Helmikuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 24.4.2022 sähköpostitse.
Helpommat tehtävät: nirmal.krishnan(at)helsinki.fi
Vaikemmat tehtävät: Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Helpompia tehtäviä

1. Viiden erisuuren positiivisen kokonaisluvun keskiarvo on 15 ja mediaani 18. Kuinka suuri näistä luvuista suurin voi korkeintaan olla?

1. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Suurin luku voi olla korkeintaan 35.

Koska mediaani on 18, niin kaksi pienintä lukua ovat ainoat, jotka voivat olla alle 18 ja toiseksi suurin luku on vähintään 19. Suurin luku on mahdollisimman suurin, kun muut luvut ovat mahdollisimman pieniä. Täten muut neljä lukua ovat $1, 2, 18$ ja 19 sekä keskiarvon takia on oltava

$$\frac{1+2+18+19+x}{5} = 15 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 75 - 40,$$

missä x on suurin luku. Siis x on korkeintaan 35.

2. 27 nopasta kootaan $3 \times 3 \times 3$ nopan kuutio. Jokaisessa nopassa kaikkien kahden vastakkaisen tahkon silmälukujen summa on 7. Ison kuution kaikilta kuudelta tahkolta näkyvät silmäluvut lasketaan yhteen. Mikä on pienin mahdollinen arvo tälle summalle?

2. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Pienin summa on 90.

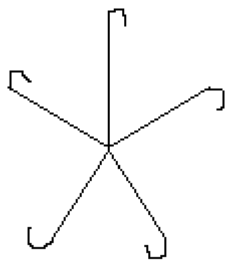
Nopassa kaksi tahkoa ovat joko vastakkaisia tai vierekkäisiä. Koska vastakkaisten tahkojen silmälukujen summa on 7, tahkot 1 ja 2 ovat vierekkäisiä. Samoin tahkot 1 ja 3 sekä 2 ja 3. Näin ollen noppa on mahdollista laittaa ison kuution kulmaan niin, että luvut 1, 2 ja 3 näkyvät.

Isossa kuutiossa on 6 näkyvää tahkojen keskinoppaa, joihin saadaan näkyvä luku 1, 12 näkyvää tahkojen reunanoppaa, joihin saadaan näkyvät luvut 1 ja 2, sekä 8 näkyvää tahkojen kulmanoppaa, joihin saadaan näkyvät luvut 1, 2 ja 3. Summa on siis $6 + 12 \times 3 + 8 \times 6$.

3. Olkoon A kuvio tasossa. Sanomme, että tason kierto tai peilaus on kuvion A symmetria, jos se vie A:n itselleen. Myös 0:n asteen kierto, joka ei tee tasolle yhtään mitään lasketaan kierroksi. Jos siis esimerkiksi A on A-kirjaimen muotoinen, ainoat symmetriat ovat peilaus pystyakselin suhteen ja nollan asteen kierto.

Olkoon $n > 0$ luonnollinen luku. Anna esimerkki kuviosta A, jonka symmetrioita ovat täsmälleen n eri kiertoa, mutta ei yksikään peilaus minkään suoran suhteen.

3. tehtävän ratkaisu: Oletetaan $n = 5$. Nyt kuvio on



Kuvasta välittömästi nähdään, että täsmälleen 5 kiertoa vie kuvion itselleen. Yksikään peilaus minkään suoran suhteen ei voi olla symmetria, koska sakaroiden päissä olevat väkäset osoittavat myötäpäivään, ja peilauksen jälkeen ne osoittaisivat vastapäivään.

Muut n:n arvot menevät samalla periaatteella.

4. Psykologiantunnilla järjestettiin telepatialeikki. Opettaja kirjoitti luvut 1-17 johonkin järjestykseen paperille, ja kukin 15 oppilaasta teki samoin. Kukin oppilas sai pisteen jokaisesta luvusta, joka oli samalla paikalla kuin opettajalla. Ketkään kaksi oppilasta eivät saaneet samaa pistemäärää, eikä kukaan saanut yhtä tai viittätoista pistettä.

