Løsningsforslag – Eksamen R1, våren 2018

Laget av Anita G. Sist oppdatert: 16. september 2018 Antall sider: 13

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på `https://github.com/matematikk/vgs_eksamener`.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi skal derivere $f(x) = x^4 - x + 2$. Vi bruker regelen $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$. Vi får da at $f'(x) = 4x^3 - 1$.

b) Her ser vi at funksjonen g er sammensatt av to funksjoner som er multiplisert sammen, nemlig x^3 og $\ln(x)$. Vi bruker derfor produktregelen: $f(x) = uv \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$. Vi får da

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 \cdot \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 3x^2 \ln(x) + x^2 \\ &= x^2(3\ln(x) + 1) \end{aligned}$$

c) Her får vi bruk for kjerneregelen, der vi velger at kjernen vår er $u = 2x^2 + x$. Vi har at

$$\begin{aligned} h(x) = e^{u(x)} \Rightarrow h'(x) &= (e^{u(x)})' \cdot u'(x) \\ &= e^{u(x)} \cdot (4x + 1) \\ &= (4x + 1)e^{2x^2+x} \end{aligned}$$

Oppgave 2

a)

$$\frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

Først faktoriserer vi nevnerene for å finne ut hva fellesnevneren til brøkene er. Nevneren i det første leddet faktoriseres slik: $2x - 2 = 2(x - 1)$. Nevneren i andre ledd kan ikke faktoriseres, mens nevneren i det tredje leddet kan vi faktorisere for eksempel ved bruk av abc-formelen. Etter faktoriseringen ser uttrykket ut slik

$$\frac{1}{2(x-1)} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$$

Vi ser dermed at fellesnevneren er $2(x-1)(x-3)$. Vi ganger første ledd med $(x-3)$ i både teller og nevner, andre ledd med $2(x-1)$ og tredje ledd med 2.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1(x-3)}{2(x-1)(x-3)} + \frac{2 \cdot 2(x-1)}{2(x-1)(x-3)} - \frac{2(x-3)}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{x-3+4x-4-2x+6}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{x-1}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{1}{2(x-3)}
\end{aligned}
$$

b) Her må vi ta i bruk logaritmesetningene. Disse er: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ og $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$.

$$
\begin{aligned}
&2\ln(x \cdot y^3) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \\
&= 2(\ln(x) + \ln(y^3) - \frac{1}{2}(\ln(x^4) - \ln(y^2)) \\
&= 2(\ln(x) + 3\ln(y)) - \frac{1}{2}(4\ln(x) - 2\ln(y)) \\
&= 2\ln(x) + 6\ln(y) - 2\ln(x) + \ln(y) \\
&= \underline{\underline{7\ln(y)}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

a) Vektoren mellom to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er gitt ved $[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$.
Vi får da:
$\vec{AB} = [-1-(-2), -3-(-1)] = [1, -2]$
$\vec{BC} = [3-(-1), -1-(-3)] = [4, 2]$

b) Vi har at de to vektorene står vinkelrett på hverandre dersom $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$
$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = [1, -2] \cdot [4, 2] = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = 4 + (-4) = 0$

Vektorene står vinkelrett på hverandre.

c) Vektorene $\vec{CD}$ og $\vec{AB}$ er parallelle dersom $\vec{CD} = k \cdot \vec{AB}$ der k er et tall. Vi finner først $\vec{CD}$ på samme måte som vi fant vektorene i oppgave a.
$\vec{CD} = [t-3, t^2+2-(-1)] = [t-3, t^2+3]$

$$
\begin{aligned}
\vec{CD} &= k \cdot \vec{AB} \\
[t-3, t^2+3] &= k \cdot [1, -2] \quad = [k, -2k]
\end{aligned}
$$

For at to vektorer skal være like må x-koordinatene være like hverandre og y-koordinatene være like hverandre i de to vektorene. Vi får altså to likninger med to ukjente:

$$t - 3 = k \quad \vee \quad t^2 + 3 = -2k$$

Likning nr 1 gir oss et uttrykk for k. Dette setter vi inn for k i likning nr 2 og løser for t.

$$\begin{aligned}
&t^2 + 3 = -2(t - 3) \\
&t^2 + 3 = -2t + 6 \\
&t^2 + 2t - 3 = 0 \\
& \\
&\text{vi bruker abc-formelen og får} \\
&t = 1 \quad eller \quad t = -3
\end{aligned}$$

Vi har altså at $\vec{CD}$ og $\vec{AB}$ er parallelle hvis $t = 1$ eller hvis $t = -3$.

