Uppgiftsseriepaket april 2022

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 23.6.2022 per epost.

De enklare uppgifterna till: Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Enklare uppgifter

1. Två vanliga (sexsidiga) tärningar kastas. Vad är sannolikheten att produkten av de två ögontalen man får är delbart med talet fem?

1. uppgiftens lösning: **Svar:** Den efterfrågade sannolikheten är 1/12.

Produkten av två tal är delbar med fem exakt då när åtminstone ett av talen är delbart med fem. Alltså måste åtminstone en av tärningarnas siffra vara exakt fem. Det finns alltså tre fall: båda, den ena eller den andra av tärningarna visar en femma. Allt som allt finns det totalt $6 \cdot 6 = 36$ möjliga produkter. Den efterfrågade sannolikheten är således

$$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

2. Undersöker två på varandra följande udda heltal. Av dem är den större tre gånger så stor som den mindre. Vad är dessa två tals summa?

2. uppgiftens lösning: **Svar:** Talens summa är fyra.

Låt x och $3x$ vara de undersökta talen. Vidare måste det gälla att $x + 2 = 3x$ alltså att $x = 1$. Summan är alltså $1 + 3 = 4$.

3. Leta efter tal a, b som uppfyller villkoret $(x^2 - 3x + 2) \mid (ax^4 + bx^3 + 1)$.

3. uppgiftens lösning: **Vastaus:** On $a = 7/8$ ja $b = -15/8$.

Polynomi $p(x)$ jakaa polynomin $q(x)$ (kompleksilukujen joukossa) täsmälleen silloin, kun kaikki polynomin $p(x)$ nollakohdat ovat myös polynomin $q(x)$ nollakohtia.

Polynomin $x^2 - 3x + 2$ nollakohdat ovat

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}.$$

Halutaan siis, että

$$0 = a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 + 1 = 16a + 8b + 1$$

ja

$$0 = a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 + 1 = a + b + 1.$$

Vähennetään alempi ylemmästä kahdeksalla kerrottuna. Saadaan $8a - 7 = 0$ eli $a = \frac{7}{8}$. Täten

$$b = -a - 1 = -\frac{7}{8} - 1 = -\frac{15}{8}.$$

Halutut luvut a ja b on siis löydetty.

4. Låt $ABCD$ vara en konvex fyrhörning. Låt M vara en inre punkt till fyrhörningen. Visa att $|AM|+|MB| \leq |AD| + |DC| + |CB|$.

4. uppgiftens lösning: Förlänger sträckan AM tills den skär någon av sidorna AD, DC eller CB. Låt N vara skärningspunkten. Eftersom sträckan är det kortaste avståndet mellan två punkter, gäller $|MN| + |NB| \geq |MB|$. Alltså

$$|AM| + |MB| \leq |AM| + |MN| + |NB| = |AN| + |NB|.$$

Eftersom sträckan är det kortaste avståndet mellan punkterna A och N, och från andra punkterna även mellan punkterna N och B,

$$|AN| + |BN| \leq |AD| + |DC| + |CB|,$$

ur vilket påståendet följer.

5. Låt ABC vara en triangel, där vinkeln BAC är rät, och vinkeln BCA är $30°$. På sidan BC ritas en mittpunktsnormal. Den delar sidan AB i punkten X. Visa att triangeln BCX är liksidig.

5. uppgiftens lösning: Låt M vara skärningspunkten mellan den inritade mittpunktsnormalen och sträckan BC. Trianglarna BMX och CMX är kongruenta med stöd är SVS-villkoret. Vinklarna BMX och CMX är nämligen båda $90°$. Alltså är sträckorna BX och CX lika långa, och triangeln CXB är libenkt och dess bas är CB. Eftersom vinkeln CBX som rör vid basen är $60°$, är triangeln likbent.

6. I tre personerns fotboll är en av spelarna målvakt och de två övriga är mot varandra spelande fältspelare. När en fältspelare gör mål blir hen målvakt och målvakten fältspelare.