Klaara sai korkeimmat pisteet. Kuinka monta pistettä hän sai?

4. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Klaara sai 17 pistettä. Kokeesta on mahdollista saada 0-17 pistettä, siis 18 eri pistemäärää. Koska yhtä tai viittätoista kukaan ei saanut, mahdollisia pistemääriä on 16. Koska oppilaita on 15, vain yksi pistemäärä jäi saamatta, ja Klaaralla oli 16 tai 17 pistettä.

Jos kokeessa kaikki paitsi yksi luku ovat oikein, sille viimeiselle luvulle ei jää muita paikkoja kuin oikea paikka. Siis kokeesta ei voi saada kuuttatoista pistettä.

5. Kolme pelaaja, A, B ja C, joilla on kullakin alussa 105 pelimerkkiä, pelaavat seuraavaa peliä: Kullakin kierroksella se pelaaja, jolla on eniten pelimerkkejä antaa kaksi pelimerkkiä haluamilleen vastustajille (kaksi pelimerkkiä yhdelle pelaajalle tai yksi kummallekin vastustajalle) ja poistaa lisäksi yhden pelimerkeistään pelistä. Jos usealla pelaajalla on sama suurin määrä pelimerkkejä, pelimerkkien antaja arvotaan näiden keskuudesta.

Peli loppuu, kun jonkun pelaajan pelimerkit loppuvat; tämä pelaaja häviää pelin. Jos peli ei lopu 300 kierroksessa, pelaajat kyllästyvät pelaamaan ja lähtevät jäätelölle. Osoita, että jälkimmäinen vaihtoehto toteutuu väistämättä pelaajien pelistrategioista riippumatta.

5. tehtävän ratkaisu: Jokaisella kierroksella pelaajien pelimerkkien määrien summa vähenee täsmälleen yhdellä.

Jos kierroksen alussa pelaajien pelimerkkien summa on vähintään 10, yhdellä pelaajalla on vähintään 4 pelimerkkiä, ja hän pystyy antamaan pelimerkit menemättä nollille.

Alussa pelimerkkien määrien summa on 315, joten 300 kierroksen jälkeen se on vielä enemmän kuin 10.

6. (a) Numeroidaan kuution särmät luvuilla $1, 2, \ldots, 12$ niin, että kukin luvuista esiintyy täsmälleen yhden särmän yhteydessä. Tarkastellaan kuution kärjestä lähteviä särmiä. Kirjoitetaan kärkeen näissä särmissä olevien lukujen summa ja tehdään tämä jokaiselle kuution kärjelle. Onko mahdollista, että jokaisessa kuution kärjessä on sama luku?

(b) Onko edellisen kohdan tilanne mahdollinen, jos jokin luvuista $1, 2, \ldots, 12$ korvataan luvulla 13?

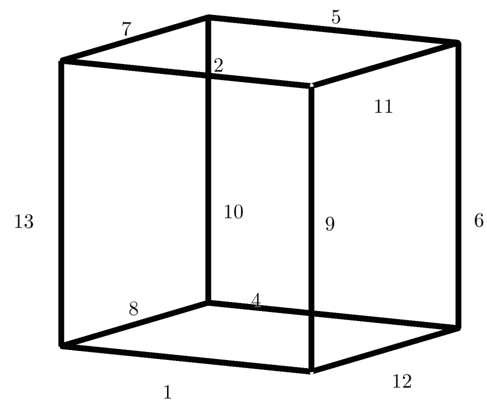
6. tehtävän ratkaisu:

(a) **Vastaus:** Kaikissa kuution kahdeksassa kärjessä ei voi olla samaa luku

Lasketaan kuution kärjissä olevien lukujen summa. Tällöin kussakin särmässä oleva luku lasketaan kahdesti. Siis kaikkien kärjissä olevien lukujen summa on $2 \cdot (1+2+\ldots+12) = 156$. Tämä ei kuitenkaan ole kahdeksalla jaollinen, joten kaikissa kuution kahdeksassa kärjessä ei voi olla samaa lukua.

