Talete e Similitudini

01 · Proporzioni

Il linguaggio delle proporzioni

Definizione

Quattro grandezze **A, B, C, D** sono in **proporzione** se il rapporto tra le prime due è uguale al rapporto tra le ultime due. A e B devono essere omogenee (stessa unità), così come C e D.

$$A : B = C : D$$

Proprietà fondamentali delle proporzioni:

Proprietà	Descrizione
$A \cdot D = B \cdot C$	**Prodotto dei medi = prodotto degli estremi**
$B : A = D : C$	**Proporzione invertita**
$A : C = B : D$	**Proporzione per permutazione (si permutano i medi)**
$(A + B) : B = (C + D) : D$	**Proprietà di composizione**

Demo — Trova il termine mancante

$$A : B = C : X \;\Rightarrow\; X = \frac{B \cdot C}{A}$$

① Identifica i tre termini noti: $A = 6$, $B = 4$, $C = 9$
② Applica la proprietà: $A \cdot X = B \cdot C$
③ Risolvi: $6 \cdot X = 4 \cdot 9 = 36$
④ Risultato: $X = 36 \div 6 = \mathbf{6}$ ✓

02 · Teorema di Talete

Il Teorema di Talete — Rette parallele e trasversali

Prof.ssa M. Prandelli

Teorema di Talete

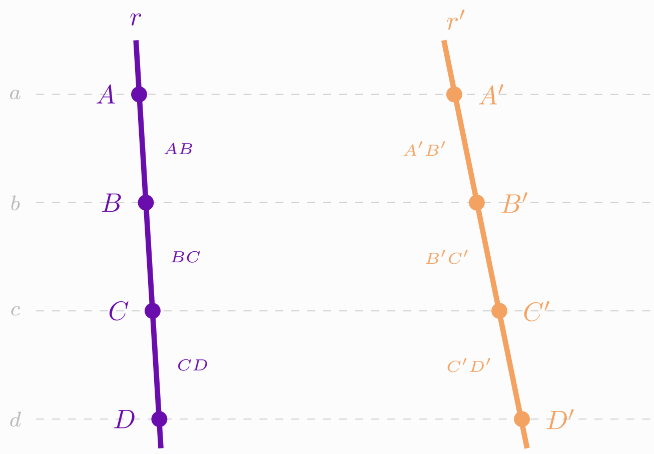
Dato un **fascio di rette parallele** tagliate da **due trasversali**, il rapporto tra due segmenti individuati dal fascio su una trasversale è uguale al rapporto tra i loro corrispondenti segmenti sull'altra trasversale.

$$AB : CD = A'B' : C'D'$$

Forma estesa: $AB : BC : CD = A'B' : B'C' : C'D'$

△ Nota Bene

La corrispondenza è rigida: se le rette sono parallele, il rapporto si conserva **sempre**, indipendentemente dalla posizione o inclinazione delle trasversali.



$$AB : BC : CD = A'B' : B'C' : C'D'$$

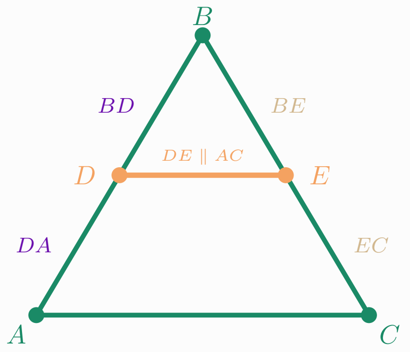
03 · Talete nel Triangolo

Talete applicato ai triangoli

Teorema

Se una retta **parallela a un lato** di un triangolo interseca gli altri due lati, allora li divide in **segmenti proporzionali**.

$$BD : DA = BE : EC$$



Teorema inverso

Se una retta interseca due lati di un triangolo in modo che i segmenti siano **proporzionali**, allora quella retta è **parallela al terzo lato**.

