# Syyskuun 2021 valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 31.10.2021 sähköpostitse. Helpommat tehtävät: nirmal.krishnan(at)helsinki.fi ja vaikemmat: anne-maria.ernvall-hytonen(at)helsinki.fi.

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

——— : ———

Joissakin seuraavista tehtävistä voi olla apua kyyhkyslakkaperiaatteen (laatikkoperiaatteen) tuntemisesta tai värityksistä. Voit tutustua kyyhkyslakkaperiaatteeseen esimerkiksi Janne Järvisen youtube-videon avulla

`https://www.youtube.com/watch?v=hOBZ8n6PYNY`

tai englanniksi esimerkiksi TheTrevTutor kanavan videon

https://www.youtube.com/watch?v=2-mxYrCNX60

avulla. Värityksiin voi tutustua esimerkiksi Pitkän matematiikan lisäsivujen 1: Täsmällinen päättely luvun 2 avulla:

`https://www.mayk.fi/wp-content/uploads/2017/06/Pitkan-matematiikan-lisasivut-1.pdf`.

## Helpompia tehtäviä

**1.** Osoita, että jokaisella terävällä kulmalla $\alpha$ pätee

$$\tan\alpha + \cot\alpha \geq 2.$$

**1. tehtävän ratkaisu:** Koska $\alpha$ on terävä, voidaan se ajatella sellaisen suorakulmaisen kolmion kulmaksi, jonka toinen terävä kulma on $90^\circ - \alpha$ ja jonka kateettien pituuksia voidaan merkitä kirjaimin $a$ ja $b$. Nyt

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Epäyhtälössä voidaan vedota joko aritmeettis-geometriseen tai siihen, että $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \geq 0$.

**2.** Olkoot $a$ ja $b$ positiivisia lukuja. Millä luvun $x$ arvoilla lauseke

$$\frac{a + bx^4}{x^2}$$

saa pienimmän arvonsa?

**2. tehtävän ratkaisu:** Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön perusteella

$$\frac{a+bx^4}{x^2} = \frac{a}{x^2} + bx^2 \geq 2\sqrt{\frac{a}{x^2}\cdot ax^2} = a\sqrt{ab}.$$

Yhtäsuuruus vallitsee vain, jos $\frac{a}{x^2} = bx^2$. Tämä toteutuu, kun $x = \pm\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$.

**3.** Suomessa postinumero koostuu viidestä kokonaisluvusta, jotka ovat väliltä $[0,9]$. Valitaan satunnaisesti $n$ suomalaista. Mikä on pienin luku $n$, jolla vähintään kahden ihmisen postinumeroiden ensimmäinen ja viimeinen numero ovat varmasti samat?

**3. tehtävän ratkaisu:** **Vastaus:** Pienin kysytty luku $n$ on 101.

Postinumeron ensimmäiselle ja viimeiselle numerolle on kummallekin 10 erilaista vaihtoehtoa. Siispä erilaisia ensimmäisen ja viimeisen numeron yhdistelmiä on $10 \cdot 10 = 100$. Näin ollen laatikkoperiaatteen nojalla kysytty luku on 101.

**4.** Olkoon $ABC$ kolmio, missä $\angle ABC = 90°$, $AC = 26$ ja $BC = 24$. Olkoon piste $D$ sivulla $BC$ pisteiden $B$ ja $C$ välissä. Lisäksi olkoon $E$ sellainen piste, jolle $\angle CDE = 90°$, $\angle ECD = \angle BCA$ ja $CE = 13$. Laske $AE$.

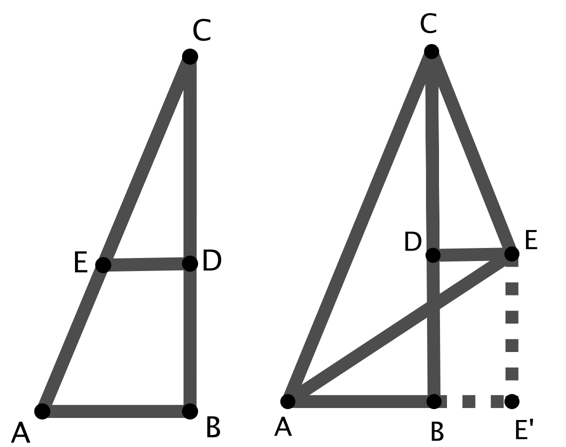
**4. tehtävän ratkaisu:** **Vastaus:** Pisteen $E$ sijainnista riippuen on $AE = 13$ tai $AE = 3\sqrt{41}$.

