# Uppgiftsseriepaket februari 2022

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 24.4.2022 per epost.
De enklare uppgifterna till: nirmal.krishnan(at)helsinki.fi
och de svårare: Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi
Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

## Enklare uppgifter

**1.** Medeltalet av fem olika stora positiva heltal är 15 och medianen 18. Max hur stor kan det största av dessa tal vara?

**1. uppgiftens lösning:** **Svar:** Det största talet kan som mest vara 35.

Eftersom medianen är 18 är de två minsta talen de enda talen som kan vara mindre än 18 och det näststörsta talet är minst 19. Det största talet är så stort som möjligt när de andra talen är så små som möjligt. Därmed är de andra fyra talen $1, 2, 18$ och 19 eftersom det enligt medeltalet måste gälla att

$$\frac{1+2+18+19+x}{5} = 15 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 75 - 40,$$

där $x$ är det största talet. Alltså är $x$ som mest 35.

**2.** Av 27 tärningar konstruerar man en $3 \times 3 \times 3$ kub. På varje tärning är summan av de motstående sidornas ögontal 7. Alla synliga ögontal på kubens sex sidor räknas ihop. Vad är det minsta möjliga värdet för den här summan.

**2. uppgiftens lösning:** **Svar:** Den minsta summan är 90.

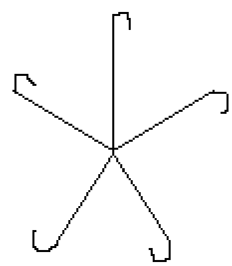
På en tärning är två sidor antingen på motsatta sidor eller bredvid varandra. Eftersom summan av två motsatta sidor är 7 så ligger sidorna 1 och 2 bredvid varandra. På samma sätt sidorna 1 och 3 samt 2 och 3. Därmed är det möjligt att skapa en stor kub med tärningarna så att sidorna $1, 2$ och 3 är synliga.

I den stora kuben finns det 6 synliga sidor hos mittärningarna, där man kan få talet 1 att synas. På de 12 kanttärningar som är synliga kan man få sidorna 1 och 2 att synas. Och på de 8 hörn tärningarna kan man få sidorna $1, 2$ och 3 synliga. Summan är alltså $6 + 12 \times 3 + 8 \times 6 = 90$.

**3.** Låt $A$ vara en avbildning i planet. Säger att roterande eller speglande av planet är symmetrisk med bilden $A$ ifall den avbildar $A$ på sig själv. Även en 0-gradig rotation, som inte gör något åt planet, räknas som en rotation. Alltså om t.ex. $A$ har formen av bokstaven A, är de enda möjliga symmetrierna att man speglar enligt lodrätaaxeln, och 0-gradig rotation.

Låt $n > 0$ vara ett naturligt tal. Ge som exempel en bild $A$, vars symmetrier är exakt $n$ olika rotationer, men där det inte finns en enda speglings symmetri.

**3. uppgiftens lösning:** Antar att $n = 5$. Vår bild är



Ur bilden ser man direkt att exakt fem rotationer avbildar bilden till sig själv. Ingen spegling i vilken som helst linje kan vara symmetrisk, eftersom krokarna på ändorna pekar medurs, men efter speglingen skulle de peka moturs.

Andra värden på $n$ fungerar enligt samma princip.

**4.** På psykologilektionen arrangerades en telepatilek. Läraren skrev talen 1-17 i någon ordning på ett papper, och alla 15 elever gjorde samma sak. Varje elev fick ett poäng för varje tal som var på samma plats som lärarens. Inga två elever fick samma poängmängd, ingen fick heller ett eller femton poäng.

Klara fick flest poäng. Hur många poäng fick Klara?

**4. uppgiftens lösning:** **Svar:** Klara fick 17 poäng. Av provet är det möjligt att få $0 - 17$ poäng, alltså 18 olika poängmängder. Eftersom ingen fick ett eller femton poäng, finns det 16 möjliga poängmängder. Eftesom det finns 15 elever, blir enbart en poängmängd över, och Klara hade antingen 16 eller 17 poäng.

Om alla utom ett tal på provet blev rätt, så finns det ingen plats kvar för det talet, förutom rätt plats. Alltså är det inte möjligt att i provet få 16 poäng.

