Uppgiftsseriepaket november 2021

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 12.1.2021 per epost.
De enklare uppgifterna till: nirmal.krishnan(at)helsinki.fi
och de svårare: anne-maria.ernvall-hytonen(at)helsinki.fi.
Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Lättare uppgifter

1. I en talföljd med positiva heltal fås ett element genom att man adderar den största siffran i det föregående elementet. Vad är det största antalet möjliga konsekutiva udda tal, som kan finnas i följden?

1. uppgiftens lösning: **Svar:** Största möjliga antalet konsekutiva udda tal är fem.

För att ett av talföljdens element och det följande elementet båda ska vara udda, måste elementets sista siffra vara udda och dess största siffra jämn. Därmed måste det i de undersökta elementen finnas åtminstone två siffror. Alltså kan talets största siffra ändras som mest med ett, när man adderar elementets största siffra. Nu tar den udda följden slut, när den största siffran växer med ett, eftersom den största siffran blir udda. Därmed måste det gälla för en följd med konsekutiva udda tal att elementens största siffra är konstant. Härav följer även att differensen mellan konsekutiva udda tal måste vara konstant. Eftersom $5n$ är delbart med talet 10 för alla jämna heltal n, gäller det att den största elementet senast efter fem konsekutiva element måste växa med ett. Alltså finns det som mest 5 udda element efter varandra. Detta är möjligt till exempel med följden $807, 815, 823, 831, 839$. Därmed är svaret 5.

2. Låt n vara ett positivt heltal som är delbart med talet 24. Visa att summan av de positiva faktorerna för talet $n-1$ också är delbar med 24.

2. uppgiftens lösning: Låt d vara en postiv faktor för talet $n-1$. Eftersom talet n är delbart med talet 24, gäller att $n-1 = 24m-1$ för något positivt heltal m. Vidare så kan inte $n-1$ vara ett kvadrattal, eftersom $n-1 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 4)$ och kvadrater är 0 eller 1 (mod 4). Alltså är d och $\frac{n-1}{d}$ olika stora tal samt så är de båda faktorer till talet $n-1$.

Enbart genom att räkna så får man att $d + \frac{n-1}{d} = \frac{d^2-1+24m}{d}$. Visar att detta tal är delbart med 24 och därifrån fås sedan påståendet.

Eftersom $\mathrm{sgf}(d, 24) = 1$, är talet $\frac{d^2-1+24m}{d}$ delbart med talet 24 exakt då när $d^2-1 = (d-1)(d+1)$ är delbart med talet 24. Talet d är udda och faktor till talet $n-1$, alltså måste båda talen $d-1$ och $d+1$ vara jämna och exakt en av dem ska vara delbar med talet 4. Därav är $(d-1)(d+1)$ delbar med talet 8. Vidare, eftersom talet d är en faktor till talet $n-1$, så kan det inte vara delbart med tre. Alltså är antingen talet $d-1$ eller talet $d+1$ delbart med tre, dvs. $(d-1)(d+1)$ är delbar med 3. Alltså är talet $(d-1)(d+1)$ delbart med talet 24. Vi får att summa av talet n:s faktorer kan beräknas genom att kombinera faktorerna parvis, så att deras summor alltid är delbara med talet 24. Alltså är även summan av alla faktorer delbar med talet 24. $\square$

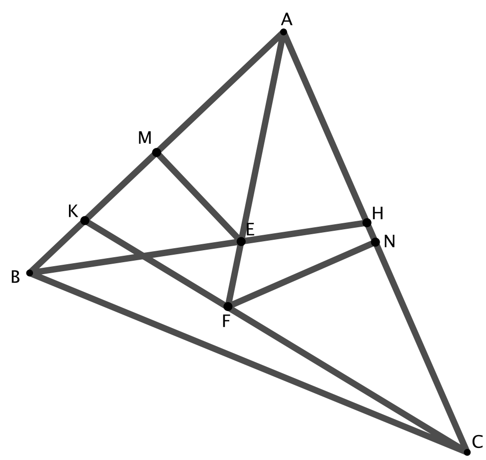
3. I triangeln ABC skär bisektrisen till vinkeln $\angle A$, mittpunktsnormalen till sträckan BC och höjdsträckan från punkten B varandra i punkten E. Visa att bisektrisen till vinkeln $\angle A$, mittpunktsnormalen till sträckan AC och höjdsträckan från punkten C skär varandra i samma punkt.

