Løsningsforslag – Eksamen R1, våren 2018

Laget av Anita G. Sist oppdatert: 22. august 2018 Antall sider: 7

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på `https://github.com/matematikk/vgs_eksamener`.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi skal derivere $f(x) = x^4 - x + 2$. Vi bruker regelen $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$. Vi får da at $f'(x) = 4x^3 - 1$.

b) Her ser vi at funksjonen g er sammensatt av to funksjoner som er multiplisert sammen, nemlig x^3 og $\ln(x)$. Vi bruker derfor produktregelen: $f(x) = uv \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$. Vi får da

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 \cdot \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 3x^2 \ln(x) + x^2 \\ &= x^2(3\ln(x) + 1) \end{aligned}$$

c) Her får vi bruk for kjerneregelen, der vi velger at kjernen vår er $u = 2x^2 + x$. Vi har at

$$\begin{aligned} h(x) = e^{u(x)} \Rightarrow h'(x) &= (e^{u(x)})' \cdot u'(x) \\ &= e^{u(x)} \cdot (4x + 1) \\ &= (4x + 1)e^{2x^2 + x} \end{aligned}$$

Oppgave 2

a)

$$\frac{1}{2x - 2} + \frac{2}{x - 3} - \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 3}$$

Først faktoriserer vi nevnerene for å finne ut hva fellesnevneren til brøkene er. Nevneren i det første leddet faktoriseres slik: $2x - 2 = 2(x - 1)$. Nevneren i andre legg kan ikke faktoriseres, mens nevneren i det tredje leddet kan vi faktorisere for eksempel ved bruk av abc-formelen. Etter faktoriseringen ser uttrykket ut slik

$$\frac{1}{2(x - 1)} + \frac{2}{x - 3} - \frac{x - 2}{(x - 1)(x - 3)}$$

Vi ser dermed at fellesnevneren er $2(x-1)(x-3)$. Vi ganger første ledd med $(x-3)$ i både teller og nevner, andre ledd med $2(x-1)$ og tredje ledd med 2.

$$\begin{aligned}
&\frac{1(x-3)}{2(x-1)(x-3)} + \frac{2\cdot 2(x-1)}{2(x-1)(x-3)} - \frac{2(x-3)}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{x-3+4x-4-2x+4}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{3x-3}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{3(x-1)}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{3}{2(x-3)}
\end{aligned}$$

b) Her må vi ta i bruk logaritmesetningene. Disse er: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ og $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$.

$$\begin{aligned}
&2\ln(x\cdot y^3) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \\
&= 2(\ln(x) + \ln(y^3) - \frac{1}{2}(\ln(x^4) - \ln(y^2)) \\
&= 2(\ln(x) + 3\ln(y)) - \frac{1}{2}(4\ln(x) - 2\ln(y)) \\
&= 2\ln(x) + 6\ln(y) - 2\ln(x) + \ln(y) \\
&= \underline{\underline{7\ln(y)}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Vektoren mellom to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er gitt ved $[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$. Vi får da:
$\vec{AB} = [-1-(-2), -3-(-1)] = [1, -2]$
$\vec{BC} = [3-(-1), -1-(-3)] = [4, 2]$

b) Vi har at de to vektorene står vinkelrett på hverandre dersom $\vec{AB}\cdot\vec{BC} = 0$
$\vec{AB}\cdot\vec{BC} = [1,-2]\cdot[4,2] = 1\cdot 4 + (-2)\cdot 2 = 4 + (-4) = 0$

Vektorene står vinkelrett på hverandre.

c) Vektorene $\vec{CD}$ og $\vec{AB}$ er parallelle dersom $\vec{CD} = k\cdot\vec{AB}$ der k er et tall. Vi finner først $\vec{CD}$ på samme måte som vi fant vektorene i oppgave a.
$\vec{CD} = [t-3, t^2+2-(-1)] = [t-3, t^2+3]$

$$\begin{gathered}
\vec{CD} = k\cdot\vec{AB} \\
[t-3, t^2+3] = k\cdot[1,-2] \quad = [k, -2k]
\end{gathered}$$

For at to vektorer skal være like må x-koordinatene være like hverandre og y-koordinatene være like hverandre i de to vektorene. Vi får altså to likninger med to ukjente:

$$t - 3 = k \quad \vee \quad t^2 + 3 = -2k$$

Likning nr 1 gir oss et uttrykk for k. Dette setter vi inn for k i likning nr 2 og løser for t.

$$\begin{aligned}
&t^2 + 3 = -2(t - 3) \\
&t^2 + 3 = -2t + 6 \\
&t^2 + 2t - 3 = 0 \\
\\
&\text{vi bruker abc-formelen og får} \\
&t = 1 \quad eller \quad t = -3
\end{aligned}$$

Vi har altså at $\vec{CD}$ og $\vec{AB}$ er parallelle hvis $t = 1$ eller hvis $t = -3$.

