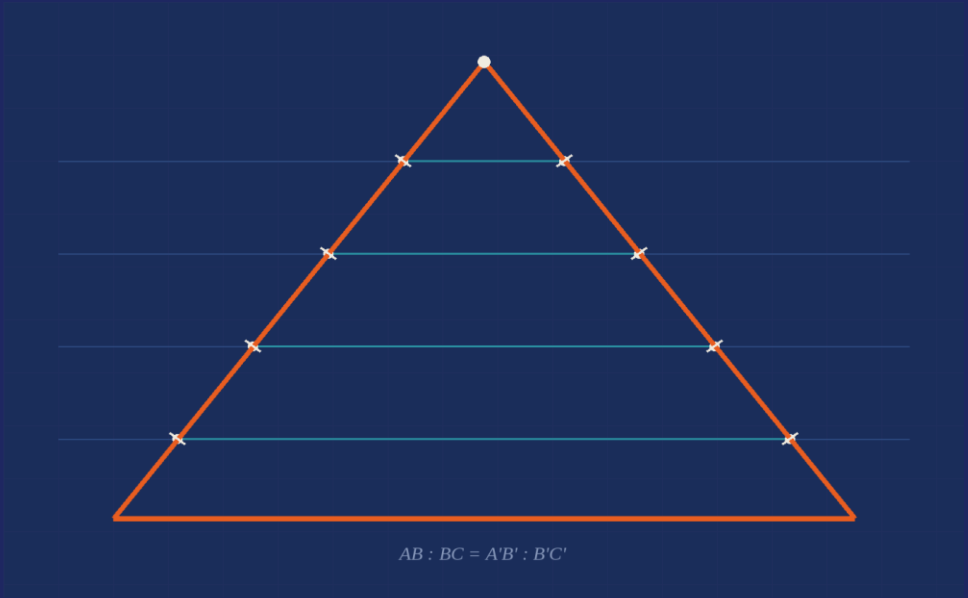
Geometria delle Relazioni

Teorema di Talete e Similitudine



Una guida visiva alla logica delle proporzioni e delle forme.

Un percorso dai segmenti lineari allo spazio bidimensionale.

Il Linguaggio delle Proporzioni

Definizione

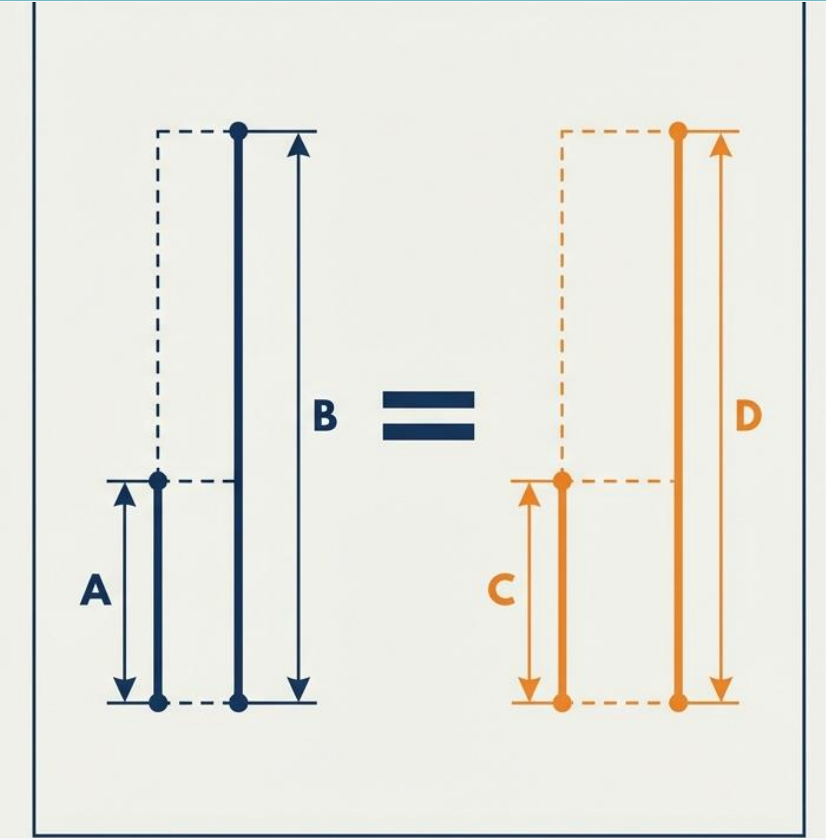
Quattro grandezze A, B, C, D sono in proporzione se il rapporto tra le prime due è uguale al rapporto fra le ultime due.

