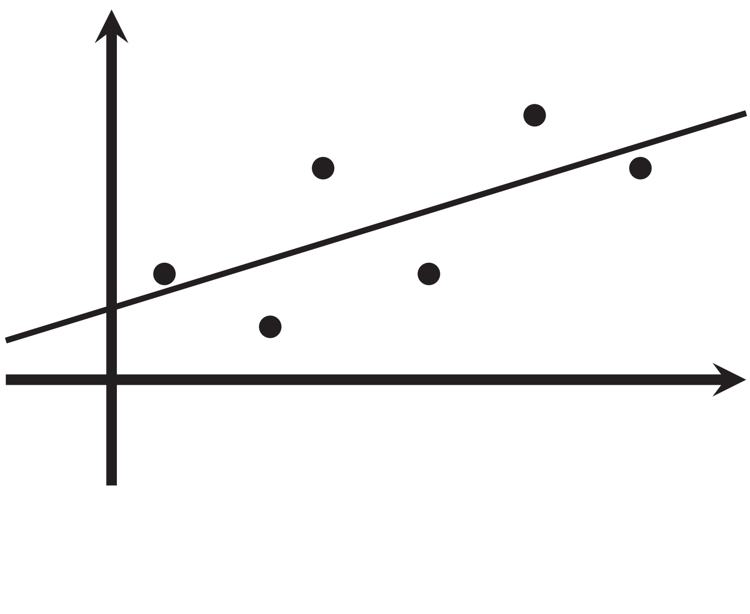
matematik

Mikkel Stouby Petersen

# Matematik i grundforløbet

## Teorihæfte



2024

Navn: ______________________________________________

**Matematik i grundforløbet – Teorihæfte**
Mikkel Stouby Petersen
5. udgave, 1. oplag 2024

Teksten er sat med LaTeX ved brug af *memoir*-klassen.
Skrifttype: Kp-fonts, 10 pt.
Alle figurer er lavet af forfatteren med ti*k*Z.
Hæftets omslag bør trykkes på blåt papir.

 Kommentarer eller forslag til forbedring af materialet kan sendes til msp@aarhustech.dk.

De videoer, der findes i materialet, kan alle findes på

https://www.youtube.com/matematikvideoer

# Indhold


**Introduktion til hæftet** ii

**1 Variabelsammenhænge** 1
1.1 Koordinatsystemet . . . 4
1.2 Lineære sammenhænge . . . 6
1.3 Proportionalitet . . . 8
1.4 Dine egne ord . . . 9

**2 Funktioner** 10
2.1 Lineære funktioner . . . 11
2.2 Forskrift ud fra to punkter . . . 13
2.3 Definitions- og værdimængde . . . 16
2.4 Regression . . . 17
2.5 Dine egne ord . . . 21

**3 Ligningsløsning** 22
3.1 Løsning af ligninger . . . 22
3.2 Isolering af variabler . . . 25
3.3 To ligninger med to ubekendte . . . 26
3.4 Dine egne ord . . . 30

**4 Andengradspolynomier** 31
4.1 Andengradspolynomiets graf . . . 31
4.2 Andengradsligninger . . . 33
4.3 Løsningsformlen . . . 34
4.4 Dine egne ord . . . 38

**5 Uligheder** 39
5.1 Dobbeltuligheder . . . 41

**6 Numerisk værdi** 43
6.1 Ligninger med numerisk værdi . . . 43

# Introduktion til hæftet

Dette hæfte er udviklet til at blive brugt i matematikundervisningen på grundforløbet på AARHUS GYMNASIUM og TEKNISK GYMNASIUM, Skanderborg.
Hæftet indeholder teori til forløb om lineære sammenhænge og lineære funktioner, ligningsløsning samt andengradspolynomier. Desuden indeholder det to kapitler med supplerende materiale om uligheder og ligninger med numerisk værdi.
Selvom hæftet er skrevet til det første matematikforløb på gymnasiet, er det ikke skrevet til nogen, der ingenting ved. Hensigten er at bruge den store viden, som eleverne har med sig fra folkeskolen som et fundament. Samtidigt er det dog hensigten med hæftet, at eleverne skal genformulere noget af det kendte i et nyt sprog, som i højere grad lægger vægt på brug af variabler, funktioner og ræsonnement.
Hæftet ledsages af et opgavehæfte med opgaver til alle hæftets kapitler. Opgavehæftet indledes med et kapitel om de algebraiske værktøjer, som er helt nødvendige for at kunne arbejde med og i matematik. Det er hensigten at eleverne bruger dette kapitel som et opslagsværk, og at de tilhørende opgaver inddrages løbende i undervisningen.

## Hæftets opbygning

Hæftet består af kapitler, som hver dækker en del af stoffet. Efter hvert af de fire første kapitler følger et ark med titlen „Dine egne ord“. Her er det meningen, at eleven selv skriver noter i hæftet med udgangspunkt i nøgleord fra kapitlet.
Undervejs i kapitlerne er der små øvelser. Det er ikke nødvendigt at lave alle øvelser, men formålet er, at eleven får lejlighed til at stoppe op i læsningen og reflektere over nye begreber.
I flere udledninger og eksempler er der indsat blanke linjer i stedet for forklarende tekst, og her er det meningen, at eleven selv skal fylde linjerne ud. Meningen er, at eleven skal øve sig i at læse aktivt og styrke sin symbol- og ræsonnementskompetence ved at skulle overveje og forklare de enkelte trin.

# 1 Variabelsammenhænge

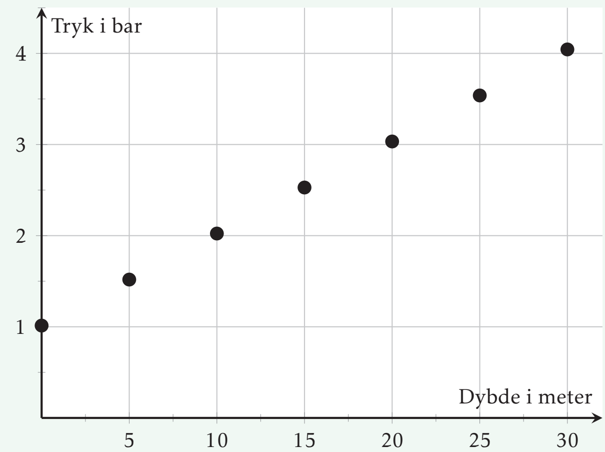
I biologi studerer man levende organismer, i historie studerer man historiske begivenheders årsager og konsekvenser, og i dansk beskæftiger man sig med dansk sprog og litteratur. Men hvad studerer man i matematik? Det første svar kunne måske være tal, men tallene er jo ikke så interessante i sig selv. Matematik er først og fremmest et fag, hvor man studerer sammenhænge og mønstre. De kan involvere tal eller geometriske figurer, men det behøver de ikke nødvendigvis at gøre. I dette kapitel skal vi se på nogle eksempler på sammenhænge, man kan studere i matematik, og i første omgang vil de alle være med tal.

**Eksempel 1:** Når en dykker bevæger sig ned under vandoverfladen, vil trykket på kroppen stige. Det skyldes vægten af alt det vand, der er over dykkeren.
Hvis dykkeren medbringer udstyr, så han kan måle både dybden og trykket, kan han få en tabel som denne:

| Dybde (i meter) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tryk (i bar) | 1,013 | 1,518 | 2,023 | 2,528 | 3,033 | 3,538 | 4,043 |

**Tabel 1:** Sammenhæng mellem dybde og tryk.

Her kan vi altså se, at trykket ændrer sig, når dybden ændres. Det var jo præcis det, vi forventede. For at gøre sammenhængen tydeligere kan man indtegne de opsamlede data i et koordinatsystem, hvor man markerer dybden langs den vandrette akse og trykket langs den lodrette akse.




**Figur 1:** Dykkerens data indtegnet i et koordinatsystem.

I sådan et diagram bliver det meget tydeligt, at trykket stiger med dybden, og diagrammet kan endda bruges til at opdage et nyt mønster, som ikke var så tydeligt, da vi bare havde tallene. Det lader nemlig til, at alle datapunkterne ligger på den samme linje, og det kan jo bruges til at forudsige trykket ved andre dybder. Det er dog ikke let at aflæse det helt præcist.
Vi vil i matematik sige, at trykket **afhænger** af dybden. Dybden og trykket er størrelser, der ændrer sig (varierer), og vi kalder dem derfor **variabler**. Vi vil her sige, at dybden er **den uafhængige variabel**, for den forestiller vi os, at vi kan ændre frit, og trykket kalder vi **den afhængige variabel**.
Det mest almindelige vil være at give hver variabel sit eget bogstav. I fysik vil det være almindeligt at kalde trykket $p$ (for *pressure*) og dybden $d$.
Det viser sig, at man kan beregne trykket ud fra dybden ved hjælp af denne formel:

$$p = 0{,}101 \cdot d + 1{,}013$$

Denne måde at vise sammenhængen på har mange fordele, for nu kan vi jo udregne trykket til en hvilken som helst dybde uden at skulle aflæse i et diagram. På den måde kan vi få stor præcision.
Problemet er, at det ofte ikke er let at komme fra tabellen eller figuren til en formel. Nogle gange kan det faktisk være helt umuligt.

I eksempel 1 så vi, at den samme sammenhæng kan studeres på forskellige måder. Enten som **tabel**, **grafisk** eller som **formel**. Desuden kunne vi give en **sproglig beskrivelse**: „Trykket ved overfladen er 1,013 bar, og det stiger med 0,101 bar for hver meter.“ I matematik kalder vi disse måder for forskellig **repræsentationer**. Alle fire repræsentationer er vigtige, fordi de kan bruges til forskellige ting.

? **Øvelse 1:** Prøv at beskrive nogle fordele ved hver af de fire repræsentationer.

Et meget vigtigt redskab i matematikken er **symboler**. I matematikken er et symbol et tegn, som vi giver en særlig betydning. Det er symbolerne, der gør, at man kan opskrive formeludtryk, regnestykker og meget andet. I en matematisk tekst er symbolerne altid mindst lige så vigtige som teksten, og man må derfor aldrig bare læse hen over dem.
I formlen

$$p = 0{,}101 \cdot d + 1{,}013$$

indgår tre typer af symboler.

- **Bogstaverne** $p$ og $d$ er navne på variabler. Det er praktiske forkortelser, der gør udtrykket mere overskueligt, end hvis man havde brugt de lange navne. For at adskille dem fra bogstaverne i resten af teksten skriver vi dem med *kursiv*.
- **Tallene** 0,101 og 1,013 er vigtige konstanter. Hvis de ændres, så ændres hele sammenhængen.
- **De matematiske tegn** $=$ og $+$ fortæller, hvad vi skal gøre med de andre symboler, og hvordan alle symbolerne hænger sammen.

Den lille korte formel skal egentlig læses som „p er lig med nul komma et nul et gange d plus et komma nul et tre“, og den fortæller os altså helt præcist, hvordan vi kan beregne trykket, når vi kender dybden.

! **Bemærkning 1:** I udtryk som $a \cdot b$ er det almindeligt at udelade gangetegnet og blot skrive $ab$. Et udtryk som $0{,}101 \cdot d$ kan således skrives $0{,}101d$ i stedet. I resten af hæftet vil vi de fleste steder udelade gangetegn. Bemærk dog, at dette ikke er muligt mellem tal i udtryk som $12 \cdot 5$.

? **Øvelse 2:** Brug formlen til at bestemme trykket i 50 meters dybde.

! **Bemærkning 2:** I praktiske opgaver, hvor variablerne står for fysiske størrelser som hastighed, tryk og længde, er det ofte oplagt at give variablerne bestemte navne som $h$ for „højde“ eller $m$ for masse. I matematik studerer vi dog også sammenhænge helt generelt, og vi skal derfor også lære at kigge på sammenhænge, som ikke har nogen direkte forbindelse med virkeligheden. Det kan selvfølgelig virke tåbeligt, men meningen er, at vi ved at øve os på dem og kan lære noget om de sammenhænge, der har med virkeligheden at gøre. Når vi derfor ikke ved, hvad variablerne står for, er det almindeligt, at vi kalder den uafhængige variabel $x$ og den afhængige variabel $y$.

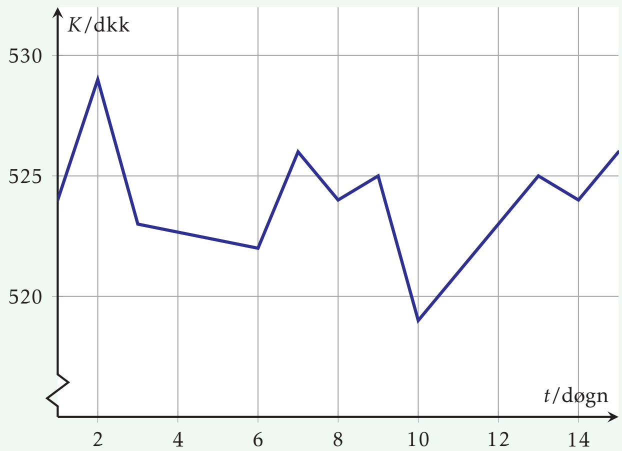
Formler er smarte, men det er desværre ikke altid muligt at finde en formel for enhver sammenhæng. Det viser det næste eksempel.

