Kesän 2024 valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Myös osittaiset ratkaisut tai vain yritykset muutamaan tehtävään kannattaa palauttaa. Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 1.9.2024 mennessä sähköpostitse Veera Nurmelalle:
beepa.art@gmail.com

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Koska niin ratkaisuiden ymmärrettävyyden kuin kilpailuissa saatavien pisteiden kannalta on oleellista, että ratkaisut on kirjoitettu selkeällä ja riittävän tarkalla tavalla, kiinnitetään ratkaisuista saatavassa palautteessa huomiota myös ratkaisuiden kirjoitusasuun.

Huomiota kiinnitetään mm. seuraaviin asioihin:

- Onko päättelyaskeleet perusteltu järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä ole tehty. Sitä, mikä on "liian pitkä intuitiohyppy" on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \dots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \dots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

Joissain näissä tehtävissä saattaa olla apua pisteen potenssista ja sen käänteisestä versiosta sekä polynomien tulomuodosta. Pisteen potenssista voi lukea oppaan "Kilpamatematiikan peruskurssi" luvusta 24.2 . Pisteen potenssin käänteinen versio sanoo seuraavaa: Olkoot P, A, B, C, D pisteitä tasossa sekä pisteet P, A, B ja P, C, D samalla suoralla. Lisäksi oletetaan, että kaikki pisteet A, B, C, D eivät ole samalla suoralla ja, että piste P on joko sekä pisteiden A ja B että pisteiden C ja D välissä tai että se ei ole kummassakaan edellisistä väleistä. Jos pätee

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD,$$

niin pisteet A, B, C ja D ovat samalla ympyrällä. Polynomien tulomuodosta (eli polynomien esittämisestä sen nollakohtien avulla) taas löytää tietoa "Kilpamatematiikan peruskurssin" luvusta 8.

1. Suorakulmaisen kolmion kahden sivun pituudet ovat 3 ja 4. Kuinka pitkä kolmas sivu on?

2. Rosa rakentaa 16×24-kokoista pelilautaa. Hän haluaa käyttää samankokoisia neliönmuotoisia laattoja pelilaudan rakentamiseen. Mikä on suurin mahdollinen laatan koko, mitä hän voi käyttää?

3. Olkoon $a + 1 = b + 2 = c + 3 = d + 4 = a + b + c + d + 5$. Laske $a + b + c + d$.

4. Pöydällä on 16 palloa, joiden painot ovat $13, 14, 15, \ldots, 28$ grammaa. Etsi 13, 14, 27 ja 28 grammaa painavat pallot orsivaa'an avulla tekemällä yhteensä korkeintaan 26 punnitusta.

5. Kuinka moni luvun 3 positiivisista, parillisista monikerroista on neliöluku ja pienempi kuin luku 2024?

6. Kaksi ympyrää leikkaavat toisensa pisteissä E ja F. Eräs suora leikkaa nämä ympyrät pisteissä A, B, C ja D, tässä järjestyksessä. Jos kulma $\angle AFD = \alpha$, niin kuinka suuri on kulma $\angle CEB$ (kulman α avulla ilmaistuna)?

7. Laatikossa on keltaisia, sinisiä ja punaisia palloja, kymmenen kutakin väriä. Kuinka monella eri tavalla pallot voidaan jakaa kymmenen ja 20 pallon ryhmiin niin, että kumpikin ryhmä sisältää ainakin yhden pallon kutakin väriä?

8. Eräässä positiivisten kokonaislukujen jonossa uusi termi saadaan lisäämällä edelliseen termiin sen suurin numero. Mikä on suurin mahdollinen määrä peräkkäisiä parittomia lukuja, joita jonossa voi olla?

9. Määritellään

$$P(x) = (x - 1^2)(x - 2^2) \cdots (x - 100^2).$$

Kuinka monella kokonaisluvulla n pätee $P(n) \leq 0$?

10. Olkoon $f(x)$ toisen asteen reaalilukukertoiminen polynomi. Osoita, että on olemassa toisen asteen polynomit $h(x)$ ja $g(x)$, joilla pätee $f(x)f(x + 1) = h(g(x))$.

11. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio. Lisäksi oletetaan, että pisteen B kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa sivua AC vasten, leikkaa ympyrän, jonka halkaisija on AC, pisteissä P ja Q. Vastaavasti oletetaan, että pisteen C kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa janaa AB vasten, leikkaa ympyrän, jonka halkaisija on AB, pisteissä R ja S.

Osoita, että pisteet P, Q, R ja S ovat samalla ympyrällä.

12. Aliisa pelaa kolikoilla seuraavaa peliä laatikoita A ja B käyttäen: Aluksi laatikossa A on n kolikkoa ja laatikko B on tyhjä. Yhdellä askeleella Aliisa voi siirtää yhden kolikon laatikosta A laatikkoon B tai poistaa laatikosta A k kolikkoa, missä k on laatikossa B olevien kolikoiden lukumäärä. Aliisa voittaa pelin, kun laatikko A on tyhjä.

