

Løsningsforslag – Eksamen R1, våren 2018

Laget av Anita G.

Sist oppdatert: 19. oktober 2018

Antall sider: 14

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på https://github.com/matematikk/vgs_eksamener.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

- a) Vi skal derivere $f(x) = x^4 - x + 2$. Vi bruker regelen $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$. Vi får da at $f'(x) = 4x^3 - 1$.
- b) Her ser vi at funksjonen g er sammensatt av to funksjoner som er multiplisert sammen, nemlig x^3 og $\ln(x)$. Vi bruker derfor produktregelen: $f(x) = uv \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$. Vi får da

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 \cdot \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 3x^2 \ln(x) + x^2 \\ &= x^2(3 \ln(x) + 1) \end{aligned}$$

- c) Her får vi bruk for kjerneregelen, der vi velger at kjernen vår er $u = 2x^2 + x$. Vi har at

$$\begin{aligned} h(x) = e^{u(x)} &\Rightarrow h'(x) = (e^{u(x)})' \cdot u'(x) \\ &= e^{u(x)} \cdot (4x + 1) \\ &= (4x + 1)e^{2x^2+x} \end{aligned}$$

Oppgave 2

a)

$$\frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

Først faktorerer vi nevnerene for å finne ut hva fellesnevneren til brøkene er. Nevneren i det første leddet faktoreres slik: $2x - 2 = 2(x - 1)$. Nevneren i andre ledd kan ikke faktoreres, mens nevneren i det tredje leddet kan vi faktorisere for eksempel ved bruk av abc-formelen. Etter faktoriseringen ser uttrykket ut slik

$$\frac{1}{2(x-1)} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$$

Vi ser dermed at fellesnevneren er $2(x-1)(x-3)$. Vi ganger første ledd med $(x-3)$ i både teller og nevner, andre ledd med $2(x-1)$ og tredje ledd med 2.

$$\begin{aligned} & \frac{1(x-3)}{2(x-1)(x-3)} + \frac{2 \cdot 2(x-1)}{2(x-1)(x-3)} - \frac{2(x-3)}{2(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{x-3+4x-4-2x+6}{2(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{x-1}{2(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{1}{2(x-3)} \end{aligned}$$

- b) Her må vi ta i bruk logaritmesetningene. Disse er: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ og $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$.

$$\begin{aligned} & 2\ln(x \cdot y^3) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \\ &= 2(\ln(x) + \ln(y^3)) - \frac{1}{2}(\ln(x^4) - \ln(y^2)) \\ &= 2(\ln(x) + 3\ln(y)) - \frac{1}{2}(4\ln(x) - 2\ln(y)) \\ &= 2\ln(x) + 6\ln(y) - 2\ln(x) + \ln(y) \\ &= \underline{\underline{7\ln(y)}} \end{aligned}$$

Oppgave 3

- a) Vektoren mellom to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er gitt ved $[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$.

Vi får da:

$$\vec{AB} = [-1 - (-2), -3 - (-1)] = [1, -2]$$

$$\vec{BC} = [3 - (-1), -1 - (-3)] = [4, 2]$$

- b) Vi har at de to vektorene står vinkelrett på hverandre dersom $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = [1, -2] \cdot [4, 2] = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = 4 + (-4) = 0$$

Vektorene står vinkelrett på hverandre.

- c) Vektorene \vec{CD} og \vec{AB} er parallelle dersom $\vec{CD} = k \cdot \vec{AB}$ der k er et tall. Vi finner først \vec{CD} på samme måte som vi fant vektorene i oppgave a.

$$\vec{CD} = [t - 3, t^2 + 2 - (-1)] = [t - 3, t^2 + 3]$$

$$\vec{CD} = k \cdot \vec{AB}$$

$$[t - 3, t^2 + 3] = k \cdot [1, -2] = [k, -2k]$$

For at to vektorer skal være like må x-koordinatene være like hverandre og y-koordinatene være like hverandre i de to vektorene. Vi får altså to likninger med to ukjente:

$$t - 3 = k \quad \vee \quad t^2 + 3 = -2k$$

Likning nr 1 gir oss et uttrykk for k . Dette setter vi inn for k i likning nr 2 og løser for t .

$$t^2 + 3 = -2(t - 3)$$

$$t^2 + 3 = -2t + 6$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

vi bruker abc-formelen og får

$$t = 1 \quad \text{eller} \quad t = -3$$

Vi har altså at \vec{CD} og \vec{AB} er parallelle hvis $t = 1$ eller hvis $t = -3$.

