1. Merkitään kirjaimilla a, b, c kolmion A korkeusjanoja.

1. Olkoon $r > 0$ reaaliluku. Osoita, että on olemassa kolmio A, jonka pinta-ala on $\frac{1}{2}$, ja jolle $abc < r$.
2. Osoita, että kaikilla kolmioilla A, joiden pinta-ala on $\frac{1}{2}$, pätee että $abc < 1$.

Ratkaisu:

1. Valitaan A tasakylkiseksi, jolle kannan d pituus $< r$, ja kannalle piirretty korkeusjana a on pituudeltaan $1/d$. Nyt kaksi muuta korkeusjanaa b, c on $< d$ (jos korkeusjanan päätepiste on sivun toinen päätepiste, sivu on pidempi kuin korkeusjana) Nyt $abc < (1/d) \cdot d \cdot d = d < r$.
2. Olkoon d, e, f kolmion sivut. Olkoon a sivulle d piirretty korkeusjana. Koska $e \geq a$ ja $da = 1$, pätee $de \geq 1$. Symmetrisellä argumentilla $df \geq 1$ ja $ef \geq 1$. Koska yhtäsuuruus pätee vain, kun kyseiset sivut ovat suorakulmaisen kolmion kateetit, ainakin yhden suuruusrelaation on oltava aito. Siis $(def)^2 > 1$ eli $def > 1$. Koska $abcdef = 1$, seuraa $abc < 1$.

2. Etsi kaikki funktiot, jotka toteuttavat ehdon

$$f(y \cdot f(x)) = \frac{y+1}{y} - \frac{1}{y(x+1)}$$

kaikille sellaisille reaaliluvuille x, y, joille $y \neq 0$, $x \neq 0$ ja $x \neq -1$.

Ratkaisu: Funktion f arvo pisteessä 1 on jokin vakio. Merkitään tätä luvulla a, jolloin $f(1) = a$. Sijoittamalla annettuun ehtoon $x = 1$ saamme

$$f(a \cdot y) = \frac{y+1}{y} - \frac{1}{2y} = 1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{2y} = 1 + \frac{1}{2y}.$$

Sijoittamalla edelliseen yhtälöön $y = \frac{x}{a}$ saamme

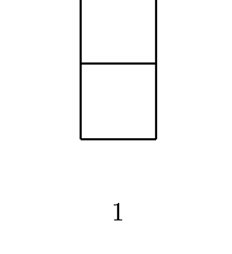
$$f(x) = f(a \cdot \frac{x}{a}) = 1 + \frac{1}{2\frac{x}{a}} = 1 + \frac{a}{2x}.$$

Sijoittamalla tähän $x = 1$ saamme, että

$$f(1) = 1 + \frac{a}{2}.$$

Koska $f(1) = a$, niin tästä saadaan, että $a/2 = 1$ eli $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

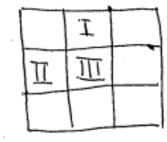
3. $N \times N$-"shakkilaudalla" ($N \geq 3$ jokainen ruutu on väritetty valkoiseksi. Yhdellä kerralla voidaan muuttaa viiden ruudun väri (valkoisten ruutujen väri muuttuu mustaksi ja mustien valkoiseksi) seuraavan kuvion mukaisesti:



Kuviota voi kääntää. Millä ehdoilla laudan koolle N voidaan kaikki ruudut muuttaa mustiksi äärellisellä määrällä kuvion mukaisia muutoksia?

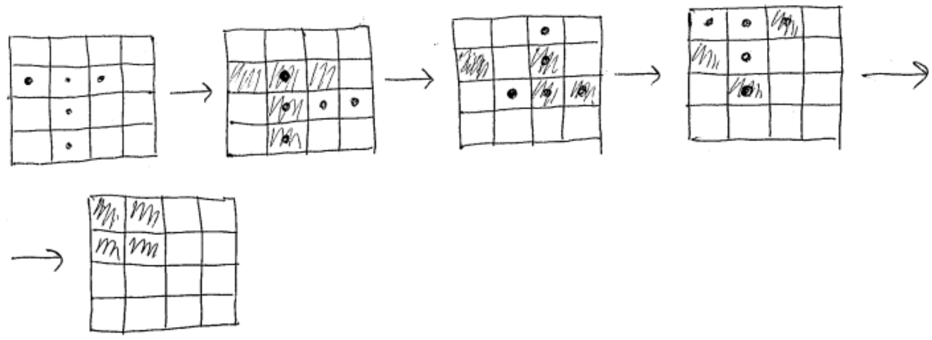
Ratkaisu:

Kun n=3:



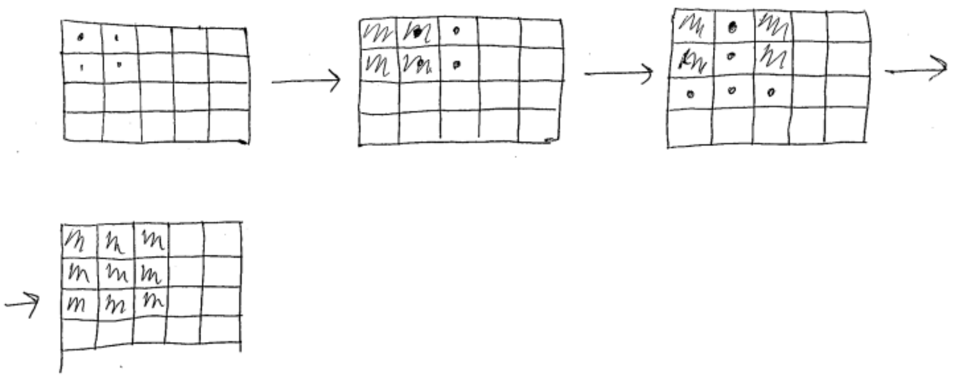
Kun muutetaan ruutujen I ja II väriä kerran (kumpaakin), ruudun III väri vaihtuu kaksi kertaa. Siten on mahdotonta muuttaa kaikki ruudut mustiksi.

Kun $n \geq 4$, muodostetaan seuraavanlainen prosessi:



Jos $2 \mid n$, voidaan lauta jakaa 2×2-alueisiin ja muuttaa kaikki ruudut mustiksi. Prosessissa toki 2×2-alueen ulkopuoliset ruudut voivat hetkeksi vaihtaa väriä, mutta se ei haittaa.

Jos $3 \mid n$, niin käyttämällä edellistä prosessia saamme uuden prosessin:



Alue saadaan jaettua siis 3×3-alueisiin ja saamme koko ruudukon muutettua mustaksi.

Olkoon nyt $n \geq 4$, $2 \nmid n$ ja $3 \nmid n$. Väritetään jokaisen sarakkeen jokainen ruutu yhdellä kolmesta väristä siten, että ensimmäisen sarakkeen ruudut merkitään värillä 0, toisen sarakkeen ruudut värillä 1, kolmannen sarakkeen ruudut värillä

2, neljännen sarakkeen ruudut taas värillä 0, viidennen sarakkeen ruudut värillä 1 jne. Nyt näillä kolmella värillä väritettyjä ruutuja ei ole yhtä montaa, vaan on olemssa kaksi eri väriä, joidenväristen laattojen lukumäärien ero on n.

Yksi prosessi

voi muuttaa kahden eri värin määrien erotusta vain parillisella määrällä. Jos ruutu on jo väritetty, poistamme värin. Tällöin jokaiselle näistä kolmesta väristä pätee, että kyseisellä värillä väritettyjen ruutujen määrä muuttuu yhdellä luvuista $-3, -1, 1$ tai 3. Koska lopullisessa värityksessä, johon haluaisimme päästä, ero n on pariton, erotukseen n ei voida koskaan päästä.

Siten vastaus on, että $2 \mid n$ ja $3 \mid n$, kun $n \geq 4$.

4. Tiedetään, että $(20 + 25)^2 = 2025$. Etsi kaikki yhtälön

$$(x + y)^2 = 100x + y$$

positiiviset kokonaislukuratkaisut.

Ratkaisu: Avataan sulut:

$$y^2 + 2xy + x^2 = 100x + y,$$

eli

$$x^2 + (2y - 100)x + (y^2 - y) = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$x = \frac{-(2y - 100) \pm \sqrt{(2y - 100)^2 - 4(y^2 - y)}}{2} = -y + 50 \pm \sqrt{2500 - 99y}.$$

Koska $2500 - 99y \geq 0$, niin $y \leq 25$. Lisäksi on oltava $2500 - 99y \equiv 1 \pmod 8$ tai $4 \mid 2500 - 99y$. Jos $2500 - 99y \equiv 1 \pmod 8$, niin $y \equiv 1 \pmod 8$. Siispä $y = 1$ tai $y = 9$ tai $y = 17$ tai $y = 25$.

Jos taas $4 \mid 2500 - 99y$, niin $4 \mid y$. Toisaalta ei voi olla $2500 - 99y \equiv 8 \pmod{16}$. Ei siis voi olla $y \equiv 4 \pmod{16}$. Mahdolliset vaihtoehdot ovat $y = 8$, $y = 12$, $y = 16$ tai $y = 24$.

Lisäksi on oltava $2500 - 99y \equiv \pm 1 \pmod 5$ tai $2500 - 99y \equiv 0 \pmod 5$. Siispä $y \equiv \pm 1 \pmod 5$ tai $y \equiv 0 \pmod 5$.

Mahdolliset arvot ovat siis $y = 1$, $y = 9$, $y = 16$, $y = 24$ tai $y = 25$.

Jos $y = 9$, niin $2500 - 9 \cdot 99 = 1609$, mikä ei ole neliö. Ei ratkaisuja.