(b) <u>**Vastaus:** Tilanne on mahdollinen.</u>

Voidaan esimerkiksi poistaa luku 3 ja numeroida kuution särmät niin kuin alla olevassa kuvassa on tehty. Jokaiseen kuution kärkeen tulee nyt luku 22.



7. Onko olemassa positiivisia reaalilukuja a, b, c, x, joille pätee $a^2 + b^2 = c^2$ ja $(a+x)^2 + (b+x)^2 = (c+x)^2$?

7. tehtävän ratkaisu: <u>**Vastaus:** Ei ole.</u> Oletetaan, että sellaiset luvut on olemassa ja johdetaan ristiriita. Jälkimmäinen yhtälö saadaan muotoon

$$a^2 + b^2 + (2a + 2b + x)x + x^2 = c^2 + 2cx + x^2.$$

Käyttämällä hyväksi tietoa $a^2+b^2 = c^2$ saadaan $(2a+2b+x)x = 2cx$ ja jakamalla puolittan x:llä saadaan $2a + 2b + x = 2c$. Siis $c > a + b$.

Korottamalla edellinen epäyhtälö toiseen potenssiin saadaan $c^2 > a^2 + b^2 + 2ab$, mikä on ristiriita, koska $2ab > 0$.

8. Olkoon $a, b, c > 3$ alkulukuja. Osoita, että $(a - b)(b - c)(a - c)$ on jaollinen luvulla 48.

8. tehtävän ratkaisu:

Koska kaikki luvut a, b, c ovat parittomia, $a - b$, $b - c$, $a - c$ ovat parillisia. Jos $a - b$ ja $b - c$ eivät ole jaollisia neljällä, $a - c \equiv (a - b) + (b - c) \equiv 2 + 2 \equiv 0 \mod 4$, eli lisäksi yksi erotuksista $a - b$, $b - c$, $a - c$ on jaollinen neljällä.

Näin ollen tulo $(a - b)(b - c)(a - c)$ on jaollinen luvulla 16.

Yksikään luvuista a, b, c ei ole jaollinen kolmella. Näin ollen ko lukujen joukossa on kaksi, jotka ovat kongruentteja $\mod 3$. Näiden erotus on jaollinen kolmella, eli tulo $(a - b)(b - c)(a - c)$ on jaollinen luvulla 48.

9. Sanomme, että $n \in \mathbb{N}$ on k-ykkösluku, jos n:n kymmenjärjestelmäesitys koostuu k kpl ykkösestä. Siis esim. 11 on 2-ykkösluku.

Osoita, että on olemassa $k' \in \mathbb{N}$, jolle k-ykkösluku on jaollinen luvulla 37 aina, kun k on jaollinen luvulla k'.

9. tehtävän ratkaisu: <u>**Vastaus:** Luvuksi k' kelpaa mm. luku 3.</u>

Huomataan, että $111 = 3 \times 37$. Lisäksi k-ykkösluku, jolle k on jaollinen luvulla 3 voidaan kirjoittaa muodossa $111 \times 1001001001 \ldots 001$. Siis tällainen k-ykkösluku on jaollinen luvulla 37.

Vaikeampia tehtäviä

10. Yksikköneliön sisään piirretään äärellinen määrä ympyröitä, joiden kehien yhteenlaskettu pituus on 10. Osoita, että neliön läpi voidaan vetää jana, joka leikkaa vähintään neljää ympyrää.

10. tehtävän ratkaisu: Ympyröiden halkaisijoiden summa on $s = 10/\pi > 3$. Kun ympyrät projisoidaan jollekin neliön sivulle, ympyröiden projektioiden yhteenlaskettu pituus on s, joka on suurempi kuin kolme. Niinpä vähintään neljä ympyrän projektiota leikkaa samassa pisteessä. Kun otetaan kyseisen pisteen alkukuva tehdyn projektion suhteen, se on vaadittu jana.