Oppgave 4

a) En divisjon $P(x) : (x - a)$, der $P(x)$ er et polynom, går opp dersom $P(a) = 0$. Vi må altså sjekke for hvilke verdier av k som gjør at $f(1) = 0$.

$$\begin{aligned}
f(1) = 1^3 + k \cdot 1 + 12 &= 0 \\
1 + k + 12 &= 0 \\
k + 13 &= 0 \\
k &= -13
\end{aligned}$$

b) Vi har nå at $f(x) = x^3 - 13x + 12$. Vi vet at $f(x)$ er delelig med $(x - 1)$, derfor gjør vi en polynomdivisjon med dette for å faktorisere f. Vi vil få et andregradspolynom etter polynomdivisjonen som vi kan faktorisere videre ved hjelp av abc-formelen.

$$\begin{array}{rrrl}
\big(\;\; x^3 & & -\,13x + 12\big) & : \big(x - 1\big) = x^2 + x - 12 \\
-\,x^3 + x^2 & & & \\
\hline
& x^2 & -\,13x & \\
& -\,x^2 & +\,x & \\
\hline
& & -\,12x + 12 & \\
& & 12x - 12 & \\
\hline
& & 0 &
\end{array}$$

Ved hjelp av abc-formelen får vi at (x^2+x-12) kan faktoriseres til $(x+4)(x-3)$. Når vi nå setter sammen alle de lineære faktorene vi har funnet, har vi at $f(x)$ kan faktoriseres slik: $f(x) = x^3 - 13x + 12 = \underline{\underline{(x-1)(x+4)(x-3)}}$.

c)

$$\frac{x^2 + x - 12}{x - 1}$$

Fra forrige oppgave vet vi at telleren kan faktoriseres til $(x+4)(x-3)$, som vil si at vi kan skrive brøken som

$$\frac{(x+4)(x-3)}{x-1}$$

Vi lager fortegnsskjema.

x		-4		1		3	
$(x+4)$	- - - - - - -	0	———		———		———
$(x-3)$	- - - - - - -		- - - - - - -		- - - - - - -	0	———
$(x-1)$	- - - - - - -		- - - - - - -	0	———		———
$\frac{(x+4)(x-3)}{(x-1)}$	- - - - - - -	0	———	×	- - - - - -	0	———

Vi ser dermed at

$$\frac{(x+4)(x-3)}{x-1} \geq 0$$

når $\underline{\underline{-4 \leq x < 1 \text{ og når } x \geq 3}}$.

Oppgave 5

a) Vi bruker i denne oppgaven produktsetningen. Vi skal finne sannsynligheten for at laderen kommer fra leverandør A *og* at den er defekt, altså sannsynligheten $P(\text{fra leverandør A} \cap \text{defekt})$.

$$\begin{aligned} P(\text{fra leverandør A} \cap \text{defekt}) &= P(\text{fra leverandør A}) \cdot P(\text{defekt} \mid \text{fra leverandør A}) \\ &= 0.4 \cdot 0.03 \\ &= 0.012 \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at laderen er fra leverandør A og er defekt er 1.2 %.

b) For å bestemme sannsynligheten for at en lader som er defekt kommer fra leverandør A, kan vi bruke Bayes' setning og setningen om total sannsynlighet.

Bayes' setning i dette tilfellet blir

$$P(\text{fra leverandør A} \mid \text{defekt}) = \frac{P(\text{fra leverandør A}) \cdot P(\text{defekt} \mid \text{fra leverandør A})}{P(\text{defekt})}$$

Men for å kunne bruke denne formelen er vi nødt til å finne ut hva $P(defekt)$ er. Det gjør vi ved hjelp av setningen om total sannsynlighet.

$$\begin{aligned} P(\text{defekt}) &= P(\text{fra leverandør A}) \cdot P(\text{defekt} \mid \text{fra leverandør A}) \\ &+ P(\text{fra leverandør B}) \cdot P(\text{defekt} \mid \text{fra leverandør B}) \quad &= 0.4 \cdot 0.03 + 0.6 \cdot 0.02 \\ &= 0.024 \end{aligned}$$