Koska kolmioilla $ABC$ ja $EDC$ on kaksi yhtäsuurta kulmaa, niin ne ovat yhdenmuotoiset. Vastinsivujen avulla saadaan

$$\frac{CD}{24} = \frac{CD}{CB} = \frac{CE}{AC} = \frac{1}{2}$$

eli $CD = 12$. Pythagoraan lauseen nojalla pätee $DE = 5$ ja $AB = 10$. Edelleen pisteen $D$ sijainnin takia on voimassa $BD = BC - CD = 12$. Koska piste $D$ on sivulla $BC$ pisteiden $B$ ja $C$ välissä ja on $\angle ECD = \angle BCA$, niin piste $E$ on joko sivulla $AC$ tai kolmion $ABC$ ulkopuolella (ks. kuva 1). Jos piste $E$ on sivulla $AC$, niin pätee

$$AE = AC - CE = 26 - 13 = 13.$$




Kuva 1: Pisteen $E$ mahdolliset sijainnit

Oletetaan nyt, että piste $E$ on kolmion $ABC$ ulkopuolella. Olkoon $E'$ pisteen $E$ projektio suoralle $AB$. Jana $AE$ on kolmion $AE'E$ hypotenuusa, joten sen pituus saadaan laskettua tarkastelemalla kolmiota $AE'E$. Koska on $\angle CDE = 90°$, niin pätee $EE' = BD = 12$. Edelleen, on

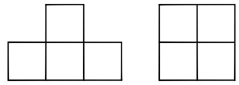
$$AE' = AB + BE' = AB + DE = 10 + 5 = 15.$$

Täten saadaan

$$AE = \sqrt{AE'^2 + EE'^2} = \sqrt{15^2 + 12^2} = 3\sqrt{41}.$$

Siis on $AE = 13$ tai $AE = 3\sqrt{41}$ riippuen pisteen $E$ sijainnista.

**5.** Osoita, että $8 \times 8$-lautaa ei voida peittää 15 T-laatalla ja yhdellä neliölaatalla.



**5. tehtävän ratkaisu:** Tämä vaikuttaa hyvin tyypilliseltä väritystehtävältä (sen lisäksi, että tehtävä on väritystehtävien kertaustehtävänä); liittyyhän tämä alueen laatoittamiseen. Tutkitaan siis, saisiko jollain sopivalla värityksellä todistettua väitteen ja kokeillaan ensiksi tyypillistä shakkilautaväritystä.

Väritetään lauta kuten shakkilauta yleensä väritetään. Neliölaatta peittää kaksi mustaa ja kaksi valkoista ruutua. T-laatta peittää joko kolme mustaa ja yhden valkoisen ruudun tai päinvastoin. T-laatoilla olisi peitettävä siis 30 valkoista ja 30 mustaa ruutua. Parittomalla määrällä T-laattoja ei kuitenkaan voi peittää parillista määrää mustia tai valkoisia ruutuja. $\square$

**6.** Luokassa on 33 oppilasta ja heidän ikiensä (vuosissa) summa on 430 vuotta. Osoita, että luokassa on aina 20 oppilasta, joiden ikien summa on yli 260 vuotta.

**6. tehtävän ratkaisu:** Koska halutaan tutkia, onko mahdollista, että joidenkin oppilaiden ikien summa on yli jonkin luvun, on järkevä tutkailla, milloin tarkasteltava luku on mahdollisimman suuri. Tarkasteltavien 20 oppilaan ikien summa on mahdollisimman suuri, kun he ovat luokan vanhimmat oppilaat.

Valitaan siis luokasta 20 vanhinta oppilasta. Tehdään vastaoletus, että heidän ikiensä summa on korkeintaan 260 vuotta. Tarkastellaan 20 vanhimmasta oppilaasta nuorinta oppilasta. Jos nuorin olisi vähintään 14 vuotta vanha, niin vanhimman 20 oppilaan yhteenlaskettu ikä olisi ainakin $20 \cdot 14 = 280$ vuotta. Siis nuorin 20 vanhimmasta oppilaasta on korkeintaan 13 vuotta vanha. Täten kaikki 13 nuorinta oppilasta ovat enintään 13 vuotta vanhoja. Siis, jos vanhimman 20 oppilaan yhteenlaskettu ikien summa on korkeintaan 260 vuotta, niin kaikkien oppilaiden ikien summa on korkeintaan $260 + 13 \cdot 13 = 429$. Mutta oletuksena oli, että oppilaiden ikien summa on 430 vuotta. Siis ei ole mahdollista, että 20 vanhimman oppilaan ikien summa olisi korkeintaan 260 vuotta. Siispä sen on oltava yli 260 vuotta ja täten luokassa on 20 oppilasta, joiden ikien summa on yli 260 vuotta. $\square$

**7.** Osoita, että minkä tahansa seitsemän neliöluvun joukossa on kaksi neliölukua, joiden erotus on jaollinen kymmenellä.