Formula

A : B = C : D

Nota Bene

A e B devono essere omogenee (stessa unità di misura), così come C e D.



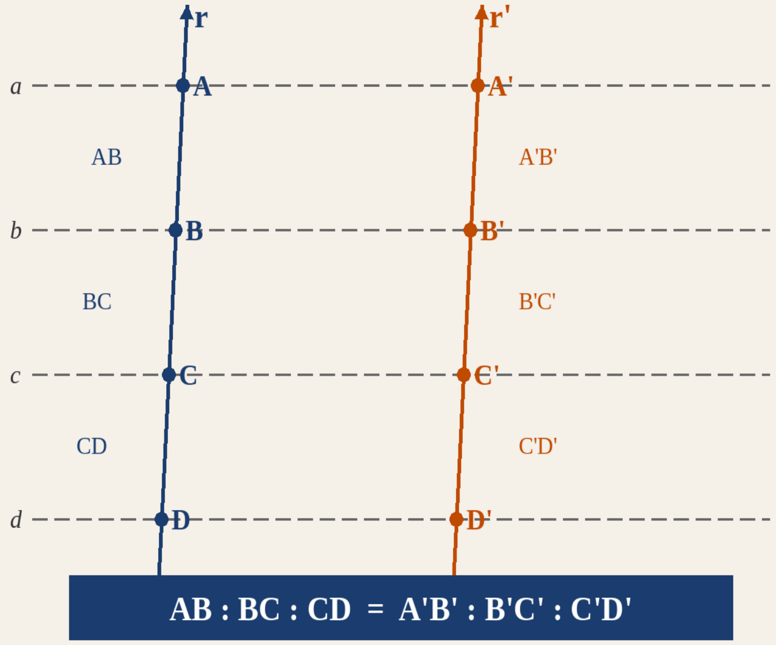
Il Ritmo delle Rette Parallele

Teorema di Talete

Dato un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali, il rapporto tra due segmenti individuati dal fascio su una trasversale è uguale al rapporto tra i loro corrispondenti segmenti sull'altra trasversale.

Formula: *AB : CD = A'B' : C'D'*

Nota Bene: La corrispondenza è rigida: se le rette sono parallele, il rapporto si conserva sempre.



Quando le Trasversali Formano un Triangolo

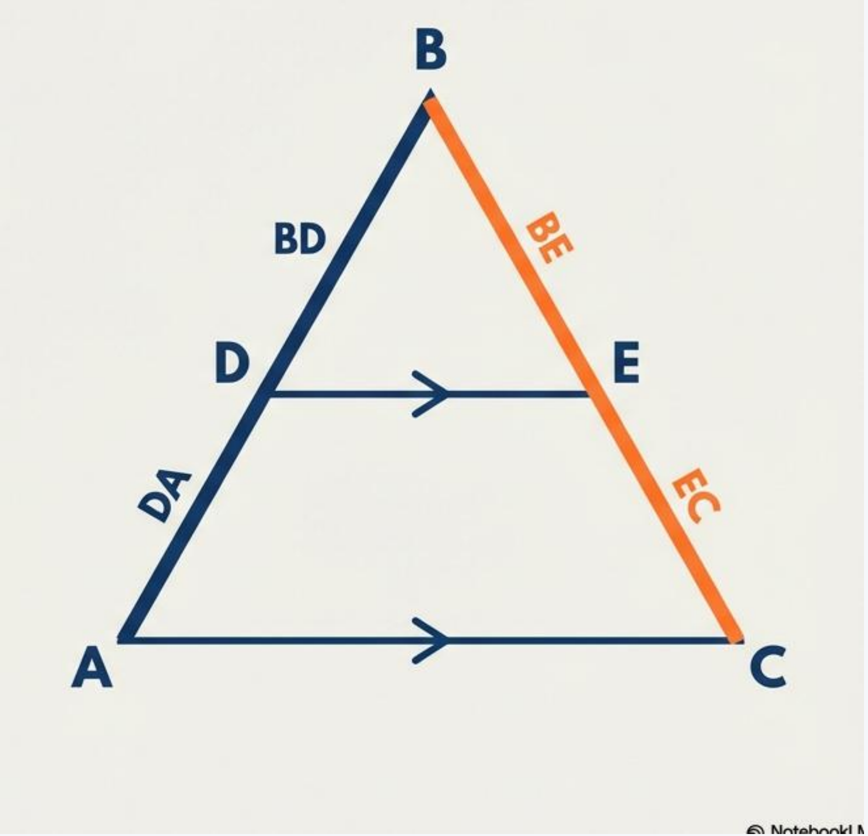
Retta parallela a un lato di un triangolo: Se una retta parallela a un lato di un triangolo interseca gli altri due lati, allora li divide in segmenti proporzionali.

