

Scomposizione di Polinomi

01 · Raccoglimento Totale

Raccogli il **MCD** di tutti i termini

Definizione

Si raccoglie il **Massimo Comun Divisore (MCD)** di tutti i termini come fattore fuori dalla parentesi, dividendo poi ciascun termine per esso.

$$ab + ac + ad = a(b + c + d)$$

Come trovare il MCD: calcola il MCD dei coefficienti numerici e, per ogni variabile, prendi la potenza con *esponente minore* presente in tutti i termini.

Polinomio	MCD	Forma scomposta
$6x^2 + 9x$	$3x$	$3x(2x + 3)$
$4a^3 - 8a^2 + 12a$	$4a$	$4a(a^2 - 2a + 3)$
$15x^2y - 10xy^2$	$5xy$	$5xy(3x - 2y)$
$12x^3 - 8x^2 + 4x$	$4x$	$4x(3x^2 - 2x + 1)$

Demo — Esempio guidato

$$6a^2b - 9ab^2 + 3ab$$

- 1 Identifica i coefficienti: 6, 9, 3 → MCD numerico = 3
- 2 Identifica le variabili: a^2 , ab^2 , ab → potenza minima a^1 , b^1
- 3 MCD totale = $3ab$
- 4 Dividi: $6a^2b \div 3ab = 2a \dots 9ab^2 \div 3ab = 3b \dots 3ab \div 3ab = 1$
- 5 Risultato: $3ab(2a - 3b + 1)$ ✓

Applica le tecniche nel giusto ordine

Regola d'oro

Segui sempre questa sequenza. Non saltare il primo passo: il **raccoglimento totale** semplifica tutto il resto.

- 1 **Cerca il MCD** di tutti i termini → Raccoglimento totale (*sempre primo*)
- 2 **Conta i termini rimasti** dopo il raccoglimento
- 3 **2 termini** → Differenza di quadrati · Differenza di cubi · Somma di cubi
- 4 **3 termini** → Quadrato di binomio · Trinomio monico · Trinomio non monico
- 5 **4 termini** → Raccoglimento parziale (raggruppa a coppie)
- 6 **Grado ≥ 2** con radici razionali → Metodo di Ruffini

Esempi completi

ESEMPIO: $2x^3 - 8x$

- 1 MCD = $2x \rightarrow 2x(x^2 - 4)$
- 2 2 termini in $x^2 - 4 \rightarrow$ differenza di due quadrati
- ✓ $2x(x - 2)(x + 2)$

ESEMPIO: $3x^3 - 12x^2 + 12x$

- 1 MCD = $3x \rightarrow 3x(x^2 - 4x + 4)$
- 2 3 termini \rightarrow quadrato di un binomio
- ✓ $3x(x - 2)^2$

ESEMPIO: $x^4 - 16$

- 1 Nessun MCD comune tranne 1
- 2 $(x^2)^2 - 4^2 \rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4)$
- 3 $x^2 - 4 \rightarrow$ ancora differenza di quadrati
- ✓ $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

03 · Raccoglimento Parziale

Raggruppa a coppie

Quando si usa

Con **4 termini**: si raggruppano a coppie e si raccoglie da ciascun gruppo, sperando che appaia un **binomio comune**.

$$ab + ac + db + dc = a(b + c) + d(b + c) = (a + d)(b + c)$$

Nota

Se i fattori tra parentesi **non coincidono**, prova un raggruppamento diverso cambiando l'ordine dei termini.

Polinomio	Raggruppa	Risultato
$x^3 + x^2 + 2x + 2$	$(x^3 + x^2) + (2x + 2)$	$x^2(x + 1) + 2(x + 1) = (x^2 + 2)(x + 1)$
$ax - ay + bx - by$	$(ax - ay) + (bx - by)$	$a(x - y) + b(x - y) = (a + b)(x - y)$
$ax + ay - bx - by$	$(ax + ay) - (bx + by)$	$a(x + y) - b(x + y) = (a - b)(x + y)$
$x^3 + 2x^2 + 3x + 6$	$(x^3 + 2x^2) + (3x + 6)$	$x^2(x + 2) + 3(x + 2) = (x^2 + 3)(x + 2)$

Esempio: scegliere il raggruppamento giusto

Polinomio: $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$

Soluzione A: $(2x^3 - 3x^2) + (4x - 6) \rightarrow x^2(2x - 3) + 2(2x - 3) = (x^2 + 2)(2x - 3) \checkmark$

Soluzione B: $(2x^3 + 4x) - (3x^2 + 6) \rightarrow 2x(x^2 + 2) - 3(x^2 + 2) = (2x - 3)(x^2 + 2) \checkmark$

Entrambi i raggruppamenti A e B funzionano!

04 · Prodotti Notevoli

Riconosci le forme speciali

Strategia

Dopo il raccoglimento totale, controlla se il polinomio corrisponde a uno dei seguenti **prodotti notevoli**. Riconoscerli ti risparmia molto lavoro!

