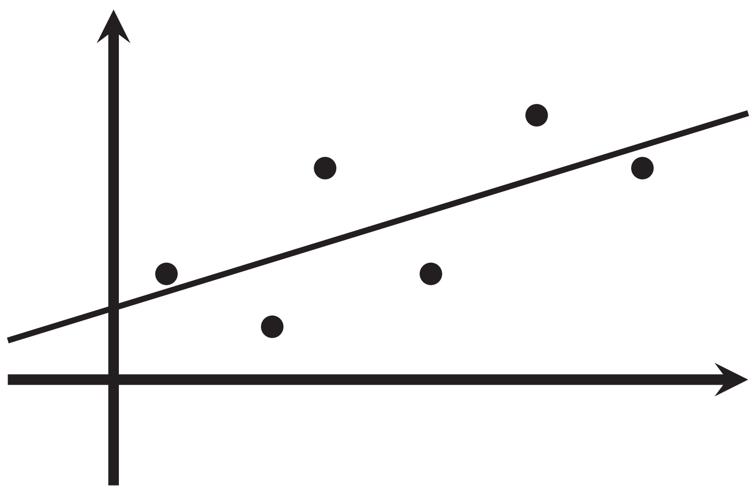
maTEMAtik

Mikkel Stouby Petersen

Matematik i grundforløbet

Opgavehæfte



2024

Navn: ____

Matematik i grundforløbet – Opgavehæfte
Mikkel Stouby Petersen
5. udgave, 1. oplag 2024

Teksten er sat med LaTeX ved brug af *memoir*-klassen.
Skrifttype: Kp-fonts, 10 pt.
Alle figurer er lavet af forfatteren med ti*k*Z eller Geogebra.
Hæftets omslag bør trykkes på grønt papir.

Indhold

0 Algebraiske værktøjer

Matematik handler om at studere mønstre og sammenhænge, men det er i høj grad også et håndværksfag, hvor man lærer at bruge det sprog, som i dag anvendes inden for alle naturvidenskabelige og tekniske fag. Som i alle andre håndværksfag er det derfor vigtigt at have styr på værktøjskassen. I matematikken er det de basale regneregler og definitioner, der er de vigtigste værktøjer.
Meningen med dette kapitel er, at det kan bruges som et opslagsværk. Mens du øver dig, er det nok nødvendigt at slå op i dette kapitel ret ofte, men meningen er, at du langsomt skal blive så fortrolig med reglerne i kapitlet, at du til sidst slet ikke behøver slå dem op mere. De vil blive til værktøjer, som du bruger helt uden at tænke over det, ligesom ord du har skrevet så tit, at du ikke længere tænker over, hvordan de staves.
Sidst i kapitlet er der opgaver, hvor du kan øve dig. Det vil dog være nødvendigt at fortsætte med at øve reglerne længe efter, at grundforløbet er slut.

0.1 Regningsarternes hierarki

I et udtryk, hvor der bruges forskellige regneoperationer, skal man altid udføre dem i en bestemt rækkefølge:

1) Parenteser
2) Potenser og rødder
3) Multiplikation og division
4) Addition og subtraktion

Her er et eksempel, hvor du kan se hierarkiet i funktion.

$$\underbrace{3-\underbrace{2\cdot\underbrace{(5+4)}_{5+4=9}}_{2\cdot 9=18}}_{3-18=-15} = -15$$

Parenteser er blandt andet nødvendige, når man regner med negative tal. Se blot her:

$$-3^2 = -9 \quad \text{men} \quad (-3)^2 = 9$$

Det samme gælder for brøker:

$$\frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{men} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

0.2 Led og faktorer

Et matematisk udtryk kan inddeles i led og faktorer. Det kan være nyttigt at kende forskellen. De dele, der er adskilte af gangetegn, kaldes **faktorer**. I følgende udtryk er alle faktorer markeret med en ring:

$$2 \cdot (-3) \cdot 5$$

$$a\,b\,c$$

Når faktorer ganges sammen, får man et **produkt**.
De dele, der er adskilte af plus, kaldes **led**. I følgende udtryk er alle led markeret med en firkant:

$$\boxed{2} + \boxed{3 \cdot 4} + \boxed{5}$$
$$\boxed{\tfrac{a}{b}} + \boxed{c} + \boxed{d^2}$$

Læg mærke til, at et led godt kan være et produkt, der kan splittes op i faktorer:

$$\boxed{(2 \cdot 3)} + \boxed{4}$$

På samme måde kan faktorer også sommetider bestå af flere led:

$$\mathrm{a} \cdot (\boxed{b} + \boxed{c})$$

Inden for hvert produkt er rækkefølgen af faktorerne ligegyldig:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

På samme måde er rækkefølgen af led også ligegyldig:

$$2 + 3 + 4 = 3 + 2 + 4 = 4 + 3 + 2$$

Dette gælder faktisk også, når der indgår minus, men så skal fortegnet flyttes med. Et udtryk som

$$2 - 3$$

kan vi opfatte som

$$2 + (-3)$$

Her kan vi bytte rundt på leddene og få

$$-3 + 2$$

Det vil sige, at

$$2 - 3 = -3 + 2$$

0.3 Regning med fortegn

Regel	Eksempel
$(+)\cdot(+)=(+)$	$5\cdot 7=35$
$(+)\cdot(-)=(-)$	$5\cdot(-7)=-35$
$(-)\cdot(+)=(-)$	$-5\cdot 7=-35$
$(-)\cdot(-)=(+)$	$-5\cdot(-7)=35$
$\frac{(+)}{(+)}=(+)$	$\frac{12}{3}=4$
$\frac{(+)}{(-)}=(-)$	$\frac{12}{-3}=-4$
$\frac{(-)}{(+)}=(-)$	$\frac{-12}{3}=-4$
$\frac{(-)}{(-)}=(+)$	$\frac{-12}{-3}=4$
$a+(-b)=a-b$	$7+(-18)=-11$

0.4 Brøker

Regel	Beskrivelse	Eksempel
$\frac{ka}{kb}=\frac{a}{b}$	Man kan forkorte eller forlænge brøker ved at gange eller dividere med det samme tal i både tæller og nævner. Dette ændrer ikke på brøken.	$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{5}=\frac{40}{100}$
$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	Hvis brøker har samme nævner, kan man lægge dem sammen ved at lægge tællerne sammen.	$\frac{3}{7}+\frac{9}{7}=\frac{12}{7}$
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$	Man kan altid lægge brøker sammen ved at forlænge brøkerne for at finde en fællesnævner.	$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 5+3\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{22}{15}$
$\frac{a}{b}+c=\frac{a+bc}{b}$	Man kan lægge et tal c til en brøk ved at omskrive tallet til brøken $\frac{bc}{b}$.	$\frac{1}{3}+2=\frac{1}{3}+\frac{6}{3}=\frac{7}{3}$
$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	Man ganger to brøker ved at gange tællerne sammen og gange nævnerne sammen.	$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 3}=\frac{5}{6}$
$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}$	Man ganger et tal med en brøk ved at gange med tallet i tælleren.	$5\cdot\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$
$a:\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c}{b}$	Man dividerer med en brøk ved at gange med den omvendte brøk.	$7:\frac{2}{3}=7\cdot\frac{3}{2}=\frac{21}{2}$
$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b\cdot c}$	Man dividerer en brøk med et tal ved at gange med tallet i nævneren.	$\frac{4}{5}:3=\frac{4}{5\cdot 3}=\frac{4}{15}$

