



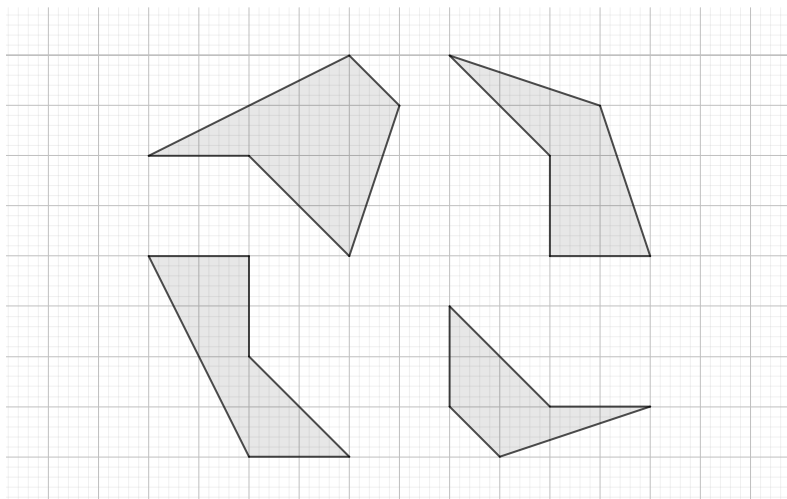
## Iranin 8. geometriaolympialaiset

### Perustaso

5. marraskuuta 2021

Tehtävät on pidettävä salassa kunnes ne on julkaistu IGO:n virallisilla nettisivuilla:  
igo-official.com

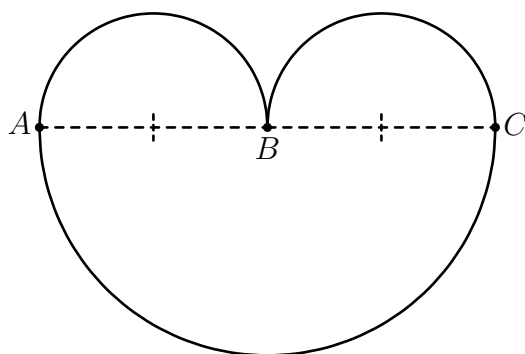
**Tehtävä 1.** Yhdistä alla olevat kappaleet sellaiseksi yhdeksi kappaleeksi, että muodostuu kappale, joka on symmetrinen vähintään kahden eri peilauksen suhteen.



**Tehtävä 2.** Neliön  $ABCD$  sivulla  $AB$  sijaitsee piste  $K$ , sivulla  $BC$  piste  $L$ , sivulla  $CD$  piste  $M$  ja sivulla  $DA$  piste  $N$  siten, että nelikulmion  $KLMN$  pinta-ala on yhtä suuri kuin puolet neliön  $ABCD$  pinta-alasta. Osoita, että jokin nelikulmion  $KLMN$  lävistäjä on yhdensuuntainen jonkin neliön  $ABCD$  sivun kanssa.

**Tehtävä 3.** Kuten seuraavassa kuvassa näkyy, *sydän* on muoto, joka koostuu kolmesta puolipyörästä, joiden halkaisijat ovat  $AB$ ,  $BC$  ja  $AC$  siten, että  $B$  on janan  $AC$  keskipiste.

Olkoon  $\omega$  sydän. Kutsutaan paria  $(P, P')$  puolittajaksi, jos  $P$  ja  $P'$  sijaitsevat sydämellä  $\omega$  ja puolittavat sen piirin. Olkoot  $(P, P')$  ja  $(Q, Q')$  puolittajapareja. Sydämen  $\omega$  tangentit pisteissä  $P$ ,  $P'$ ,  $Q$  ja  $Q'$  muodostavat nelikulmion  $XYZT$ . Jos konvekksi nelikulmio  $XYZT$  on piirretty ympyrän sisään, etsi suorien  $PP'$  ja  $QQ'$  välinen kulma.



**Tehtävä 4.** Tasakylkisen puolisuunnikkaan  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) pisteet  $E$  ja  $F$  sijaitsevat janalla  $CD$  siten, että  $D$ ,  $E$ ,  $F$  ja  $C$  ovat tässä järjestyksessä ja  $DE = CF$ . Olkoot  $X$  ja  $Y$  pisteiden  $E$

ja  $C$  peilaukset  $AD$ :n ja  $AF$ :n suhteen. Osoita, että kolmioiden  $ADF$  ja  $BXY$  ympäri piirretyillä ympyröillä on sama keskipiste.