Oppgave 4

- a) En divisjon $P(x) : (x - a)$, der $P(x)$ er et polynom, går opp dersom $P(a) = 0$. Vi må altså sjekke for hvilke verdier av k som gjør at $f(1) = 0$.

$$f(1) = 1^3 + k \cdot 1 + 12 = 0$$

$$1 + k + 12 = 0$$

$$k + 13 = 0$$

$$k = -13$$

- b) Vi har nå at $f(x) = x^3 - 13x + 12$. Vi vet at $f(x)$ er delelig med $(x - 1)$, derfor gjør vi en polynomdivisjon med dette for å faktorisere f . Vi vil få et andregradspolynom etter polynomdivisjonen som vi kan faktorisere videre ved hjelp av abc-formelen.

$$\begin{array}{r} x^3 - 13x + 12 \\ - x^3 + x^2 \\ \hline x^2 - 13x \\ - x^2 + x \\ \hline - 12x + 12 \\ 12x - 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ved hjelp av abc-formelen får vi at (x^2+x-12) kan faktoriseres til $(x+4)(x-3)$. Når vi nå setter sammen alle de lineære faktorene vi har funnet, har vi at $f(x)$ kan faktoriseres slik: $f(x) = x^3 - 13x + 12 = \underline{\underline{(x-1)(x+4)(x-3)}}$.

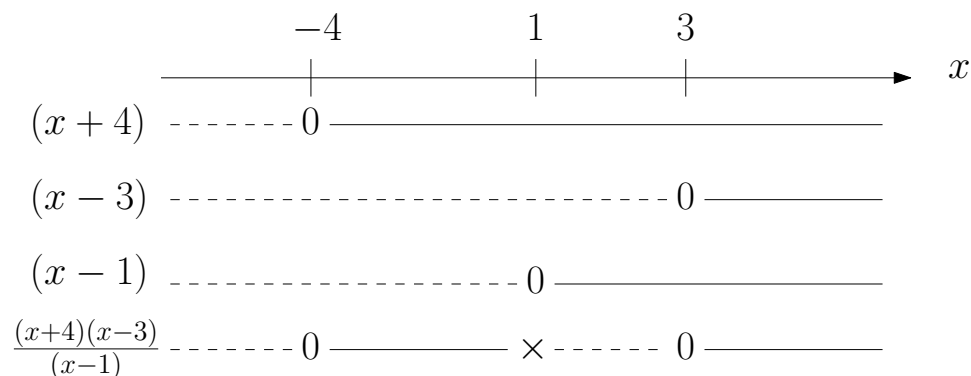
c)

$$\frac{x^2 + x - 12}{x - 1}$$

Fra forrige oppgave vet vi at telleren kan faktoriseres til $(x+4)(x-3)$, som vil si at vi kan skrive brøken som

$$\frac{(x+4)(x-3)}{x-1}$$

Vi lager fortegnsskjema.



Vi ser dermed at

$$\frac{(x+4)(x-3)}{x-1} \geq 0$$

når $-4 \leq x < 1$ og når $x \geq 3$.

Oppgave 5

- a) Vi bruker i denne oppgaven produktsetningen. Vi skal finne sannsynligheten for at laderen kommer fra leverandør A og at den er defekt, altså sannsynligheten $P(\text{fra leverandør A} \cap \text{defekt})$.

$$\begin{aligned} P(\text{fra leverandør A} \cap \text{defekt}) &= P(\text{fra leverandør A}) \cdot P(\text{defekt} \mid \text{fra leverandør A}) \\ &= 0.4 \cdot 0.03 \\ &= 0.012 \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at laderen er fra leverandør A og er defekt er 1.2 %.

- b) For å bestemme sannsynligheten for at en lader som er defekt kommer fra leverandør A, kan vi bruke Bayes' setning og setningen om total sannsynlighet.