0.5 Potenser og rødder

Regel	Eksempel
$a^0 = 1$	$1^0 = 1,\ 5^0 = 1$
$a^1 = a$	$5^1 = 5,\ 0^1 = 0$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(kQ)^3 = k^3 Q^3$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(2^3)^5 = 2^{15},\ (10^6)^2 = 10^{12}$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$10^2 \cdot 10^3 = 10^5$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{5^2}{5^6} = 5^{-4}$
$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\frac{1}{u^8} = u^{-8}$
$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$	$\sqrt{t} = t^{1/2},\ 8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$

0.6 Regning med parenteser

At hæve parenteser

Regel	Forklaring
$a + (b + c) = a + b + c$	Hvis der står et plus foran parentesen, kan den hæves uden videre.
$a - (b + c) = a - b - c$	Hvis der står et minus foran parentesen, skal man skifte fortegn på alle led inde i parentesen.

At gange ind i parenteser

Regel	Forklaring
$a(b + c + d) = ab + ac + ad$	Man kan gange et tal ind i en parentes ved at gange tallet på hvert led inde i parentesen.
$(a+b)(p + q + r)$ $= ap + aq + ar + bp + bq + br$	Man ganger to parenteser sammen ved at gange hvert led i den ene parentes med hvert led i den anden parentes.

Kvadratsætninger

Regel	Forklaring	Eksempel
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	Kvadratet på en sum af to led er lig det første led i anden plus det andet led i anden plus det dobbelte produkt.	$(x+3)^2 = x^2 + 9 + 6x$ $(w+2q)^2 = w^2 + 4q^2 + 4qw$ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b}{a}x$
$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$	Kvadratet på differens er lig det første led i anden plus det andet led i anden minus det dobbelte produkt.	$(y-7)^2 = y^2 + 49 - 14y$ $(3T-r)^2 = 9T^2 + r^2 + 6Tr$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	To tals sum gange de samme tals differens er lig første led i anden minus andet led i anden.	$(x+2)(x-2) = x^2 - 4$ $(y+z^2)(y-z^2) = y^2 - z^4$

0.7 Reduktion af udtryk

At reducere et udtryk betyder at bruge regnereglerne til at omskrive udtrykket, så det bliver simplere. Her er et eksempel:

$$\begin{aligned}
a(a+2b) - (a+b)^2 &= a^2 + 2ab - (a+b)^2 && \text{Ganger ind i parentesen} \\
&= a^2 + 2ab - (a^2 + b^2 + 2ab) && \text{Bruger kvadratsætning} \\
&= a^2 + 2ab - a^2 - b^2 - 2ab && \text{Ophæver parentesen} \\
&= -b^2 && \text{Samler led}
\end{aligned}$$

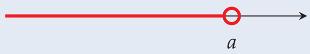
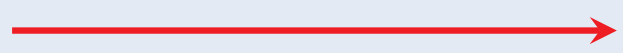
Det skal bemærkes, at der ikke er nogen entydig definition af, hvornår et udtryk er så simpelt som muligt. Det kan også afhænge en smule af den sammenhæng, som udtrykket indgår i. Ofte er man dog ikke i tvivl.
Her er endnu et par eksempler:

Eksempel	Forklaring
$(a+b)^2 - 4ab = a^2 + b^2 + 2ab - 4ab$ $= a^2 + b^2 - 2ab$ $= (a-b)^2$	Bruger kvadratsætning, samler led og bruger en anden kvadratsætning.
$\frac{k^2 - p^2}{k-p} - p = \frac{(k+p)(k-p)}{k-p} - p$ $= k + p - p$ $= k$	Bruger en kvadratsætning, forkorter med fælles faktor og samler led.

0.8 Ulighedstegn

Symbol	Forklaring
$a < b$	a er mindre end b
$a \leq b$	a er mindre end eller lig med b
$a > b$	a er større end b
$a \geq b$	a er større end eller lig med b
$a \neq b$	a er forskellig fra b

0.9 Intervaller

Interval	Diagram	Beskrivelse
$]a,b[$		Åbent interval. Tallene a og b er ikke med.
$[a,b]$		Lukket interval. Tallene a og b er med.
$[a,b[$		Halvåbent interval. Tallet a er med, og b er ikke med.
$]-\infty,a[$		Ubegrænset interval. Alle tal, der er mindre end a. Tallet a er ikke med.
$[a,\infty[$		Ubegrænset interval. Alle tal, der er større end a. Tallet a er med.
$\mathbb{R}$		Alle reelle tal.

0.10 Opgaver

Opgave 0.1

Bestem led og faktorer i følgende udtryk:

a) $2+3\cdot 32-6\cdot 3\cdot 5$

b) $k-a(2+k)+b$

c) $\frac{4}{t}x+\frac{5x+1}{5t}$

d) $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+b$

Opgave 0.2

Udregn følgende:

a) $5-7+1$

b) $12-(-7)$

c) $-5-2$

d) $8+(2-3)$

e) $-7+(56+3)$

f) $5\cdot(6-2)$

g) $2\cdot(5\cdot(-3)+1)\cdot 3$

h) $\frac{3\cdot\sqrt{7-(-29)}}{4-2}+4$

i) $28:(3+4)$

Opgave 0.3

Definer en lineær funktion f ved $f(x)=-5x+2$. Beregn værdien af følgende udtryk:

a) $f(2)-f(1)$

b) $f(3)\cdot f(-1)+f(-5)$

Opgave 0.4

Lad konstanterne a, b, c og d være defineret på følgende vis:

$$a=7,\ b=-2,\ c=-5 \text{ og } d=\frac{1}{4}$$

Beregn værdien af følgende udtryk:

a) $a-b$

b) $3a+2b-4c$

c) $a(b+c)$

d) b^2-4ac

e) $d-c^2$

Opgave 0.5

Forkort brøken så meget som muligt:

a) $\frac{22}{10}$

b) $\frac{12}{16}$

c) $\frac{30}{105}$

d) $\frac{56}{8}$

e) $\frac{-18}{60}$

f) $\frac{3}{-3}$

Opgave 0.6

Omskriv til uforkortelig brøk:

a) $\frac{1}{7}+\frac{5}{7}$

b) $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

d) $\frac{4}{3}+\frac{4}{5}$

e) $\frac{5}{14}+\frac{10}{21}$

f) $\frac{5}{6}+\frac{8}{15}$

g) $\frac{1}{5}+2$

h) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$

Opgave 0.7

Omskriv til uforkortelig brøk:

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}$

b) $\frac{4}{9}-\frac{1}{3}$

c) $3-\frac{2}{5}$

d) $\frac{1}{6}-\frac{5}{8}$

e) $\frac{2}{9}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$

f) $\frac{5}{12}-\left(1+\frac{1}{4}\right)$

Opgave 0.8

Omskriv til uforkortelig brøk:

a) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}$

c) $\frac{2}{9}\cdot\frac{9}{2}$

d) $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{5}$

e) $2\cdot\frac{7}{4}$

f) $\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{7}{10}+\frac{2}{5}\right)$

