Uppgiftsseriepaket september

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 26.2.2023 per epost.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

OBS! Från och med nu börjar vi även uppmärksamma hur den lösningen är skriven, och till er ges negativ feedback även för det att svaren är otydligt skrivna.

Vi observerar bland annat följande saker:

- Varje steg i resonemang måste motiveras med en förnuftig noggrannhet, man får inte göra alltför långa intuitionshopp. Det som dock är ”för långa intuitionshopp”är svårt att definiera. Följande exempel har ett intuitionshopp som är för långt:

  > Nu är $x_1, \ldots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Alltså existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

  Det skulle vara bättre att skriva:

  > Nu är $x_1, \ldots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Eftersom en regelbunden 20-sidig kropp enbart har 30 kanter, existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

- Korrekt matematisk text består av hela meningar, och även formler är en del av meningarna. Du hittar exempel av denna stil exempelvis i den senaste tidens exempelsvar. Det lönar sig att eftersträva den här stilen. Eftersom ni inte ännu är universitets-studerande, godkänner jag även svar av er där t.ex. en rad ekvationer kopplats samman enabrt med ekvivalenspilar, om uppgiften möjliggör denna sorts lösningar.

- Om du är osäker över läsbarheten i din skrivstil, skriv då svaren med dator.

Bra matematisk text lär man sig tillverka enbart genom att öva. När du i tävlingssituationer skriver dina svar tydligt, kan du vara säker på att du i alla fall inte förlorar poäng på grund av att domarna inte förstått dina fina idéer.

Enklare uppgifter

1. Vi skriver $x \circ y = 2x + y + 1$. Visa att det existerar ett reellt tal a, för vilken $a \circ y = y$ för alla reella tal y.

2. Visa att medeltalet av kvadraterna av tre heltal i följd inte kan vara ett heltal.

3. Låt $a, b > 1$ vara reella tal.
Visa att $ab + 1 > a + b$.

4. Leta efter oändligt många funktioner $f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}_+$ är de positiva heltalen), som uppfyller kravet $f(n+1) = f(n) + 2^{n-1}$ för alla $n \geq 1$.

5. Låt $n_1, \ldots, n_5$ vara fem udda tal i följd, på så sätt att n_3 är delbar med talet 3. Visa att talen n_i, n_j, $i \neq j, 1 \leq i, j \leq 5$, inte har gemensamma faktorer.

6. Låt A vara en regelbunden n-hörning, med sidlängden 1. Visa att arean av en cirkel som ritas runt A och arean som begränsas av cirkelringar som ritas in i A inte beror av variablen n.

7. Låt N vara en konvex fyrhörning. Vi binder ihop N närliggande sidors medelpunkter med sträckor. Vi gör det här för alla par av närliggande sidors medelpunkter. Visa att arean av den fyrhörning som skapas på det här sättet är till sin storlek hälften av N:s area.

8. Vi betecknar ett slutet interval $[0, 1]$ och ett öppet intervall $]0, 1[$. Leta efter bijektionen $b : [0, 1] \to]0, 1[$.

9. Låt $\circ$ vara en 2-platsräkneoperation i mängden av naturliga tal, alltså om x, y är naturliga tal, så gäller $x \circ y = z$ för något naturligt tal z.
Vi antar att det existerar ett $b \in \mathbb{N}$, för vilken $x \circ b = x$ för varje $x \in \mathbb{N}$.
Vi antar dessutom att det existerar $a, a' \in \mathbb{N}$, för vilka $a \circ x = x$ och $a' \circ x = x$ för varje $x \in \mathbb{N}$.
Visa att $a = a'$.

Svårare uppgifter

10. Låt S vara en cirkel och S' en cirkel som är ritad innuti cirkeln S, och som tangerar cirkeln S i punkten P'. Låt S'' vara en cirkel utanför cirkeln S, som tangerar cirkeln S i punkten P''.
Låt C' vara cirkeln S':s medelpunkt, och C'' cirkeln S'':s medelpunkt. Låt P vara sträckorna $C'C''$ och $P'P''$:s skärningspunkt.
Visa att $PC' : PC''$ är samma som förhållandet mellan cirklarna S' och S'':s radier.

11. Låt f, g vara två andra gradens polynom, vars koefficienter är ettor. Vi antar att polynomen f, g och $f + g$ alla var för sig har två nollställen.
Vi antar att avstånden (positiva) mellan polynomen f, g:s nollställen är samma, låt detta avstånd vara d. Visa att avståndet mellan polynomet $f + g$:s nollställen (positiva) är högst d.

12. Vi antar att vi har ett ord S, som består av 125 A-bokstäver och 125 B-bokstäver. Dessa kan förekomma i vilken ordning som helst.
Till ordet kan man göra följande operation: Ta ett delord S'' ur ordet S som består av bokstäver i följd och som har lika många A- och B-bokstäver. Delordet svänger man bakochfram, och varje A i ordet ersätts med ett B och varje B ersätts med ett A.
Existerar det ett sådant ord S och en följd operationer så att efter att man utfört följden av operationer så har S blivit S baklänges?

13. En kortlek har 101 kort, numrerade 0-100. 100 barn gör alla följande operation: Blandar korten. Sedan svänger hen upp ett kort i taget från kortleken, hundra gånger, och efter varje uppsvängt kort skriver hen medeltalet av värdena på de korten som hen hittills dragit på tavlan.
På det här sättet skrivs det 100×100 tal på tavlan. Visa att det bland med dessa tal finns samma tal två gånger.

14. Låt a, b, c vara positiva reella tal för vilka $a + b + c = 1$. Visa att

$$a\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + b\sqrt[3]{\frac{c}{b}} + c\sqrt[3]{\frac{a}{c}} \leq ab + bc + ca + \frac{4}{9}.$$

15. På tavlan finns det 100 positiva heltal. Carita spelar ett spel där hen väljer talet c från tavlan, så att $c = a + b$ och så att talen a, b också finns på tavlan. Carita ersätter talet c med något större heltal.

Spelet tar slut om Carita inte mera kan göra ett drag. Carita försöker spela spelet så att det aldrig tar slut. Visa att det är omöjligt.

16. Vi undersöker alla hundrasiffriga tal som är delbara med talet 19. Visa att det existerar lika många sådana tal som inte innehåller siffrorna 4,5,6 som det finns tal som inte innehåller siffrorna 1,4,7.

17. Undersöker ekvationen

$$a^b b^c = c^a,$$

där a, b, c är positiva heltal.

Låt p vara ett primtal, så att $p|a$. Visa att $p|b$.

18. Låt (a_i) och (b_i) vara två oändliga följder som består av positiva heltal, där a_1, a_2, b_1, b_2 är parvis utan gemensamma faktorer och mindre än 1000. Vidare är $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ och $b_i = b_{i-1} + b_{i-2}$ för alla $i \geq 3$.

Antar att a_{i_0} är delbar med talet b_{i_0}. Visa att $i_0 \leq 50$.