Formula

BD : DA = BE : EC

Teorema Inverso

Se una retta interseca due lati di un triangolo in modo che i segmenti definiti sui due lati siano proporzionali, allora tale retta è parallela al terzo lato.



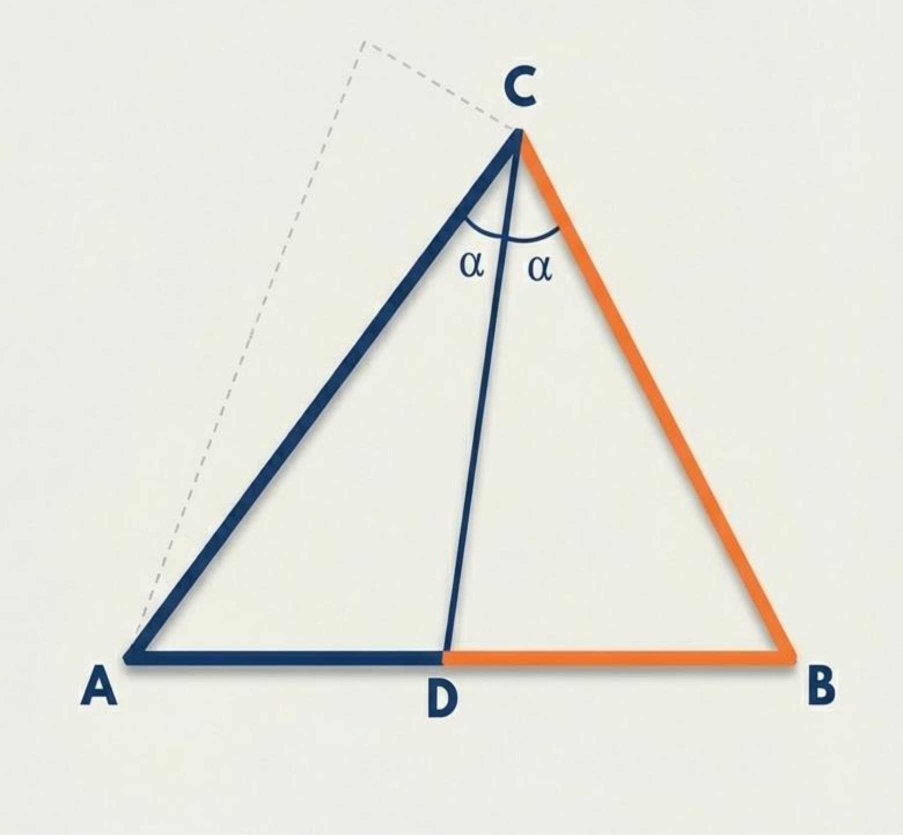
Il Teorema della Bisettrice

In un triangolo, la bisettrice di un angolo interno divide il lato opposto in segmenti

proporzionali agli altri due lati.