Jos $y = 16$, niin $2500 - 16 \cdot 99 = 916$, mikä ei ole neliö. Ei ratkaisuja.

Jos $y = 20$, niin $2500 - 20 \cdot 99 = 520$, mikä ei ole neliö. Ei ratkaisuja.

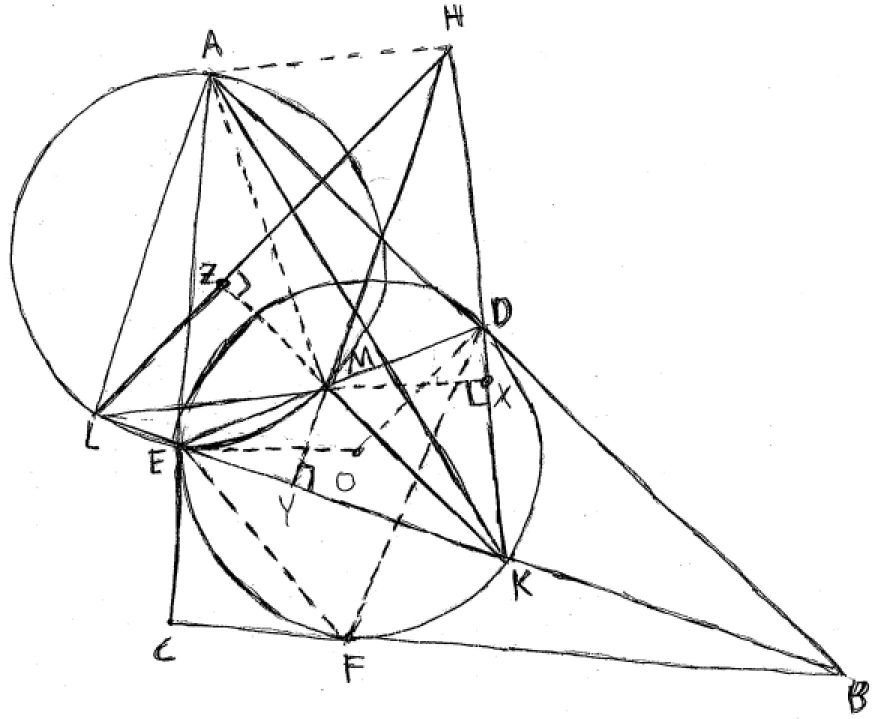
Jos $y = 24$, niin $2500 - 24 \cdot 99 = 124$, mikä ei ole neliö. Ei ratkaisuja.

Jos $y = 1$, niin alkuperäinen yhtälö muuttuu muotoon $x^2 + 2x + 1 = 100x + 1$, jolloin $x = 98$ ja yhtälö toteutuu.

Jos $y = 25$, niin $x = 20$, mikä on tehtävänannon ratkaisu.

5. Kolmiossa ABC pätee $AB > AC$. Sen sisäänpiirretty ympyrä sivuaa janoja AB ja AC pisteissä D ja E tässä järjestyksesä. Jana BE kohtaa sisäympyrän toisen kerran pisteessä K. Olkoon piste L janan BE jatkeella siten, että $AL \perp BE$. Piste H on kolmion KML korkeusjanojen leikkauspiste, kun M on janan DE keskipiste. Osoita, että $\angle AHK = 90^\circ$ ja että $\angle LKA = \angle MKD$.

Käytetään kuvion merkintöjä. Osoitetaan ensin, että H, D ja K ovat samalla suoralla. Koska $LM \perp KH$, riittää osoittaa, että $\angle MLE + \angle EKD = 90^\circ$.



Koska $ALEM$ on jännenelikulmio, niin $\angle MLE = \angle MAE$. Koska $\angle AEO = \angle ADO = 90^\circ$, niin $\angle EOD = 180^\circ - \angle EAD = 180^\circ - 2\angle MAE$.

Siten $\angle EFD = 90^\circ - \angle MAE \rightarrow \angle EKD = 90^\circ - \angle MAE$, joten $\angle MLE + \angle EKD = 90^\circ$, joten H, D ja K ovat samalla suoralla.

Koska $\angle MAD = \angle MAE = \angle MLE = \angle KLX$ ja koska $LXK \sim HYK$, niin $\angle KLX = \angle YHX = \angle MHD$. Siten $AMDH$ on jännennelikulmio ja $\angle AMD = \angle AHK = 90^\circ$.

$\angle ALK = 90^\circ = \angle AHD$, joten $ALKH$ on jännenelikulmio.

Nyt $\angle LKA = 90^\circ - \angle LAK = 90^\circ - \angle LHK = 90^\circ - (180^\circ - \angle ZMX)$. Edelleen tämä on yhtä kuin $90^\circ - (180 - \angle LMK) = 90^\circ - (180^\circ - (180^\circ - \angle KMX))$, joka on yhtä kuin $90^\circ - (180^\circ - (180^\circ - (90^\circ - \angle MKD))) = \angle MKD$.