Løsningsforslag – Eksamen R1, høsten 2017

Laget av Anita G. Sist oppdatert: 26. januar 2019 Antall sider: 5

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på `https://github.com/matematikk/vgs_eksamener`.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi skal derivere $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, og gjør dette ved hjelp av regelen $f(x) = x^n \to f'(x) = nx^{n-1}$. $\underline{\underline{f'(x) = 6x - 2}}$.

b) Her ser vi at funksjonen er sammensatt av to funksjoner: x^2 og e^x. Vi bruker derfor produktregelen. $g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = \underline{\underline{xe^x(2+x)}}$.

c) Her får vi bruk for kjerneregelen, der vi setter $u = x^3 - 1$ som kjernen. $h'(x) = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{x^3-1} \cdot 3x^2 = \underline{\underline{\frac{3x^2}{x^3-1}}}$.

Oppgave 2

a) Her må vi ta i bruk logaritmesetningene. Disse er: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$ og $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

$$
\begin{aligned}
&2\ln b - \ln\left(\frac{1}{b}\right) - \ln(ab^2) + \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) \\
&= 2\ln b - (\ln 1 - \ln b) - (\ln a + \ln b^2) + (\ln a - \ln b^2) \\
&= 2\ln b - 0 + \ln b - \ln a - 2\ln b + \ln a - 2\ln b \\
&= -\ln b
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

a) $\vec{a} - 2\vec{b} = [3,1] - 2\cdot[4,2] = [3,1] - [8,4] = \underline{\underline{[-5,-3]}}$

b) $\vec{a}\cdot\vec{b} = [3,1]\cdot[4,2] = 3\cdot 4 + 1\cdot 2 = 12 + 2 = \underline{\underline{14}}$.

c) Hvis de to vektorene $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er parallelle, finnes det et tall k slik at $\vec{b} = k\cdot\vec{c}$.

$[4,2] = k\cdot[t+1,3]$

Dette gir oss to likninger

$$\begin{aligned} 4 &= k \cdot (t+1) \\ 2 &= 3k \end{aligned}$$

Fra likning 2 ser vi at $k = \frac{2}{3}$, og dette setter vi inn i likning 1 for å finne t.

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{2}{3} \cdot (t+1) \\ \frac{3}{2} \cdot 4 &= t+1 \\ \frac{12}{2} - 1 &= t \\ 6 - 1 &= t \\ t &= 5 \end{aligned}$$

De to vektorene er parallelle dersom $\underline{\underline{t = 5}}$.

d) $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$|\vec{c}| = \sqrt{(t+1)^2 + 3^2}$

Her kan vi enten se ut fra utrykkene hva t må være, eller vi kan regne ut t ved å sette uttrykkene lik hverandre.

Den første metoden kan vi bruke fordi vi ser at begge utrykkene under rottegnene inneholder leddet 3^2. For at hele uttrykket da skal være likt, må også de to andre leddene være like. Altså må $(t+1)^2 = 1^2$, og dette er tilfellet når $t = 0$ eller $t = -2$.

Slike ting er ikke alltid like lett å se, men i dette tilfellet kan vi heldigvis også finne de aktuelle t-verdiene ved regning. De to uttrykkene under rotegnene må fremdeles være like, og dermed får vi likningen

$$\begin{aligned} (t+1)^2 + 3^2 &= 10 \\ t^2 + 2t + 1 + 9 - 10 &= 0 \\ t^2 + 2t &= 0 \\ t(t+2) &= 0 \end{aligned}$$

Denne likningen er oppfylt dersom $\underline{\underline{t = 0 \text{ eller } t = -2}}$.

