Uppgiftsseriepaket september 2021

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 31.10.2021 per epost. De enklare uppgifterna till: nirmal.krishnan(at)helsinki.fi och de svårare: anne-maria.ernvall-hytonen(at)helsinki.fi.

Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

——————:——————

I några av uppgifterna kan man ha nytta av att känna till lådprincipen (Dirichlets lådprincip) och färgläggningar. Du kan bekanta dig med lådprincipen t.ex. genom Janne Järvinens youtube-video

`https://www.youtube.com/watch?v=hOBZ8n6PYNY`

eller på engelska, t.ex. genom videon

https://www.youtube.com/watch?v=2-mxYrCNX60

på TheTrevTutors kanal. Färgläggningar kan man bekanta sig med, t.ex. genom (på finska) Pitkän matematiikan lisäsivujen 1: Täsmällinen päättely kapitel 2:

`https://www.mayk.fi/wp-content/uploads/2017/06/Pitkan-matematiikan-lisasivut-1.pdf`.

Enklare uppgifter

1. Visa att det för alla spetsiga vinklar α gäller att

$$\tan\alpha + \cot\alpha \geq 2.$$

1. uppgiftens lösning: Eftersom α är spetsig, kan man föreställa sig att det är en vinkel i en rätvinklig triangel, där den andra spetsiga vinkel är $90° - \alpha$ och dess kateters längder kan skrivas med bokstäverna a och b. Nu är

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

I olikheten kan man referera till aritmetik-geometri olikheten, eller till det att $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \geq 0$.

2. Låt a och b vara positiva tal. För vilket värde på talet x antar uttrycket

$$\frac{a+bx^4}{x^2}$$

sitt minsta värde?

2. uppgiftens lösning: Med stöd av aritmetisk-geometriska olikheten får man

$$\frac{a+bx^4}{x^2} = \frac{a}{x^2} + bx^2 \geq 2\sqrt{\frac{a}{x^2} \cdot ax^2} = a\sqrt{ab}.$$

Likhet segrar enbart om $\frac{a}{x^2} = bx^2$. Detta gäller då $x = \pm\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$.

3. I Finland består postnumren av fem siffror, som tillhör intervallet $[0, 9]$. Vi väljer slumpmässigt n finländare. Vad är det minsta talet n, så att den första och den sista siffran i två personers postnummer är lika.

3. uppgiftens lösning: **Svar:** Det minsta talet n är 101.

För både postnummrets första och sista siffra finns det 10 olika alternativ. Alltså finns det totalt $10 \cdot 10 = 100$ olika kombinationer av den första och sista siffran. Därmed, med stöd av lådprincipen, är det eftersökta talet 101.

4. Låt ABC vara en triangel, där $\angle ABC = 90°, AC = 26$ och $BC = 24$. Låt punkten D ligga mellan punkterna B och C på sidan BC. Vidare, låt E vara en sådan punkt för vilken det gäller att $\angle CDE = 90°, \angle ECD = \angle BCA$ och $CE = 13$. Beräkna AE.

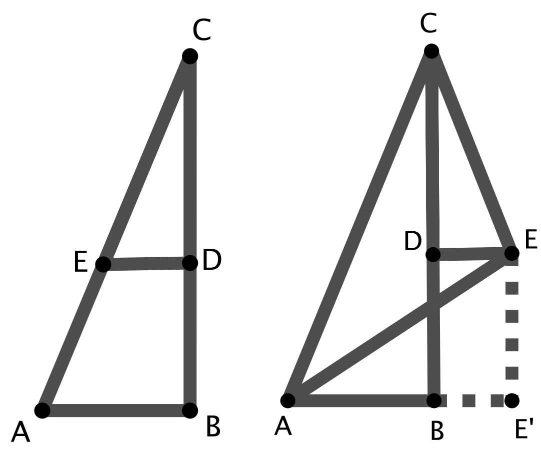
4. uppgiftens lösning: **Svar:** Beroende på punkten E:s position är $AE = 13$ eller $AE = 3\sqrt{41}$.

