

OULUN SEUDUN SEITSEMÄSLUOKKALAISTEN
MATEMATIIKKAKILPAILUN FINAALI 26.4.2025

Kirjoita kunkin tehtävän ratkaisuun runsaasti sanallisia perusteluja sekä välivaiheita!

1. ISBN on 13 numeron pituinen tunnus, joka annetaan kirjoille. Jokaisella teoksella on oma tunnus, jolla sen erottaa muista kirjoista. Tunnuksen sisältämät viivat eivät ole miinusmerkkejä, vaan ne ovat mukana vain helpottamassa tunnuksen lukemista.

ISBN-tunnuksille on kehitetty seuraava tarkistusmenetelmä pienten virheiden havaitsemiseksi: Poimitaan tunnuksesta ensin parittomissa kohdissa olevat numerot (1. numero, 3., 5. ja niin edelleen aina viimeiseen, 13. numeroon saakka). Sitten poimitaan parillisissa kohdissa olevat numerot ja kerrotaan jokaista niistä kolmella. Kun kaikki 13 näin saatua lukua lasketaan yhteen, niin tulos on aina jaollinen kymmenellä.

- a) Erään kirjan ISBN-tunnus on 978–0–12–002151–2. Näytä laskemalla, että yllä kuvattu tarkistusmenetelmä toimii tälle kirjalle.
- b) Eräessä toisessa kirjassa on ISBN-tunnus 978–0–01–0?1240–1, mutta tunnuksen kohdalle on tullut tahra, joka peittää yhden numeron. Tahraa on merkitty kysymysmerkillä. Selvitä, mikä tämä numero on.

Ratkaisu.

a)

$$\begin{aligned} & 9 + 3 \cdot 7 + 8 + 3 \cdot 0 + 1 + 3 \cdot 2 + 0 + 3 \cdot 0 + 2 + 3 \cdot 1 + 5 + 3 \cdot 1 + 2 \\ &= 9 + 21 + 8 + 0 + 1 + 6 + 0 + 0 + 2 + 3 + 5 + 3 + 2 \\ &= 60, \end{aligned}$$

joka on jaollinen kymmenellä, sillä $60 = 6 \cdot 10$.

b)

$$9 + 21 + 8 + 0 + 0 + 3 + 0 + 3 \cdot ? + 1 + 6 + 4 + 0 + 1 = 53 + 3 \cdot ?$$

Luku on jaollinen kymmenellä silloin, kun sen viimeinen numero on nolla. Jotta lopputulos päättyisi nollaan, niin luvun $3 \cdot ?$ täytyy siis päättyä seitsemään. Kolmosen kertotaulussa ainoa seitsemään päättyvä luku on 27. Täten tahran alla olevan numeron täytyy olla 9.

2. Milka väittää osaavansa lukea ajatuksia. Hän esittää sinulle seuraavan tempun:

- “Ajattele jotakin positiivista lukua, mutta älä paljasta sitä minulle,” sanoo Milka.
- Hän jatkaa: “Nyt lisää tähän lukuun yksi.”
- “Seuraavaksi kerro lopputulos kahdella.”
- “Lisää nyt lukuun neljä.”
- “Jaa sitten äsken saamasi tulos kahdella.”
- “Lopuksi vähennä edellisessä kohdassa saamastasi luvusta alussa ajattelemasi luku.”

- “Tiedän, että lopputulos on 3,” julistaa Milka voitonriemuisesti.

Miten Milka tiesi lopputuloksen?

- Valitse jokin luku, ja näytä vaihe vaiheelta, että tällä luvulla lopputulokseksi todella tulee kolme.
- Perustele huolellisesti, miksi valitsemalla minkä tahansa luvun lopputulos on aina välttämättä kolme. Milka ei siis osakaan lukea ajatuksia.

Ratkaisu.

- Valitaan esimerkiksi luku 7.

- Lisätään lukuun yksi, jolloin tulee 8.
- Kun kerrotaan tätä kahdella, saadaan 16.
- Lisätään 4, saadaan 20.
- Jaetaan kahdella, saadaan 10.
- Vähennetään äskeisestä luvusta alussa valittu luku, jolloin jää $10 - 7 = 3$.

