Løsningsforslag – Eksamen R1, våren 2018

Laget av Anita G. Sist oppdatert: 4. august 2018 Antall sider: 4

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på `https://github.com/matematikk/vgs_eksamener`.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi skal derivere $f(x) = x^4 - x + 2$. Vi bruker regelen $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$. Vi får da at $f'(x) = 4x^3 - 1$.

b) Her ser vi at funksjonen g er sammensatt av to funksjoner som er multiplisert sammen, nemlig x^3 og $ln(x)$. Vi bruker derfor produktregelen: $f(x) = uv \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$. Vi får da

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 \cdot ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 3x^2 ln(x) + x^2 \\ &= x^2(3ln(x) + 1) \end{aligned}$$

c) Her får vi bruk for kjerneregelen, der vi velger at kjernen vår er $u = 2x^2 + x$. Vi har at

$$\begin{aligned} h(x) = e^{u(x)} \Rightarrow h'(x) &= (e^{u(x)})' \cdot u'(x) \\ &= e^{u(x)} \cdot (4x + 1) \\ &= (4x + 1)e^{2x^2+x} \end{aligned}$$

Oppgave 2

a)

$$\frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

Først faktoriserer vi nevnerene for å finne ut hva fellesnevneren til brøkene er. Nevneren i det første leddet faktoriseres slik: $2x - 2 = 2(x - 1)$. Nevneren i andre legg kan ikke faktoriseres, mens nevneren i det tredje leddet kan vi faktorisere for eksempel ved bruk av abc-formelen. Etter faktoriseringen ser uttrykket ut slik

$$\frac{1}{2(x-1)} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$$

Vi ser dermed at fellesnevneren er $2(x-1)(x-3)$. Vi ganger første ledd med $(x-3)$ i både teller og nevner, andre ledd med $2(x-1)$ og tredje ledd med 2.

$$\begin{aligned}
&\frac{1(x-3)}{2(x-1)(x-3)} + \frac{2\cdot 2(x-1)}{2(x-1)(x-3)} - \frac{2(x-3)}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{x-3+4x-4-2x+4}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{3x-3}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{3(x-1)}{2(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{3}{2(x-3)}
\end{aligned}$$

b) Her må vi ta i bruk logaritmesetningene. Disse er: $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$, $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$ og $ln(a^x) = x \cdot ln(a)$.

$$\begin{aligned}
&2ln(x\cdot y^3) - \frac{1}{2}ln\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \\
&= 2(ln(x) + ln(y^3)) - \frac{1}{2}(ln(x^4) - ln(y^2)) \\
&= 2(ln(x) + 3ln(y)) - \frac{1}{2}(4ln(x) - 2ln(y)) \\
&= 2ln(x) + 6ln(y) - 2ln(x) + ln(y) \\
&= \underline{\underline{7ln(y)}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Vektoren mellom to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er gitt ved $[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$. Vi får da:
$\vec{AB} = [-1-(-2), -3-(-1)] = [1, -2]$
$\vec{BC} = [3-(-1), -1-(-3)] = [4, 2]$

b) Vi har at de to vektorene står vinkelrett på hverandre dersom $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$
$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = [1, -2] \cdot [4, 2] = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = 4 + (-4) = 0$

Vektorene står vinkelrett på hverandre.

c) Vektorene $\vec{CD}$ og $\vec{AB}$ er parallelle dersom $\vec{CD} = k \cdot \vec{AB}$ der k er et tall. Vi finner først $\vec{CD}$ på samme måte som vi fant vektorene i oppgave a.
$\vec{CD} = [t-3, t^2+2-(-1)] = [t-3, t^2+3]$

$$\vec{CD} = k \cdot \vec{AB}$$
$$[t-3, t^2+3] = k \cdot [1, -2] \quad = [k, -2k]$$

For at to vektorer skal være like må x-koordinatene være like hverandre og y-koordinatene være like hverandre i de to vektorene. Vi får altså to likninger med to ukjente:

$$t - 3 = k \ \ \vee \ \ t^2 + 3 = -2k$$

Likning nr 1 gir oss et uttrykk for k. Dette setter vi inn for k i likning nr 2 og løser for t.

$$\begin{aligned}
&t^2 + 3 = -2(t-3) \\
&t^2 + 3 = -2t + 6 \\
&t^2 + 2t - 3 = 0 \\
&\\
&\text{vi bruker abc-formelen og får} \\
&t = 1 \ \ eller \ \ t = -3
\end{aligned}$$

Vi har altså at $\vec{CD}$ og $\vec{AB}$ er parallelle hvis $t = 1$ eller hvis $t = -3$.

Oppgave 4

a) En divisjon $P(x) : (x - a)$, der $P(x)$ er et polynom, går opp dersom $P(a) = 0$. Vi må altså sjekke for hvilke verdier av k som gjør at $f(1) = 0$.

$$\begin{aligned}
f(1) = 1^3 + k \cdot 1 + 12 &= 0 \\
1 + k + 12 &= 0 \\
k + 13 &= 0 \\
k &= -13
\end{aligned}$$

b) Vi har nå at $f(x) = x^3 - 13x + 12$. Vi vet at $f(x)$ er delelig med $(x - 1)$, derfor gjør vi en polynomdivisjon med dette for å faktorisere f. Vi vil få et andregradspolynom etter polynomdivisjonen som vi kan faktorisere videre ved hjelp av abc-formelen.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\big(\; x^5 & +\,x^4 & +\,x^3 & & -\,13x & +\,12\big) & : \big(x-1\big) = x^4+2x^3+3x^2+3x-10+\dfrac{2}{x-1} \\
-\,x^5 & +\,x^4 & & & & & \\
\cline{1-2}
 & 2x^4 & +\,x^3 & & & & \\
 & -\,2x^4 & +\,2x^3 & & & & \\
\cline{2-3}
 & & 3x^3 & & & & \\
 & & -\,3x^3 & +\,3x^2 & & & \\
\cline{3-4}
 & & & 3x^2 & -\,13x & & \\
 & & & -\,3x^2 & +\,3x & & \\
\cline{4-5}
 & & & & -\,10x & +\,12 & \\
 & & & & 10x & -\,10 & \\
\cline{5-6}
 & & & & & 2 &
\end{array}
$$

Ved hjelp av abc-formelen får vi at (x^2+x-12) kan faktoriseres til $(x+4)(x-3)$. Når vi nå setter sammen alle de lineære faktorene vi har funnet, har vi at $f(x)$ kan faktoriseres slik: $f(x) = x^3 - 13x + 12 = \underline{\underline{(x-1)(x+4)(x-3)}}$.

c) $\frac{x^2+x-12}{x-1}$