Marraskuun 2021 valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 12.1.2022 sähköpostitse.
Helpommat tehtävät: nirmal.krishnan(at)helsinki.fi
Vaikemmat tehtävät: anne-maria.ernvall-hytonen(at)helsinki.fi.

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Helpompia tehtäviä

1. Positiivisten kokonaislukujen jonossa termi saadaan lisäämällä edelliseen termiin sen suurin numero. Mikä on suurin mahdollinen määrä peräkkäisiä parittomia lukuja, joita jonossa voi olla?

1. tehtävän ratkaisu: Vastaus: Suurin mahdollinen määrä peräkkäisiä parittomia lukuja on viisi.

Jotta jonon termi ja sitä seuraava termi olisivat molemmat parittomia, on termin viimeisen numeron oltava pariton ja suurimman numeron parillinen. Näin ollen tarkasteltavassa termissä on oltava vähintään kaksi numeroa. Siis luvun suurin numero voi muuttua enintään yhdellä, kun termiin lisätään sen suurin numero. Nyt pariton jono päättyy, kun suurin numero kasvaa yhdellä, sillä suurin numero muuttuu parittomaksi. Näin ollen peräkkäisten parittomien lukujen jonossa niiden suurimman numeron on oltava sama. Täten myös peräkkäisten parittomien lukujen erotuksten on oltava vakio. Koska $5n$ on jaollinen luvulla 10 kaikilla parillisilla kokonaisluvuilla n, niin korkeimman termin on viimeistään viiden peräkkäisen parittoman termin jälkeen kasvettava yhdellä. Siis parittomia termejä on enintään 5 peräkkäin. Tämä on mahdollista esimerkiksi jonolla $807, 815, 823, 831, 839$. Näin ollen vastaus on 5.

2. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, joka on jaollinen luvulla 24. Osoita, että luvun $n-1$ positiivisten tekijöiden summa on myös jaollinen luvulla 24.

2. tehtävän ratkaisu: Olkoon d luvun $n-1$ positiivinen tekijä. Koska luku n on jaollinen luvulla 24, niin $n-1 = 24m-1$ jollain positiivisella kokonaisluvulla m. Lisäksi $n-1$ ei voi olla olla neliöluku, koska $n-1 \equiv -1 \pmod 4$ ja neliöt ovat 0 tai 1 (mod 4). Siis d ja $\frac{n-1}{d}$ ovat erisuuria lukuja sekä ne molemmat ovat luvun $n-1$ tekijöitä.

Suoraan laskemalla saadaan, että $d + \frac{n-1}{d} = \frac{d^2-1+24m}{d}$. Osoitetaan, että tämä luku on jaollinen luvulla 24 ja tästä saadaan väite.

Koska $\text{syt}(d, 24) = 1$, niin luku $\frac{d^2-1+24m}{d}$ on jaollinen luvulla 24 täsmälleen silloin, kun $d^2-1 = (d-1)(d+1)$ on jaollinen luvulla 24. Luku d on luvun $n-1$ tekijänä pariton, joten sekä lukujen $d-1$ että $d+1$ on oltava parillisia ja täsmälleen toinen niistä on jaollinen luvulla 4. Täten $(d-1)(d+1)$ on jaollinen luvulla 8. Edelleen, koska luku d on luvun $n-1$ tekijä, niin se ei voi olla kolmella jaollinen. Siis luku $d-1$ tai luku

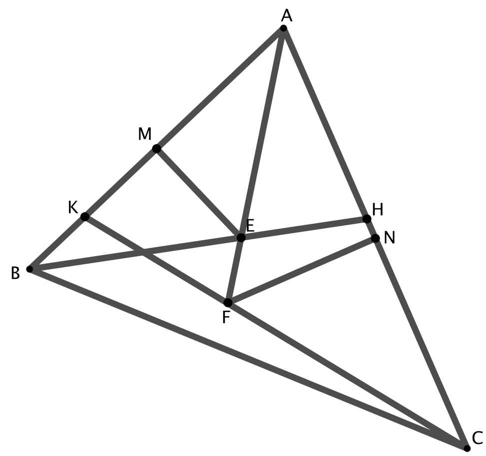
$d+1$ on kolmella jaollinen eli $(d-1)(d+1)$ on jaollinen luvulla 3. Täten luku $(d-1)(d+1)$ on jaollinen luvulla 24. Saadaan, että luvun n tekijöiden summa voidaan laskea yhdistelemällä tekijöitä pareihin, joiden summat ovat aina jaollisia luvulla 24. Siis myös kaikkien tekijöiden summa on jaollinen luvulla 24. $\square$

3. Kolmiossa ABC kulman $\angle A$ puolittaja, janan BC keskinormaali ja kärjestä B piirretty korkeusjana leikkaavat pisteessä E. Osoita, että kulman $\angle A$ puolittaja, janan AC keskinormaali ja kärjestä C piirretty korkeusjana leikkaavat samassa pisteessä.