**Tehtävä 5.** Olkoot tason 2021 pistettä  $A_1, A_2, \dots, A_{2021}$  sellaisia, että mitkään kolme eivät ole samalla suoralla ja

$$\angle A_1 A_2 A_3 + \angle A_2 A_3 A_4 + \dots + \angle A_{2021} A_1 A_2 = 360^\circ,$$

missä kulma  $\angle A_{i-1} A_i A_{i+1}$  on kulma, joka on pienempi kuin  $180^\circ$  (oletetaan, että  $A_{2022} = A_1$  ja  $A_0 = A_{2021}$ ). Osoita, että jotkin näistä kulmista summautuvat kulmaksi, jonka koko on  $90^\circ$ .

Aikaa: 4 tuntia.  
Jokainen tehtävä on 8 pisteen arvoinen.



Iranin 8. geometriaolympialaiset  
Keskitaso  
5. marraskuuta 2021

---

Tehtävät on pidettävä salassa kunnes ne on julkaistu IGO:n virallisilla nettisivuilla:  
[igo-official.com](http://igo-official.com)

---

**Tehtävä 1.** Olkoon  $ABC$  kolmio, jossa  $AB = AC$ . Olkoon  $H$  kolmion  $ABC$  korkeusjanojen leikkauspiste. Piste  $E$  on janan  $AC$  keskipiste ja piste  $D$  sijaitsee sivulla  $BC$  siten, että  $3CD = BC$ . Osoita, että  $BE \perp HD$ .

**Tehtävä 2.** Olkoon  $ABCD$  suunnikas. Piste  $E$  sijaitsee sivulla  $AB$  ja piste  $F$  sivulla  $CD$  siten, että  $\angle EDC = \angle FBC$  ja  $\angle ECD = \angle FAD$ . Osoita, että  $AB \geq 2BC$ .

**Tehtävä 3.** Tarkastellaan konveksia nelikulmiota  $ABCD$ , jossa  $AB = BC$  ja  $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$ . Olkoon piste  $E$  lävistäjien  $AC$  ja  $BD$  leikkauspiste. Piste  $F$  sijaitsee sivulla  $AD$  siten, että  $\frac{AF}{FD} = \frac{CE}{EA}$ . Ympyrä  $\omega$ , jonka halkaisija on  $DF$ , ja kolmion  $ABF$  ympäri piirretty ympyrä leikkaavat toisen kerran pisteessä  $K$ . Piste  $L$  on  $EF$ :n and ympyrän  $\omega$  toinen leikkauspiste. Osoita, että suora  $KL$  kulkee  $CE$ :n keskipisteen kautta.

**Tehtävä 4.** Olkoon  $ABC$  teräväkulmainen kolmio, jonka kaikki sivut ovat eri suuria ja jonka sisään piirretyn ympyrän keskipiste on  $I$  ja ympäri piirretty ympyrä  $\Gamma$ . Suora  $AI$  leikkaa ympyrän  $\Gamma$  toisen kerran pisteessä  $M$ . Olkoon  $N$  janan  $BC$  keskipiste ja  $T$  sellainen piste ympyrällä  $\Gamma$ , että  $IN \perp MT$ . Lopuksi, olkoot  $P$  ja  $Q$   $TB$ :n ja  $TC$ :n leikkauspisteet (tässä järjestyksessä) sellaisen suoran kanssa, joka on kohtisuorassa  $AI$ :n suhteen pisteessä  $I$ . Osoita, että  $PB = CQ$ .

**Tehtävä 5.** Tarkastellaan konveksia viisikulmiota  $ABCDE$  ja sen sivulla  $CD$  liikkuvaa pistettä  $X$ . Oletetaan, että pisteet  $K$  ja  $L$  sijaitsevat janalla  $AX$  siten, että  $AB = BK$ ,  $AE = EL$  ja kolmioiden  $CXK$  ja  $DXL$  ympäri piirretyt ympyrät leikkaavat toisen kerran pisteessä  $Y$ . Osoita, että pisteen  $X$  liikkuessa kaikki tällaiset suorat  $XY$  kulkevat joko kiinnitetyn pisteen kautta tai sitten ne ovat samansuuntaisia.

Aikaa: 4 tuntia ja 30 minuuttia.  
Jokainen tehtävä on 8 pisteen arvoinen.



