Tammikuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 25.2.2022 sähköpostitse.
Helpommat tehtävät: nirmal.krishnan(at)helsinki.fi
Vaikemmat tehtävät: anne-maria.ernvall-hytonen(at)helsinki.fi.

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Helpompia tehtäviä

1. A ja B leipovat maanantaina kakkuja. A leipoo kakun joka viides päivä ja B leipoo kakun joka toinen päivä. Kuinka monen päivän jälkeen he molemmat leipovat seuraavan kerran kakun maanantaina?

1. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Molemmat leipovat seuraavan kerran kakun maanantaina 70 päivän jälkeen.

Aina seitsemän päivän välein on maanantai. Koska $\mathrm{pyj}(2,5,7) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$, niin A ja B leipovat seuraavan kerran molemmat kakun maanantaina 70 päivän jälkeen.

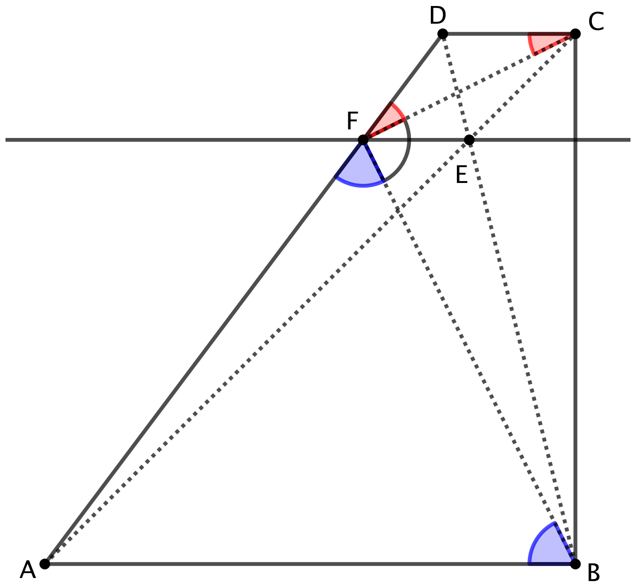
2. Mikä numero on satojen kohdalla luvussa $(20! - 15!)$? (Kun n on positiivinen kokonaisluku, niin merkinnällä $n!$ tarkoitetaan lukua $n \cdot (n-1) \cdots 1$. Esimerkiksi on $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.)

2. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Luvun $20! - 15!$ satoja merkitsevä numero on 0.

Luku $15!$ on jaollinen luvulla $5 \cdot 10 \cdot 15$ ja täten se on jaollinen luvulla 5^3. Vastaavasti luku $15!$ on jaollinen luvulla $2 \cdot 4 = 8$. Näin ollen luku $15!$ on jaollinen luvulla $5^3 \cdot 2^3 = 1000$. Siispä sen kolme viimeistä numeroa ovat 000. Koska lisäksi on $20! = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!$, niin myös luvun $20!$ kolme viimeistä numeroa ovat 000. Siispä luvun $20! - 15!$ satoja merkitsevä numero on 0.

3. Puolisuunnikkaan $ABCD$ yhdensuuntaiset sivut ovat AB ja CD sekä on voimassa $AB + CD = AD$. Diagonaalit AC ja BD leikkaavat pisteessä E. Suora, joka kulkee pisteen E kautta ja on yhdensuuntainen sivun AB kanssa, leikkaa janan AD pisteessä F. Osoita, että $\angle BFC = 90°$.

3. tehtävän ratkaisu:



Koska suorat AB ja EF ovat yhdensuuntaiset, niin $\triangle ABD \sim \triangle FED$. Täten $\frac{DF}{FA} = \frac{DE}{EB}$. Edelleen, koska suorat CD ja AB ovat yhdensuuntaiset, niin $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ ja täten $\frac{DE}{EB} = \frac{CD}{AB}$. On saatu $\frac{DF}{FA} = \frac{CD}{AB}$.