**Eksempel 2:** En aktie er en andel af et selskab, som sælges for at skaffe kapital til virksomheden. Investorer handler med aktier i håbet om at gøre en god handel ved at sælge aktierne dyrere, end de købte dem. Prisen på aktierne (kursen) svinger op og ned alt efter, hvor mange der ønsker at købe eller sælge aktien. Kursen ændres ved hver handel, men der kan kun handles aktier i hverdagene. Vi vil her se på, hvordan en bestemt aktiekurs ændres gennem marts 2017.
I tabel 2 vises sammenhængen mellem tiden $t$ målt i døgn og aktiekursen $K$ målt i kroner.

| $t$/døgn | 1 | 2 | 3 | 6 | 7 | 9 | 8 | 10 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K$/dkk | 524 | 529 | 523 | 522 | 526 | 524 | 525 | 519 | 525 | 524 | 526 |

**Tabel 2**

Denne sammenhæng kan også repræsenteres grafisk i et diagram, hvor vi har tegnet en graf ved at forbinde punkterne fra tabellen med linjer.




**Figur 2**

Denne sammenhæng er meget mere kompliceret end den, vi så i forrige eksempel. Der er nemlig rigtig mange ting, der påvirker aktiekurserne. Vi kan hverken bruge grafen eller tabellen til at forudsige helt præcist, hvordan aktiekursen vil udvikle sig i fremtiden. Det er derfor også helt umuligt at finde en formel, som kan bruges til at bestemme $K$, hvis man kender $t$. Hvis man kunne, ville man hurtigt kunne blive rig på aktiemarkedet.
Det er heller ikke let at give en mere præcis sproglig beskrivelse end, at „kursen har i perioden varieret mellem 519,5 kr. og 529 kr.“

?

**Øvelse 3:** Find mindst ét eksempel på en sammenhæng mellem to variabler, og svar på følgende spørgsmål:

a) Hvad vil du kalde dine variabler?

b) Hvilke enheder skal dine variabler måles i?

c) Hvilken variabel er den uafhængige, og hvilken er den afhængige?

d) Kan sammenhængen repræsenteres ved en tabel? Grafisk? Som formel? Ved en sproglig beskrivelse?

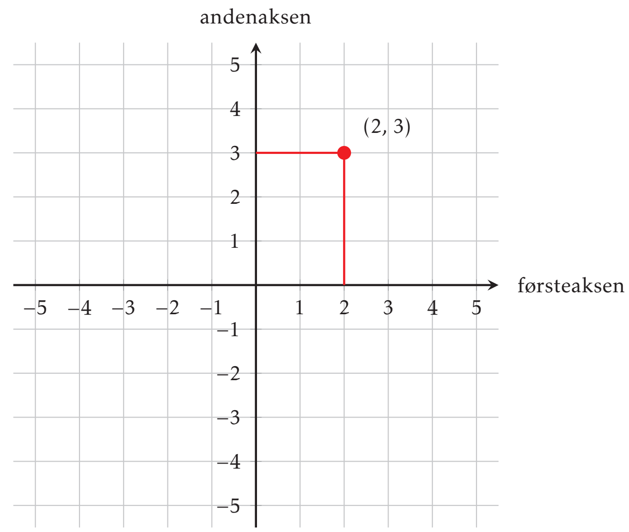
## 1.1 Koordinatsystemet

Når man skal repræsentere sammenhængen mellem to eller flere variabler, er koordinatsystemet et meget vigtigt redskab. Vi arbejder normalt med et koordinatsystem med to akser, som står vinkelret på hinanden. Se figur 3. Den vandrette akse kaldes **førsteaksen**, og den lodrette akse kaldes **andenaksen**. Se figur 3.

!

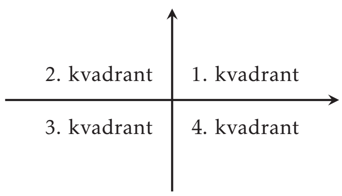
**Bemærkning 3:** Ofte kaldes førsteaksen for $x$-aksen, mens andenaksen kaldes $y$-aksen, men det kan jo være, at det, der markeres langs akserne, ikke hedder $x$ og $y$. I eksempel 2 var det jo mere oplagt at kalde akserne for $t$-aksen og $K$-aksen. For at undgå forvirring er det altså nyttigt at have navnene første- og andenaksen. Et koordinatsystem som det, der blev brugt i eksempel 2, kaldes normalt et $(t, K)$-koordinatsystem.

I et koordinatsystem kan punkter afsættes eller indtegnes ved hjælp af deres **koordinater**. For at indtegne punktet med koordinaterne $(2, 3)$ går vi 2 enheder ud ad førsteaksen og 3 enheder op ad andenaksen. Vi kalder her 2 for **førstekoordinaten** og 3 for **andenkoordinaten**.




**Figur 3:** Et almindeligt koordinatsystem med punktet $(2, 3)$ markeret.

Koordinatsystemet består af fire **kvadranter** som vist på figur 4.




**Figur 4**

?

**Øvelse 4:** Første kvadrant består af de punkter, hvor både første- og andenkoordinaten er positiv. Anden kvadrant består af de punkter, hvor førstekoordinaten er negativ, mens andenkoordinaten er positiv. Hvilke betingelser opfylder punkterne i de to sidste kvadranter?

Når koordinatsystemer skal bruges til at illustrere sammenhænge, er det vigtigt med forklarende tekst på akserne, så man både ved, hvilken variabel, der er tale om, og hvilken enhed, den måles i. Det er jo ikke helt ligegyldigt, om vægten af et dyr måles i gram eller ton! Hvis vi har en variabel $h$, der måles i meter, kan man enten skrive „$h$ i meter" eller de lidt kortere varianter „$h$/m" eller „$h$ [m]".
På dansk bruges komma i decimaltal, og det giver selvfølgelig noget konflikt, når koordinaterne til et punkt er decimaltal. Se bare på (2,2, 2,2). For at undgå det bruger man her semikolon til at adskille koordinaterne, så det i stedet bliver (2,2; 2,2).

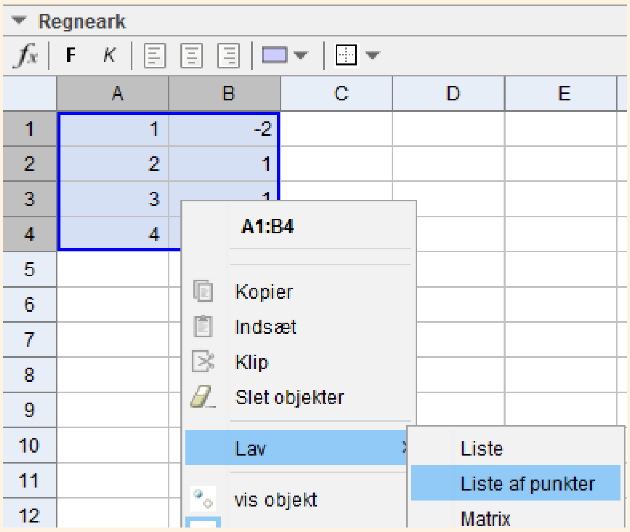
**Boks 1: Punkter i Geogebra**

I Geogebra er det meget let at indsætte et enkelt punkt. Enten bruges værktøjet 

eller også kan man skrive således i inputfeltet:

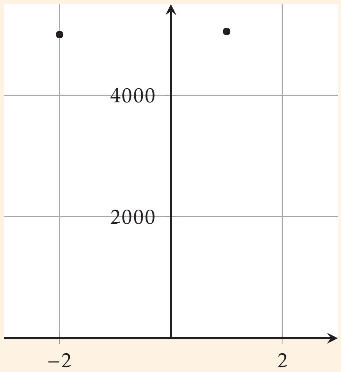
```
A=(2.1,3.5)
```

Bemærk, at programmet bruger punktum som decimalseperator.
Hvis du ønsker at indsætte mange punkter, kan det gøres ved hjælp af det indbyggede regneark, som man kan få frem ved at vælge **Vis** og derefter **Regneark**. I regnearket kan du lave en tabel med førstekoordinaterne i venstre kolonne og andenkoordinaterne i højre kolonne. Marker tabellen. Højreklik og vælg **Lav** og derefter **Liste af punkter**.



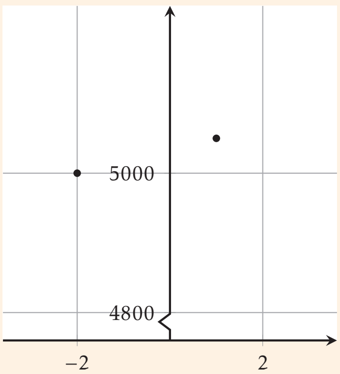
**Boks 2: Specielle akser**

Koordinatsystemer kan også se ud på andre måder. Hvis vi skal indsætte punkterne $(-2, 5000)$ og $(1, 5050)$ i et almindeligt koordinatsystem, kan det se sådan ud:

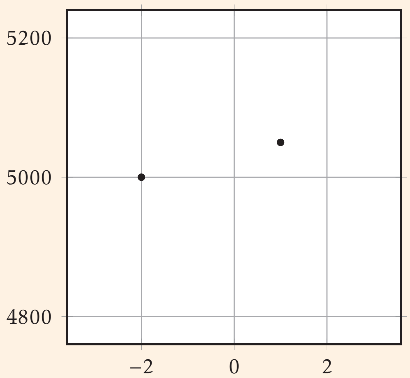



**Figur 5**

Her er det meste af pladsen brugt på ingenting, og det er svært at se, at der er forskel på $y$-værdierne. Derfor bruger man af og til koordinatsystemer som vist nedenfor:




**Figur 6**




**Figur 7**

På figur 6 er en del af $y$-aksen fjernet. Sådanne koordinatsystemer bruges ofte i medierne, og det er vigtigt at være opmærksom på, at de kan bruges til at få meget små ændringer til at se meget store ud. På figur 7 er akserne placeret i kanten af figuren i stedet for at krydse hinanden. Sådanne koordinatsystemer er meget brugt i tekniske og videnskabelige tekster.

## 1.2 Lineære sammenhænge

Se på eksempel 1 igen. På figur 1 kan man se, at punkterne alle sammen ser ud til at ligge på den samme rette linje. Sådan en sammenhæng siges at være lineær. Dem ser vi nærmere på her.

**Definition 1:** En sammenhæng mellem to variabler $x$ og $y$ kaldes **lineær**, hvis den kan beskrives ved en formel på formen

$$y = ax + b$$

hvor $a$ og $b$ er konstanter.

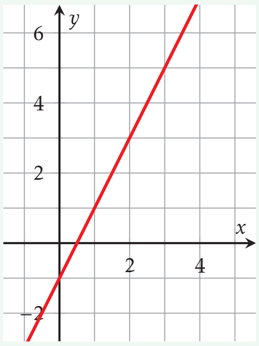
**Eksempel 3:** Vi ser her på den lineære sammenhæng givet ved

$$y = 2x - 1$$

Vi kan repræsentere sammenhængen både ved en tabel og en graf:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| -1 | -3 |
| 0 | -1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 5 |

**Tabel 3**




**Figur 8**

Ganske som ventet danner grafen en ret linje i koordinatsystemet.
Vi kan se, at grafen krydser $y$-aksen i punktet $(0, -1)$, og i tabellen kan vi også se, at når $x$ er 0, så er $y$ lig $-1$.
Vi kan også se af både tabellen og grafen, at når $x$ vokser med 1, vokser $y$ altid med 2.
Vi siger, at linjen har **hældningen** 2.

Vi generaliserer vores observationer fra eksemplet til disse to regler for grafen for en lineær sammenhæng givet ved $y = ax + b$:

- Den skærer $y$-aksen ved $b$.
- Den har hældningen $a$.

På grund af den sidste regel kalder vi $a$ for **hældningskoefficienten**.

**Eksempel 4:** I eksempel 1 så formlen for sammenhængen sådan ud:

$$p = 0{,}101d + 1{,}013$$

Vi kan se, at det er en lineær sammenhæng, for $d$ og $p$ er variabler, og 0,101 og 1,013 er konstanter. Vi kan altså sige, at trykket afhænger lineært af dybden. Hældningskoefficienten er 0,101, og det betyder, at trykket stiger med 0,101 bar, hver gang dybden øges med 1 m.
Konstanten 1,013 betyder, at trykket ved havoverfladen er 1,013 bar.