Esempio: $DE \parallel AC$, con $BD = 8$, $DA = 6$, $BE = 12$.

$$BD : DA = BE : EC \;\Rightarrow\; 8 : 6 = 12 : EC$$

$$EC = \frac{6 \times 12}{8} = \mathbf{9} \quad \checkmark$$

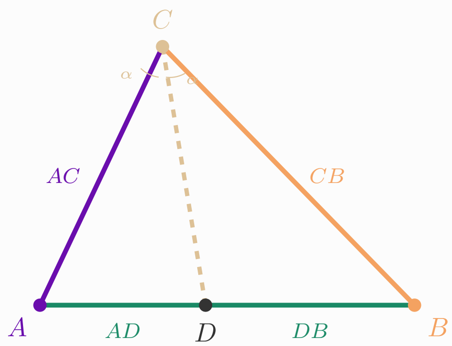
04 · Teorema della Bisettrice

La bisettrice e le proporzioni

Teorema della Bisettrice

In un triangolo, la **bisettrice di un angolo interno** divide il lato opposto in segmenti **proporzionali agli altri due lati.**

$$AD : DB = AC : CB$$



La bisettrice dell'angolo in C taglia AB nel punto D tale che:

$$AD : DB = AC : CB$$

Conoscendo due lati e la lunghezza totale AB si ricava la posizione di D.

Esempio: $AC = 10$, $CB = 15$, $AB = 25$.

$$\frac{AD}{25 - AD} = \frac{10}{15} \;\Rightarrow\; 15\,AD = 10(25 - AD)$$

$$25\,AD = 250 \;\Rightarrow\; \mathbf{AD = 10}, \quad DB = 15 \checkmark$$

05 · Similitudine tra Triangoli

Stessa forma, diversa scala

Definizione

Due triangoli sono **simili** ($\sim$) se hanno gli **angoli ordinatamente congruenti** ($\hat{A} \cong \hat{A}'$, $\hat{B} \cong \hat{B}'$, $\hat{C} \cong \hat{C}'$) e i **lati corrispondenti in proporzione**. Notazione: $ABC \sim A'B'C'$

$$AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C' = k$$

Rapporto di similitudine k

È il rapporto **costante** tra i lati omologhi. Se $k = 1$ i triangoli sono **congruenti**; se $k \neq 1$ sono simili ma non congruenti.

Triangoli	k	Relazione
$ABC: AB = 6, BC = 8, AC = 10$	2	**simile ad $A'B'C'$: $A'B' = 3$, $B'C' = 4$, $A'C' = 5$**
$PQR: PQ = 15, QR = 20, PR = 10$	3	**simile a $P'Q'R'$: $P'Q' = 5$, $Q'R' = 6{,}7$, $P'R' = 3{,}3$**

06 · Criteri di Similitudine

Come riconoscere triangoli simili

Strategia

Esistono tre criteri per stabilire la similitudine tra triangoli. È sufficiente verificarne **uno solo**!

1° CRITERIO — AA

Due angoli congruenti

$\hat{A} \cong \hat{A}'$ e $\hat{B} \cong \hat{B}' \Rightarrow ABC \sim A'B'C'$

2° CRITERIO — LAL

Due lati proporzionali + angolo compreso

$AB : A'B' = AC : A'C'$ e $\hat{A} \cong \hat{A}'$

3° CRITERIO — LLL

Tutti e tre i lati proporzionali

$AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C'$

MEMORIA RAPIDA

Confronto dei tre criteri

AA · LAL · LLL

Situazione	Criterio	Conclusione
Due angoli rispettivamente uguali	**AA**	**Simili**
Due lati in proporzione, angolo compreso uguale	**LAL**	**Simili**
Tutti e tre i lati proporzionali	**LLL**	**Simili**
Lati uguali e angoli uguali ($k = 1$)	**Congruenza**	**Congruenti**

△ Attenzione

Per la **congruenza** servono lati uguali; per la **similitudine** bastano angoli uguali o lati *proporzionali*. La similitudine è più «generosa»!

Prof.ssa M. Prandelli

La legge delle dimensioni

Dimensioni lineari — scala k

In figure simili, il fattore k vale per **tutte** le misure lineari: lati, altezze, perimetri, mediane, bisettrici.

$$\frac{2p'}{2p} = \frac{h'}{h} = k$$

Aree — scala k^2

Il rapporto tra le **aree** è il **quadrato** del rapporto di similitudine. Raddoppiare il lato ($k = 2$) quadruplica l'area.