Lisätään edellisen yhtälön molemmille puolille luku 1 ja saadaan

$$\frac{AD}{FA} = \frac{FA + DF}{FA} = \frac{AB + CD}{AB}.$$

Oletuksen mukaan on $AD = AB + CD$ eli saadaan $FA = AB$. Tästä seuraa, että $DF = CD$. Siis on $\angle AFB = \angle FBA$ ja $\angle CFD = \angle DCF$. Täten on

$$\begin{aligned} \angle AFB &= 90^\circ - \frac{\angle BAF}{2}, \\ \angle CFD &= 90^\circ - \frac{\angle FDC}{2}. \end{aligned}$$

Yhdistetään nyt edelliset tiedot. Saadaan

$$\begin{aligned} \angle BFC &= 180^\circ - \angle AFB - \angle CFD \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle BAF}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\angle FDC}{2}\right) \\ &= \frac{\angle BAF + \angle FDC}{2} \\ &= 90^\circ, \end{aligned}$$

sillä suorat AB ja CD ovat yhdensuuntaiset. □

4. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut, joilla on yhtä monta kuudella jaollista ja kuudella jaotonta tekijää.

4. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Kysytyt luvut ovat $72m$ tai $108m$, missä $m \in \mathbb{Z}$ ja $\text{syt}(m, 6) = 1$.

Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $n = 2^a \cdot 3^b m$, missä a, b ja m ovat kokonaislukuja sekä $\text{syt}(m, 6) = 1$. Koska jokaisella kokonaisluvulla on aina vähintään yksi tekijä, niin a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja, sillä muuten luvulla n ei olisi yhtään kuudella jaollista tekijää. Riittää tarkastella vain luvun n positiivisia tekijöitä, sillä sillä on yhtä monta positiivista ja negatiivista tekijää.

Täten voidaan olettaa, että myös luku m on positiivinen. Olkoon $\sigma(m)$ luvun m positiivisten tekijöiden lukumäärä. Tällöin luvun n positiivisten tekijöiden lukumäärä on $(a+1)(b+1)\sigma(m)$. Näistä kuudella jaollisia ovat $ab\sigma(m)$ tekijää eli kuudella jaottomia ovat

$$(a + 1)(b + 1)\sigma(m) - ab\sigma(m) = (a + b + 1)\sigma(m)$$

tekijää. Halutaan, että $ab\sigma(m) = (a+b+1)\sigma(m)$ eli $ab = a+b+1$. Tämä voidaan kirjoittaa muodossa $a(b-1) = b+1$. Ei voi olla $b = 1$, sillä saataisiin, että $0 = 2$, mikä ei ole mahdollista. Siis on oltava $b > 1$ ja $a = \frac{b+1}{b-1} = 1 + \frac{2}{b-1}$. Koska a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja, niin on oltava $b = 2$ tai $b = 3$, jolloin $a = 3$ tai $a = 2$. Siis kaikki positiiviset kokonaisluvut, joilla on yhtä monta kuudella jaollista ja jaotonta tekijää, ovat muotoa $72m$ tai $108m$, missä m on kokonaisluku, jolla $\mathrm{syt}(m, 6) = 1$.

5. Yksi Eulerin konjektuureista kumottiin 1960-luvulla, kun kolme amerikkalaista matemaatikkoa osoitti, että on olemassa positiivinen kokonaisluku n, jolle

$$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = n^5.$$

Etsi luku n.