Eftersom trianglarna ABC och EDC har två lika stora vinklar är de likformiga. Med hjälp av de motsvarande sidorna fås

$$\frac{CD}{24} = \frac{CD}{CB} = \frac{CE}{AC} = \frac{1}{2}$$

alltså $CD = 12$. Med stöd av Pythagoras sats gäller det att $DE = 5$ och $AB = 10$. Fortfarande, med stöd av punkten D:s position, gäller att $BD = BC - CD = 12$. Eftersom punkten D är mellan punkterna B och C på sidan BC och $\angle ECD = \angle BCA$, är punkten E antingen på sidan AC eller utanför triangeln ABC (se. Figur 1). Om punkten E är på sidan AC, gäller det att

$$AE = AC - CE = 26 - 13 = 13.$$



Figur 1: Möjliga platser för punkten E

Antar nu att punkten E är utanför triangeln ABC. Låt E' vara punkten E:s projektion på linjen AB. Sträckan AE är triangeln $AE'E$:s hypotenusa, alltså kan man beräkna dess längd genom att undersöka triangeln $AE'E$. Eftersom $\angle CDE = 90°$, gäller det att $EE' = BD = 12$. Dessutom är

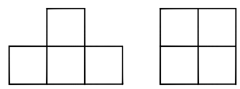
$$AE' = AB + BE' = AB + DE = 10 + 5 = 15.$$

Därmed fås

$$AE = \sqrt{AE'^2 + EE'^2} = \sqrt{15^2 + 12^2} = 3\sqrt{41}.$$

Alltså är $AE = 13$ eller $AE = 3\sqrt{41}$ beroende på punkten E:s position.

5. Visa att ett 8×8-bräde inte kan täckas med 15 stycken T-formade brickor och en kvadratformad bricka.



5. uppgiftens lösning: Den här uppgiften ser ut som en ganska typisk färgläggninsuppgift (dessutom är uppgiften en övningsuppgift för färgläggning); den anknyter till plattläggning av ett område. Vi undersöker om det skulle gå att bevisa påståendet med en lämplig färgläggning och testar först med den typiska schackbrädesfärg-läggningen.

Brädet färgläggs så som ett schackbräde är färglaggt. Den kvadratformade brickan färgläggs med två svarta och två vita rutor. De T-formade brickorna med tre svarta och en vit ruta eller tvärtom. Med de T-formade brickorna borde man då täcka 30 vita och 30 svarta rutor. Med ett udda antal T-formade brickor kan man dock inte täcka ett jämnt antal svarta eller vita rutor. □

6. I klassen finns det 33 studerande och summan av deras åldrar (i år) är 430. Visa att det i klassen alltid finns 20 studerande för vilka det gäller att summan av deras åldrar är över 260 år.

6. uppgiftens lösning: Eftersom vi vill undersöka ifall det är möjligt att summan av studerandenas ålder är över något visst tal, är det vettigt att undersöka när det undersökta talet är så stort som möjligt. Summan av de undersökta 20 studerandes åldrar är det största möjliga, när de undersökta är de äldsta studerandena i klassen.

Ur klassen väljer vi alltså de 20 äldsta studerandena. Vi gör ett motantagande, att summan av deras åldrar är som mest 260 år. Vi kontrollerar den yngsta studeranden bland med de 20 äldsta studerandena. Om den yngsta är minst 14 år gammal, är den totala åldern för de äldsta 20 studerandena minst $20 \cdot 14 = 280$. Alltså är den yngsta eleven bland med de 20 äldsta studerandena som mest 13 år gammal. Därmed är de 13 yngsta eleverna som mest 13 år gammla. Alltså om summan av de 20 äldsta studerandenas åldrar är som mest 260 år, är summan av alla studerandes åldrar som mest $260 + 13 \cdot 13 = 429$. Men antagandet var att summan av studerandenas summa var 430 år. Alltså är det inte möjligt att summan av de 20 äldsta studerandenas åldrar skulle som mest vara 260 år. Därmed måste den vara över 260 år och därmed finns det i klassen 20 studerande, vars ålderssumma är mer än 260 år. □