**5.** Tre spelare $A, B$ och $C$ har alla 105 spelbrickor var i början, och spelar samma spel: Varje runda ger den spelare som har flest spelbrickor två stycken brickor till valfria motståndare (två spelbrickor till en spelare, eller en bricka till vardera motståndare) och kastar dessutom bort en spelbricka ur spelet. Om flera spelare har lika många spelbrickor, lottar man ut vem av dem som ska dela ut spelbrickor.

Spelet tar slut när någon spelares spelbrickor är slut; denna spelare förlorar spelet. Om spelet inte tar slut inom 300 rundor, blir spelarna trötta på och spela och går på glass. Visa, att det andra utfallet inträffar oberoende av spelarnas spelstrategier.

**5. uppgiftens lösning:** Varje runda sjunker det totala antalet spelpjäser i spelet med exakt en.

Om antalet spelbrickor i början av en runda är minst 10 har en spelare minst 4 brickor och hen kan ge bort brickor utan att gå till noll.

I början fanns det 315 spelbrickor, alltså finns det fortfarande efter 300 rundor mer än 10 brickor kvar.

**6.** (a) Namnger kanterna i en kub med talen $1, 2, \ldots, 12$ så att varje tal förekommer vid exakt en kant. Undersöker kanterna som rör vid hörnen. I alla kubens hörn skriver vi summan av talen för de kanter som rör vid hörnen. Är det möjligt att varje hörn i kuben antar samma tal?

(b) Är händelsen i a)-fallet möjligt ifall man byter ut något av talen $1, 2, \ldots, 12$ med talet 13?

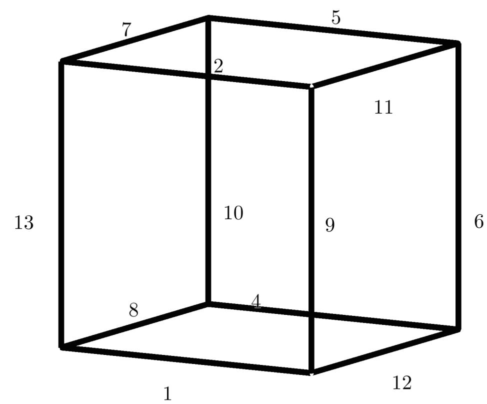
**6. uppgiftens lösning:**

(a) **Svar:** I kubens alla åtta hörn kan det inte finnas samma tal.

Räknar summan av talen som finns i kubens hörn. Därmed räknas alla tal som finns på kubens kanter två gånger. Alltså är summan alla tal som finns i kubens hörn $2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 12) = 156$. Detta är dock inte delbart med åtta, alltså kan inte kubens alla hörn ha samma tal.

(b) **Svar:** Situationen är möjlig.

Man kan t.ex. ta bort talet 3 och numrera kubens kanter enligt modellen nedan. I alla kubens hörn finns nu talet 22.




**7.** Existerar det positiva reella tal $a, b, c, x$, för vilka det gäller att $a^2+b^2 = c^2$ och $(a+x)^2+(b+x)^2 = (c+x)^2$?

**7. uppgiftens lösning:** **Svar:** Nej det existerar inte. Antar att det existerar sådana tal och ser att det leder till motsägelse. Den senare ekvationen kan skrivas i formen

$$a^2 + b^2 + (2a + 2b + x)x + x^2 = c^2 + 2cx + x^2.$$

Genom att utnyttja kunskapen om att $a^2 + b^2 = c^2$ får vi $(2a + 2b + x)x = 2cx$ och genom att dela båda sidorna med $x$ fås $2a + 2b + x = 2c$. Alltså $c > a + b$.

Genom att upphöja den föregående olikheten till andra potens så fås $c^2 > a^2 + b^2 + 2ab$, vilket är en motsägelse, eftersom $2ab > 0$.

**8.** Låt $a, b, c > 3$ vara primtal. Visa att $(a - b)(b - c)(a - c)$ är delbart med talet 48.

**8. uppgiftens lösning:**

Eftersom alla talen $a, b, c$ är udda så är $a-b$, $b-c$ och $a-c$ jämna. Om $a-b$ och $b-c$ inte är delbara med fyra och $a - c \equiv (a - b) + (b - c) \equiv 2 + 2 \equiv 0 \mod 4$, är alltså dessutom en av differenserna $a - b, b - c, a - c$ delbar med fyra.

