Løsningsforslag – Eksamen R1, våren 2018

Laget av Anita G. Sist oppdatert: 22. august 2018 Antall sider: 9

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på `https://github.com/matematikk/vgs_eksamener`.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi skal derivere $f(x) = x^4 - x + 2$. Vi bruker regelen $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$. Vi får da at $f'(x) = 4x^3 - 1$.

b) Her ser vi at funksjonen g er sammensatt av to funksjoner som er multiplisert sammen, nemlig x^3 og $\ln(x)$. Vi bruker derfor produktregelen: $f(x) = uv \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$. Vi får da

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 \cdot \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 3x^2 \ln(x) + x^2 \\ &= x^2(3\ln(x) + 1) \end{aligned}$$

c) Her får vi bruk for kjerneregelen, der vi velger at kjernen vår er $u = 2x^2 + x$. Vi har at

$$\begin{aligned} h(x) = e^{u(x)} \Rightarrow h'(x) &= (e^{u(x)})' \cdot u'(x) \\ &= e^{u(x)} \cdot (4x + 1) \\ &= (4x + 1)e^{2x^2+x} \end{aligned}$$

Oppgave 2

a)

$$\frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

Først faktoriserer vi nevnerene for å finne ut hva fellesnevneren til brøkene er. Nevneren i det første leddet faktoriseres slik: $2x - 2 = 2(x - 1)$. Nevneren i andre legg kan ikke faktoriseres, mens nevneren i det tredje leddet kan vi faktorisere for eksempel ved bruk av abc-formelen. Etter faktoriseringen ser uttrykket ut slik

$$\frac{1}{2(x-1)} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$$

Vi ser dermed at fellesnevneren er $2(x-1)(x-3)$. Vi ganger første ledd med $(x-3)$ i både teller og nevner, andre ledd med $2(x-1)$ og tredje ledd med 2.

$$\begin{aligned}
&\frac{1(x-3)}{2(x-1)(x-3)} + \frac{2\cdot 2(x-1)}{2(x-1)(x-3)} - \frac{2(x-3)}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{x-3+4x-4-2x+4}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{3x-3}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{3(x-1)}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{3}{2(x-3)}
\end{aligned}$$

b) Her må vi ta i bruk logaritmesetningene. Disse er: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ og $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$.

$$\begin{aligned}
&2\ln(x\cdot y^3) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \\
&= 2(\ln(x) + \ln(y^3) - \frac{1}{2}(\ln(x^4) - \ln(y^2)) \\
&= 2(\ln(x) + 3\ln(y)) - \frac{1}{2}(4\ln(x) - 2\ln(y)) \\
&= 2\ln(x) + 6\ln(y) - 2\ln(x) + \ln(y) \\
&= \underline{\underline{7\ln(y)}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Vektoren mellom to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er gitt ved $[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$. Vi får da:
$\vec{AB} = [-1-(-2), -3-(-1)] = [1, -2]$
$\vec{BC} = [3-(-1), -1-(-3)] = [4, 2]$

b) Vi har at de to vektorene står vinkelrett på hverandre dersom $\vec{AB}\cdot\vec{BC} = 0$
$\vec{AB}\cdot\vec{BC} = [1,-2]\cdot[4,2] = 1\cdot 4 + (-2)\cdot 2 = 4 + (-4) = 0$

Vektorene står vinkelrett på hverandre.

c) Vektorene $\vec{CD}$ og $\vec{AB}$ er parallelle dersom $\vec{CD} = k\cdot\vec{AB}$ der k er et tall. Vi finner først $\vec{CD}$ på samme måte som vi fant vektorene i oppgave a.
$\vec{CD} = [t-3, t^2+2-(-1)] = [t-3, t^2+3]$

$$\begin{gathered}
\vec{CD} = k\cdot\vec{AB} \\
[t-3, t^2+3] = k\cdot[1,-2] \quad = [k, -2k]
\end{gathered}$$

For at to vektorer skal være like må x-koordinatene være like hverandre og y-koordinatene være like hverandre i de to vektorene. Vi får altså to likninger med to ukjente:

$$t-3=k \quad \vee \quad t^2+3=-2k$$

Likning nr 1 gir oss et uttrykk for k. Dette setter vi inn for k i likning nr 2 og løser for t.

$$\begin{aligned}
&t^2+3=-2(t-3)\\
&t^2+3=-2t+6\\
&t^2+2t-3=0\\
&\\
&\text{vi bruker abc-formelen og får}\\
&t=1 \quad eller \quad t=-3
\end{aligned}$$

Vi har altså at $\vec{CD}$ og $\vec{AB}$ er parallelle hvis $t=1$ eller hvis $t=-3$.

