Uppgiftsseriepaket september

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 23.10.2022 per epost.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

OBS! Från och med nu börjar vi även uppmärksamma hur den lösningen är skriven, och till er ges negativ feedback även för det att svaren är otydligt skrivna.

Vi observerar bland annat följande saker:

- Varje steg i resonemang måste motiveras med en förnuftig noggrannhet, man får inte göra alltför långa intuitionshopp. Det som dock är ”för långa intuitionshopp”är svårt att definiera. Följande exempel har ett intuitionshopp som är för långt:

  > Nu är $x_1, \dots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Alltså existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

  Det skulle vara bättre att skriva:

  > Nu är $x_1, \dots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Eftersom en regelbunden 20-sidig kropp enbart har 30 kanter, existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

- Korrekt matematisk text består av hela meningar, och även formler är en del av meningarna. Du hittar exempel av denna stil exempelvis i den senaste tidens exempelsvar. Det lönar sig att eftersträva den här stilen. Eftersom ni inte ännu är universitets-studerande, godkänner jag även svar av er där t.ex. en rad ekvationer kopplats samman enabrt med ekvivalenspilar, om uppgiften möjliggör denna sorts lösningar.

- Om du är osäker över läsbarheten i din skrivstil, skriv då svaren med dator.

Bra matematisk text lär man sig tillverka enbart genom att öva. När du i tävlingssituationer skriver dina svar tydligt, kan du vara säker på att du i alla fall inte förlorar poäng på grund av att domarna inte förstått dina fina idéer.

Enklare uppgifter

1. Låt a, b vara positiva reella heltal. Visa att

$$a^2 + b^2 \geq \frac{3}{2}ab.$$

2. En stor kub består av $3 \times 3 \times 3$ icke-genomskinliga små kuber. Från den stora kuben plockar man bort små kuber tills att det för varje sida på den stora kuben gäller att: När man tittar genom den mittersta kvadraten på den stora kubens sida, så ser man igenom den stora kuben. Man tar bort det minsta möjliga antalet små kuber så att kravet uppfylls.

Hur många små kuber blir det kvar i den stora kuben?

3. Låt $x_1, \ldots, x_8$ vara heltal, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_i = 0$ annars. Det finns tre tillåtna operationer för alla heltal k:

- Till talet x_1 tillägger man $2k$, talet x_2 minskar med k och talet x_8 minskar med k.
- Till talet x_8 tillägger man $2k$, talet x_7 minskar med k och talet x_1 minskar med k.
- Till talet $x_i, 1 < i < 8$ tillägger man $2k$, talet x_{i-1} minskar med k och talet x_{i+1} minskar med k.

Visa att det inte för någon följd av tillåtna operationer uppstår en sådan situation där $x_i = 0$ för alla i.

4. Låt $n \in \mathbb{N}$. Visa, att det mellan $0, \ldots, n-1$ finns minst $\lceil \frac{n-2}{2} \rceil$ tal k, för vilka ekvationen $x^2 \equiv k \mod n$ inte har en lösning.

$\lceil y \rceil$ är det minsta heltalet som är minst y.

5. Hur många lösningar finns det för ekvationen

$$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor$$

bland med de naturliga talen? $\lfloor y \rfloor$ avser det största heltal som är högst y.

6. Jasmin har två lådor, låda A och låda B. Låda A har 20 snäckskal, och lådan B är tom. Jasmin spelar ett spel där det finns två olika tillåtna drag.

1. Jasmin kan flytta ett snäckskal från låda A till låda B.
2. Jasmin kan ta bort k stycken snäckskal från lådan A, där k är antalet snäckskal i låda B (eller alla snäckskal från låda A ifall att lådan har färre än k stycken snäckskal i sig)

Jasmin försöker tömma lådan A med så få drag som möjligt. Vad är det minsta antalet godkända drag med vilka man kan göra detta?

7. Jarno ska göra ett flervalsprov i hälsokunskap. Provet har 100 frågor, och varje fråga har två svarsalternativ, A och B, av vilka enadera är det rätta svaret.

Jarnos lärare är slapp och har därmed berättat att det i varje block med fem eftervarandra följande uppgifter finns exakt tre frågor där A är det rätta svaret. Innan provet börjar avslöjar läraren även att B är rätt svar till den första och den sista frågan.

