Uppgiftsseriepaket för Januari

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 25.2.2022 per epost. De enklare uppgifterna till: nirmal.krishnan(at)helsinki.fi och de svårare: anne-maria.ernvall-hytonen(at)helsinki.fi.

Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Lättare uppgifter

1. A och B bakar kakor på måndagen. A bakar en kaka var femte dag och B bakar en kaka varannan dag. Efter hur många dagar bakar de igen båda en kaka på en måndag?

1. uppgiftens lösning: **Svar:** Båda bakar samtidigt en kaka på en måndag efter 70 dagar.

Var sjunde dag är alltid en måndag. Eftersom $\text{mgm}(2, 5, 7) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$, bakar A och B samtidigt en kaka på en måndag efter 70 dagar.

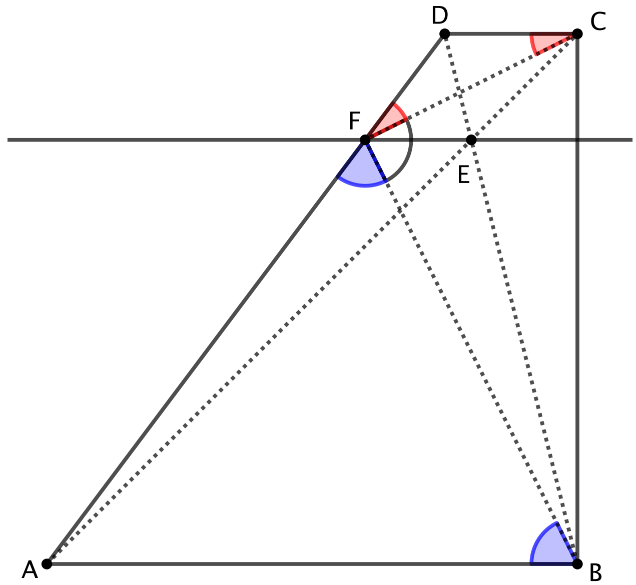
2. Vilken siffra är på hundratalets plats i talet $(20! - 15!)$? (Då n är ett positivt heltal avser man med beteckningen $n!$ talet $n \cdot (n-1) \dots 1$. Till exempel $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$)

2. uppgiftens lösning: **Svar:** Siffran på hundratalens plats i talet $20! - 15!$ är 0.

Talet 15! är delbart med talet $5 \cdot 10 \cdot 15$ och därav är det delbart med talet 5^3. Vidare är talet 15! delbart med talet $2 \cdot 4 = 8$. Därav är talet 15! delbart med talet $5^3 \cdot 2^3 = 1000$. Alltså är dess tre sista siffror 000. Eftersom vi dessutom har $20! = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!$, är även 000 de tre sista siffrorna i talet 20!. Alltså är det siffran 0 som finns på hundratalens plats i talet $20! - 15!$.

3. De två parallella sidorna i parallelltrapetset $ABCD$ är AB och CD, samt så gäller det att $AB+CD = AD$. Diagonalerna AC och BD skär varandra i punkten E. Linjen som går genom punkten E och är parallell med sidan AB delar sträckan AD i punkten F. Visa att $\angle BFC = 90°$.

3. uppgiftens lösning:



Eftersom linjerna AB och EF är parallella, gäller det $\triangle ABD \sim \triangle FED$. Därav $\frac{DF}{FA} = \frac{DE}{FA}$. Vidare, eftersom linjerna CD och AB är parallella, gäller att $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ och därav $\frac{DE}{EB} = \frac{CD}{AB}$. Vi har fått att $\frac{DF}{FA} = \frac{CD}{AB}$.

Vi lägger till talet 1 på båda sidorna i den föregående ekvationen och får

$$\frac{AD}{FA} = \frac{FA + DF}{FA} = \frac{AB + CD}{AB}.$$

Enligt antagandet är $AD = AB + CD$ alltså fås $FA = AB$. Ur detta följer att $DF = CD$. Alltså är $\angle AFB = \angle FBA$ och $\angle CFD = \angle DCF$. Därav är

$$\begin{aligned} \angle AFB &= 90^\circ - \frac{\angle BAF}{2}, \\ \angle CFD &= 90^\circ - \frac{\angle FDC}{2} \end{aligned}.$$

Sammanslår nu all information. Vi får

$$\begin{aligned} \angle BFC &= 180^\circ - \angle AFB - \angle CFD \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle BAF}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\angle FDC}{2}\right) \\ &= \frac{\angle BAF + \angle FDC}{2} \\ &= 90^\circ, \end{aligned}$$

eftersom linjerna AB och CD är parallella. □

4. Leta efter alla positiva heltal, som har lika många faktorer som är delbara och inte delbara med sex.

4. uppgiftens lösning: **Svar:** De efterfrågada talen är $72m$ eller $108m$, där $m \in \mathbb{Z}$ och $\operatorname{sgf}(m, 6) = 1$.