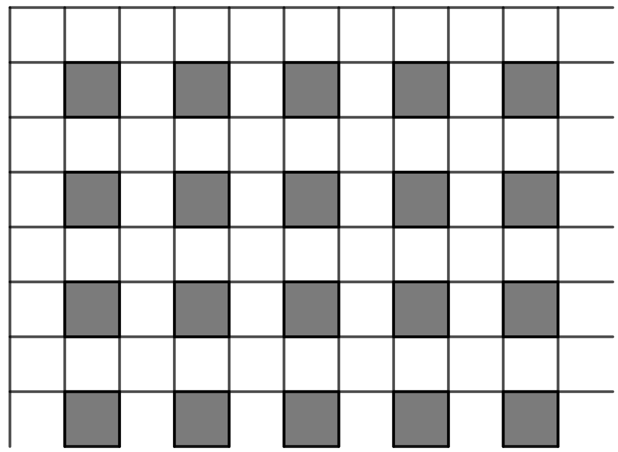
7. Visa att det i vilken som helst mängd med sju kvadrattal finns två kvadrattal, vars differens är delbar med tio.

7. uppgiftens lösning: Undersöker kvadrattalens rester när man delar med tio. Möjliga rester när man delar med tio är $0, 1, \ldots, 9$. Talens kvadrater är därmed

$$\begin{gathered} 0^2 \equiv 0 \pmod{10}, \quad 1^2 \equiv 1 \equiv 9^2, \quad 2^2 \equiv 4 \equiv 8^2 \pmod{10}, \\ 3^3 \equiv 9 \equiv 7^2 \pmod{10}, \quad 4^2 \equiv 6 \equiv 6^2 \pmod{10}, \quad 5^2 \equiv 5 \pmod{10}. \end{gathered}$$

Alltså har kvadraterna sex olika möjliga restgrupper. Enligt lådprincipen har alltså två tal ur en mängd med sju kvadrattal samma rest modulo 10 och därmed är deras differens delbar med tio. □

8. Ett golv i formen av en kvadrat är belagt med plattor av storlekarna 4×1 och 2×2. En platta går sönder, och det finns inte kvar flera av den sortens platta, men nog av den andra varianten. Visa att det inte går att belägga golvet med dessa plattor, även om man kunde flytta på plattorna.



Figur 2: Golvets färgläggning

8. uppgiftens lösning: Vi tänker oss att golvet består av 1×1-rutor. Färglägger rutorna med svart och vitt på följande sätt: Den vänstra kolumnen och översta raden färgläggs vit. Därefter färglägger vi varannan ruta i kolumnerna och varannan ruta i raderna svart enligt metoden som presenteras i Figur 2, och resten av rutorna färgläggs vita. Alla 1×4 plattor täcker alltså antingen 0 eller 2 svarta rutor, och 4 eller 2 vita, och varje 2×2 platta täcker exakt en svart ruta och tre vita.

Om nu en 1×4 platta går sönder, genom att vid behov flytta plattor och lägga till en 2×2 platta skulle vi behöva få golvet lagt. Men nu på grund av den söndriga plattan är ett jämnt antal vita rutor otäckta (och deras antal är inte noll). Om man lägger till en 2×2 platta efter att en platta gick sönder, betyder det att antalet vita rutor som är täckta förändras med ett udda antal, alltså är antalet otäckta vita plattor efter att man lagt till plattan ett udda antal, och genom att förflytta 1×4 plattorna kan man bara korrigera ett jämnt antal. Alltså går det inte att få alla de ursprungligen vita plattorna täckta, och detta fall har inte en lösning.

Om istället en 2×2 platta går sönder, skulle vi behöva få ett udda antal (en) svarta rutor täckta. Genom att lägga till en 1×4 platta och genom att flytta på dessa plattor ändrar man alltid antalet täckta svarta rutor med ett udda antal. Alltså är det heller inte i det här fallet möjligt att belägga golvet och påståendet är bevisat. $\square$

9. Hitta alla möjliga färgläggningar för positiva heltal, där varje positivt heltal är färglagd antingen svart eller vit, men inte både och, samt att summan av två olikfärgade tal alltid är svart och produkten av två olikfärgade tal alltid är vit. Ta även reda på vilken färg produkten av två vita tal är.