Därmed är produkten $(a - b)(b - c)(a - c)$ delbar med talet 16.

Inget av talen $a, b, c$ är delbar med tre. Därmed finns det bland med dessa tre tal två stycken som är kongruenta mod 3. Deras differens är delbar med tre, alltså är produkten $(a - b)(b - c)(a - c)$ delbar med talet 48.

**9.** Vi säger att $n \in \mathbb{N}$ är ett $k$-ettal, om $n$:et i decimalsystemet består av $k$ stycken ettor. Alltså t.ex. 11 är ett 2-ettal.

Visa att det existerar $k' \in \mathbb{N}$, för vilken $k$-ettal är delbart med talet 37 alltid då $k$ är delbart med talet $k'$.

**9. uppgiftens lösning:** Svar: Som tal $k'$ duger till exempel 3.

Noterar att $111 = 3 \times 37$. Vidare kan $k-$ettalet som är delbart med talet 3 skrivas i formen $111 \times 1001001001\dots001$. Alltså är ett sådant härnt $k-$ettal delbar med talet 37.

## Svårare uppgifter

**10.** Inne i enhetskvadraten ritar man en ändlig mängd cirklar, vars randers sammanräknade längd är 10. Visa att man genom kvadraten kan dra en sträcka som skär minst fyra cirklar.

**10. uppgiftens lösning:** Summan av cirklarnas diametrar är $s = 10/\pi > 3$. När cirklarna projiceras på någon av kvadratens sidor, är den sammanräknade längden av cirklarnas projektioner $s$, som är större än 3. Därav så skär minst fyra cirklars projektioner i samma punkt. När man tar den efterfrågade punktens inversa bild för projektionen så fås den efterfrågade sträckan.

**11.** Betecknar Pascals triangel så att $P(1,1)$ är toppen av Pascals triangel, $P(2,1), P(2,2)$ är den andra raden osv. Låt $n \in \mathbb{N}$, och $1 \le k \le 2^n$. Visa att $P(2^n, k) \equiv 1 \mod 2$.

**11. uppgiftens lösning:** För att förstå lösningen lönar det sig att bilda Pascals triangel på papper mod 2.

Utvidgar $P:s$ definition så att $P(m,k) = 0$, då $k < 1$ eller $k > m$. Vi låter bli att i lösningen skriva ut mod 2, alltså $\equiv$ syftar för alla kongruenser just och jämnt på mod 2.

Uppenbart att $P(1,1) \equiv P(2,1) \equiv P(2,2) \equiv 1$.

Gör induktionsantagandet att $P(2^n, k) \equiv 1$, då $1 \le k \le 2^n$. Bevisar påståendet för värdet $n+1$.

Nu är $P(2^n+1, 1) \equiv P(2^n+1, 2^n+1) \equiv 1$, och $P(2^n+1, k) \equiv 0$, då $1 < k < 2^n+1$.

Vårt påståendet att $P(m,k) \equiv P(2^n+m, k) \equiv P(2^n+m, 2^n+k)$, då $m \le 2^n, 1 \le k \le m$. Vidare är $P(m+2^n, k) \equiv 0$ om $m < k < 2^n$.

Bevisar de ovanstående påståendena i den innersta induktionen med avseende på $m$. Antar att $1 \le k \le m+1$.

Nu har vi

$$P(m+1,k) = P(m,k) + P(m,k-1) \equiv P(2^n+m,k) + P(2^n+m,k-1) = P(2^n+m+1,k).$$

Samt

$$P(m+1,k) = P(m,k) + P(m,k-1) \equiv P(2^n+m, 2^n+k) + P(2^n+m, 2^n+k-1) = P(2^n+m+1, 2^n+k).$$

Vidare om $m+1 < k < 2^n$, $P(m+1+2^n, k) = P(m+2^n, k) + P(m+2^n, k-1) \equiv 0 + 0$.

Den innersta induktionen är klar.

Den yttre induktionen kan nu fixas genom att man observerar att man för värdet $m = 2^n$ får att $P(2^{n+1}, k) = P(2^n+m, k) \equiv P(m, k') = P(2^n, k') \equiv 1$, där $k'$ är antingen $k$ eller $k - 2^n$.