11. Merkitään Pascalin kolmiota niin, että $P(1,1)$ on Pascalin kolmion huippu, $P(2,1), P(2,2)$ on toinen rivi jne. Olkoon $n \in \mathbb{N}$, ja $1 \leq k \leq 2^n$. Osoita, että $P(2^n, k) \equiv 1 \mod 2$.

11. tehtävän ratkaisu: Ratkaisun ymmärtämiseksi kannattaa kehittää Pascalin kolmiota paperille $\mod 2$.

Laajennetaan P:n määritelmää niin, että $P(m,k) = 0$, kun $k < 1$ tai $k > m$. Jätämme ratkaisussa myös $\mod 2$ kirjoittamatta, eli $\equiv$ viittaa kaikkialla kongruenssiin nimenomaan $\mod 2$.

Selvästi $P(1,1) \equiv P(2,1) \equiv P(2,2) \equiv 1$.

Tehdään induktio-oletus $P(2^n, k) \equiv 1$, kun $1 \leq k \leq 2^n$. Todistetaan väite arvolle $n+1$.

Nyt $P(2^n+1, 1) \equiv P(2^n+1, 2^n+1) \equiv 1$, ja $P(2^n+1, k) \equiv 0$, kun $1 < k < 2^n+1$.

Väitämme, että $P(m,k) \equiv P(2^n+m, k) \equiv P(2^n+m, 2^n+k)$, kun $m \leq 2^n$, $1 \leq k \leq m$. Lisäksi $P(m+2^n, k) \equiv 0$, jos $m < k < 2^n$.

Todistetaan yo. väitteet sisemmässä indunktiossa m:n suhteen. Oletetaan $1 \leq k \leq m+1$.

Nyt

$$P(m+1,k) = P(m,k) + P(m,k-1) \equiv P(2^n+m,k) + P(2^n+m,k-1) = P(2^n+m+1,k).$$

Myös

$$P(m+1,k) = P(m,k) + P(m,k-1) \equiv P(2^n+m, 2^n+k) + P(2^n+m, 2^n+k-1) = P(2^n+m+1, 2^n+k).$$

Lisäksi jos $m+1 < k < 2^n$, $P(m+1+2^n, k) = P(m+2^n, k) + P(m+2^n, k-1) \equiv 0 + 0$.

Sisempi induktio valmis.

Nyt ulompi induktio saadaan valmiiksi havaitsemalla, että arvolla $m = 2^n$ saadaan $P(2^{n+1}, k) = P(2^n + m, k) \equiv P(m, k') = P(2^n, k') \equiv 1$, missä k' on joko k tai $k - 2^n$.

12. Olkoon x, y positiivisia reaalilukuja, joille $x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2$. Määritä tulon xy suurin arvo.

12. tehtävän ratkaisu: Ensinnäkin muistetaan

$$4xy \leq x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2.$$

Koska

$$0 \leq (x-y)^2(x+y) = (x^2-y^2)(x-y) = x^3 + y^3 - x^2y - y^2x,$$

saadaan

$$x^2y + y^2x \leq x^3 + y^3.$$

Niinpä

$$(x+y)(x^2+y^2) = x^3 + y^3 + x^2y + y^2x \leq 2(x^3+y^3).$$

Siis

$$xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2 \leq \frac{(x^3+y^3)^2}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = 1.$$

Arvo $xy = 1$ saavutetaan, kun $x = y = 1$.

13. Päivälliskutsuilla on n vierasta ja n isäntää, $n \geq 4$. He istuvat pyöreän pöydän ympärillä jossain järjestyksessä. Kaksi vierasta pystyy keskustelemaan keskenään, jos heidän välissään on korkeintaan yksi henkilö, tai jos heidän välissään on täsmälleen kaksi henkilöä, joista vähintään toinen on isäntä.

Osoita, että kutsuilla on vähintään n paria vieraita, jotka pystyvät keskustelemaan keskenään.

13. tehtävän ratkaisu: Muodostetaan suunnattu verkko, jonka solmuja ovat vieraat, ja vieraasta v kulkee kaari vieraaseen v', jos v' on korkeintaan kolme paikkaa v:stä myötäpäivään, ja v ja v' pystyvät keskustelemaan keskenään.