3. tehtävän ratkaisu: Olkoot M ja N sivujen AB ja AC keskipisteet vastaavasti sekä suoran BE leikkauspiste suoran AC kanssa H. Merkitään kulman A puolittajan ja janan AC keskinormaalin leikkauspistettä kirjaimella F. Olkoon suorien CF ja AB leikkauspiste K. Tavoitteena on osoittaa, että CK on kohtisuorassa janaa AB vastaan, jolloin väite on todistettu. Koska $\angle HAE = \angle EAM$ ja $\angle EHA = 90° = \angle AME$, niin $\triangle AEH \sim \triangle AEM$. Edelleen, koska $BM = MA$ ja $\angle EMB = 90° = AME$, niin $\triangle AEM \sim \triangle BEM$. Siis $\angle BEM = \angle MEA = \angle AEH$. Koska $\angle BEM + \angle MEA + \angle AEH = 180°$, niin $\angle BEM = 60°$. Täten $\angle MAE = \angle EAH = 30°$. Koska $\angle CNF = 90° = FNA$ ja $CN = NA$, niin $\triangle AFN \sim \triangle CFN$. Näin ollen $\angle FCN = \angle NAF = 30°$. Siis

$$\angle CKA = 180° - \angle CAK - \angle KCA = 90°$$

eli CK on kärkeä C vastaava korkeusjana. $\square$



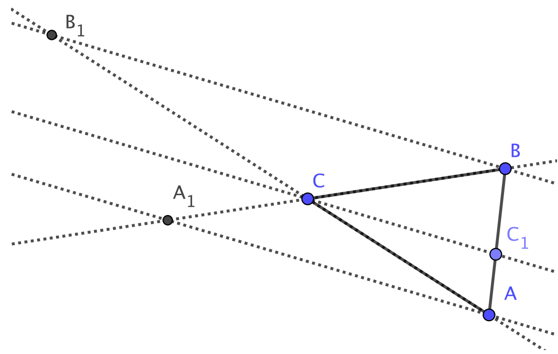
4. Olkoon C_1 kolmion ABC sivun AB mielivaltainen sisäpiste. Olkoon A_1 sellainen piste suoralla BC, että $AA_1 \parallel CC_1$, ja olkoon B_1 sellainen piste suoralla AC, että $BB_1 \parallel CC_1$. Todista, että

$$\frac{1}{|AA_1|} + \frac{1}{|BB_1|} = \frac{1}{|CC_1|}.$$

4. tehtävän ratkaisu: Kolmiot ABB_1 ja AC_1C ovat yhdenmuotoiset, koska kaikki niiden vastinkulmat ovat yhtäsuuret. Siten $|AC_1|/|AB| = |CC_1|/|BB_1|$. Symmetrisesti $|BC_1|/|AB| = |CC_1|/|AA_1|$. Laskemalla nämä yhtälöt yhteen saadaan

$$1 = \frac{|AC_1| + |BC_1|}{|AB|} = \frac{|CC_1|}{|BB_1|} + \frac{|CC_1|}{|AA_1|},$$

mistä väite seuraa. [Eötvös-kilpailu 1905]



5. Muodostetaan kirjaimista A, B ja C kuuden kirjaimen sana. Kirjain A valitaan todennäköisyydellä x, kirjain B todennäköisyydellä y ja kirjain C todennäköisyydellä z, missä $x+y+z=1$. Millä todennäköisyyksillä x, y ja z sanan $BACBAB$ todennäköisyys on maksimaalinen?

5. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Kysytty todennäköisyys on maksimaalinen, kun $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{2}$ ja $z=\frac{1}{6}$

Sana $BACBAB$ saadaan todennäköisyydellä x^2y^3z. Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön mukaan on

$$1 = x+y+z = \frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{y}{3}+\frac{y}{3}+z \geq 6\sqrt[6]{\frac{x^2y^3z}{2^2\cdot 3^3}}$$

ja yhtäsuuruus on voimassa täsmälleen silloin, kun $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=z$. Siis sanan $BACBAB$ todennäköisyys on maksimaalinen, kun $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{2}$ ja $z=\frac{1}{6}$.

6. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joilla pätee $abc=1$. Todista, että

$$a^2+b^2+c^2 \geq a+1+\frac{1}{a}.$$

6. tehtävän ratkaisu: Ensinnäkin

$$\frac{1}{a} = bc \leq \frac{1}{2}(b^2+c^2),$$

lisäksi

$$a = a\cdot 1 \leq a\cdot\frac{a+b+c}{3} = \frac{a^3}{3}+\frac{ab+bc}{3} \leq \frac{a^2}{3}+\frac{b^2+c^2+2a^2}{6}$$

sekä

$$1 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Nyt epäyhtälöiden vasempien puolien summa on todistettavan epäyhtälön oikea puoli ja epäyhtälöiden oikeiden puolien summa on todistettavan epäyhtälön vasen puoli. Väite on siis todistettu.

7. Todista, että jos $a, b\in\mathbb{R}$ ja $a-b=1$,

$$a^3-b^3 \geq \frac{1}{4}.$$

7. tehtävän ratkaisu: Koska $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, riittää todistaa, että $a^2+ab+b^2\geq 1/4$. Sijoitetaan tähän $a=b+1$ ja sievennetään:

$$\begin{aligned}
& & (1+b)^2+(1+b)b+b^2 &\geq \frac{1}{4}\\
&\Longleftrightarrow & (1+2b+b^2)+(b+b^2)+b^2 &\geq \frac{1}{4}\\
&\Longleftrightarrow & 3b^2+3b+\frac{3}{4} &\geq 0\\
&\Longleftrightarrow & 3\Big(b+\frac{1}{2}\Big)^2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Viimeinen epäyhtälö on tosi, koska neliöluku ei voi olla negatiivinen.

8. Millä lukujärjestelmän kantaluvuilla voi 221 olla 1215:n tekijä?

8. tehtävän ratkaisu: Vastaus: Vain kantaluvulla 9. Jos kantaluku on a, $1215 = a^3 + 2a^2 + a + 5$ ja $221 = 2a^2 + 2a + 1$. Jaetaan ensimmäinen polynomi toisella:

$$a^3 + 2a^2 + a + 5 = (2a^2 + 2a + 1)\Big(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\Big) + \Big(-\frac{1}{2}a + \frac{9}{2}\Big).$$

Koska jakojäännöksen on oltava 0, $a = 9$. (Silloin myös osamäärä on kokonaisluku.)

9. *Eulerin funktio* $\phi(n)$ on niiden kokonaislukujen $1, 2, \ldots, n-1$ lukumäärä, joiden suurin yhteinen tekijä n:n kanssa on 1. Todista, että kun m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja, $\phi(m^n - 1)$ on jaollinen n:llä.

9. tehtävän ratkaisu: Eulerin lauseen mukaan

$$m^{\phi(m^n-1)} \equiv 1 \pmod{m^n - 1},$$

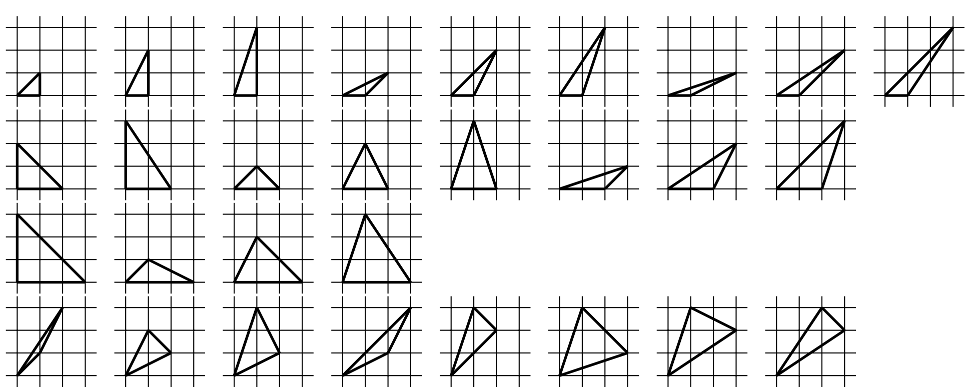
koska $\operatorname{syt}(m, m^n - 1) = 1$. Väite seuraa nyt seuraavassa todistettavasta lauseesta: kun a, b ja c ovat luonnollisia lukuja, $a^b - 1$ jakaa $a^c - 1$:n jos ja vain jos b jakaa c:n. "Jos"-suunta on selvä: $a^c - 1 = (a^b - 1)(a^{c-b} + a^{c-2b} + \cdots + a^b + 1)$. "Vain jos"-suunnan todistamiseksi kirjoitetaan $c = qb + r$, missä $0 \leq r < b$. Oletetaan, että $a^b - 1 \mid a^c - 1$, ja todistetaan, että $r = 0$. Kirjoitetaan ensin