5. tehtävän ratkaisu: <u>**Vastaus:** On $n = 144$.</u>

Fermat'n pienen lauseen mukaan kaikille kokonaisluvuilla x pätee $x^5 \equiv x \pmod 5$ ja $x^5 \equiv x \pmod 3$. Täten on oltava

$$n \equiv 3 + 0 + 4 + 2 \equiv 4 \pmod 5$$

ja

$$n \equiv 1 + 2 + 0 + 0 \equiv 0 \pmod 3.$$

Lisäksi selvästi $n > 133$. Täten $n = 144$ tai $n \geq 174$. Kun $n \geq 174$, niin

$$\begin{aligned} n^5 &\geq 174^5 \\ &= 133^5 + 5 \cdot 133^4 \cdot 41 + 10 \cdot 133^3 \cdot 41^2 + 10 \cdot 133^2 \cdot 41^3 + 5 \cdot 133 \cdot 41^4 + 41^5 \\ &> 133^5 + 110^5 + 84^5 + 10 \cdot 133^2 \cdot 41^3 + 5 \cdot 133 \cdot 41^4 + 27^5 \\ &> 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5. \end{aligned}$$

Siis $n = 144$.

6. Kolmion ABC ulkopuolelle piirretään neliö, jonka sivuista yksi on jana AB. Lisäksi piirretään toinen neliö, jonka sivuista yksi on jana BC. Osoita, että näiden neliöiden keskipisteet ja janan CA keskipiste muodostavat tasakylkisen suorakulmaisen kolmion.

6. tehtävän ratkaisu: Olkoon piste P tehtävän neliöiden ympäripiirrettyjen ympyröiden leikkauspiste ($\neq B$). Kun kehäkulma on puolet keskuskulmasta $\measuredangle APB = 135°$ ja $\measuredangle BPC = 135°$. Siksi $\measuredangle CPA = 90°$ eli piste P on sellaisen ympyrän kehällä, jonka halkaisija on CA.

Merkitään neliöiden keskipisteitä O_1 ja O_2 ja sivun CA keskipistettä M. Merkitään janojen AP ja O_1M leikkauspistettä X, janojen PB ja O_1O_2 leikkauspistettä Y ja janojen O_2M ja PC leikkauspistettä Z.

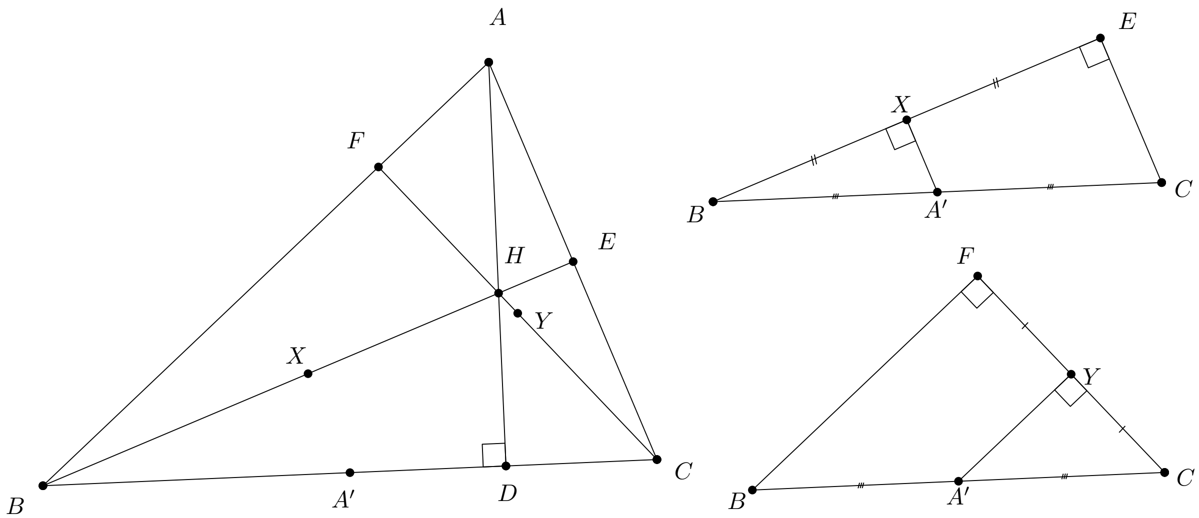
Koska toisiaan leikkaavien ympyröiden keskipisteiden välinen jana on ympyröiden yhteisen jänteen keskinormaali tiedetään että $AP \perp O_1M$, $BP \perp O_1O_2$ ja $CP \perp O_2M$.

