Syyskuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 15.10.2023 mennessä sähköpostitse.
Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on "liian pitkä intuitiohyppy" on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. Merkitään $x \circ y = 2x + y + 1$. Osoita, että on olemassa reaaliluku a, jolle $a \circ y = y$ kaikilla reaaliluvuilla y.

2. Osoita, että kolmen peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden keskiarvo ei voi olla kokonaisluku.

3. Olkoon $a, b > 1$ reaalilukuja.
Osoita, että $ab + 1 > a + b$.

4. Etsi äärettömän monta funktiota $f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}_+$ on positiiviset kokonaisluvut), jotka toteuttavat ehdon $f(n+1) = f(n) + 2^{n-1}$ kaikilla $n \geq 1$.

5. Olkoon $n_1, \ldots, n_5$ viisi peräkkäistä paritonta lukua niin, että n_3 on jaollinen luvulla 3. Osoita, ettei luvuilla n_i, n_j, $i \neq j, 1 \leq i, j \leq 5$, ole yhteisiä tekijöitä.

6. Olkoon A säännöllinen n-kulmio, jonka sivun pituus on 1. Osoita, että A:n ympäri ja sisään piirrettyjen ympyrärenkaiden rajoittama ala ei riipu muuttujasta n.

7. Olkoon N konveksi nelikulmio. Yhdistetään N:n vierekkäisten sivujen keskipisteet janoilla. Tehdään tämä kaikille vierekkäisten sivujen keskipistepareille. Osoita, että näin saatu nelikulmio on alaltaan puolet N:n pinta-alasta.

8. Merkitään suljettua yksikköväliä $[0, 1]$ ja avointa yksikköväliä $]0, 1[$. Etsi bijektio $b\colon [0, 1] \to]0, 1[$.

9. Olkoon $\circ$ 2-paikkainen laskutoimitus luonnollisten lukujen joukossa, eli jos x, y ovat luonnllisia lukuja, niin $x \circ y = z$ jollain luonnollisella luvulla z.

Oletetaan, että on olemassa $b \in \mathbb{N}$, jolle $x \circ b = x$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$.

Oletetaan vielä, että on olemassa $a, a' \in \mathbb{N}$, joille $a \circ x = x$ ja $a' \circ x = x$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$.

Osoita, että $a = a'$.

Vaikeampia tehtäviä

10. Olkoon S ympyrä, ja S' ympyrän S sisään piirretty ympyrä, joka sivuaa ympyrää S pisteessä P'. Olkoon S'' ympyrän S ulkopuolella oleva ympyrä, joka sivuaa ympyrää S pisteessä P''.

Olkoon C' ympyrän S' keskipiste ja C'' ympyrän S'' keskipiste. Olkoon P janojen $C'C''$ ja $P'P''$ leikkauspiste.

Osoita, että $PC' : PC''$ on sama kuin ympyröiden S' ja S'' säteiden suhde.

11. Olkoon f, g kaksi toisen asteen polynomia, joiden johtokertoimet ovat ykkösiä. Oletetaan, että polynomeilla f, g ja $f + g$ on kullakin kaksi nollakohtaa.

Oletetaan, että polynomien f, g nollakohtien (positiiviset) erotukset ovat samat, olkoon tämä erotus d. Osoita, että polynomin $f + g$ nollakohtien (positiivinen) erotus on korkeintaan d.

12. Oletetaan, että meillä on sana S, joka koostuu 125 A-kirjaimesta ja 125 B-kirjaimesta. Nämä voivat olla missä järjestyksessä tahansa.

Sanalle voidaan tehdä seuraava operaatio: Otetaan S:stä osasana S', joka koostuu peräkkäisistä kirjaimista, ja jossa on yhtä monta A- ja B-kirjainta. Osasana käännetään takaperin, ja jokainen A siinä korvataan B:llä ja jokainen B korvataan A:lla.

Onko olemassa sellaista sanaa S ja jonoa operaatioita niin, että operaatiojonon jälkeen S on muuttunut S:ksi takaperin?

13. Korttipakassa on 101 korttia, numeroitu 0-100. Kukin 100 lapsesta tekee seuraavan operaation: Hän sekoittaa kortit. Sitten hän kääntää pakasta yksi kerrallaan sata korttia ja jokaisen käännön jälkeen kirjoittaa taululle hänelle siihen asti tulleiden korttien keskiarvon.

Näin taululle tulee kirjoitetuksi 100×100 lukua. Osoita, että näiden lukujen joukossa on kaksi samaa lukua.

14. Olkoon a, b, c positiivisia reaalilukuja, joille $a + b + c = 1$. Osoita, että

$$a\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + b\sqrt[3]{\frac{c}{b}} + c\sqrt[3]{\frac{a}{c}} \leq ab + bc + ca + \frac{4}{9}.$$

15. Taululla on 100 positiivista kokonaislukua. Carita pelaa peliä, jossa hän valitsee taululta luvun c, jolle $c = a + b$ joillain sellaisilla a, b, jotka ovat myös taululla. Carita korvaa luvun c jollain suuremmalla kokonaisluvulla.

Peli loppuu, jos Carita ei pysty tekemään siirtoa. Carita yrittää jatkaa peliä äärettömiin. Osoita, että se on mahdotonta.

16. Tarkastellaan kaikkia satanumeroisia lukuja, jotka ovat jaollisia luvulla 19. Osoita, että on yhtä monta sellaista lukua, jotka eivät sisällä numeroita 4,5,6 kuin sellaisia, jotka eivät sisällä numeroita 1,4,7.

17. Tutkitaan yhtälöä

$$a^b b^c = c^a,$$

missä a, b, c ovat positiivisia kokonaislukuja.

Olkoon p alkuluku, jolle $p|a$. Osoita, että $p|b$.

18. Olkoon (a_i) ja (b_i) kaksi ääretöntä jonoa positiivisia kokonaislukuja, joille a_1, a_2, b_1, b_2 ovat pareittain yhteistekijättömiä ja pienempiä kuin 1000. Lisäksi $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ ja $b_i = b_{i-1} + b_{i-2}$ kaikilla $i \geq 3$.

Oletetaan, että a_{i_0} on jaollinen luvulla b_{i_0}. Osoita, että $i_0 \leq 50$.