Jarno har inte studerat så mycket till hälsokunskapen, men har istället flitigt tränat inför matematikolympiaden, och hen inser att det är möjligt att få fulla poäng från provet enbart med hjälp av det som läraren avslöjat. Lista ut provets rätta svar.

8. I ett 1000×1000 rutors rutsystem finns det en robot i varje ruta. När användaren klickar på start-knappen har varje robot två möjligheter:

- Stanna i samma ruta.

- Förflytta sig till en bredvidliggande ruta (två rutor är bredvid varandra ifall de har en gemensam sida).

Det får finnas mer än en robot i en ruta efter förflyttningen. Robotarna är programmerade så att när man klickat på start-knappen så lämnar de maximalt många rutor tomma, och de koordinerar detta tillsammans.

Låt n vara antalet rutor som har en robot i sig efter att robotarna flyttat på sig. Visa att $200000 \leq n < 203000$

9. Låt $ABCD$ vara en fyyrhörning, där alla vinklar är mindre än 180 grader. Låt J vara fortsättningen på sträckan AB från A, och J' fortsättningen på sträckan CD från D. Antar att J och J' skär varandra, låt E vara skärningspunkten. Låt K vara fortsättningen på sträckan CB från B och K' fortsättningen på sträckan DA från A. Antar att K och K' skär varandra, låt F vara skärningspunkten.

Antar att trianglarna BDF och BDE har samma area. Visa att sträckorna BD och EF är parallella.

10. Låt a, b, c vara positiva reella tal. Visa att

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}.$$

Svårare uppgifter

11. I en fem-hörning markerar man varje sida och hörn med ett positivt heltal så att man använder 10 stycken olika tal. Utöver detta gör man så att när man räknar samman sidans och dess bredvidliggande hörs tal, får man ett konstant värde som inte beror av vilken sida man väljer.

På det ovan nämnda sättet, vad är det minsta möjliga summan för talen på en sida och dess bredvidliggande hörn?

12. Låt ABC vara en triangel. Från sidan AC väljer man punkten E och från sidan AB punkten F. Låt P vara skärningspunkten mellan sträckorna BE och CF. Vi vet följande:

- Triangeln PEC:s area är 7.
- Triangeln PFB:s area är 4.
- Triangeln PBC:s area är 8.

Beräkna fyrhörningen $AEPF$:s area?

13. Visa att det för alla positiva heltal $n > 1$ gäller att $(n-1)^2 | n^{n-1} - 1$.

14. Låt S vara en grupp som innehåller n positiva reella tal, $n \geq 3$. Visa att man som mest kan skriva $n-2$ olika potenser av tre som summor av tre olika element från S.

15. Låt a, b vara positiva reella tal. Visa att

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab} \leq a + b.$$

,

16. Låt a, b, c vara positiva reella tal.

Visa att

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(a-c)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} > 2.$$

17. Låt n vara ett positivt heltal och $S = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Låt $T \subset S$ vara icke-tom. Vi säger att T är jämnviktig om T:s elements median är samma som T:s elements medeltal. Visa att antalet jämnviktiga delmängder av S är udda.

Mängden T:s elements median är $t \in T$, om det i mängden T finns lika många tal som är större än t och mindre än t. Om det i mängden T finns talen $t_0 < t_1$, där det mellan t_0 och t_1 inte finns ett T tal, och det finns lika många tal i T som är mindre än t_0 och större än t_1, då är medianen av T:s element medeltalet av talen t_0 och t_1.

18. Låt $x_1, \ldots, x_n$ vara reella tal, för vilka

$$\sum_{k=1}^{n-1} \min(x_k, x_{k+1}) = \min(x_1, x_n).$$

Visa att $\sum_{k=2}^{n-1} x_k \geq 0$.

OBS! $\min(a, b)$ *är den mindre av talen* a, b.

19. I ett 2-dimensionellt koordinatsystem har man definierat en polygon M vars area är större än 1. Visa att det på M finns två olika punkter (x, y) och (x', y'), där $x - x'$ och $y - y'$ är heltal. (Dessa punkter kan finnas antingen innuti M eller på dess rand.)

20. 12 riddare sätter sig (jämnt utspridda) runt ett runt bord. När de har satt sig, observerar de att platserna vid bordet har namnlappar, som förstås inte motsvarar de platser som riddarna nu sitter vid.

Visa att åtminstone två riddare sitter på sina egna platser, eller att det är möjligt att rotera bordet på ett sådant sätt att minst två riddare sitter på sina egna namngivna platser efter bordet snurrats.