Nelikulmion kulmien astelukujen summa on $360°$ eli kun nelikulmioissa O_1YPX, O_2ZPY ja $MXPZ$ tiedetään kolme kulmaa, voidaan neljäs laskea.

Nyt $\measuredangle O_2MO_1 = \measuredangle XMZ = 360° - 90° - 90° - 90° = 90°$ ja $\measuredangle O_2O_1M = \measuredangle YO_1X = 360° - 135° - 90° - 90° = 45°$. Tämä on yhtäpitävä tehtävän väitteen kanssa.

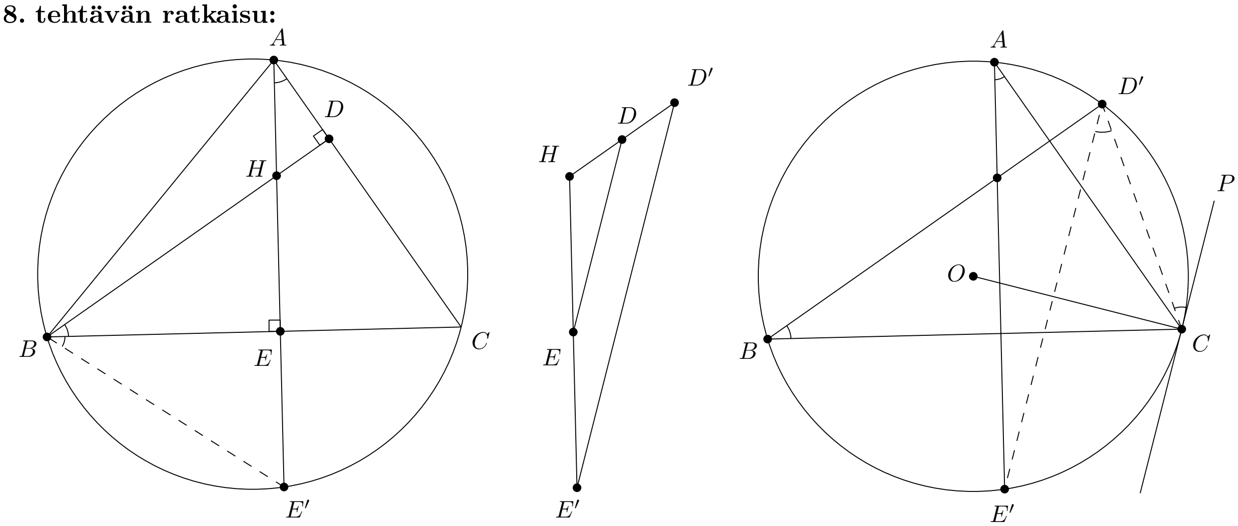
7. Olkoon piste H kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste, piste A' janan BC keskipiste, piste X kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan keskipiste, piste Y kolmion kärjestä C lähtevän korkeusjanan keskipiste ja D kolmion kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste. Osoita, että pisteet X, Y, D, H ja A' ovat samalla ympyrällä.

7. tehtävän ratkaisu: Kolmion $A'DH$ ympäripiirretyn ympyrän halkasija on jana $A'H$. Merkitään kärjestä B lähtevän korkeusjanan kantapistettä E ja kärjestä C lähtevän korkeusjanan kantapistettä F. Koska jana XA' on janan EC kuva homotetiakuvauksessa $B\left(\frac{1}{2}\right)$, kulma EXA' on suora. Siksi myös piste X on ympyrällä, jonka halkaisija on $A'H$. Samoin, kun jana YA' on janan FB kuva homotetiakuvauksessa $C\left(\frac{1}{2}\right)$, kulma $A'YF$ on suora. (Jos perustelu homotetiakuvauksen avulla tuntuu vaikealta, voit myös ajatella, että isompi ja pienempi kolmio ovat yhdenmuotoiset ja isompi on kaksi kertaa pienemmän kokoinen.) Siksi myös piste Y on ympyrällä, jonka halkaisija on $A'H$.