Oppgave 4

a) En divisjon $P(x) : (x - a)$, der $P(x)$ er et polynom, går opp dersom $P(a) = 0$. Vi må altså sjekke for hvilke verdier av k som gjør at $f(1) = 0$.

$$\begin{aligned}
f(1) = 1^3 + k \cdot 1 + 12 &= 0 \\
1 + k + 12 &= 0 \\
k + 13 &= 0 \\
k &= -13
\end{aligned}$$

b) Vi har nå at $f(x) = x^3 - 13x + 12$. Vi vet at $f(x)$ er delelig med $(x - 1)$, derfor gjør vi en polynomdivisjon med dette for å faktorisere f. Vi vil få et andregradspolynom etter polynomdivisjonen som vi kan faktorisere videre ved hjelp av abc-formelen.

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 \qquad - 13x + 12\big) : \big(x - 1\big) = x^2 + x - 12 \\
\underline{-\,x^3 + x^2} \\
\qquad\quad x^2 - 13x \\
\qquad\ \underline{-\,x^2 \quad + x} \\
\qquad\qquad -\,12x + 12 \\
\qquad\qquad\ \ \underline{12x - 12} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Ved hjelp av abc-formelen får vi at (x^2+x-12) kan faktoriseres til $(x+4)(x-3)$. Når vi nå setter sammen alle de lineære faktorene vi har funnet, har vi at $f(x)$ kan faktoriseres slik: $f(x) = x^3 - 13x + 12 = \underline{\underline{(x-1)(x+4)(x-3)}}$.

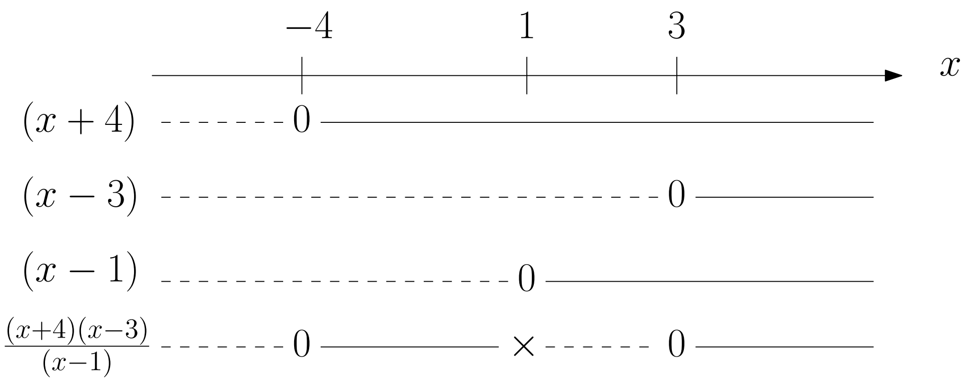
c)

$$\frac{x^2 + x - 12}{x - 1}$$

Fra forrige oppgave vet vi at telleren kan faktoriseres til $(x + 4)(x - 3)$, som vil si at vi kan skrive brøken som

$$\frac{(x + 4)(x - 3)}{x - 1}$$

Vi lager fortegnsskjema.



Vi ser dermed at

$$\frac{(x + 4)(x - 3)}{x - 1} \geq 0$$

når $\underline{\underline{-4 \leq x < 1 \text{ og når } x \geq 3}}$.

Oppgave 5

Oppgave 6

a) Vi finner nullpunktene til en funksjon ved å sette funksjonsuttrykket lik 0: $f(x) = 0$, og løser likningen.

$$\begin{aligned} e^{2x} - 4e^x + 3 &= 0 \qquad \text{vi setter } e^x = u \\ u^2 - 4u + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Vi bruker abc-formelen for å løse denne andregradslikningen, og får at $u = 3$ og $u = 1$. Dette gir oss to likninger som vi nå kan løse for x.

$$
\begin{aligned}
u &= 3 \qquad & u &= 1 \\
e^x &= 3 \qquad & e^x &= 1 \\
\ln e^x &= \ln 1 \qquad & \ln e^x &= \ln 3 \\
x &= 0 \qquad & x &= \ln 3 \approx 1.10
\end{aligned}
$$

Nullpunktene til $f(x)$ er altså $\underline{\underline{x = 0}}$ og $\underline{\underline{x = \ln 3 \approx 1.10}}$.