Låt n vara ett positivt heltal och $n = 2^a \cdot 3^b m$, där a, b och m är heltal samt $\operatorname{sgf}(m, 6) = 1$. Eftersom varje heltal alltid som minst har en faktor, är a och b positiva heltal, eftersom talet n annars inte skulle ha en enda faktor som är delbar med sex. Det räcker att enbart kontrollera talet n:s positiva faktorer, eftersom den har lika många positiva och negativa faktorer.

Därmed kan man anta att även talet m är positivt. Låt $\sigma(m)$ vara antalet positiva faktorer för talet m. Då är antalet positiva faktorer för talet n, $(a+1)(b+1)\sigma(m)$. Av dessa är $ab\sigma(m)$ faktorer som är delbara med sex, alltså de faktorer som inte är delbara med sex är

$$(a+1)(b+1)\sigma(m) - ab\sigma(m) = (a+b+1)\sigma(m)$$

Vi vill att $ab\sigma(m) = (a+b+1)\sigma(m)$ alltså att $ab = a+b+1$. Detta kan skrivas i formen $a(b-1) = b+1$. Vi kan inte ha $b = 1$, eftersom vi då skulle få $0 = 2$, vilket inte är möjligt. Alltså måste $b > 1$ och $a = \frac{b+1}{b-1} = 1 + \frac{2}{b-1}$. Eftersom a och b är positiva heltal, måste det gälla att $b = 2$ eller $b = 3$, vilket ger $a = 3$ eller $a = 2$. Alltså är alla positiva heltal som har lika många faktorer som är delbara och inte delbara med sex i formen $72m$ eller $108m$, där m är ett heltal för vilken det gäller att $\text{sgf}(m, 6) = 1$.

5. En av Eulers förmodningar upphävdes på 1960-talet, när tre amerikanska matematiker visade att det existerar positiva heltal n för vilka det gäller att

$$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = n^5.$$

Leta efter talet n.

5. uppgiftens lösning: <u>**Svar:** $n = 144.$</u>

Enligt Fermats lilla sats gäller det för alla heltal x att $x^5 \equiv x \pmod 5$ och $x^5 \equiv x \pmod 3$. Därav måste det gälla att

$$n \equiv 3 + 0 + 4 + 2 \equiv 4 \pmod 5$$

och

$$n \equiv 1 + 2 + 0 + 0 \equiv 0 \pmod 3.$$

Vidare är det klar att $n > 133$. Därav $n = 144$ eller $n \geq 174$. När $n \geq 174$, gäller

$$\begin{aligned} n^5 &\geq 174^5 \\ &= 133^5 + 5 \cdot 133^4 \cdot 41 + 10 \cdot 133^3 \cdot 41^2 + 10 \cdot 133^2 \cdot 41^3 + 5 \cdot 133 \cdot 41^4 + 41^5 \\ &> 133^5 + 110^5 + 84^5 + 10 \cdot 133^2 \cdot 41^3 + 5 \cdot 133 \cdot 41^4 + 27^5 \\ &> 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5. \end{aligned}$$

Alltså $n = 144$.

6. Utanför triangeln ABC ritas en kvadrat vars ena sida är sträckan AB. Vidare ritas en andra kvadrat vars ena sida är sträckan BC. Visa att dessa kvadraters medelpunkter och sträckan CA:s medelpunkt bildar en likbent rätvinklig triangel.

6. uppgiftens lösning: Låt punkten P vara skärningspunkten mellan de två cirklarna som omskriver uppgiftens två kvadrater ($\neq B$). Eftersom randvinkeln är hälften av medelpunktsvinkeln $\measuredangle APB = 135°$ och $\measuredangle BPC = 135°$. Därför $\measuredangle CPA = 90°$, alltså är punkten P på randen av en sådan cirkel vars diameter är CA.

Betecknar kvadraternas medelpunkter O_1 och O_2 och medelpunkten på sidan CA med M. Betecknar skärningspunkten mellan sträckorna AP och O_1M med X, skärningspunkten mellan sträckorna PB och O_1O_2 med Y och skärningspunkten mellan sträckorna O_2M och PC med Z.