3. uppgiftens lösning: Låt M och N vara mittpunkterna på sidorna AB och AC, och låt punkten H vara skärningspunkten mellan linjen BE och linjen AC. Låt F vara skärningspunkten mellan bisektrisen till vinkeln A och mittpunktsnormalen till sträckan AC. Låt K vara skärningspunkten mellan linjerna CF och AB. Vi vill visa att CK står vinkelrätt emot sträckan AB, och då är vårt påstående bevisat.

Eftersom $\angle HAE = \angle EAM$ och $\angle EHA = 90° = \angle AME$, så är $\triangle AEH \sim \triangle AEM$. Vidare, eftersom $BM = MA$ och $\angle EMB = 90° = \angle AME$, gäller det att $\triangle AEM \sim \triangle BEM$. Alltså är $\angle BEM = \angle MEA = \angle AEH$. Eftersom $\angle BEM + \angle MEA + \angle AEH = 180°$, är $\angle BEM = 60°$. Därav $\angle MAE = \angle EAH = 30°$. Eftersom $\angle CNF = 90° = \angle FNA$ och $CN = NA$, gäller att $\triangle AFN \sim \triangle CFN$. Därav fås $\angle FCN = \angle NAF = 30°$. Därav

$$\angle CKA = 180° - \angle CAK - \angle KCA = 90°$$

alltså är CK höjdsträckan som svarar emot punkten C. $\square$



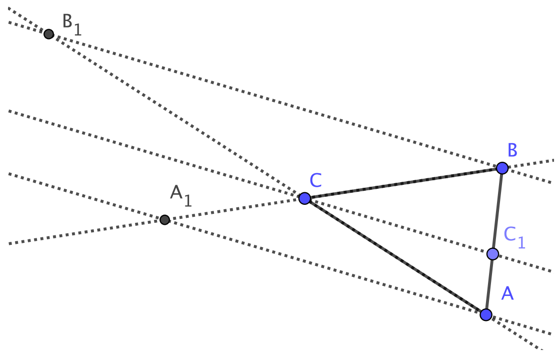
4. Låt C_1 vara en valfri punkt på sidan AB i triangeln ABC. Låt A_1 vara en punkt på linjen BC för vilken det gäller att $AA_1 \parallel CC_1$, och låt B_1 vara en punkt på linjen AC för vilken det gäller att $BB_1 \parallel CC_1$. Bevisa att

$$\frac{1}{|AA_1|} + \frac{1}{|BB_1|} = \frac{1}{|CC_1|}.$$

4. uppgiftens lösning: Trianglarna ABB_1 och AC_1C är likformiga, eftersom alla deras motsvarande vinklar är lika stora. Därav $|AC_1|/|AB| = |CC_1|/|BB_1|$. Symmetriskt fås $|BC_1|/|AB| = |CC_1|/|AA_1|$. Genom att räkna samman dessa ekvationer fås

$$1 = \frac{|AC_1| + |BC_1|}{|AB|} = \frac{|CC_1|}{|BB_1|} + \frac{|CC_1|}{|AA_1|},$$

ur vilket påståendet följer. [Eötvös-tävling 1905]



5. Vi bildar av bokstäverna A, B och C ett ord som är sex bokstäver långt. Bokstaven A väljs med sannolikheten x, bokstaven B med sannolikheten y och bokstaven C med sannolikheten z, där $x + y + z = 1$. För vilka sannolikheter x, y och z är sannolikheten att ordet $BACBAB$ bildas som störst?

5. uppgiftens lösning: **Svar:** Den efterfrågade sannolikheten är som störst när $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{2}$ och $z = \frac{1}{6}$

Ordet $BACBAB$ fås med sannolikheten x^2y^3z. Enligt den aritmetisk-geometriska olikheten gäller att

$$1 = x + y + z = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{y}{3} + \frac{y}{3} + z \geq 6\sqrt[6]{\frac{x^2y^3z}{2^2 \cdot 3^3}}$$

och likhet gäller exakt då när $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$. Alltså är sannolikheten för ordet $BACBAB$ som störst när $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{2}$ och $z = \frac{1}{6}$.