Bayes' setning i dette tilfellet blir

$$P(\text{fra leverandør A} \mid \text{defekt}) = \frac{P(\text{fra leverandør A}) \cdot P(\text{defekt} \mid \text{fra leverandør A})}{P(\text{defekt})}$$

Men for å kunne bruke denne formelen er vi nødt til å finne ut hva $P(\text{defekt})$ er. Det gjør vi ved hjelp av setningen om total sannsynlighet.

$$\begin{aligned} P(\text{defekt}) &= P(\text{fra leverandør A}) \cdot P(\text{defekt} \mid \text{fra leverandør A}) \\ &\quad + P(\text{fra leverandør B}) \cdot P(\text{defekt} \mid \text{fra leverandør B}) = 0.4 \cdot 0.03 + 0.6 \cdot 0.02 \\ &= 0.024 \end{aligned}$$

Nå setter vi dette inn i nevneren i Bayes' setning og får:

$$\begin{aligned} P(\text{fra leverandør A} \mid \text{defekt}) &= \frac{P(\text{fra leverandør A}) \cdot P(\text{defekt} \mid \text{fra leverandør A})}{P(\text{defekt})} \\ &= \frac{0.04 \cdot 0.03}{0.024} \\ &= \frac{0.012}{0.024} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at en defekt lader er fra leverandør A er 50 %

Oppgave 6

- a) Vi finner nullpunktene til en funksjon ved å sette funksjonsuttrykket lik 0: $f(x) = 0$, og løser likningen.

$$\begin{aligned} e^{2x} - 4e^x + 3 &= 0 & \text{vi setter } e^x &= u \\ u^2 - 4u + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Vi bruker abc-formelen for å løse denne andregradslikningen, og får at $u = 3$ og $u = 1$. Dette gir oss to likninger som vi nå kan løse for x .

$$\begin{aligned} u &= 3 & u &= 1 \\ e^x &= 3 & e^x &= 1 \\ \ln e^x &= \ln 3 & \ln e^x &= \ln 1 \\ x &= \ln 3 \approx 1.10 & x &= 0 \end{aligned}$$

Nullpunktene til $f(x)$ er altså $x = 0$ og $x = \ln 3 \approx 1.10$.

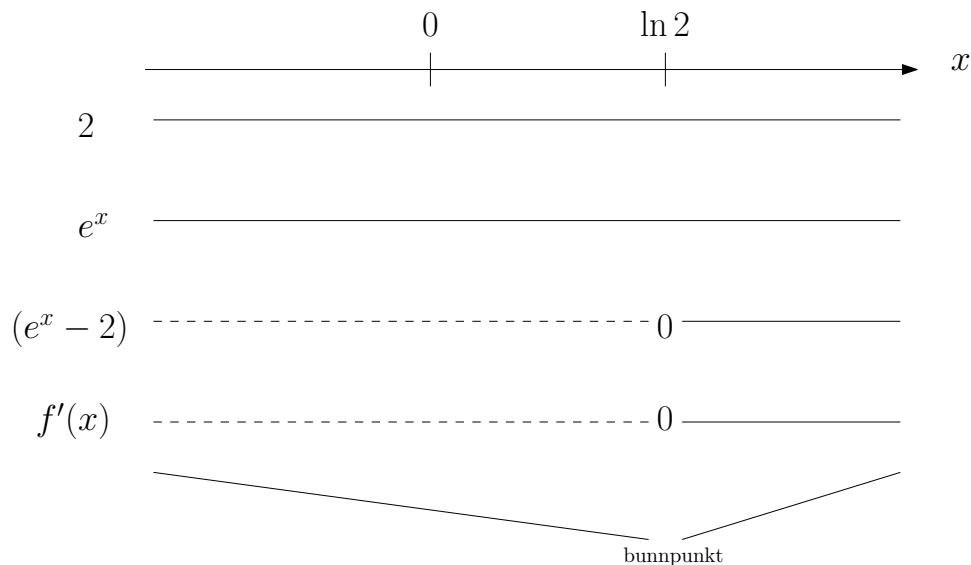
- b) For å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter til funksjonen, deriverer vi funksjonen og ser når den deriverte er lik 0. Det er blant løsningene vi får til $f'(x) = 0$, vi vil finne de eventuelle topp- og bunnpunktene.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x} - 4e^x \\ &= 2e^x(e^x - 2) \end{aligned}$$

Så løser vi likningen $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2e^x(e^x - 2) &= 0 & 2e^x > 0 \text{ alltid, så vi får} \\ e^x - 2 &= 0 \\ e^x &= 2 \\ \ln e^x &= \ln 2 \\ x &= \ln 2 \end{aligned}$$

Vi lager fortegnslinje for å sjekke om dette punktet er et topp- eller bunnpunkt, eller ingen av delene.



