Uppgiftsseriepaket sommar 2022

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 11.9.2022 per epost. Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Enklare uppgifter

1. Crawford spelar backgammon. Hen har en knapp sju steg från sin motståndares knapp samt en annan knapp fem steg från sin motståndares knapp. Crawfors kastar två tärningar och kan äta sin motståndares knapp om ögonsumman på tärningarna är antingen 5 eller 7, eller ifall någondera av tärningarna visar en femma.

Vad är sannolikheten att Crawford kan äta sin motståndares knapp?

1. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Todennäköisyys on $\frac{19}{36}$.

(Ratkaisua lukiessa nopat kannattaa ajatella eri värisiksi niin, että esimerkiksi *sinisestä nopasta kakkonen ja punaisesta kolmonen* on eri tulos kuin *sinisestä nopasta kolmonen ja punaisesta kakkonen.*)

On yhteensä 36 mahdollista tulosta, jotka kahdesta nopasta voi saada.

Summan 7 saa 6 eri tavalla $1-6$, $2-5$, $3-4$, $4-3$, $5-2$ ja $6-1$. Summan 5 saa 4 eri tavalla $1-4$, $2-3$, $3-2$, $4-1$.

On 6 tapaa saada ensimmäisestä nopasta viitonen ($5-1$, $5-2$, $5-3$, $5-4$, $5-5$ ja $5-6$) ja 6 tapaa saada toisesta nopasta viitonen. Nyt kuitenkin laskimme tapauksen $5-5$ kahdesti, joten on 11 tapaa saada jommastakummasta nopasta viitonen.

On kaksi tapaa saada jommastakummasta nopasta viitonen ja yhtaikaa summaksi seitsemän. Näin ollen noppatuloksia, joilla nappulan saa syötyä on $6+4+11-2=19$. Kysytty todennäköisyys on siis $\frac{19}{36}$

2. Culbertson spelar bridge. Culbertsons motståndare till höger har 13 kort från en vanlig kortlek, lika för motståndaren som sitter till vänster. Culbertson vet att det bland med dessa kort finns spader knekt och spader dam. Culbertson vinner rundan om det har skett så lyckosamt att dessa kort finns hos en och samma spelare. Med vilken sannolikhet vinner Culbertson?

2. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Todennäköisyys on $\frac{12}{25}$.

Symmetrian perusteella voidaan olettaa, että patajätkä on vasemmanpuoleisella vastustajalla. Tällä on siis 12 muuta korttia. Patajätkää lukuunottamatta vasemman- ja oikeanpuoleisilla vastustajilla on yhteensä 25 korttia. Todennköisyys, että patarouva on vasemmanpuoleisella vastustajalla on siis $\frac{12}{25}$.

3. Definierar för de positiva heltalen a, b en räkneoperationerna $\circ_n$. Först och främst $a \circ_1 b = a + b$ och induktivt

$$a \circ_{n+1} b = a \circ_n (a \circ_n (a \circ_n (\cdots \circ_n a))),$$

där det finns b antal a:n på högra sidan. Alltså exempelvis $a \circ_2 b = ab$ och $a \circ_3 b = a^b$.

Visa att $2 \circ_n 2 = 4$ för alla positiva heltal n.

3. tehtävän ratkaisu:

Selvästi $2 \circ_1 2 = 2 + 2 = 4$.

Tehdään induktio-oletus $2 \circ_n 2 = 4$. Nyt $2 \circ_{n+1} 2 = 2 \circ_n 2$, koska oikealla puolen kakkosia pitää ottaa 2 kappaletta. Siis $2 \circ_{n+1} 2 = 4$ induktio-oletuksen perusteella. Induktio valmis.

4. Man beslutade sig för att bestämma riksdagsledamöternas löner genom folkomröstning. Alla som röstar skriver ett naturligt tal på valsedeln. Medeltalet av alla dessa tal (avrundat till närmaste heltal) är riksdagsledamöternas månadslön.

Det finns färre än 5 miljoner röstare, och även riksdagsledamöterna får rösta. Visa att riksdagsledamöten Luihunen kan med sin egna rösträtt försäkra att hen får minst en miljon euro i månadslön.