La Proporzione

AD : DB = AC : CB



Similitudine: Stessa Forma, Diversa Scala

Definizione

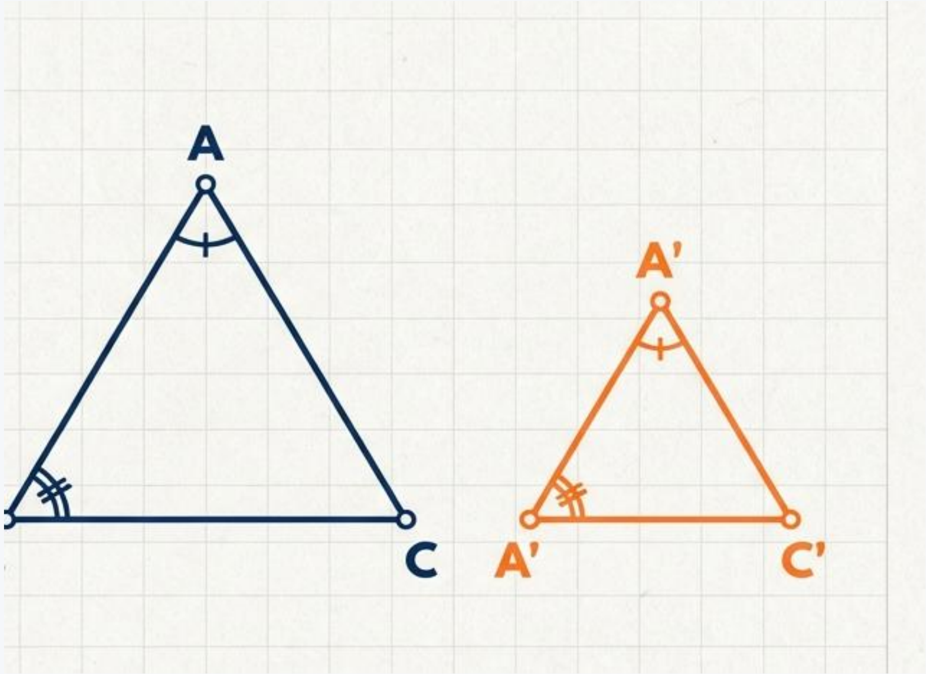
Due triangoli sono simili (~) se hanno:

1. Gli angoli ordinatamente congruenti (Â ≅ Â', ecc.)

2. I lati opposti agli angoli congruenti in proporzione.

Notazione: ABC ~ A'B'C'

Rapporto di Similitudine (k): Il rapporto costante tra i lati omologhi.

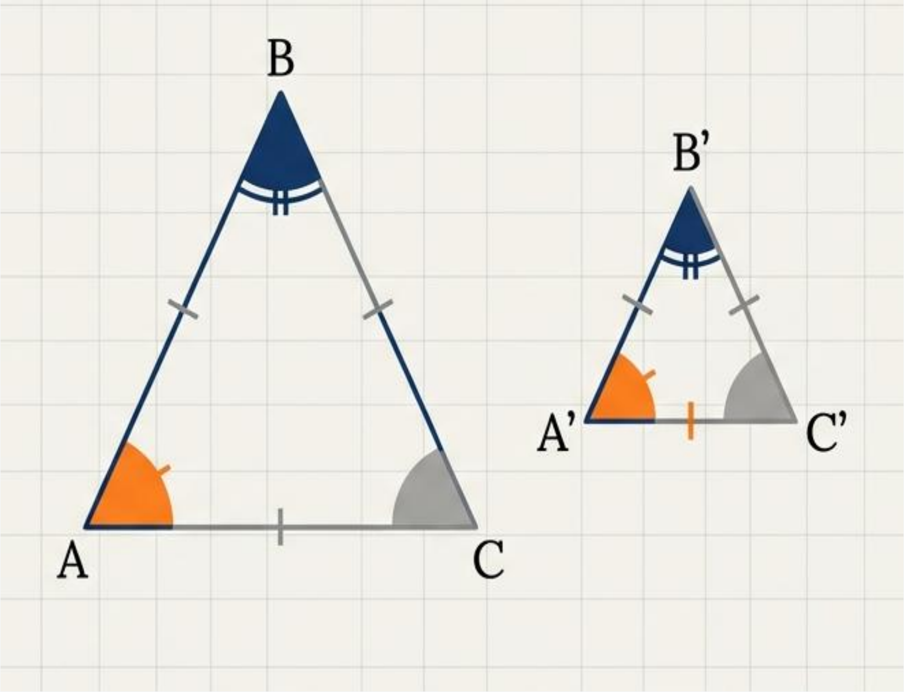


Il Primo Criterio di Similitudine

Definizione: Se due triangoli hanno due angoli rispettivamente congruenti, allora sono simili.