**7. tehtävän ratkaisu:** Tutkitaan neliölukujen jäännösluokkia kymmenellä jaettaessa. Mahdolliset jäännösluokat kymmenellä jaettaessa ovat $0, 1, \ldots, 9$. Lukujen neliöt ovat tällöin

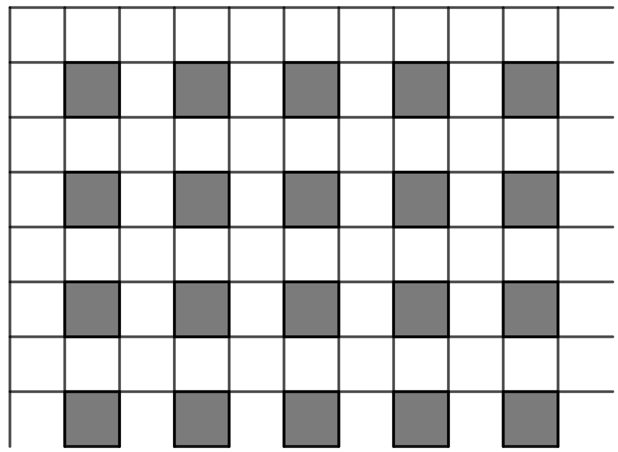
$$
\begin{aligned}
&0^2 \equiv 0 \pmod{10}, \quad 1^2 \equiv 1 \equiv 9^2, \quad 2^2 \equiv 4 \equiv 8^2 \pmod{10}, \\
&3^3 \equiv 9 \equiv 7^2 \pmod{10}, \quad 4^2 \equiv 6 \equiv 6^2 \pmod{10}, \quad 5^2 \equiv 5 \pmod{10}.
\end{aligned}
$$

Siis neliöillä on kuusi erilaista mahdollista jäännösluokkaa. Laatikkoperiaatteen nojalla seitsemästä neliöluvusta kaksi ovat siis samaa jäännösluokkaa modulo 10 ja täten niiden erotus on kymmenellä jaollinen. $\square$

**8.** Suorakulmion muotoinen lattia on peitetty $4 \times 1$- ja $2 \times 2$-laatoilla. Yksi laatta hajoaa, eikä samanlaisia laattoja enää ole jäljellä, mutta toisenlaisia on. Osoita, ettei lattiaa voi laatoittaa näillä laatoilla, vaikka laattojen paikkoja voisi muuttaa.

**8. tehtävän ratkaisu:** Ajatellaan lattian koostuvan $1 \times 1$-ruuduista. Väritetään ruudut valkoisella ja mustalla seuraavasti: Vasemmanpuoleisin sarake ja ylin rivi väritetään valkoisiksi. Tämän jälkeen väritetään joka toiseen sarakkeeseen ja joka toiseen riviin mustia ruutuja kuvassa 2 esitetyllä tavalla ja loput ruudut väritetään valkoisiksi. Kukin $1 \times 4$-laatta peittää siis 0 tai 2 mustaa ruutua ja 4 tai 2 valkoista, ja kukin $2 \times 2$-laatta täsmälleen yhden mustan ruudun ja kolme valkoista.

Jos nyt yksi $1 \times 4$-laatta hajoaa, niin tarvittaessa laattoja siirtämällä ja $2 \times 2$-laatan lisäämällä pitäisi saada lattia laatoitettua. Mutta nyt hajoamisen takia parillisen verran valkoisia rruutuja on peittämättä (eikä tämä määrä ole nolla). Hajoamisen jälkeen yhden $2 \times 2$-laatan lisäys tarkoittaa, että peitettyjen valkoisten ruutujen määrä muuttuu parittomalla luvulla eli se on siis laatan lisäämisen jälkeen pariton, ja $1 \times 4$-laattoja siirtämällä tämä korjaantuu vain parillisen luvun verran. Siispä näin ei saada alkuperäistä määrää valkoisia ruutuja peitettyä, eikä tämä tilanne ole mahdollinen.



Kuva 2: Lattian väritys

Jos taas hajoava laatta on $2 \times 2$-laatta, niin pitäisi saada pariton määrä (yksi) mustia ruutuja peitettyä. Yhden $1 \times 4$-laatan lisääminen ja tällaisten laattojen siirtäminen muuttaa aina peitettyjen mustien ruutujen määrä parillisella lukumäärällä. Siispä tässäkään tilanteessa laatoittaminen ei ole mahdollista ja väite on todistettu. □

**9.** Etsi kaikki mahdolliset positiivisten kokonaislukujen väritykset, joissa kukin positiivinen kokonaisluku on väritetty valkoisella tai mustalla, mutta ei molemmilla, sekä kahden erivärisen luvun summa on aina musta ja kahden erivärisen luvun tulo on aina valkoinen. Selvitä myös, minkä värinen on kahden valkoisen luvun tulo.