Vi ser av fortegnslinjen at vi har et bunnpunkt i $x = \ln 2$. Funksjonsverdien for denne x -verdien er

$$\begin{aligned} f(\ln 2) &= e^{2\ln 2} - 4e^{\ln 2} + 3 \\ &= e^{\ln 2^2} - 4e^{\ln 2} + 3 \\ &= 4 - 8 + 3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Bunnpunktet er altså $(\ln 2, -1)$.

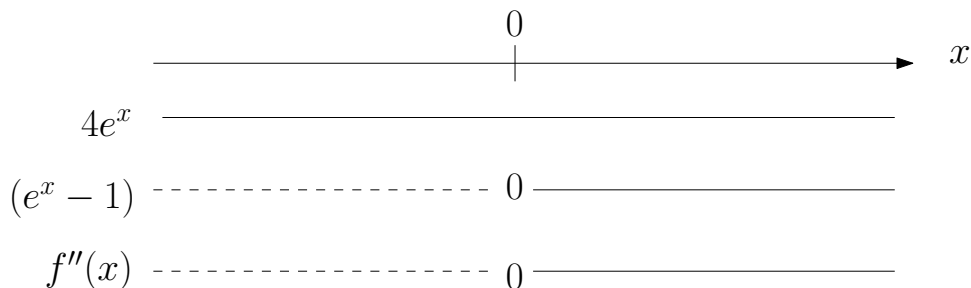
- c) Når vi skal bestemme eventuelle vendepunkt, kan vi undersøke hvor den dobbeltderiverte av funksjonen endrer fortegn. Vi deriverer derfor den deriverte vi fant i forrige deloppgave.

$$\begin{aligned}f''(x) &= 4e^{2x} - 4e^x \\ &= 4e^x(e^x - 1)\end{aligned}$$

Deretter setter vi den dobbeltderiverte lik 0, og lager igjen fortegnslinje som i oppgaven over.

$$\begin{aligned}f''(x) &= 0 \\ 4e^x(e^x - 1) &= 0 & 4e^x > 0 \text{ alltid, så vi får} \\ e^x - 1 &= 0 \\ e^x &= 1 \\ \ln e^x &= \ln 1 \\ x &= 0\end{aligned}$$

Fortegnslinjen vil se slik ut:



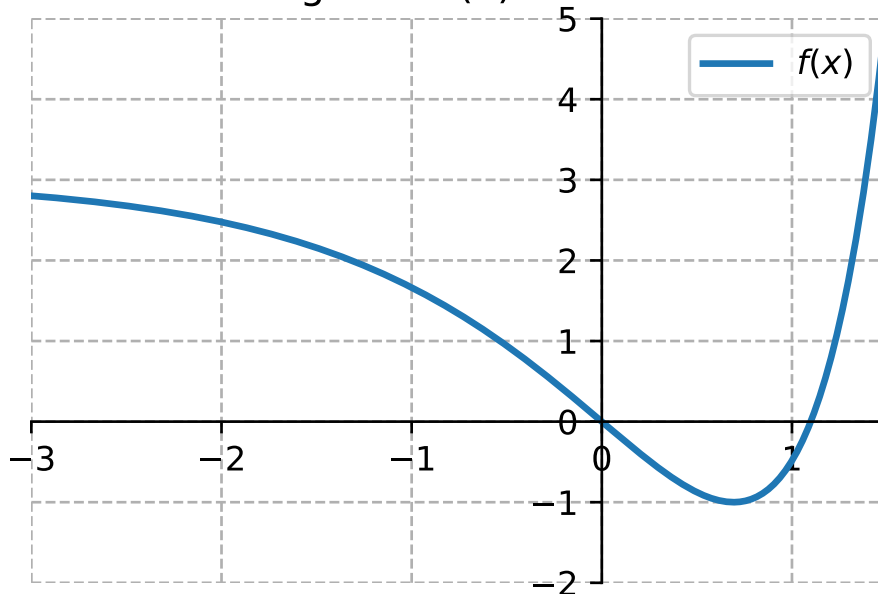
Vi ser altså at den dobbeltderiverte skifter fortegn når $x = 0$. Den tilhørende funksjonsverdien er:

$$\begin{aligned}f(0) &= e^{2 \cdot 0} - 4e^0 + 3 \\ &= 1 - 4 + 3 \\ &= 0\end{aligned}$$

Vendepunktet for funksjonen er altså i punktet $(0, 0)$.

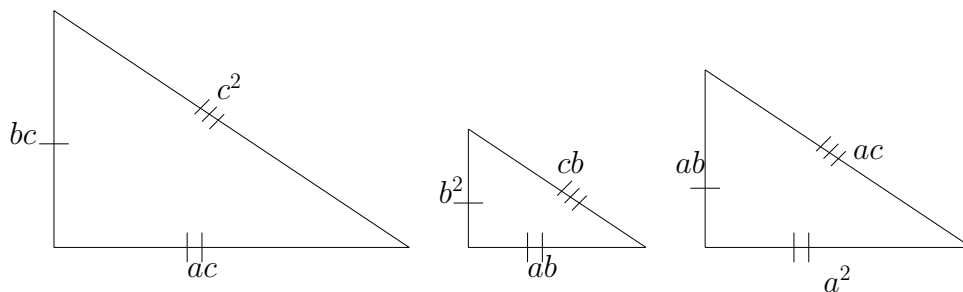
- d) Når vi lager en skisse av grafen til funksjonen, er det veldig lurt å tegne inn de punktene vi har funnet i oppgavene over. Disse punktene gir oss god informasjon om hvordan grafen omtrent kan se ut.

Skisse av grafen $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$



Oppgave 7

- a) En måte å vise at trekantene er formlike på, er å sjekke at forholdet mellom samsvarende sider er det samme.



Vi starter med å vise at trekant 1 og 2 er formlike. Forholdet mellom de formlike sidene er:

$$\begin{aligned} \frac{bc}{b^2} &= \frac{c}{b} \\ \frac{ac}{ab} &= \frac{c}{b} \\ \frac{c^2}{cb} &= \frac{c}{b} \end{aligned}$$

Deretter sjekker vi om trekant 2 og 3 er formlike

$$\frac{b^2}{ab} = \frac{b}{a}$$

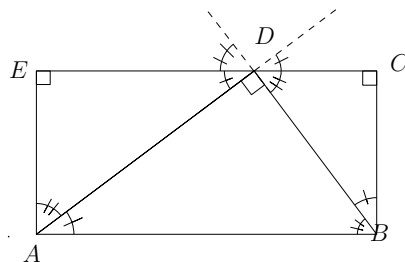
$$\frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{cb}{ac} = \frac{b}{a}$$

Vi ser altså at trekant 1 er formlik med trekant 2 og at trekant 2 er formlik med trekant 3. Da må også trekant 1 og 3 være formlike.

- b) For å vise at punktene E, D og C ligger på en rett linje, må vi vise at $\angle ADE + \angle BDC = 180^\circ$. Siden de tre trekantene er formlike, vet vi at samsvarende vinkler er like store. Vi vet også at $\angle ADB = 90^\circ$, så det gjenstår å vise at $\angle ADE + \angle BDC = 90^\circ$.

Dette gjør vi ved å trekke to hjelpelinjer som vist på figuren nedenfor. Vi vet at to parallelle linjer som skjæres av samme linje danner samsvarende vinkler. I tillegg får vi toppvinkler. Derfor vet vi at $\angle BAD$ er samsvarende vinkel med $\angle ADE$, som vil si at disse to vinklene er like store. Vi får samme tilfelle for $\angle ABD$. Denne er samsvarende med vinkel $\angle BDC$, altså er disse to vinklene også like store.