Man kan også bruge disse observationer til at opstille en formel for en lineær sammenhæng ud fra givne oplysninger.

**Eksempel 5 (Fra Folkeskolens afgangsprøve, 2016):** Hos en cykeludlejer koster det 12 euro pr. døgn at leje en cykel. Desuden koster det et fast beløb på 5 euro at leje en cykelhjelm i hele udlejningsperioden.
Vi kunne godt tænke os at opstille en formel for sammenhængen mellem antal døgn og prisen for at leje en cykel og en cykelhjelm.
Først finder vi nogle passende navne til variablerne. Tiden kalder vi for $t$, og den vil vi måle i døgn. Den samlede pris kalder vi for $p$, og den vil vi måle i euro.
Vi kan se, at prisen stiger med et fast beløb (12 euro) hver døgn, så der må være en

lineær sammenhæng mellem $p$ og $t$.
Hældningskoefficienten er netop 12 euro, da det er det prisen stiger med pr. døgn. Uanset hvor få dage man lejer cyklen i, skal man altid betale 5 euro for en cykelhjelm. Vi kan altså konkludere, at sammenhængen kan skrives på formen

$$p = 12t + 5$$

Dog er det nok ret usandsynligt, at nogen vil betale de 5 euro for at leje en cykel i 0 døgn.

## 1.3 Proportionalitet

En bestemt slags lineære sammenhænge fortjener at blive fremhævet. Dels fordi man møder dem hele tide, og dels fordi de viser sig at have mange spændende egenskaber.

**Definition 2:** To variabler $x$ og $y$ siges at være **proportionale**, hvis sammenhængen mellem dem kan beskrives ved en ligning på formen

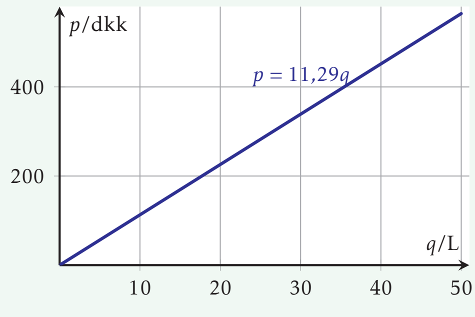
$$y = ax$$

hvor $a$ er en konstant. Konstanten $a$ kaldes **proportionalitetskonstanten**.

En proportionalitet er naturligvis bare en lineær sammenhæng med $b = 0$, så grafen bliver en linje gennem $(0,0)$. Proportionalitetskonstanten angiver hældningen af linjen.

**Eksempel 6:** På en tankstation koster én liter benzin 11,29 kr. Det betyder, at hvis $q$ angiver mængden af benzin i liter, og $p$ angiver prisen i kroner, kan sammenhængen skrives på formen

$$p = 11{,}29q$$




**Figur 9:** Figuren viser grafen for sammenhængen mellem mængden af benzin $q$ og prisen $p$.

Her er prisen altså proportional med mængden af bezin, og proportionalitetskonstanten er 11,29.

**Øvelse 5:** Forsøg selv at finde på eksempler på lineære sammenhænge. Er nogen af dem proportionaliteter?

## 1.4 Dine egne ord

Sammenhæng

Variabel

Repræsentation

Symbol

Koordinatsystem

Lineær sammenhæng

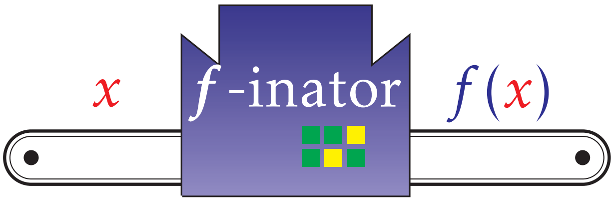
Proportionalitet

# 2 Funktioner

I eksempel 1 kan man slå op i tabellen og se, at i 5 meters dybde er trykket 1,519 bar, mens det i 15 meters dybde er 2,530 bar. I formelsprog kan vi sige, at $p = 1{,}519$, når $d = 5$, og $p = 2{,}530$, når $d = 15$. Det er oplagt, at det ville være lettere, hvis man havde et symbol, der betød „trykket ved dybden $d$". Det symbol, man bruger her, er $p(d)$, og det skal læses som „$p$ af $d$". Med denne notation kan vi skrive tabelopslagene mere kort som $p(5) = 1{,}519$ og $p(15) = 2{,}530$.

Når man bruger denne notation, kalder man det normalt ikke bare for en sammenhæng. Man siger i stedet, at $p$ er en **funktion** af $d$.

En funktion kan man også tænke på som en maskine $f$, der laver den uafhængige variabel $x$ om til **funktionsværdien** $f(x)$ ved hjælp af en fast regel.




**Figur 10**

**Eksempel 7:** En funktion $f$ er beskrevet ved denne regel:

*Man får $f(x)$ ved at lægge 2 til $x$.*

Ud fra denne regel kan man beregne $f(1)$ ved at lægge 2 til 1:

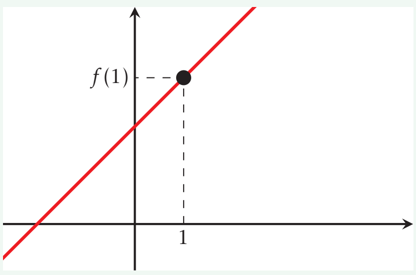
$$1 + 2 = 3$$

Det vil altså sige, at $f(1) = 3$.

Vi kan også bestemme en generel formel for $f(x)$:

$$f(x) = x + 2$$

Sådan en formel kaldes en **forskrift**, og den gør det ofte meget let at bestemme funktionsværdier. Præcis som for variabelsammenhænge kan funktioner også repræsenteres ved en **graf**. På grafen kan funktionsværdier aflæses direkte. Se figur 11 som viser grafen for $f$.




**Figur 11**

I eksemplet ovenfor kan forskriften ikke kun bruges til at sættes tal ind i. Man kan også sætte variabler ind:

$$f(a) = a + 2$$
$$f(x^2) = x^2 + 2$$
$$f(z-3) = (z-3) + 2 = z - 1$$

Hvis vi sætter variabler ind, er det selvfølgelig ikke sikkert, at vi får et tal ud, men det gør man, hvis variablen så senere erstattes af et tal.

**Øvelse 6:** Tag udgangspunkt i funktionen givet ved $h(x) = -3x + 7$. Bestem værdien af $h(1)$, $h(-1)$ samt $h(a+b)$.

## 2.1 Lineære funktioner

Da vi så på sammenhænge, definerede vi lineære sammenhænge, og det ligger derfor lige for at definere lineære funktioner:

**Definition 3:** En funktion $f$ kaldes **lineær**, hvis den har en forskrift på formen

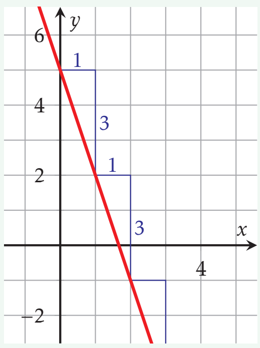
$$f(x) = ax + b$$

hvor $a$ og $b$ er konstanter. Konstanten $a$ kaldes **hældningskoefficienten**.

**Eksempel 8:** Vi ser på funktionen

$$f(x) = -3x + 5$$

Grafen for funktionen er tegnet på figur 12.




**Figur 12**

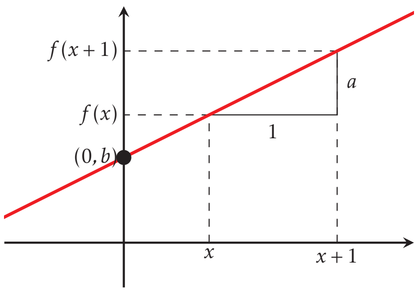
Her kan vi se betydningen af hældningskoefficienten, som i dette tilfælde er et negativt tal. Hver gang $x$ vokser med 1, falder $f(x)$ med 3.
Betydningen af konstanten 5 er også tydelig, for grafen går igennem punktet $(0,5)$.

**Øvelse 7:** Opstil forskriften for en lineær funktion, hvor grafen går gennem punktet $(0,-2)$ og har hældningen 4. Tjek ved at tegne grafen.

Vi har flere gange observeret betydningen af konstanterne $a$ og $b$ i forskriften, men lad os nu prøve uden tal. Antag, at $f$ er en lineær funktion med forskriften $f(x) = ax + b$. Vi udregner først $f(0)$:

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b$$

At $f(0) = b$ betyder, at grafen for $f$ altid går gennem punktet $(0,b)$, så $b$ altså er den værdi, hvor grafen skærer $y$-aksen.




**Figur 13**

Antag nu, at $x$ er et eller andet fast tal. Den funktionsværdi, der hører til $x$, hedder så $f(x)$. Hvis vi øger $x$ med 1, får vi værdien $x+1$. Her hedder funktionsværdien $f(x+1)$. Lad os så prøve at beregne, hvor meget funktionsværdien er blevet øget:

$$\begin{aligned} f(x+1)-f(x) &= a(x+1)+b-(ax+b) \\ &= a(x+1)+b-ax-b \\ &= ax+a+b-ax-b \\ &= a \end{aligned}$$

**Øvelse 8:** Skriv en forklaring på hver af de tomme linjer ovenfor.

Som man kan se på figur 13, betyder dette netop, at hvis $x$-værdien øges med 1, øges funktionsværdien med $a$. Det har vi allerede set i flere eksempler, men ved at bruge symbolerne har vi nu **bevist**, at det gælder for *alle* lineære funktioner, uanset hvilken $x$-værdi vi begynder ved. Nu *ved* vi, at $f(x)$ vokser med det samme tal uanset om $x$ stiger fra 1 til 2 eller fra 5001 til 5002.

**Eksempel 9:** Når det lyner og tordner, kan det være rart at vide, hvor langt man befinder sig fra det sted, hvor lynene dannes. Da lyden bevæger sig langsommere end lyset, kan man altid se lynet, før man hører braget. En tommelfingerregel siger, at man kan bestemme afstanden $s$ til lynet ved at tælle antallet af sekunder mellem lynet og braget. Hvis der går tre sekunder, så er lynet én kilometer væk.
Hvor hurtigt bevæger lyden fra lynet sig så? Vi dividerer for at finde svaret:

$$\frac{1000\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s}} \approx 333{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Det betyder så, at hvis $t$ er tiden i sekunder mellem lynet og braget, og $s$ er afstanden i meter, så gælder det, at

$$s(t) = 333{,}3 \cdot t$$

Det er altså en lineær funktion med hældningskoefficienten 333,3, for det er den værdi, afstanden øges med, når tiden øges med 1.
Faktisk passer denne tommelfingerregel meget godt, for lydens hastighed i luft er i virkeligheden 343 m/s ved 20 °C.

For enhver funktion $f$ kan man bestemme skæringspunktet med $y$-aksen ved at se på $f(0)$. For lineære funktioner kan det endda aflæses direkte i forskriften. Men hvad med skæringen med $x$-aksen?

På $x$-aksen er det $y$-værdierne, som er nul, så her er det funktionsværdien, der skal være nul. Det betyder, at vi skal løse denne ligning:

$$f(x) = 0$$

**Definition 4:** Lad $f$ være en funktion. Et tal $k$ er et **nulpunkt** for $f$, hvis det opfylder, at

$$f(k) = 0$$

Det vil sige, at $k$ er et nulpunkt for $f$, hvis det er en løsning til ligningen $f(x) = 0$.

**Eksempel 10:** Vi ser igen på funktionen $f$ fra eksempel 8 med forskriften $f(x) = -3x + 5$. Nulpunktet for $f$ kan findes ved at bestemme løsningen til denne ligning:

$$\begin{aligned} -3x + 5 &= 0 \\ -3x &= -5 && \text{Der trækkes 5 fra på begge sider.} \\ 3x &= 5 && \text{Der ganges med } -1 \text{ på begge sider.} \\ x &= \frac{5}{3} && \text{Der divideres med 3 på begge sider.} \end{aligned}$$

Det vil sige, at $x = \frac{5}{3}$ er nulpunktet for $f$.
Vi kan kontrollere resultatet ved at udregne $f(\frac{5}{3})$:

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = -3 \cdot \frac{5}{3} + 5 = -5 + 5 = 0$$

**Øvelse 9:** Tegn grafen for $f$ i Geogebra, og undersøg, om grafen for $f$ virkelig skærer $x$-aksen i punktet $(\frac{5}{3}, 0)$.