**12.** Låt $x, y$ vara positiva reella tal, för vilka det gäller $x^3 + y^3 \le x^2 + y^2$. Bestäm det största värdet av produkten $xy$.

**12. uppgiftens lösning:** Först och främst kommer vi ihåg att

$$4xy \leq x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2.$$

Eftersom

$$0 \leq (x - y)^2(x + y) = (x^2 - y^2)(x - y) = x^3 + y^3 - x^2y - y^2x,$$

så fås

$$x^2y + y^2x \leq x^3 + y^3.$$

Dvs.

$$(x + y)(x^2 + y^2) = x^3 + y^3 + x^2y + y^2x \leq 2(x^3 + y^3).$$

Alltså

$$xy \leq \frac{1}{4}(x + y)^2 \leq \frac{(x^3 + y^3)^2}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} = 1.$$

Värdet $xy = 1$ fås då när $x = y = 1$.

**13.** Middagsbjudningen har $n$ gäster och $n$ värdar, $n \geq 4$. De sitter i någon ordning kring ett runt bord. Två gäster har möjlighet att diskutera med sinsemellan om det mellan dem finns högst en person eller om det mellan dem finns exakt två personer, varav minst den ena är en värd.

Visa att det på bjudningen finns minst $n$ par gäster som kan diskutera med varandra.

**13. uppgiftens lösning:** Bildar ett riktat nät, vars knutar är gäster, och från gäst $v$ går en kant till gäst $v'$ om $v'$ är högst tre platser medurs från $v$, samt så att $v$ och $v'$ har möjlighet att prata med varandra.

Delar in personerna i block $V_i$ som består av gäster efter varandra, och värdar efter varandra i block $H_i$. Antar att blocken är maximera så att typerna i blockan $V_i$ och $H_i$ byter om när de cirkulerar runt bordet. Indexerna väljs så att det direkt efter block $H_i$ kommer ett block $V_i$ när man går runt medurs.

**Lemma** Om $V_i$ är gäst $a_i$s block och $H_i$ den därpå följande värden $b_i$s block, startar det från mängden $V_i$ minst $2a_i - b_i$ kanter.

Om $a_i = 1$ och $b_i = 1$, går det ur mängden $V_i$ minst en kant, och lemmat stämmer. Om $a_i = 1$ och $b_i > 1$, har vi att $2a_i - b_i \leq 0$, och lemmat stämmer.

Antar sedan att $a_i > 1$.

Enkelt ser vi att det innuti mängden $V_i$ finns $2a_i - 3$ kanter. Alltså om $b_i \geq 3$, är beviset klart.

Om $b_i = 2$, går det från sista gästen i blocken en kant som går över mängden $H_i$, alltså gäller lemmat för det här fallet.

Om $b_i$=1 går det från de båda sista gästerna varsin kant som går över mänden $H_i$. Lemmats bevis är alltså klart.

Nu finns det alltså minst $\sum_i 2a_i - b_i = 2n - n = n$ antal gästpar som kan prata med varandra.

**14.** Låt $P$ en ändlig mängd bestående av minst fem punkter i planet. En del av mängden $P$:s punkter färgas röda och resten blåa. Vi antar att vilka som helst tre likafärgade punkter inte befinner sig på samma linje.

Visa att man kan tillverka en sträcka som uppfyller båda dessa krav:

- Sträckans ändpunkter är likafärgade punkter ifrån mängden $P$
- Sträckan innehåller inte fler punkter från mångden $P$ än ändpunkterna.

**14. uppgiftens lösning:** Låt $R$ vara mängden av de trianglar vars hörn har röda $P$:s punkter och $B$ mängden av de trianglar vars hörn har blåa $P$:s punkter. Låt $K = R \cup B$. Eftersom $P$ innehåller minst 5 punkter, innehåller den tre punkter som sinsemellan har samma färg, och $K \neq \emptyset$

Eftersom $P$ är en ändlig mängd är även $K$ en ändlig mänd. Alltså innehåller $K$ triangeln $k_0$ som har den minsta ytan. Med stöd av symmetrin kan man anta att $k_0$s hörn är röda.