Perché funziona: Poiché la somma degli angoli interni è 180°, se due angoli sono congruenti, anche il terzo lo è necessariamente.

Logica: $\hat{A} \cong \hat{A}'$ e $\hat{B} \cong \hat{B}' \rightarrow ABC \sim A'B'C'$

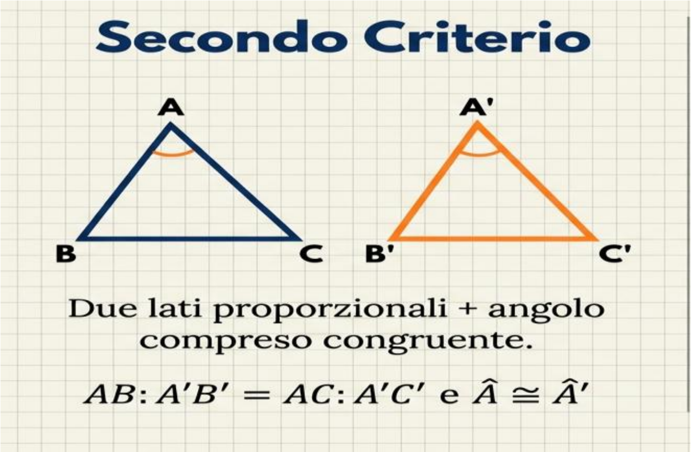


Secondo e Terzo Criterio di Similitudine

Secondo Criterio di similitudine

Se due triangoli hanno due lati in proporzione e l'angolo fra essi compreso congruente, allora sono simili.

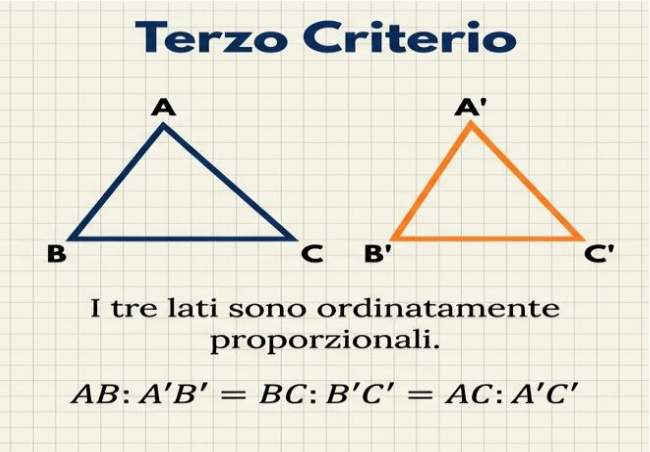
$AB:A'B' = AC:A'C'$ e $\hat{A} \cong \hat{A}'$



Terzo Criterio di similitudine

Se due triangoli hanno I lati proporzionali, allora sono simili.