**9. tehtävän ratkaisu:** **Vastaus:** Kahden valkoisen luvun tulo on valkoinen. Seuraavat ovat kaikki mahdolliset väritykset: Kaikki luvut ovat mustia tai $m \in \mathbb{Z}_+$ ja luvut $n \in \mathbb{Z}$, joille $m \mid n$ ovat valkoisia ja loput mustia.

Havaitaan ensinnäkin, että kun kaikki positiiviset kokonaisluvut on väritetty samalla värillä, joko mustaksi tai valkoiseksi, niin halutut ehdot täyttyvät. Tutkitaan vielä, onko olemassa muita halutunlaisia värityksiä. Tehdään tämä tutkimalla toista kysymystä eli minkä värinen on kahden valkoisen luvun tulo.

**Lemma 1.** Kahden valkoisen luvun tulo on valkoinen.

*Todistus.* Olkoot $m$ ja $n$ valkoisia lukuja. Huomataan ensin, että niiden tulo ei voi olla musta. Nimittäin, jos $mn$ olisi musta luku ja $k$ jokin musta luku, niin tällöin luku $mk + mn$ on musta, sillä luku $mk$ on valkoinen ja luku $mn$ on musta. Toisaalta luku

$$mk + mn = m(k + n)$$

on valkoinen, sillä luku $k + n$ on musta. Sama luku ei voi olla samanaikaisesti sekä musta että valkoinen, joten luku $mn$ ei voi olla musta. Jos siis ylipäänsä on olemassa valkoiset positiiviset kokonaisluvut $m, n$, niin niiden tulon on oltava valkoinen. □

Olkoon $m$ nyt pienin valkoinen luku. Nyt tehtävänannon ja edellisten havaintojen kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $n$ luku $mn$ on valkoinen. Osoitetaan nyt, että ne positiiviset kokonaisluvut, jotka eivät ole jaollisia luvulla $m$, ovat mustia.

**Lemma 2.** Jos $m$ on pienin positiivinen kokonaisluku, joka on väritetty valkoiseksi ja $n$ sellainen positiivinen kokonaisluku, että $m \nmid n$, niin $n$ on musta.

*Todistus.* Koska $m \nmid n$, niin voidaan kirjoittaa $n = mk + r$, missä $k, r \in \mathbb{Z}$ ja $0 < r < m$. Koska $m$ on pienin positiivinen kokonaisluku, joka on valkoinen, niin luvun $r$ on oltava musta. Jo aiemmin on havaittu, että luku $mk$ on valkoinen. Siis luku $n = mk + r$ on valkoisen ja mustan luvun summana musta. □

Edellinen siis tarkoittaa, että väritykset määräytyvät pienimmän valkoisen luvun mukaan: Kaikki sillä jaolliset luvut ovat valkoisia ja loput mustia. Selvästikin nämä väritykset toteuttavat halutut ehdot. Nimittäin mustan ja valkoisen luvun summa ei ole jaollinen pienimmällä valkoisella luvulla, sillä summassa oleva musta luku ei ole pienimmällä valkoisella luvulla jaollinen, mutta valkoinen luku on. Valkoisen ja mustan luvun tulo taas on pienimmällä valkoisella luvulla jaollinen ja täten valkoinen. Siispä mikä tahansa positiivinen kokonaisluku voi olla pienin valkoinen luku (eikä tällaista tarvitse olla vaan kaikki luvut voivat olla mustia) ja tällöin lukujen väritys määräytyy edellä kuvatulla periaatteella.

**10.** Kutsutaan lukua *turhamaiseksi*, jos sen kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden summa on suurempi tai yhtäsuuri kuin niiden tulo. Määritä turhamaisten kaksinumeroisten (11–99) lukujen lukumäärä.

**10. tehtävän ratkaisu:** Jos toinen numeroista on yksi, on luku varmasti turhamainen, sillä

$$1 + m > 1 \cdot m.$$

Jos molemmat numerot ovat kakkosia, on luku myös turhamainen, sillä

$$2 + 2 = 2 \cdot 2.$$

Jos kumpikaan numeroista ei ole ykkönen, eikä molemmat kakkosia, ei luku ole turhamainen, sillä jos $m \geq n$, niin

$$m + n \leq 2m \leq nm,$$

ja molemmat yhtäsuuruudet ovat yhtälöitä vain, jos $m = n$ ja $2 = n$. Turhamaisia lukuja ovat siis luvut $11, 12, \ldots, 19$ sekä $21, 31, \ldots, 91$ ja 22. Yhteensä 19 kappaletta.

**11.** Osoita, että ei ole olemassa positiivista kokonaislukua $n$, jolla

$$n!(n+1)!(n+2)!(n+3)!$$

on jonkin positiivisen kokonaisluvun neliö.