4. tehtävän ratkaisu:

Olkoon x Luihusen kirjoittama luku ja y muiden äänestäjien kirjoittamien lukujen summa. Olkoon $k <$ 5.000.000 kaikkien äänestäjien määrä.

Palkaksi saadaan

$$\frac{x+y}{k} > \frac{x}{5.000.000}.$$

Nyt Luihunen voi kirjoittaa x:ksi luvun 5.000.000.000.000, jolloin

$$\frac{x}{5.000.000} = 1.000.000.$$

5. I en kortlek har man numrerat korten med talen $1 - 100$, varje nummer finns på ett eget kort. Spelare spelar ett enpersonsspel där hen först delar ut två kort. Ett lägre kort a och ett större b. Sedan delar hen ut ett till kort c. Spelaren vinner om kortet c:s värde ligger mellan korten a och b.

Vad är sannolikheten att spelaren vinner spelet?

5. tehtävän ratkaisu: <u>**Vastaus:** Todennäköisyys on $\frac{1}{3}$.</u>

Olkoon x, y, z kolme eri korttia. Kortit x, y, z voivat tulla pakasta kahdessa voittavassa järjestyksessä pienin-isoin-keskimmäinen ja isoin-pienin-keskimmäinen. Toisaalta x, y, z voivat tulla pakasta yhteensä $3 \times 2 \times 1 = 6$ eri järjestyksessä. Olkoon k kaikken (järjestämättömien) kolmen kortin joukkojen lukumäärä, jotka pakasta voi saada. Nyt voittotodennäköisyys on

$$\frac{2k}{6k} = \frac{1}{3}$$

.

6. Enligt vanliga räkneregler räknar man potensen nedan på följande sätt:

$$2^{2^{2^2}} = 2^{(2^{(2^2)})} = 2^{16} = 65536.$$

Dock om man beräknade potensernas exponenter i en annan ordning, till exempel räknandes $\left(2^2\right)^{2^2} = 256$, hur många olika värden på potensen skulle det finnas?

6. tehtävän ratkaisu: <u>**Vastaus:** Erilaisia lopputuloksia on kaksi.</u>

Käydään yksinkertaisesti eri vaihtoehdot läpi. Tutkitaan ensin tapausta, jossa luku 2 korotetaan johonkin potenssiin, joka rippuu kolmesta viimeisestä kakkosesta. Jos toinen kakkonen korotetaan potenssiin 2^2, niin saadaan tehtävänannossa annettu lauseke ja tulos 65536. Ainoa mahdollinen toinen vaihtoehto on, että lasketaan $(2^2)^2 = 16$ eli saadaan koko laskuksi $2^{16} = 65536$ eli sama tulos kuin edellä. On siis tarkasteltu kaikki ne tapaukset, joissa ensimmäinenluku 2 korotetaan jonkin potenssiin, joka saadaan kolmesta muusta luvusta 2.

Tutkitaan nyt sellaisia vaihtoehtoja, joissa ensimmäinen luku 2 on ensin korotettu johonkin potenssiin ja sitten tätä lukua korotetaan johinkin potenssiin. Käydään nämä tapaukset läpi samalla idealla kuin edellä:

$$\left(2^2\right)^{\left(2^2\right)} = 256, \quad \left(\left(2^2\right)^2\right)^2 = 256, \quad \left(2^{\left(2^2\right)}\right)^2 = 256.$$

On siis saatu yhteensä kaksi eri vaihtoehtoa vastaukseksi.

7. Undersöker följden

$$1 * 2 * 3 * \cdots * 2022.$$

I följden kan man ersätta varje $*$ antingen med en $+$(plus)-beteckning eller en $-$(minus)-beteckning. Vad är det minsta möjliga postiva värde som det är möjligt för uttrycket att anta.

7. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Pienin positiivinen arvo on 1.
Jono voidaan kirjoittaa sopivilla $+$- ja $-$-valinnoilla

$$(1-2)+(4-3)+(5-6)+(8-7)+\cdots+(2020-2019)+(2022-2021).$$

Koska 2020 on neljällä jaollinen, viimeistä termiä $(2022-2021)$ lukuunottamatta summa on 0. Koska $2022-2021=1$, jono saa arvon 1.

8. En oändligt liten loppa hoppar utan att stanna kring randen på enhetscirkeln. Den börjar från någon punkt på enhetscirkeln och hoppar motsols. För varje hopp rör den sig längs med randen en sträcka som har längden $2\pi x$, där $0 < x \leq 1/2$ är ett reellt tal. (Alla hopp är alltså lika långa.) För vilka värden på x besöker loppan samma punkt minst två gånger?

8. tehtävän ratkaisu:
Vastaus: Kirppu käy vähintään kahdesti samassa pisteessä jos ja vain jos x on rationaaliluku.
Kirppu käy kahdesti samassa pisteessä jos ja vain jos on olemassa luonnolliset luvut k, k', n, $k \neq k'$, joille

$$2\pi kx = 2\pi k'x + 2\pi n.$$

Tästä saadaan

$$kx = k'x + n.$$

Ratkaisemalla x saadaan $x = \frac{n}{k-k'}$. Tästä nähdään, että x:n on oltava rationaaliluku. Toisaalta valitsemalla k, k' ja n sopivasti x:ksi saadaan mikä tahansa rationaaliluku.

9. Låt n vara ett naturligt tal och k ett naturligt tal som är delbart med två men inte med fyra. Visa att det är omöjligt för både n och $n+k$ att vara kvadrattal.

9. tehtävän ratkaisu:
Tehdään vastaoletus, että molemmat ovat neliölukuja. Kirjoitetaan $n = x^2$ ja $n+k = (x+a)^2$. Nyt $k = (x+a)^2 - x^2 = 2xa + a^2 = a(2x+a)$. Jos a on parillinen, on k jaollinen neljällä, ristiriita. Jos taas a on pariton, on k pariton, ristiriita.

10. Låt a, b, c vara positiva reella tal, för vilka $abc = 1/8$. Visa att

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq \frac{15}{16}.$$

10. tehtävän ratkaisu: Aritmeettis-geometrisellä epäyhtälöllä saadaan

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \frac{3}{4}$$

ja

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} = \frac{3}{16}.$$

Tehtävänannon väite saadaan laskemalla nämä epäyhtälöt yhteen.

Svårare uppgifter

11. Av eftervarandra följande naturliga tal bildas en ändlig följd. Enbart summorna av siffrorna i följdens första och sista tal är delbart med två.

Hur lång kan följden som längst vara?

11. tehtävän ratkaisu: Kutsutaan jonon muita lukuja kuin ensimmäistä ja viimeistä jonon sisäluvuiksi.

Olkoon j jono, joka sisältää vähintään 17 lukua. Jos jonon ensimmäisen jäsenen ykkösiä osoittava numero on 0 tai 1, jono sisältää sisälukuinaan kaikki luvut kaikki luvut $10k+2, 10k+3, \ldots, 10k+9$ jollekin k, ja vähintään yhden näistä numeroiden summa on kahdeksalla jaollinen.

Jos ensimmäisen luvun ykkösiä osoittava numero on vähintään 2, jono sisältää sisälukuinaan kaikki luvut $10k+0, 10k+1, \ldots, 10k+7$ jollekin k, ja yhden näistä on numeroiden summa kahdeksalla jaollinen.

Pisin mahdollinen jono on siis korkeintaan 16 lukua pitkä.

16 lukuun päästään jonolla, jonka ensimmäinen numero on 9999992.

12. Låt A vara en regelbunden $n-$hörning i planet, positionerad så att den är symmetrisk med avseende på $y-$axeln. Vi säger att roterandet eller speglandet av avbildningen A har symmetri med avbildningen A om den avbildar A till sig själv. Låt k vara avbildningen A roterad med $360/n$ grader motsols och p avbildningen A:s spegling med avseende till $y-$axeln.