Opgave 0.9

Omskriv til uforkortelig brøk:

a) $\frac{10}{11}:5$

b) $\frac{4}{5}:\frac{8}{3}$

c) $\frac{1}{7}:\frac{2}{3}$

d) $6:\frac{1}{2}$

e) $4:\frac{8}{9}$

f) $\frac{1+2}{6\cdot 2}:\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}$

Opgave 0.10

Omskriv følgende udtryk til én brøk:

a) $\frac{2a}{b}+\frac{k}{b}$

b) $4-\frac{x}{5}$

c) $\frac{s}{t}+\frac{1}{2s}$

d) $\frac{k}{W}\cdot\frac{m-n}{a}$

e) $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

f) $\frac{2u}{u+v}:\frac{u}{v}$

Opgave 0.11

Forkort følgende brøker mest muligt:

a) $\frac{2ktW}{6mkW}$

b) $\frac{a^2\cdot b^3}{a\cdot b^5}$

c) $\frac{um-uj+uk}{t(m-j+k)}$

d) $\frac{s^2k^3}{k^2s^3}$

e) $\frac{r+r^2}{1+r}$

f) $\frac{ap+aq}{mp+mq}$

Opgave 0.12

Omskriv til én potens:

a) $a^2\cdot a$

b) $\frac{a^2}{a^7}$

c) $b^4\cdot b^2\cdot\frac{1}{b^3}\cdot b$

d) $(b^5)^2\cdot b^2\cdot(b^{-1})^3$

e) $\left(\sqrt[4]{c^3}\right)^2$

f) $\frac{c}{\sqrt{c}}$

Opgave 0.13
Ophæv parenteserne:

a) $-(a+2)$
b) $3+(5-k)$
c) $a(x+7)$
d) $8(\frac{5}{2}-L+k)$
e) $w(p+q)t$
f) $-\frac{1}{3}(a-b)$

Opgave 0.14
Sæt fælles faktorer uden for parentes:

a) $pm-qm+zm$
b) $4x+2y$
c) $kx-yk$
d) $tws+kwp+tpw$
e) k^3+k
f) x^2y+xy^2-xy

Opgave 0.15
Udfyld de tomme felter:

a) $2(t+5) = \_\_\_ \cdot t + \_\_\_$
b) $\alpha(x-m)+\beta = \_\_\_ \cdot x + \_\_\_\_\_\_$
c) $ax^2+bx+c = a(x^2 + \_\_\_ \cdot x + \_\_\_)$
d) $5a+b = 5(\_\_\_ + \_\_\_)$

Opgave 0.16
Omskriv følgende udtryk ved hjælp af kvadratsætningerne:

a) $(x+y)^2$
b) $(t-W)^2$
c) $(u-z)(u+z)$
d) $(a-b)(b-a)$
e) $(3e+rw)^2$
f) $(z^2-5y)^2$

Opgave 0.17
På lige fod med kvadratsætninger findes også en slags „kubiksætninger“. Her skal du finde én af dem. Omskriv $(a+b)^3$ ved at gange parenteserne ud.

Opgave 0.18
Omskriv til et kvadrat ved hjælp af kvadratsætningerne:

a) u^2+q^2+2uq
b) $100-20x+x^2$
c) $-4c+4+c^2$
d) $k^2u^2+16+8ku$
e) $\frac{x^2}{4}+s^2+sx$

Opgave 0.19
Brug kvadratsætningerne til at udfylde de tomme felter:

a) $(t+r)^2 = t^2 + \_\_\_ + r^2$
b) $(x-5)^2 = x^2 - 10x + \_\_\_$
c) $(y+2p)^2 = \_\_\_ + 4yp + \_\_\_$
d) $(6w + \_\_\_)^2 = 36w^2 + 84w + \_\_\_$
e) $(x - \_\_\_)^2 = x^2 - x + \_\_\_$

Opgave 0.20

Brug kvadratsætningerne til at udfylde de tomme felter:

a) $y^2 - c^2 = (\_\_\_ - \_\_\_)(\_\_\_ + \_\_\_)$

b) $9L^2 + 4a^2 - 12La = (\_\_\_ - \_\_\_)^2$

c) $x^2 - 22x + 121 = (\_\_\_ - \_\_\_)^2$

d) $y^2 + 20y + 100 = (\_\_\_\_\_)^2$

Opgave 0.21

Udfyld de tomme felter:

a) $x^2 + 8x + \_\_\_ = (x + \_\_\_)^2$

b) $x^2 - 24x + \_\_\_ = (x - \_\_\_)^2$

c) $x^2 + 3x + \_\_\_ = (x + \_\_\_)^2$

d) $p^2 - 12p + \_\_\_ = (\_\_\_\_\_)^2$

e) $x^2 + bx + \_\_\_ = (x + \_\_\_)^2$

f) $x^2 - \frac{r}{q}x + \_\_\_ = (\_\_\_\_\_)^2$

Opgave 0.22

Reducer følgende udtryk:

a) $p + 2p + 3p$

b) $3a - 7b - 6a + 11b$

c) $2n + 3(n + m) - 5m$

d) $b - 2(t - b) + 6t$

e) $x^2 - 5x - (-x^2 - 3x)$

f) $5a - (-((-3a + 2b) - 4b) + (-7a - (a - b)) - 3b)$

Opgave 0.23

Reducer følgende udtryk:

a) $(a + b)(-3a - b) + 4(a + b)b$

b) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

c) $qW + (q - W)^2 - q(q - W)$

d) $(x - y)(x + y) - (x - y)^2 - 2y(x - y)$

e) $a(4a + b) - b(4b + a)$

f) $2(t - s)^2 - (t + 2s)^2 + 8ts$

Opgave 0.24

Reducer følgende:

a) $\dfrac{10ab + 25a}{10a - 5ab}$

b) $\dfrac{x^2 + y^2 - 2xy}{x^2 - y^2}$

c) $\dfrac{x^2 + 8x + 16}{x^2 - 16}$

d) $\dfrac{a^2b^2 - c^2}{ab - c}$

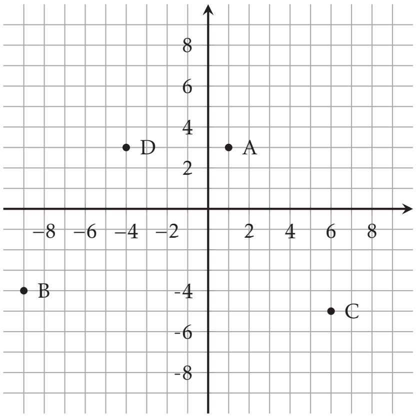
1 Opgaver om variabelsammenhænge

Opgave 1.1

Tegn et passende koordinatsystem, og afsæt følgende punkter: $A = (-1,5)$, $B = (8,-2)$, $C = (-1{,}5;-4)$ og $D = (7;5{,}5)$. Hvilke kvadranter ligger punkterne i?

