

Geometria Euclidea

Rette Parallele & Perpendicolari

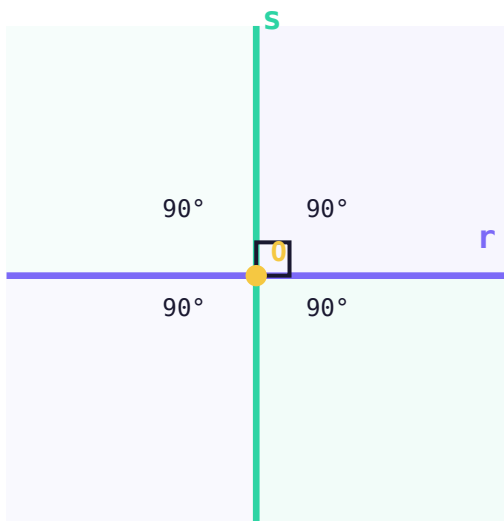
Geometria Interattiva — Classe prima

01

Rette Perpendicolari

DEFINIZIONE

Due rette incidenti si dicono **PERPENDICOLARI** se, incontrandosi, formano quattro angoli retti. Si scrive $r \perp s$.



Esempi nella vita reale:

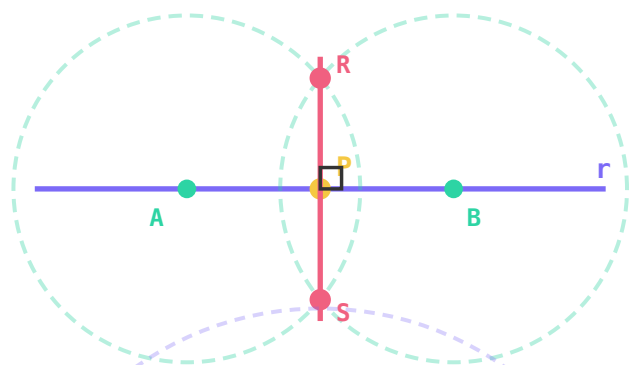
- Incrocio stradale — Due strade che si intersecano a 90°
- Quaderni a quadretti — Linee orizzontali \perp linee verticali
- Finestra — I lati formano angoli retti ai vertici

02

Costruire la Perpendicolare

CASO A — PUNTO P SULLA RETTA

Il punto da cui tracciare la perpendicolare si trova sulla retta r .

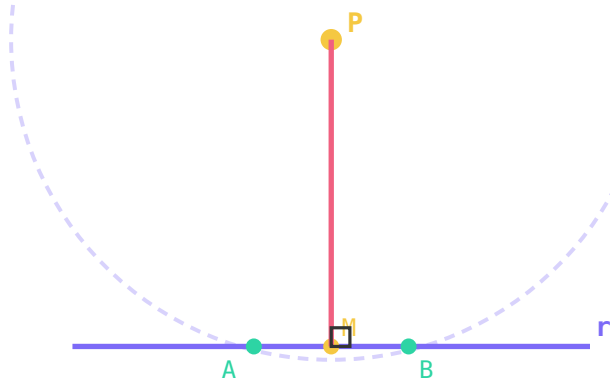


Passi costruttivi:

1. Data la retta r e il punto P su di essa.
2. Segna A e B equidistanti da P .
3. Con centro A , arco di raggio $> AP$.
4. Con centro B , stesso raggio: gli archi si incontrano in R e S .
5. La retta RS passa per P ed è \perp alla retta r . ✓

CASO B — PUNTO P ESTERNO ALLA RETTA

Il punto da cui tracciare la perpendicolare è esterno alla retta r .



Passi costruttivi:

1. Da P traccia una circonferenza che interseca r in A e B .
2. Trova il punto medio M del segmento AB .
3. La retta PM è la perpendicolare cercata. ✓

03

Rette Parallele

DEFINIZIONE

Due rette si dicono **PARALLELE** se non hanno punti in comune oppure se coincidono. Si scrive $r \parallel s$.

