

## EJERCICIOS IMPRESCINDIBLES

### ► Integrales inmediatas

(1) Calcula:

$$a) \int (3x^2 + 5x - 2) \, dx$$

$$d) \int dx$$

$$f) \int \frac{9dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$b) \int 2e^x dx$$

$$g) \int (\cos x + \operatorname{sen} x) \, dx$$

$$c) \int 3^x dx$$

$$e) \int \frac{4dx}{1+x^2}$$

### ► Método de sustitución

(2) Calcula:

$$a) \int \cos(ax+b) \, dx$$

$$d) \int e^{2x+4} \, dx$$

$$g) \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \, dx$$

$$b) \int (x+1)^2 dx$$

$$e) \int \frac{x dx}{x^2+4}$$

$$c) \int \frac{dx}{x+5}$$

$$f) \int x \operatorname{sen} x^2 \, dx$$

(3) Calcula:

$$a) \int (1-x)^3 \, dx$$

$$c) \int \frac{dx}{(2x+1)^4}$$

$$d) \int \frac{3x dx}{(x^2-1)^3}$$

$$b) \int \frac{dx}{(x-3)^2}$$

(4) Calcula:

$$a) \int \cos x \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$c) \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \, dx$$

$$e) \int 2 \operatorname{sen} x \cos x \, dx$$

$$b) \int \operatorname{sen} x \cos^3 x \, dx$$

$$d) \int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} \, dx$$

(5) Calcula:

$$a) \int \frac{dx}{x}$$

$$d) \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$f) \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} \, dx$$

$$b) \int \frac{dx}{x-1}$$

$$g) \int \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$$

$$c) \int \frac{dx}{2x+4}$$

$$e) \int \frac{x dx}{1+x^2}$$

(6) Calcula:

a)  $\int a^x dx$

c)  $\int 4^{3x} dx$

b)  $\int e^x dx$

d)  $\int e^{3x+1} dx$

(7) Calcula:

a)  $\int \operatorname{sen} x dx$

d)  $\int \operatorname{sen}(4x) dx$

g)  $\int \cos(x-4) dx$

b)  $\int \operatorname{sen}(x+1) dx$

e)  $\int \cos x dx$

h)  $\int x \cos x^2 dx$

c)  $\int \frac{\operatorname{sen} \ln x}{x} dx$

f)  $\int \cos(2x) dx$

i)  $\int \cos \frac{x}{2} dx$

(8) Calcula:

a)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

b)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

(9) Calcula:

a)  $\int \frac{dx}{1+x^2}$

c)  $\int \frac{dx}{1+3x^2}$

e)  $\int \frac{dx}{2+3x^2}$

b)  $\int \frac{dx}{1+4x^2}$

d)  $\int \frac{dx}{9+x^2}$

(10) Calcula:

a)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

f)  $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$

k)  $\int \operatorname{tg} x dx$

b)  $\int \frac{x dx}{3-2x^2}$

g)  $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

l)  $\int \operatorname{cotg} x dx$

c)  $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$

h)  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

m)  $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{1+x^2} dx$

d)  $\int \frac{x dx}{4+x^4}$

i)  $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x dx$

n)  $\int \frac{x^4 dx}{(x^5+1)^4}$

e)  $\int \operatorname{sen} \frac{1}{x} \frac{dx}{x^2}$

j)  $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$

n)  $\int \frac{x^4 dx}{(x^5+1)^4}$

(11) **PAEU2008S.** Calcular  $\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}}$  (solución)

(12) **PAEU2012S.** Calcular  $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{3+\operatorname{sen}^2 x} dx$  (solución)

(13) **PAEU2004J.** De todas las primitivas de la función  $f(x) = 2 \operatorname{tg} x \sec^2 x$  hállese la que pasa por el punto  $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ . (solución)

(14) Calcula  $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx$  (solución)

► Integración por partes

(15) Calcula:

a)  $\int \arcsen x \, dx$  (solución)      g)  $\int \ln x \, dx$  (solución)

b)  $\int \arctg x \, dx$  (solución)      h)  $\int \ln x^2 \, dx$  (solución)

c)  $\int (x^2 - 1) \sin x \, dx$  (solución)      i)  $\int x \ln x \, dx$  (solución)

d)  $\int 2x^3 \cos x \, dx$  (solución)      j)  $\int x^2 \ln x \, dx$  (solución)

e)  $\int (x + 1)e^{-x} \, dx$  (solución)      k)  $\int x \ln x^2 \, dx$  (solución)

f)  $\int e^x \cos x \, dx$  (solución)

(16) **PAEU2010S, apartado b.** Calcular  $\int (x + 3)e^{x+2} dx$ . (solución)

