

Løsningsforslag – Eksamen R1, våren 2018

Laget av Anita G.

Sist oppdatert: 10. august 2018

Antall sider: 4

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på https://github.com/matematikk/vgs_eksamener.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

- a) Vi skal derivere $f(x) = x^4 - x + 2$. Vi bruker regelen $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$. Vi får da at $f'(x) = 4x^3 - 1$.
- b) Her ser vi at funksjonen g er sammensatt av to funksjoner som er multiplisert sammen, nemlig x^3 og $\ln(x)$. Vi bruker derfor produktregelen: $f(x) = uv \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$. Vi får da

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 \cdot \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 3x^2 \ln(x) + x^2 \\ &= x^2(3 \ln(x) + 1) \end{aligned}$$

- c) Her får vi bruk for kjerneregelen, der vi velger at kjernen vår er $u = 2x^2 + x$. Vi har at

$$\begin{aligned} h(x) = e^{u(x)} &\Rightarrow h'(x) = (e^{u(x)})' \cdot u'(x) \\ &= e^{u(x)} \cdot (4x + 1) \\ &= (4x + 1)e^{2x^2+x} \end{aligned}$$

Oppgave 2

a)

$$\frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

Først faktorerer vi nevnerene for å finne ut hva fellesnevneren til brøkene er. Nevneren i det første leddet faktorerer slik: $2x - 2 = 2(x - 1)$. Nevneren i andre ledd kan ikke faktoreres, mens nevneren i det tredje leddet kan vi faktorisere for eksempel ved bruk av abc-formelen. Etter faktoriseringen ser uttrykket ut slik

$$\frac{1}{2(x-1)} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$$

Vi ser dermed at fellesnevneren er $2(x-1)(x-3)$. Vi ganger første ledd med $(x-3)$ i både teller og nevner, andre ledd med $2(x-1)$ og tredje ledd med 2.

$$\begin{aligned} & \frac{1(x-3)}{2(x-1)(x-3)} + \frac{2 \cdot 2(x-1)}{2(x-1)(x-3)} - \frac{2(x-3)}{2(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{x-3+4x-4-2x+4}{2(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{3x-3}{2(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{3(x-1)}{2(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{3}{2(x-3)} \end{aligned}$$

- b) Her må vi ta i bruk logaritmesetningene. Disse er: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ og $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$.

$$\begin{aligned} & 2\ln(x \cdot y^3) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \\ &= 2(\ln(x) + \ln(y^3)) - \frac{1}{2}(\ln(x^4) - \ln(y^2)) \\ &= 2(\ln(x) + 3\ln(y)) - \frac{1}{2}(4\ln(x) - 2\ln(y)) \\ &= 2\ln(x) + 6\ln(y) - 2\ln(x) + \ln(y) \\ &= \underline{\underline{7\ln(y)}} \end{aligned}$$

Oppgave 3

- a) Vektoren mellom to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er gitt ved $[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$. Vi får da:

$$\vec{AB} = [-1 - (-2), -3 - (-1)] = [1, -2]$$

$$\vec{BC} = [3 - (-1), -1 - (-3)] = [4, 2]$$

- b) Vi har at de to vektorene står vinkelrett på hverandre dersom $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$
 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = [1, -2] \cdot [4, 2] = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = 4 + (-4) = 0$

Vektorene står vinkelrett på hverandre.

- c) Vektorene \vec{CD} og \vec{AB} er parallelle dersom $\vec{CD} = k \cdot \vec{AB}$ der k er et tall. Vi finner først \vec{CD} på samme måte som vi fant vektorene i oppgave a.
 $\vec{CD} = [t - 3, t^2 + 2 - (-1)] = [t - 3, t^2 + 3]$

$$\begin{aligned} \vec{CD} &= k \cdot \vec{AB} \\ [t - 3, t^2 + 3] &= k \cdot [1, -2] = [k, -2k] \end{aligned}$$

For at to vektorer skal være like må x-koordinatene være like hverandre og y-koordinatene være like hverandre i de to vektorene. Vi får altså to likninger med to ukjente:

$$t - 3 = k \quad \vee \quad t^2 + 3 = -2k$$

Likning nr 1 gir oss et uttrykk for k . Dette setter vi inn for k i likning nr 2 og løser for t .

$$t^2 + 3 = -2(t - 3)$$

$$t^2 + 3 = -2t + 6$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

vi bruker abc-formelen og får

$$t = 1 \quad \text{eller} \quad t = -3$$

Vi har altså at \vec{CD} og \vec{AB} er parallelle hvis $t = 1$ eller hvis $t = -3$.

Oppgave 4

- a) En divisjon $P(x) : (x - a)$, der $P(x)$ er et polynom, går opp dersom $P(a) = 0$. Vi må altså sjekke for hvilke verdier av k som gjør at $f(1) = 0$.

$$f(1) = 1^3 + k \cdot 1 + 12 = 0$$

$$1 + k + 12 = 0$$

$$k + 13 = 0$$

$$k = -13$$

- b) Vi har nå at $f(x) = x^3 - 13x + 12$. Vi vet at $f(x)$ er delelig med $(x - 1)$, derfor gjør vi en polynomdivisjon med dette for å faktorisere f . Vi vil få et andregradspolynom etter polynomdivisjonen som vi kan faktorisere videre ved hjelp av abc-formelen.

$$\begin{array}{r}
 (\quad x^5 \quad + x^4 \quad + x^3 \quad - 13x + 12) : (x - 1) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x - 10 + \frac{2}{x - 1} \\
 \hline
 \quad \quad 2x^4 \quad + x^3 \\
 \quad \quad - 2x^4 + 2x^3 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 3x^3 \\
 \quad \quad \quad - 3x^3 + 3x^2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad 3x^2 - 13x \\
 \quad \quad \quad \quad - 3x^2 + 3x \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad - 10x + 12 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 10x - 10 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2
 \end{array}$$

Ved hjelp av abc-formelen får vi at (x^2+x-12) kan faktoriseres til $(x+4)(x-3)$. Når vi nå setter sammen alle de lineære faktorene vi har funnet, har vi at $f(x)$ kan faktoriseres slik: $f(x) = x^3 - 13x + 12 = \underline{\underline{(x - 1)(x + 4)(x - 3)}}$.

c) $\frac{x^2+x-12}{x-1}$