Jaetaan henkilöt peräkkäisistä vieraista koostuviin blokkeihin V_i ja peräkkäisistä isännistä muodostuviin blokkeihin H_i. Oletetaan, että blokit ovat maksimaalisia niin, että tyyppiä V_i ja H_i olevat blokit vuorottelevat kierrettäessä pöydän ympäri. Indeksit valitaan niin, että blokki H_i seuraa välittömästi blokkia V_i kierrettäessä myötäpäivään.

Lemma Jos V_i on a_i vieraan blokki ja H_i sitä seuraava b_i isännän blokki, joukosta V_i lähtee vähintään $2a_i - b_i$ kaarta.

Jos $a_i = 1$ ja $b_i = 1$, joukosta V_i lähtee vähintään yksi kaari, ja lemma pätee. Jos $a_i = 1$ ja $b_i > 1$, on $2a_i - b_i \leq 0$, ja lemma pätee.

Oletetaan sitten $a_i > 1$.

Helposti nähdään, että joukon V_i sisällä on $2a_i - 3$ kaarta. Jos siis $b_i \geq 3$, todistus on valmis.

Jos $b_i = 2$, blokin viimeisestä vieraasta lähtee kaari, joka kulkee joukon H_i yli, joten lemma pätee tässä tapauksessa.

Jos $b_i = 1$, blokin kahdesta viimeisestä vieraasta lähtee kummastakin kaari, joka kulkee joukon H_i yli. Lemman todistus valmis.

Nyt siis on vieraspareja, jotka pystyvät keskustelemaan on vähintään $\sum_i 2a_i - b_i = 2n - n = n$.

14. Olkoon P äärellinen, vähintään viiden tason pisteen joukko. Osa P:n pisteistä on väritetty punaisiksi ja loput sinisiksi. Oletamme, että mitkään kolme samanväristä pistettä eivät sijaitse samalla suoralla.

Osoita, voidaan muodostaa kummatkin seuraavat ehdot toteuttava jana:

- Janan päätepisteet ovat joukon P keskenään samanvärisiä pisteitä.
- Jana ei sisällä muita joukon P pisteitä kuin päätepisteet.

14. tehtävän ratkaisu: Olkoon R niiden kolmioiden joukko, joiden kärjet ovat punaisia P:n pisteitä ja B niiden kolmioiden joukko, joiden kärjet ovat sinisiä P:n pisteitä. Olkoon $K = R \cup B$. Koska P sisältää vähintään 5 pistettä, se sisältää kolme keskenään samanväristä pistettä, ja $K \neq \emptyset$.

Koska P on äärellinen joukko, myös K on äärellinen joukko. Siis K sisältää kolmion k_0, joka on pinta-alaltaan pienin. Symmetrian perusteella voidaan olettaa, että k_0:n kärjet ovat punaisia.

Väitämme, että jokin kolmion k_0 sivuista kelpaa vaadituksi janaksi. Tehdään vastaoletus, että mikään niistä ei kelpaa. Tällöin jokainen k_0:n sivu sisältää sinisen pisteen. Nämä siniset pisteet kärkinä voidaan muodostaa kolmio k_1. Selvästi $k_1 \in K$. Lisäksi k_1 sijaitsee kolmion k_0 sisällä, joten se on pinta-alaltaan pienempi kuin k_0. Ristiriita.

15. Olkoon $N = \mathbb{N} \setminus 0$. Etsi kaikki funkiot $f\colon N \to N$, jotka toteuttavat ehdon

$$(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n$$

kaikilla $n \in N$.

15. tehtävän ratkaisu:

Vastaus: $f\colon N \to N$; $f(n) = n$ kaikilla $n \in N$ on ainoa ehdon toteuttava funktio.

Todistus: Kun $n = 1$, ehto on muodossa $0 < f(1)f(f(1)) < 2$, joten väistämättä $f(1) = 1$. Lisäksi, jos $f(k) = 1$, $(k-1)^2 < f(k)f(f(k)) = 1$, joten $k = 1$.