**Eksempel 11:** En forening har 1200 medlemmer, men hvert år mister den 60 medlemmer. Hvor lang tid går der, før der slet ikke er nogen medlemmer tilbage i foreningen? Vi bruger oplysningerne til at opstille en lineær funktion. Lad $M(t)$ betegne antallet af medlemmer efter $t$ år. Forskriften er så

$$M(t) = -60t + 1200$$

Hvis vi skal bestemme det tidspunkt, hvor der slet ikke er nogen medlemmer tilbage, så er det netop nulpunktet for funktionen, vi skal finde. Vi skal altså løse ligningen

$$-60t + 1200 = 0$$

Ligningen har løsningen $t =$ ___. Så efter ___ år har foreningen ingen medlemmer tilbage, hvis udviklingen fortsætter.

**Øvelse 10:** Udfyld de to tomme felter i eksempel 11 ovenfor.

## 2.2 Forskrift ud fra to punkter

Hvis bare man kender en lineær funktion to steder, kan man faktisk finde hele forskriften.

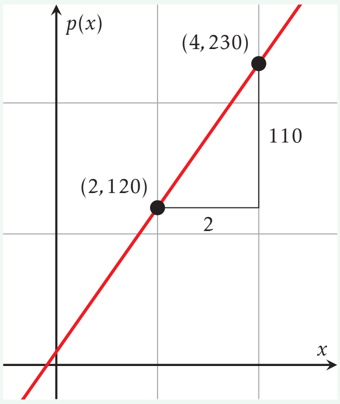
**Eksempel 12:** Hos Super Burger betaler man for de burgere, man bestiller, samt et fast gebyr for udbringning. Michael bestiller en dag to burgere og betaler 120 kr. til buddet. En anden dag bestiller han fire burgere og betaler 230 kr. Hvad koster én burger, og hvad er prisen for udbringning?

Lad $p(x)$ være den samlede pris for $x$ burgere. Da er $p$ en lineær funktion af $x$ med en forskrift på formen

$$p(x) = ax + b$$

hvor $a$ er prisen på én burger, og $b$ er prisen på udbringning.

Vores oplysninger svarer altså til, at $p(2) = 120$, og $p(4) = 230$. Lad os først regne ud hvor meget dyrere 4 burgere er end 2 burgere:




**Figur 14**

$$p(4) - p(2) = 230 - 120 = 110$$

På den anden side har vi

$$p(4) - p(2) = a \cdot 4 + b - (a \cdot 2 + b) = 4a + b - 2a - b = 2a$$

Vi har nu udregnet $p(4) - p(2)$ på to måder, så vi kan konkludere, at

$$2a = 110$$

Det betyder, at 110 kr. svarer til prisen på to burgere. Vi kan derfor finde $a$ som

$$a = \frac{110}{2} = 55$$

Nu ved vi, at burgerprisen er 55 kr. Vi mangler så at beregne udbringningsprisen $b$. Vi ved dog, at 2 burgere koster 120 kr. inklusiv udbringning. Det betyder, at

$$55 \cdot 2 + b = 120$$

Her kan vi trække $55 \cdot 2$ fra på begge sider af lighedstegnet, så vi får

$$b = 120 - 55 \cdot 2 = 10$$

Udbringningsprisen er altså 10 kr. Den endelige forskrift kommer til at se sådan ud:

$$p(x) = 55x + 10$$

I eksempel 12 bestemte vi forskriften for en lineær funktion ud fra to punkter på funktionens graf. Lad os så se på, hvordan man gør det helt generelt. Lad os sige, at vi har en lineær funktion på formen $f(x) = ax + b$, og at grafen for $f$ går gennem punkterne $(x_1, y_1)$ og $(x_2, y_2)$. Det betyder altså, at $f$ opfylder, at $f(x_1) = y_1$ og $f(x_2) = y_2$.

Vi kan nu udregne $f(x_2) - f(x_1)$ på to måder. Først får vi

$$f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1$$

Ved at bruge forskriften, får vi i stedet

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = ax_2 + b - ax_1 - b = a(x_2 - x_1)$$

Det vil sige, at

$$a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

Vi kan nu dividere med $x_2 - x_1$ for at bestemme hældningskoefficinten $a$:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Vi mangler nu at bestemme $b$. Vi ved, at $y_1 = f(x_1)$. Det betyder, at

$$ax_1 + b = y_1$$

Da vi kender $a$, kan vi trække leddet $ax_1$ fra på begge sider af lighedstegnet og isolere $b$:

$$b = y_1 - ax_1$$

Nu har vi altså to formler, som kan bruges til at finde $a$ og $b$. Vi har igen brugt variabler i stedet for tal for at få et resultat, som kan bruges helt generelt. Sådan en regel kaldes i matematikken for en **sætning**:

**Sætning 1:** Lad $(x_1, y_1)$ og $(x_2, y_2)$ være to punkter, og lad $f$ være en funktion på formen $f(x) = ax + b$, hvis graf går gennem de to punkter. Så gælder det, at

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

og

$$b = y_1 - ax_1$$

? **Øvelse 11:** Sætningen gælder faktisk ikke, hvis $x_1$ er lig med $x_2$. Hvorfor ikke?

Det er meget almindeligt at markere en differens (dvs. forskel) mellem to tal ved hjælp af det græske bogstav $\Delta$ (udtales „delta“), så et udtryk som $\Delta x$ kan bruges om $x_2 - x_1$. Det er almindeligt at kalde dette udtryk „tilvæksten i $x$“. Med denne skrivemåde kan vi skrive den første formel i sætningen som

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

og så bliver det tydeligere, at hældningen er lig med forholdet mellem tilvæksten på andenaksen og tilvæksten på førsteaksen.

**Eksempel 13:** Vi vil nu bruge sætning 1 til at bestemme en forskrift for den lineære funktion, hvis graf går gennem punkterne $(1, 5)$ og $(4, 2)$.
Vi beregner først hældningskoefficienten:

$$a = \frac{2-5}{4-1} = \frac{-3}{3} = -1$$

Herefter beregnes skæringen med $y$-aksen:

$$b = 5 - (-1) \cdot 1 = 6$$

Funktionen har altså forskriften

$$f(x) = -x + 6$$

**Øvelse 12:** Find interaktive øvelser om lineære funktioner på https://ggbm.at/dW8aBTd2 og på https://ggbm.at/AYrgzSmC.

## 2.3 Definitions- og værdimængde

For funktionerne i dette kapitel har det indtil videre været sådan, at man kan sætte alle mulige tal ind og så få et tal ud. Sådan er det dog ikke altid.

**Eksempel 14:** I finalen til OL 2016 i Rio vandt Pernille Blume den første danske guldmedalje i svømning i 68 år, da hun besejrede sine konkurrenter i finalen i 50 meter fri. Hun vandt i tiden 24,07 sekunder.
Lad os antage, at hun svømmede distancen med nogenlunde konstant fart. Den fart må så have været

$$\frac{50\,\mathrm{m}}{24{,}07\,\mathrm{s}} \approx 2{,}077\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Hvis $s(t)$ er den afstand, hun har tilbagelagt efter $t$ sekunder, er den altså givet ved denne forskrift:

$$s(t) = 2{,}077t$$

Denne sammenhæng er dog ikke gældende for alle mulige værdier af $t$. Vi må kun indsætte $t$-værdier i intervallet $[0;24{,}07]$. Uden for dette interval er funktionen simpelthen ikke defineret.
Ligeledes kan vi heller ikke forvente, at funktionsværdierne kan være hvad som helst. Det giver jo ikke mening at spørge, hvor lang tid der går, før hun har svømmet 100 meter! Eller $-100$ meter for den sags skyld. Når vi indsætter $t$-værdier fra det tilladte interval, får vi altid værdier i intervallet $[0;50]$.

**Definition 5:** Lad $f$ være en funktion. Mængden af værdier, som den uafhængige variabel kan antage, kaldes **definitionsmængden** for $f$ og betegnes $\mathrm{Dm}(f)$.
Mængden af mulige funktionsværdier kaldes **værdimængden** for $f$ og betegnes $\mathrm{Vm}(f)$.

**Eksempel 15:** I eksempel 14 gælder det altså, at

$$\mathrm{Dm}(s) = [0;24{,}07] \text{ og } \mathrm{Vm}(s) = [0;50]$$

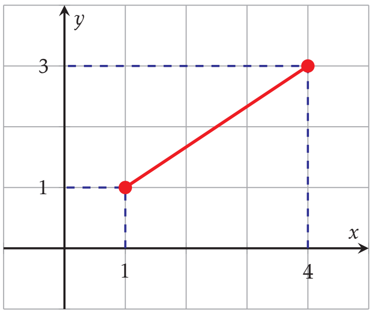
Når vi skriver forskriften for funktionen $s$, bør vi skrive den sådan her:

$$s(t) = 2{,}077t, \quad t \in [0;24{,}07]$$

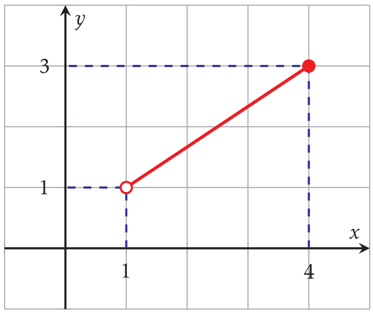
Hvis en funktion $f$ er defineret for alle tal, skriver vi

$$\mathrm{Dm}(f) = \mathbb{R}$$

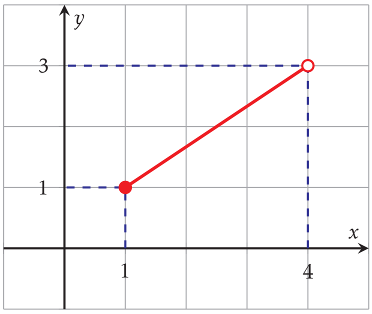
Hvis definitionsmængden blot omfatter alle tal, er det meget almindeligt at lade helt være med at skrive, hvad den er, når man skriver funktionen op.
Definitionsmængden kan også være et interval, hvor den ene eller begge ender er åbne. Man kan jo ikke se på en almindelig graf, om der lige mangler et punkt, så for tydeligt at markere, at et punkt ikke er med på grafen, bruger man **åbne punkter**: ○. Hvis man omvendt vil markere, at et bestemt punkt skal regnes med til grafen, bruger man et **lukket punkt**: ●. Se eksempler i figur 15.



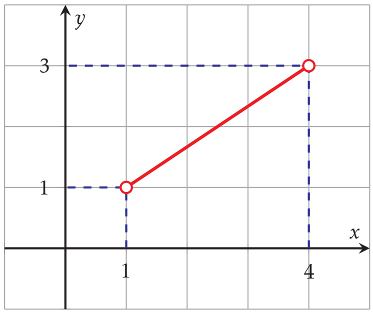

**(a)** $\mathrm{Dm}(f) = [1,4]$ og $\mathrm{Vm}(f) = [1,3]$




**(b)** $\mathrm{Dm}(f) = ]1,4]$ og $\mathrm{Vm}(f) = ]1,3]$




**(c)** $\mathrm{Dm}(f) = [1,4[$ og $\mathrm{Vm}(f) = [1,3[$




**(d)** $\mathrm{Dm}(f) = ]1,4[$ og $\mathrm{Vm}(f) = ]1,3[$

**Figur 15:** Funktionen givet ved $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ er her givet forskellige definitionsmængder.

? **Øvelse 13:** Lad $f$ være en funktion med $\mathrm{Dm}(f) = \mathbb{R}$. Betyder det, at $\mathrm{Vm}(f) = \mathbb{R}$? Hvad skal eventuelt gælde om $f$, før det passer?

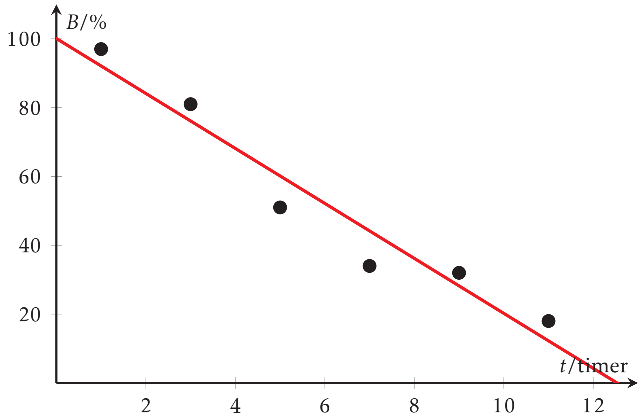
## 2.4 Regression

Her skal vi se på, hvordan man kan opstille en lineær model ud fra nogle konkrete data.
Sara laver et forsøg, hvor hun lader sin mobiltelefon helt op om morgenen og derefter holder øje med batteriniveauet gennem hele dagen. I tabel 4 ses hendes målinger.

| Tid i timer, $t$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Batteriniveau i procent, $B$ | 97 | 81 | 51 | 34 | 32 | 18 |

**Tabel 4**

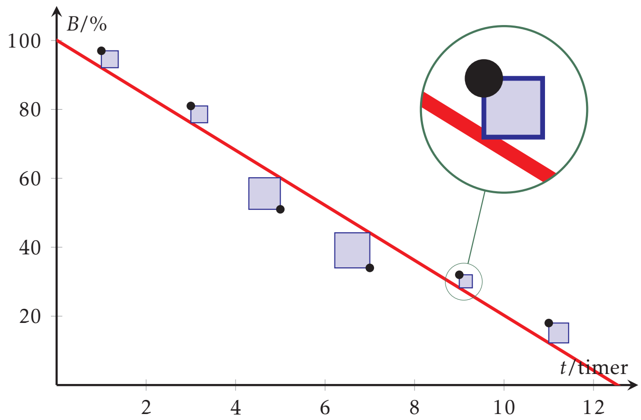
På figur 16 er Saras data indtegnet i et koordinatsystem, og det ser ud til, at der kunne være tale om en sammenhæng som er tilnærmelsesvist lineær. Man vil nok ikke kunne finde en linje, der passer med alle punkterne, men det kan man sjældent, for modellen er måske ikke helt perfekt, og måske er der også en vis måleusikkerhed.