8. Olkoon piste D kolmion ABC kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste ja piste E kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan kantapiste. Olkoon kolmion ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O. Osoita, että $OC \perp DE$.

8. tehtävän ratkaisu:



Jatketaan korkeusjanoja AD ja BE niin, että ne leikkaavat kolmion ympäripiirretyn ympyrän kehän pisteissä D' ja E'. Osoitetaan ensin aputulos $HE = EE'$. Kahden yhtäsuuren vastinkulman perusteella (ristikulmat $\measuredangle DHA = \measuredangle BHE$ ja $\measuredangle ADH = \measuredangle HEB = 90°$) kolmiot HDA ja HEB ovat yhdenmuotoisia. (Katso vasemmanpuoleista kuvaa.) Siksi myös $\measuredangle HAD = \measuredangle EBH$. Toisaalta kaarta $E'C$ vastaavina kulmina $\measuredangle E'AC = \measuredangle E'BC$. Nyt kolmiot BEH ja BEE' ovat yhtenevät. (Perustelu ksk: niillä on kaksi yhteistä vastinkulmaa ja yksi yhteinen vastinsivu.) Siksi $HE = EE'$.

Vastaavan päättelyn perusteella $HD = DD'$. Pisteen H keskisen homotetian perusteella $DE \parallel D'E'$. (Katso keskimmäistä kuvaa.)

Säde OC on kohtisuorassa ympyrän kehän pisteen C kautta kulkevaa tangenttia CP vastaan. Tangentin kehäkulmalauseen perusteella kaarta CD' vastaavina kehäkulmina $\measuredangle PCD' = \measuredangle CBD'$. Edellisen kohdan mukaan $\measuredangle CBD' = \measuredangle E'AC$. Kaarta $E'C$ vastaavina kehäkulmina $\measuredangle E'AC = \measuredangle CD'E'$. Siksi $D'E' \parallel CP$.

Nyt $OC \perp CP \parallel D'E' \parallel DE$.

9. Olkoon piste I kolmion ABC kulmanpuolittajien leikkauspiste. Olkoon piste T pisteen B kohtisuora projektio suoralle BI. Olkoon pisteet L ja M sivujen CA ja AB keskipisteet. Osoita, että pisteet T, L ja M ovat samalla suoralla.

9. tehtävän ratkaisu: Kun $\measuredangle ATB = 90°$ jana AB on kolmion ABT ympärysympyrän halkaisija ja piste M ympyrän keskipiste. Siksi kolmio MBT on tasakylkinen ja $\measuredangle MTB = \measuredangle TBM = \measuredangle CBT$, josta $TM \parallel BC$. Toisaalta $\triangle AML \sim \triangle ABC$ ja siksi myös $ML \parallel BC \parallel TM$.

Vaikeampia tehtäviä

10. Olkoon $p \geq 3$ alkuluku. Määritellään

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}, \quad f(p) = \frac{1}{2} - \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\},$$

missä $\{x\} = x - [x]$ on luvun x murto-osa. Määritä $f(p)$.

10. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Jos on $p \nmid 120$, niin $f(p) = \frac{1}{2}$ ja jos on $p \mid 120$, niin $f(p) = \frac{1}{2p}$.

Ensimmäinen havainto on, että $(p-k)^{120} \equiv k^{120} \pmod{p}$. Täten ja koska p on pariton kokonaisluku, on

$$2F(p) = 2\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k^{120} \pmod{p}.$$

Edelleen, koska $\mathrm{syt}(2,p) = 1$, niin luvulla 2 on olemassa käänteisalkio $\pmod{p}$ ja saadaan

$$F(p) \equiv \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1} k^{120} \pmod{p}. \tag{1}$$

Tarkastellaan väitettä nyt kahdessa tapauksessa sen mukaan jakaako luku $p-1$ luvun 120 vai ei.