Vi påstår att någon triangel $k_0$:s sidor duger som den efterfrågade sträckan. Gör ett motantagande, att ingen av dessa duger. Då innehåller varje av $k_0$:s sidor en blå punkt. Av dessa blåa punkters kanter kan man bilda triangeln $k_1$. Uppenbart att $k_1 \in K$. Vidare ligger $k_1$ innuti triangeln $k_0$, och därmed är den till sin yta mindre än $k_0$. Motsägelse.

**15.** Låt $N = \mathbb{N} \setminus 0$. Leta efter alla funktioner $f : N \to N$, som uppfyller kravet

$$(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n$$

för varje $n \in N$.

**15. uppgiftens lösning:**

**Svar:** $f : N \to N$; $f(n) = n$ för varje $n \in N$ är den enda funktionen som uppfyller kraven.

Bevis: När $n = 1$, är villkoret i formen $0 < f(1)f(f(1)) < 2$, alltså oundvikligt $f(1) = 1$. Vidare, om $f(k) = 1, (k-1)^2 < f(k)f(f(k)) = 1$, alltså $k = 1$

**Induktionsantagande:** När $1 \leq n \leq m$, gäller det för alla $k \in N$ att $f(k) = n$ om och endast om $k = n$.

Antar att induktionsantagandet gäller och bevisar det för värdet $m + 1$. Nu

$$m^2 < f(m+1)f(f(m+1)) < (m+1)(m+2).$$

Med stöd av induktionsantgandet fås $f(m+1) \geq m+1$, alltså även $f(f(m+1)) \geq m+1$. Nu följer det ur den övre gränsen $f(m+1)f(f(m+1))$ att $f(m+1) = m+1$, alltså $f(f(m+1)) = m+1$.

Ántar sedan att $f(k) = m+1$ för något $k \in N$. Med stöd av induktionsantagandet fås $k \geq m+1$.

Men ur nedre gränsen följer

$$(k-1)^2 < f(k)f(f(k)) = (m+1)f(m+1) = (m+1)^2,$$

ur vilken det följer att $k = m+1$. Induktionen är klar.

**16.** Det är givet en tabell med $n$ rader och $m$ kolumner, $n > m$, i vars alla celler det finns ett icke-negativt reellt tal. Om det i cellen $(i, j)$ ($i$ rad, $j$ kolumn) finns ett positivt reellt tal, är summan av raden $i$:s celler det samma som summan av kolumnen $j$:s celler.

Visa, att det i tabellen finns en rad, som består av enbart nollor.

**16. uppgiftens lösning:** Gör ett motantagande, att det på varje rad finns minst ett postivt reellt tal. Eftersom kolumner som enbart består av nollor inte inverkar på uppgiften kan de tas bort, och utan att förlora generaliseringen kan man anta att det i alla kolumner finns minst ett reellt tal som avviker från noll.

Markerar summan av cellerna på rad $i$ med $R_i$, och summan av cellerna i kolumn $j$ med $C_j$. Markerar talet i cellen $(i, j)$ med $a_i j$.

Nu är $\sum_j \frac{a_{ij}}{R_i} = 1$ för alla $i$ och $\sum_i \frac{a_{ij}}{C_j} = 1$ för alla $j$. Därmed

$$n = \sum_i \sum_j \frac{a_{ij}}{R_i} = \sum_{i,j} \frac{a_{ij}}{R_i} = \sum_{i,j} \frac{a_i j}{C_j} = \sum_j \sum_i \frac{a_{ij}}{C_j} = m,$$

vilket är en motsägelse.

**17.** Antar att $n, n \geq 1$, en oändligt liten spelpjäs har placerats i någon punkt i planet. I samma punkt kan det existera flera spelpjäser. En spelare spelar ett spel, där hen väljer två spelpjäser som existerar i några punkter $A$ och $B$, och flyttar dem till sträckan $AB$:s medelpunkt. Vi kallar spelets startläge för lösbart ifall spelaren med denna sorts drag kan förflytta alla spelpjäser till samma punkt.

För vilka värden på $n$ är alla $n$-storleks startlägen lösbara?