**Figur 16**

Spørgsmålet er så, hvordan vi finder forskriften for den lineære funktion, der passer bedst med punkterne. Vi kunne selvfølgelig vælge to af punkterne og finde forskriften for grafen igennem dem, men da punkterne ikke ligger perfekt på en ret linje, vil det jo have meget stor betydning, hvilke to punkter vi vælger.

I stedet må man lave en såkaldt **lineær regression**, hvor man tager højde for alle punkterne. Først bliver man dog nødt til at forklare, hvad man mener med at „passe bedst". Den metode, vi vil benytte, hedder **mindste kvadraters metode**, og her er definitionen, at når vi tegner kvadrater mellem punkterne og linjen som vist på figur 17, så skal det samlede areal være så lille som muligt.




**Figur 17:** En illuatration af mindste kvadraters metode.

**Bemærkning 4:** Det kan måske undre, at der skulle være noget smart i at se på arealet af nogle kvadrater, men det er faktisk slet ikke så mærkeligt. Lad os sige, at vi har tegnet grafen for funktionen givet ved $f(x) = ax + b$, og vi vil gerne vide, hvordan den passer med punkterne $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_n, y_n)$. For det første punkt kan vi måle, hvor meget grafen „skyder forbi":

$$e_1 = y_1 - (ax_1 + b)$$

Her tager vi altså forskellen mellem $y_1$ og $y$-værdien for punktet $(x_1, ax_1 + b)$, som har samme $x$-koordinat, men ligger på grafen for $f$.

En oplagt ide ville så være blot at se på den samlede fejl

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_n$$

Problemet er bare, at disse e'er vil have forskellige fortegn, alt efter om et punkt ligger over eller under grafen. Det er ikke helt smart, for så vil de kunne udligne hinanden, selvom de eventuelt ligger ret langt fra grafen. Dette undgår man ved i stedet at se på

$$e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2$$

Så er alle tallene nemlig positive. Denne sum er præcis det samlede areal af kvadraterne i figur 17.

Linjen kan findes med et computerprogram, og i dette tilfælde vil vi se, at linjen fra figur 17 virkelig er den, der passer bedst med Saras data, og at sammenhængen er givet ved

$$B = -7{,}99 \cdot t + 100{,}08$$

Denne model kan Sara nu bruge til at beskrive batteriniveauet på sin mobiltelefon som en funktion af tiden.

?

**Øvelse 14:** På https://ggbm.at/jcbnTUvx findes en interaktiv øvelse, hvor du selv kan eksperimentere med mindste kvadraters metode.

Linjen fra figur 17 var måske også nogenlunde den, vi ville have fundet med øjemål og lineal, og ganske ofte er det også en god ide at bruge de redskaber til at få et godt billede af situationen.

Når vi laver regression på computeren, kan vi også få værdien af **forklaringsgraden** for resultatet. Forklaringsgraden betegnes $R^2$, og værdien ligger altid mellem 0 og 1. Jo tættere den er på 1, desto bedre er regressionen. I vores eksempel er forklaringsgraden lig 0,940.

Her er det vigtigt at være opmærksom på, at $R^2$ aldrig kan stå alene. Tallet siger noget om, hvor godt linjen passer med punkterne, men den siger intet om, hvorvidt ens data rent faktisk kan forklares med en lineær model. Det er derfor vigtigt, at man altid indtegner sine data i et koordinatsystem og bruger sin sunde fornuft.

**Boks 3: Regression ved hjælp af IT**

Regression laves typisk ved brug af et computerprogram. Nedenfor kan du finde instruktionsvideoer, der viser, hvordan man bruger Excel og Geogebra til at lave regression.

**Excel**

https://youtu.be/7fMgF0KNGsw

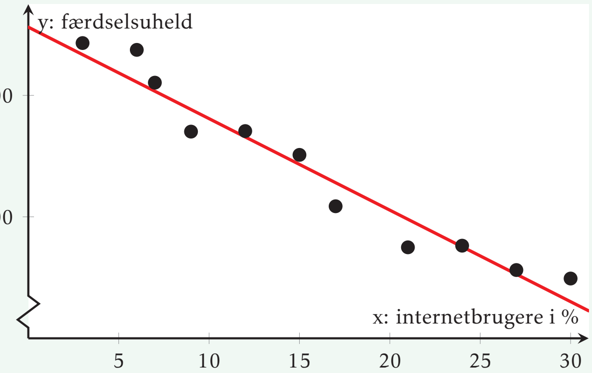
**Geogebra**

https://youtu.be/V7ueivZSDgo

Når man laver regression er der også en anden ting, man skal være meget opmærksom på. Det er jo ikke sikkert, at den udvikling, man ser i sine data, vil fortsætte i det uendelige. I

eksemplet med Saras telefon er det jo ikke sikkert, at modellen helt vil holde, når batteriet er tæt på at være helt afladet. Måske gælder den sammenhæng, man finder, kun i et begrænset område. Dette kalder man modellens **gyldighedsområde**, og man siger også tit, at modellen har begrænset **rækkevidde**. Generelt skal man derfor være meget varsom med at bruge matematiske modeller til at lave forudsigelser, der rækker meget ud over ens data.
Sidst, men ikke mindst skal man være opmærksom på, at blot fordi ens datapunkter ser ud til at ligge på en ret linje, og forklaringsgraden umiddelbart er god, kan man ikke være sikker på, at der overhovedet er en sammenhæng. Det kunne jo blot være et tilfælde eller skyldes en helt anden årsag. Se bare på dette her eksempel:

**Eksempel 16:** I årene 2001–2013 har antallet af færdselsuheld med personskade på de danske veje været aftagende, mens andelen af internetbrugere i U-lande har været voksende. På figur 18 er disse data samlet i et koordinatsystem.




**Figur 18:** Kilde: Danmarks Statistik og wikipedia.org

Umiddelbart ser en lineær regression ud til at være oplagt, og man får sammenhængen $y = -150{,}66x + 7122{,}94$ med en forklaringsgrad på 0,9377. Betyder det, at man kan forbedre trafiksikkerheden i Danmark ved at udrulle bredbånd i U-lande? Næppe.

**Boks 4: Gauss og Ceres' bane**

I 1801 opdagede den italienske præst og astronom Giuseppe Piazzi dværgplaneten Ceres, som bevæger sig i solsystemets asteroidebælte mellem Mars og Jupiter. Han observerede den i alt 24 gange mellem 1. januar 1801 og 11. februar 1801. Herefter kom den for tæt på solen til at kunne ses med kikkert. Mange forsøgte at bestemme dværgplanetens bane, men det lykkedes kun for den 24-årige, tyske matematiker Carl Friedrich Gauss, som netop havde udviklet mindste kvadraters metode. Nytårsnat mellem 1801 og 1802 fandt den ungarske astronom Franz Xaver von Zach endelig Ceres igen, og den dukkede op præcis, hvor Gauss havde forudsagt det.

## 2.5 Dine egne ord

Funktion

Forskrift ud fra punkter

Nulpunkt

Definitionsmængde

Værdimængde

# 3 Ligningsløsning

**Eksempel 17:** Magnus er fire år ældre end sin søster Anna. Tilsammen er de 30 år gamle. Hvor gammel er Magnus?
Lad os prøve at få lidt struktur på de oplysninger, vi får givet. Vi kender ikke Magnus' alder, så den kalder vi $x$. Søsterens alder må så være $x-4$.
Da de to søskende tilsammen er 30 år, ved vi, at det altid skal gælde, at

$$x+(x-4)=30$$

I eksemplet ovenfor har vi omsat de oplysninger, vi fik, til en matematisk betingelse, som den ubekendte skal opfylde. Sådan en betingelse kaldes en **ligning**, og i dette kapitel skal vi se eksempler på, hvordan man stiller ligninger op, og vi skal lære at løse dem.
Ligningen fra eksemplet er en **førstegradsligning**, for den ubekendte, $x$, optræder i første potens.

## 3.1 Løsning af ligninger

Når man løser en ligning, vil det sige, at man finder alle de værdier af $x$, der opfylder ligningen. For ligningen i eksempel 17 kan vi undersøge, om 20 er en løsning ved at sætte $x$ til at være 20 på venstre side af lighedstegnet:

$$20+(20-4)=36$$

Her ville vi altså få $36=30$, hvilket er et falsk udsagn. Det vil sige, at 20 ikke er en løsning til ligningen.
Vi kan også prøve med 17 i stedet for:

$$17+(17-4)=30$$

Her får vi altså $30=30$, hvilket er et sandt udsagn. Det vil sige, at 17 er en løsning til ligningen! Spørgsmålet er så, om det er den eneste løsning.

**Øvelse 15:** Undersøg, om tallet 4 er en løsning til nogle af disse ligninger:

$$8(x-1)-1=6 \qquad x-2(x-5)=6 \qquad 2x-1=x+12$$

Når man skal løse en ligning, er ideen at omforme den, så man får en lettere ligning, der stadigvæk har de samme løsninger. For at sikre, at man laver de rigtige omskrivninger, er der en bestemt regel, man skal følge:

**Man må gøre alt, når bare man kun gør noget, der kan gøres om igen, og man gør det på begge sider af lighedstegnet.**

Det er f.eks. tilladt at lægge et tal til på begge sider af lighedstegnet, for man kan altid trække det samme tal fra på begge sider igen. Det er også tilladt at gange med et tal (bortset fra 0) på begge sider af lighedstegnet, for man kan altid dividere med det samme tal på begge sider af lighedstegnet igen.

**Øvelse 16:** Hvorfor må man ikke gange med 0 på begge sider af lighedstegnet, når man løser ligninger?

Desuden må man reducere udtrykkene på hver side af lighedstegnet ved at samle led, sætte uden for parentes og så videre. Man må også frit bytte rundt på de to sider af lighedstegnet, hvis man vil.

**Eksempel 18:** Vi vil nu bruge regler til at løse ligningen fra eksempel 17. Ligningen ser sådan ud:

$$x + (x - 4) = 30$$

Vi kan begynde med at fjerne parentesen på venstre side og samle leddene:

$$2x - 4 = 30$$

Vi lægger nu 4 til på begge sider af ligningen:

$$2x = 30 + 4$$

Hvis vi igen samler leddene, får vi

$$2x = 34$$

Vi dividerer nu med 2 på begge sider af lighedstegnet:

$$x = \frac{34}{2}$$

Hvis vi igen reducerer, står der, at

$$x = 17$$

Den sidste ligning i rækken har kun én løsning, for her skal $x$ være 17 for at få et sandt udsagn. Det må betyde, at det også er den eneste løsning til den oprindelige ligning, for alle ligningerne i rækken skulle gerne have præcis de samme løsninger.
Det betyder, at Magnus er 17 år.

**Øvelse 17:** Prøv at tjekke, at 17 virkelig er en løsning til alle ligningerne i eksempel 18.

Ligninger, der har de samme løsninger, kaldes **ækvivalente**. Mellem ækvivalente ligninger kan man sætte **ensbetydendetegn/biimplikationstegn** $\Leftrightarrow$ eller $\Updownarrow$. For det meste er det dog bedre at beskrive med ord, hvad man gør i hvert trin.
Her skal vi se endnu et eksempel på løsning af en simpel ligning:

**Eksempel 19:** Her vil vi løse ligningen $3x - 1 = 7x + 2$:

$$3x - 1 = 7x + 2$$

$$-4x - 1 = 2 \qquad \text{7x trækkes fra på begge sider.}$$

$$-4x = 3 \qquad \text{1 lægges til på begge sider.}$$

$$x = -\frac{3}{4} \qquad \text{Der divideres med } -4 \text{ på begge sider.}$$

Den eneste løsning til ligningen er altså $-\frac{3}{4}$.