Olkoon g primitiivinen juuri $\pmod{p}$. Jos $p-1 \nmid 120$, niin on $g^{120} \not\equiv 1 \pmod{p}$ ja $g^{120(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$. Täten kaavan (1) nojalla on

$$F(p) \equiv \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1} g^{120k} = \frac{g^{120}\left(g^{120(p-1)} - 1\right)}{2\left(g^{120} - 1\right)} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Tässä tapauksessa siis on $f(p) = \frac{1}{2}$.

Jos $p-1 \mid 120$, niin on $p \in \{3, 5, 7, 11, 13, 31, 41, 61\}$ ja $g^{120} \equiv 1 \pmod{p}$. Saadaan

$$F(p) \equiv \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1} g^{120k} = \frac{p-1}{2} \pmod{p}.$$

Täten on

$$f(p) = \frac{1}{2} - \frac{p-1}{2p} = \frac{1}{2p}.$$

11. Olkoon $R(p,q)$ pienin positiivinen kokonaisluku, jolla mikä tahansa täydellisen $R(p,q)$ graafin kaarien väritys punaisella ja sinisellä sisältää täydellisen p solmun aligraafin, jonka kaikki kaaret on väritetty punaisella, tai täydellisen q kärjen aligraafin, jonka kaikki kaaret on väritetty sinisellä. Osoita, että $R(4,4) = 18$.

11. tehtävän ratkaisu: To show that $R(4,4) \leq 18$:

Show that $R(3,3) \leq 6$ (in a complete graph on 6 vertices, there're 5 edges from a given vertex, so at least 3 of them are of the same color, and consider the edges connecting the other endpoints of those 3 edges).

Show that $R(3,4) \leq 9$ (in a complete graph on 9 vertices: (i) if we have a vertex with 6 or more blue edges, on the other endpoints of those edges we have either a red triangle or a blue triangle since $R(3,3) \leq 6$; (ii) it isn't possible that there're exactly 5 blue edges from each vertex since 45 isn't divisible by 2; (iii) if we have a vertex with at most 4 blue edges, it has at least 4 red edges, and consider the edges connecting the other endpoints of those 4 red edges). Of course, $R(4,3) \leq 9$ as well.

Now, in a complete graph on 18 vertices, there're 17 edges from a given vertex, so at least 9 of them are of the same color, and consider the edges connecting the other endpoints of those 9 edges, and use $R(3,4) \leq 9$ or $R(4,3) \leq 9$.

To show that $R(4,4) > 17$, in a complete graph on 17 vertices, color the edges in this way: consider the graph vertices as those of a regular 17-gon, e.g., numbered clockwise, and if two vertices are apart by $1, 2, 4$, or 8 sides of the 17-gon, then color the edge connecting them red; otherwise, color it blue. Show that in this coloring there're no monochromatic complete graphs on 4 vertices. $\square$

12. Todista seuraava vahvempi versio Schurin lauseesta: Jokaista positiivista kokonaislukua r kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku S, että millä tahansa kokonaislukujen $\{1, 2, \ldots, S\}$ r värin värityksellä voidaan löytää kolme erisuurta lukua x, y ja z, jotka ovat samanvärisiä ja joilla pätee $x + y = z$.