**11. tehtävän ratkaisu:** Huomataan, että

$$n!(n+1)!(n+2)!(n+3)! = (n!)^4(n+1)^3(n+2)^2(n+3) = ((n!)^2(n+1)(n+2))^2(n+1)(n+3).$$

Jotta tämä voisi olla neliö, olisi myös luvun $(n+1)(n+3)$ oltava neliö. Kuitenkin

$$(n+1)(n+3) = (n+2)^2 - 1.$$

Koska kaksi peräkkäistä lukua ei koskaan ole positiivisen kokonaisluvun neliöitä, ei tämä luku voi olla neliö.

**12.** Määritellään Fibanaccin jono asettamalla $F_1 = F_2 = 1$ ja $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, kun $k \geq 2$. Olkoon $n$ positiivinen kokonaisluku. Osoita, että on olemassa Fibonaccin luku, joka päättyy ainakin $n$ nollaan.

**12. tehtävän ratkaisu:** Tehdään ensin muutama yleinen havainto. Selvästikin kaikki Fibonaccin lukujonon luvut ovat kokonaislukuja, sillä se muodostuu kokonaislukujen summan avulla. Lisäksi aina edeltävät termit määrittelevät seuraavan termin Fibonaccin jonossa ja seuraavat termit edeltävän (sillä on myös $F_{k-1} = F_{k+1} - F_k$). Luku päättyy ainakin $n$ nollaan, kun se on jaollinen luvulla $10^n$. Kuitenkaan kaksi peräkkäistä Fibonaccin lukujonon lukua eivät voi olla jaollisia luvulla $10^n$, sillä tällöin niiden kummankin jakojäännös luvulla $10^n$ jaettaessa olisi nolla ja kaavan $F_{k-1} = F_{k+1} - F_k$ takia myös kaikkien edellisten lukujen jakojäännös luvulla $10^n$ jaettaessa olisi nolla. Luvun 1 jakojäännös luvulla $10^n$ jaettaessa ei ole kuitenkaan nolla, joten kaksi peräkkäistä Fibonaccin lukujonon lukua ei voi olla luvulla $10^n$ jaollista. Mutta riittääkin löytää vain yksi tällainen luku.

Tarkastellaan Fibonaccin lukujonon $10^{2n}+1$ ensimmäistä jäsentä pareittain $(F_1, F_2), (F_2, F_3), (F_3, F_4), \ldots$. Pareja on siis $10^n \cdot 10^n = 10^{2n}$ kappaletta. Kullakin luvulla $F_k$ on $10^n$ mahdollista jakojäännöstä luvulla $10^n$ jaettaessa. Lisäksi pari $(0, 0)$ ei voi esiintyä edellisessä kappaleessa tehtyjen havaintojen takia. Näin ollen mahdollisia pareja on $10^{2n} - 1$ kappaletta. Tämä on vähemmän kuin parien lukumäärä, $10^{2n}$, joten ainakin kahden parin jakojäännösten täytyy olla samat. Fibonaccin lukujonon määritelmän mukaan luvulla $10^n$ jaettaessa jakojäännösten on siis oltava jaksollisia ja jakson pituus on enintään $10^{2n} - 1$. Koska jäsen voidaan selvittää aina seuraavien kahden termin avulla, on uuden jakson ensimmäisen parin (eli siis jakojäännöksiä luvulla $10^n$ jaettaessa) oltava $(1, 1)$, koska se on myös koko jonon ensimmäinen pari. Nyt jakson viimeisen termin jakojäännös luvulla $10^n$ on siis $1 - 1 = 0$ eli jaollinen luvulla $10^n$. $\square$

## Vaikeampia tehtäviä

**13.** Osoita, että jos $a$ ja $b$ ovat positiivisia lukuja ja $a+b=1$, niin

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

**13. tehtävän ratkaisu:** Muokataan ensin epäyhtälön vasenta puolta:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 = a^2+2+\frac{1}{a^2}+b^2+2+\frac{1}{b^2} = a^2+\frac{1}{a^2}+b^2+4+\frac{1}{b^2}.$$

Tehdään nyt oppinut arvaus, että epäyhtälö olisi yhtälö, kun $a=b=\frac{1}{2}$, eli tällöin vasen puoli saisi pienimmän arvonsa. Tässä tapauksessa siis $a^2=b^2=\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}=4$, eli $16a^2=\frac{1}{a^2}$.