Induktio-oletus: Kun $1 \leq n \leq m$, kaikilla $k \in N$ pätee $f(k) = n$ jos ja vain jos $k = n$.

Oletetaan, että induktio-oletus pätee, ja todistetaan se arvolle $m+1$. Nyt

$$m^2 < f(m+1)f(f(m+1)) < (m+1)(m+2).$$

Induktio-oletuksen perusteella $f(m+1) \geq m+1$, joten myös $f(f(m+1)) \geq m+1$. Nyt ylärajasta $f(m+1)f(f(m+1))$:lle seuraa $f(m+1) = m+1$, joten $f(f(m+1)) = m+1$.

Oletetaan sitten että $f(k) = m+1$ jollain $k \in N$. Induktio-oletuksen perusteella $k \geq m+1$.

Mutta alarajasta seuraa

$$(k-1)^2 < f(k)f(f(k)) = (m+1)f(m+1) = (m+1)^2,$$

mistä seuraa $k = m+1$. Induktio valmis.

16. On annettu n rivistä ja m sarakkeesta koostuva taulukko, $n > m$, jonka jokaisessa solussa on ei-negatiivinen reaaliluku. Jos solussa (i, j) (i rivi, j sarake) on positiivinen reaaliluku, rivin i solujen summa on sama kuin sarakkeen j solujen summa.

Osoita, että taulukossa on rivi, joka koostuu pelkistä nollista.

16. tehtävän ratkaisu: Tehdään vastaoletus, että jokaisella rivillä on vähintään yksi positiivinen reaaliluku. Koska pelkästään nollista koostuvat sarakkeet eivät vaikuta tehtävään, ne voidaan poistaa ja menettämättä yleisyyttä olettaa, että jokaisessa sarakkeessa on vähintään yksi nollasta eroava reaaliluku.

Merkitään R_i:llä rivin i solujen summaa ja C_j:llä sarakkeen j solujen summaa. Merkitään a_{ij}:llä solun (i, j) lukua.

Nyt $\sum_j \frac{a_{ij}}{R_i} = 1$ kaikilla i ja $\sum_i \frac{a_{ij}}{C_j} = 1$ kaikilla j. Niinpä

$$n = \sum_i \sum_j \frac{a_{ij}}{R_i} = \sum_{i,j} \frac{a_{ij}}{R_i} = \sum_{i,j} \frac{a_{ij}}{C_j} = \sum_j \sum_i \frac{a_{ij}}{C_j} = m,$$

mikä on ristiriita.

17. Oletetaan, että n, $n \geq 1$, äärettömän pientä pelinappulaa on asetettu tason joihinkin pisteisiin. Samassa pisteessä voi sijaita useampi pelinappula. Yksi pelaaja pelaa peliä, jossa hän valitsee kaksi pelinappulaa, jotka sijaitsevat joissain pisteissä A ja B, ja siirtää ne janan AB keskipisteeseen. Kutsumme pelin alkutilannetta ratkeavaksi, jos pelaajan on mahdollista siirtää jonolla tällaisia siirtoja kaikki pelinappulat samaan pisteeseen.

Millä n:n arvoilla kaikki n:n kokoiset alkutilanteet ovat ratkeavia?

17. tehtävän ratkaisu:

Vastaus: Kaikki n:n kokoiset alkutilanteet ovat ratkeavia jos ja vain jos n on kakkosen potenssi.

Oletetaan, että $n = 2^k$, ja tehdään induktio-oletus, että 2^{k-1} kokoinen alkutilanne on ratkeava. Nyt n nappulan kokoinen pelitilanne voidaan ajatella kahtena erillisenä 2^{k-1} nappulan kokoisena pelitilanteena (nappulat jaetaan kahdeksi tilanteeksi mielivaltaisesti), jotka voidaan ratkaista induktio-oletuksen perusteella. Lopulta meillä on joissain kahdessa pisteessä A ja B pinot, joiden koko on 2^{k-1}. Valitsemalla aina yksi nappula kummastakin pinosta ja toistamalla tätä voidaan molemmat pinot siirtää janan AB keskipisteeseen.