Oppgave 4

a) En divisjon $P(x):(x-a)$, der $P(x)$ er et polynom, går opp dersom $P(a)=0$. Vi må altså sjekke for hvilke verdier av k som gjør at $f(1)=0$.

$$\begin{aligned}
f(1)=1^3+k\cdot 1+12&=0\\
1+k+12&=0\\
k+13&=0\\
k&=-13
\end{aligned}$$

b) Vi har nå at $f(x)=x^3-13x+12$. Vi vet at $f(x)$ er delelig med $(x-1)$, derfor gjør vi en polynomdivisjon med dette for å faktorisere f. Vi vil få et andregradspolynom etter polynomdivisjonen som vi kan faktorisere videre ved hjelp av abc-formelen.

$$\begin{array}{l}
\big(x^3 \qquad -13x+12\big):\big(x-1\big)=x^2+x-12\\
\underline{-x^3+x^2}\\
\qquad x^2-13x\\
\qquad \underline{-x^2+x}\\
\qquad\qquad -12x+12\\
\qquad\qquad \underline{\ \ 12x-12}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Ved hjelp av abc-formelen får vi at (x^2+x-12) kan faktoriseres til $(x+4)(x-3)$. Når vi nå setter sammen alle de lineære faktorene vi har funnet, har vi at $f(x)$ kan faktoriseres slik: $f(x) = x^3 - 13x + 12 = \underline{\underline{(x-1)(x+4)(x-3)}}$.

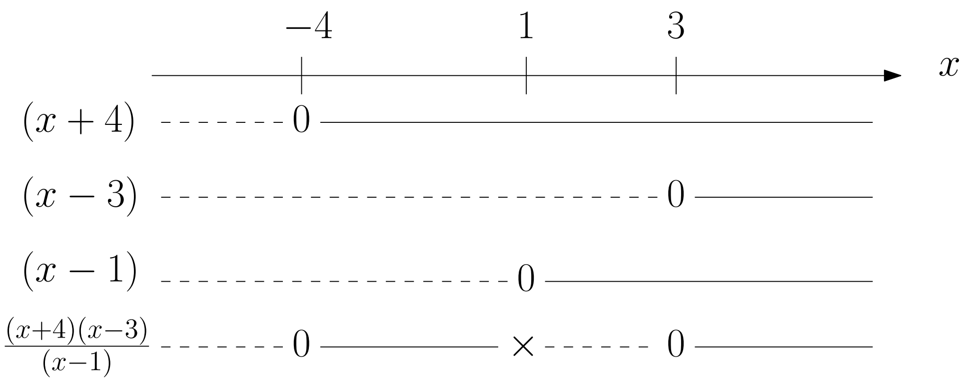
c)

$$\frac{x^2 + x - 12}{x - 1}$$

Fra forrige oppgave vet vi at telleren kan faktoriseres til $(x+4)(x-3)$, som vil si at vi kan skrive brøken som

$$\frac{(x+4)(x-3)}{x-1}$$

Vi lager fortegnsskjema.



Vi ser dermed at

$$\frac{(x+4)(x-3)}{x-1} \geq 0$$

når $\underline{\underline{-4 \leq x < 1 \text{ og når } x \geq 3}}$.

Oppgave 5

Oppgave 6

a) Vi finner nullpunktene til en funksjon ved å sette funksjonsuttrykket lik 0: $f(x) = 0$, og løser likningen.

$$\begin{aligned} e^{2x} - 4e^x + 3 &= 0 \qquad \text{vi setter } e^x = u \\ u^2 - 4u + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Vi bruker abc-formelen for å løse denne andregradslikningen, og får at $u = 3$ og $u = 1$. Dette gir oss to likninger som vi nå kan løse for x.

$$
\begin{aligned}
u &= 3 \qquad & u &= 1 \\
e^x &= 3 \qquad & e^x &= 1 \\
\ln e^x &= \ln 1 \qquad & \ln e^x &= \ln 3 \\
x &= 0 \qquad & x &= \ln 3 \approx 1.10
\end{aligned}
$$

Nullpunktene til $f(x)$ er altså $\underline{\underline{x = 0}}$ og $\underline{\underline{x = \ln 3 \approx 1.10}}$.