Opgave 1.2

Aflæs koordinatsættene til punkterne i dette koordinatsystem:



Opgave 1.3

Hvis man kender radius r for en cirkel, så kan man beregne omkredsen O og arealet A ved hjælp af disse formler:

$$O = 2\pi r$$
$$A = \pi r^2$$

Der er altså to variabelsammenhænge mellem variablerne r , O og A.

a) Udfyld tabellen

r/cm	O/cm	A/cm^2
0		
1		
2		
3		
4		

b) Indtegn data fra tabellen i et (r, O)- og et (r, A)-koordinatsystem for at vise de to sammenhænge.

c) Tegn linjer mellem punkterne, så du får to grafer.

Husk, at π er en konstant, som cirka er lig med 3,14159265...

Opgave 1.4

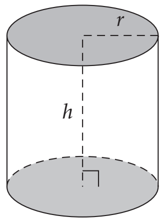
En vandtank er formet som en opretstående cylinder med en højde på 210 cm og en radius på 63 cm. Fra toppen af vandtanken kan man måle afstanden ned til vandspejlet. Når afstanden er 0 cm, er tanken altså helt fyldt op.

a) Tegn en skitse af vandtanken. Hvilke variabler er i spil her? Tegn dem ind på skitsen.

b) Hvor mange liter vand er der i tanken, hvis afstanden til vandspejlet er 0 cm, 10 cm, 20 cm, 50 cm og 100 cm? Sæt dine resultater ind i en tabel.

c) Lav et passende koordinatsystem, og tegn dine resultater fra tabellen ind som punkter, så du får et grafisk billede af sammenhængen.

d) Prøv at opstille en formel, som kan benyttes til at beregne mængden af vand i tanken, når man kender afstanden fra toppen af tanken til vandspejlet.

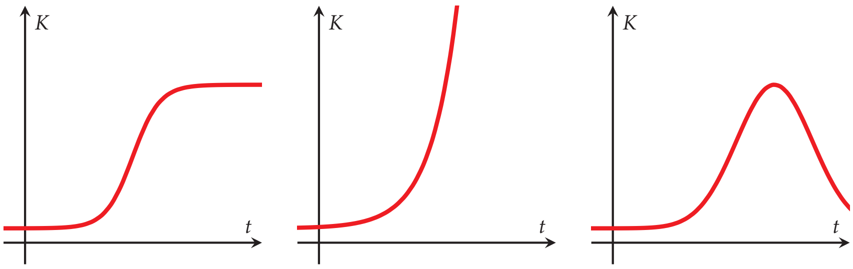


Til opgaven kan det benyttes, at rumfanget V af en cylinder med radius r og højde h er givet ved

$$V = \pi r^2 h.$$

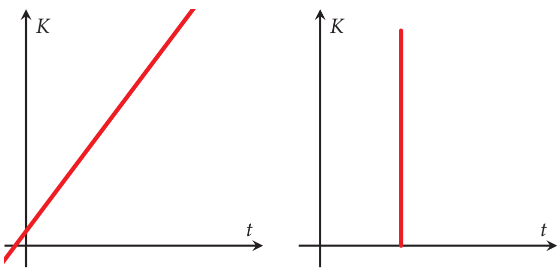
Opgave 1.5

På tre små danske øer udsættes 20 kaniner i håbet om, at de vil yngle og udvikle sig til en fast bestand af kaniner, som vil kunne tiltrække turister og jægere. Bestandene udvikler sig imidlertid forskelligt. Nedenfor ses grafer, som viser sammenhængen mellem tiden t og antallet af kaniner K.



a) Giv i hvert tilfælde en sproglig beskrivelse af udviklingen i antallet af kaniner.

b) På en fjerde ø gør man samme eksperiment. Hvilken af følgende grafer kan *ikke* beskrive kaninbestandens udvikling på øen? Begrund dit svar.



Opgave 1.6

En lineær sammenhæng mellem t og R har formlen

$$R = 2t - 3$$

a) Hvad er hældningskoefficienten for den lineære sammenhæng?

b) Udfyld tabellen

t	-1	0	1		7	
R				5		17

c) Tegn en graf for sammenhængen i et passende koordinatsystem.

Opgave 1.7

Eurokursen svinger lidt, men på grund af den danske fastkurspolitik ligger den altid tæt på 750 kr. Det vil sige, at 750 kr. kan veksles til 100 €. I denne opgave vil vi benytte denne kurs. Når man skal hæve euro i en dansk bank, er der normalt en yderligere pris i form af et vekselgebyr. I en bank antages dette vekselgebyr at være 30 kr.

a) Udregn den samlede pris for at hæve 30 €, 60 €, 100 € og 200 €.

b) Bestem en formel for sammenhængen mellem antallet af euro E og prisen i kroner K. Argumenter for, at sammenhængen er lineær.

Opgave 1.8

Prisudviklingen for en bestemt vare kan i perioden 2010–2018 beskrives ved denne formel:

$$p = 2{,}25t + 45{,}5$$

hvor p angiver prisen i kroner, og t angiver tiden i år efter 2010.

a) Forklar, hvad tallene 2,25 og 45,5 fortæller om prisudviklingen.

b) Lav en sproglig beskrivelse af sammenhængen.

Opgave 1.9

Rasmus kører i sin bil med en fart på 78 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Indfør passende variabler, og bestem en formel for sammenhængen mellem tiden målt i timer og den strækning i kilometer, som Rasmus tilbagelægger i sin bil.

Opgave 1.10

Et målebæger fyldes med fint salt. En deciliter fint salt vejer 120 g, og målebægeret vejer 90 g. Indfør passende variabler, og opstil en formel, der beskriver sammenhængen mellem mængden af salt i bægeret og den samlede vægt af salt og målebæger.

Opgave 1.11

Et vandkar tømmes for vand ved hjælp af en pumpe. Pumpen kan fjerne 8 liter vand i minuttet. Efter 3 minutter er der stadigvæk 84 liter tilbage i karret.

a) Indfør passende variabler, og opstil en formel for en sammenhæng mellem tiden og mængden af vand i karret.

b) Hvor lang tid går der, fra man begynder at pumpe, til vandkarret er helt tømt?

Opgave 1.12

Længden af en akrylstang ændres med temperaturen. Hvis L betegner længden af en given akrylstang i millimeter, og T betegner temperaturen målt i °C, gælder følgende formel:

$$L = 2000 \cdot (1 + 75 \cdot 10^{-6} \cdot (T - 20))$$

a) Argumenter for, at der er tale om en lineær sammenhæng.

b) Hvad er hældningskoefficienten?

c) Hvad er stangens længde ved 20 °C?

Opgave 1.13

Opstil en formel, som udtrykker følgende variabelsammenhænge:

a) T er proportional med z med proportionalitetskonstanten 13.

b) r er proportional med c med proportionalitetskonstanten -4.

c) O er proportional med r med proportionalitetskonstanten 2π.

d) A er proportional med kvadratet på r med proportionalitetskonstanten π.

2 Opgaver om funktioner

Opgave 2.1

Lad g være en lineær funktion givet ved

$$g(x) = 3x + 12$$

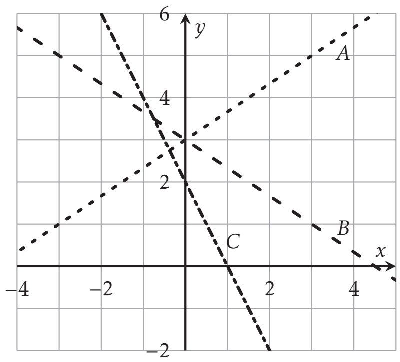
a) Bestem $g(2)$.

b) Bestem x, så $g(x) = 9$.