(a) Osoita, että jos laatikossa A on aluksi 6 kolikkoa, niin Aliisa pystyy voittamaan neljällä askeleella.

(b) Aluksi laatikossa A on 2018 kolikkoa. Mikä on pienin määrä askelia, joka tarvitaan, jotta Aliisa voittaa pelin?

Vaikeampia tehtäviä

Joissain seuraavista tehtävistä saattaa olla hyötyä äärettömän laskeutumisen periaatteesta tai "Lifting the exponent" lemmasta.

Äärettömän laskeutumisen periaatteesta voi lukea esimerkiksi teoksen "Lukuteorian törmäyskurssi" esimerkistä 5.

Lifting the exponent lemmaan taas voi tutustua esimerkiksi Matematiikkakilpailijat blogin avulla.

13. Tarkastellaan säännöllistä 12-kulmiota. Kuinka monella eri tavalla voidaan muodostaa tasoon neliö, jonka kaksi kärkeä ovat 12-kulmion kärkien joukossa?

14. Kaksi ympyrää ω_1 ja ω_2 leikkaavat pisteissä A ja B. Mielivaltainen pisteen B kautta piirretty suora leikkaa ympyrät ω_1 ja ω_2 pisteissä C ja D (samassa järjestyksessä). Pisteet E ja F valitaan ympyröiltä ω_1 ja ω_2 (samassa järjestyksessä) siten, että $CE = CB$ ja $BD = DF$. Oletetaan, että BF leikkaa ympyrän ω_1 pisteessä P ja BE leikkaa ympyrän ω_2 pisteessä Q.

Osoita, että A, P ja Q ovat samalla suoralla.

15. Muodostetaan kirjaimista A, B ja C kuuden kirjaimen sana. Kirjain A valitaan todennäköisyydellä x, kirjain B todennäköisyydellä y ja kirjain C todennäköisyydellä z, missä $x+y+z = 1$. Millä todennäköisyyksillä x, y ja z sanan $BACBAB$ todennäköisyys on maksimaalinen?

16. Tarkastellaan binääristä sanaa $W = a_1a_2 \ldots a_n$. Yhdellä siirrolla voidaan poistaa tai lisätä tyyppiä AAA oleva sana, missä A on binäärisana. Voidaanko näillä siirroilla muodostaa sana 10 sanasta 01?

17. Positiiviset kokonaisluvut $x_1, x_2, \ldots, x_7$ toteuttavat ehdot $x_6 = 144$ ja $x_{n+3} = x_{n+2}(x_{n+1} + x_n)$, kun $n = 1, 2, 3, 4$. Etsi luvun x_7 kolme viimeistä numeroa.

18. Etsi kaikki polynomit $p(x)$, joille $xp(x-1) = (x-26)p(x)$ kaikilla reaaliluvuilla x.

19. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ sellaisia kokonaislukuja, että jos mikä tahansa luvuista poistetaan, niin loput luvuista voidaan jakaa kahteen n luvun joukkoon, joiden summat ovat samat. Osoita, että on oltava $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n+1}$.

20. Etsi kaikki alkuluvut p, joilla $11^p + 10^p$ on jonkin kokonaisluvun potenssi n^k, missä $k > 1$.

21. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ (missä $\mathbb{Z}^+$ tarkoittaa positiivisten kokonaislukujen joukkoa), joille pätee $f(n!) = f(n)!$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n ja joille luku $m - n$ jakaa luvun $f(m) - f(n)$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla m, n.

22. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä, jonka keskipiste on I, sivuaa sivua BC pisteessä D. Suora DI leikkaa AC:n pisteessä X. Pisteestä X piirretty tangentti (eri kuin AC) kolmion sisään piirretylle ympyrälle leikkaa AB:n pisteessä Y. YI ja BC leikkaavat toisensa pisteessä Z. Osoita, että $AB = BZ$.

23. Olkoon M jokin piste kolmion $\triangle ABC$ sisällä sekä pisteet A_1, B_1 ja C_1 pisteen M kohtisuorat projektiot sivuille BC, CA ja AB vastaavasti. Osoita, että

$$MA \cdot MB \cdot MC \geq (MA_1 + MB_1)(MB_1 + MC_1)(MC_1 + MA_1).$$

24. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ keskenään eri suuria positiivisia kokonaislukuja ja olkoon M joukko, jonka alkiot ovat $n-1$ positiivista kokonaislukua, joista mikään ei ole $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Heinäsirkka hyppelee reaaliakselilla. Se lähtee origosta ja tekee n hyppyä oikealle. Hyppyjen pituudet ovat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jossain järjestyksessä.

Osoita, että heinäsirkka voi järjestää hyppynsä niin, ettei se milloinkaan osu pisteeseen, jonka koordinaatti on joukossa M.

Paina tästä, jos haluat tehtävän 24 vihjeet näkyviin.