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla pätee

$$\frac{\frac{1}{a^2}+a^2}{17} = \frac{16\cdot\frac{1}{16a^2}+a^2}{17} \geq \frac{1}{\sqrt[17]{16^{16}a^{30}}}$$

ja vastaavasti

$$\frac{\frac{1}{b^2}+b^2}{17} = \frac{16\cdot\frac{1}{16b^2}+b^2}{17} \geq \frac{1}{\sqrt[17]{16^{16}b^{30}}}.$$

Siispä

$$a^2+\frac{1}{a^2}+b^2+\frac{1}{b^2} \geq 17\left(\frac{1}{\sqrt[17]{16^{16}a^{30}}}+\frac{1}{\sqrt[17]{16^{16}b^{30}}}\right) \geq \frac{34}{\sqrt[34]{16^{32}(ab)^{30}}} \geq \frac{34}{\sqrt[34]{16^{32}\left(\frac{1}{4}\right)^{30}}}.$$

Ryhdytään nyt muokkaamaan lauseketta.

$$\frac{34}{\sqrt[34]{16^{32}\left(\frac{1}{4}\right)^{30}}} = \frac{34}{\sqrt[34]{4^{64}\left(\frac{1}{4}\right)^{30}}} = \frac{34}{\sqrt[34]{4^{64-30}}} = \frac{34}{\sqrt[34]{4^{34}}} = \frac{34}{4} = \frac{17}{2}.$$

Siispä

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq a^2+\frac{1}{a^2}+b^2+\frac{1}{b^2}+4 \geq \frac{17}{2}+4 \geq \frac{25}{2}.$$

**14.** Olkoot $x_1=x_2=x_3=1$ ja $x_{n+3}=x_n+x_{n+1}x_{n+2}$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $n$. Osoita, että jokaista positiivista kokonaislukua $m$ kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $k$, että $m$ jakaa luvun $x_k$.

**14. tehtävän ratkaisu:** Havaitaan ensin, että voidaan asettaa $x_0=0$. Nyt siis $x_0$ on jaollinen kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla. Käytetään tätä hyödyksi.

Ajatuksena on löytää luku $x_k$, jonka jakojäännös luvulla $m$ jaettaessa on sama kuin luvun $x_0$. Tämä tehdään tarkastelemalla riittävän monen luvun $x_n$ jakojäännöksiä luvun $m$ kanssa. Olkoon $r_t$ jakojäännös, kun luku $x_t$ jaetaan luvulla $m$ ja $t=0,1,\ldots,m^3+2$. Tarkastellaan nyt kolmikoita

$$(r_0,r_1,r_2),(r_1,r_2,r_3),\ldots,(r_{m^3},r_{m^3+1},r_{m^3+2}).$$

Koska $r_t$ voi saada $m$ erisuurta arvoa, niin laatikkoperiaatteen nojalla vähintään kaksi kolmikoista ovat samat. Olkoon $p$ pienin indeksi, jota kohti on olemassa luku $q$, jolle $(r_p,r_{p+1},r_{p+2})=(r_q,r_{q+1},r_{q+2})$, missä $p<q\leq m^3$ . Osoitetaan, että $p=0$. Tästä nimittäin seuraa, että $r_q=r_p=0$ ja $m$ jakaa luvun $x_q$.

Tehdään vastaoletus, että $p\geq 1$. Määritelmän mukaan

$$r_{p-1}\equiv r_{p+2}-r_pr_{p+1} \pmod m$$

ja

$$r_{q-1}\equiv r_{p+2}-r_qr_{q+1} \pmod m.$$

Koska lisäksi $r_p=r_q$, $r_{p+1}=r_{q+1}$ ja $r_{p+2}=r_{q+2}$, niin $r_{p-1}=r_{q-1}$. Mutta nyt $(r_{p-1},r_p,r_{p+1})=(r_{q-1},r_q,r_{q+1})$, mikä on ristiriidassa luvun $p$ valinnan kanssa. Siispä vastaoletus on väärin ja on oltava $p=0$, joten väite on todistettu. □

**15.** Määritetään lukujono $a_1, a_2, \ldots$ asettamalla $a_1 = 2$, $a_2 = 500$ ja $a_3 = 1000$ sekä

$$\frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{a_{n+1} + a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}},$$

kun $n = 2, 3, 4, \ldots$. Osoita, että kaikki tämän lukujonon jäsenet ovat positiivisia kokonaislukuja ja että $2^{2000}$ jakaa luvun $a_{2000}$.

**15. tehtävän ratkaisu:** Rekursion perusteella $a_{n+2}a_{n-1} = a_{n+1}^2$, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$. Mikään jonon jäsen ei voi olla nolla, ja voidaan siis kirjoittaa

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n-1}},$$

kun $n = 2, 3, 4, \ldots$. Siispä lauseke $\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n-1}}$ on vakio. Koska

$$\frac{a_3}{a_1 a_2} = 2,$$

pätee $\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n-1}} = 2$, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$. Koska $a_{n+2} = 2a_{n+1}a_n$, on $a_{n+2}$ parillinen kokonaisluku kaikilla positiiviisilla kokonaisluvuilla $n$. Lisäksi myös $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 2a_n$, on myös osamäärä $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$ parillinen kokonaisluku. Koska

$$a_{2000} = \frac{a_{2000}}{a_{1999}} \cdot \frac{a_{1999}}{a_{1998}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1,$$

missä kaikki murtolausekkeet ovat parillisia kokonaislukuja, ja $a_1 = 2$, on $a_{2000}$ jaollinen luvulla $2^{2000}$.