Rette parallele distinte



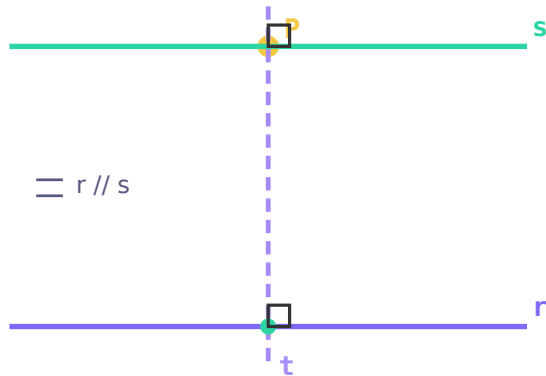
Rette coincidenti



$r \equiv s$ (coincidenti)

04

Costruire la Parallela



PASSI (SQUADRA E RIGA)

1. Traccia t perpendicolare a r passante per P.
2. Traccia s perpendicolare a t passante per P.
3. Allora $r \parallel s$. ✓

NOTA IMPORTANTE

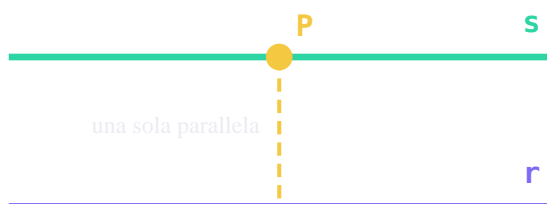
L'esistenza non richiede assiomi aggiuntivi oltre a quelli introdotti fino ad ora; l'unicità richiede l'introduzione di un nuovo assioma: il V postulato di Euclide.

05

Il V Postulato di Euclide

PERCHÉ SERVE UN POSTULATO?

L'unicità della parallela non si dimostra usando gli altri assiomi: va assunta come postulato aggiuntivo.

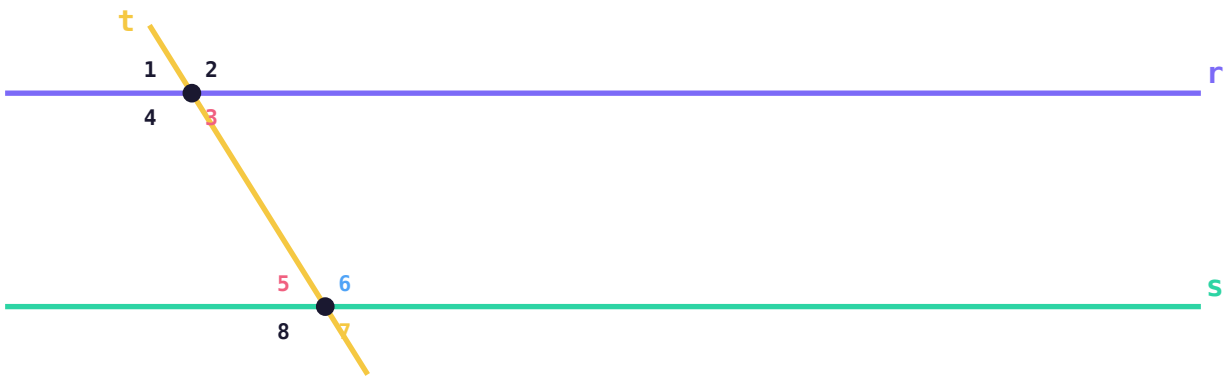


ENUNCIATO

«Dato un punto P e una retta r, la retta passante per P e parallela a r è unica»

06

Rette tagliate da una Trasversale



Definizione delle coppie di angoli

ALTERNI INTERNI

3 e 5, 4 e 6 — si trovano tra le due rette, su lati opposti della trasversale.

ALTERNI ESTERNI

1 e 7, 2 e 8 — si trovano all'esterno delle due rette, su lati opposti della trasversale.

CORRISPONDENTI

1 e 5, 2 e 6, 3 e 7, 4 e 8 — stessa posizione rispetto alla trasversale.

CONIUGATI INTERNI

3 e 6, 4 e 5 — tra le due rette, sullo stesso lato della trasversale.

CONIUGATI ESTERNI

1 e 8, 2 e 7 — fuori dalle due rette, sullo stesso lato della trasversale.

CRITERIO GENERALE DI PARALLELISMO

Due rette tagliate da una trasversale sono parallele se e solo se si verifica una delle seguenti condizioni:

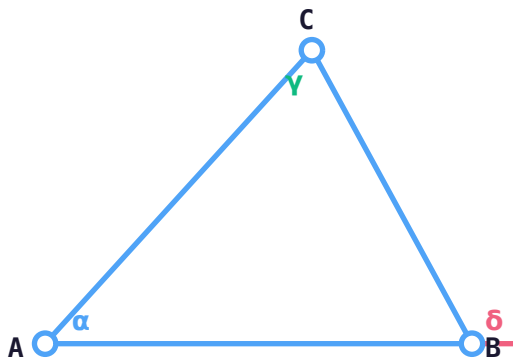
Angoli alterni interni (o esterni)	sono congruenti
Angoli corrispondenti	sono congruenti
Angoli coniugati interni (o esterni)	sono supplementari (somma = 180°)

07

Triangoli e angoli

TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO

Ciascun angolo esterno (δ) di un triangolo è congruente alla somma degli angoli interni (α e γ) a esso non adiacenti.