Messi, Maradona och Pele spelade spelet någon viss tid. Efteråt berättade de åt Gödel att Messi hade varit fältspelare i 10 rundor, Maradona för 17 rundor och Pele 15 rundor. Då påstod Gödel att hen visste vem som gjorde det sjätte målet. Vem var det?

6. uppgiftens lösning: **Svar:** Messi gjorde målet.

Eftersom det i varje omgång finns två fältspelare, är antalet omgångar $\frac{10+17+15}{2} = 21$. Messi har alltså varit målvakt under 11 omgångar. Eftersom ingen kan vara målvakt två på varandra följande omgångar, så har Messi varit målvakt under alla omgångar som har ett udda ordningstal (av dess finns det en mera än antalet omgångar med ett jämnt ordningstal). Messi var alltså målvakt under omgången 7 och gjorde alltså målet under omgång 6.

7. Låt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en funktion som uppfyller kravet $f(x+y) \geq f(xy)$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$.

Visa att f är en konstantfunktion, alltså att det existerar $c \in \mathbb{R}$, för vilken det gäller $f(x) = c$ för varje $x \in \mathbb{R}$.

7. uppgiftens lösning: Genom att tillämpa kravet som ges i uppgiften på talparet $(x, 0)$ så ser man att $f(x) \geq f(0)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Genom att tillämpa kravet från uppgiften på talparet $(y, -y)$ ser man att $f(0) \geq f(-y^2)$ för alla $y \in \mathbb{R}$. När y löper igenom de reella talen, $-y^2$ löper igenom de negativa reella talen. Alltså $f(x) = f(0)$ då när $x \leq 0$.

Genom att tillämpa uppgiftens krav på talparet $(-y, -y)$ ser man att $f(-2y) \geq f(y^2)$. När $y > 0$ får man att $f(0) = f(-2y) \geq f(y^2)$. När y löper igenom de positiva reella talen, så går y^2 genom positiva reella talen. Alltså är $f(0) = f(x)$, då är $x > 0$.

Alltså är f en konstantfunktion.

8. Visa att det för de positiva reella talen a, b, c gäller att

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

När gäller likhet?

8. uppgiftens lösning: Genom att förlänga alla nämnare till abc och sedan multiplicera med dessa, så får vi en olikhet utan bråk

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ac + 2ab \geq 0$$

men den här olikheten kan skrivas i formen

$$(a + b - c)^2 \geq 0,$$

Vilket uppenbart alltid gäller och likhet gäller då när $c = a + b$.

9. *Först lite teori. Talet e är klart irrationellt, vars endecimalige närmevärde är* $2,7$. *Funktionen* $\ln$ *definieras så att om* $e^x = y$ *så* $\ln y = x$. *Funktionen* $\ln x$ *är definierad då* $x > 0$.

Funktionen $\ln$ *lyder följande räkneregler:* $\ln xy = (\ln x) + (\ln y)$, $\ln(x^n) = n \ln x$ *och* $\ln \sqrt[n]{x} = \frac{\ln x}{n}$.

Och nu till uppgiften...

Låt $n \in \mathbb{N}$ och $x_1, \ldots, x_n > 0$ vara rella tal. Visa att

$$\ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{(\ln x_1) + \cdots + (\ln x_n)}{n}.$$

9. uppgiftens lösning: Med stöd av logaritmernas räkneregler kan man skriva olikhetens vänstra led i formen

$$\frac{(\ln x_1) + \cdots + (\ln x_n)}{n} = \ln \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

Med stöd av den aritmetisk-geometriska olikheten gäller

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

Påståendena $x' > y'$ och $e^{x'} > e^{y'}$ gäller, alltså gäller påståendena $\ln n > \ln y$ och $x > y$. Alltså kan man från den aritmetisk-geometriska olikheten ta ln ledvis och få påståendet som skulle bevisas.

10. På bordet finns tre högar som alla har n småstenar, $n > 0$. Två spelare spelar följande spel: På sin tur tar spelaren ur valfri hög en valfri mängd stenar (dock minst en.) Den spelare vinner som gör draget efter vilket det inte finns en enda sten mera på bordet.