Visa att alla A:s symmetrier kan presenteras som en följd av k:n och p:n.

12. tehtävän ratkaisu:

Olkoon $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ kuvion A kärjet lueteltuna jostain kärjestä alkaen vastapäivään ja $s\colon A \to A$ symmetria. Nyt $s(a_0), s(a_1), \ldots, s(a_{n-1})$ ovat peräkkäisiä A:n kärkiä joko myötä- tai vastapäivään lueteltuna. Huomataan myös, että $p(a_0), p(a_1), \ldots, p(a_{n-1})$ ovat peräkkäiset kärjet myötäpäivään lueteltua.

Jos $s(a_0), s(a_1), \ldots, s(a_{n-1})$ ovat peräkkäisiä kärkiä lueteltuna vastapäivään, valitaan i siten, että $s(a_0) = a_i$. Nyt $s(a_0)$ on i kärkeä vastapäivään a_0:sta, ja s saadaan toistamalla k:ta i kertaa.

Jos taas $s(a_0), s(a_1), \ldots, s(a_{n-1})$ ovat kärkiä lueteltuna myötäpäivään, valitaan i niin, että $s(a_i) = p(a_0)$. Nyt $s(a_0)$ on i kärkeä vastapäivään $s(a_i) = p(a_0)$:sta, ja s saadaan ottamalla ensin yksi p, ja sen jälkeen i kpl k:ta.

13. Leta efter alla positiva heltal n, som har minst 4 positiva nämnare och för vilka

$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2,$$

när $d_1, \ldots, d_4$ är talet n:n fyra minsta positiva nämnare.

13. tehtävän ratkaisu: <u>**Vastaus:** Ainoa ratkaisu on $n = 130$.</u>

Olkoon $n, d_1, \ldots, d_4$ kuten tehtävänannossa. Jos n on pariton, se on neljän parittoman luvun summa, mikä on mahdotonta.

Siis n on parillinen, $d_1 = 1$ ja $d_2 = 2$. Lisäksi toinen luvuista d_3, d_4 on parillinen ja toinen pariton.

Jos d_3 on parillinen, $d_3 = 4$ ja $d_4 > 4$. Mutta nyt $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 1 + 4 + 16 + d_4^2 = 21 + d_4^2$, mikä on $2 \mod 4$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että n on jaollinen neljällä.

Siis d_3 on pariton ja $d_4 = 2d_3$ tai $d_3 = 3, d_4 = 4$. Jälkimmäisessä tapauksessa $n = 30$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että n on jaollinen neljällä.

Siis d_3 on pariton alkuluku ja $d_4 = 2d_3$. Siis $n = 1 + 4 + c_3^2 + 4c_3^2 = 5(c_3^2 + 1)$. Siis $5|n$. Jos $c_3 = 5$, saadaan toimiva ratkaisu $n = 130$.

Jos taas $d_3 = 3, d_4 = 6$, saadaan $n = 50$, mikä ei ole jaollinen kolmella, ristiriita

14. Låt $a_1, \ldots, x_n$ och $y_1, \ldots, y_n$ vara postiva reella tal. Visa att

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + \ldots, x_n)^2}{y_1 + \cdots + y_n}.$$

14. tehtävän ratkaisu: Muodostetaan jonot $\frac{x_1}{\sqrt{y_1}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{y_n}}$ ja $\sqrt{y_1}, \ldots, \sqrt{y_n}$. Sovelletaan näihin jonoihin Cauchy-Schwartzin epäyhtälöä ja saadaan

$$(\frac{x_1^2}{y_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n})(y_1 + \cdots + y_n) \geq (x_1 + \cdots + x_n)^2.$$

Väite saadaan ylläolevasta epäyhtälöstä jakamalla puolittain luvulla $y_1 + \cdots + y_n$.