6. Låt a, b och c vara positiva reella tal, för vilka det gäller att $abc = 1$. Bevisa att

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + 1 + \frac{1}{a}.$$

6. uppgiftens lösning: Först och främst

$$\frac{1}{a} = bc \leq \frac{1}{2}(b^2 + c^2),$$

dessutom

$$a = a \cdot 1 \leq a \cdot \frac{a + b + c}{3} = \frac{a^3}{3} + \frac{ab + bc}{3} \leq \frac{a^2}{3} + \frac{b^2 + c^2 + 2a^2}{6}$$

samt

$$1 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Nu är summan av olikheternas vänstra led högra ledet i den olikheten vi ska bevisa och summan av olikheternas högra led är vänstra ledet i den olikheten vi ska bevisa. Påståendet är alltså bevisat.

7. Bevisa att om $a, b \in \mathbb{R}$ och $a - b = 1$ så gäller

$$a^3 - b^3 \geq \frac{1}{4}.$$

7. uppgiftens lösning: Eftersom $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, så räcker det med att bevisa att $a^2+ab+b^2 \geq 1/4$. Vi sätter in $a = b + 1$ och skriver om

$$\begin{aligned}
& (1+b)^2 + (1+b)b + b^2 \geq \frac{1}{4} \\
\iff \quad & (1 + 2b + b^2) + (b + b^2) + b^2 \geq \frac{1}{4} \\
\iff \quad & 3b^2 + 3b + \frac{3}{4} \geq 0 \\
\iff \quad & 3\left(b + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Den sista olikheten är sann, eftersom ett tal i kvadrat inte kan vara negativt.

8. För vilka av talsystemets baser kan 221 vara en faktor till 1215?

8. uppgiftens lösning: Svar: Enbart basen 9. Om basen är a, $1215 = a^3+2a^2+a+5$ och $221 = 2a^2+2a+1$. Delar det första polynomet med det andra:

$$a^3 + 2a^2 + a + 5 = (2a^2 + 2a + 1)\Big(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\Big) + \Big(-\frac{1}{2}a + \frac{9}{2}\Big).$$

Eftersom resten måste vara 0, är $a = 9$. (Då är även en delmängd ett heltal.)

9. *Eulers funktion* $\phi(n)$ är antalet tal bland med heltalen $1, 2, \ldots, n-1$ vars största gemensamma faktor med n är 1. Bevisa att när m och n är positiva heltal så är $\phi(m^n - 1)$ delbart med n.

9. uppgiftens lösning: Enligt Eulers sats gäller

$$m^{\phi(m^n-1)} \equiv 1 \pmod{m^n - 1},$$

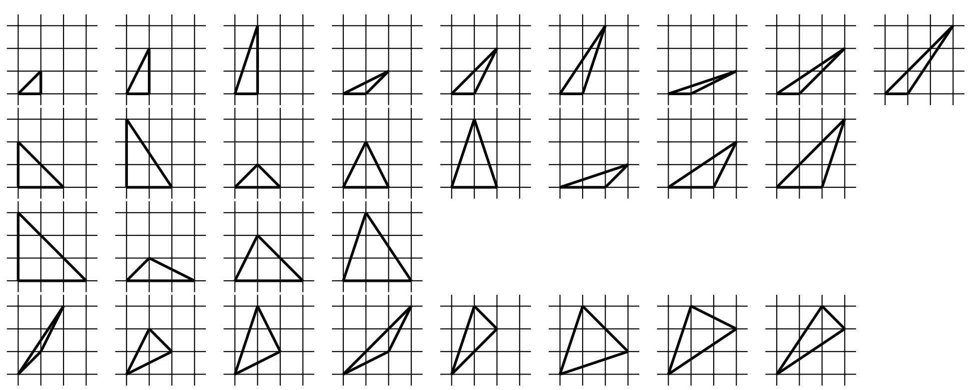
eftersom $\mathrm{sgf}(m, m^n - 1) = 1$. Påståendet följer nu ur följande sats som ska bevisas: när a, b och c är naturliga tal, är $a^c - 1$ delbart med $a^b - 1$ om och endast om b delar c. ”Om”-riktningen är entydig: $a^c - 1 = (a^b - 1)(a^{c-b} + a^{c-2b} + \cdots + a^b + 1)$. ”Endast om”-riktningen bevisas genom att skriva $c = qb + r$, där $0 \le r < b$. Antar att $a^b - 1 \mid a^c - 1$, och bevisar att $r = 0$. Skriver först