$$a^c - 1 = a^{qb+r} - 1 = a^r\big((a^b)^q - 1\big) + a^r - 1.$$

Koska $a^b - 1$ jakaa sekä summan että sen ensimmäisen termin, sen täytyy jakaa myös toinen termi $a^r - 1$. Mutta koska $r < b$, on oltava $r = 0$.

10. Montako sellaista epäyhtenevää kolmiota on olemassa, joiden kärkipisteiden koordinaatit ovat kokonaislukuja 0, 1, 2 tai 3?

10. tehtävän ratkaisu: Vastaus: 29 kolmiota. Peilaamalla, kääntämällä ja siirtämällä kolmio voidaan aina saada sellaiseen asentoon, että yksi sen kärjistä on origossa ja vastapäivään seuraavan pisteen koordinaateille pätee $y \leq x$. (Jos kolmelle kärjelle jaetaan neljä nimilappua "ylin", "alin", "vasemmanpuoleisin" ja "oikeanpuoleisin", jokin saa ainakin kaksi nimilappua ja voidaan siirtää origoon. Toinen piste saadaan paikalleen peilaamalla suoran $y = x$ suhteen.) Tämän havainnon avulla kolmiot on helppo luetella systemaattisesti. Yhtenevät kolmiot voi eliminoida laskemalla kunkin kolmion sivujen pituudet Pythagoraan lauseella. Tuloksena saadaan 29 kolmiota:



Vaikeampia tehtäviä

11. Olkoon $f(x)$ toisen asteen polynomi. Todista, että on olemassa toisen asteen polynomit $g(x)$ ja $h(x)$, joilla

$$f(x)f(x+1) = f(h(x)).$$

11. tehtävän ratkaisu: Olkoon $f(x) = a(x-r)(x-s)$. Silloin

$$\begin{aligned} f(x)f(x+1) &= a^2(x-r)(x-s+1)(x-r+1)(x-s) \\ &= a^2(x^2+x-rx-sx+rs-r)(x^2+x-rx-sx+rs-s) \\ &= a^2((x^2)-(r+s-1)x+rs)-r))((x^2-(r+s-1)x+xs)-s)) \\ &= g(h(x)), \end{aligned}$$

missä $g(x) = a^2(x-r)(x-s) = af(x)$ ja $h(x) = x^2-(r+s-1)x+rs$.

12. Etsi kaikki reaalikertoimiset polynomit P, joille

$$P(x)P(2x^2-1) = P(x^2)P(2x-1)$$

kaikilla reaaliluvuilla x.

12. tehtävän ratkaisu: Vastaus. Vakiopolynomit $P(x) = c$ ja polynomit muotoa $P(x) = c(x-1)^n$, $n \geq 1$. Olkoon polynomin aste $\deg P = n$. Kertoimia vertailemalla nähdään, että $P(2x-1) = 2^n P(x) + R(x)$, missä $\deg R < n$. Yhtälö saadaan muotoon

$$P(x)\Big(2^n P(x^2) + R(x^2)\Big) = P(x^2)\Big(2^n P(x) + R(x)\Big).$$

Siten $P(x)R(x^2) = P(x^2)R(x)$. Jos polynomi R ei ole identtisesti nolla ja sen aste on m, saadaan $n+2m = m+2n$ eli $m = n$, mikä on ristiriita. Siis $P(2x-1) = 2^nP(x)$ eli $P(2x+1) = 2^nP(x+1)$. Siten polynomille $Q(x) = P(x+1)$ pätee $Q(2x) = 2^nQ(x)$. Kirjoitetaan $Q(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Jokaiselle kertoimelle pätee $2^ia_i = 2^na_i$, joten $a_i = 0$, kun $i < n$. Siis mahdollisia ratkaisuja P ovat vakiopolynomit $P(x) = c$ ja polynomit $P(x) = c(x-1)^n$, missä $c \in \mathbb{R}$ ja $n \geq 1$. On helppo tarkistaa, että nämä myös toteuttavat tehtävän ehdon.

13. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jolla on kulmanpuolittajat BL ja CM. Osoita, että $\angle A = 60°$ jos ja vain jos on olemassa piste K janalla BC ($K \neq B, C$), jolla kolmio KLM on tasasivuinen.

13. tehtävän ratkaisu: Olkoon I suorien BL ja CM leikkauspiste. Tällöin $\angle BIC = 180° - \angle ICB - \angle CBI = 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle B) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° + \angle A$. Siispä $\angle BIC = 120°$ jos ja vain jos $\angle A = 60°$.

Osoitetaan nyt ehdon olevan välttämätön: Olkoon $\angle A = 60°$. Olkoon K janan BC ja kulman $\angle BIC$ puolittajan leikkauspiste. Väitetään, että kolmio KLM ei ole tasasivuinen. Koska $\angle BIC = 120°$, tiedetään, että $\angle MIB = \angle KIB = 60°$. Lisäksi $\angle IBM = \angle IBK$ ja $IB = IB$. Siispä kolmiot IBM ja IBK ovat yhteneviä ja $IM = IK$. Vastaavasti $IL = IK = IM$. Kun tähän yhdistetään tieto $\angle KIL = \angle LIM = \angle MIK = 120°$, on saatu todistettua, että KLM on tasasivuinen.

Toinen suunta todistuksesta: Oletetaan, että K on janalla BC ja että kolmio KLM on tasasivuinen. Tarkastellaan kolmioita BLK ja BLM. Nyt $BL = BL$, $LM = LK$ ja $\angle MBL = \angle KBL$. Nyt siis joko $\angle LKB + \angle BML = 180°$ tao $\angle LKB = \angle BML$. Koska $\angle KBM < 90°$ ja $\angle MLK = 60°$, tiedetään, että $\angle LKB + \angle BML > 210°$. Siispä $\angle LKB = \angle BML$, joten kolmiot BLK ja BLM ovat yhteneviä ja $BK = BM$. Saadaan $IK = IM$. Vastaavasti $IL = IK$ js I on kolmion KLM kulmanpuolittajien leikkauspiste. Siispä $\angle LIM = 2\angle LKM = 120°$, josta saadaan $\angle BIC = \angle LIM = 120|°$ ja $\angle A = 60°$.

14. Olkoot a ja n kokonaislukuja ja olkoon p alkuluku, joka toteuttaa ehdon $p > |a| + 1$. Osoita, että polynomia $f(x) = x^n + ax + p$ ei voi esittää kahden vakiosta poikkeavan kokonaislukukertoimisen polynomin tulona.

14. tehtävän ratkaisu: Olkoon z polynomin kompleksijuuri. Todistetaan, että $|z| > 1$. Oletetaan, että $|z| \leq 1$. Koska $z^n + az = -p$, saadaan

$$p = |z^n + az| = |z||z^{n-1} + a| \leq |z^{n-1}| + |a| \leq 1 + |a|,$$

mikä on ristiriita. Oletetaan nyt, että $f = gh$ on polynomin f hajotelma tuloksi, jossa tulontekijät ovat kokonaislukukertoimisia ja vakiosta poikkeavia. Nyt $p = f(0) = g(0)h(0)$, ja joko $|g(0)| = 1$ tai $|h(0) = 1$. Voidaan olettaa yleisyyttä menettämättä, että $|g(0)| = 1$. Jos luvut $z_1, z_2, \ldots, z_k$ ovat polynomin g juuret, niin ne ovat myös polynomin f juuret. Siispä

$$1 = |g(0)| = |z_1 z_2 \cdots z_k| = |z_1||z_2| \cdots |z_k| > 1,$$

mikä on ristiriita.

15. Millä n:n ja p:n positiivisilla kokonaislukuarvoilla yhtälöparilla

$$\begin{aligned} x + py &= n, \\ x + y &= p^z \end{aligned}$$

on ratkaisu (x, y, z) positiivisten kokonaislukujen joukossa?