9. uppgiftens lösning: **Svar:** Produkten av två vita tal är vit. Följande är alla möjliga färgläggningar: Alla tal är svarta eller $m \in \mathbb{Z}_+$ och talen $n \in \mathbb{Z}$, för vilka det gäller att $m \mid n$ är vita och resten är svarta.

Observerar först och främst att när alla positiva heltal är färglagda med samma färg, antingen svarta eller vita, så uppfylls de önskade kraven. Undersöker ännu om det existerar andra möjliga önskvärda färgläggningar. Vi gör det här genom att undersöka den andra frågan, dvs. vilken färg produkten av två vita tal har.

Lemma 1. Produkten av två vita tal är vit.

Bevis. Låt m och n vara vita tal. Observerar först att deras produkt inte kan vara svart. Eftersom, om mn vore ett svart tal och k något svart tal, skulle talet $mk + mn$ vara svart, eftersom talet mk är vit och talet mn är svart. Å andra sidan är talet

$$mk + mn = m(k + n)$$

vit, eftersom talet $k + n$ är svart. Samma tal kan inte samtidigt vara svart och vitt, alltså kan inte talet mn vara svart. Om det alltså överhuvudtaget existerar vita positiva heltal m, n, måste deras produkt vara vit. $\square$

Låt m vara det minsta vita talet. Nu baserat på uppgiftsbeskrivningen och föregående observationer gäller det att för alla positiva heltal n är talet mn vitt. Visar nu att de positiva heltal som inte är delbara med talet m, är svarta.

Lemma 2. Om m är det minsta positiva heltalet som är färglagd vit, och n är ett sådant positivt heltal att $m \nmid n$, så är n svart.

Bevis. Eftersom $m \nmid n$, kan man skriva $n = mk + r$, där $k, r \in \mathbb{Z}$ och $0 < r < m$. Eftersom m är det minsta positiva heltalet, som är vit, måste talet r vara svart. Redan tidigare har man observerat att talet mk är vitt. Alltså är talet $n = mk + r$ summan av ett svart och vitt tal, och därmed är talet svart. $\square$

Det tidigare betyder alltså att färgläggningarna bestäms enligt det minsta vita talet: Alla tal som är delbara med det är vita, och resten svarta. Uppenbart att dessa färgläggningar uppfyller de ställda kraven. Nämligen så är summan av ett svart och vitt tal delbart med det minsta vita talet, eftersom det svarta talet i summan inte är delbar med det minsta vita talet, men det vita talet är det. Produkten av det vita och svarta talet är dock delbart med det minsta vita talet, och därav vit. Alltså kan vilket som helst positivt heltal vara det minsta vita talet (och ett sådant måste inte ens existerar eftersom alla tal kan vara svarta) och därmed bestäms talens färgläggning enligt den tidigare beskrivna metoden.

10. Vi kallar ett tal *onyttigt*, om summan av dess siffror i tiotalssystemsframställningen är större eller lika stor som siffrornas produkt. Bestäm hur många tvåsiffriga $(11 - 99)$ onyttiga tal det finns.

10. uppgiftens lösning: Om en av siffrorna är en etta, är talet helt klart onyttigt, eftersom

$$1 + m > 1 \cdot m.$$

Om båda siffrorna är tvåor, är talet också onyttigt, eftersom

$$2 + 2 = 2 \cdot 2.$$

Om varken eller av siffrorna är en etta, och båda inte är tvåor, är talet inte onyttigt, eftersom om $m \geq n$, gäller att

$$m + n \leq 2m \leq nm,$$

och båda olikheterna är likheter enbart om $m = n$ och $2 = n$. Talen $11, 12, \ldots, 19$ och $21, 31, \ldots, 91$ och 22 är alltså onyttiga. Totalt 19 stycken.

11. Visa att det inte existerar ett positiva heltal n, för vilket

$$n!(n+1)!(n+2)!(n+3)!$$

är kvadraten av något positivt heltal

11. uppgiftens lösning: Observerar att

$$n!(n+1)!(n+2)!(n+3)! = (n!)^4(n+1)^3(n+2)^2(n+3) = ((n!)^2(n+1)(n+2))^2(n+1)(n+3).$$

För att detta tal ska vara en kvadrat, skulle även talet $(n+1)(n+3)$ behöva vara en kvadrat. Dock är

$$(n+1)(n+3) = (n+2)^2 - 1.$$

Eftersom två på varandra följande tal aldrig är kvadraten av ett positivt heltal, kan inte detta tal vara en kvadrat.

