dichas condiciones calcular los valores de A y de B.

b) Determinar los extremos relativos, sus inntervalos de crecimiento y decrecimiento, y representar la función.

(8) Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ calcula los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ sabiendo que:

a) la recta tangente a su gráfica en el punto de abcisa $x = -1$ tiene pendiente -3.

b) $f(x)$ tiene un punto de inflexión de coordenadas $(1, 2)$.

(9) La concentración (en %) de N_2 de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t \in [0, \infty)$ medido en segundos, por la función $N(t) = \dfrac{60}{1 + 2e^{-t}}$.

a) Comrpueba que la concentración de N_2 crece con el tiempo. ¿Para qué $t \in [0, \infty)$ la concentración de N_2 es mínima y cuál es esta concentración?

b) ¿A qué valor tiende la concentración de N_2 cuando el tiempo tiende a infinito?

(10) ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5x + 4$ la tangente es paralela a las abcisas? ¿Cómo se llama ese punto en la parábola?

(11) ¿En qué punto de la gráfica de la parábola $f(x) = x^2 + 2x - 3$ la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

(12) Calcula los puntos de la curva $y = x^3 + 9x^2 - 9x + 15$ en los que la tangente es paralela a la recta $y = 12x + 5$

(13) ¿Es correcto definir la tangente a una curva C en uno de sus puntos P como la recta que sólo tiene un único punto en común P con C? Responde con un ejemplo.

(14) Dibuja las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 - 1$. Calcula sus derivadas. ¿Tiene sentido lo que obtienes?

(15) ¿Puede haber 2 funciones que tengan la misma derivada?

(16) Calcular a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 2 \\ ax + b \text{ si } x < 2 \end{cases}$ sea derivable en $x = 2$.

(17) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = -x^2 + 7x - 12$ en los puntos en que corta a los ejes de coordenadas.

(18) La curva $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $A(1, 3)$ y es tangente en el origen de coordenadas a la bisectriz del primer cuadrante. Calcula a, b y c.

(19) Demuestra que

a) $y = -x^2 + 4x + 3$ es estrictamente creciente en $x = 1$.

b) $y = x^3 - 2x^2 + 4$ es estrictamente creciente en $x = -1$.

c) $y = -x^2 + 4x + 3$ es estrictamente decreciente en $x = 4$.

d) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ es estrictamente decreciente en $x = \frac{1}{2}$.

e) ¿$y = \frac{x-1}{e^{x+1}}$ es creciente en $x = 1$? ¿y en $x = 3$?

(20) Calcula los extremos relativos de:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

b) $y = x^3 - 3x + 3$

c) $y = x^2$

d) $y = -x^2$

e) $y = \frac{x-1}{e^{x+1}}$

(21) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de:

a) $y = x^2$

b) $y = -x^2$

c) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

d) $y = x^3 - 3x + 3$

e) $y = \frac{2-x}{e^{x+1}}$

▶ Ejercicios de la PAEU

(22) **PAEU 2004S.** Dada la función $f : [1, e] \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, determínese de entre todas las rectas tangentes a la gráfica de f la que tiene máxima pendiente. Escríbase la ecuación de dicha recta.

(23) **PAEU 2005J.**

a) Calcúlense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = e^{1-x^2}$, sus extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas.

b) Esbócese la gráfica de f.

(24) **PAEU 2006S.** Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = xe^{-x}$, sus máximos y mínimos relativos, asíntotas y puntos de inflexión.

(25) **PAEU 2006S.** ¿Existen máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = \cos x + 1$ en el intervalo $[0, \pi]$? Justifíquese su existencia y calcúlense.

(26) **PAEU 2006S.** Calcúlense la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ en el punto $x = 0$.

(27) **PAEU 2007J.** Sea la función $f(x) = x + e^{-x}$. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas. Esbozar su gráfica.

(28) **PAEU 2008J.** Sea $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ con $x \in (0, \infty)$. Se pide calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y las asíntotas. Esbozar su gráfica.

(29) **PAEU 2008S.** Sea $f(x) = 2 - x + \ln x$ con $x \in (0, +\infty)$. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas de f. Esbozar la gráfica de f.

(30) **PAEU 2009S.** Hallar los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ es paralela a la recta de ecuación $y = 3x + 2$.

(31) **PAEU 2009S.** Sea la función $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$, definida en el intervalo $[0, 2\pi]$. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos. Esbozar su gráfica.

(32) **PAEU 2011S.** Dada la función $y = \dfrac{\ln x}{x}$ determinar su dominio de definición, sus asíntotas, extremos relativos y puntos de inflexión. Hacer un esbozo de su representación gráfica.

(33) **PAEU 2012J.** Dada la función $f(x) = \dfrac{a\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$, se pide:

a) Hallar a para que la pendiente de la recta tangente a la función $x = 0$ valga 2.

b) Para $a = 1$ estudiar el crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.

c) Para $a = 1$ hallar sus asíntotas.

(34) **PAEU 2012J.** Se considera la función $f(x) = \mathrm{e}^x + \ln(x)$, $x \in (0, \infty)$, donde ln denota el logaritmo neperiano. Estudiar la monotonía y las asíntotas de $f(x)$.

(35) **PAEU 2012S.** Determinar en qué puntos de la gráfica de la función $y = x^3 - 6x^2 + 4x + 8$ la recta tangente a la misma es paralela a la recta $y = 4x + 7$.

(36) **PAEU 2012S.** Sea la función $f(x) = (2x^2 + 3)\mathrm{e}^x$.

a) Estudiar asíntotas, crecimiento, decrecimiento, extremos relativos, convexidad y puntos de inflexión.

b) Esbozar su gráfica.

(37) **PAEU 2012S.** Determinar los extremos absolutos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 4$ en el intervalo $[1, 4]$.