Opgave 2.2

På figur 1 ses graferne for tre lineære funktioner. De har forskrifterne

$$f(x) = -2x + 2,\ g(x) = -\frac{2}{3}x + 3 \text{ og } h(x) = \frac{2}{3}x + 3$$

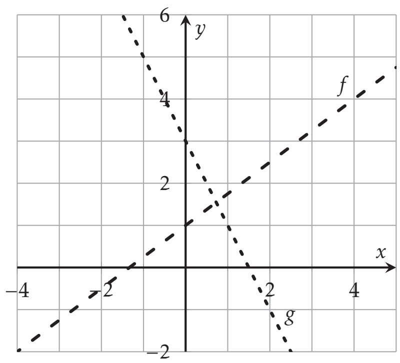


Figur 1

Afgør, hvilken graf der hører til hvilken forskrift. Begrund dit svar.

Opgave 2.3

På figur 2 ses graferne for to lineære funktioner f og g.



Figur 2

Bestem forskrifter for f og g.

Opgave 2.4

Bestem forskriften for den lineære funktion f, hvis graf går gennem punkterne A og B, når

a) $A = (1,2)$ og $B = (4,17)$.

b) $A = (-3,-4)$ og $B = (3,0)$.

c) $A = (-3,4)$ og $B = (1,-4)$.

d) $A = (-5,7)$ og $B = (1,-2)$.

Opgave 2.5

Bestem nulpunkterne for hver af de fire funktioner i opgave 2.4.

Opgave 2.6

Det koster 80 kr. at komme ind til studiestartsfesten, og det koster 20 kr. for en sodavand til festen.

a) Hvad koster det i alt, hvis man drikker 3 sodavand til festen?

b) Opstil en forskrift for den samlede udgift for en deltager til studiestartsfesten som funktion af antallet af sodavand, deltageren drikker. Find selv på passende navne til variablerne.

Opgave 2.7

Camilla vejer mel af i en skål. Når der er 3 deciliter mel i skålen, vejer den 565 gram. Når der er 11 deciliter mel i den, vejer den 1045 gram.

a) Lad $v(m)$ være vægten (i gram) af skålen med mel, når der er m deciliter mel i den. Bestem en forskrift for $v(m)$.

b) Hvad vejer skålen uden mel i?

Opgave 2.8

Lad f være en lineær funktion med forskriften $f(x) = ax + 8$.

a) Bestem a, så grafen for f går gennem punktet $(4,2)$.

Opgave 2.9

En lineær funktion k har forskriften

$$k(x) = 4x + 1$$

Bestem $\mathrm{Vm}(k)$, når $\mathrm{Dm}(k) =]1,5]$.

Opgave 2.10

En lineær funktion R har forskriften

$$R(x) = -3(x + 2)$$

Bestem $\mathrm{Dm}(R)$, når $\mathrm{Vm}(R) = [-6,6[$.

Opgave 2.11

En lineær funktion f med en negativ hældning har definitionsmængden $[2,7]$ og værdimængden $[-3,3]$. Bestem en forskrift for f.

Opgave 2.12

En flok bjergbestigere skal bestige et bjerg. De ved, at temperaturen falder jævnt afhængigt af højden.

I 1000 meters højde måler de en temperatur på 17°C. 500 meter højere oppe er temperaturen faldet til 14,5°C.

a) Indtegn en graf for sammenhængen mellem højde og temperatur.

b) Lad $T(x)$ betegne temperaturen målt i °C i x meters højde. Bestem en forskrift for T.

c) Hvad er temperaturen ifølge modellen ved bjergets fod?

d) Den laveste temperatur, de måler, er 10°C. I hvilken højde måler de den?

Opgave 2.13

Højden af et træ udvikler sig i en årrække tilnærmelsesvist efter følgende forskrift

$$h(t) = 0{,}28t + b$$

hvor $h(t)$ betegner træets højde i meter, og t betegner antallet af år efter 2011.

a) Bestem værdien af $h(5) - h(2)$, og forklar betydningen af resultatet i denne sammenhæng.

b) Det oplyses, at træet i 2014 havde en højde på 11 meter. Brug dette til at bestemme værdien af b.

Opgave 2.14

Når man opløser fosfat i vand, ændres væskens farve. Dette kan måles med et såkaldt spektrofotometer, som sender lys gennem væsken og måler på, hvor meget lys der absorberes.

Peter har i kemilaboratoriet målt absorbansen af forskellige fosfatopløsninger. I tabel 1 ses hans målinger.

Koncentration af fosfat i $\frac{\text{mol}}{\text{L}}$	0,00	$1{,}20\cdot10^{-5}$	$2{,}40\cdot10^{-5}$	$3{,}60\cdot10^{-5}$	$4{,}80\cdot10^{-5}$
Absorbans	0,00	0,291	0,528	0,786	1,016

Tabel 1

a) Benyt regression til at opstille en model på formen $A = a \cdot C + b$, hvor C betegner koncentrationen af fosfat, og A betegner absorbansen.

b) Benyt modellen til at bestemme absorbansen af en prøve med en fosfatkoncentration på $3{,}00 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{mol}}{\text{L}}$.

Peter har også en prøve med en ukendt fosfatkoncentration. I spektrofotometeret kan han måle en absorbans på 0,820.

c) Bestem fosfatkoncentrationen i den sidste opløsning.

Opgave 2.15

Tabellen viser udviklingen i gennemsnitslevealderen for mænd i perioden 2002–2016.

Årstal	2002	2004	2006	2008	2010	2012	2014	2016
Gsn. levealder i år	74,7	75,2	75,9	76,3	77,1	77,9	78,5	78,8

Tabel 2: Kilde: Danmarks Statistik

a) Indtegn data i et passende koordinatsystem.

b) Brug data fra tabellen til at opstille en lineær model på formen $f(x) = a \cdot x + b$, hvor x betegner antal år efter 2002, og $f(x)$ betegner den gennemsnitlige levealder.

c) Forklar, hvad konstanterne a og b betyder for udviklingen i den gennemsnitlige levealder for mænd.

d) Benyt modellen til at bestemme den gennemsnitlige levealder for mænd i 2007.

e) Løs ligningen $f(x) = 80$, og giv en fortolkning af resultatet.

Opgave 2.16 *Fra eksamen HTX Matematik B, 2017*

Tabellen nedenfor beskriver udviklingen i diamantprisen pr. karat i U.S. dollars i perioden 1960–2015:

År efter 1960	0	10	20	30	40	50	54	55
Pris pr. karat i USD	2700	6900	10500	13900	15100	24500	28400	29650

Tabel 3: Kilde: http://www.statista.com/statistics/279053/worldwide-sales-of-polished-diamonds/

a) Indtegn data i et passende koordinatsystem.

b) Benyt regression til at opstille en lineær model for udviklingen.

c) Lav en ny model ud fra data for årene 1960–1990.

d) Undersøg forskellen mellem den faktiske pris i 2015 og den pris, man får ved at benytte den sidste af modellerne.

e) Kunne man i 1990 have forudset prisudviklingen?