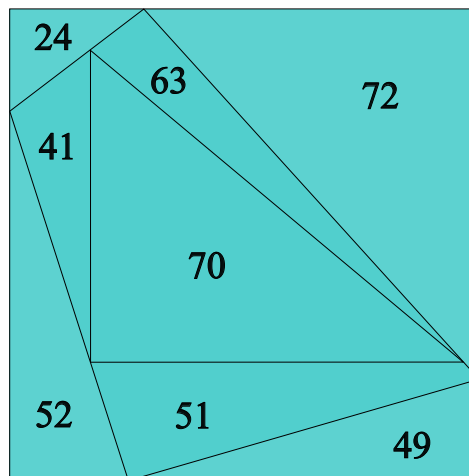
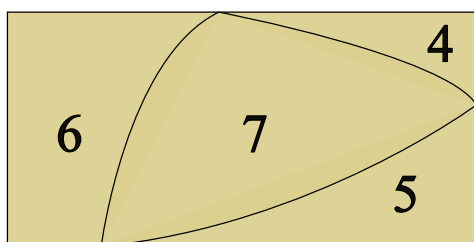
Milkan temppu siis näyttää toimivan ainakin, kun valittiin luku 7.

- Merkitään alussa valittua lukua kirjaimella x . Tehdään luvulle x Milkan määräämät laskutoimitukset ja mahdollisuuksien mukaan sievennetään:

- Lisätään yksi: $x + 1$
- Kerrotaan kahdella: $2 \cdot (x + 1) = 2x + 2$
- Lisätään neljä: $(2x + 2) + 4 = 2x + 6$
- Jaetaan kahdella: $\frac{2x + 6}{2} = x + 3$
- Vähennetään luvusta x : $(x + 3) - x = 3$

Olipa alussa valittu luku x siis mikä tahansa, niin lopputuloksena saadaan luku kolme.

3. Tehtävässä on tarkoituksena selvittää neliön/suorakaiteen piiri. Tehtävän kuvien mittasuhteet eivät ole oikeat, joten kuvista ei kannata yrittää tehdä mittauksia.



- Suorakaide on jaettu neljään alueeseen vasemmanpuoleisen kuvan mukaisesti. Kunkin alueen piiri (eli aluetta rajaavan reunan pituus) on merkitty kyseisen alueen sisään. Mikä on koko väritetyn suorakaiteen piiri?
- Oikeanpuoleisessa kuvassa neliö on jaettu kahdeksaan alueeseen. Kuten kohdassa a), kunkin alueen sisällä näkyvä luku kertoo kyseisen alueen piirin. Mikä on koko väritetyn neliön piiri?

Ratkaisu.

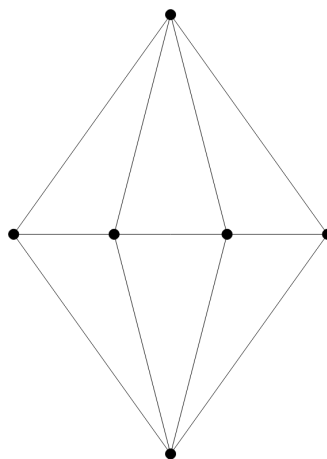
- Kun lasketaan yhteen alueiden, joiden piirit ovat 4, 5 ja 6, piirit, saadaan ympäröivän suorakaiteen piiri, johon on lisätty keskellä olevan alueen piiri (joka on kuvan mukaisesti 7). Suorakaiteen piiri saadaan siis laskemalla $4 + 5 + 6 - 7 = 8$.
- Kun lasketaan yhteen uloimpien osien piirit, eli $24 + 52 + 49 + 72 = 197$, saadaan tuloksena ympäröivän neliön piiri, johon on lisätty sisimpien neljän alueen rajaaman nelikulmion piiri. Vähentämällä edellisen laskun tuloksesta piirit 41, 63 ja 51, eli laskemalla