Oletetaan sitten, että n ei ole kakkosen potenssi. Sijoitetaan $n - 1$ nappulaa pisteeseen $(0, 0)$ ja yksi nappula pisteeseen $(1, 0)$. Nähdään helposti, että nappuloiden x-koordinaattien summa säilyy vakiona jokaisessa siirrossa. Jos siis peli ratkeaisi, kaikki nappulat olisivat lopulta pisteessä $(1/n, 0)$. Kuitenkin nähdään helposti, että jos ennen siirtoa kaikkien pisteiden x-koordinaatit ovat murtolukuja, joiden nimittäjät ovat kakkosen potensseja, koordinaatit ovat tällaisia murtolukuja myös minkä tahansa siirron jälkeen. Siis pelitilanne ei ole ratkeava.

18. Tutkitaan funktioita $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$, $n > 0$. Kutsutaan näitä totuusfunktioiksi.

Määritellään $f\colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, $f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = 1$, $f(1,1) = 0$.

Esimerkiksi funktio $g\colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, $g(0,0) = g(1,1) = g(0,1) = 1$, $g(1,0) = 0$ voidaan esittää f:n avulla $g(a,b) = f(a, f(b,b))$.

Osoita, että jokainen totuusfunktio voidaan esittää samaan tapaan f:n avulla.

18. tehtävän ratkaisu: Tämä ratkaisu ei ole lyhyin, mutta se perustuu selkeään periaatteeseen.

Määritellään $\mathrm{ei}(a) = f(a,a)$, $\mathrm{tai}(a,b) = f(\mathrm{ei}(a), \mathrm{ei}(b))$, $\mathrm{ja}(a,b) = \mathrm{ei}(f(a,b))$.

Määritellaan vielä

$$\mathrm{tai}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{tai}(a_1, \mathrm{tai}(a_2 \ldots \mathrm{tai}(a_{n-1}, a_n)))))$$

ja

$$\mathrm{ja}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{ja}(a_1, \mathrm{ja}(a_2 \ldots, \mathrm{ja}(a_{n-1}, a_n))))).$$

Nyt $\mathrm{ei}(a) = 1$ joss $a = 0$, $\mathrm{tai}(a_1, \ldots, a_n) = 1$ joss yksikin a_i:stä on 1, ja $\mathrm{ja}(a_1, \ldots, a_n) = 1$ joss kaikki a_i:t ovat ykkösiä.

Olkoon nyt $h\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ja $k = (b_1, \ldots, b_n)$ jono nollia ja ykkösiä.

Jos $h(b_1, \ldots, b_n) = 1$ määritellään

$$l_k(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{ja}(c_1, \ldots c_n),$$

missä c_i on muuttuja a_i, jos $b_i = 1$, ja c_i on lauseke $\mathrm{ei}(a_i)$, jos $b_i = 0$.

Tässä siis l_k antaa jonolla $(a_1, \ldots, a_n)$ ykkösen jos ja vain jos $a_i = b_i$ kaikilla i.

Nyt

$$h(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{tai}(l_{k_0}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, l_{k_m}(a_1, \ldots, a_n)),$$

missä k_j käy läpi kaikki n:n pituiset nollien ja ykkösten jonot $b_1, \ldots, b_n$, joilla $h(b_1, \ldots, b_n) = 1$.

Tässä siis oikeanpuoleinen lauseke on ykkönen joss yksikin l_k:ista on ykkönen, eli $a_i = b_i$ kaikilla i, ja b_i:t ovat jostain sellaisesta jonosta, jolla $h(b_1, \ldots, b_n) = 1$.

Ylläolevalla tekniikalla saadaan kaikki muut totuusfunktiot, paitsi identtisesti nollat totuusfunktiot. Ne saadaan puolestaan kaavalla $\mathrm{ja}(a, \mathrm{ei}(a))$.