Visa att den vinnande strategin finns hos den spelaren som börjar.

10. uppgiftens lösning: Spelaren som börjar tar med sitt första dra alla stenar från en av högarna. Vi kallar de andra två högarna för spelhögar.

Härefter spelar den spelaren som började alltid så att det efter deras drag finns lika många stenar i båda högarna. (Detta antal kan vara noll.) När den som började spelet spelar såhär, blir det alltid kvar olika många stenar i högarna efter den andra spelarens drag (i den ena kan det bli noll), alltså kan inte den här spelaren tömma bordet helt och hållet.

11. Leta efter alla tal $n \in \mathbb{N}, n > 0$, där n är en kvadrat och alla siffror i talet $n : s$ decimaltalsframställning är fyror.

11. uppgiftens lösning: Svar: $n = 4$ är den enda lösningen.

Vi visar att det inte finns andra. Låt $n > 10$ vara ett tal där alla dess siffror i decimaltalsframställningen enbart finns fyror. n kan skrivas i formen $4 \cdot k$, där k:s decimaltalsframställning består av enbart ettor. Om n är en kvadrat är även k en kvadrat. Man ska alltså visa att k inte är en kvadrat. Alltså $11 \equiv 3 \mod 4$. Eftersom k fås av talet 11 genom att lägga till ett tal som är delbart med fyra, $k \equiv 3 \mod 4$. Eftersom alla kvadrater är kongruenta med nollan eller ettan $\mod 4$, kan talet k inte vara en kvadrat.

12. Vinklarna i en triangel är α, β och γ. Inne i den inskrivna cirkeln till triangeln ritas en triangel vars hörnpunkter är skärningspunkterna mellan den ursprungliga triangeln och den inskrivna cirkeln. Bestäm vinklarna i den triangeln som just bildats.

12. uppgiftens lösning: Svar: Vinklarna är $\alpha/2 + \beta/2, \beta/2 + \gamma/2$ och $\alpha/2 + \gamma/2$. Låt A, B, C vara hörnen i den stora triangeln som motsvarar vinklarna α, β, γ. Låt D vara den lilla triangelns hörn på sidan AB, E hörnet för den lilla triangeln på sidan BC och F hörnet för den lilla triangeln på sidan AC. Låt O vara skärningspunkten för bisektriserna i den stora triangeln, som även är medelpunkten för cirkeln.

Definierar vinkeln som hör ihop med hörnpunkten D. Vinkeln OAD är $\alpha/2$ och vinkeln ODA är rät. Låt G vara skärningspunkten mellan sträckan DF och bisektrisern till vinkeln BAC. Nu är vinkeln DGO rät, och alltså är trianglarna ODA och OGS likformiga. Alltså är vinkeln $ODF = \alpha/2$.

Med motsvarande motiveringar får man att $ODE = \beta/2$.

Nu är alltså vinkeln i den lilla triangeln som svarar till punkten D, $\angle FDO + \angle ODE = \alpha/2 + \beta/2$.

På motsvarande sätt är vinkeln som svarar till punkten E i den lilla triangeln $\beta/2 + \gamma/2$, och vinkeln i lilla triangeln som svarar till punkten F är $\alpha/2 + \gamma/2$.

Svårare uppgifter

13. Leta efter alla par $n, m \in \mathbb{N}$ som uppfyller ekvationen

$$1 + 5 \cdot 2^m = n^2.$$

13. uppgiftens lösning: Svar: Den enda lösningen är $n = 9, m = 4$.

Uttrycket i uppgiften skrivs om som

$$5 \cdot 2^m = (n-1)(n+1).$$

Ekvationen $5 = (n-1)(n+1)$ har inte heltalslösningar, $m \geq 1$. Eftersom $n-1$ och $n+1$ antingen båda är jämna eller udda, är båda jämna. Alltså är en av dem delbar med fyra och den andra är inte delbar med fyra. Talen $n-1, n+1$ har alltså som faktorer enbart tvåor och dessutom en femma. Alltså har ett av talen som faktor en två och dessutom möjligen en femma.