Nå setter vi dette inn i nevneren i Bayes' setning og får:

$$\begin{aligned} P(\text{fra leverandør A} \mid \text{defekt}) &= \frac{P(\text{fra leverandør A}) \cdot P(\text{defekt} \mid \text{fra leverandør A})}{P(\text{defekt})} \\ &= \frac{0.04 \cdot 0.03}{0.024} \\ &= \frac{0.012}{0.024} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at en defekt lader er fra leverandør A er 50 %

Oppgave 6

a) Vi finner nullpunktene til en funksjon ved å sette funksjonsuttrykket lik 0: $f(x) = 0$, og løser likningen.

$$\begin{aligned} e^{2x} - 4e^x + 3 &= 0 \qquad \text{vi setter } e^x = u \\ u^2 - 4u + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Vi bruker abc-formelen for å løse denne andregradslikningen, og får at $u = 3$ og $u = 1$. Dette gir oss to likninger som vi nå kan løse for x.

$$\begin{aligned} u &= 3 & u &= 1 \\ e^x &= 3 & e^x &= 1 \\ \ln e^x &= \ln 1 & \ln e^x &= \ln 3 \\ x &= 0 & x &= \ln 3 \approx 1.10 \end{aligned}$$

Nullpunktene til $f(x)$ er altså $\underline{\underline{x = 0}}$ og $\underline{\underline{x = \ln 3 \approx 1.10}}$.

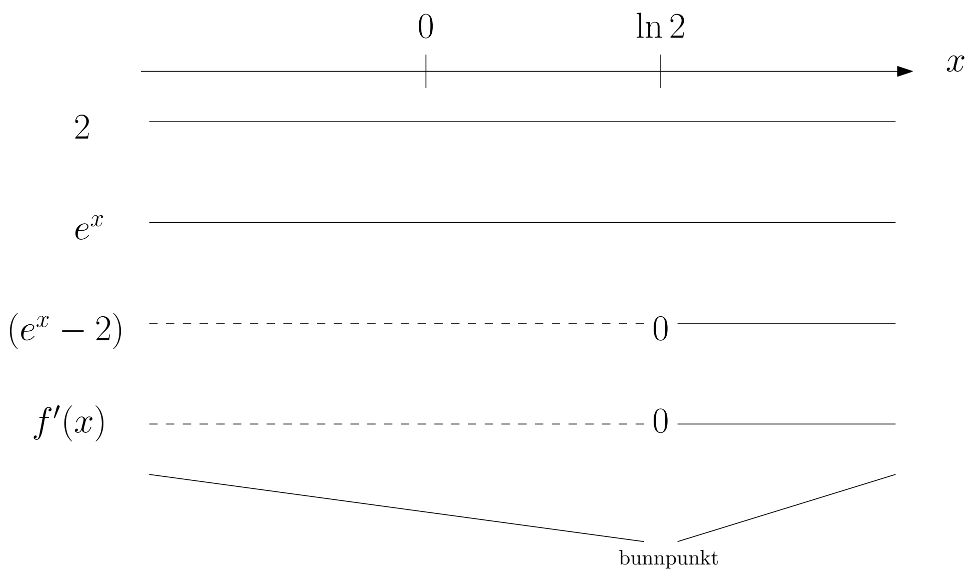
b) For å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter til funksjonen, deriverer vi funksjonen og ser når den deriverte er lik 0. Det er blant løsningene vi får til $f'(x) = 0$, vi vil finne de eventuelle topp- og bunnpunktene.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x} - 4e^{x} \\ &= 2e^{x}(e^{x} - 2) \end{aligned}$$

Så løser vi likningen $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2e^{x}(e^{x} - 2) &= 0 \qquad 2e^{x} > 0 \text{ alltid, så vi får} \\ e^{x} - 2 &= 0 \\ e^{x} &= 2 \\ \ln e^{x} &= \ln 2 \\ x &= \ln 2 \end{aligned}$$

Vi lager fortegnslinje for å sjekke om dette punktet er et topp- eller bunnpunkt, eller ingen av delene.



