Uppgiftsseriepaket julen 2022

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 15.1.2023 per epost.
Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi
Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

OBS! Från och med nu börjar vi även uppmärksamma hur den lösningen är skriven, och till er ges negativ feedback även för det att svaren är otydligt skrivna.

Vi observerar bland annat följande saker:

- Varje steg i resonemang måste motiveras med en förnuftig noggrannhet, man får inte göra alltför långa intuitionshopp. Det som dock är ”för långa intuitionshopp”är svårt att definiera. Följande exempel har ett intuitionshopp som är för långt:

  > Nu är $x_1, \ldots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Alltså existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

  Det skulle vara bättre att skriva:

  > Nu är $x_1, \ldots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Eftersom en regelbunden 20-sidig kropp enbart har 30 kanter, existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

- Korrekt matematisk text består av hela meningar, och även formler är en del av meningarna. Du hittar exempel av denna stil exempelvis i den senaste tidens exempelsvar. Det lönar sig att eftersträva den här stilen. Eftersom ni inte ännu är universitets-studerande, godkänner jag även svar av er där t.ex. en rad ekvationer kopplats samman enabrt med ekvivalenspilar, om uppgiften möjliggör denna sorts lösningar.

- Om du är osäker över läsbarheten i din skrivstil, skriv då svaren med dator.

Bra matematisk text lär man sig tillverka enbart genom att öva. När du i tävlingssituationer skriver dina svar tydligt, kan du vara säker på att du i alla fall inte förlorar poäng på grund av att domarna inte förstått dina fina idéer.

Enklare uppgifter

1. Låt $x > 0$. Låt y_0 vara längden av en cirkels rand, vars diameter är x.

Låt A vara en grupp cirklar så att summan av deras diametrar är x. Låt y_1 vara summan av cirklarnas randers längder.

Bestäm $y_0 - y_1$.

2. På bordet finns det lappar, varje lapp har ett tal mellan $1 - 100$ på sig, det finns exakt två lappar av varje tal.

Två spelare spelar ett spel, där vardera spelare på sin tur tar en lapp från bordet.

När båda spelarna har spelat 20 gåner, tar spelet slut. Vardera spelare får ett poäng för varje samlat par av lappar som har samma tal på sig. Den spelare som har mera poäng, vinner. Om vardera spelare har samma mängd poäng, är spelet oavgjort.

Visa att spelet genom optimalt spelande slutar oavgjort, alltså så att vardera spelare kan hindra den andra från att vinna.

3. Samma uppgift som Uppgift 2, förutom, det finns fyra lappar av varje tal. Dessutom i poängräknandet finns det en stipulering att varje lapp enbart kan räknas tillhöra ett poänggivande par.

4. Vi spelar samma spel som i uppgift 2, förutom att spelet tar slut först när alla lappar har blivit tagna.

Visa att spelet nu slutar oavgjort oavsett spelarnas spelstrategier.

5. Riikka kör med mopedbil till sin mormor. Resan består av tre olika vägdelar. På alla dessa tre delar kör Riikka med konstant hastighet (som kan vara olika för olika delar av vägen).

När Riikka har kört 30% av resan, har hen använt mindre än 30% av den totala resetiden. När Riikka har kört 50% av resan, har hen använt mer än 50% av den totala resetiden.

Är det möjligt att efter att Riikka har kört 70% av sin resa har använt mindre än 70% av den totala resetiden?

6. Låt S vara en regelbunden 2000-hörning. Visa att om man från S väljer 1501 hörn och ritar en månghörning utgående från dessa hörn, är det oundvikligt att det i den skapade 1501-hörningen finns två parallella sidor.

7. Låt n vara ett positivt heltal som har följande egenskap: För varje $i, 1012 \leq i \leq 2022$ hittas en faktor n_i till n (som inte behöver vara en primtalsfaktor), för vilken det gäller att $n_i \equiv i \mod 2023$.