Det er ikke nødvendigvis alle tal, det overhovedet giver mening at indsætte på den ubekendtes plads i ligningen. I eksempel 17 giver det f.eks. ikke mening med negative tal, for $x$ betegner jo Magnus' alder.

I en ligning som

$$\frac{7}{x+1} = 5$$

er det heller ikke alle tal, der meningsfuldt kan sættes ind. Hvis vi indsætter $x = -1$, ville vi nemlig dividere med 0.

Mængden af tal, som det giver mening at indsætte på den ubekendtes plads i en ligning, kalder vi ligningens **grundmængde**. Når man løser en ligning, bør man altid overveje, hvilken grundmængde man har, og det er almindeligt at angive dette efter ligningen på denne måde

$$x + (x-4) = 30, \quad x \geq 0 \qquad \text{eller} \qquad \frac{7}{x+1} = 5, \quad x \neq -1$$

Hvis grundmængden består af alle reelle tal, skrives det dog som regel ikke.

Grundmængden kan altså både begrænses af den situation, som ligningen indgår i, og af ting som, at man ikke kan dividere med 0 eller tage kvadratroden af negative tal.

I næste eksempel skal vi netop se, hvordan man kan løse en ligning, hvor grundmængden ikke er alle reelle tal.

**Eksempel 20:** Her vil vi løse ligningen $\frac{7}{x+1} = 5$, hvor $x \neq -1$:

$$\frac{7}{x+1} = 5$$

| | |
|---|---|
| $7 = 5(x+1)$ | Der ganges med $x+1$ på begge sider. |
| $7 = 5x + 5$ | 5 ganges ind i parentesen på højre side. |
| $2 = 5x$ | ____________________ |
| $\frac{2}{5} = x$ | ____________________ |
| $x = \frac{2}{5}$ | Der byttes om på venstre og højre side. |

Løsningen til ligningen er altså $\frac{2}{5}$. Bemærk også, at denne ligning kun giver mening, hvis $x$ ikke er $-1$. Hvorfor?

**Øvelse 18:** Skriv en forklaring på hver af de tomme linjer i eksemplet ovenfor.

**Eksempel 21:** Her løses ligningen $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{8-x}$, hvor $x$ ikke er -1 eller 8:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} &= \frac{2}{8-x} \\ 1 &= \frac{2(x+1)}{8-x} && \text{Der ganges med } x+1 \text{ på begge sider.} \\ 8-x &= 2(x+1) && \text{Der ganges med } 8-x \text{ på begge sider.} \\ 8-x &= 2x+2 && \underline{\hspace{8cm}} \\ 6-x &= 2x && \underline{\hspace{8cm}} \\ 6 &= 3x && \underline{\hspace{8cm}} \\ 2 &= x && \underline{\hspace{8cm}} \end{aligned}$$

Løsningen til ligningen er altså 2.

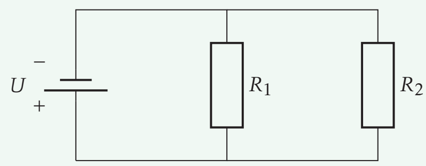
**Øvelse 19:** Skriv en forklaring på hver af de tomme linjer i eksemplet ovenfor.

## 3.2 Isolering af variabler

De regler og teknikker, der anvendes til ligningsløsning, kan også bruges til at omforme formler, hvor der indgår flere variabler. Her taler man ikke altid om at løse ligningen. Man taler i stedet om at **isolere en variabel** i et udtryk.

**Eksempel 22:** Hvis to modstande i en parallelforbindelse har resistanserne $R_1$ og $R_2$, så er den samlede resistans $R$ givet ved følgende formel:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$




**Figur 19**

Vi kan nu isolere $R_1$ i denne formel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} && \frac{1}{R_2} \text{ trækkes fra på begge sider} \\ \frac{1}{R_1} &= \frac{R_2 - R}{R \cdot R_2} && \text{Der sættes på fælles brøkstreg} \\ R \cdot R_2 &= R_1 \cdot (R_2 - R) && \text{Der ganges med } R \cdot R_2 \text{ og } R_1 \text{ på begge sider} \\ R_1 &= \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R} && \text{Der divideres med } R_2 - R \text{ på begge sider} \end{aligned}$$

Resultatet er en formel for $R_1$, som kan bruges, når vi kender $R$ og $R_2$.

## 3.3 To ligninger med to ubekendte

Mange matematiske problemer leder til, at man opstiller ligninger og løser dem for at finde løsningen. Der er dog masser af situationer, hvor ligningerne umiddelbart har mere end én ubekendt.

**Eksempel 23:** På den lokale grillbar kan man købe pizzaer og burgere. Henrik, Rasmus, Frederik og Peter bestiller to pizzaer og to burgere og skal i alt betale 230 kr. På vejen hjem forsøger de at udregne prisen på en burger eller en pizza. De kalder pizzaprisen $x$ og burgerprisen $y$ og opstiller denne ligning:

$$2x + 2y = 230$$

Ved at dividere med 2 på begge sider af lighedstegnet og trække $y$ fra kan drengene isolere $x$:

$$x = 115 - y$$

Nu kan de bare ikke komme videre. Der er uendeligt mange løsninger til dette problem. Hvis burgerprisen er 40 kr., så bliver pizzaprisen 75 kr., men hvis burgerprisen er 30 kr., så bliver pizzaprisen 85 kr. Det bliver drengene ikke meget klogere af. De har én ligning med to ubekendte.
For at trøstespise lidt tager drengene igen til grillbaren, og denne gang køber de tre pizzaer og kun én burger. De kommer i alt af med 245 kr.
Det giver anledning til at opstille en ny ligning:

$$3x + y = 245$$

Nu har drengene et såkaldt **ligningssystem** med to ligninger og to ubekendte:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 230 \\ 3x + y = 245 \end{cases}$$

Drengene skal så finde de tal $x$ og $y$, som opfylder *begge* ligninger.

**Øvelse 20:** Argumenter for, at det efter drengenes andet besøg på grillbaren ikke længere kan passe, at burgerprisen er 40 kr., mens pizzaprisen er 75 kr.

I dette kapitel skal vi se på tre forskellige metoder til løsning af ligningssystemer med to ligninger med to ubekendte.

### Grafisk løsning

Vi ser på ligningssystemet fra eksempel 23:

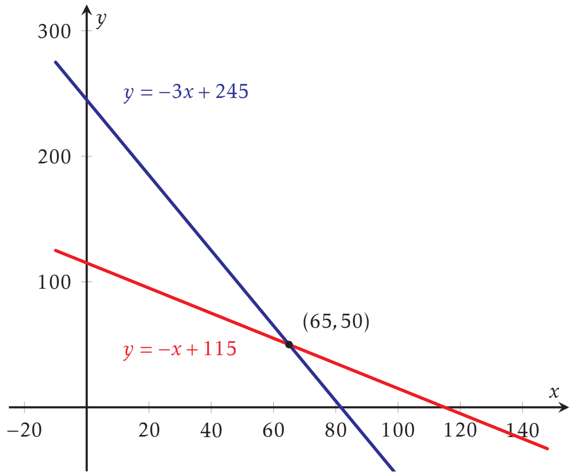
$$\begin{cases} 2x + 2y = 230 \\ 3x + y = 245 \end{cases} \tag{1}$$

Ved at isolere $y$ i begge ligninger får vi følgende ligningssystem:

$$\begin{cases} y = -x + 115 \\ y = -3x + 245 \end{cases}$$

? **Øvelse 21:** Vis alle trin i isoleringen af $y$ i de to ligninger i ligningssystemet (1).

Vi kan nu se, at begge ligninger udtrykker en lineær sammenhæng mellem $x$ og $y$. På figur 20 er graferne for sammenhængene tegnet i det samme koordinatsystem.




**Figur 20**

Skæringspunktet mellem graferne er $(x, y) = (65, 50)$. Dette punkt ligger på begge grafer, så $x$ og $y$ opfylder begge løsninger.
Det kan vi hurtigt tjekke ved at indsætte 65 og 50 i ligningssystemet:

$$\begin{cases} 2 \cdot 65 + 2 \cdot 50 = 230 \\ 3 \cdot 65 + 50 = 245 \end{cases}$$

Vi siger, at løsningen til ligningssystemet er $(x, y) = (65, 50)$.
Fordelen ved den grafiske metode er, at den ret let kan give et hurtigt overblik over løsningen til et ligningssystem, men svagheden er, at det kan være upraktisk at skulle tegne, og at aflæsningen let bliver upræcis.

### Substitutionsmetoden

Vi vil endnu en gang søge løsningen til ligningssystemet fra eksempel 23:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 230 \\ 3x + y = 245 \end{cases}$$

Denne gang isolerer vi $x$ i den øverste af ligningerne:

$$x = 115 - y$$

Da $x$ skal repræsentere den samme værdi i begge ligninger, kan vi indsætte dette udtryk for $x$ i den nederste ligning:

$$3(115 - y) + y = 245$$

Nu har vi en ligning, der kun afhænger af $y$, og den kan vi løse:

$$3(115-y)+y=245$$

$$345-3y+y=245 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$345-2y=245 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$-2y=-100 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$y=50 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

? **Øvelse 22:** Skriv, hvad der gøres i hvert trin af løsningen ovenfor.

Vi har nu fundet $y$, og vi kan indsætte det i udtrykket for $x$:

$$x=115-50=65$$

Vi har altså endnu en gang fundet løsningen $(x,y)=(65,50)$.
Denne metode afhænger ikke af aflæsning, og den er derfor helt præcis. Ideen med substitution er meget generel og kan desuden bruges i mange andre sammenhænge.

### Lige store koefficienters metode

Her vil vi se på et nyt eksempel, som vi til gengæld vil løse på en helt anden måde end de foregående. Vi begynder med dette ligningssystem:

$$\begin{cases} 5x+6y=9 \\ 3x-9y=-3 \end{cases}$$

Vi bemærker, at der her ikke er lige mange $x$'er i hver af ligningerne. Det kan vi rette op på ved at gange hver af ligningerne med et passende tal. Først ganger vi i den øverste ligning med 3 på begge sider af lighedstegnet, og i den nederste ligning med 5:

$$\begin{cases} 15x+18y=27 \\ 15x-45y=-15 \end{cases}$$

Vi kan nu trække den nederste ligning fra den øverste:

$$\begin{array}{rrcr} 15x & +18y & = & 27 \\ 15x & -45y & = & -15 \\ \hline & 63y & = & 42 \end{array}$$

Fordi vi havde sørget for at have lige mange $x$'er i hver ligning, ender vi nu med en ligning, der slet ikke indeholder nogen $x$'er. Det betyder, at vi står tilbage med en ligning, hvor der kun er én ubekendt, og her kan vi så isolere $y$:

$$y=\frac{42}{63}=\frac{2}{3}.$$

Vi kan så indsætte denne værdi for $y$ i en af de oprindelig ligninger og isolere $x$:

$$\begin{aligned}5x+6\cdot\frac{2}{3}&=9\\5x+4&=9\\5x&=5\\x&=1\end{aligned}$$

Vi har nu fundet løsningen $(x,y)=(1,\frac{2}{3})$.

**Boks 5: Determinantmetoden**

Vi siger, at et ligningssystem er lineært, hvis det kan skrives på formen

$$\begin{cases}a_1\cdot x+b_1\cdot y=c_1\\a_2\cdot x+b_2\cdot y=c_2\end{cases}$$

For den slags ligningssystemer findes der faktisk en formel, der giver løsningen. Ligningssystemet ovenfor har nemlig løsningen

$$x=\frac{c_1\cdot b_2-c_2\cdot b_1}{a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1},\quad y=\frac{a_1\cdot c_2-a_2\cdot c_1}{a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1}$$

De komplicerede formler gør metoden lidt besværlig i praksis, men den bruges ofte, når man vil programmere en computer til at løse en ligning.
En udledning af formlerne samt et eksempel kan findes her: https://youtu.be/xwz3zy1J6XE.

## 3.4 Dine egne ord

Regler for ligningsløsning

Grafisk metode

Substitutionsmetoden

Lige store koefficienters metode

# 4 Andengradspolynomier

Vi har i dette kompendium primært fokuseret på lineære funktioner. Det er funktioner, hvor forskriften kan skrives på denne form:

$$f(x) = ax + b$$

Denne type funktioner kaldes også for **førstegradspolynomier**, fordi $x$ kun indgår i første potens.[1] De kaldes lineære, fordi grafen for sådan en funktion er en ret linje.
I dette kapitel skal vi se på funktioner, hvor $x$ også indgår i anden potens. De viser sig at have grafer, der ser helt anderledes ud.

**Definition 6:** Et **andengradspolynomium** er en funktion $f$, hvor forskriften kan skrives på formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

hvor $a$, $b$ og $c$ alle er konstanter, og $a$ ikke er 0. Tallene $a$, $b$ og $c$ kaldes andengradspolynomiets **koefficienter**.

