Uppgiftsseriepaket oktober

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 4.12.2022 per epost.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

OBS! Från och med nu börjar vi även uppmärksamma hur den lösningen är skriven, och till er ges negativ feedback även för det att svaren är otydligt skrivna.

Vi observerar bland annat följande saker:

- Varje steg i resonemang måste motiveras med en förnuftig noggrannhet, man får inte göra alltför långa intuitionshopp. Det som dock är ”för långa intuitionshopp”är svårt att definiera. Följande exempel har ett intuitionshopp som är för långt:

  > Nu är $x_1, \ldots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Alltså existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

  Det skulle vara bättre att skriva:

  > Nu är $x_1, \ldots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Eftersom en regelbunden 20-sidig kropp enbart har 30 kanter, existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

- Korrekt matematisk text består av hela meningar, och även formler är en del av meningarna. Du hittar exempel av denna stil exempelvis i den senaste tidens exempelsvar. Det lönar sig att eftersträva den här stilen. Eftersom ni inte ännu är universitets-studerande, godkänner jag även svar av er där t.ex. en rad ekvationer kopplats samman enabrt med ekvivalenspilar, om uppgiften möjliggör denna sorts lösningar.

- Om du är osäker över läsbarheten i din skrivstil, skriv då svaren med dator.

Bra matematisk text lär man sig tillverka enbart genom att öva. När du i tävlingssituationer skriver dina svar tydligt, kan du vara säker på att du i alla fall inte förlorar poäng på grund av att domarna inte förstått dina fina idéer.

Enlare uppgifter

1. Definiera alla talpar $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, för vilka produkten ab är delbar med talet 6, och $a \leq b$.

2. Vi skapar ett häfte genom att vika pappersark av samma storlek i två delar och lägger dessa innuti varandra. Häftar även ihop arken genom ryggen. (Detta beskriver alltså tillverkandet av ett helt vanligt häfte.) Vi räknar antalet sidor i häftet, då även de sidor som råkat bli pärm och insidan av pärmen räknas som sidor.

I ett häfte som skapats på detta sätt, kan det finnas exakt 22 sidor? Hur är det med 24?

3. I någon ruta på ett shackbräde finns en knapp. Förflyttning av knappen innebär att man flyttar den till en ruta som ligger bredvid, antingen våg- eller lodrätt, men inte diagonalt. På det här sättet flyttar man knappen 11 gånger. Visa att knappen efter dessa 11 förflyttningar inte är i den rutan där den började.

4. Låt S vara en cirkel med radien 1 och mittpunkt P. Låt T vara en cirkel vars radie är $\frac{1}{2}$ samt att punkten P befinner sig innanför cirkeln T. Visa att cirkeln T befinner sig innanför cirkeln S.

Obs! Låt A vara en cirkel. De punkter som befinner sig på cirkeln A:s rand anses inte befinna sig innanför cirkeln A.

5. Låt G vara en oriktad graf. A och B spelar följande spel: Först placerar A en spelpjäs i två olika noder i grafen. Sedan börjar det egentliga spelet, och B börjar det. På sin tur flyttar B någondera pjäsen från en av grafens noder till en annan av grafens noder längs med en kant. På sin tur tar A bort en kant.

A vinner spelet, om B inte mera kan göra tillåtna drag. B vinner om hen får båda pjäserna förflyttade till samma nod.

Bestäm alla grafer G för vilka B har en vinnande strategi i spelet.

6. Definierar $a_1 = 5$, och induktivt att $a_{i+1} = 7 + a_i$. Visa att inte ett enda tal i den här oändliga talföljden är ett kvadrattal.

7. Visa att det existerar en mängd S, som består av fem punkter i planet, och som uppfyller följande krav:

- Inga tre punkter i mängden S finns på samma linje.
- Det finns enbart en delmängd med fyra punkter T i mängden S, så att T:s punkter är hörnen i en konvex fyrhörning.

Månghörningen är konvex om dess alla vinklar är mindre än 180 grader.

8. 15 lag spelar i en volleybollsliga. Alla lag spelar en gång mot alla andra lag, och i varje spel så vinner det ena laget och det andra förlorar.