$$a^c - 1 = a^{qb+r} - 1 = a^r\big((a^b)^q - 1\big) + a^r - 1.$$

Eftersom $a^b - 1$ delar såväl summan som den första termen, så måste den även dela den andra termen $a^r - 1$. Men eftersom $r < b$, måste $r = 0$.

10. Hur många icke-kongruenta trianglar existerar, vars hörnpunkter har heltalen $0, 1, 2$ eller 3 som koordinater?

10. uppgiftens lösning: Svar: 29 trianglar. Genom att spegla, svänga och förflytta trianglarna kan man alltid sätta triangeln i en sådan position att en av dess hörnpunkter är i origo och att det för följande koordinat, räknat motsols, gäller att $y \le x$.(Om vi för de tre hörnen delar ut fyra namnlappar ”översta”, ”nedersta”, ”vänstraste” och ”högraste”, så får åtminstone ett av hörnen två namnlappar och kan förflyttas till origo. Andra punkten fås på sin plats genom att man speglar genom linjen $y = x$.) Med hjälp av den här observationen är det enkelt att systematiskt lista trianglarna. Kongruenta trianglar kan man eliminera genom att räkna varje triangels sidors längder med Pythagoras sats. Som resultat får 29 trianglar:



Svårare uppgifter

11. Låt $f(x)$ vara ett polynom av andra graden. Bevisa att det existerar andragradspolynom $g(x)$ och $h(x)$ för vilka det gäller att

$$f(x)f(x+1) = f(h(x)).$$

11. uppgiftens lösning: Låt $f(x) = a(x-r)(x-s)$. Då gäller

$$\begin{aligned} f(x)f(x+1) &= a^2(x-r)(x-s+1)(x-r+1)(x-s) \\ &= a^2(x^2+x-rx-sx+rs-r)(x^2+x-rx-sx+rs-s) \\ &= a^2((x^2)-(r+s-1)x+rs)-r))((x^2-(r+s-1)x+xs)-s)) \\ &= g(h(x)), \end{aligned}$$

där $g(x) = a^2(x-r)(x-s) = af(x)$ och $h(x) = x^2-(r+s-1)x+rs$.

12. Leta efter alla polynom P som har reella koeficienter, för vilka det gäller att

$$P(x)P(2x^2-1) = P(x^2)P(2x-1)$$

för alla heltal x.

12. uppgiftens lösning: **Svar.** Konstanta polynomet $P(x) = c$ och polynomen i formen $P(x) = c(x-1)^n, n \geq 1.$ Låt polynomets grad vara $\deg P = n$. Genom att jämföra koefficienterna ser man att $P(2x-1) = 2^n P(x) + R(x)$, där $\deg R < n$. Ekvationen kan skrivas i formen

$$P(x)\Big(2^n P(x^2) + R(x^2)\Big) = P(x^2)\Big(2^n P(x) + R(x)\Big).$$

Därmed $P(x)R(x^2) = P(x^2)R(x)$. Om polynomet R inte är identieten noll och dess grad är m, så fås $n+2m = m+2n$, alltså $m = n$, vilket är en motsägelse.

Alltså $P(2x-1) = 2^n P(x)$, dvs. $P(2x+1) = 2^n P(x+1)$. Därmed gäller det för polynomet $Q(x) = P(x+1)$ att $Q(2x) = 2^n Q(x)$.

Skriver $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. För varje koefficient gäller det att $2^i a_i = 2^n a_i$, alltså $a_i = 0$, när $i < n$. Alltså är möjliga lösningar på P de konstanta polynomen $P(x) = c$ och polynomen $P(x) = c(x-1)^n$, där $c \in \mathbb{R}$ och $n \geq 1$. Det är enkelt att kontrollera att dessa även uppfyller uppgiftens krav.

13. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel, som har bisektriserna BL och CM. Visa att $\angle A = 60^\circ$ om och endast om det existerar en punkt K på sträckan $BC(K \neq B, C)$, för vilken triangeln KLM är liksidig.

13. uppgiftens lösning: Låt I vara skärningspunkten mellan linjerna BL och CM. Då är $\angle BIC = 180^\circ - \angle ICB - \angle CBI = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle B) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90 + \angle A$. Alltså är $\angle BIC = 120^\circ$ om och endast om $\angle A = 60^\circ$.

Bevisar nu att kravet är oundvikligt: Låt $\angle A = 60^\circ$. Låt K vara skärningspunkten mellan sträckan BC och bisektrisen till vinkeln $\angle BIC$. Vi påstår att trianglen KLM inte är liksidig. Eftersom $\angle BIC = 120^\circ$, vet vi att $\angle MIB = \angle KIB = 60^\circ$. Vidare $\angle IBM = \angle IBK$ och $IB = IB$. Alltså är trianglarna IBM och IBK kongruenta och $IM = IK$. Motsvarande är $IL = IK = IM$. När man till detta lägger till informationen att $\angle KIL = \angle LIM = \angle MIK = 120^\circ$ så har man bevisat att KLM är liksidig.

Andra sidan av beviset: Antar att K är på sträckan BC och att triangeln KLM är liksidig. Undersöker trianglarna BLK och BLM. Nu är $BL = BL, LM = LK$ och $\angle MBL = \angle KBL$. Nu är alltså antingen $\angle LKB + \angle BML = 180^\circ$ eller $\angle LKB = \angle BML$. Eftersom $\angle KBM < 90^\circ$ och $\angle MLK = 60^\circ$, vet vi att $\angle LKB + \angle BML > 210^\circ$. Alltså $\angle LKB = \angle BML$, dvs. är trianglarna BLK och BLM kongruenta och $BK = BM$. Får att $IK = IM$. Motsvarande $IL = IK$ och I är bisektrisernas skärningspunkt i triangeln KLM. Alltså $\angle LIM = 2\angle LKM = 120^\circ$, ur vilket fås att $\angle BIC = \angle LIM = 120^\circ$ och $\angle A = 60^\circ$.

14. Låt a och n vara heltal och p ett primtal, för vilken det gäller att $p > |a| + 1$. Visa att polynomet $f(x) = x^n + ax + p$ inte kan presenteras som produkten av två icke konstanta polynom med heltalskoefficienter.

14. uppgiftens lösning: Låt z vara polynomets komplexa rot. Bevisa att $|z| > 1$. Antar att $|z| \leq 1$. Eftersom $z^n + az = -p$, fås

$$p = |z^n + az| = |z||z^{n-1} + a| \leq |z^{n-1}| + |a| \leq 1 + |a|,$$

vilket är en motsägelse. Antar nu att $f = gh$ är polynomet f:s uppdelning i en produkt, där faktorerna är heltalskoefficienter och icke-konstanta. Nu $p = f(0) = g(0)h(0)$, och antingen $|g(0)| = 1$ eller $|h(0)| = 1$. Kan anta, utan att förlora generaliseringen, att $|g(0)| = 1$. Om talen $z_1, z_2, \ldots, z_k$ är rötter till polynomet g, så är de även rötter till polynomet f. Alltså

$$1 = |g(0)| = |z_1 z_2 \cdots z_k| = |z_1||z_2| \cdots |z_k| > 1,$$

vilket är en motsägelse.

15. För vilka positiva heltalsvärden på n och p har ekvationsparet

$$x + py = n,$$
$$x + y = p^z$$

en lösning (x, y, z) bland med positiva heltal?