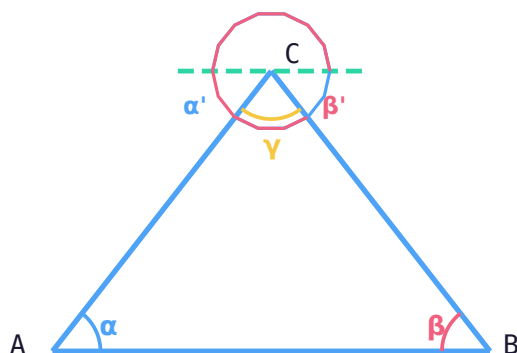
$$\delta = \alpha + \gamma$$

OSSERVAZIONE

Il primo teorema dell'angolo esterno può essere visto come conseguenza di questo teorema.

TEOREMA — SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI

La somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è 180° (angolo piatto).



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

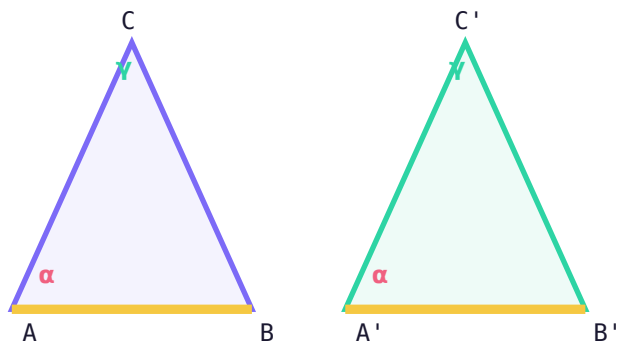
Dimostrazione:

1. Traccia per C una retta parallela al lato AB.
2. $\alpha' \cong \alpha$ (alterni interni con AC) e $\beta' \cong \beta$ (alterni interni con BC).
3. Sulla retta parallela per C: $\alpha' + \gamma + \beta' = 180^\circ$ (angolo piatto).
4. Quindi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. ✓

Secondo criterio di congruenza generalizzato

ENUNCIATO

Due triangoli che hanno due angoli e un lato ordinatamente congruenti sono congruenti.



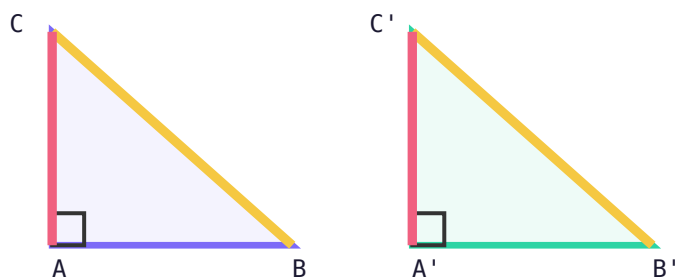
Congruenza dei Triangoli Rettangoli

OSSERVAZIONE

Con i triangoli rettangoli sono sufficienti meno elementi, rispetto al caso generale, per determinare la congruenza.

CRITERIO — IPOTENUSA E CATETO

Se due triangoli rettangoli hanno ordinatamente congruenti l'ipotenusa e un cateto, essi sono congruenti.



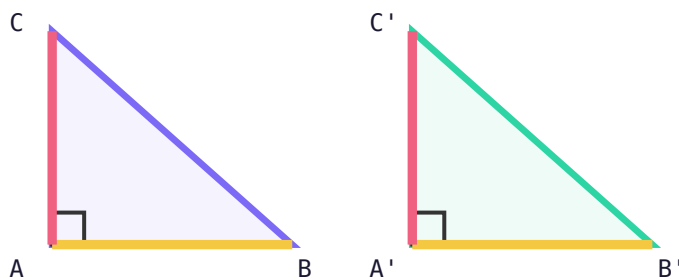
$BC \cong B'C'$ & $AC \cong A'C'$ → triangoli congruenti

NOTA

Questo criterio non ha un equivalente diretto nel caso generale: fissato l'angolo retto, ipotenusa + cateto determinano completamente il triangolo.