(17) **PAEU2015J, apartado b.** Hallar la función  $f(x)$  que cumple  $f'(x) = x \ln(x^2 + 1)$  y  $f(0) = 1$ . (solución)

► Integrales racionales

(18) Calcula:

a)  $\int \frac{dx}{9 + x^2}$  (solución)      d)  $\int \frac{dx}{25 + x^2}$  (solución)

b)  $\int \frac{x dx}{x^2 + 9}$  (solución)      e)  $\int \frac{3x dx}{x^2 + 36}$  (solución)

c)  $\int \frac{x^3 dx}{16 + x^4}$  (solución)

(19) Calcula:

a)  $\int \frac{x - 1}{x + 1} \, dx$  (solución)      d)  $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}$  (solución)

b)  $\int \frac{x}{x^2 + 4} \, dx$  (solución)      e)  $\int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} \, dx$  (solución)

c)  $\int \frac{dx}{a + bx^2}$  (solución)

(20) **PAEU2008S.** Calcular  $\int \frac{dx}{x(x+1)}$  (solución)

(21) **PAEU2009J.** Calcular  $\int \frac{1}{1-x^2} dx$  (solución)

(22) **PAEU2013S.** Calcular  $\int \frac{1}{x^2-x-2} dx$ . (solución)

(23) **PAEU2012J.** Calcular  $\int \frac{1}{x^2+x+3} dx$  (solución)

► Integrales varias

(24) Calcula:

a)  $\int \sin 2x \, dx$  (solución)      f)  $\int 7e^{3x} \, dx$  (solución)

b)  $\int 3 \sin 4x \, dx$  (solución)      g)  $\int \frac{6 \sin 3x}{\operatorname{tg} 3x} \, dx$  (solución)

c)  $\int (4x+3)^2 dx$  (solución)      h)  $\int 4e^{2x-3} \, dx$  (solución)

d)  $\int \sin^2 x \, dx$  (solución)      i)  $\int 5\sqrt{e^{5x}} \, dx$  (solución)

Comprobación.

j)  $\int \sin 4x \, dx$  (solución)

e)  $\int 4e^{8x} \, dx$  (solución)      k)  $\int 9 \cos 3x \, dx$  (solución)

Sugerencia: escribe  $\sin^2 x$  usando la fórmula del ángulo mitad.

(25) Calcula:

a)  $\int \frac{8x+5}{\sqrt[3]{4x^2+5x+1}} \, dx$  (solución)

b)  $\int \frac{24x^2-2x+1}{(8x^3-x^2+x)^{\frac{7}{2}}} \, dx$  (solución)

c)  $\int (4x+6)\sqrt{x^2+3x-4} \, dx$  (solución)

d)  $\int \frac{3x^2+10x}{(\sqrt{x^3+5x^2-2})^5} \, dx$  (solución)

e)  $\int \frac{6x^2+14x+3}{(2x^3+7x^2+3x)^{\frac{5}{3}}} \, dx$  (solución)

(26) Calcula:

$$a) \int \frac{x^2}{x^2+1} dx \quad (\text{solución}) \quad c) \int \cos^2 x dx \quad (\text{solución})$$

$$b) \int \frac{2dx}{x^3-x} dx \quad (\text{solución})$$

(27) **PAEU2004J.** Calcúlese  $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx$  (\text{solución})

(28) **PAEU2004S.** Calcúlese una función primitiva de  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$  que pase por el punto  $P(e, 2)$ . (\text{solución})

(29) **PAEU2005S.** Calcúlese  $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$  (Ya lo he resuelto como ejemplo).

(30) **PAEU2008J.** Calcular  $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$  (\text{solución})

(31) **PAEU2010J.** Calcular  $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$  (\text{solución})

(32) **PAEU2010S.** De  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se sabe que  $f''(x) = x^2 + 2x + 2$  y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto  $P(1, 2)$ . Hallar la expresión de  $f$ . (\text{solución})

### ► Regla de Barrow

(33) Calcula:

$$a) \int_1^2 x dx \quad (\text{solución}) \quad c) \int_1^2 \frac{dx}{x} \quad (\text{solución})$$

$$b) \int_0^{\pi/2} \sin x dx \quad (\text{solución}) \quad d) \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx \quad (\text{corregido en un ejemplo})$$

(34) **PAEU2006S.** Calcúlese  $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{(4-2x^2)}{x} \cdot \ln(x) dx$  (\text{solución})

(35) **PAEU2005J.** Calcúlese  $\int_1^3 x \cdot e^{1-x^2} dx$  (\text{solución})

(36) **PAEU2008J.** Dada  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^2}{x} & \text{si } x > 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ , calcular  $\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x^2 f(x) dx$  (\text{solución})