Det finns alltså enbart fyra kandidater: $n-1 = 2, n+1 = 2, n-1 = 10, n+1 = 10$ alltså $n = 1, 3, 9, 11$. Genom att räkna uttrycket $n^2 - 1$ för dessa värden noterar vi att enbart $9^2 - 1$ har formen $5 \cdot 2^m$, och därav $m = 4$.

14. Låt $a \neq b$ vara reella tal, för vilka det gäller

$$a^4 - 2022a = b^4 - 2022b > 0.$$

Visa att $ab < 0$.

14. uppgiftens lösning: Genom att forma om ekvationen $a^4 - 2022a = b^4 - 2022b$ får vi

$$\frac{a^4 - b^4}{a - b} = 2022.$$

Av detta kan man få

$$(a+b)(a^2 + b^2) = 2022.$$

Eftersom det måste gälla att $a + b > 0$ kan inte både a och b vara negativa.

Om både a och b är positiva får man av uppgiftsbeskrivningens olikhet att $a, b > \sqrt[3]{2022}$. Då gäller att $(a+b)(a^2 + b^2) > 2\sqrt[3]{2022}(\sqrt[3]{2022})^2 = 2 \cdot 2022$. Motsägelse.

Alltså måste den ena av talen a, b vara positiv och den andra negativ.

15. Låt a, b, c vara positiva heltal, som inte har gemensamma faktorer. Vilka heltalsvärden kan man få ur uttrycket

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}?$$

15. uppgiftens lösning: **Svar:** Värdena är 6, 7 och 8. Genom att förlänga alla bråken till liknämniga och sammanslå dem, fås följande uttryck

$$\frac{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}{abc}.$$

Eftersom detta är ett heltal, får man

$$abc | ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$$

Eftersom det härifrån följer att $a|bc(b+c)$, samt att a och b inte har gemensamma faktorer, $a|b+c$, alltså $a|a+b+c$. Motsvarande $b|a+b+c$ och $c|a+b+c$. Alltså $abc|a+b+c$ och $a+b+c+ \geq abc$.

Med symmetri som motivering kan man anta att $a \leq b \leq c$. Om $a \geq 3$, kan ekvationen $a+b+c \geq abc$ tydligt inte gälla.

Om $a = 2$, gäller att $2bc \leq 2 + b + c$. Nu är $b, c \geq 2$, och det finns inga heltalslösningar för olikheten.

Om $a = 1$, gäller att $bc \leq b + c + 1$ och $bc|b + c + 1$. Om $b \geq 3$, finns det inga lösningar. Om $b = 2$, hittas lösningen $c = 3$. Om $b = 1$, gäller att $c|c + 2$, och lösningarna är $c = 1$ och $c = 2$.

Nu har vi alltså kvar kandidaterna $(1, 1, 1), (1, 1, 2)$ och $(1, 2, 3)$.

Med dessa antar uttrycket värdena $6, 7$ och 8.

16. För hur många positiva heltalspar a, b gäller det att

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2022}?$$

16. uppgiftens lösning: **Svar:** Det finns 27 talpar.

Ekvationen kan lätt skrivas i formen

$$ab - 2022a - 2022b = 0.$$

Genom att tillägga 2022^2 i båda leden och skriva vänstra ledet i produktform fås

$$(a - 2022)(b - 2022) = 2022^2.$$

Som tal $a - 2022$ duger alltså vilken som helst faktor till talet 2022^2, och $a - 2022$ bestämmet talet b entydigt. Primtalsfaktoriseringen är $2022^2 = 2^2 3^2 337^2$. Faktorer som duger för $a - 2022$ är alltså $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

17. På en cirkels rand har det markerats 18 punkter som ligger på samma avstånd från varandra. En del av dessa punkter är färglagda. Vi säger att färgläggningen är bra, om man ur gruppen med färglagda punkter kan hitta fyra som är hörnpunkterna till en rektangel. Vad är den största mängden färglagda punkter för vilka man hittar en icke-bra färgläggning.