QUADRATO DI BINOMIO (+)

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

QUADRATO DI BINOMIO (-)

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

DIFFERENZA DI QUADRATI

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

CUBO DI BINOMIO

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

SOMMA DI CUBI

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

DIFFERENZA DI CUBI

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Polinomio	Tipo	Scomposizione
$x^2 - 25$	Diff. quadrati	$(x - 5)(x + 5)$
$4a^2 - 9b^2$	Diff. quadrati	$(2a - 3b)(2a + 3b)$
$x^2 + 6x + 9$	Quadrato +	$(x + 3)^2$
$x^2 - 10x + 25$	Quadrato -	$(x - 5)^2$
$8x^3 + 27$	Somma cubi	$(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

△ Attenzione

La **somma di quadrati** $a^2 + b^2$ **NON si fattorizza** nei reali. Non confonderla con la differenza di quadrati $a^2 - b^2$!

05 · Trinomio

Trinomio **monico** e **non monico**

TRINOMIO MONICO

Condizione

Il coefficiente di x^2 è **uguale a 1**. Forma: $x^2 + sx + p$

$$x^2 + sx + p = (x + a)(x + b)$$

Metodo

Trova due numeri a e b tali che: $\mathbf{a + b = s}$ (coefficiente di x) e $\mathbf{a \cdot b = p}$ (termine noto).

Polinomio	s	p	a, b	Scomposto
$x^2 + 5x + 6$	5	6	2; 3	$(x + 2)(x + 3)$
$x^2 - 7x + 12$	-7	12	-3; -4	$(x - 3)(x - 4)$
$x^2 + x - 6$	1	-6	3; -2	$(x + 3)(x - 2)$
$x^2 + 2x - 15$	2	-15	5; -3	$(x + 5)(x - 3)$

TRINOMIO NON MONICO

Condizione

Il coefficiente di x^2 è **diverso da 1**. Forma: $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$.

- 1 Calcola il prodotto $\mathbf{a \cdot c}$
- 2 Trova m, n tali che $\mathbf{m + n = b}$ e $\mathbf{m \cdot n = a \cdot c}$
- 3 Riscrivi il termine bx come $\mathbf{mx + nx}$
- 4 Raggruppa a coppie: $(ax^2 + mx) + (nx + c)$
- 5 Raccogli da ciascun gruppo
- 6 Raccogli il **binomio comune**

ESEMPIO: $6x^2 + 7x + 2$

	Operazione	Risultato
1	$a \cdot c = 6 \cdot 2$	12
2	$m + n = 7, m \cdot n = 12$	$m = 3, n = 4$
3	Riscrivi $7x$	$6x^2 + 3x + 4x + 2$
4	Raggruppa	$(6x^2 + 3x) + (4x + 2)$
5	Raccogli	$3x(2x + 1) + 2(2x + 1)$
6	Fattore comune	$(3x + 2)(2x + 1) \checkmark$

Esercizi

Metti alla prova le tue conoscenze

Le risposte corrette sono evidenziate in verde.

1 · Raccoglimento totale — Qual è il MCD di $12x^3 - 8x^2 + 4x$?

- a) $2x$
- b) $4x$ ✓**
- c) $4x^2$
- d) $2x^2$

Il MCD dei coefficienti 12, 8, 4 è **4**. Potenza minima di x è x^1 .
MCD = $4x$ → forma scomposta: $4x(3x^2 - 2x + 1)$

2 · Prodotti notevoli — Scomponi $x^2 - 81$

- a) $(x - 9)^2$
- b) $(x + 9)^2$
- c) $(x - 9)(x + 9)$ ✓**
- d) Non scomponibile

$x^2 - 81 = x^2 - 9^2$ è una **differenza di quadrati**.
Formula: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ → $(x - 9)(x + 9)$

3 · Trinomio monico — Scomponi $x^2 - 5x + 6$

- a) $(x - 2)(x - 3)$ ✓**
- b) $(x + 2)(x + 3)$
- c) $(x - 1)(x - 6)$
- d) $(x - 2)(x + 3)$

$s = -5$, $p = 6$. Cerco $a + b = -5$ e $a \cdot b = 6$.
Provo: $-2 + (-3) = -5$ ✓ e $(-2) \cdot (-3) = 6$ ✓
Risposta: $(x - 2)(x - 3)$

4 · Vero o Falso

V Il raccoglimento totale va sempre applicato per primo.

F $a^2 + b^2 = (a + b)(a - b)$

V $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

✓ Nel trinomio monico si cerca a, b con $a + b = s$ e $a \cdot b = p$.

✓ Il raccoglimento parziale si usa tipicamente con 4 termini.

5 • Abbinamento — Associa ogni polinomio alla sua scomposizione

Polinomio	Scomposizione
$x^2 + 5x + 6$	$(x + 2)(x + 3)$
$4a^2 - 9b^2$	$(2a - 3b)(2a + 3b)$
$x^3 + x^2 + 2x + 2$	$(x^2 + 2)(x + 1)$
$6x^2 + 7x + 2$	$(3x + 2)(2x + 1)$
$2x^3 - 8x$	$2x(x - 2)(x + 2)$