Opgave 2.17

I de to tabeller nedenfor ses to datasæt:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5,6	5,4	5,9	6,6	6,5	6,8	7,6	7,5

Tabel 4

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5,1	5,6	6,1	6,5	6,9	7,1	7,3	7,4

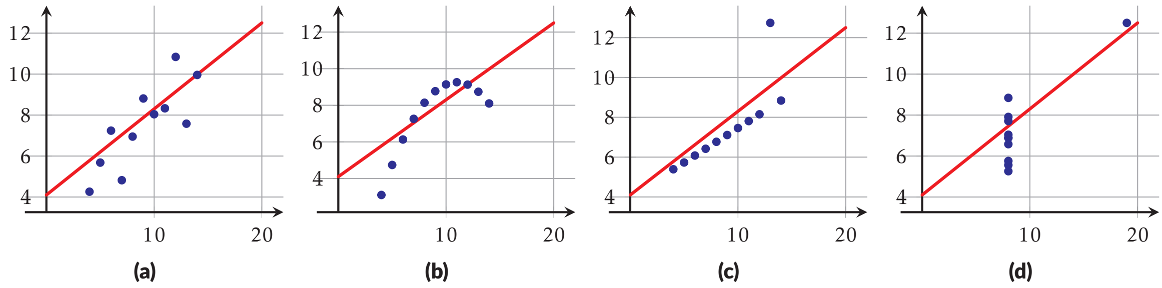
Tabel 5

a) Foretag en lineær regression på begge sæt af data. Noter i den forbindelse forklaringsgraden R^2.

b) Hvilket datasæt mener du bedst kan forklares med en lineær model? Begrund dit svar.

Opgave 2.18

I 1973 konstruerede den franske statistiker Francis Anscombe fire forskellige datasæt, som ses afbilledet i hver sit koordinatsytem i figur 3. Datasættene har det tilfældes, at når man laver regression på dem med mindste kvadraters metode, så får man i alle tilfælde sammenhængen $y = 0{,}5x + 3$ og forklaringsgraden $R^2 = 0{,}67$.



Figur 3

I hvilket tilfælde passer den lineære regressionsmodel bedst? Hvad går galt i de andre tilfælde? Diskuter dine observationer med din sidemand, og skriv konklusionerne ned med dine egne ord.

3 Opgaver om ligninger

Opgave 3.1

Løs følgende ligninger:

a) $5x - 2 = 8$

b) $3 - 2x = 5x + 10$

c) $12x - 40 = 100x + 4$

d) $\dfrac{45}{x-2} = 9$

e) $\dfrac{12x+9}{30-4x} = 0$

f) $3(x - 0{,}2) = 5(x+1) - 1{,}5x$

Opgave 3.2

Løs følgende ligninger:

a) $\dfrac{2x+1}{3} = \dfrac{3x}{4}$

b) $\dfrac{6}{x} = \dfrac{3}{8}$

c) $\dfrac{5}{x-1} = \dfrac{2}{x+1}$

d) $\dfrac{2}{5-x} = \dfrac{6}{2x+3}$

Opgave 3.3

Opstil ligninger, der kan anvendes til løsning af følgende problemstillinger:

a) Et taxaselskab tager 70 kr. i startgebyr og 12 kr. per kørt kilometer. Hvor langt kan man køre for 250 kr.?

b) Mathias er 2 år ældre end søsteren Mette, og tilsammen er de 30 år. Hvor gammel er Mathias?

c) Nogle fra klassen vil arrangere en fest i en lejet hytte. Det koster 2700 kr. at leje hytte i én weekend. Alle deltagerne skal betale det samme, og alle er enige om, at udgiften per person ikke må blive højere end 150 kr. Hvor mange skal deltage, før festen kan blive til noget?

Opgave 3.4

Løs hver af problemerne i opgave 3.3 ved at løse ligningerne.

Opgave 3.5

Løs følgende ligninger:

a) $8 + t = -2t + 59$

b) $\dfrac{8-y}{2} = 7$

c) $\frac{2}{3}(z+6) = 10$

d) $-4(5 - 9w) - 6w = 13 - 10w$

Opgave 3.6

For hvert af disse udtryk skal du isolere den variabel, der er betegnet med et stort bogstav:

a) $u = rI$

b) $c = \dfrac{a}{B}$

c) $a^2 = b^2 + c^2 - 2abT$

d) $a = \dfrac{y_2 - y_1}{X_2 - x_1}$

e) $\dfrac{S}{a} = \dfrac{t}{b}$

f) $R^2 = (R-h)^2 + \dfrac{k^2}{4}$

Opgave 3.7

En lineær funktion f er givet ved $f(x) = 2x+5$. Ved hvilken værdi af x forekommer funktionsværdien 1?

Opgave 3.8

Bestem skæringspunktet mellem graferne for de to lineære funktioner givet ved

$$R(x) = 2x+5 \text{ og } T(x) = -x-7$$

Opgave 3.9

Anna og Signe vil gerne på en rejse sammen. Anna har allerede sparet 2500 kr. sammen, mens Signe har sparet 1700 kr. sammen.
Hver uge sparer Signe 175 kr. sammen, og hver uge sparer Anna 150 kr. sammen. Hvor mange uger går der, før de har sparet lige mange penge op?

Opgave 3.10

Kristine har betalt 215 kr. for en vare. Det er inklusiv en moms på 25%. Hvad koster varen uden moms?

Opgave 3.11

Kurt tanker bilen, da benzinmåleren viser, at tanken er 1/8 fuld. Han har kun penge til at fylde 45 liter på tanken. Herefter viser måleren, at tanken er 3/4 fuld. Hvor meget benzin kan der være i tanken på Kurts bil?

Opgave 3.12

Simon bor i Aarhus, og han beslutter sig for at køre til grænsen for at handle ind til en fest. Han kører i alt 360 km. Da han kommer hjem, er der kun 4 liter tilbage i tanken på bilen. Hvor mange liter var der i tanken, før han tog af sted, hvis bilen kan køre 15 km/L benzin?

Opgave 3.13

Brøndby og Korsør ligger 95 km fra hinanden. Camilla ønsker at køre fra Brøndby til Korsør på præcis én time. Den første halve time kører hun med en fart på 70 km/t. Hvlken fart skal hun holde resten af tiden, hvis hun vil nå sit mål?

Opgave 3.14

Denne klassiske gåde kan findes i et gammelt hinduistisk skrift:
En kvindes perlekæde går i stykker. Halvdelen af perlerne falder midt på gulvet, en fjerdedel ruller ind under en stol, en sjettedel falder i kvindens skød og tre perler sidder stadigvæk på snoren.

a) Kald antallet af perler i perlekæden x, og opstil en ligning, der kan bruges til at finde x.

b) Hvor mange perler sad der oprindeligt i perlekæden?

Opgave 3.15

Matematikeren Diofant levede i Alexandria i det tredje århundrede efter vor tidsregning, og han havde stor betydning for udviklingen af teknikker til løsning af ligninger. En anden matematiker, Metrodorus, som levede på samme tid, lavede efter Diofants død denne gåde:

> *Diofants ungdom varede en sjettedel af hans liv; efter en syvendedel mere blev han gift; han fik skæg efter endnu en tolvtedel. Fem år senere fik han en søn, som levede halvt så længe som faderen, og Diofant døde fire år efter sønnen.*

Hvor gammel blev Diofant?