12. Definierar Fibonaccis talföljd genom att skriva $F_1 = F_2 = 1$ och $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, för $k \geq 2$. Låt n vara ett positivt heltal. Visa att det existerar ett Fibonnacci tal, som slutar med iallafall n nollor.

12. uppgiftens lösning: Gör först några allmänna observationer. Det är klart att alla tal i Fibonaccis talföljd är heltal, eftersom talen bildas som summor av heltal. Vidare bestämmer även de föregående termerna följande Fibonaccital och de följande bestämmer de föregående (eftersom vi har att $F_{k-1} = F_{k+1} - F_k$). Talet slutar med iallafall n nollor när det är delbart med talet 10^n. Dock kan två på varandra följande Fibonaccital inte vara delbara med talet 10^n, eftersom då skulle båda deras divisionsrester, när man dividerar med talet 10^n, vara noll och enligt sambandet $F_{k-1} = F_{k+1} - F_k$ skulle då även alla föregående tals divisionsrest med 10^n vara noll. Talet 1:s divisionsrest, när man dividerar med talet 10^n är dock inte noll, alltså kan inte två på varandra följande Fibonacci tal vara delbara med talet 10^n. Men det räcker dock med att hitta enbart ett sådant härnt tal.

Undersöker de $10^{2n}+1$ första Fibonaccitalen parvis $(F_1, F_2), (F_2, F_3), (F_3, F_4), \ldots$. Det finns alltså $10^n \cdot 10^n = 10^{2n}$ par. Varje tal F_k har 10^n möjliga divisionsrester när man dividerar med 10^n. Vidare kan inte paret $(0, 0)$ dyka upp enligt observationerna i det föregående stycket. Därmed finns det alltså $10^{2n} - 1$ möjliga par. Detta är ett mindre antal än antalet par, 10^{2n}, alltså måste divisionsresten vara densamma för åtminstone två av paren. Enligt Fibonaccis talföljds definition måste alltså divisionsresten, när man dividerar med talet 10^n, vara periodisk och periodens längd är som mest $10^{2n}-1$. Eftersom ett element alltid kan bestämmas med hjälp av följande två termer, måste den nya periodens första par (alltså divisionsresterna när man dividerar med talet 10^n) vara $(1, 1)$, eftersom det även är hela talföljdens första par. Nu är alltså divisionsresten för det sista elementet i talföljden, när man dividerar med 10^n, $1 - 1 = 0$, alltså delbar med talet 10^n. $\square$

Svårare uppgifter

13. Visa att om a och b är positiva tal, och $a + b = 1$, så är

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

13. uppgiftens lösning: Ändrar först om i olikhetens vänstra led:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + 2 + \frac{1}{b^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + 4 + \frac{1}{b^2}.$$

Vi gör nu en lärd gissning, att olikheten skulle vara en ekvation när $a = b = \frac{1}{2}$, alltså vänstra ledet skulle i det här fallet anta sitt minsta värde. I det här fallet har vi alltså att $a^2 = b^2 = \frac{1}{4}$ och $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} = 4$, alltså är $16a^2 = \frac{1}{a^2}$.

Med stöd av aritmetisk-geometriska olikheten gäller det att

$$\frac{\frac{1}{a^2} + a^2}{17} = \frac{16 \cdot \frac{1}{16a^2} + a^2}{17} \geq \frac{1}{\sqrt[17]{16^{16}a^{30}}}$$

och motsvarande

$$\frac{\frac{1}{b^2} + b^2}{17} = \frac{16 \cdot \frac{1}{16b^2} + b^2}{17} \geq \frac{1}{\sqrt[17]{16^{16}b^{30}}}.$$

Alltså

$$a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} \geq 17\left(\frac{1}{\sqrt[17]{16^{16}a^{30}}} + \frac{1}{\sqrt[17]{16^{16}b^{30}}}\right) \geq \frac{34}{\sqrt[34]{16^{32}(ab)^{30}}} \geq \frac{34}{\sqrt[34]{16^{32}\left(\frac{1}{4}\right)^{30}}}.$$