15. uppgiftens lösning: Observerar först att om $p = 1$ så kan den andra ekvationen inte ha en lösning. Löser ut y ur den efterföljande ekvationen och sätter in i den första:

$$x + py = x + p(p^z - x) = x(1 - p) + p^{z+1} = n$$

alltså, eftersom $p - 1 \neq 0$,

$$x = \frac{p^{z+1} - n}{p - 1} = \frac{p^{z+1} - 1}{p - 1} - \frac{n - 1}{p - 1}.$$

Sätter in uttrycket för x i den andra ekvationen:

$$y = p^z - \frac{p^{z+1} - n}{p - 1} = \frac{p^{z+1} - p^z - p^{z+1} + n}{p - 1} = \frac{n - p^z}{p - 1} = \frac{n - 1}{p - 1} - \frac{p^z - 1}{p - 1}.$$

När $z \leq 1$, är kvoten $(p^z - 1)/(p - 1) = p^{z-1} + p^{z-2} + \cdots + 1$ ett heltal. Därav kan x och y vara heltal endast om $n - 1$ är delbart med $p - 1$. Talet x är positivt enbart om $p^{z+1} > n$, och talet y enbart om $p^z < n$. Alltså är båda talen positiva enbart om $p^z < n < p^{z+1}$.

Vi får följande krav för att en lösning ska kunna existera:

- $p > 1$;
- $n - 1$ är en multipel till $p - 1$;
- n är inte en heltalspotens till p.

Kraven räcker även till, eftersom z:s värde bestäms entydigt av kravet $p^z < n < p^{z+1}$, varefter x och y kan lösas ur ekvationerna.

16. Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara positiva reella tal, som uppfyller kravet

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 1.$$

Bevisa att olikheten

$$\frac{1}{n - 1 + x_1} + \frac{1}{n - 1 + x_2} + \cdots + \frac{1}{n - 1 + x_n} \leq 1$$

gäller.

16. uppgiftens lösning: Låt $a_i = \sqrt[n]{x_i}$, när $1 \le i \le n$. Då är $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ och

$$\frac{1}{n-1+x_i} = \frac{1}{n-1+a_i^n} = \frac{1}{n-1+\frac{a_i^{n-1}}{a_1 \cdot a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n}} \le \frac{1}{n-1+\frac{(n-1)a_i^{n-1}}{a_1^{n-1}+\cdot+a_{i-1}^{n-1}+a_{i+1}^{n-1}+\cdots+a_n}}$$

med stöd av aritmetisk-geometriska olikheten. Alltså

$$\frac{1}{n-1+x_i} \le \frac{a_1^{n-1}+\cdot+a_{i-1}^{n-1}+a_{i+1}^{n-1}+\cdots+a_n}{(n-1)(a_1^{n-1})+a_2^{n-1}+\cdots a_n^{n-1}}.$$

När man adderar ihop olikheterna fås den efterfrågade olikheten.

17. Summan av kvadraten av de positiva reella talen x, y och z är 1. Bevisa att

(a) $$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - (x+y+z) \ge 2\sqrt{3}$$

(b) $$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) + (x+y+z) \ge 4\sqrt{3}.$$

17. uppgiftens lösning: (a) Enligt den aritmetiska och kvadratiska medelvärdes olikheten (AM-QM) gäller att

$$\frac{x+y+z}{3} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ur detta följer

$$x+y+z \le \sqrt{3}. \tag{1}$$

Enligt de aritmetiska och harmoniska olikheterna (AM-HM) gäller

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z} \ge 3\sqrt{3}. \tag{2}$$

Påståendet följer ur ekvationerna (1) och (2).

(b) Enligt olikheten mellan den aritmetiska och geometriska medelvärdet (AM-GM) gäller

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+(x+y+z) \ge 4\sqrt[4]{\frac{x+y+z}{xyz}}.$$

Eftersom $x^2+y^2+z^2 = 1$, är högra ledet i den föregående olikheten

$$4\sqrt[4]{\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{xyz}} = 4\sqrt[4]{\frac{x^2}{yz}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z^2}{xy}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}.$$

Tillämpar olikheten mellan roten av den aritmetiska och geometriska medelvärdet (AM-GM):

$$4\sqrt[4]{\dots} \ge 4\sqrt[4]{9\sqrt[9]{\frac{x^4y^4z^4}{x^4y^4z^4}}} = 4\sqrt[4]{9} = 4\sqrt{3}.$$

18. Visa att när x, y, z och α är icke-negativa reella tal,

$$x^\alpha(x-y)(x-z)+y^\alpha(y-x)(y-z)+z^\alpha(z-x)(z-y) \ge 0.$$

Visa att likheten gäller om och endast om antingen $x = y = z$ eller två av talen x, y och z är lika stora, och den tredje är noll. (Olikheten kan vara bekant från något tidigare uppgiftsseriepaket, men hänvisa inte i den här uppgiften till det, utan bevisa olikheten!)