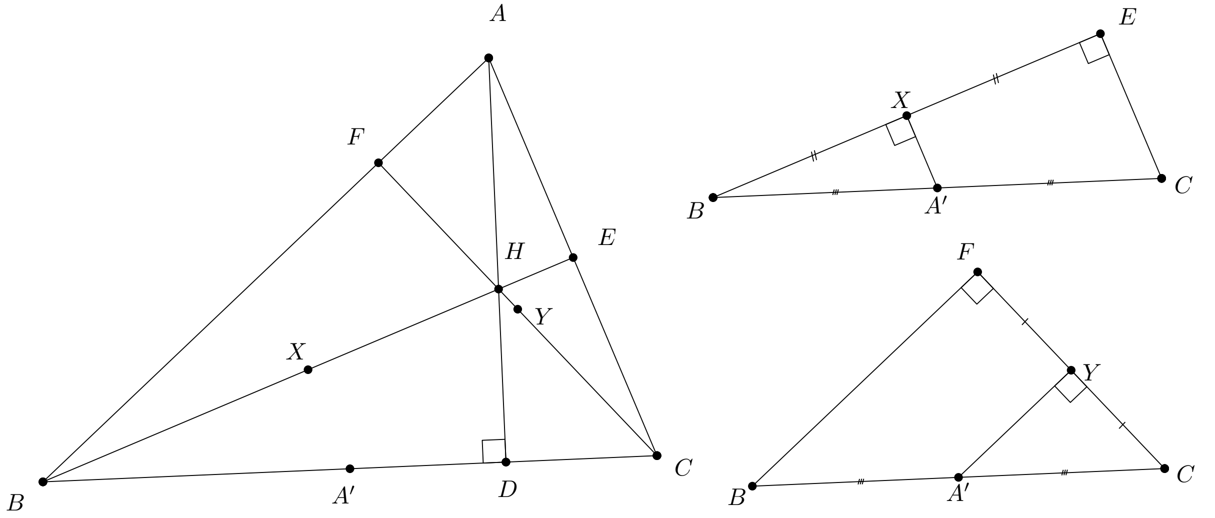
Eftersom sträckan mellan de två skärande cirklarnas medelpunkter är mittpunktsnormalen till cirklarnas gemensamma korda vet vi att $AP \perp O_1M, BP \perp O_1O_2$ och $CP \perp O_2M$.

Summan av vinklarna i en kvadrat är 360°, alltså när man för kvadraterna O_1YPX, O_2ZPY och $MXPZ$ känner till tre vinklar, kan man beräkna den fjärde.

Nu är $\measuredangle O_2MO_1 = \measuredangle XMZ = 360° - 90° - 90° - 90° = 90°$ och $\measuredangle O_2O_1M = \measuredangle YO_1X = 360° - 135° - 90° - 90° = 45°$. Detta stämmer överrens med påståendet i uppgiften.

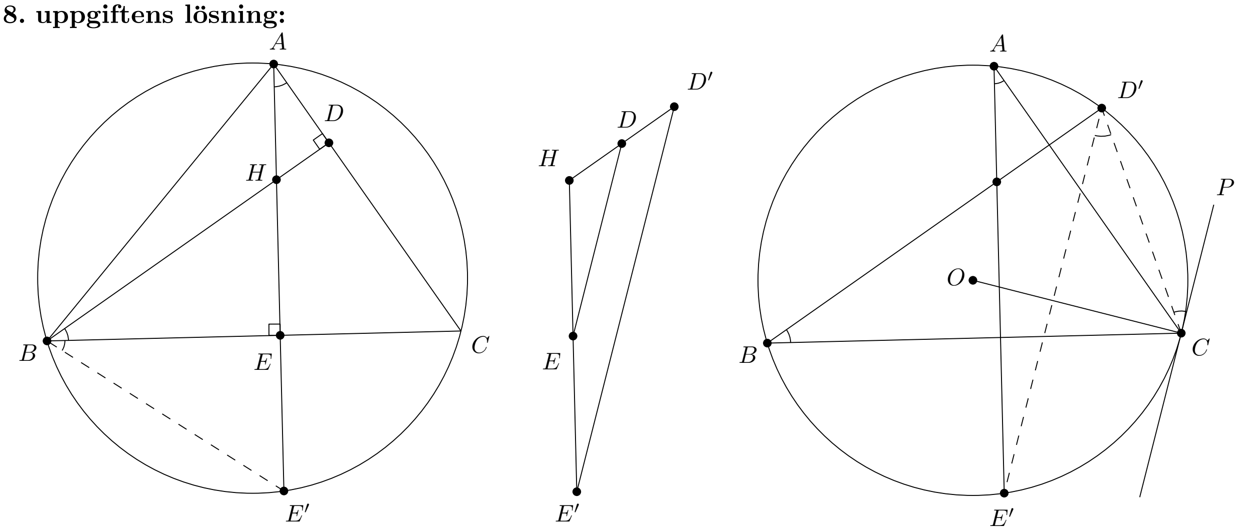
7. Låt punkten H vara skärningspunkten för höjdsträckorna i triangeln ABC, punkten A' medelpunkten på sträckan BC, punkten X medelpunkten på höjden som går från hörnet B, punkten Y medelpunkten på höjden som går från hörnet C, och punkten D är skärningspunkten mellan triangelns rand och höjden som utgår från punkten A. Visa att punkterna X, Y, D, H och A' ligger på samma cirkel.