### ► Cálculo de áreas

(37) Calcular el área comprendida entre la gráfica de  $y = \cos x$ , el eje OX, en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . (\text{solución})

- (38) **PAEU2004S.** Hállese el área del recinto limitado por las parábolas de ecuaciones respectivas  $y = 6x - x^2$  e  $y = x^2 - 2x$ . *(solución)*
- (39) **PAEU2006J.** Hállese el área del recinto limitado por la parábola  $y = -x^2$  y la recta  $y = 2x - 3$  *(solución)*
- (40) **PAEU2006J.** Dada la función  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ , calcúlese el área de la región limitada por dicha gráfica y las rectas  $x = 0$ ,  $y = 0$ . *(solución)*
- (41) **PAEU2007J.** Sea la función  $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ . Calcular el área de la región limitada por dicha gráfica y las rectas  $x = -4$ ,  $x = -2$  y el eje  $x$ . *(solución)*
- (42) **PAEU2007J.** Hallar el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones:

$$y = x^2 - 4, \quad y = 3x - 6$$

*(solución)*

- (43) **PAEU2009J.** Calcular los valores de  $a$  para los cuales el área comprendida entre la gráfica de la función  $y = -x^2 + a^4$  y el eje OX es de  $\frac{256}{3}$  unidades de superficie. *(solución)*
- (44) **PAEU2009S.** Sea la función  $f(x) = \sin x + \cos x$ , definida en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$  y las rectas de ecuaciones  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$ , e  $y = 2$ . *(solución)*
- (45) **PAEU2011J.** Calcular el área de la región finita y limitada por la gráfica de la función  $f(x) = x^3 - x + 1$  y la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 1$ . *(solución)*
- (46) Calcular el valor positivo de  $a$  para que  $\int_0^{a-1} (x+1) dx = \frac{a}{2}$  *(solución)*

### ► Varios

- (47) **PAEU2005S.** Sea  $P(a, \sin a)$  un punto de la gráfica de la función  $f(x) = \sin x$  en el intervalo  $[0, \pi]$ . Sea  $r_P$  la recta tangente a dicha gráfica en el punto  $P$  y  $A_P$  el área de la región determinada por las rectas  $r_P$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi$ ,  $y = 0$ . Calcúlese el punto  $P$  para el cual el área  $A_P$  es mínima. (Nota: Puede asumirse, sin demostrar, que la recta  $r_P$  se mantiene por encima del eje OX entre 0 y  $\pi$ )

*Solución: [parte 1](#) - [parte 2](#) - [parte 3](#) - [parte 4](#)*

- (48) **PAEU2013J.** Sea la función  $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} + bx & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ c \ln x & \text{si } 1 < x \end{cases}$ . Hallar  $a$ ,  $b$  y  $c$  sabiendo que  $f(x)$  es continua en  $(0, \infty)$ , la recta tangente a  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = \frac{1}{16}$  es paralela a la recta  $y = -4x + 3$ , y se cumple que  $\int_1^e f(x) dx = 2$ .

- (49) **PAEU2012S.** Hallar el área de la región comprendida entre las rectas  $x = 1$ ,  $x = 4$  y que está limitada por dichas rectas, la gráfica de la función  $f(x) = |x^2 - 4|$  y el eje OX.
- (50) **PAEU2014J.** Hallar la función polinómica de grado 3 sabiendo que su gráfica pasa por el punto  $P(1, 0)$ , que tiene por tangente en el punto de abscisa  $x = 0$  la recta de ecuación  $y = 2x + 1$ , y que su integral entre 0 y 1 vale 3.
- (51) **PAEU2015J.** Calcular el área del recinto delimitado por las gráficas de las funciones  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  y la recta  $x = e$ .

### ► Algunos ejercicios sencillos

- (52) **PAEU2007S.** Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación  $y = \ln x$ , el eje OX y las rectas  $x = 1$  y  $x = 2$ .
- (53) **PAEU2007S.** Sea la función  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ . Se pide hallar: El área de la región limitada por la gráfica de  $f$ , el eje OX y las rectas  $x = -2$ ,  $x = 2$ .
- (54) **PAEU2010J.** Dadas las funciones  $f(x) = \ln x$  y  $g(x) = 1 - 2x$ , hallar el área del recinto plano limitado por las rectas  $x = 1$ ,  $x = 2$  y las gráficas de  $f(x)$  y  $g(x)$ .
- (55) **PAEU2011S.** Calcular el área del recinto delimitado en el primer cuadrante, por la gráfica de la función  $y = \ln x$  y las rectas  $y = 0$ ,  $y = 1$  y  $x = 0$ .
- (56) **PAEU2014S.** Calcular el área delimitada por la parábola de ecuación  $y = 2x^2$  y la recta  $y = 2x + 4$ .