17. uppgiftens lösning: **Svar:** Största mängden färglagda punkter där det hittas icke-godkända lösningar är 10.

Tio färglagda punkter efter varandra är en icke-bra färgläggning. Ändpunkterna för färgläggningen är då cirkelns diameter och man kan inte hitta en rektangel.

Visar att en färgläggning av elva punkter absolut är bra. Om man hittar två olika diametrar för cirkeln, vars ändpunkter är färglagda, så duger dessa ändpunkter som hörnpunkter för rektangeln. Visa att så är fallet. Det finns sju ofärgade punkter, så det finns som mest sju stycken diametrar för cirkeln vars ena ändpunkt är färgad och den andra ofärgad. Det finns alltså minst fyra färglagda punkter som är sådana ändpunkter för sådana diametrar vars båda ändpunkter är färglagda. Det finns alltså minst två efterfrågade diametrar.

18. Låt A, B och C vara tre punkter på en cirkels rand, och låt M vara cirkelns medelpunkt. Låt M' vara punkten M:s spegling på sträckan AB. Vi antar att punkterna A, B, C är valda så att M' är inuti triangeln ABC, och vidare att M' är skärningspunkten till bisektriserna för vinklarna CAB och CBA. Sträckan AM skär på nytt cirkeln i punkten D.

Visa att $|CA| \cdot |CD| = |AB| \cdot |AM|$.

18. uppgiftens lösning: Eftersom $|AM| = |BM|$, och trianglarna AMB och $AM'B$ är kongruenta, $|AM'| = |BM'|$, och vinklarna $M'AB$ och $M'BA$ är lika stora. Därav är vinklarna CAB och CBA lika stora, alltså $|CA| = |CB|$.

Enligt randvinkelsatsen är vinklarna ADC och ABC lika stora, alltså är vinklarna MDC och ABC lika stora. Eftersom $|MD| = |MC|$, är trianglarna ACB och DMC likformiga.

Alltså $\frac{|CA|}{|AB|} = \frac{|MD|}{DC} = \frac{|AM|}{|CD|}$, ur vilket påståendet följer.

19. Låt AB vara en sträcka, och rita cirkeln ω så att sträckan AB är dess diameter. Låt O vara cirkelns medelpunkt och OC cirkelns radie som är vinkelrät emot sträckan AB. Låt M vara en inre punkt på sträckan OC.

Låt N vara skärningspunkten mellan cirkeln ω och sträckan AM (som alltså är en annan skärningspunkt än A). Vi ritar tangenter till cirkeln ω i punkterna N och B. Låt P vara dessa tangenters skärningspunkt.

Visa att det är möjligt att rita en cirkel, på vars rand alla punkterna M, O, P och N finns.

19. uppgiftens lösning: Vinklarna ONP och OBP är 90 grader, och sträckorna ON och OB är lika långa. Alltså är trianglarna ONP och OBP kongruenta.

Låt $\alpha = \angle NAB$. Nur är $\angle NOB = 2\alpha$, och $\angle POB = \alpha$. Trianglarna POB och MAO är alltså kongruenta, och OM och PB är lika långa. Alltså är $MOPB$ en rektangel.

Nu är vinklarna OMP och ONP räta vinklar. Alltså ligger M och N på randen av en sådan cirkel, vars diameter är OP.

20. Låt V vara ett riktningslöst nät, som har 2019 maskor. En vändning av nätet i maska v betyder att nätet förändras så att det för alla andra maskor v' tas bort en kant (v, v') om en sådan kant existerade innan vändningen, och det läggs till en kant (v, v') om en sådan inte existerade innan vändningen.

Nätet kallas för minimerat om antalet kanter i nätet inte mera kan minskas med någon kombination av svängningar. (Här får samma maska svängas upprepade gånger.)

Vad är det största möjliga antalet kanter i ett minimerat nät med 2019 maskor?

20. uppgiftens lösning: **Svar:** Det efterfrågade antalet är 1009^2.