$$197 - 41 - 51 - 63 = 197 - 155 = 42,$$

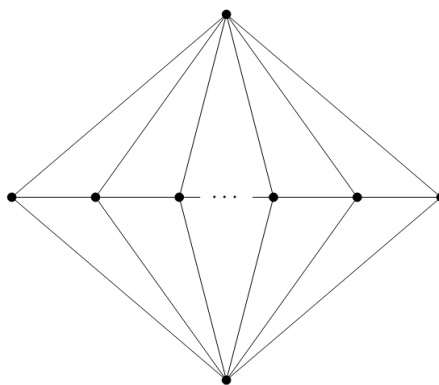
on ympäröivän neliön piiristä saatu vähennettyä sisemmän nelikulmion piiri, mutta laskussa on vähennetty myös keskimmäisen kolmion piiri. Neliön piiri saadaan siis lisäämällä edellisen laskun tulokseen keskimmäisen kolmion piiri, eli laskemalla $42 + 70 = 112$. Vaihtoehtoisesti, sisemmän nelikulmion piiriin voi laskea kuten a)-kohdassa ($41 + 63 + 51 - 70 = 85$), ja sitten lisätä uloimmat osat yhteen ja vähentää sisemmän nelikulmion piirin lopputuloksesta ($197 - 85 = 112$).

4. Tehtävässä kuljetaan pitkin kuvan mukaisen graafin viivoja. Säännöt ovat seuraavat: lähdet liikkeelle ylimmästä pisteestä, jonka jälkeen saat liikkua viivoja pitkin vain viistosti alas sekä lisäksi joko suoraan vasemmalle tai oikealle, mutta jos olet liikkunut vasemmalle tai oikealle, et voi liikkua enää vastakkaiseen suuntaan.

- Kuinka monta eri reittiä on ylimmästä pisteestä alimpaan pisteeseen?



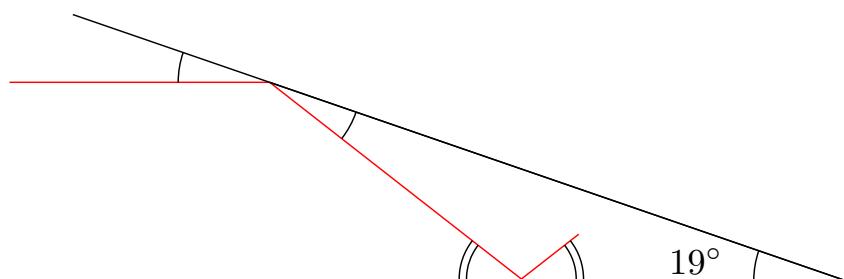
- b) Liikutaan sitten graafissa, jossa keskirivillä onkin 2025 kappaletta pisteitä. Alla olevassa kuvassa ei siis näy kaikkia pisteitä. Kuinka monta eri reittiä tässä tilanteessa on ylimmästä pisteestä alimpaan pisteeseen, noudattaen edelleen samoja sääntöjä?



Ratkaisu. Ensimmäinen askel on aina alaspäin. Tehtävää voi ajatella symmetrisenä: keskirivillä liikutaan joko oikealle tai vasemmalle, joku voi hoksata tämän, ja laskea sen avulla nopeammin. Kuitenkin, a)-kohdassa jokaisesta keskirivin pisteestä on mahdollista liikkua kolmeen eri pisteeseen. Kun näihin liikutaan, ei enää voida liikkua sääntöjen puitteissa takaisinpäin, jolloin ainut reitti on alaspäin kohti päätepistettä. Nämä kolme reittiä plus reitti, missä kuljetaan vain alaspäin luovat neljä reittiä jokaiselle keskirivin pisteelle. On mahdollista mennä neljään eri suuntaan lähtöpisteestä, joten reittien määrä on $4 \cdot 4 = 16$.

b)-kohdassa idea on sama, eli vastaus on 2025^2 .