$AB:A'B' = BC:B'C' = AC:A'C'$



Geometria nella Storia: Il Metodo dello Specchio

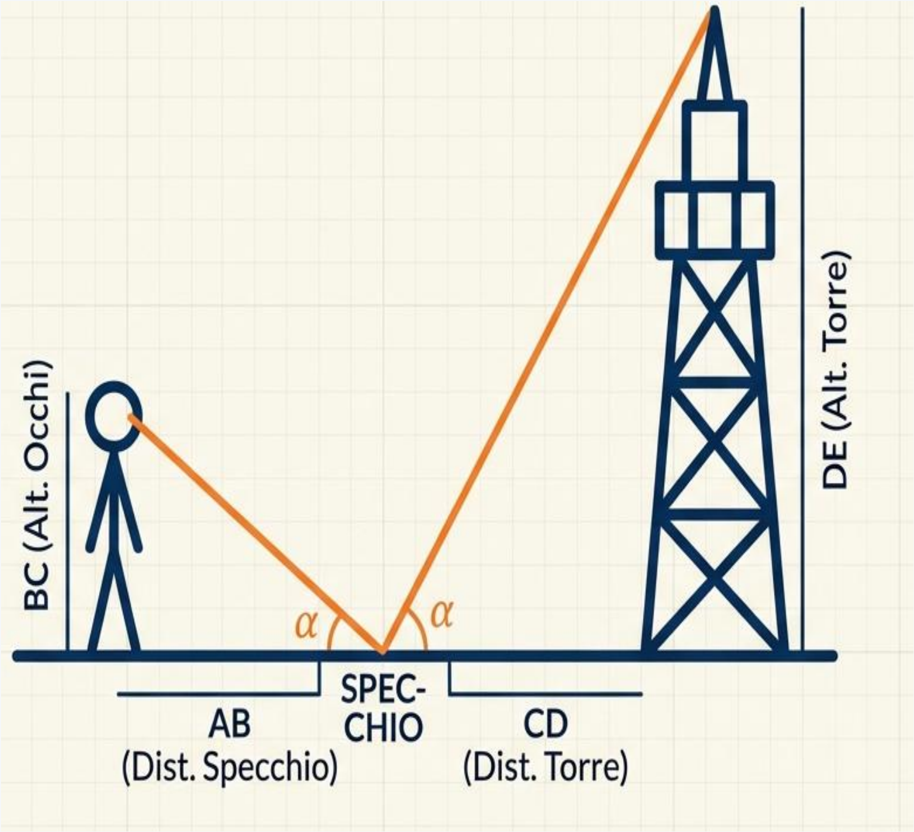
Contesto: Cosimo Bartoli (1500) usa la riflessione per creare triangoli simili (Primo Criterio).

Fisica: Angolo di incidenza = Angolo di riflessione.

Proporzione

Dist. Specchio : Dist. Torre = Alt. Occhi : Alt. Torre

CD : DE = BC : AB



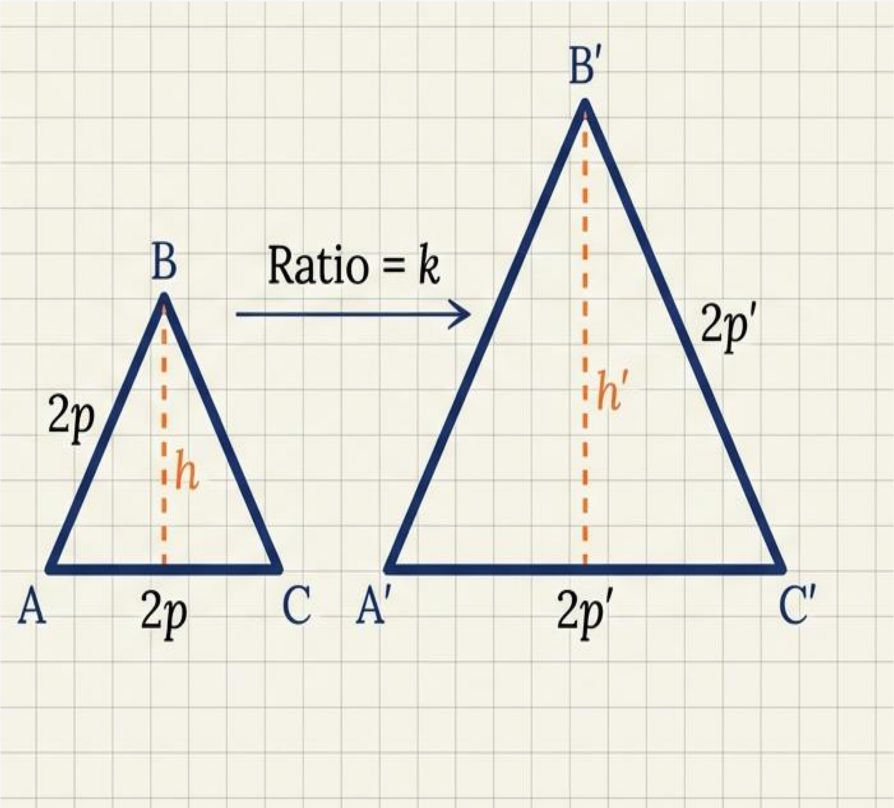
La Coerenza delle Dimensioni Lineari

Concetto: In due triangoli simili, il rapporto di similitudine *k* vale per **tutte** le lunghezze corrispondenti, non solo i lati.