$$\frac{\text{Area}'}{\text{Area}} = k^2$$

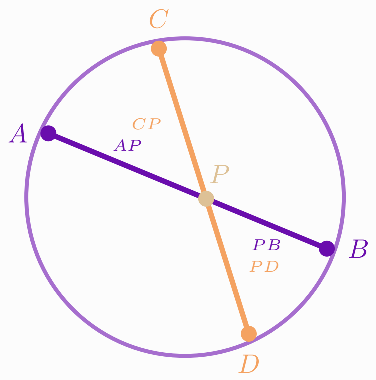
Grandezza	Rapporto	$k = 2$	$k = 3$
Lato	k	$\times 2$	$\times 3$
Altezza	k	$\times 2$	$\times 3$
Perimetro	k	$\times 2$	$\times 3$
Mediana	k	$\times 2$	$\times 3$
Area	k^2	$\times 4$	$\times 9$

Triangoli nascosti nel cerchio

Teorema delle Corde

Se due **corde si intersecano** in un punto P interno alla circonferenza, il prodotto dei segmenti di ciascuna corda è uguale al prodotto dei segmenti dell'altra.

$$CP \cdot PD = AP \cdot PB$$



Teorema delle Secanti

Da un punto P *esterno* alla circonferenza si tracciano due secanti che la incontrano in A, B e in C, D:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Tangente e Secante

Se da P si tracciano una tangente in T e una secante che incontra la circonferenza in A e B:

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

Esempio — Corde:

$AP = 3$, $PB = 8$, $CP = 6$. Trova PD.

$$6 \cdot PD = 3 \cdot 8 = 24 \;\Rightarrow\; \mathbf{PD = 4} \checkmark$$

Esercizi

Metti alla prova le tue conoscenze

Le risposte corrette sono evidenziate in verde.

1 · Teorema di Talete nel triangolo — $DE \parallel AC$ nel triangolo BAC. Dati $BD = 8$, $DA = 6$, $BE = 12$. Quanto misura EC?

a) 8
b) 16
c) 9 ✓
d) 6

Applica la proporzione di Talete: $BD : DA = BE : EC \;\Rightarrow\; 8 : 6 = 12 : EC$.
$EC = \dfrac{6 \times 12}{8} = \dfrac{72}{8} = \mathbf{9}$

2 · Criterio di similitudine — Due triangoli hanno $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$ e $A'B' = 3$, $B'C' = 4$, $A'C' = 5$. Quale criterio dimostra la similitudine?

a) 1° criterio (AA)
b) 2° criterio (LAL)
c) 3° criterio (LLL) ✓
d) Non sono simili

Calcola i rapporti: $6/3 = 2$, $8/4 = 2$, $10/5 = 2$.
Tutti i lati sono proporzionali con $k = 2 \Rightarrow$ **3° criterio (LLL)**: $\mathbf{ABC \sim A'B'C'}$.

3 · Aree di figure simili — Due triangoli simili hanno rapporto di similitudine $k = 3$ e il primo ha area $24\,\text{cm}^2$. Qual è l'area del secondo?

a) $72\,\text{cm}^2$
b) $96\,\text{cm}^2$
c) $216\,\text{cm}^2$ ✓
d) $48\,\text{cm}^2$

Le aree scalano con k^2: Area$' = 24 \times 3^2 = 24 \times 9 = \mathbf{216}\,\mathbf{cm^2}$

4 · Vero o Falso

- **V** Per il Teorema di Talete, rette parallele tagliate da due trasversali creano segmenti proporzionali.
- **F** Il rapporto tra le aree di due triangoli simili è uguale al rapporto di similitudine k.
- **F** La bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti uguali.
- **V** Se due triangoli hanno due angoli congruenti, allora sono simili (criterio AA).
- **V** Se il rapporto di similitudine è $k = 1$, i due triangoli sono congruenti.

5 · Abbinamento — Associa ogni enunciato al teorema corrispondente

Enunciato	Teorema
Rapporto costante tra lati omologhi di due triangoli simili	**k (rapporto di similitudine)**
Retta parallela a un lato divide gli altri due proporzionalmente	**Talete nel triangolo**
La bisettrice di $\hat{C}$ divide AB in D: $AD : DB = AC : CB$	**Teorema della bisettrice**
$CP \cdot PD = AP \cdot PB$ per due corde che si intersecano	**Teorema delle corde**
Il rapporto tra le aree di due figure simili è k^2	**Legge quadratica delle aree**

Prof.ssa M. Prandelli