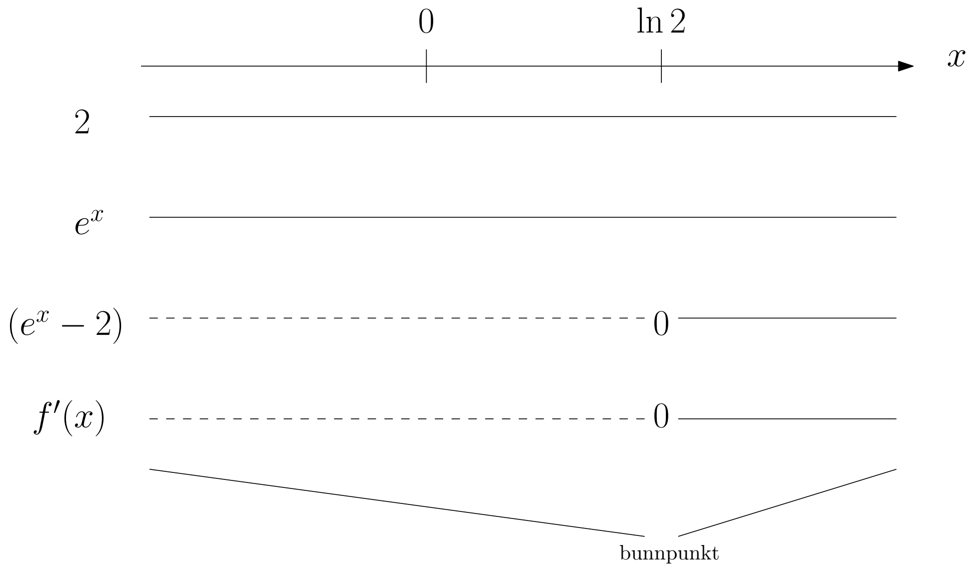
b) For å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter til funksjonen, deriverer vi funksjonen og ser når den deriverte er lik 0. Det er blant løsningene vi får til $f'(x) = 0$, vi vil finne de eventuelle topp- og bunnpunktene.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2e^{2x} - 4e^x \\
&= 2e^x(e^x - 2)
\end{aligned}
$$

Så løser vi likningen $f'(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
2e^x(e^x - 2) &= 0 \qquad 2e^x > 0 \text{ alltid, så vi får} \\
e^x - 2 &= 0 \\
e^x &= 2 \\
\ln e^x &= \ln 2 \\
x &= \ln 2
\end{aligned}
$$

Vi lager fortegnslinje for å sjekke om dette punktet er et topp- eller bunnpunkt, eller ingen av delene.



Vi ser av fortegnslinjen at vi har et bunnpunkt i $x = \ln 2$. Funksjonsverdien for denne x-verdien er

$$
\begin{aligned}
f(\ln 2) &= e^{2\ln 2} - 4e^{\ln 2} + 3 \\
&= e^{\ln 2^2} - 4e^{\ln 2} + 3 \\
&= 4 - 8 + 3 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Bunnpunktet er altså $\underline{\underline{(\ln 2, -1)}}$.

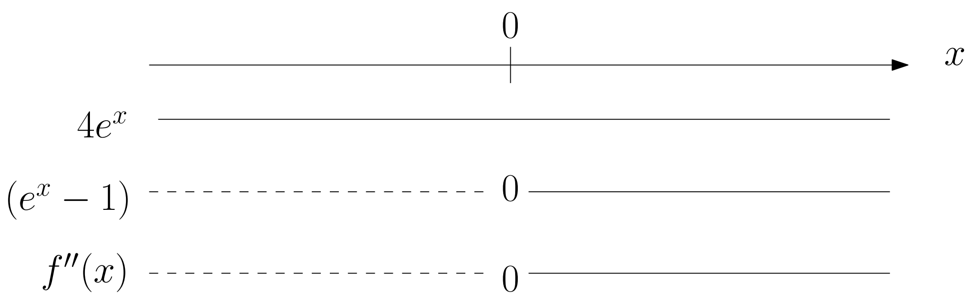
c) Når vi skal bestemme eventuelle vendepunkt, kan vi undersøke hvor den dobbeltderiverte av funksjonen endrer fortegn. Vi deriverer derfor den deriverte vi fant i forrige deloppgave.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 4e^{2x} - 4e^{x} \\
&= 4e^{x}(e^{x} - 1)
\end{aligned}
$$