Oppgave 4

a) Arealet av en trekant er gitt ved formelen $A = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høyde}}{2}$. I vår trekant ser vi at grunnlinjen er $g = x$ og høyden er $h = f(x)$. Da blir arealet av trekanten

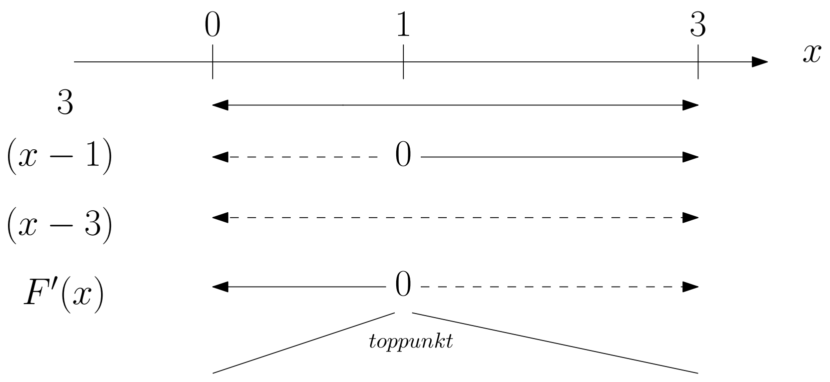
$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x \cdot f(x)}{2} \\ &= \frac{x \cdot 2(x-3)^2}{2} \\ &= x(x-3)^2 \\ &= x(x^2 - 6x + 9) \\ &= x^3 - 6x^2 + 9x \end{aligned}$$

b) For å finne den x-verdien som gir størst areal må vi derivere funksjonen for arealet og finne toppunktet til denne.

$F'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Vi faktoriserer den deriverte ved hjelp av nullpunktene. Disse kan finnes ved hjelp av abc-formelen. $\rightarrow F'(x) = 3(x-1)(x-3)$

Deretter tegner vi fortegnslinje. Her er det lurt å være obs på definisjonsmengden til funksjonen ($0 < x < 3$).



Ut i fra definisjonsmengden ser vi at det er kun $x = 1$ som gir mulighet for et toppunkt, og ut i fra fortegnslinjen ser vi at dette punktet faktisk er et toppunkt. Det vil si at $\underline{\underline{\text{arealet er størst når } x = 1}}$.

c) Arealet finner vi ved å sette inn $x = 2$ i formelen for arealet.

$$F(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 8 - 24 + 18 = 2$$

For å finne eventuelle andre x-verdier som gir dette arealet må vi sette opp likningen $x^3 - 6x^2 + 9x = 2$. Vi vet fra over at x = 2 løser denne likningen, og det vil si at likningen $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$ (her har vi bare flyttet 2 over på venstre side) også har løsning $x = 2$, som betyr at $(x - 2)$ må være en faktor i polynomet på venstre side av likhetstegnet. Dette kan vi bruke til å gjøre en polynomdivisjon for å finne de eventuelle andre løsningene.

$$
\begin{array}{l}
\big(\ \ x^3 - 6x^2 + 9x - 2\big) : \big(x - 2\big) = x^2 - 4x + 1 \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
\quad -4x^2 + 9x \\
\quad \underline{\ \ 4x^2 - 8x} \\
\qquad\qquad x - 2 \\
\qquad\quad \underline{-x + 2} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Likningen over kan altså skrives som $(x^2 - 4x + 1)(x - 2) = 0$, og dette er oppfylt enten når $x = 2$ eller når $x^2 - 4x + 1 = 0$. Løsningene til den siste andregradslikningen kan vi finne ved hjelp av abc-formelen. Ved å bruke denne får vi at de to andre løsningene er $x = 2 \pm \sqrt{3}$. Siden $\sqrt{3} > 1$, vil løsningen $x = 2 + \sqrt{3}$ ligge utenfor definisjonsmengden. Derfor konkluderer vi med at det er en annen x-verdi som gir dette arealet, nemlig $x = 2 - \sqrt{3}$.

Oppgave 5

a) Dette er et ordnet utvalg (rekkefølgen på tallene har betydning) med tilbakelegging (siden vi kan bruke tallene flere ganger). Vi skal velge mellom 10 tall 4 ganger. Antall mulige kombinasjoner er da gitt ved $\underline{\underline{10^4 = 10000}}$.

b) Dette er et uordnet utvalg (siden tallene ikke trenger å være stilt inn i en bestemt rekkefølge) uten tilbakelegging (siden vi skal ha forskjellige tall). Vi skal gjøre 4 valg der antall valgmuligheter minsker med én for hvert valg. Antall kombinasjoner er da gitt ved