15. tehtävän ratkaisu: Havaitaan ensin, että jos $p = 1$, jälkimmäisellä yhtälöllä ei voi olla ratkaisua. Ratkaistaan jälkimmäisestä yhtälöstä y ja sijoitetaan ensimmäiseen:

$$x + py = x + p(p^z - x) = x(1 - p) + p^{z+1} = n$$

eli koska $p - 1 \neq 0$,

$$x = \frac{p^{z+1} - n}{p - 1} = \frac{p^{z+1} - 1}{p - 1} - \frac{n - 1}{p - 1}.$$

Sijoitetaan jälkimmäiseen yhtälöön x:n lauseke:

$$y = p^z - \frac{p^{z+1} - n}{p - 1} = \frac{p^{z+1} - p^z - p^{z+1} + n}{p - 1} = \frac{n - p^z}{p - 1} = \frac{n - 1}{p - 1} - \frac{p^z - 1}{p - 1}.$$

Kun $z \geq 1$, osamäärä $(p^z - 1)/(p - 1) = p^{z-1} + p^{z-2} + \cdots + 1$ on kokonaisluku. Siten x ja y voivat olla kokonaislukuja vain, jos $n - 1$ on jaollinen $p - 1$:llä. Luku x on positiivinen vain, jos $p^{z+1} > n$, ja luku y vain, jos $p^z < n$. Siis molemmat ovat positiivisia vain, jos $p^z < n < p^{z+1}$.

Saatiin ratkaisun olemassaololle välttämättömät ehdot:

- $p > 1$;
- $n - 1$ on $p - 1$:n monikerta;
- n ei ole p:n kokonaislukupotenssi.

Ehdot ovat myös riittävät, koska z:n arvo määräytyy ehdosta $p^z < n < p^{z+1}$ yksikäsitteisesti, minkä jälkeen x ja y ratkeavat saaduilla kaavoilla.

16. Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positiivisia reaalilukuja, jotka toteuttavat ehdon

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 1.$$

Todista, että epäyhtälö

$$\frac{1}{n - 1 + x_1} + \frac{1}{n - 1 + x_2} + \cdots + \frac{1}{n - 1 + x_n} \leq 1$$

pätee.

16. tehtävän ratkaisu: Olkoon $a_i = \sqrt[n]{x_i}$, kun $1 \le i \le n$. Silloin $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ ja

$$\frac{1}{n-1+x_i} = \frac{1}{n-1+a_i^n} = \frac{1}{n-1+\frac{a_i^{n-1}}{a_1 \cdot a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n}} \le \frac{1}{n-1+\frac{(n-1)a_i^{n-1}}{a_1^{n-1}+\cdot+a_{i-1}^{n-1}+a_{i+1}^{n-1}+\cdots+a_n}}$$

aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla. Siispä

$$\frac{1}{n-1+x_i} \le \frac{a_1^{n-1}+\cdot+a_{i-1}^{n-1}+a_{i+1}^{n-1}+\cdots+a_n}{(n-1)(a_1^{n-1})+a_2^{n-1}+\cdots a_n^{n-1}}.$$

Epäyhtälöiden summaaminen yhteen antaa vaaditun epäyhtälön.

17. Positiivisten reaalilukujen x, y ja z neliöiden summa on 1. Todista, että

(a) $$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - (x+y+z) \ge 2\sqrt{3}$$

(b) $$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) + (x+y+z) \ge 4\sqrt{3}.$$

17. tehtävän ratkaisu: (a) Aritmeettisen ja neliöllisen keskiarvon välisen epäyhtälön (AM-QM) mukaan

$$\frac{x+y+z}{3} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Tästä seuraa

$$x+y+z \le \sqrt{3}. \qquad (1)$$

Aritmeettisen ja harmonisen keskiarvon välisen epäyhtälön (AM-HM) mukaan

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z} \ge 3\sqrt{3}. \qquad (2)$$

Väite seuraa yhtälöistä (1) ja (2).

(b) Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön (AM-GM) mukaan

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+(x+y+z) \ge 4\sqrt[4]{\frac{x+y+z}{xyz}}.$$

Koska $x^2+y^2+z^2=1$, edellisen epäyhtälön oikea puoli on

$$4\sqrt[4]{\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{xyz}} = 4\sqrt[4]{\frac{x^2}{yz}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z^2}{xy}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}.$$

Sovelletaan juurrettavaan aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välistä epäyhtälöä (AM-GM):

$$4\sqrt[4]{\dots} \ge 4\sqrt[4]{9\sqrt[9]{\frac{x^4y^4z^4}{x^4y^4z^4}}} = 4\sqrt[4]{9} = 4\sqrt{3}.$$

18. Osoita, että kun x, y, z ja α ovat ei-negatiivisia reaalilukuja,

$$x^\alpha(x-y)(x-z)+y^\alpha(y-x)(y-z)+z^\alpha(z-x)(z-y) \ge 0.$$

Osoita, että yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos joko $x=y=z$ tai luvuista x, y ja z kaksi on yhtäsuuria ja kolmas on nolla. (Epäyhtälö voi olla tuttu jostakin valmennusmateriaalista, mutta älä tässä yhteydessä vetoa siihen vaan todista se!)

