Uppgiftsseriepaket sommar 2022

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 11.9.2022 per epost. Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Enklare uppgifter

1. Crawford spelar backgammon. Hen har en knapp sju steg från sin motståndares knapp samt en annan knapp fem steg från sin motståndares knapp. Crawfors kastar två tärningar och kan äta sin motståndares knapp om ögonsumman på tärningarna är antingen 5 eller 7, eller ifall någondera av tärningarna visar en femma.

Vad är sannolikheten att Crawford kan äta sin motståndares knapp?

2. Culbertson spelar bridge. Culbertsons motståndare till höger har 13 kort från en vanlig kortlek, lika för motståndaren som sitter till vänster. Culbertson vet att det bland med dessa kort finns spader knekt och spader dam. Culbertson vinner rundan om det har skett så lyckosamt att dessa kort finns hos en och samma spelare. Med vilken sannolikhet vinner Culbertson?

3. Definierar för de positiva heltalen a, b en räkneoperationerna $\circ_n$. Först och främst $a \circ_1 b = a + b$ och induktivt

$$a \circ_{n+1} b = a \circ_n (a \circ_n (a \circ_n (\cdots \circ_n a))),$$

där det finns b antal a:n på högra sidan. Alltså exempelvis $a \circ_2 b = ab$ och $a \circ_3 b = a^b$.

Visa att $2 \circ_n 2 = 4$ för alla positiva heltal n.

4. Man beslutade sig för att bestämma riksdagsledamöternas löner genom folkomröstning. Alla som röstar skriver ett naturligt tal på valsedeln. Medeltalet av alla dessa tal (avrundat till närmaste heltal) är riksdagsledamöternas månadslön.

Det finns färre än 5 miljoner röstare, och även riksdagsledamöterna får rösta. Visa att riksdagsledamöten Luihunen kan med sin egna rösträtt försäkra att hen får minst en miljon euro i månadslön.

5. I en kortlek har man numrerat korten med talen $1-100$, varje nummer finns på ett eget kort. Spelare spelar ett enpersonsspel där hen först delar ut två kort. Ett lägre kort a och ett större b. Sedan delar hen ut ett till kort c. Spelaren vinner om kortet c:s värde ligger mellan korten a och b.

Vad är sannolikheten att spelaren vinner spelet?

6. Enligt vanliga räkneregler räknar man potensen nedan på följande sätt:

$$2^{2^{2^2}} = 2^{(2^{(2^2)})} = 2^{16} = 65536.$$

Dock om man beräknade potensernas exponenter i en annan ordning, till exempel räknandes $\left(2^2\right)^{2^2} = 256$, hur många olika värden på potensen skulle det finnas?

7. Undersöker följden

$$1 * 2 * 3 * \cdots * 2022.$$

I följden kan man ersätta varje $*$ antingen med en $+$(plus)-beteckning eller en $-$(minus)-beteckning. Vad är det minsta möjliga postiva värde som det är möjligt för uttrycket att anta.

8. En oändligt liten loppa hoppar utan att stanna kring randen på enhetscirkeln. Den börjar från någon punkt på enhetscirkeln och hoppar motsols. För varje hopp rör den sig längs med randen en sträcka som har längden $2\pi x$, där $0 < x \leq 1/2$ är ett reellt tal. (Alla hopp är alltså lika långa.) För vilka värden på x besöker loppan samma punkt minst två gånger?

9. Låt n vara ett naturligt tal och k ett naturligt tal som är delbart med två men inte med fyra. Visa att det är omöjligt för både n och $n+k$ att vara kvadrattal.

10. Låt a, b, c vara positiva reella tal, för vilka $abc = 1/8$. Visa att

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq \frac{15}{16}.$$

Svårare uppgifter

11. Av eftervarandra följande naturliga tal bildas en ändlig följd. Enbart summorna av siffrorna i följdens första och sista tal är delbart med två.

Hur lång kan följden som längst vara?

12. Låt A vara en regelbunden $n-$hörning i planet, positionerad så att den är symmetrisk med avseende på $y-$axeln. Vi säger att roterandet eller speglandet av avbildningen A har symmetri med avbildningen A om den avbildar A till sig själv. Låt k vara avbildningen A roterad med $360/n$ grader motsols och p avbildningen A:s spegling med avseende till $y-$axeln.

Visa att alla A:s symmetrier kan presenteras som en följd av k:n och p:n.

13. Leta efter alla positiva heltal n, som har minst 4 positiva nämnare och för vilka

$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2,$$

när $d_1, \ldots, d_4$ är talet n:n fyra minsta positiva nämnare.

14. Låt $a_1, \ldots, x_n$ och $y_1, \ldots, y_n$ vara postiva reella tal. Visa att

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + \ldots, x_n)^2}{y_1 + \cdots + y_n}.$$

15. Låt a, b, c vara längderna av en triangels sidor och S arean av triangeln. Visa att

$$S \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}.$$

16. Det finns två tillåtna operationer: Multiplicerandet av ett tal med två ($\times 2$) samt minskande av talet med tre (-3). Bildar en följd bestående av tillåtna operationer med vars hjälp med tar sig från talet 11 till talet 25. Vad är den kortaste möjliga längden på denna följd?

17. I en omtyckt världsmästarskapsturning för scavengerhunt-spel deltog 1000 personer. De spelade tillsammans en mängd olika spel; två personer deltog alltid i varje spel, och inget par spelade tillsammans mer än ett spel.

Efter turneringen konstaterades att det från varje sådant par som spelat ett spel tillsammans hittades en spelare som spelat högst 20 spel.

Visa att det i turneringen tillsammans spelades som mest $980 \cdot 20$ spel.

18. Lös ekvationen

$$2^{a!} + 2^{b!} = c^3,$$

där a, b, c är positiva heltal.

19. Vi säger att en ändlig följd L bestående av naturliga tal är bra om dess största element förekommer i följden enbart en gång. Vi säger att följden L' är en delföljd till L om L' består av efter varandra följande element från L. Alltså är till exempel 376 en delföljd till följden 93761. Vi säger att L är superbra om alla dess delföljder är bra.

Man försöker skapa en superbra följd, vars storlek är 2000 element, genom att använda en så liten mängd olika tal som möjligt. Vad är den minsta mängden olika tal, för vilka detta är möjligt?