Vi ser av fortegnslinjen at vi har et bunnpunkt i $x = \ln 2$. Funksjonsverdien for denne x-verdien er

$$\begin{aligned} f(\ln 2) &= e^{2\ln 2} - 4e^{\ln 2} + 3 \\ &= e^{\ln 2^2} - 4e^{\ln 2} + 3 \\ &= 4 - 8 + 3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Bunnpunktet er altså $\underline{\underline{(\ln 2, -1)}}$.

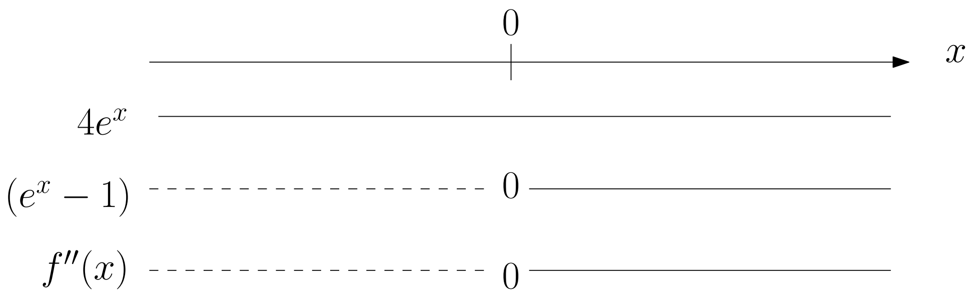
c) Når vi skal bestemme eventuelle vendepunkt, kan vi undersøke hvor den dobbeltderiverte av funksjonen endrer fortegn. Vi deriverer derfor den deriverte vi fant i forrige deloppgave.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4e^{2x} - 4e^x \\ &= 4e^x(e^x - 1) \end{aligned}$$

Deretter setter vi den dobbeltderiverte lik 0, og lager igjen fortegnslinje som i oppgaven over.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 4e^x(e^x - 1) &= 0 \qquad 4e^x > 0 \text{ alltid, så vi får} \\ e^x - 1 &= 0 \\ e^x &= 1 \\ \ln e^x &= \ln 1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Fortegnslinjen vil se slik ut:

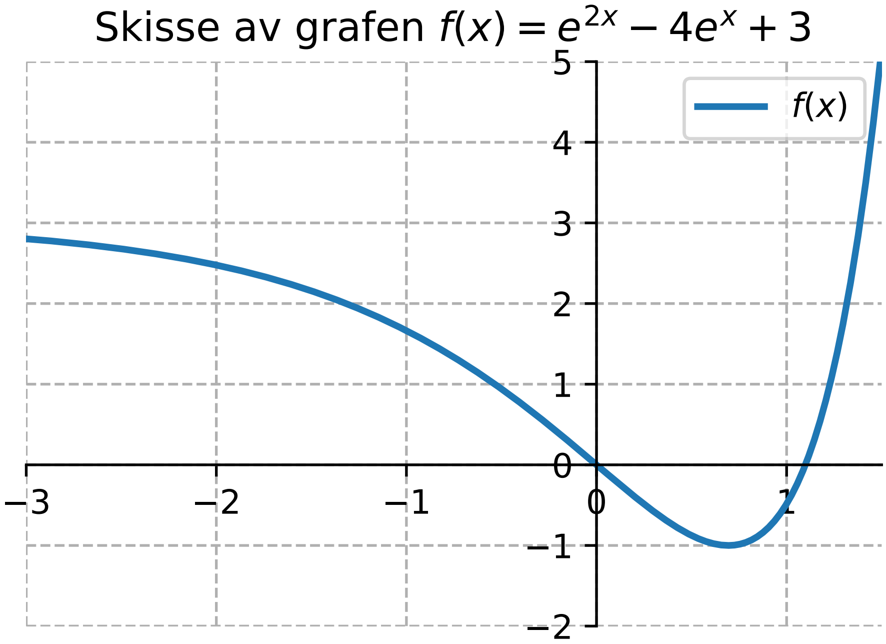


Vi ser altså at den dobbeltderiverte skifter fortegn når $x = 0$. Den tilhørende funksjonsverdien er:

$$\begin{aligned} f(0) &= e^{2\cdot 0} - 4e^0 + 3 \\ &= 1 - 4 + 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