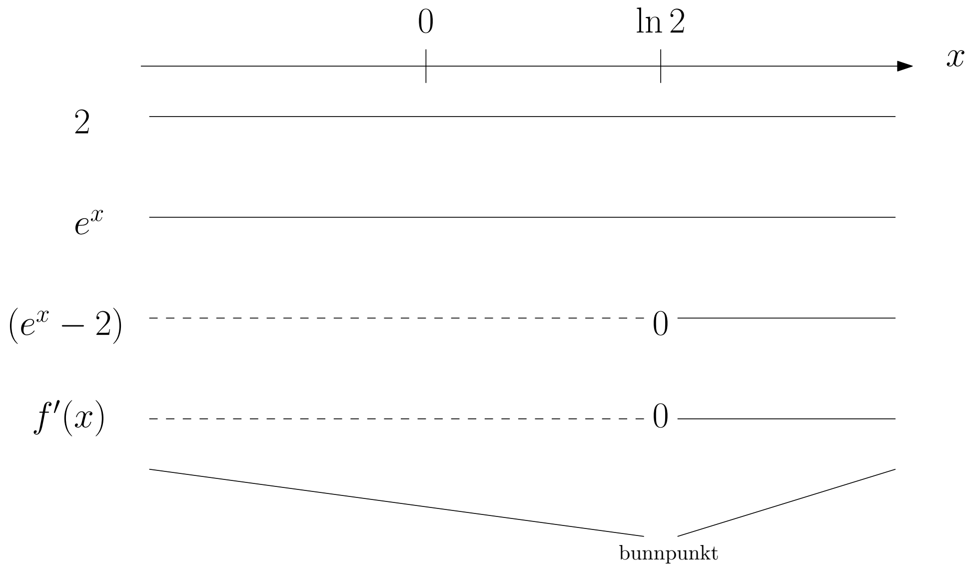
b) For å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter til funksjonen, deriverer vi funksjonen og ser når den deriverte er lik 0. Det er blant løsningene vi får til $f'(x) = 0$, vi vil finne de eventuelle topp- og bunnpunktene.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2e^{2x} - 4e^x \\
&= 2e^x(e^x - 2)
\end{aligned}
$$

Så løser vi likningen $f'(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
2e^x(e^x - 2) &= 0 \qquad 2e^x > 0 \text{ alltid, så vi får} \\
e^x - 2 &= 0 \\
e^x &= 2 \\
\ln e^x &= \ln 2 \\
x &= \ln 2
\end{aligned}
$$

Vi lager fortegnslinje for å sjekke om dette punktet er et topp- eller bunnpunkt, eller ingen av delene.



Vi ser av fortegnslinjen at vi har et bunnpunkt i $x = \ln 2$. Funksjonsverdien for denne x-verdien er

$$
\begin{aligned}
f(\ln 2) &= e^{2\ln 2} - 4e^{\ln 2} + 3 \\
&= e^{\ln 2^2} - 4e^{\ln 2} + 3 \\
&= 4 - 8 + 3 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Bunnpunktet er altså $\underline{\underline{(\ln 2, -1)}}$.

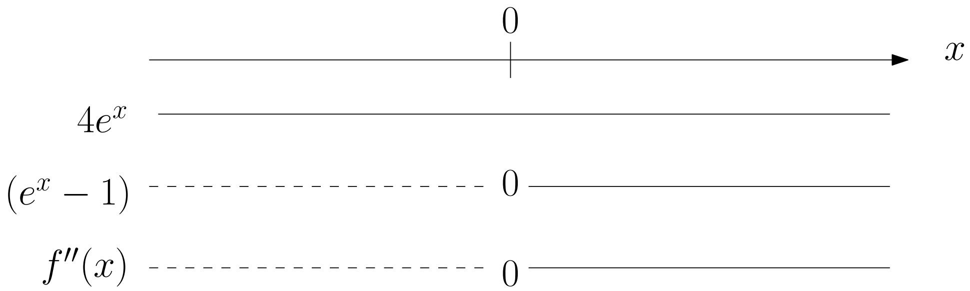
c) Når vi skal bestemme eventuelle vendepunkt, kan vi undersøke hvor den dobbeltderiverte av funksjonen endrer fortegn. Vi deriverer derfor den deriverte vi fant i forrige deloppgave.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 4e^{2x} - 4e^{x} \\
&= 4e^{x}(e^{x} - 1)
\end{aligned}
$$

Deretter setter vi den dobbeltderiverte lik 0, og lager igjen fortegnslinje som i oppgaven over.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
4e^{x}(e^{x} - 1) &= 0 \qquad 4e^{x} > 0 \text{ alltid, så vi får} \\
e^{x} - 1 &= 0 \\
e^{x} &= 1 \\
\ln e^{x} &= \ln 1 \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Fortegnslinjen vil se slik ut:



Vi ser altså at den dobbeltderiverte skifter fortegn når $x = 0$. Den tilhørende funksjonsverdien er:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= e^{2\cdot 0} - 4e^{0} + 3 \\
&= 1 - 4 + 3 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Vendepunktet for funksjonen er altså i punktet $\underline{\underline{(0, 0)}}$.

d) Når vi lager en skisse av grafen til funksjonen, er det veldig lurt å tegne inn de punktene vi har funnet i oppgavene over. Disse punktene gir oss god informasjon om hvordan grafen omtrent kan se ut.