Elementi che scalano con k

- Altezze (h)
- Perimetri (2p)
- Mediane e Bisettrici

Formula: ***2p' / 2p = h' / h = k***

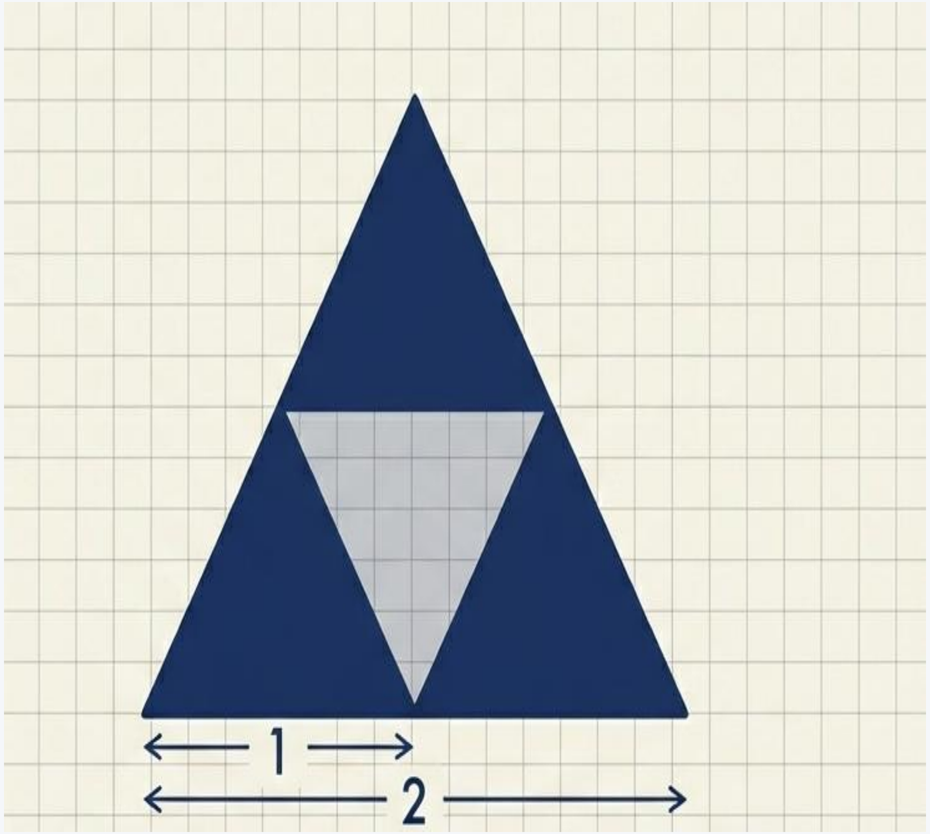


La Legge Quadratica delle Aree

La Regola: Se il rapporto di similitudine tra i lati è *k*, il rapporto tra le **aree** è ***k²***.

Esempio: Raddoppiando il lato ($k = 2$), l'area diventa quattro volte più grande ($2^2 = 4$).