!

**Bemærkning 5:** Når det står i definitionen af et andengradspolynomium, at $a$ ikke må være 0, er det for at forhindre, at funktioner som $f(x) = 4x - 2$ kan opfattes som andengradspolynomier bare fordi de kan skrives som

$$f(x) = 0x^2 + 4x - 2$$

?

**Øvelse 23:** Hvad er værdien af $a$, $b$ og $c$ for følgende andengradspolynomier?

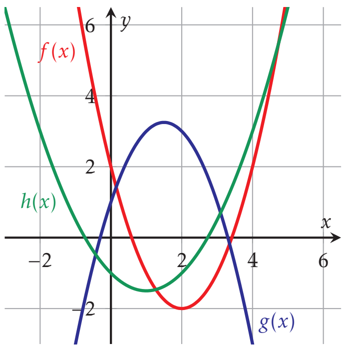
a) $f(x) = -2x^2 + x + 3$

b) $g(x) = x^2 + 2$

c) $h(x) = 3x^2 - x$

## 4.1 Andengradspolynomiets graf

Grafen for et andengradspolynomium kaldes en **parabel**, og sådan en har et helt specielt udseende. På figur 21 ses tre eksempler på parabler.




**Figur 21:** Parablerne er graferne for følgende andengradspolynomier: $f(x) = x^2 - 4x + 2$, $g(x) = -x^2 + 3x + 1$ og $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$.

[1] Husk, at det gælder, at $x^1 = x$.

**Øvelse 24:** I denne øvelse skal du eksperimentere med betydningen af koefficienterne i et andengradspolynomium.

a) Gå ind på https://www.geogebra.org/classic.

b) Opret en funktion ved at indtaste `f(x)=a*x^2+b*x+c` i tekstfeltet øverst til venstre og vælge `CREATE SLIDER`.

Du skulle nu gerne se grafen for et andengradspolynomium. Hvis du rykker på de tre skydere, kan du ændre på værdierne for $a$, $b$ og $c$.

c) Eksperimenter, og beskriv betydningen af konstanterne $a$ og $c$.

d) Indtast kommandoerne `d=Tangent(0,f)` og `Slope(d)`. Så tegner du en såkaldt tangent til grafen, der hvor den skærer $y$-aksen, og aflæser hældningen af den. (Hvis du benytter Geogebra på dansk, skal den sidste linje være `Hældning(d)` i stedet.)

e) Eksperimenter og beskriv betydningen af konstanten $b$.

Denne metode kan altid bruges til at undersøge konstanternes betydning i et udtryk.

Parabler kan ses mange steder, men ét af de mest almindelige steder er i forbindelse med kast:

**Eksempel 24:** Peter kaster en snebold imod lærer Hansen, som står seks meter væk. Han kaster snebolden i en vinkel på 30° i forhold til vandret med en fart på 10 m/s. Peter slipper snebolden i en højde på 1,7 m. Lad os se, om han rammer lærer Hansen. Hvis vi ser bort fra luftmodstanden, så vil kastet følge en kurve givet ved følgende formel:

$$y(x) = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(\alpha)^2} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$$

hvor $g$ er tyngdeaccelerationen (som er ca. 9,82 m/s$^2$), $\alpha$ er vinklen i forhold til vandret, $v_0$ er begyndelsesfarten, $y_0$ er den højde, der kastes fra, og $y(x)$ er højden over jorden efter $x$ meter.
Med tallene fra Peters kast får vi

$$y(x) = -\frac{9{,}82}{2 \cdot 10^2 \cdot \cos(30°)^2} \cdot x^2 + \tan(30°) \cdot x + 1{,}7 = -0{,}0655x^2 + 0{,}5774x + 1{,}7.$$

Vi vil nu se, hvor højt oppe snebolden er efter seks meter:

$$y(6) = -0{,}0655 \cdot 6^2 + 0{,}5774 \cdot 6 + 1{,}7 = 2{,}807$$

Efter 6 meter befinder snebolden sig altså 2,8 meter over jorden. Lærer Hansen er næppe så høj, så snebolden flyver altså over hans hoved.

**Øvelse 25:** På dette link kan du se en interaktiv kasteparabel. Prøv at ændre på parametrene og se, hvordan forskriften for andengradspolynomiet ændrer sig. Hvilken vinkel giver den største kastelængde, når affyringshøjden og begyndelsesfarten holdes fast? Find øvelsen her: https://ggbm.at/uhHKXPNV.

## 4.2 Andengradsligninger

Hvis vi gerne vil finde nulpunkterne for et andengradspolynomium, skal vi løse ligningen $f(x) = 0$. Det vil sige ligningen $ax^2 + bx + c = 0$. Sådan en ligning, hvor $x$ optræder i anden potens, kalder vi en **andengradsligning**. Her skal vi se, hvordan man løser sådan en.
Vi begynder med et simpelt eksempel:

**Eksempel 25:** Se på ligningen

$$x^2 = 4$$

Det er klart, at $x = \sqrt{4} = 2$ er en løsning. Se selv:

$$2^2 = 4$$

Det er dog ikke den eneste løsning. I hvert fald er $x = -\sqrt{4} = -2$ også en løsning. Hvis vi tjekker, får vi nemlig:

$$(-2)^2 = 4$$

Her er der altså ikke kun én, men to løsninger til ligningen.
Hvis ligningen skal være opfyldt, skal $x$ være lig 2 eller $-2$.
Vi skriver dette som

$$x = 2 \vee x = -2$$

**Bemærkning 6:** Tegnet $\vee$ kan læses som „eller“, men det kan kun bruges mellem to udsagn, ikke mellem tal. Man kan derfor **ikke** skrive

$$x = 2 \vee -2$$

**Eksempel 26:** Lad os se på andengradsligningen

$$x^2 = -4$$

Denne ligning har ingen løsninger. Der er nemlig ingen tal, der kan give et negativt tal, når det bliver ganget med sig selv.

?

**Øvelse 26:** Tegn graferne for andengradspolynomierne givet ved

$$f(x) = x^2 - 4 \text{ og } g(x) = x^2 + 4$$

Kan du forklare, hvorfor ligningen i eksempel 25 havde to løsninger, mens ligningen i eksempel 26 ingen løsninger havde? Tegn skitser af forskellige parabler, og argumenter for, at andengradsligninger må have enten ingen, én eller to løsninger.

Vi skal også se på en andengradsligning på en helt særlig form:

**Eksempel 27:** Se på

$$x^2 - 3x = 0$$

Hvis vi sætter $x$ uden for en parentes her, får vi

$$x(x-3) = 0$$

Her kan vi bruge **nulreglen**. Den siger, at hvis man ganger tal sammen og får 0, så er mindst én af faktorerne 0. Her har vi to faktorer. Det er $x$ og $x-3$. Mindst én af dem må være 0, så vi har altså, at

$$x = 0 \lor x - 3 = 0$$

eller

$$x = 0 \lor x = 3$$

## 4.3 Løsningsformlen

Der findes en formel til løsning af andengradsligninger, men før vi kan udlede den, ser vi på endnu et eksempel:

**Eksempel 28:** Se på andengradsligningen

$$2x^2 + 4x - 16 = 0$$

Vi dividerer først med 2 på begge sider:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Herefter lægges 8 til på begge sider:

$$x^2 + 2x = 8$$

Udtrykket på venstre side minder lidt om noget fra en kvadratsætning. Det minder faktisk lidt om $(x+1)^2$. Det er nemlig $x^2 + 1 + 2x$. Vi mangler bare et 1-tal. Det lægger vi til på begge sider i ligningen

$$x^2 + 2x + 1 = 9$$

Nu kan vi omskrive venstresiden ved hjælp af kvadratsætningen

$$(x+1)^2 = 9$$

Kvadratroden af 9 er 3, så der er nu to muligheder:

$$x+1=3 \vee x+1=-3$$

Vi kan i begge tilfælde finde $x$ ved blot at trække 1 fra på begge sider af lighedstegnet:

$$x=2 \vee x=-4$$

Vi har nu løst andengradsligningen. Den metode, vi brugte, kaldes **kvadratkomplettering**, fordi vi forsøger at lægge noget til, så begge sider bliver lig med noget i anden potens. Metoden kan spores helt tilbage til oldtidens matematikere.

? **Øvelse 27:** Benyt kvadratkomplettering til at løse ligningen

$$3x^2+18x+15=0$$

Inspireret af eksemplet kaster vi os nu over den generelle andengradsligning:

$$ax^2+bx+c=0$$

Da $a$ ikke er 0, kan vi dividere på begge sider med $a$:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Vi trækker derefter $\frac{c}{a}$ fra på begge sider:

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

Vi vil gerne omskrive venstre side til et kvadrat. Det er klart, at $\frac{b}{a}x$ skal være „det dobbelte produkt", så vi lægger $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ til på begge sider af lighedstegnet:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Nu har vi et kvadrat på venstre side:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Højre side kan omskrives:

$$\begin{aligned}-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2&=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\\&=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}\\&=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\end{aligned}$$

Det vil sige, at

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Her er der nu forskellige muligheder. Hvis tælleren $b^2-4ac$ er negativ, kan ligningen ikke have nogen løsninger, for så står der et negativt tal på højre side, mens der står et kvadrat på venstre side. Hvis $b^2-4ac$ ikke er negativ, kan vi komme videre:

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Vi behøver nu bare at trække $\frac{b}{2a}$ fra på begge sider for at finde $x$:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vi har nu endelig en formel, som kan bruges til at løse alle andengradsligninger:

**Sætning 2:** Lad

$$ax^2 + bx + c = 0$$

være en ordnet andengradsligning.
Størrelsen $d = b^2 - 4ac$ kaldes **diskriminanten**.

- Hvis $d$ er negativ, har ligningen ingen løsninger.
- Hvis $d$ er 0, har ligningen én løsning givet ved

$$x = -\frac{b}{2a}$$

- Hvis $d$ er positiv, har ligningen to løsninger givet ved

$$x = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$$

I næste eksempel vises, hvordan løsningsformlen kan bruges til at bestemme løsningen til en andengradsligning.

**Eksempel 29:** Vi ser på andengradsligningen

$$6x^2 + x - 2 = 0$$

I forhold til betegnelserne i løsningsformlen har vi, at $a = 6$, $b = 1$ og $c = -2$. Vi kan nu udregne diskriminanten som

$$d = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 49$$

Da diskriminanten er positiv, får vi nu to løsninger:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \begin{cases} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

!

**Bemærkning 7 (Undgå brøkregningen med et trick):** I udledningen kan man undgå det meste af brøkregningen ved hjælp af et smart trick. Hvis vi først ganger på begge sider med $4a$, går det hele lettere. Se selv:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \qquad \text{Der ganges med } 4a \text{ på begge sider}$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Hvis $b^2 - 4ac$ ikke er negativ kan vi komme videre:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ulempen ved den slags tricks er, at de kan være vanskelige at huske. Det kræver en god forståelse af ideen i den oprindelige udledning at se, hvor $4a$ kommer fra.

?

**Øvelse 28:** Gå igennem udledningen i bemærkning 7 ovenfor. Skriv dine egne forklaringer på de tomme linjer.

## 4.4 Dine egne ord

Andengradspolynomium

Parabel

Andengradsligning

Nulregel

Løsningsformel

# 5 Uligheder

Vi vil begynde med et eksempel.

**Eksempel 30:** Anne kører på cykel med en fart på $6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ hen ad en lang vej. Hendes lillebror Bertram kører hen ad den samme vej på et løbehjul. Han kører kun med en fart på $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, men da Anne starter, har Bertram allerede kørt 100 m. Vi starter uret, og vi vil så gerne finde ud af, i hvilket tidsrum Anne kører bagved Bertram.
Opgaven kan løses på flere måder, men her vil vi stille det op som en ulighed. Den strækning, som Anne kører i løbet af $t$ sekunder, er $6t$. Den strækning, som Bertram har tilbagelagt efter samme tid, er $2t + 100$. Anne kører bag Bertram, når

$$6t < 2t + 100$$

Sådan en relation, der indeholder et ulighedstegn ($<$), kaldes en **ulighed**, og vi siger, at vi har løst den, når vi har fundet alle de værdier af $t$, der opfylder uligheden.
Vi leder her kun efter ikke-negative løsninger, så ulighedens grundmængde er $[0, \infty[$.