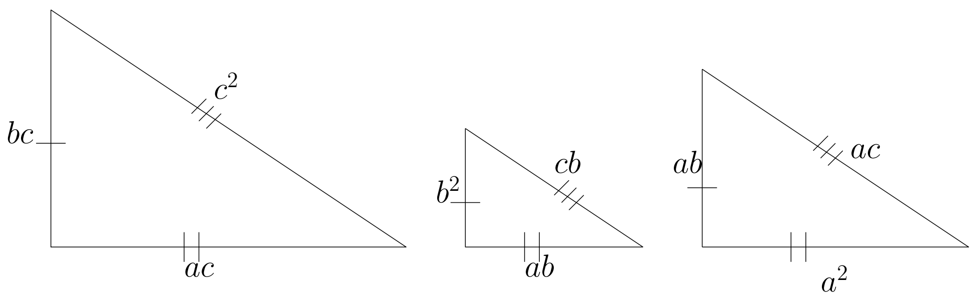
Vendepunktet for funksjonen er altså i punktet $\underline{\underline{(0, 0)}}$.

d) Når vi lager en skisse av grafen til funksjonen, er det veldig lurt å tegne inn de punktene vi har funnet i oppgavene over. Disse punktene gir oss god informasjon om hvordan grafen omtrent kan se ut.



Oppgave 7

a) En måte å vise at trekantene er formlike på, er å sjekke at forholdet mellom samsvarende sider er det samme.



Vi starter med å vise at trekant 1 og 2 er formlike. Forholdet mellom de formlike sidene er:

$$\frac{bc}{b^2} = \frac{c}{b}$$
$$\frac{ac}{ab} = \frac{c}{b}$$
$$\frac{c^2}{cb} = \frac{c}{b}$$

Deretter sjekker vi om trekant 2 og 3 er formlike

$$\frac{b^2}{ab} = \frac{b}{a}$$
$$\frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a}$$
$$\frac{cb}{ac} = \frac{b}{a}$$

Vi ser altså at trekant 1 er formlik med trekant 2 og at trekant 2 er formlik med trekant 3. Da må også trekant 1 og 3 være formlike.

b) For å vise at punktene E, D og C ligger på en rett linje, må vi vise at $\angle ADE + \angle BDC = 180°$. Siden de tre trekantene er formlike, vet vi at samsvarende vinkler er like store. Vi vet også at $\angle ADB = 90°$, så det gjenstår å vise at $\angle ADE + \angle BDC = 90°$.

Dette gjør vi ved å trekke to hjelpelinjer som vist på figuren nedenfor. Vi vet at to parallelle linjer som skjæres av samme linje danner samsvarende vinkler. I tillegg får vi toppvinkler. Derfor vet vi at $\angle BAD$ er samsvarende vinkel med $\angle ADE$, som vil si at disse to vinklene er like store. Vi får samme tilfelle for $\angle ABD$. Denne er samsvarende med vinkel $\angle BDC$, altså er disse to vinklene også like store.

Siden summen av vinklene i en trekant er 180, vet vi at $\angle BAD + \angle ABD?90°$, og dermed vet vi også at $\angle ADE + \angle BDC = 90°$. Vi har da at $\angle EDC = 180°$, og dermed må punktene E, D og C ligge på samme linje.

c) Fra oppgaven over har vi at $\angle DAE + \angle BAD = 90°$ og at $\angle DBA + \angle CBD = 90°$. Da har vi at alle hjørnene i firkanten vår er 90°, altså har vi et rektangel.

I et rektangel vet vi at parallelle sider er like lange, det vil si at lengden av siden EC skal være lik lengden av siden AB. Altså: $a^2 + b^2 = c^2$, som er Pytagoras' setning.

Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

a) Først husker vi at vinkelen i en sirkel er 360°. Vi har en sentralvinkel i figuren, nemlig u. Siden vinkelen i sirkelen må være 360° vet vi derfor at resten"av vinkelen i sirkelen må være $360° - u$, siden da blir summen av de to vinklene lik 360°. $\angle DCB$ spenner over buen BC, det samme gjør sentralvinkelen vi nettopp fant, $360° - u$. Vi vet at periferivinkler som spenner over samme bue som en sentralvinkel vil være halvparten så stor som sentralvinkelen. Dermed har vi

$$\angle DCB = \frac{1}{2} \cdot (360° - u) = 180° - \frac{1}{2}u$$

.