Formula: ***Area' / Area = k²***

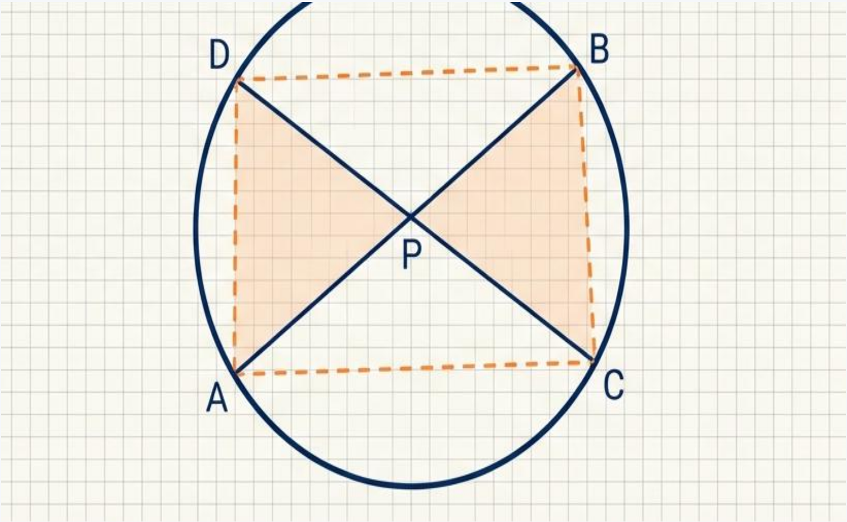


Triangoli Nascosti: Teorema delle Corde

Teorema: Se due corde si intersecano, i segmenti formati su una sono i medi e quelli sull'altra gli estremi di una proporzione.

Proporzione: *CP : AP = PB : PD*

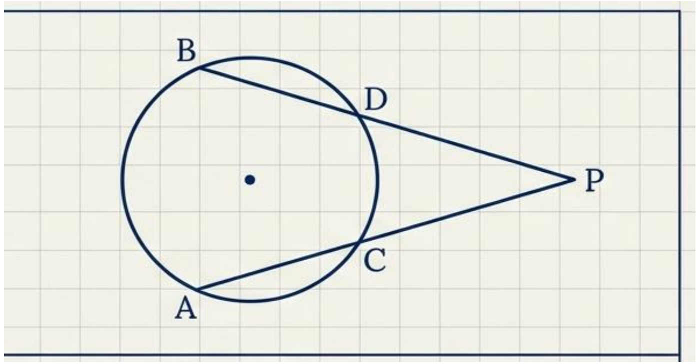
Risultato: ***CP · PD = AP · PB*** (Il prodotto dei segmenti è costante).



Relazioni Esterne: Secanti e Tangenti

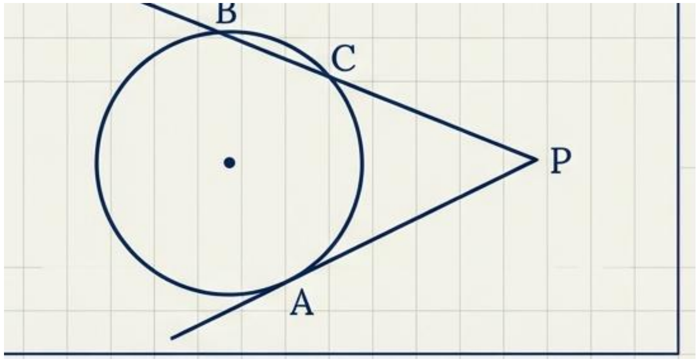
Teorema delle Secanti $PC \cdot PA = PB \cdot PD$

Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono due semirette secanti e si considerano i quattro segmenti che hanno un estremo nel punto esterno e l'altro nei punti di intersezione delle secanti con la circonferenza, il prodotto delle misure dei segmenti appartenenti ad una secante è uguale al prodotto delle misure dei due segmenti appartenenti all'altra secante.



Teorema della Tangente $PA^2 = PC \cdot PB$

Se da un punto esterno a una circonferenza si conducono una tangente e una secante, il prodotto fra le misure dei due segmenti che hanno un estremo nel punto esterno e l'altro nei punti di intersezione della secante con la circonferenza è uguale al quadrato della misura del segmento di tangenza..



Riepilogo: Il Quadro Completo

Teorema di Talete

$AB : CD = A'B' : C'D'$

Le rette parallele tagliate da due trasversali creano segmenti proporzionali.

Teorema della Bisettrice

$AD : DB = AC : CB$

La bisettrice di un angolo divide il lato opposto in segmenti proporzionali agli altri due lati.

Similitudine

Angoli uguali · Lati proporzionali (× k)

Due triangoli simili hanno angoli congruenti e lati omologhi in rapporto costante k.

Aree e Similitudine

$Area' / Area = k^2$

Il rapporto tra le aree di due figure simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.

Cerchio — Potenza di un punto: *$PA \cdot PB = PC \cdot PD$* | Due secanti o una tangente e una secante tracciati dallo stesso punto esterno.

La geometria non è statica; è la scienza di come le forme scalano e si relazionano nello spazio.