Börjar nu ändra om i uttrycket

$$\frac{34}{\sqrt[34]{16^{32}\left(\frac{1}{4}\right)^{30}}} = \frac{34}{\sqrt[34]{4^{64}\left(\frac{1}{4}\right)^{30}}} = \frac{34}{\sqrt[34]{4^{64-30}}} = \frac{34}{\sqrt[34]{4^{34}}} = \frac{34}{4} = \frac{17}{2}.$$

Alltså

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} + 4 \geq \frac{17}{2} + 4 \geq \frac{25}{2}.$$

14. Låt $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ och $x_{n+3} = x_n + x_{n+1}x_{n+2}$ för alla positiva heltal n. Visa, att det för varje positivt heltal m existerar ett sådant positivt heltal k, att m delar talet x_k.

14. uppgiftens lösning: Observerar först att man kan sätta $x_0 = 0$. Nu är alltså x_0 delbart med alla positiva heltal. Vi utnyttjar detta.

Tanken är att hitta ett tal x_k vars divisionsrest när man dividerar med talet m är samma som för talet x_0. Detta görs genom att undersöka tillräckligt många av divisionsresterna för talet x_n med talet m. Låt r_t vara divisionsresten när talet x_t delas med talet m och $t = 0, 1, \ldots, m^3 + 2$. Undersöker nu triorna

$$(r_0, r_1, r_2), (r_1, r_2, r_3), \ldots, (r_{m^3}, r_{m^3+1}, r_{m^3+2}).$$

Eftersom r_t kan anta ett värde olika m, måste enligt lådprincipen åtminstone två av triorna vara samma. Låt p vara det minsta indexet för vilken det existerar ett tal q, för vilken $(r_p, r_{p+1}, r_{p+2}) = (r_q, r_{q+1}, r_{q+2})$, där $p < q \leq m^3$. Visar att $p = 0$. Ur detta följer nämnligen att $r_q = r_p = 0$ och m delar talet x_q.

Gör ett motantagande, att $p \geq 1$. Enligt definitionen

$$r_{p-1} \equiv r_{p+2} - r_p r_{p+1} \pmod m$$

och

$$r_{q-1} \equiv r_{p+2} - r_q r_{q+1} \pmod m.$$

Eftersom dessutom $r_p = r_q, r_{p+1} = r_{q+1}$ och $r_{p+2} = r_{q+2}$, är $r_{p-1} = r_{q-1}$. Men nu är $(r_{p-1}, r_p, r_{p+1}) = (r_{q-1}, r_q, r_{q+1})$, vilket är en motsägelse med valet av talet p. Alltså är motantagandet falskt och det måste gälla att $p = 0$, och påståendet är bevisat. $\square$

15. Definierar talföljden $a_1, a_2, \ldots$ genom att sätta $a_1 = 2, a_2 = 500$ och $a_3 = 1000$ samt

$$\frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{a_{n+1} + a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}},$$

för $n = 2, 3, 4, \ldots$. Visa att alla element i talföljden är positiva heltal och att 2^{2000} delar talet a_{2000}.

15. uppgiftens lösning: Med stöd av rekursion är $a_{n+2}a_{n-1} = a_{n+1}^2$, när $n = 2, 3, 4, \ldots$. Inget element i talföljden kan vara noll, och kan alltså då skriva

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n-1}},$$

för $n = 2, 3, 4, \ldots$. Alltså är uttrycket $\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n-1}}$ konstant. Eftersom

$$\frac{a_3}{a_1 a_2} = 2,$$

gäller att $\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n-1}} = 2$, för $n = 2, 3, 4, \ldots$. Eftersom $a_{n+2} = 2a_{n+1}a_n$, är a_{n+2} ett jämnt heltal för varje positivt heltal n. Vidare är $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 2a_n$, och även delmängden $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$ är ett jämnt heltal. Eftersom

$$a_{2000} = \frac{a_{2000}}{a_{1999}} \cdot \frac{a_{1999}}{a_{1998}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1,$$

där alla bråktal är jämna heltal, och $a_1 = 2$, är a_{2000} delbart med talet 2^{2000}.