Vidare kommer de lag som har förlorat högst tre spel.

(a) Visa att det är möjligt för sju lag att slippa vidare.

(b) Visa att det är omöjligt för åtta lag att slippa vidare.

9. Låt a, b, c vara längderna på en triangels sidor. Visa att

$$\frac{(a^{2022} + b^{2022})(a + c)}{b} + \frac{(b^{2022} + c^{2022})(b + a)}{c} + \frac{(c^{2022} + a^{2022})(c + b)}{a} > 2(a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}).$$

10. Det finns fyra olika färgers färgkritor, sex kritor av varje färg. De är utdelade åt sex barn så att varje barn får fyra kritor.

Bildkonstläraren väljer ut en del av barnen till att rita en gemensam bild. Alla barnen använder de kritorna som de själva har, och bildkonstläraren valde barnen så att bilden kommer innehålla varje färg. Dessutom valde läraren så få barn som möjligt.

Vad är det största antalet barn som läraren kunde tvingas välja?

Svårare uppgifter

11. Vi har en $10 \times 10 \times 1$ enheters stor låda. In i den borde rymmas 106 bollar, vars diameter är 1. Hur lyckas man med detta?

12. De positiva heltalen m, n, k uppfyller ekvationen

$$m^2 + n = k^2 + k.$$

Visa att $m \leq n$.

13. I det naturliga talet n:s bas 10 framställning finns det $6k$ siffror (k är ett naturligt tal), och n är delbart med 7. Visa att när n:ets sista (entalet) siffra flyttas att vara talets första siffra så är talet fortfarande delbart med talet 7.

14. På ett $8 \times 8-$shackbräde placeras n stycken torn så att det för alla tornpar (a, b) gäller att: Det finns en tom ruta på planen som både a och b hotar.

Vad är det största talet n för vilket det här lyckas?

Tornet t hotar den tomma rutan r om t och r är antingen på samma lodräta eller vågräta rad, samt att det inte finns andra pjäser mellan t och r.

15. Låt a, b, c vara reella tal, för vilka det gäller att $s_n = a^n + b^n + c^n$ för alla positiva rella tal.

Antar dessutom att $s_1 = 2, s_2 = 6$ och $s_3 = 14$.

Visa att det för alla positiva heltal $n > 1$ gäller

$$|s_n^2 - s_{n+1}s_{n-1}| = 8.$$

16. Definierar $a_1 = 1$ och $a_{n+1} = (n+1)(a_1 + \cdots + a_n)$.

För vilka värden på n är talet a_n delbar med talet $n!$?

17. Man har skrivit talen $1, 2, \ldots, 2022$ på tavlan. Allan spelar ett spel där hen väljer två tal från tavlan, a, b, tar bort dem från tavlan och skriver talen a och b:s medeltal på tavlan. Efter 2021 drag finns det enbart ett tal c kvar på tavlan.

Visa att talet c som blir kvar på tavlan kan vara vilket som helst heltal från 2 till 2021.

18. Låt k vara ett positivt heltal. Undersöker alla oändliga, med naturliga tal indexerade naturliga tals följder (a_i) som inte är en konstantföljd, och som uppfyller den rekursiva ekvationen

$a_{i+1} = (k+1)a_i - ka_{i-1}$.

Kallar mängden av alla dess följder för mängden G_k. Vi säger att $(a_i)_k$ är mindre eller lika stor som $(b_i) \in G_k$, om $a_i \leq b_i$ för alla index i. Visa att det i G_k finns en kortaste följd, med andra ord en följd (a_i), för vilken (a_i) är mindre eller lika stor som (b_i) för varje $(b_i) \in G_k$.

19. Låt S vara en mängd bestående av fem punkter i planet. Av punkterna i S är inga tre på samma linje. Visa att man av punkterna i S kan välja fyra, som är hörnen i en konvex fyrhörning.

20. Låt S vara en ändlig mängd av planets punkter, $|S| \geq 3$ så att varje gång man väljer tre punkter ur S det är möjligt att täcka över dem med en cirkelformad skiva, vars radie är 1.

Visa att hela S kan täckas med en cirkelformad skiva, vars radie är 1.