CRITERIO — DUE CATETI

Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno i due cateti rispettivamente congruenti.



$AB \cong A'B' \text{ \& } AC \cong A'C' \rightarrow \text{triangoli congruenti}$

OSSERVAZIONE

È una diretta conseguenza del Primo criterio di congruenza dei triangoli.

RIEPILOGO CONGRUENZE PER I TRIANGOLI RETTANGOLI

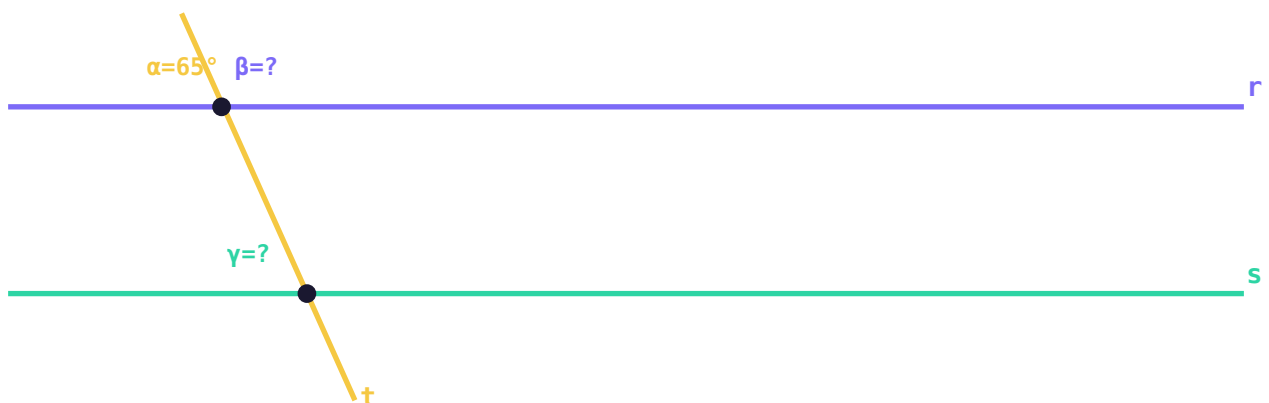
IC — Ipotenusa + 1 cateto congruenti \rightarrow triangoli congruenti. CC — Entrambi i cateti congruenti \rightarrow triangoli congruenti. IA — Ipotenusa + 1 angolo acuto congruenti \rightarrow triangoli congruenti (II criterio generalizzato). In tutti i casi l'angolo retto è già congruente per definizione.

08

Esercizi

1) Calcola l'angolo mancante

Le rette r e s sono parallele, tagliate dalla trasversale t . L'angolo $\alpha = 65^\circ$. Trova β e γ .



Soluzione: $\beta = 115^\circ$ (supplementare di α , dato che $\beta + \alpha = 180^\circ$)
 $\gamma = 65^\circ$ (alterni interni, congruente ad α)

2) Vero o Falso

1.	Due rette perpendicolari si incontrano formando quattro angoli retti.	V
2.	Due rette parallele si incontrano in un punto all'infinito.	F
3.	Gli angoli alterni interni sono congruenti quando le rette sono parallele.	V
4.	La somma degli angoli interni di un triangolo è 360°.	F
5.	Per il V postulato di Euclide, per un punto esterno passa una sola parallela.	V

3) Il terzo angolo del triangolo

In un triangolo due angoli misurano $\alpha = 40^\circ$ e $\beta = 45^\circ$. Calcola il terzo angolo γ .

SOLUZIONE

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 40^\circ - 45^\circ = 95^\circ$$

4) Abbinamento definizioni

Si incontrano formando quattro angoli retti.	→ Rette perpendicolari
Non hanno punti in comune (oppure coincidono).	→ Rette parallele
Retta che taglia altre due rette in due punti distinti.	→ Trasversale
Angoli su lati opposti della trasversale, tra le due rette, congruenti se le rette sono parallele.	→ Alterni interni
Per un punto esterno a una retta passa una e una sola retta parallela.	→ V postulato

5) Ordina i passi — Costruzione della perpendicolare

Ordine corretto: C → A → D → B → E

C	Considera la retta r e il punto P su di essa.
A	Segna due punti A e B su r equidistanti da P.
D	Traccia un arco con centro A e raggio maggiore di AP.
B	Traccia un arco con centro B con lo stesso raggio: gli archi si incontrano in R e S.
E	Traccia la retta RS: è la perpendicolare a r passante per P.