18. tehtävän ratkaisu: Symmetrian nojalla voidaan olettaa, että $0 \le x \le y \le z$. Tällöin summan ensimmäinen termi on selvästi ≥ 0. Jälkimmäisten termien summa on

$$y^\alpha(y-x)(y-z) + z^\alpha(z-x)(z-y) = (z-y)\big(z^\alpha(z-x) - y^\alpha(y-x)\big). \tag{3}$$

Suuruusjärjestysoletuksesta seuraa, että $z^\alpha \ge y^\alpha$ ja $z-x \ge y-x$, joten summa on vähintään 0.

Jos yhtäsuuruus on voimassa, täytyy sekä ensimmäisen termin että jälkimmäisten termien summan (3) olla 0. Jotta ensimmäinen termi on 0, on oltava $x = 0$, $x = y$ tai $x = z$.

(1) Jos $x = 0$, (3) on $y^{\alpha+1}(y-z) + z^{\alpha+1}(z-y) = (z-y)\big(z^{\alpha+1} - y^{\alpha+1}\big)$, joka on 0 vain jos $y = z$.

(2) Jos $x = y$, (3) on $z^\alpha(z-x)^2$, joka on 0 vain jos joko $z = 0$ tai $x = z$.

(3) Jos $x = z$, suuruusjärjestysoletuksen nojalla $x = y = z$.

Tehtävän epäyhtälö tunnetaan *Schurin epäyhtälönä*.

19. Kolmion ABC sivun AC pituuden neliö on kahden muun sivun pituuksien neliöiden keskiarvo. Todista, että $\cot^2 B \ge \cot A \cot C$.

19. tehtävän ratkaisu: Merkitään $a = |BC|$, $b = |AC|$ ja $c = |AB|$, jolloin tehtävän oletus on $2b^2 = a^2 + c^2$. Kosini- ja sinilauseesta kolmiossa ABC seuraa

$$\cot B = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{(a^2+c^2-b^2)2R}{2ac \cdot b} = \frac{(a^2+c^2-b^2)R}{abc}$$

ja vastaavasti

$$\cot A = \frac{(b^2+c^2-a^2)R}{abc}, \qquad \cot C = \frac{(a^2+b^2-c^2)R}{abc},$$

missä R on kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde. On siis osoitettava, että

$$(a^2+c^2-b^2)^2 \ge (b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2).$$

Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisestä epäyhtälöstä seuraa

$$(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2) \le \frac{(b^2+c^2-a^2+a^2+b^2-c^2)^2}{4} = b^4$$

ja tehtävän oletuksen perusteella on

$$b^4 = (2b^2-b^2)^2 = (a^2+c^2-b^2)^2.$$

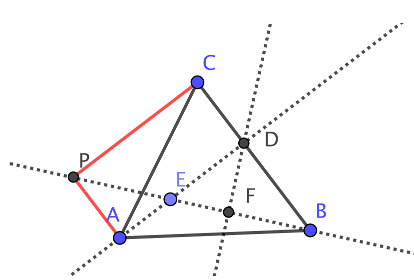
[Baltian tie 1997]

20. Teräväkulmaisen kolmion ABC sivulle BC piirretyn korkeusjanan kantapiste on D. Suoran AD piste E toteuttaa yhtälön

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|CD|}{|DB|}.$$

Piste F on kolmion BDE sivulle BE piirretyn korkeusjanan kantapiste. Todista, että $\angle AFC = 90°$.

20. tehtävän ratkaisu:



Piirretään suorakulmio $ADCP$. Koska

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|AP|}{|DB|},$$

piste E on suoralla BP. Siten $\angle DFP = 90^\circ$, joten piste F on suorakulmion $ADCP$ ympäri piirretyllä ympyrällä. Koska AC on saman ympyrän halkaisija, $\angle CFA = 90^\circ$. [Baltian tie 1998]