15. Låt a, b, c vara längderna av en triangels sidor och S arean av triangeln. Visa att

$$S \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{6}.$$

15. tehtävän ratkaisu:

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac = \frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(a-c)^2 \geq 0.$$

Siis $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$, ja riittää todistaa

$$S \leq \frac{ab+bc+ac}{6}.$$

Nyt $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, missä α on sivujen a ja b välinen kulma. Siis $2S \leq ab$. Vastaavasti $2S \leq bc$ ja $2S \leq ac$. Siis

$$\frac{ab+bc+ac}{6} \geq \frac{2S+2S+2S}{6} = S.$$

16. Det finns två tillåtna operationer: Multiplicerandet av ett tal med två ($\times 2$) samt minskande av talet med tre (-3). Bildar en följd bestående av tillåtna operationer med vars hjälp med tar sig från talet 11 till talet 25. Vad är den kortaste möjliga längden på denna följd?

16. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Pienin pituus on 7 operaatiota.

Vaadittu jono on $-3, -3, \times 2, -3, \times 2, \times 2, -3$.

Todistetaan sitten, että vähintään 7 operaatiota vaaditaan. Tehdään vastaoletus, että korkeintaan 6 operaatiolla onnistuu. Koska $\times 2$ on ainoa operaatio, joka suurentaa lukua, tarvitaan vähintään kaksi $\times 2$-operaatiota, että luvusta 11 päästään lukuun, joka on vähintään 25. Koska $25 \equiv 1 \mod 3$ ja $11 \equiv 2 \mod 3$, eikä -3 muuta tätä kongruenssia, $\times 2$ -operaatioita tarvitaan pariton määrä, siis 3 tai 5.

Jos $\times 2$-operaatiota tehdään 5 ja halutaan päästä alle 7 operaation, jää vain yksi -3-operaatio. Koska 25 on pariton, operaatiojonon viimeinen operaatio on -3. Mutta yksinkertainen lasku osoittaa, että operaatiojonolla $\times 2, \times 2, \times 2, \times 2, \times 2, -3$ ei päästä luvusta 11 lukuun 25.

Siis $\times 2$-operaatioita on kolme, ja operaatiojonon viimeinen operaatio on -3. Jotta tehtävä voitaisiin ratkaista korkeintaan kuudella operaatiolla, pitäisi siis kolmella $\times 2$ ja korkeintaan kahdella -3 -operaatiolla päästä luvusta 11 lukuun 28.

Operaatiojonossa on seuraava kommutaatiosääntö: $-n, \times 2 = \times 2, -2n$. Näin ollen -3-operaatiot voidaan siirtää jonon loppuun -3, -6, -12 ja -24-operaatioiksi. Näillä pitäisi päästä luvusta $11 \cdot 2^3 = 88$ lukuun 28. Mutta $88 - 28 = 60 > 2 \cdot 24$, eli ei onnistu.

17. I en omtyckt världsmästarskapsturning för scavengerhunt-spel deltog 1000 personer. De spelade tillsammans en mängd olika spel; två personer deltog alltid i varje spel, och inget par spelade tillsammans mer än ett spel.

Efter turneringen konstaterades att det från varje sådant par som spelat ett spel tillsammans hittades en spelare som spelat högst 20 spel.

Visa att det i turneringen tillsammans spelades som mest $980 \cdot 20$ spel.

17. tehtävän ratkaisu: Muodostetaan verkko G, jonka solmuja ovat pelaajat, ja pelaajien välillä on kaari, jos he ovat pelanneet keskenään pelin. Olkoon A niiden pelaajien joukko, jotka ovat pelanneet yli 20 peliä ja B niiden pelaajien joukko, jotka ovat pelanneet korkeintaan 20 peliä.

Oletetaan, että A:n koko on yli 20 solmua. Koska A:n sisällä ei kulje kaaria, ja jokaisesta B:n solmusta voi lähteä korkeintaan 20 kaarta, kaaria on yhteensä korkeintaan

$$20|B| < 20 \cdot 980.$$

Oletetaan sitten, että A:n koko on korkeintaan 20 solmua. Muokataan G:tä niin, että jos $b \in B$, ja b:stä lähtee kaari toiseen B:n alkioon b', mutta on olemassa $a \in A$, jolle b:stä ei mene kaarta a:han, poistetaan verkosta kaari (b, b') ja lisätään kaari (b, a). Tämä ei vähennä kaarien määrää; toistetaan tätä niin pitkään kuin mahdollista. Muokkausten jälkeen jokaisesta $b \in B$ lähtee korkeintaan $20 - |A|$ kaarta muihin B:n alkioihin.