18. uppgiftens lösning: Med stöd av symmentrin kan man anta att $0 \le x \le y \le z$. Då är summans första term klart ≥ 0. Summan av de senare termerna är

$$y^\alpha(y-x)(y-z) + z^\alpha(z-x)(z-y) = (z-y)\big(z^\alpha(z-x) - y^\alpha(y-x)\big). \tag{3}$$

Ur storleksordningsantagandet följer att $z^\alpha \ge y^\alpha$ och $z-x \ge y-x$, alltså är summen minst 0.

Om likhet ska gälla, måste summan av den första och de efterföljande termerna (3) vara 0. För att den första termen ska vara 0, måste det gälla att $x = 0, x = y$ eller $x = z$.

(1) Om $x = 0$, är (3) $y^{\alpha+1}(y-z) + z^{\alpha+1}(z-y) = (z-y)\big(z^{\alpha+1} - y^{\alpha+1}\big)$, som är 0 endast om $y = z$.

(2) Om $x = y$, är (3) $z^\alpha(z-x)^2$, vilket är 0 bara om $z = 0$ eller $x = z$.

(3) Om $x = z$, med stöd av storleksordningsantagandet är $x = y = z$.

Uppgiftens olikhet är känd som *Schurs olikhet*.

19. Kvadraten av längden på sidan AC i triangeln ABC är medeltalet av kvadraterna för de andra två sidornas längder. Bevisa att $\cot^2 B \ge \cot A \cot C$.

19. uppgiftens lösning: Skriver $a = |BC|, b = |AC|$ och $c = |AB|$, då är enligt uppgiftens antagande $2b^2 = a^2 + c^2$. Ur cosinus- och sinussatsen i triangeln ABC följer

$$\cot B = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{(a^2+c^2-b^2)2R}{2ac \cdot b} = \frac{(a^2+c^2-b^2)R}{abc}$$

och motsvarande

$$\cot A = \frac{(b^2+c^2-a^2)R}{abc}, \qquad \cot C = \frac{(a^2+b^2-c^2)R}{abc},$$

där R är radien av cirkeln som ritas runt triangeln ABC. Vi ska alltså visa att

$$(a^2+c^2-b^2)^2 \ge (b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2).$$

Ur den aritmetiska och geometriska medelvärdes olikheten följer att

$$(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2) \le \frac{(b^2+c^2-a^2+a^2+b^2-c^2)^2}{4} = b^4$$

och med basis av påståendet i uppgiften är

$$b^4 = (2b^2-b^2)^2 = (a^2+c^2-b^2)^2.$$

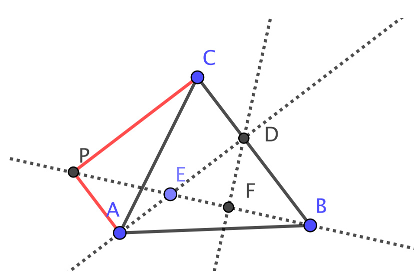
[Baltian tie 1997]

20. I den spetsvinkliga triangeln ABC är punkten D skärningspunkten mellan sidan BC och den inritade höjdsträckan emot sidan BC. Punkten E på linjen AD uppfyller ekvationen

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|CD|}{|DB|}.$$

Punkten F är skärningspunkten mellan sidan BE och dess inritade höjdsträckan i triangeln BDE. Bevisa att $\angle AFC = 90°$

20. uppgiftens lösning:



Ritar en rektangel $ADCP$. Eftersom

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|AP|}{|DB|},$$

ligger punkten E på linjen BP. Därav $\angle DFP = 90°$, alltså är punkten F på den cirkel som omskriver rektangeln $ADCP$. Eftersom AC är diametern till samma cirkel är $\angle CFA = 90°$. [Baltian tie 1998]