Altså har vi vist at $\underline{\underline{\angle DCB = 180° - \frac{1}{2}u}}$

b) Fra oppgave a) vet vi at $\angle DCB = 180° - \frac{1}{2}u$. $\angle BAD$ er en periferivinkel som spenner over samme sirkelbue som sentralvinkelen u, derfor vet vi at $\angle BAD = \frac{1}{2}u$. Legger vi nå sammen disse to vinkelene får vi:

$$\angle BAD + \angle DCB = 180° - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u = 180°$$

Videre er summen av vinkler i en firkant 360°, derfor vet vi at $\angle CBA + \angle ADC = 180°$

Dermed har vi vist at $\angle BAD + \angle DCB = \angle CBA + \angle ADC = 180°$.

Oppgave 2

Likningen for en sirkel kan skrives

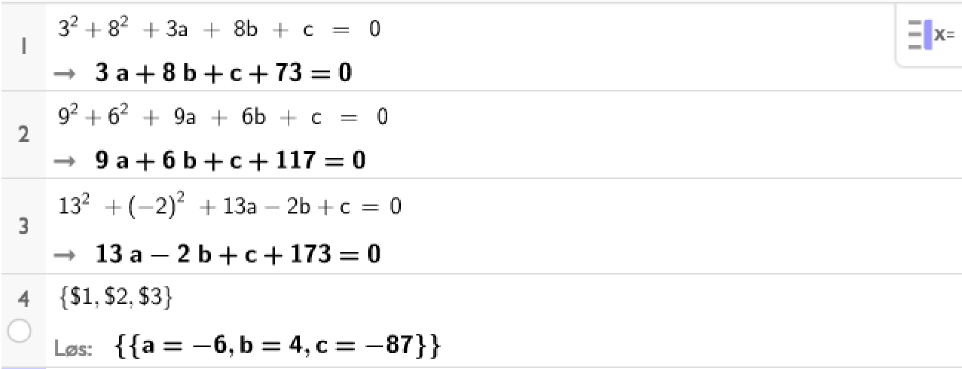
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

, og vi får oppgitt at $A(3, 8)$, $B(9, 6)$ og $C(13, -2)$ ligger på sirkelperiferien.

a) For at likningen skal gjelde for en sirkel som går gjennom alle de gitte punktene, må likningen gå opp uansett hvilket punkt vi setter inn i likningen. For å finne et likningssystem som svarer til det over, setter vi altså inn x- og y-koordinatene for hvert av punktene i hver sin likning. Likningssystemet blir da:

$$\begin{cases} 3^2 + 8^2 + 3a + 8b + c = 0 \\ 9^2 + 6^2 + 9a + 6b + c = 0 \\ 13^2 + (-2)^2 + 13a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

b) Vi skriver inn hver likning i CAS, markerer alle linjene og trykker på x=. Vi kan også bruke kommandoen Løs, og skrive inn hvilke linjer CAS skal løse. Dette ville vi i mitt tilfelle gjort slik: Løs({$1,$2,$3}).



Oppgave 3

a) For at vi i denne situasjonen skal kunne bruke en binomisk sannsynlighetsmodell må vi anta at alle delforsøkene er uavhengige. Det vil i praksis si at dersom flere reiser sammen, så vil fremdeles alle i reisefølget møte opp eller ikke uavhengig av hva de andre i gruppen gjør.

b) Her kan vi bruke sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra. Siden flyet har plass til maks 116 passasjerer, må vi altså undersøke hva sannsynligheten er for at 116 passasjerer eller mindre møter opp når selskapet har solgt 122 billetter. I sannsynlighetskalkulatoren legger vi da inn $n = 122$, $p = 0.94$ og $P(X \leq 116)$. Resultatet blir da:

$$\underline{\underline{\text{Sannsynligheten for at alle som møter får plass på flyet er } 74.7\%}}$$

c) Siden vi skal finne ut hvor mange billetter selskapet kan selge, er det altså n i denne oppgaven vi må bestemme. Da lar vi fremdeles $p = 0.94$, $P(X \leq 116)$, og så tester vi for hvilke verdier av n som gjør at sannsynligheten vi får ut blir $\geq 95\%$. Vi vet fra oppgaven over at de ikke kan selge 122 billetter, for da blir sannsynligheten for at alle får plass for liten i forhold til hva selskapet øker. Derfor kan vi prøve å sette inn for eksempel $n = 120$

Vi ser at dette antallet også vil gi for liten prosent. Vi prøver da med for eksempel $n = 119$

Dette ser vi gir en bedre prosent enn ønskelig, så flyselskapet kan altså selge 119 billetter og få at sannsynligheten er minst 95 % for at alle som møter opp får plass på flyet.