Visa att motsvarande n_i hittas för varje $1 \leq i \leq 2022$.

8. 101 visa personer står i en ring. Varje person håller en av två möjliga åsikter: Antingen att månen är gjord av Emmental, eller att månen är gjord av Edam.

Alla säger sin åsikt högt. Efter detta byter varje person åsikt ifall att hen står mellan två personer som är av annan åsikt än hen.

Operatorn som beskrivs i ovanstående stycke repeteras. Visa att man till slut anländer vid ett såndat tillstånd där ingen mera ändrar åsikt.

9. På randen av en cirkel finns det 99 tal. Om a och b är två tal som är bredvid varandra gäller en av följande

- $|a - b| = 1$.
- $|a - b| = 2$.
- $\frac{a}{b} = 2$ eller $\frac{b}{a} = 2$.

Visa att det på cirkelns rand finns ett tal som är delbart med tre.

Svårare uppgifter

10. Låt $\angle BAC$ vara en vinkel, och ω en cirkel som ritas in i vinkeln så att den tangerar vinkelns vinkelben i punkterna B och C. Låt l vara en linje som skär linjerna AB och AC i punkterna K och L, samt cirkeln ω i punkterna P och Q. Punkterna S och T finns på linjen BC så att KS och AC är parallella samt att TL och AB är parallella.

Låt R vara skärningspunkten mellan linjerna PQ och BC.

Visa att punkterna P, Q, S, T ligger på randen av samma cirkel.

11. Runt den spetsiga triangeln ABC ritas en cirkel Ω. Vi ritar tangenter till cirkeln Ω i punkterna B och C. Låt P vara deras skärningspunkt. Punkterna D och E finns på linjerna AB och AC så att PD och PE är vinkelräta emot linjerna AB och AC.

Visa att triangeln ADE:s höjders skärningspunkt är medelpunkten till sidan BC.

12. Låt ω_1 och ω_2 vara cirklar, vars mittpunkter är O_1 och O_2. Antar att ω_1 och ω_2 skär varandra i punkterna A och B. Till cirklarna ω_2 och ω_1 ritar vi tangenter i punkten A. Dessa skär linjerna O_1B och O_2B i punkterna K och L.

Visa att linjerna KL och O_1O_2 är parallella.

13. Låt $a_1, \ldots, a_{11}$ vara naturliga tal, som är minst 2, och vars summa är 407. Låt n vara ett naturligt tal. Räknar ihop resterna från divisionerna när n delas med talen $a_1, \ldots, a_{11}, 4a_1, \ldots, 4a_{11}$.

Är det möjligt att summan av divisionsresterna blir 2012?

14. Låt n vara ett positivt heltal. Kallar n:s två största faktorer, som inte är n, för talet n:s huvudfaktorer.

Låt nu a och b vara positiva heltal, som har samma huvudfaktorer. Visa att $a = b$.

15. Låt a, b, c, d vara positiva reella tal, för vilka det gäller att

$$2(a + b + c + d) \geq abcd.$$

Visa att

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq abcd.$$

16. Låt a, b, c, d vara positiva heltal, för vilka $c > b$. Antar vidare att $a + b + c + d = ab - cd$. Visa att $a + c$ inte är ett primtal.

17. Låt $P(x)$ och $Q(x)$ vara polynom av grad 10 så att båda termerna av grad tio har 1 som koefficient. Vidare antar vi att ekvationen $P(x) = Q(x)$ inte har reella lösningar.

Visa att ekvationen $P(x - 1) = Q(x + 1)$ har en reell lösning.

18. Låt S vara en konvex n-hörning där n är udda.

I S:et ritar vi sträckor som binder samman hörnen så att inga sträckor binder samman två hörn som ligger bredvid varandra.

Vi kallar en sträcka bra om den skär exakt en annan sträcka innuti S.

Vad är den största möjliga mängden bra sträckor som det kan finnas i månghörningen?