Deretter setter vi den dobbeltderiverte lik 0, og lager igjen fortegnslinje som i oppgaven over.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
4e^{x}(e^{x} - 1) &= 0 \qquad 4e^{x} > 0 \text{ alltid, så vi får} \\
e^{x} - 1 &= 0 \\
e^{x} &= 1 \\
\ln e^{x} &= \ln 1 \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Fortegnslinjen vil se slik ut:

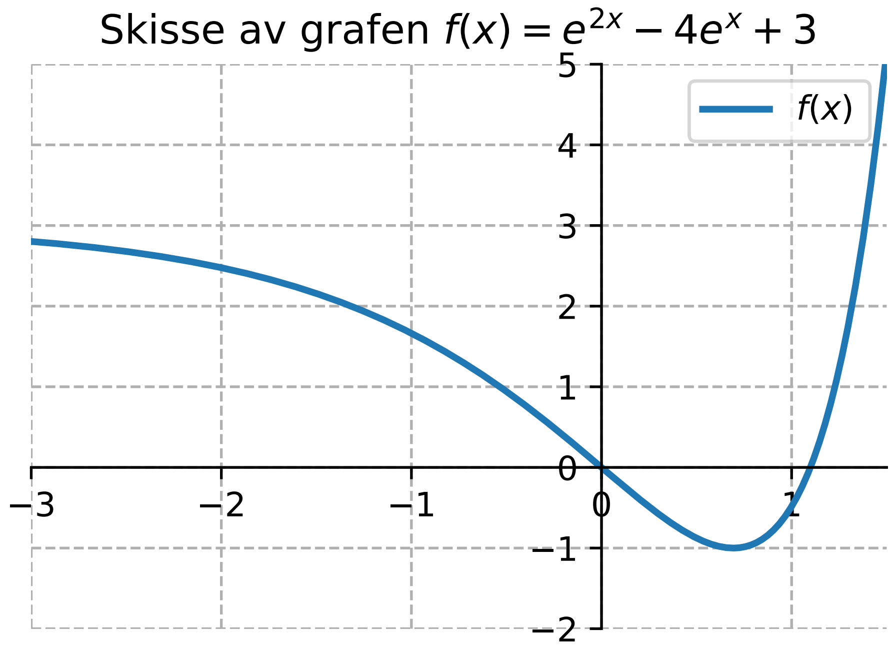


Vi ser altså at den dobbeltderiverte skifter fortegn når $x = 0$. Den tilhørende funksjonsverdien er:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= e^{2\cdot 0} - 4e^{0} + 3 \\
&= 1 - 4 + 3 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

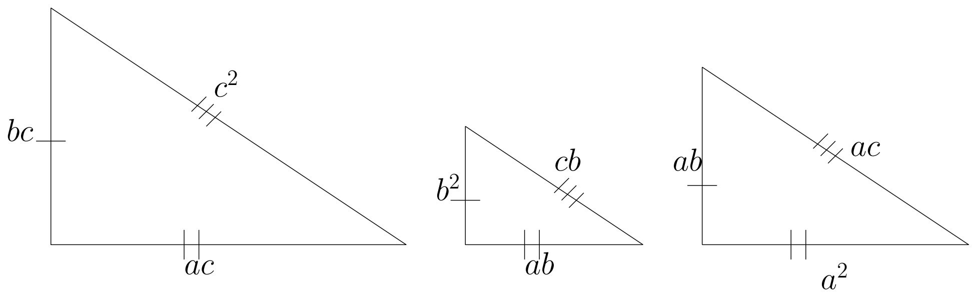
Vendepunktet for funksjonen er altså i punktet $\underline{\underline{(0, 0)}}$.

d) Når vi lager en skisse av grafen til funksjonen, er det veldig lurt å tegne inn de punktene vi har funnet i oppgavene over. Disse punktene gir oss god informasjon om hvordan grafen omtrent kan se ut.