Antar att V består av två klickar som inte har kanter till varandra. Då innebär en vändning av nätet i maska v att enbart v flyttar från den ena klickan till den andra, alltså hålls nätet som ett nät som består av två klickar, där klickarna inte har kanter mellan varandra.

I ett sådant härnt nät som består av två klickar är antalet kanter

$$(x(x-1) + (2019-x)(2019-x-1))/2,$$

där x är storleken av den andra klicken.

Uttrycket kan skrivas om i formen

$$(2019^2 - 2019 + 2x(x - 2019))/2$$

Vars minimi finns i $(0 + 2019)/2 = 1009\frac{1}{2}$.

Eftersom uttrycket är växande jäntemot minimiläget för större värden på x och minskande för mindre värden, fås den minsta mängden kanter för ett nät som består av två klickar, när storlekarna på klickarna är 1010 och 1009 maskor. Då finns det $(1010 \times 1009 + 1009 \times 1008)/2 = 1009^2$ kanter. Detta tal är alltså antalet kanter för ett minimerat nät.

Visar sedan att man med ett valfritt nät kan uppnå som mest 1009^2 kanter.

Låt G vara ett minimerat nät. Om det från någon maska går mera än 1009 kanter, kan man få ett mindre nät genom att svänga det i den här maskan. Alltså går det från varje maska i G som mest 1009 kanter.

Låt G fortfarande vara ett minimerat nät. Vi påstår att antalet maskor, från vilka det går 1009 kanter är som mest 1010 stycken. Gör ett motantagande att det finns flera. Låt v vara en maska, från vilken det går 1009 kanter. Nu existerar det en maska v', från vilken det inte går en kant till v, samt från vilken det går 1009 kanter. Svänger nätet i v. Med den här operationen hålls det totala antalet kanter i nätet konstant, och en av de nya kanterna går från v till v'. Alltså får det från v' 1010 kanter. Om man nu svänger nätet i v' får man antalet kanter i nätet att minska, vilket är en motsägelse.

Alltså finns det i G som mest $(1010 \times 1009 + 1009 \times 1008)/2 = 1009^2$ kanter.

21. En enhetskvadrat delas i rektanglar, vars sidor är i samma riktning som enhetskvadraten. En del av rektanglarna färgläggs röda och resten vita, dock så att summan av areorna för de röda rektanglarna är den samma som summan av areorna för de vita rektanglarna.

Inuti varje röd rektangel skrivs dess höjd och bredd. Inne i varje vit rektangel skrivs dess bredd och höjd. Visa att det minsta möjliga värdet för summan av de tidigare nämnda talen är $2\frac{1}{2}$.

21. uppgiftens lösning: Markerar alla vita rektanglars i:s bredd med a_i och deras höjd med b_i. På motsvarande sätt markerar vi alla röda rektanglar i:s bredd med c_i och deras höjd med d_i.

Lemma Antingen är $\sum a_i \geq 1$ eller $\sum d_i \geq 1$.

Om man genom enhetskvadraten kan dra en vågrät linje som skär enbart vita rektanglar, gäller det första alternativet. I de andra fallen skär varje vågrät linje en röd rektangel och det andra alternativet gäller. Lemmats bevis är klart.

Med stöd av symmetrin kan man anta att $\sum a_i \geq 1$. Cauchy-Schwartz olikhet ger

$$(\sum \frac{a_i}{b_i})(\sum a_i b_i) \geq (\sum a_i)^2 \geq 1.$$

Men $\sum a_i b_i = 1/2$, alltså $\sum \frac{a_i}{b_i} \geq 2$.

Eftersom varje $c_i \leq 1$, får man

$$\sum \frac{d_i}{c_i} \geq \sum c_i d_i = 1/2.$$

Alltså är det efterfrågade värdet i uppgiften som minst $2\frac{1}{2}$. Detta minsta värde fås genom att dela enhetskvadraten med en vågrät linje i två lika stora rektanglar, av vilken den ena färgas röd och den andra vit.