## Iranin 8. geometriaolympialaiset

### Vaativa taso

5. marraskuuta 2021

---

**Tehtävät on pidettävä salassa kunnes ne on julkaistu IGO:n virallisilla nettisivuilla:**  
**igo-official.com**

---

**Tehtävä 1.** Olkoon  $ABC$  teräväkulmainen kolmio  $\omega$  sen ympäri piirretty ympyrä. Olkoon  $D$  sivun  $AC$  keskipiste,  $E$  pisteestä  $A$  sivulle  $BC$  piirretyn korkeusjanan kantapiste, ja  $F$   $AB$ :n  $DE$ :n leikkauspiste. Piste  $H$  sijaitsee ympyrän  $\omega$  kaarella  $BC$  (sillä, joka ei sisällä pistettä  $A$ ) siten, että  $\angle BHE = \angle ABC$ . Osoita, että  $\angle BHF = 90^\circ$ .

**Tehtävä 2.** Kaksi ympyrää  $\Gamma_1$  ja  $\Gamma_2$  leikkaavat kahdessa eri pisteessä  $A$  ja  $B$ . Suora, joka kulkee pisteen  $A$  kautta, leikkaa ympyrän  $\Gamma_1$  jälleen pisteessä  $C$  ja ympyrän  $\Gamma_2$  jälleen pisteessä  $D$  siten, että  $A$  sijaitsee  $C$ :n ja  $D$ :n välissä. Ympyrän  $\Gamma_2$  tangentti pisteessä  $A$  leikkaa ympyrän  $\Gamma_1$  jälleen pisteessä  $E$ . Olkoon  $F$  sellainen piste ympyrällä  $\Gamma_2$ , että  $F$  ja  $A$  sijaitsevat  $BD$ :n eri puolilla ja  $2\angle AFC = \angle ABC$ . Osoita, että ympyrän  $\Gamma_2$  tangentti pisteessä  $F$  ja suorat  $BD$  ja  $CE$  leikkaavat samassa pisteessä.

**Tehtävä 3.** Tarkastellaan kolmiota  $ABC$ , jonka korkeusjanat ovat  $AD$ ,  $BE$  ja  $CF$  ja niiden leikkauspiste  $H$ . Pisteiden  $H$  kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa suoran  $EF$  kanssa, leikkaa  $EF$ :n,  $AB$ :n ja  $AC$ :n pisteissä  $P$ ,  $T$  ja  $L$  (tässä järjestyksessä). Piste  $K$  sijaitsee  $BC$ :n sivulla siten, että  $BD = KC$ . Olkoon  $\omega$  ympyrä, joka kulkee pisteiden  $H$  ja  $P$  kautta ja jonka tangenttina suora  $AH$  toimii. Osoita, että kolmion  $ATL$  ympäri piirretty ympyrä ja  $\omega$  sivuavat toisiaan ja että  $KH$  kulkee sivuamispisteen kautta.

**Tehtävä 4.** Tasolla on 2021 pistettä konveksissa muodostelmassa, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla ja mitkään neljä eivät ole samalla ympyrällä. Osoita, että on olemassa kaksi sellaista pistettä, että jokainen ympyrä, joka kulkee näiden kahden pisteen kautta, sisältää ainakin 673 muuta tason pistettä kyseisen ympyrän sisällä.  
(Äärellinen joukko pisteitä tasossa on konveksissa muodostelmassa, jos pisteet ovat konveksin monikulmion kärjet.)

**Tehtävä 5.** Kolmion  $ABC$  sisään piirretyn ympyrän keskipiste on  $I$ .  $BC$  toimii kolmion  $ABC$  sisään piirretyn ympyrän tangenttina pisteessä  $D$ . Olkoot  $P$  ja  $Q$  sivun  $BC$  sellaisia pisteitä, että  $\angle PAB = \angle BCA$  ja  $\angle QAC = \angle ABC$ . Olkoot  $K$  ja  $L$  kolmioiden  $ABP$  ja  $ACQ$  sisään piirrettyjen ympyröiden keskipisteet (tässä järjestyksessä). Osoita, että  $AD$  on kolmion  $IKL$  Eulerin suora.

(Kolmion Eulerin suora on suora, joka kulkee kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen ja korkeusjanojen leikkauspisteen kautta.)

Aikaa: 4 tuntia ja 30 minuuttia.  
Jokainen tehtävä on 8 pisteen arvoinen.