**17. uppgiftens lösning:**

**Svar:** Alla $n$-storleks startlägen är lösbara om och endast om $n$ är en potens med basen 2.

Antar att $n = 2^k$, och gör induktionsantagande, att ett $2^{k-1}$ storleks startläsa är lösbart. Nu kan ett $n$ knapps stort spelläge betraktas som två olika $2^{k-1}$ knapps storleks spellägen (knapparna delas mellan de två spellägena på valfritt vis), som kan lösas med induktionsbevis. Tillslut har vi i några två punkter $A$ och $B$ högar, vars storlekar är $2^{k-1}$. Genom att alltid välja en knapp från båda högarna och genom att repetera detta kan båda högarna flyttas till medelpunkten på sträckan $AB$.

Antar sedan att $n$ inte är en potens med basen två. Placerar $n-1$ knappar i punkten $(0, 0)$ och en knapp i punkten $(1, 0)$. Man ser lätt att summan av knapparnas $x-$koordinat hålls samma vid varje drag. Om spelet alltså skulle lösas, skulle alla knappar till slut finnas i punkten $(1/n, 0)$. Dock ser man enkelt att om innan draget alla punkters $x-$koordinater är bråk, vars nämnare är en potens med basen två, så är koordinaterna sådana härna bråktal även efter vilka som helst drag. Alltså går det inte att lösa spelsituationen.

**18.** Undersöker en funktion $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}, n > 0$. Kallar dessa för sanningsfunktioner.

Definierar $f\colon \{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$, $f(0, 0) = f(1, 0) = f(0, 1) = 1$, $f(1, 1) = 0$.

Till exempel kan funktionen $g\colon \{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$, $g(0, 0) = g(1, 1) = g(0, 1) = 1$, $g(1, 0) = 0$ skrivas med hjälp av funktionen $f$ som $g(a, b) = f(a, f(b, b))$.

Visa att varje sanningsfunktion kan på motsvarande sätt skrivas med hjälp av funktionen $f$.

**18. uppgiftens lösning:** Den här lösningen är inte den kortaste, men den baserar sig på en tydlig princip.

Definierar $\mathrm{inte}(a) = f(a, a)$, $\mathrm{eller}(a, b) = f(\mathrm{inte}(a), \mathrm{inte}(b))$, $\mathrm{och}(a, b) = \mathrm{inte}(f(a, b))$.

Definierar ytterligare

$$\mathrm{eller}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{eller}(a_1, \mathrm{eller}(a_2 \ldots \mathrm{eller}(a_{n-1}, a_n)))))$$

samt

$$\mathrm{och}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{och}(a_1, \mathrm{och}(a_2 \ldots, \mathrm{och}(a_{n-1}, a_n))))).$$

Nu är $\mathrm{inte}(a) = 1$ om och endast om $a = 0$, $\mathrm{eller}(a_1, \ldots, a_n) = 1$ om och endast om minst ett av talen $a_i$ är 1, samt $\mathrm{och}(a_1, \ldots, a_n) = 1$ om och endast om alla $a_i$:n är ettor.

Låt nu $h\colon \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ och $k = (b_1, \ldots, b_n)$ vara en följd med nollor och ettor.

Om $h(b_1, \ldots, b_n) = 1$ definierar vi

$$l_k(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{och}(c_1, \ldots c_n),$$

där $c_i$ är variabel $a_i$, om $b_i = 1$, och $c_i$ är uttrycket $\mathrm{inte}(a_i)$, om $b_i = 0$.

Därmed ger alltså $l_k$ ur följden $(a_1, \ldots, a_n)$ en etta om och endast om $a_i = b_i$ för alla $i$.

Nu är

$$h(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{eller}(l_{k_0}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, l_{k_m}(a_1, \ldots, a_n)),$$

var $k_j$ går igenom alla ettor och nollors följder av längden $n$, $b_1, \ldots, b_n$, för vilka $h(b_1, \ldots, b_n) = 1$.

Här är alltså det högre uttrycket en etta om och endast om åtminstone en av $l_k$:na är en etta, alltså $a_i = b_i$ för alla $i$ och $b_i$:na är ur någon sådan följd för vilken $h(b_1, \ldots, b_n) = 1$.

Med den ovanstående tekniken kan man få alla övriga sanningsfunktioner, förutom de sanningsfunktioner som är identiskt noll. De fås istället med hjälp av formeln $\mathrm{och}(a, \mathrm{inte}(a))$.