12. tehtävän ratkaisu: Take $S = R(4, 4, \ldots, 4, rcolors)$ and consider a complete graph on S vertices numbered $1, \ldots, S$. Given a coloring of the integers $\{1, \ldots, S\}$ into r colors, let's color the graph edges like this: for the edge connecting vertices i and $j, i < j$, assign the color of $(j - i)$ to it. By the definition of S, we can find a monochromatic complete graph on 4 vertices, say, i, j, k, m, with $i < j < k < m$. This means numbers $(j - i)$, $(k - i)$, $(m - i)$, $(k - j)$, $(m - j)$, $(m - k)$ are all of the same color, and it's easy to show that we can select from them x, y and z as required. $\square$

13. Graafissa G on 300 solmua. Sen kaaret voidaan värittää punaisella ja sinisellä niin, ettei ole olemassa sellaisia kolmea solmua u, v ja w, jotka olisi yhdistty samanvärisillä kaarilla (u, v), (u, w) and (v, w). Kuinka monta kaarta graafissa G voi enintään olla?

13. tehtävän ratkaisu: If G contains a complete graph on 6 vertices as a subgraph, any coloring of G will contain a monochromatic triangle ($R(3, 3) \leq 6$). The Turan's theorem tells us that a graph can have at most 36000 edges in order to avoid that: such graph is a complete 5-partite graph with 60 vertices in each part. If we consider the parts of that graph as nodes and the connections between the parts as edges, we essentially need to color a complete graph on 5 vertices to avoid monochromatic triangles. It's easy to do by looking at the graph as a regular pentagon with all the diagonals, coloring all the edges on its boundary red and coloring all the "inside" edges blue.

14. On annettu 18 peräkkäistä positiivista kokonaislukua, joista kukin on pienempi kuin 2005. Osoita, että jokin annetuista luvuista on väistämättä jaollinen numeroidensa summalla.

14. tehtävän ratkaisu: Luvuista kaksi on jaollisia yhdeksällä. Tällöin myös niiden numeroiden summa on jaollinen yhdeksällä. Suurin mahdollinen luvun numeroiden summa annetuilla ehdoilla on 28, joten tällaisen luvun numeroiden summa on 9 tai 18 tai 27.

Tehdään ratkaisu loppuun erikoistapausten avulla:

- Ainakin toisen yhdeksällä jaollisen luvun numeroiden summa on yhdeksän: Tällöin luku on automaattisesti jaollinen numeroidensa summalla ja väite on todistettu.
- Ainakin toisen yhdeksällä jaollisen luvun numeroiden summa on 27. Tällainen luku on 999 tai 1998. Kumpikin näistä luvuista on jaollinen luvulla 27, joten väite on todistettu.
- Kummankin yhdeksällä jaollisista luvuista numeroiden summa on 18. Toinen luvuista on parillinen. Se on siis jaollinen sekä yhdeksällä että kahdella, jolloin se on jaollinen luvulla 18.

15. Olkoon h positiivinen kokonaisluku. Määritellään lukujono a_n seuraavilla ehdoilla: $a_0 = 1$ ja

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{jos } a_n \text{ on parillinen} \\ a_n + h, & \text{jos } a_n \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Millä luvun h arvoilla on olemassa $n > 0$, jolla $a_n = 1$?

15. tehtävän ratkaisu: Osoitetaan, että näin käy täsmällee silloin, kun h on pariton.

Jos h on parillinen, kasvaa jono rajatta, jolloin näin ei voi käydä.

Jos taas h on pariton, niin jono on rajoitettu, sillä $\frac{a_n+h}{2} \leq a_n$, kun $a_n \geq h$ ja jokainen pariton jonon jäsen on korkeintaan h. Siispä on olemassa a_n ja a_m, joilla pätee $a_n = a_m$. Lisäksi lukujono muodostuu jaksolliseksi jostain pisteestä lähtien. Olkoon r pienin indeksi, jolla $a_r = a_s$ jollain $s \neq r$. Oletetaan $r > 0$. Jos $a_r \leq h$, niin a_r on pariton ja sekä a_r että a_s on saatu edellisistä jäsenistä jakamalla kahdella. Siispä myös edelliset jäsenet ovat yhtä suuria. Ristiriita. Jos taas $a_r > h$, niin a_r on parillinen ja saatu edellisestä jäsenestä jakamalla kahdella. Siispä tämäkin on ristiriita.