Oppgave 7

a) En måte å vise at trekantene er formlike på, er å sjekke at forholdet mellom samsvarende sider er det samme.



Vi starter med å vise at trekant 1 og 2 er formlike. Forholdet mellom de formlike sidene er:

$$\frac{bc}{b^2} = \frac{c}{b}$$
$$\frac{ac}{ab} = \frac{c}{b}$$
$$\frac{c^2}{cb} = \frac{c}{b}$$

Deretter sjekker vi om trekant 2 og 3 er formlike

$$\frac{b^2}{ab} = \frac{b}{a}$$
$$\frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a}$$
$$\frac{cb}{ac} = \frac{b}{a}$$

Vi ser altså at trekant 1 er formlik med trekant 2 og at trekant 2 er formlik med trekant 3. Da må også trekant 1 og 3 være formlike.

b) For å vise at punktene E, D og C ligger på en rett linje, må vi vise at $\angle ADE + \angle BDC = 180°$. Siden de tre trekantene er formlike, vet vi at samsvarende vinkler er like store. Vi vet også at $\angle ADB = 90°$, så det gjenstår å vise at $\angle ADE + \angle BDC = 90°$.

Dette gjør vi ved å trekke to hjelpelinjer som vist på figuren nedenfor. Vi vet at to parallelle linjer som skjæres av samme linje danner samsvarende vinkler. I tillegg får vi toppvinkler. Derfor vet vi at $\angle BAD$ er samsvarende vinkel med $\angle ADE$, som vil si at disse to vinklene er like store. Vi får samme tilfelle for $\angle ABD$. Denne er samsvarende med vinkel $\angle BDC$, altså er disse to vinklene også like store.

Siden summen av vinklene i en trekant er 180, vet vi at $\angle BAD + \angle ABD?90°$, og dermed vet vi også at $\angle ADE + \angle BDC = 90°$. Vi har da at $\angle EDC = 180°$, og dermed må punktene E, D og C ligge på samme linje.

c) Fra oppgaven over har vi at $\angle DAE + \angle BAD = 90°$ og at $\angle DBA + \angle CBD = 90°$. Da har vi at alle hjørnene i firkanten vår er 90°, altså har vi et rektangel.

I et rektangel vet vi at parallelle sider er like lange, det vil si at lengden av siden EC skal være lik lengden av siden AB. Altså: $a^2 + b^2 = c^2$, som er Pytagoras' setning.

Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

Oppgave 2

Likningen for en sirkel kan skrives

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

, og vi får oppgitt at $A(3,8)$, $B(9,6)$ og $C(13,-2)$ ligger på sirkelperiferien.

a) For at likningen skal gjelde for en sirkel som går gjennom alle de gitte punktene, må likningen gå opp uansett hvilket punkt vi setter inn i likningen. For å finne et likningssystem som svarer til det over, setter vi altså inn x- og y-koordinatene for hvert av punktene i hver sin likning. Likningssystemet blir da:

$$\begin{cases} 3^2 + 8^2 + 3a + 8b + c = 0 \\ 9^2 + 6^2 + 9a + 6b + c = 0 \\ 13^2 + (-2)^2 + 13a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

b) Vi skriver inn hver likning i CAS, markerer alle linjene og trykker på x=. Vi kan også bruke kommandoen Løs, og skrive inn hvilke linjer CAS skal løse. Dette ville vi i mitt tilfelle gjort slik: Løs({$1,$2,$3}).

1	$3^2 + 8^2 + 3a + 8b + c = 0$ → $\mathbf{3a + 8b + c + 73 = 0}$
2	$9^2 + 6^2 + 9a + 6b + c = 0$ → $\mathbf{9a + 6b + c + 117 = 0}$
3	$13^2 + (-2)^2 + 13a - 2b + c = 0$ → $\mathbf{13a - 2b + c + 173 = 0}$
4	{$1, $2, $3} Løs: $\mathbf{\{\{a = -6, b = 4, c = -87\}\}}$

Oppgave 3