16. Tre lådor har var och en iallafall en marmorkula. I varje drag väljs två av lådorna och den ena lådans marmorkulaantal dubbleras genom att tillräckligt med kulor tas från den andra lådan. Är det alltid möjligt att med ett ändligt antal drag tömma någon av lådorna?

16. uppgiftens lösning: Antar att marmorkulaantalet i den första lådan är a, i den andra b och i den tredje c, samt att $a \leq b \leq c$. Skriver $b = qa + r$ och presenterar q som ett binärt tal:

$$q = m_0 + 2m_1 + 2^2 m_2 + \cdots + 2^k m_k,$$

där varje $m_i \in \{0, 1\}$ och $m_k = 1$. För varje $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ lägger vi till $2^i a$ marmorkulor i den första lådan. Om $m_i = 1$, tar vi dessa kulor från den andra lådan, och om $m_i = 0$ tar vi dem från den tredje lådan. Härmed kommer man som mest att från den tredje lådan att ta $(2^k - 1)a < qa \leq b \leq c$ marmorkulor, och från den andra lådan exakt qa marmorkulor. Efter detta drag finns det kvar i den andra lådan $r < a$ marmorkulor, alltså sjunker antalet marmorkulor i den låda som har färst antal kulor efter detta drag. Genom att upprepa dragen kan man alltså helt och hållet tömma någon av lådorna.

17. Låt ABC vara en likbent triangel där $AB = AC$. Låt D vara en sådan punkt på sträckan BC att $BD = 2DC$ och låt punkten P vara på sträckan AD så att $\angle BAC = \angle BPD$. Visa att

$$\angle BAC = 2\angle DPC.$$

17. uppgiftens lösning: Sätter punkten X på sträckan BP så att $BX = AP$. Då är $\angle ABX = \angle ABP = \angle DPB - \angle PAB = \angle CAB - \angle PAB = \angle CAP$. Eftersom $AB = AC$ och $BX = AP$ gäller det att $\triangle ABX \cong \triangle CAP$. Därmed $[ABX] = [CAP]$ och $\angle DPC = 180° - \angle CAP = 180° - \angle AXB = \angle PXA$.

Eftersom $BD = 2CD$, är avståndet från punkten B till linjen AD två gånger avståndet från punkten C till linjen AD. Alltså är $[ABP] = 2[CAP]$, och därmed är $[ABX] + [AXP] = 2[ABX]$. Alltså $[AXP] = [ABX]$ och $XP = BX = AP$. Därmed är $\angle PXA = \angle XAP$ och $\angle BAC = \angle BPD = \angle PXA + \angle XAP = 2\angle PXA = 2\angle DPC$, vilket var det som skulle visas.

18. Bestäm alla heltalspar (x, y), för vilka $2xy$ är kvadraten av ett heltal och $x^2 + y^2$ är ett primtal.

18. uppgiftens lösning: Observerar först att om (x, y) är en lösning, är även $(-x, -y)$ en lösning. Vidare måste $x \neq 0 \neq y$. Vi kan alltså fokusera på att leta efter positiva tal x och y.

Skriver $2xy = a^2$ och $x^2 + y^2 = p$

Observerar först att $p + a^2 = (x + y)^2$, alltså att $p = (x + y - a)(x + y + a)$. Eftersom p är ett primtal och $x + y + a > x + y - a$, måste det gälla att $x + y + a = p$ och $x + y - a = 1$. Alltså är $2(x + y) = p + 1$. Vi får ekvationen

$$2(x + y) = x^2 + y^2 + 1,$$

som kan omformas till

$$a = (x - 1)^2 + (y - 1)^2.$$

Det måste alltså gälla att $x = 1$ och $y = 2$ eller $x = 2$ och $y = 1$. (Ingendera kan vara noll, som redan tidigare noterats.)

Dessa val uppfyller helt klart de ställda kraven, $2xy = 4$ är en kvadrat och $x^2 + y^2 = 5$ är ett primtal.

Alla lösningar är alltså $(-1, -2), (1, 2)$ samt $(2, 1)$ och $(-2, -1)$.