Opgave 3.16

Se på ligningen

$$2(x+5)-7=2x+2$$

Undersøg om $x=5$ er en løsning til ligningen. Prøv at løse ligningen. Hvad går galt? Hvad betyder det?

Opgave 3.17

Benyt den grafiske metode til at løse følgende ligningssystemer:

a) $\begin{aligned} y &= x+4 \\ y &= -3x+8 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} -2y &= -6x+12 \\ 8y &= -4x+64 \end{aligned}$

Opgave 3.18

Løs følgende ligningssystemer:

a) $\begin{aligned} 3x-2y &= 9 \\ 4x+6y &= 12 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 11x+y &= 28 \\ 4x+3y &= 26 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 5x-3y &= -14 \\ 3x+6y &= 15 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 2x+3y &= 22 \\ 5x-2y &= 17 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x &= 3y-5 \\ 5x &= 22-4y \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 11x &= 6y+9 \\ 5y &= 12+9x \end{aligned}$

Opgave 3.19

Løs følgende ligningssystemer:

a) $\begin{aligned} 4x-2y &= -4 \\ 2x+y &= 5 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \frac{1}{6}x+\frac{1}{3}y &= 1 \\ 4x-\frac{3}{2}y &= 5 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} -\frac{2}{3}x+4y &= \frac{31}{15} \\ 8x+3y &= \frac{29}{5} \end{aligned}$

Opgave 3.20
To rockere går ind i en kiosk. Den ene køber to bajere og en pakke smøger. Den anden køber tre bajere og to pakker smøger. Den første rocker skal betale 60,90 kr, og den anden rocker skal betale 113,85 kr. Hvad er prisen på en pakke smøger i kiosken?

Opgave 3.21
Prisen for at køre med taxa udregnes forskelligt hos Krone-Taxa og CityBilen. Hos Krone-Taxa skal man betale 17 kr. for hver kilometer og 20 kr. i startgebyr. Hos Citybilen er startgebyret kun 10 kr., men her koster det 19 kr. for hver kilometer. Hvor langt skal man køre for at de to selskaber er lige billige?

Opgave 3.22
To tal har summen 195. Differensen mellem de to tal er 25. Bestem de to tal.

Opgave 3.23
To tals sum er 121. Dividerer du det største med det mindste, får du 12 med 4 til rest. Bestem de to tal ved hjælp af to ligninger med to ubekendte.

Opgave 3.24
Differensen mellem to tals sum og de samme to tals differens er 40. Produktet af tallene er 500. Bestem de to tal ved hjælp af to ligninger med to ubekendte.

Opgave 3.25
Viggo har flere penge end Otto. Hvis Viggo gav Otto 20 kr., ville de have lige mange penge, men hvis Otto gav Viggo 22 kr., ville han have dobbelt så mange penge som Otto. Hvor mange penge har de hver?

Opgave 3.26
Hos et udlejningsfirma kan man leje biler under to forskellige vilkår.

- Et depositum på 500 kr. plus 2,20 kr./km.
- Et depositum på 800 kr. plus 1,90 kr./km.

a) Opstil to ligninger, som beskriver de to vilkår.

b) Beregn, hvad det koster at køre 650 km under de to vilkår.

c) Bestem pris og kilometertal, når de to vilkår er lige dyre.

Opgave 3.27
En skiløber bevæger sig ned ad en løjpe med en fart på 30 m/s. Bag hende opstår en lavine, som bevæger sig med en fart på 48 m/s.

a) Hvor lang tid går der, før lavinen rammer skiløberen, hvis lavinen opstår 300 m bag hende?

b) 900 m fra skiløberen ligger det nærmeste skjul. Hvor langt et forspring skal skiløberen have til lavinen, hvis hun skal nå skjulet?

Opgave 3.28

Forsøg at løse følgende ligningssystem med hver af de metoder, som du har lært:

$$x - 2y = 6$$
$$3x - 18 = 6y$$

Hvad går går galt, når du forsøger? Hvorfor?

Opgave 3.29

Prøv at opstille et ligningssystem, som ikke har nogen løsning.

Opgave 3.30

Prøv at opstille et ligningssystem med uendeligt mange løsninger.

Opgave 3.31

Løs nogle af ligningssystemerne i opgave 3.18 ved hjælp af determinantmetoden. Prøv at lave et regneark, der bruger determinantmetoden til at løse lineære ligningssystemer helt automatisk.

Opgave 3.32

Find x, y og z, der opfylder, at

$$x + y + z = -2$$
$$2x - 4y + z = 25$$
$$5x + 2y - 7z = -7$$

4 Facitliste

Her er facit til de opgaver, hvor et facit giver mening. Facitlisten er ment som en måde at tjekke reultatet på, når man *har* regnet opgaven. Hvis man har fået et andet resultat end det, facitlisten giver, er det vigtigt, at man forsøger at regne opgaven igen. Det er bestemt ikke umuligt, at der optræder fejl i facitlisten. Hvis man finder sådan en, bedes man sende en mail til msp@aarhustech.dk, så den kan blive rettet.

0.2 a) -1; **b)** 19; **c)** -7; **d)** 7; **e)** 52; **f)** 20; **g)** -84; **h)** 13; **i)** 4

0.3 a) -5; **b)** -64

0.4 a) 9; **b)** 37; **c)** -49; **d)** 144; **e)** $-\frac{99}{4}$

0.5 a) $\frac{11}{5}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{2}{7}$; d) 7; e) $-\frac{3}{10}$; f) -1

0.6 a) $\frac{6}{7}$; b) $\frac{5}{8}$; c) $\frac{5}{6}$; d) $\frac{32}{15}$; e) $\frac{5}{6}$; f) $\frac{41}{30}$; g) $\frac{11}{5}$; h) $\frac{59}{70}$

0.7 a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{1}{9}$; c) $\frac{13}{5}$; d) $-\frac{11}{24}$; e) $\frac{13}{18}$; f) $-\frac{5}{6}$

0.8 a) $\frac{1}{12}$; b) $\frac{2}{7}$; c) 1; d) $\frac{3}{20}$; e) $\frac{7}{2}$; f) $\frac{11}{4}$

0.9 a) $\frac{2}{11}$; b) $\frac{3}{10}$; c) $\frac{3}{14}$; d) 12; e) $\frac{9}{2}$; f) $\frac{3}{32}$

0.10 a) $\frac{2a+k}{b}$; **b)** $\frac{20-x}{5}$; **c)** $\frac{2s^2+t}{2st}$; **d)** $\frac{k(m-n)}{Wa}$; **e)** $\frac{xy}{x+y}$; **f)** $\frac{2v}{u+v}$

0.11 a) $\frac{t}{3m}$; **b)** $\frac{a}{b^2}$; **c)** $\frac{u}{t}$; **d)** $\frac{k}{s}$; **e)** r; **f)** $\frac{a}{m}$

0.12 a) a^3; **b)** a^{-5}; **c)** b^4; **d)** b^9; **e)** $c^{3/2}$; **f)** $\sqrt{c}$