**16.** Kolmessa laatikossa on kussakin ainakin yksi marmorikuula. Jokaisella askeleella valitaan kaksi laatikkoa ja tuplataan toisen laatikon marmorikuulien määrä ottamalla riittävä määrä marmorikuulia toisesta laatikosta. Onko mahdollista aina äärellisen toistomäärän jälkeen tyhjentää jokin laatikoista?

**16. tehtävän ratkaisu:** Oletetaan, että marmorikuulien määrät laatikoissa ovat ensimmäisessä rasiassa $a$, toisessa $b$ ja kolmannessa $c$, missä $a \leq b \leq c$. Kirjoitetaan $b = qa + r$ ja esitetään $q$ binäärilukuna:

$$q = m_0 + 2m_1 + 2^2 m_2 + \cdots + 2^k m_k$$

, missä kukin $m_i \in \{0, 1\}$ ja $m_k = 1$, Nyt kullakin $i = 0, 1, 2 \ldots, k$ lisätään $2^i a$ marmoria ensimmäiseen laatikkoon. Jos $m_i = 1$, otetaan nämä marmorikuulat toisesta rasiasta, ja jos taas $m_i = 0$, niin kolmannesta rasiasta. Tällöin kolmannesta rasiasta tulee otettua korkeintaan $(2^k - 1)a < qa \leq b \leq c$ marmorikuulaa ja toisesta rasiasta tasan $qa$ marmorikuulaa. Tämän operaation jälkeen toisessa laatikossa on jäljellä $r < a$ marmorikuulaa, eli marmorikuulien määrä siinä laatikossa, jossa niitä on vähiten vähenee tämän operaation seurauksena. Toistamalla operaatiota saadaan siis jokin laatikko tyhjennettyä täysin.

**17.** Olkoon $ABC$ tasakylkinen kolmio, jossa $AB = AC$. Olkoon $D$ sellainen piste janalla $BC$, jolla $BD = 2DC$ ja olkoon piste $P$ janalla $AD$ niin, että $\angle BAC = \angle BPD$. Osoita, että

$$\angle BAC = 2\angle DPC.$$

**17. tehtävän ratkaisu:** Asetetaan piste $X$ janalle $BP$ niin, että $BX = AP$. Silloin $\angle ABX = \angle ABP = \angle DPB - \angle PAB = \angle CAB - \angle PAB = \angle CAP$. Koska $AB = AC$ ja $BX = AP$, pätee $\triangle ABX \cong \triangle CAP$. Täten $[ABX] = [CAP]$ ja $\angle DPC = 180° - \angle CAP = 180° - \angle AXB = \angle PXA$.

Koska $BD = 2CD$, etäisyys pisteestä $B$ suoralle $AD$ on kaksi kertaa etäisyys pisteestä $C$ suoralle $AD$. Siispä $[ABP] = 2[CAP]$, joten $[ABX] + [AXP] = 2[ABX]$. Siispä $[AXP] = [ABX]$ ja $XP = BX = AP$. Täten $\angle PXA = \angle XAP$ ja $\angle BAC = \angle BPD = \angle PXA + \angle XAP = 2\angle PXA = 2\angle DPC$, kuten piti osoittaa.

**18.** Määritä kaikki kokonaislukuparit $(x, y)$, joilla $2xy$ on kokonaisluvun neliö ja $x^2 + y^2$ on alkuluku.

**18. tehtävän ratkaisu:** Huomataan ensin, että jos $(x, y)$ on ratkaisu, niin on myös $(-x, -y)$. Lisäksi on oltava $x \neq 0 \neq y$. Voidaan siis keskittyä positiivisten lukujen $x$ ja $y$ etsiseen.

Merkitään $2xy = a^2$ ja $x^2 + y^2 = p$

Huomataan ensin, että $p + a^2 = (x + y)^2$, joten $p = (x + y - a)(x + y + a)$. Koska $p$ on alkuluku ja $x + y + a > x + y - a$, on oltava $x + y + a = p$ ja $x + y - a = 1$. Siispä $2(x + y) = p + 1$. Saadaan yhtälö

$$2(x + y) = x^2 + y^2 + 1,$$

joka voidaan muuttaa muotoon

$$a = (x - 1)^2 + (y - 1)^2.$$

On siis oltava $x = 1$ ja $y = 2$ tai $x = 2$ ja $y = 1$. (Kumpikaan ei voi olla nolla, kuten aiemmin jo todettiin.)

Nämä valinnat selvästi toteuttavat ehdot: $2xy = 4$, joka on neliö ja $x^2 + y^2 = 5$, joka on alkuluku.