7. uppgiftens lösning: Sträckan $A'H$ är diametern till den cirkel som omskriver triangeln $A'DH$. Markerar skärningspunkten mellan höjden som utgår från hörnet B och triangeln med E. Markerar skärningspunkten mellan höjden som utgår från hörnet C och triangeln med F. Eftersom sträckan XA' är avbildningen av sträckan EC i den homotetiska avbildningen $B\left(\frac{1}{2}\right)$, är vinkeln EXA' rät. Därför är även punkten X på cirkeln som har diametern $A'H$. Samtidigt, när sträckan YA' är avbildad som FB i en homotetisk avbildning $C\left(\frac{1}{2}\right)$, är vinkeln $A'YF$ rät. (Om motiveringen med homotetiska avbildningar känns svårt, kan man även tänka att den större och mindre triangeln är likformiga och den större är två gånger så stor som den mindre.) Därför ligger även punkten Y på den cirkel som har diametern $A'H$.



8. Låt punkten D vara skärningspunkten mellan triangeln ABC och triangelns höjdsträcka som utgår ur hörnet A. Låt punkten E vara skärningspunkten mellan triangeln och höjdsträckan som utgår ur hörnet B. Låt punkten O vara medelpunkten för den cirkel som omskriver triangeln. Visa att $OC \perp DE$.

8. uppgiftens lösning:



Förlänger höjdsträckorna AD och BE så att de skär den omskrivande cirkelns rand i punkterna D' och E'. Visar först hjälpresultatet $HE = EE'$. Med stöd av två lika stora supplementvinkel (vertikalvinklarna $\measuredangle DHA = \measuredangle BHE$ och $\measuredangle ADH = \measuredangle HEB = 90°$) är trianglarna HDA och HEB likformiga. (Titta på bilden till vänster.) Därför är även $\measuredangle HAD = \measuredangle EBH$. O andra sidan gäller för vinklarna som motsvarar bågen $E'C$ att $\measuredangle E'AC = \measuredangle E'BC$. Alltså är trianglarna BEH och BEE' kongruenta. (Motivering vsv: de har två gemensamma supplementvinklar och en gemensam sida.) Därav $HE = EE'$.

Med motsvarande motivering gäller att $HD = DD'$. Med basis av punkten H:s centrala homotetia gäller $DE \parallel D'E'$. (Se bilden i mitten.)

Radien OC är rätvinklig till tangenten CP som går genom punkten C på cirkelns rand. Med stöd av tangentens randvinkelsats gäller det för vinklarna som motsvarar bågen CD' att $\measuredangle PCD' = \measuredangle CBD'$. Enligt den föregående delen gäller att $\measuredangle CBD' = \measuredangle E'AC$. För randvinklarna som svarar mot bågen $E'C$ gäller att $\measuredangle E'AC = \measuredangle CD'E'$. Därför är $D'E' \parallel CP$.

Nu är $OC \perp CP \parallel D'E' \parallel DE$.

9. Låt punkten I vara skärningspunkten för triangeln ABC:s bisektriser. Låt punkten T vara den vinkelräta projektionen av punkten B på linjen BI. Låt punkterna L och M vara medelpunkterna på sidorna CA och AB. Visa att punkterna T, L och M är på samma linje.

9. uppgiftens lösning: När $\measuredangle ATB = 90^\circ$ är sträckan AB diameterna till den cirkel som omskriver triangeln ABT, och punkten M är cirkelns medelpunkt. Därför är triangeln MBT likbent och $\measuredangle MTB = \measuredangle TBM = \measuredangle CBT$, av vilka $TM \parallel BC$. Å andra sidan är $\triangle AML \sim \triangle ABC$ och därför även $ML \parallel BC \parallel TM$.