0.13 a) $-a-2$; **b)** $8-k$; **c)** $ax+7a$; **d)** $20-8L+8k$; **e)** $wpt+wqt$; **f)** $\frac{1}{3}b-\frac{1}{3}a$

0.14 a) $m(p-q+z)$; **b)** $2(2x+y)$; **c)** $k(x-y)$; **d)** $w(ts+kp+tp)$; **e)** $k(k^2+1)$; **f)** $xy(x+y-1)$

0.15 a) $2(t+5)=2t+10$;
b) $\alpha(x-m)+\beta=\alpha x+\beta-\alpha m$;
c) $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$;
d) $5a+b=5(a+\frac{b}{5})$

0.16 a) x^2+y^2+2xy; **b)** t^2+W^2-2tW;
c) u^2-z^2; **d)** $-a^2-b^2+2ab$;
e) $9e^2+r^2w^2+6erw$; **f)** $z^4+25y^2-10z^2y$

0.17 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

0.18 a) $(u+q)^2$; **b)** $(10-x)^2$; **c)** $(c-2)^2$; **d)** $(ku+4)^2$; **e)** $(\frac{1}{2}x+s)^2$

0.19 a) $(t+r)^2=t^2+2tr+r^2$;
b) $(x-5)^2=x^2-10x+25$;
c) $(y+2p)^2=y^2+4yp+4p^2$;
d) $(6w+7)^2=36w^2+84w+49$;
e) $(x-\frac{1}{2})^2=x^2-x+\frac{1}{4}$

0.20 a) $y^2-c^2=(y-c)(y+c)$;
b) $9L^2+4a^2-12La=(3L-2a)^2$;
c) $x^2-22x+121=(x-11)^2$;
d) $y^2+20y+100=(y+10)^2$

0.21 a) $x^2+8x+16=(x+4)^2$;
b) $x^2-24x+144=(x-12)^2$;
c) $x^2+3x+\frac{9}{4}=(x+\frac{3}{2})^2$;
d) $p^2-12p+36=(p-6)^2$;
e) $x^2+bx+\frac{b^2}{4}=(x+\frac{b}{2})^2$;
f) $x^2-\frac{r}{q}x+\frac{r^2}{4q^2}=(x-\frac{r}{2q})^2$

0.22 a) $6p$; **b)** $4b-3a$; **c)** $5n-2m$; **d)** $4t+3b$; **e)** $2(x^2-x)$; **f)** $10a$

0.23 a) $3(b^2-a^2)$; **b)** a^3+b^3; **c)** W^2; **d)** 0; **e)** $4(a^2-b^2)$; **f)** t^2-2s^2

0.24 a) $\frac{2b+5}{2-b}$; **b)** $\frac{x-y}{x+y}$; **c)** $\frac{x+4}{x-4}$; **d)** $ab+c$

1.1 Anden, fjerde, tredje og første kvadrant.

1.2 $A=(1,3)$, $B=(-9,-4)$, $C=(6,-5)$ og $D=(-4,3)$

1.4 b) 2618,5 L; 2493,8 L; 2369,1 L; 1995,0 L og 1371,6 L

1.6 a) 2; **b)** Udfyldt:

t	-1	0	1	4	7	10
R	-5	-3	-1	5	11	17

1.7 a) 255 kr., 480 kr., 780 kr., 1530 kr.; **b)** $K=7{,}5\cdot E+30$

1.11 **b)** 13,5 minutter

1.12 **b)** $150 \cdot 10^{-3}$; **c)** 2000 mm

1.13 **a)** $T = 12z$; **b)** $r = -4c$; **c)** $O = 2\pi r$; **d)** $A = \pi r^2$

2.1 **a)** 18; **b)** $x = -1$

2.2 A: h; B: g; C: f

2.3 $f(x) = \frac{3}{4}x + 1$ og $g(x) = -2x + 3$

2.4 **a)** $f(x) = 5x - 3$; **b)** $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$; **c)** $f(x) = -2x - 2$; **d)** $f(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

2.5 **a)** $\frac{3}{5}$; **b)** 3; **c)** -1; **d)** $-\frac{1}{3}$

2.6 **a)** 140 kr.

2.7 **a)** $v(m) = 60m + 385$; **b)** 385 gram

2.8 **a)** $-\frac{3}{2}$

2.9 $\mathrm{Vm}(k) =]5, 21]$

2.10 $\mathrm{Dm}(R) =]-4, 0]$

2.11 $f(x) = -\frac{6}{5}x + \frac{27}{5}$

2.12 **b)** $T(x) = -0{,}005x + 22$; **c)** 22°C; **d)** 2400 m

2.13 **a)** 0,84; **b)** $b = 10{,}16$

2.14 **a)** $A = 21058 \cdot C + 0{,}019$; **b)** 0,651; **c)** $3{,}80 \cdot 10^{-5}\ \frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{L}}$

2.15 **b)** $f(x) = 0{,}31x + 74{,}63$; **d)** 76,18 år; **e)** 17,34

2.16 **b)** $f(x) = 467{,}03x + 1336{,}2$;
c) $g(x) = 372x + 2920$; **d)** 6270 USD pr. karat

3.1 **a)** $x = 2$; **b)** $x = -1$; **c)** $x = -\frac{1}{2}$; **d)** $x = 7$; **e)** $x = -\frac{3}{4}$; **f)** $x = -11{,}2$

3.2 **a)** $x = 4$; **b)** $x = 16$; **c)** $x = -\frac{7}{3}$; **d)** $x = \frac{12}{5}$

3.4 **a)** 15 km; **b)** 16 år; **c)** 18 personer

3.5 **a)** $t = 17$; **b)** $y = -6$; **c)** $z = 9$; **d)** $w = \frac{33}{40}$

3.6 **a)** $I = \frac{u}{r}$; **b)** $B = \frac{a}{c}$; **c)** $T = \frac{b^2+c^2-a^2}{2ab}$; **d)** $X_2 = \frac{y_2-y_1}{a} + x_1$; **e)** $S = \frac{at}{b}$; **f)** $R = \frac{h}{2} + \frac{k^2}{8h}$

3.7 $x = -2$.

3.8 $(-4, -3)$

3.9 32 uger

3.10 172 kr.

3.11 72 liter

3.12 28 liter

3.13 120 km/t

3.14 **a)** $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + 3$; **b)** 36 perler.

3.15 84 år

3.17 **a)** $x = 1$, $y = 5$; **b)** $x = 4$, $y = 6$

3.18 **a)** $x = 3$, $y = 0$; **b)** $x = 2$, $y = 6$; **c)** $x = -1$, $y = 3$; **d)** $x = 5$, $y = 4$; **e)** $x = 2$, $y = 3$; **f)** $x = 117$, $y = 213$

3.19 **a)** $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{7}{2}$; **b)** $x = 2$, $y = 2$; **c)** $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{5}$

3.20 45 kr.

3.21 5 km

3.22 110 og 85

3.23 112 og 9

3.24 25 og 20

3.25 Otto har 106 kr., mens Viggo har 146 kr.

3.26 **b)** 1930 kr. og 2035 kr.; **c)** 1000 km og 2700 kr.

3.27 **a)** 16,67 s; **b)** 540 m

3.32 $x = 2$, $y = -5$, $z = 1$