Nyt verkon kaarien määrä on korkeintaan

$$|A|(1000-|A|) + \frac{(20-|A|)(1000-|A|)}{2} = \frac{(20+|A|)(1000-|A|}{2} \leq \frac{40 \cdot 980}{2} = 20 \cdot 980.$$

18. Lös ekvationen

$$2^{a!} + 2^{b!} = c^3,$$

där a, b, c är positiva heltal.

18. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Ainoa ratkaisu on $a = b = c = 2$.

Oletetaan $a, b \geq 3$, jolloin $6|a!$, $6|b!$. Koska $2^6 \equiv 1 \mod 9$, pätee $2^{a!} \equiv 1 \mod 9$, $2^{b!} \equiv 1 \mod 9$, ja tehtävänannon yhtälön vasen puoli on kongruentti $2 \mod 9$. Käymällä vaihtoehdot läpi todetaan, ettei yksikään kuutio ole kongruentti $2 \mod 9$, joten yhtälöllä ei ole tässä tapauksessa ratkaisuja.

Siis a tai b kuuluu joukkoon $\{1, 2\}$. Oletetaan, että $a \leq 2$ ja $b \geq 3$ Jos $a = 1$, yhtälön vasen puoli on kongruentti $3 \mod 9$, eikä mikään kuutio ole $3 \mod 9$. Jos taas $a = 2$, yhtälön vasen puoli on $5 \mod 9$, eikä mikään kuutio ole $5 \mod 9$. Tapaus $b \leq 2$, $a \geq 3$ on symmetrinen.

Jos taas $a, b \leq 2$, käymällä vaihtoehdot läpi todetaan, että ainoa ratkaisu on $a = b = c = 2$.

19. Vi säger att en ändlig följd L bestående av naturliga tal är bra om dess största element förekommer i följden enbart en gång. Vi säger att följden L' är en delföljd till L om L' består av efter varandra följande element från L. Alltså är till exempel 376 en delföljd till följden 93761. Vi säger att L är superbra om alla dess delföljder är bra.

Man försöker skapa en superbra följd, vars storlek är 2000 element, genom att använda en så liten mängd olika tal som möjligt. Vad är den minsta mängden olika tal, för vilka detta är möjligt?

19. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Pienin määrä on 11.

Jos $n = k2^i$, missä k on pariton, merkitään $\nu_2(n) = i$. Nyt jono L on

$$\nu_2(1), \nu_2(2), \nu_2(3), \ldots, \nu_2(2000).$$

Koska $2^{10} = 1024$, jonossa tosiaan esiintyy täsmälleen 11 eri lukua. Olkoon L' jonon L alijono, jonon L indeksistä a indeksiin b. Oletetaan, että $a \leq k2^n \leq b$, $a \leq k'2^n \leq b$, missä $k > k'$ parittomia. Nyt $k2^n - k'2^n = (k - k')2^n \geq 2^{n+1}$, joten on olemasssa k'', jolle $a \leq k''2^{n+1} \leq b$. Siis L' on hyvä, ja L superhyvä.

Osoitetaan sitten, että 10 eri lukua ei riitä. Tehdään vastaoletus, että L on vaadittu jono 10 eri luvulla. Jokaiseen $1 \leq i \leq 2000$ liitetään joukko P_i, joka sisältää ne luvut, joita on L:n i ensimmäisen jäsenen joukossa pariton määrä kertoja. Koska mahdollisia joukkoja P_i on $2^{10} = 1024$ kappaletta, on kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla olemassa $i, i', i < i'$, joille $P_i = P_{i'}$. Mutta nyt alijono indeksistä i indeksiin i' sisältää parillisen määrän kaikkia jäseniään, joten tämä alijono ei voi olla hyvä, eikä L superhyvä.