Svårare uppgifter

10. Låt $p \geq 3$ vara ett primtal. Definierar

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}, \quad f(p) = \frac{1}{2} - \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\},$$

där $\{x\} = x - [x]$ är en bråkdel av talet x. Definiera $f(p)$.

10. uppgiftens lösning: **Svar:** Om $p \nmid 120$, så är $f(p) = \frac{1}{2}$ och om $p \mid 120$, är $f(p) = \frac{1}{2p}$.

Den första observationen är att $(p-k)^{120} \equiv k^{120} \pmod{p}$. Härmed och eftersom p är ett udda heltal gäller att

$$2F(p) = 2\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k^{120} \pmod{p}.$$

Vidare, eftersom $\operatorname{sgf}(2,p) = 1$, så existerar det ett inverst element för talet $2 \pmod{p}$ och vi får

$$F(p) \equiv \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1} k^{120} \pmod{p}. \tag{1}$$

Undersöker påståendet i två olika fall, enligt om talet $p-1$ delar talet 120 eller inte.

Låt g vara en primitiv rot $\pmod{p}$. Om $p-1 \nmid 120$, gäller att $g^{120} \not\equiv 1 \pmod{p}$ och $g^{120(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$. Därav med stöd av formel (1) gäller

$$F(p) \equiv \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1} g^{120k} = \frac{g^{120}\left(g^{120(p-1)} - 1\right)}{2\left(g^{120} - 1\right)} \equiv 0 \pmod{p}.$$

För det här fallet är alltså $f(p) = \frac{1}{2}$.

Om $p - 1 \mid 120$, har vi $p \in \{3, 5, 7, 11, 13, 31, 41, 61\}$ och $g^{120} \equiv 1 \pmod{p}$. Får att

$$F(p) \equiv \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1} g^{120k} = \frac{p-1}{2} \pmod{p}.$$

Härmed är

$$f(p) = \frac{1}{2} - \frac{p-1}{2p} = \frac{1}{2p}.$$

11. Låt $R(p,q)$ vara det minsta positiva heltalet för vilken varje färgläggning av den fullständiga grafen $R(p,q)$ med färgerna rött och blått, innehåller antingen en fullständig subgraf för noderna p vars alla kanter är färglagda röda, eller en fullständig q subgraf där alla kanter är färglagda blåa. Bevisa att $R(4,4) = 18$.

12. Bevisa denna starkare version av Schurs sats: För varje positivt heltal r, existerar det ett positivt heltal S för vilken varje färgläggning av heltalen $\{1,\ldots,S\}$ med r färger det existerar tre olikastora tal x, y och z, som är samma färg och för vilka det gäller att $x + y = z$.

13. Grafen G har 300 noder. Dess kanter kan färgläggas med antingen rött eller blått på sådant sätt att det inte existerar tre sådana noder u, v och w, som är sammankopplade med en kant $(u,v), (u,w)$ och (v,w) som har samma färg. Hur många kanter kan det som mest finnas i grafen G?

14. Det har getts 18 efter varandra följande positiva heltal, av vilka alla är mindre än 2005. Bevisa att något av de givna talen är ofrånkomligt delbar med summan av dess siffror.

14. uppgiftens lösning: Av talen är två delbara med nio. Därmed är även summan av deras siffror delbar med nio. Den största möjliga summan av siffrorna med de givna kraven är 28, alltså är summan av ett delbart tals siffror 9 eller 18 eller 27.

Avslutar lösningen med hjälp av specialfallen:

- I alla fall den ena av talen som är delbar med nio har en siffersumma som är delbar med nio: Därav är talet automatiskt delbart med sina siffrors summa och påståendet är bevisat.
- I alla fall den ena av talen som är delbar med nio har en siffersumma som är 27. Ett sådant härnt tal är till exempel 999 eller 1998. Båda dessa talen är delbara med talet 27, alltså är påståendet bevisat.
- Båda talen som är delbara med nio har en siffersumma som är 18. Den ena av talen är jämn. Den är alltså delbar med både nio och två, alltså är den delbar med talet 18.

15. Låt h vara ett positivt heltal. Definierar talföljden a_n med kraven: $a_0 = 1$ och

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{om } a_n \text{ är jämn} \\ a_n + h, & \text{om } a_n \text{ är udda.} \end{cases}$$

För vilka värden på h existerar det $n > 0$, för vilken $a_n = 1$?

15. uppgiftens lösning: Bevisar att detta sker exakt då när h är udda.