Matrices y Determinantes

Matrices y Determinantes

Ricardo Mateos

Cristina Gual
Josu Beobide

Urrutiko Hezkuntzarako Euskal Institutua
Instituto Vasco de Eduación a Distancia

Curso 2020-2021

Teoria y ejercicios de matrices de Matemáticas II.

Índice

Capítulo 1

Matrices

1.1 ▲ Definiciones.

Una *matriz de dimensión* $m \times n$ es un conjunto de números ordenados en m filas y n columnas de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cada elemento genérico de la matriz se designa por a_{ij}, donde i es el número de fila que ocupa y j es el número de fila.

Igualdad de matrices.

Dos matrices de la misma dimensión $A_{mxn} = (a_{ij})$ y $B_{mxn} = (b_{ij})$ son iguales si $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$

Ejemplo 1.1.1

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, escribir su dimensión y los elementos a_{12}, a_{22} y a_{31}

Solución. La matriz tiene 3 filas y 2 columnas, luego su dimensión es $3x2$.

$a_{12} = 1$, $a_{22} = -3$ y $a_{31} = 3$

Ejemplo 1.1.2

Hallar los valores de x e y para que las matrices $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & x-2 \\ y & x-1 \end{pmatrix}$ sean iguales.

Solución. Para que sean iguales cada elemento de la primera matriz tiene que ser igual a su correspondiente de la segunda.

Por lo tanto, $\begin{cases} x = 3 \\ 1 = x - 2 \\ 2 = y \\ y = x - 1 \end{cases}$

Resolviendo tenemos que $x = 3$ e $y = 1$.

1.2▲ Tipos de matrices.

a **Matriz fila**: es la matriz que solo tiene una fila A_{1n}.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b **Matriz columna**: es la matriz que solo tiene una fila A_{m1}

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

c **Matriz nula**: es la matriz en la que todos sus elementos son nulos.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d **Matriz rectangular**: es la matriz que tiene distinto número de filas que de columnas.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

e **Matriz cuadrada**: es la matriz que tiene igual número de filas que de columnas (m=n). En este caso podemos decir que la matriz es de orden n.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

En una matriz cuadrada definimos:

(i) **Diagonal principal**: Son los elementos cuyo número de fila coincide con el de columna: a_{ii}

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) **Diagonal secundaria**: Son todos los elementos tales que $i + j = n + 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Dentro de las matrices cuadradas podemos distinguir las siguientes:

Matrices triangular superior: Son las que todos sus elementos por debajo de la diagonal principal son cero.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Matrices triangular inferior: Son las que todos sus elementos por encima de la diagonal principal son cero.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Matrices diagonal: Son las que todos sus elementos fuera de la diagonal principal son cero.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Matrices escalar: Son las que todos sus elementos de la diagonal principal son iguales y el resto cero.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Matrices identidad: Son las que todos sus elementos de la diagonal principal son 1 y el resto cero.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz identidad se llama I_n, siendo n el orden de la matriz.

1.3▲ Operaciones con matrices

Definición 1.3.1 Suma.

Dadas dos matrices de la misma dimensión $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ llamamos suma a otra matriz $C = (c_{ij})$ definida por

$$(c_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Y cumple las siguientes propiedades

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + 0 = A$
4. $A - A = 0$

Ejemplo 1.3.2

Sumar $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Producto por un número real.

Dados un número real $k \in \mathbb{R}$ y una matriz $A = (a_{ij})$ se define el producto de $k \cdot A$ de la siguiente manera:

$$k \cdot A = k \cdot (a_{ij}) = (k \cdot a_{ij})$$

Ejemplo 1.3.3

Realizar la siguiente operación:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices.

Dos matrices A y B se pueden multiplicar si el número de columnas de A es igual al número de filas de B, en tal caso, se define la multiplicación de la siguiente manera

$$\underbrace{A}_{m*n} \cdot \underbrace{B}_{n*p} = \underbrace{C}_{m*p}$$

Para calcular el elemento c_{ij} hay que utilizar la fila i de A y la columna j de B.

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ a_{j3} \\ \cdots \\ a_{jn} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot a_{j1} + a_{i2} \cdot a_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot a_{nj}$$

El producto de matrices no es conmutativo $A \cdot B \neq B \cdot A$

Ejemplo 1.3.4

Realizar el siguiente producto $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

Solución. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 10 + 1\cdot 5 & 2\cdot 5 + 1\cdot 5 & 2\cdot 5 + 1\cdot(-2) \\ 1\cdot 10 + 1\cdot 5 & 1\cdot 5 + 1\cdot 5 & 1\cdot 5 + 1\cdot(-2) \\ 3\cdot 10 + 2\cdot 5 & 3\cdot 5 + 2\cdot 5 & 3\cdot 5 + 2\cdot(-2) \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 25 & 15 & 8 \\ 15 & 10 & 3 \\ 40 & 25 & 11 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1.3.5

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular la matriz $(A - I)^2$

Solución.

Primero calculamos $A{-}I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ahora calculamos $(A{-}I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1.3.6

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a Demostrar que $A^2 = 2A - I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b Expresar A^3 y A^4 en función de A.

c Calcular A^{100}

Solución.

a Calculamos A^2
$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ahora calculamos $2A - I = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Como vemos son iguales.

b $A^3 = A^2 \cdot A = (2A - I) \cdot A = 2A^2 - I \cdot A = 2A^2 - A = 2(2A - I) - A = 3A - 2I$

$A^4 = A^3 \cdot A = (3A - 2I) \cdot A = 3A^2 - 2I \cdot A = 3(2A - I) - 2A = 4A - 3I$

c $A^{100} = 100A - 99I = 100\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 99\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -100 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1.3.7

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, se pide:

Determínese el valor o los valores del parámetro a para que se verifique que $A^2 + 2A + I = O$, siendo I la matriz unidad y O la matriz nula, ambas de orden 3.

Solución. Calculamos A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $A^2 + 2A + I$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + 2a + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando a la matriz nula:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+2a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego: $a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

Ejemplo 1.3.8

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a Encuentre el valor o los valores de x de forma que $B^2 = A$

b Determine x para que $A + B + C = 3I_2$

Solución.

a Hallamos B^2.

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix}$$

Igualamos las dos matrices :

$$\begin{pmatrix} x^2+1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De aquí obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 2 \\ x = 1 \\ x = 1 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

b Hallamos $A + B + C$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 3 \end{pmatrix}$$

Igualando esta matriz a $3I_2$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3 \\ x = 0 \\ x = 0 \\ 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Las entradas están ordenadas por palabras.