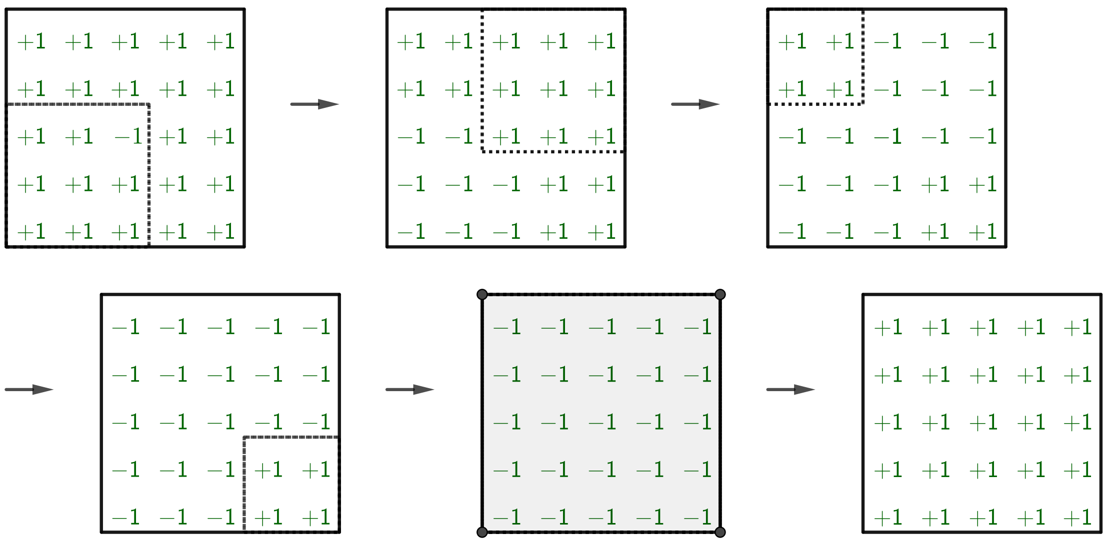
19. I en av rutorna i ett 5×5-rutfält skriver vi talet -1 och i resten av rutorna talet $+1$. I ett drag ändrar vi förtecknet för alla tal i en $2 \times 2-, 3 \times 3-, 4 \times 4-$ eller 5×5-kvadrat. I vilken ruta måste talet -1 vara, för att det ska vara möjligt att med dessa drag få alla tal i kvadraten att bli $+1$?

19. uppgiftens lösning: **Svar:** Talet -1 måste finnas i kvadratens mittersta ruta.

Färglägger de två kolumnerna längst till vänster svarta, den mittersta kolumnen vit och de två kolumnerna längst till höger svarta. Nu täcker en $n \times n$-kvadrat, där $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ alltid ett jämnt antal svarta rutor. Om talet -1 är från början i en svart ruta, finns det efter varje drag kvar ett udda antal rutor med talet -1. Det blir alltså aldrig vid något tillfälle noll stycken rutor med talet -1. Därmed kan talet -1 inte från början finnas i en svart ruta, om vi efter flera drag vill få alla tal i kvadraten att bli -1.

Gör nu en motsvarande färgläggning horisontellt: Färglägger de två översta rutorna svarta, den mittersta vit och de två nedersta svarta. På motsvarande sätt som tidigare kan man härleda att talet -1 inte kan vara i en svart ruta. Alltså, om det överhuvudtaget finns en lösning till problemet, så måste talet -1 finnas i den mittersta rutan, på basis av detta och det föregående stycket.

Visar ännu att det är möjligt att, genom att repetera de beskrivna dragen, förvandla alla tal i kvadraten till $+1$, när talet -1 från början finns i den mittersta rutan. Detta kan göras på följande sätt (se Figur 3): Ändrar först tecknen i en 3×3-kvadrat i nedre vänstra hörnet. Därefter byter vi tecknen i en 3×3-kvadrat i övre högra hörnet. Sedan byter vi tecknen i en 2×2-kvadrat i övre vänstra hörnet och i en 2×2-kvadrat i nedre högra hörnet. Till slut byter vi förtecknen på alla tal i 5×5-kvadraten till $+1$.



Figur 3: Ändrandet av talens förtecken