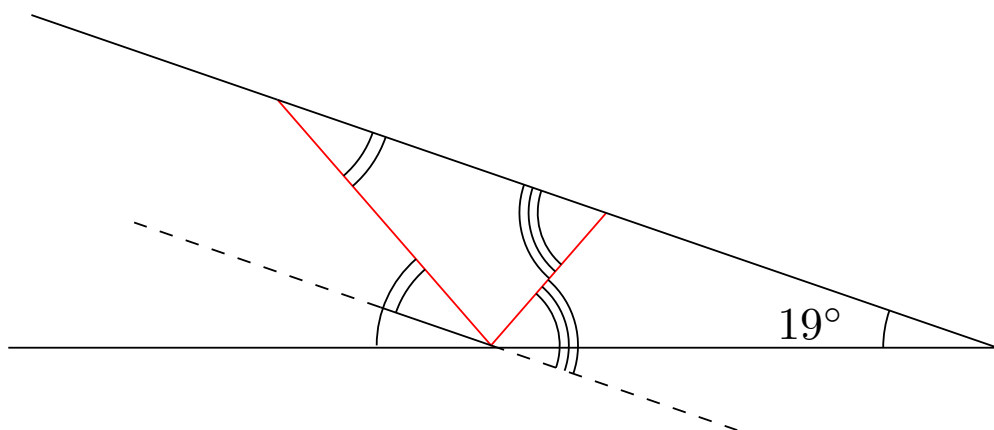
5. Kaksi peiliä asetetaan 19° kulmaan toisiinsa nähden alla olevan kuvan mukaisesti. Lasersäde kulkee vasemmalta oikealle alemman peilin kanssa yhdensuuntaisesti ja heijastuu peileistä siten, että jokaisen heijastumisen jälkeen lasersäteen ja peilin välinen kulma on yhtä suuri kuin ennen heijastumista. Yllä olevassa kuvassa näkyy tilanne, kun lasersäde on heijastunut kahdesti. Kaikki kuvaan yhdellä kaarella merkityt kulmat ovat keskenään yhtäsuuret, kuten myös molemmat kahdella kaarella merkityt kulmat.



- Kuinka monta kertaa lasersäde heijastuu peileistä, ennen kuin säde ei enää ikinä osu kumpaankaan peilipintaan?
- Kuinka suuren kulman lasersäde muodostaa sen peilipinnan kanssa, johon se osuu viimeisenä?

Kulmien silmämääräinen mittaaminen kuvasta ei riitä vastaukseksi.

Ratkaisu. Alla olevan kuvan mukaisesti huomataan, että kun lasersäde kulkee vasemmalta oikealle ja heijastuu alemmasta peilistä, kasvaa peilin ja lasersäteen välinen kulma 19° edellisen heijastumisen jälkeiseen kulmaan verrattuna. Kun lasersäde heijastuu ylemmästä peilistä on tilanne symmetrinen, eli kulma kasvaa tällöinkin 19° . Toisaalta kun lasersäde kulkee oikealta vasemmalle, huomataan kuvasta, että heijastumisen jälkeen peilin ja lasersäteen välinen kulma pienenee 19° edellisen heijastumisen jälkeiseen kulmaan verrattuna.



Kun lasersäteen ja peilin välinen kulma on yli 90° lähtee lasersäde kulkemaan oikealta vasemmalle. Koska $4 \cdot 19^\circ = 76^\circ$ ja $5 \cdot 19^\circ = 95^\circ$, lähtee lasersäde kulkemaan vasemmalle viiden heijastumisen jälkeen. Viidennen heijastumisen jälkeen pienempi säteen ja peilipinnan välisestä kulmista on $180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$. Lasersäde ei enää ikinä osu kumpaankaan peilipintaan, kun säteen ja peilipinnan, johon säde viimeksi on osunut, välinen kulma on alle 19° . Koska $85 - 3 \cdot 19^\circ = 28^\circ$ ja $85 - 4 \cdot 19^\circ = 9^\circ$, tämä tapahtuu neljän heijastumisen jälkeen siitä, hetkestä kun lasersäde lähtee kulkemaan vasemmalle. Vastaus a)-kohtaan on siis 9 kappaletta, ja b)-kohtaan 9° .