Oppgave 4

d) Her må vi først finne ut hvor lange sidene s er som funksjon av x. Da kan vi først se på trekant ABE. Denne er likebeint, så vi vet at den rette linjen fra E ned til linjen AB vil danne 90° med linjen AB, og den vil dele AB i to like store deler. Vi får altså to 90° trekanter, og da kan vi bruke Pytagoras' setning.

Den ene kateten vil da være halvparten av AB $= \frac{10}{2}$, mens den andre må vi lete litt mer etter.

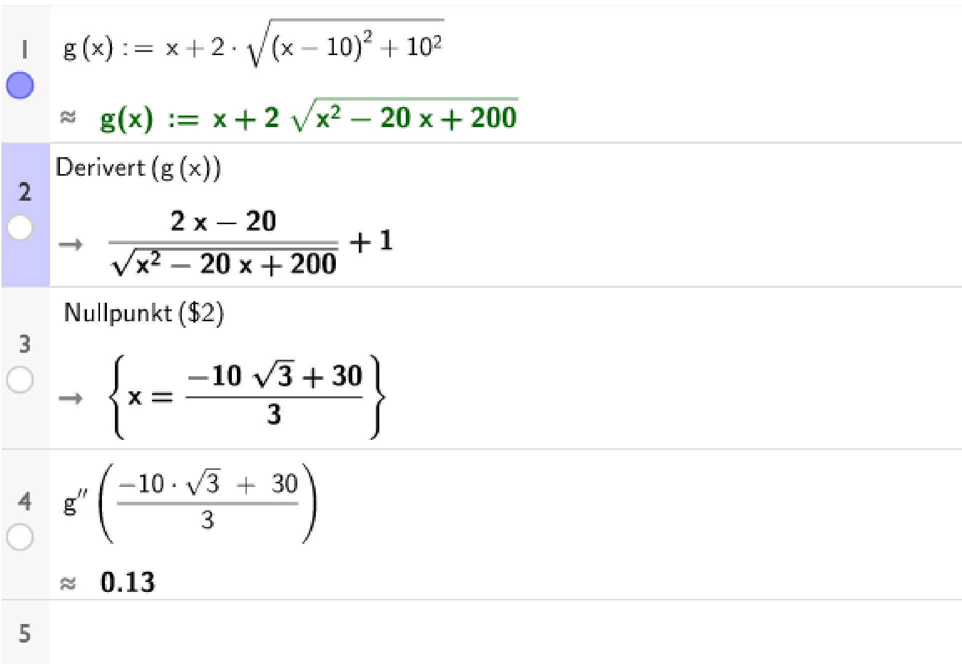
Vi ser at høyden i hele firkanten er 10, og at det er en lik trekant som ABE helt øverst i figuren også. Det vil si at vi kan dele denne trekanten opp på samme måte som ABE og få en høyde også her. Vi ser da av figuren at høydene i de to trekantene til sammen er $10 - x$, og da vil høyden i hver av trekantene være $\frac{10-x}{2}$. Da har vi altså begge katetene og kan bruke Pytagoras' setning til å finne s.

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \left(\frac{10-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 \\
&= \sqrt{\left(\frac{10-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{(10-x)^2}{4} + \frac{10^2}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(10-x)^2 + 10^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(x-10)^2 + 10^2}
\end{aligned}
$$

Den totale strekningen er

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x + 4s \\
&= x + 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(x-10)^2 + 10^2} \\
&= \underline{\underline{x + 2\sqrt{(x-10)^2 + 10^2}}}
\end{aligned}
$$

e) Denne oppgaven kan gjøres på forskjellige måter i CAS. Her har jeg valgt å først skrive inn funksjonsuttrykket for g, deretter derivere dette, og finne ut når den deriverte er 0 ved å bruke kommandoen nullpunkt. Deretter sjekket jeg hva den andrederiverte var i dette punktet. Siden den andrederiverte var større enn 0, vet vi at punktet vi fant er et bunnpunkt.



Oppgave 5