Der findes fire forskellige ulighedstegn. De skarpe: $<$ og $>$, som læses „mindre end“ og „større end“. De bløde: $\leq$ og $\geq$, som læses „mindre end eller lig med“ og „større end eller lig med“.
Når man skal løse en ulighed, er strategien i hovedtræk den samme som for ligninger. Vi ønsker at omskrive uligheden til en simplere ulighed. Reglerne for omskrivning er dog ikke helt så enkle som for ligninger.
For at illustrere det kan vi se på nogle enkle eksempler. Vi ved, at

$$2 < 5 \tag{2}$$

Hvis vi lægger 4 til på begge sider af ulighedstegnet, får vi

$$6 < 9$$

Det er stadigvæk sandt. Vi kan se, at vi ikke ændrer på sandhedsværdien af en ulighed ved at lægge et tal til eller trække det fra på begge sider af lighedstegnet.
Vi kan nu i stedet prøve at gange med 4 på begge sider af ulighedstegnet i (2). Så får vi

$$8 < 20$$

Det er også stadigvæk sandt. Ved at eksperimentere lidt mere kan man overbevise sig selv om, at sandhedsværdien af uligheden heller ikke ændres af, at man ganger eller dividerer på begge sider af uligheden med et positivt tal.
Indtil videre ligner det meget godt ligningerne, men lad os nu se, hvad der sker, hvis vi i stedet ganger med $-4$ på begge sider af ulighedstegnet i (2). Så får vi $-8$ på den ene side og $-20$ på den anden side. Her gælder det alså i stedet, at

$$-8 > -20$$

Uligheden skal altså vendes om! Dette gælder altid, når man ganger eller dividerer med et negativt tal. Det giver os følgende regler til løsning af simple uligheder. Man må

- lægge et tal til eller trække det fra på begge sider af ulighedstegnet,
- gange og dividere med et positivt tal på begge sider af ulighedstegnet, men
- hvis man ganger eller dividerer med et negativt tal på begge sider af ulighedstegnet, skal ulighedstegnet vendes om.

**Eksempel 31:** Vi kan nu løse uligheden fra eksempel 30:

$$6t < 2t + 100$$

$$4t < 100 \qquad \text{Der trækkes } 2t \text{ fra på begge sider.}$$

$$t < 25 \qquad \text{Der divideres med 4 på begge sider.}$$

Løsningen er altså, at Anne vil køre bag Bertram, når $t$ ligger i intervallet $[0, 25[$.

Her er et eksempel, hvor division med et negativt tal kommer i spil.

**Eksempel 32:** Her skal vi løse en anden ulighed:

$$6x + 2 \geq 10(x + 2)$$

$$6x + 2 \geq 10x + 20 \qquad \text{10 ganges ind i parentesen på højre side.}$$

$$6x \geq 10x + 18 \qquad \text{Der trækkes 2 fra på begge sider.}$$

$$-4x \geq 18 \qquad \text{Der trækkes } 10x \text{ fra på begge sider.}$$

$$x \leq -\frac{9}{2} \qquad \text{Der divideres med } -4 \text{ på begge sider.}$$

Bemærk, at ulighedestegnet altså vendes om i det sidste trin.

Umiddelbart kan løsning af uligheder minde meget om løsning af ligninger, men næste eksempel viser, at det ikke altid er så let.

**Eksempel 33:** Lad os se på en såkaldt rational ulighed. Det vil sige en ulighed, som indeholder en brøk.

$$\frac{3x - 10}{x - 4} > 2, \quad x \neq 4$$

For at løse uligheden vil vi gerne omforme den ved at gange med $x - 4$, men problemet er jo, at det både kan være positivt eller negativt alt efter, hvad $x$ er. Vi kan se, at det kommer an på, om $x$ er større eller mindre end 4, så vi opdeler i to tilfælde:

$\boldsymbol{x > 4}$**:** Lad os først antage, at $x > 4$. Så er $x - 4 > 0$. Vi kan derfor gange med det på begge sider uden at skulle vende ulighedstegnet om:

$$3x - 10 > 2(x - 4)$$

$$3x - 10 > 2x - 8 \qquad \text{2 ganges ind i parentesen på højre side.}$$

$$3x > 2x + 2 \qquad \text{Der lægges 10 til på begge sider.}$$

$$x > 2 \qquad \text{Der trækkes } 2x \text{ fra på begge sider.}$$

Her skal man så huske, at vi i dette tilfælde har antaget, at $x > 4$, så vi kan her kun godtage løsninger, der ligger i det interval. Vi får altså løsningen $x > 4$ her.

$\boldsymbol{x < 4}$**:** Lad os nu antage, at $x < 4$, så $x - 4 < 0$. Her skal vi huske at vende ulighedstegnet om, når vi ganger med $x-4$:

$$3x-10<2(x-4)$$

$$3x-10<2x-8 \quad \rule{5cm}{0.4pt}$$

$$3x<2x+2 \quad \rule{5cm}{0.4pt}$$

$$x<2 \quad \rule{5cm}{0.4pt}$$

Vi får løsningen $x<2$, og den opfylder også, at $x<4$.
Samlet får vi altså løsningen på uligheden

$$x<2 \vee x>4$$

? **Øvelse 29:** Skriv forklaringer på de tomme linjer i eksempel 33.

## 5.1 Dobbeltuligheder

Dobbeltuligheder er uligheder med to ulighedstegn. I det næste eksempel skal vi se, hvordan man løser sådan en.

**Eksempel 34:** Vi vil løse dobbeltuligheden

$$2x+5<3x+7\leq 15-x$$

Det betyder, at vi skal finde de tal $x$, der opfylder begge ulighederne $2x+5<3x+7$ og $3x+7\leq 15-x$. Vi løser dem derfor hver for sig. Først den ene ulighed:

$$2x+5<3x+7$$

$$5<x+7$$

$$-2<x$$

Derefter den anden ulighed:

$$3x+7\leq 15-x$$

$$4x+7\leq 15$$

$$4x\leq 8$$

$$x\leq 2$$

Den første ulighed er altså opfyldt, når $x>-2$, og den anden ulighed er opfyldt, når $x\leq 2$. Det vil sige, at $x$ opfylder begge uligheder, præcis når

$$-2<x\leq 2$$

Det vil vi kalde løsningen på dobbeltuligheden.
Bemærk, at den også kan skrives på denne form: $x\in]-2,2]$.

**Boks 6: Videoer**

Se videoer om uligheder og ulighedstegn her: https://youtube.com/playlist?list=PLyCteRdO2gcepoz5oZEIAREEt3743oTWU

# 6 Numerisk værdi

Når man arbejder med tal, sker det nogle gange, at man ikke er interesseret i tallets fortegn, men kun tallets størrelse. Til det formål indføres det, der kaldes **numerisk værdi**.

**Definition 7:** Den numeriske værdi af $x$ betegnes $|x|$ og defineres således:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0 \\ -x & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

Det vil sige, at hvis $x \geq 0$, så er $|x|$ blot $x$, men hvis $x < 0$, så er $|x|$ i stedet lig $-x$.

**Eksempel 35:** Ved hjælp af definitionen udregner vi let et par eksempler:

$$|5| = 5$$

for $5 \geq 0$.

$$|-3| = -(-3) = 3$$

for $3 < 0$.

Vi kan altså se af eksemplet, at numerisk værdi simpelthen ændrer fortegn på de negative tal, så de bliver positive.

**Øvelse 30:** Bestem

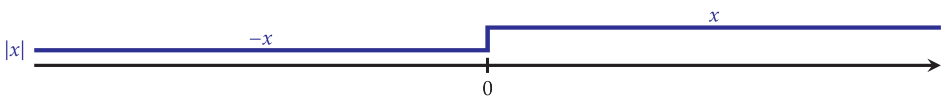
a) $|-2|$

b) $|0|$

c) $|3-2|$

d) $|2-3|$

På figur 22 ses en grafisk illustation af definition af numerisk værdi.




**Figur 22**

## 6.1 Ligninger med numerisk værdi

I dette afsnit vil vi se på en metode til løsning af ligninger, hvor der indgår numerisk værdi. Vi begynder med et simpelt eksempel.

**Eksempel 36:** Vi vil løse ligningen

$$|2x - 6| = 4$$

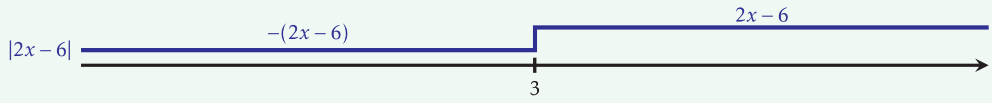
Når man skal udregne $|2x-6|$ gør det stor forskel, om $2x-6$ er positiv eller negativ, så vi løser først denne ulighed:

$$2x - 6 \geq 0$$

$$2x \geq 6$$

$$x \geq 3$$

Hvordan $|2x - 6|$ skal beregnes, afhænger altså af, om $x \geq 3$ eller $x < 3$. Situationen er illustreret på figur 23. Her kan man aflæse, hvornår numerisk værdi-tegnene bare kan fjernes, og hvornår man skal skifte fortegn, når man fjerner dem.




**Figur 23**

Vi har altså nu to tilfælde, som vi skal løse hver for sig.
**$x \geq 3$:** I dette tilfælde kan numerisk værdi-tegnene fjernes uden videre, så vi skal løse denne ligning:

$$2x - 6 = 4$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

Her skal man huske at tjekke, at $x = 5$ opfylder betingelsen for dette tilfælde, men det gør den klart nok.
**$x < 3$:** Her kan vi ikke bare fjerne numerisk værdi-tegnene uden videre. Her skal vi skifte fortegn. Det betyder, at vi skal løse denne ligning:

$$-(2x - 6) = 4$$

$$-2x + 6 = 4$$

$$-2x = -2$$

$$x = 1$$

Også her tjekker vi, at $x = 1$ opfylder betingelse for dette tilfælde. Det gør den.
Vi kan nu konkludere, at ligningen $|2x - 6| = 4$ har løsningen

$$x = 1 \vee x = 5$$

I det næste eksempel bliver det mere kompliceret, fordi der indgår flere numerisk værdi-tegn.

**Eksempel 37:** Vi vil løse ligningen

$$|x - 1| = 2|x - 3| - 1$$

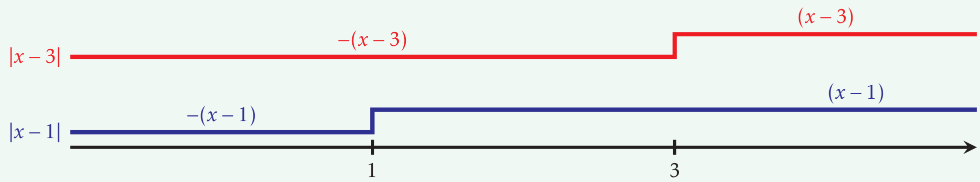
Her er det fortegnene på $x - 1$ og $x - 3$, som er interessante, så vi begynder med at løse to uligheder:

$$x-1 \geq 0$$
$$x \geq 1$$

og

$$x-3 \geq 0$$
$$x \geq 3$$

For at få overblik over de forskellige tilfælde kan vi nu tegne et diagram som på figur 24.




**Figur 24**

Vi kan se, at der er i alt tre tilfælde.
**$x < 1$:** Her skal vi løse denne ligning:

$$-(x-1) = -2(x-3)-1$$
$$-x+1 = -2x+6-1$$
$$-x = -2x+4$$
$$x = 4$$

Her finder vi umiddelbart løsningen $x = 4$, men vi antog jo netop, at $x < 1$, så den løsning kan vi ikke bruge. Vi kan også indsætte $x = 4$ i den oprindelige ligning og se, at det ikke er en løsning.
**$1 \leq x < 3$:** Her skal vi så løse denne ligning:

$$x-1 = -2(x-3)-1$$
$$x-1 = -2x+6-1$$
$$x = -2x+6$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

Vi tjekker, at $x = 2$ opfylder betingelsen i dette tilfælde. Det gør den, for $1 \leq 2 < 3$. Det er dermed en løsning til ligningen.

**$x \geq 3$:** Her skal vi løse denne ligning:

$$\begin{aligned} x - 1 &= 2(x-3) - 1 \\ x - 1 &= 2x - 6 - 1 \\ x &= 2x - 6 \\ -x &= -6 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Også her tjekker vi og konstaterer, at $6 \geq 3$. Det er også en løsning.
Den samlede løsning af ligningen er altså

$$x = 2 \vee x = 6$$

**Boks 7: Videoer**

Se videoer om ligninger med numerisk værdi her: https://youtube.com/playlist?list=PLyCteRdO2gcdd4LnlXtw0MY5Ng8fceUH6

**Matematik i grundforløbet** er et komplet undervisningsmateriale udviklet til grundforløbet på AARHUS GYMNASIUM og TEKNISK GYMNASIUM, Skanderborg. Materialet dækker følgende emner:

- Variabelsammenhænge
- Lineære funktioner
- Lineære ligninger af en eller to variable
- Andengradspolynomier og andengradsligninger
- Uligheder
- Ligninger med numerisk værdi
- Basale algebraiske regler

Materialet indeholder en stor mængde eksempler og opgaver, og teorien understøttes med interaktive øvelser og videoer.