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot (n-r)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10}{2} \cdot \frac{9}{3} \cdot \frac{8}{4} \cdot 7 = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 210$$

Det er altså 210 mulige kombinasjoner.

c) TODO

Oppgave 6

a) Siden M er midtpunktet på AC, betyr det at vi kan finne koordinatene til dette punktet slik:

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = [3, -2] + \frac{1}{2} \cdot [-2, 6] = [2, 1]$$

Koordinatene til M er (2,1) som vist over.

b) For å lage en parameterframstilling for en rett linje trenger vi en retningsvektor til linja og et punkt på linja. Siden l er midtnormalen til AC betyr det at den må gå gjennom punktet M. Vi ser også at linja skjærer i punktet $(-1, 0)$, og dermed kan vi finne en retningsvektor til linja ved å finne vektoren mellom dette punktet og M.

$[2-(-1), 1-0] = [3, 1]$.

Deretter kan vi sette opp parameterframstillingen slik vi pleier

$$l: \begin{cases} x = x_1 + att \\ y = y_1 + bt \end{cases}$$

der (x_1, y_1) er det faste punktet på linja og $[a, b]$ er retningsvektoren. Vi får da:

$$l: \begin{cases} x = 2 + 3tt \\ y = 1 + t \end{cases}$$

c) For å avgjøre om punktet ligger på linja, setter vi inn x- og y-verdien i parameterframstillingen og sjekker om vi får ut samme t-verdi.

$$\begin{aligned} 12 &= 2 + 3t \\ 10 &= 3t \\ t &= \frac{10}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{9}{2} &= 1 + t \\ \frac{9}{2} - 1 &= t \\ t &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Altså, punktet ligger ikke på linja.

d) For å finne skjæringspunktet mellom to linjer kan vi bruke parameterframstillingene til de to linjene. Den ene har vi allerede, og parameterframstillingen for den andre kan vi finne på samme måte. Vi kaller midtnormalen til AB for m og midtpunktet på AB for M_1.

$O\vec{M}_1 = O\vec{A} + \frac{1}{2}A\vec{B} = [3, -2] + \frac{1}{2} \cdot [6, 6] = [6, 1]$

Koordinatene til M_1 er $(6, 1)$.

For å finne en retningsvektor for linja m kan vi utnytte at midtnormalene står *normalt* på den opprinnelige linja. Her skal vi vise to måter vi kan finne en slik retningsvektor.

Første måte er å bruke at siden retningsvektoren til AB er $\vec{r} = [1, 1]$, vil det si at stigningstallet til linja mellom A og B er 1. Stigningstaller for en linje som står normal på en annen linje med kjent stigningstall a er $-\frac{1}{a}$, dermed vet vi at linja m har stigningstall -1 og en retningsvektor for denne linja er da $[1, -1]$.

Den andre måten vi kan finne dette på er å bruke at retningsvektoren til AB og retningsvektoren til m står vinkelrett på hverandre. Det betyr at skalarproduktet mellom dem er 0.

$$[1, 1] \cdot [x, y] = 0$$

Dette blir null hvis x og y har samme tallverdi og motsatt fortegn. Mange løsninger er mulige, men for en retningsvektor betyr ikke valget av størrelsen på x og y så veldig mye, derfor velger vi for enkelthets skyld at de er $x = 1, y = -1$.

Parameterframstillingen for m blir da

$$m : \begin{cases} x = 6 + s \\ y = 1 - s \end{cases}$$

Skjæringspunktet mellom midtnormalene finner vi så ved å sette likningene for x og likningene for y lik hverandre i de to parameterframstillingene.

$$2 + 3t = 6 + s \qquad\qquad 1 + t = 1 - s$$

Fra likning 2 får vi $t = -s$, og dette setter vi så inn i likning 1 og får

$$\begin{aligned} 2 + 3(-s) &= 6 + s \\ 2 - 3s &= 6 + s \\ -4s &= 4 \\ s &= -1 \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i parameterframstillingen for m finner vi skjæringspunktet.

$$m : \begin{cases} x = 6 + s = 6 - 1 = 5 \\ y = 1 - s = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

Skjæringspunktet mellom de to midtnormalene er (5,2)

Oppgave 7