Kaikki ratkaisut ovat siis $(-1, -2)$, $(1, 2)$ sekä $(2, 1)$ ja $(-2, -1)$.

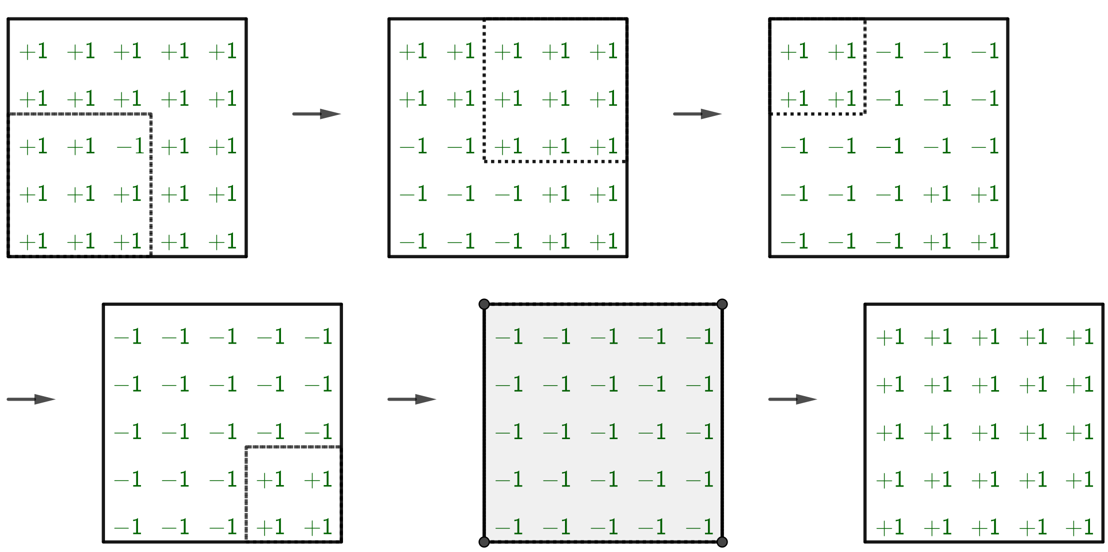
**19.** Kirjoitetaan yhteen $5 \times 5$-ruudukon ruutuun luku $-1$ ja loppuihin ruutuihin luku $+1$. Yhdellä askeleella muutetaan yhden $2 \times 2$-, $3 \times 3$-, $4 \times 4$- tai $5 \times 5$-neliön lukujen etumerkit. Missä ruudussa luvun $-1$ on oltava, jotta on mahdollista saada askeleita toistamalla kaikkiin ruutuihin luku $-1$?

**19. tehtävän ratkaisu:** **Vastaus:** Luvun $-1$ on oltava ruudukon keskimmäisessä ruudussa.

Väritetään kaksi vasemmanpuoleisinta saraketta mustiksi, keskimmäinen sarake valkoiseksi ja kaksi oikeanpuoleisinta saraketta mustiksi. Nyt yksi $n \times n$-neliö, missä $n \in \{2, 3, 4, 5\}$, peittää aina parillisen monta mustaa ruutua. Jos luku $-1$ on aluksi mustassa ruudussa, niin joka askeleen jälkeen on jäljellä parittoman monta lukua $-1$. Siis niitä ei ole missään vaiheessa nolla kappaletta. Täten luku $-1$ ei voi aluksi olla mustassa ruudussa, jos halutaan saada askeleita toistamalla kaikki ruudukon luvut luvuiksi $-1$.

Tehdään nyt vastaavanlainen uusi väritys pystysuunnassa: Väritetään kaksi ylintä ruutua mustaksi, keskimmäinen valkoiseksi ja kaksi alinta mustaksi. Vastaavalla tavalla kuin edellä voidaan päätellä, ettei luku $-1$ voi olla mustassa ruudussa. Siispä, jos siis tilanne on ylipäänsä mahdollinen, sen on oltava keskimmäisessä ruudussa tämän ja edellisen kappaleen nojalla.

Osoitetaan vielä, että määriteltyjä askeleita toistamalla voidaan muuttaa kaikki ruudukon luvut luvuiksi $+1$, kun luku $-1$ on aluksi ruudukon keskimmäisessä ruudussa. Tämä voidaan tehdä seuraavasti (ks. kuva 3): Muutetaan ensin vasemman alakulman $3 \times 3$-neliön lukujen etumerkit. Tämän jälkeen muutetaan oikean yläkulman $3 \times 3$-neliön lukujen etumerkit. Sitten muutetaan vasemman yläkulman $2 \times 2$-neliön ja oikean alakulman $2 \times 2$-neliön lukujen etumerkit. Lopuksi vaihdetaan koko neliön etumerkit luvuiksi $+1$.




Kuva 3: Lukujen etumerkkien muuttaminen