Siden summen av vinklene i en trekant er 180, vet vi at $\angle BAD + \angle ABD = 90^\circ$, og dermed vet vi også at $\angle ADE + \angle BDC = 90^\circ$. Vi har da at $\angle EDC = 180^\circ$, og dermed må punktene E, D og C ligge på samme linje.

- c) Fra oppgaven over har vi at $\angle DAE + \angle BAD = 90^\circ$ og at $\angle DBA + \angle CBD = 90^\circ$. Da har vi at alle hjørnene i firkanten vår er 90° , altså har vi et rektangel.

I et rektangel vet vi at parallelle sider er like lange, det vil si at lengden av siden EC skal være lik lengden av siden AB. Altså: $a^2 + b^2 = c^2$, som er Pytagoras' setning.

Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

- a) Først husker vi at vinkelen i en sirkel er 360° . Vi har en sentralvinkel i figuren, nemlig u . Siden vinkelen i sirkelen må være 360° vet vi derfor at resten av vinkelen i sirkelen må være $360^\circ - u$, siden da blir summen av de to vinklene lik 360° . $\angle DCB$ spenner over buen BC , det samme gjør sentralvinkelen vi nettopp fant, $360^\circ - u$. Vi vet at periferivinkler som spenner over samme bue som en sentralvinkel vil være halvparten så stor som sentralvinkelen. Dermed har vi

$$\angle DCB = \frac{1}{2} \cdot (360^\circ - u) = 180^\circ - \frac{1}{2}u$$

Altså har vi vist at $\angle DCB = 180^\circ - \frac{1}{2}u$

- b) Fra oppgave a) vet vi at $\angle DCB = 180^\circ - \frac{1}{2}u$. $\angle BAD$ er en periferivinkel som spenner over samme sirkelbue som sentralvinkelen u , derfor vet vi at $\angle BAD = \frac{1}{2}u$. Legger vi nå sammen disse to vinkelene får vi:

$$\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u = 180^\circ$$

Videre er summen av vinkler i en firkant 360° , derfor vet vi at $\angle CBA + \angle ADC = 180^\circ$

Dermed har vi vist at $\angle BAD + \angle DCB = \angle CBA + \angle ADC = 180^\circ$.

Oppgave 2

Likningen for en sirkel kan skrives


$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

, og vi får oppgitt at $A(3, 8)$, $B(9, 6)$ og $C(13, -2)$ ligger på sirkelperiferien.

- a) For at likningen skal gjelde for en sirkel som går gjennom alle de gitte punktene, må likningen gå opp uansett hvilket punkt vi setter inn i likningen. For å finne et likningssystem som svarer til det over, setter vi altså inn x - og y -koordinatene for hvert av punktene i hver sin likning. Likningssystemet blir da:

$$\begin{cases} 3^2 + 8^2 + 3a + 8b + c = 0 \\ 9^2 + 6^2 + 9a + 6b + c = 0 \\ 13^2 + (-2)^2 + 13a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

- b) Vi skriver inn hver likning i CAS, markerer alle linjene og trykker på x=. Vi kan også bruke kommandoen Løs, og skrive inn hvilke linjer CAS skal løse. Dette ville vi i mitt tilfelle gjort slik: $\text{Løs}(\{ \$1, \$2, \$3 \})$.

1	$3^2 + 8^2 + 3a + 8b + c = 0$ $\rightarrow 3a + 8b + c + 73 = 0$	
2	$9^2 + 6^2 + 9a + 6b + c = 0$ $\rightarrow 9a + 6b + c + 117 = 0$	
3	$13^2 + (-2)^2 + 13a - 2b + c = 0$ $\rightarrow 13a - 2b + c + 173 = 0$	
4	$\{ \$1, \$2, \$3 \}$ Løs: $\{ \{ a = -6, b = 4, c = -87 \} \}$	

Oppgave 3

- a) For at vi i denne situasjonen skal kunne bruke en binomisk sannsynlighetsmodell må vi anta at alle delforsøkene er uavhengige. Det vil i praksis si at dersom flere reiser sammen, så vil fremdeles alle i reisefølget møte opp eller ikke uavhengig av hva de andre i gruppen gjør.
- b) Her kan vi bruke sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra. Siden flyet har plass til maks 116 passasjerer, må vi altså undersøke hva sannsynligheten er for at 116 passasjerer eller mindre møter opp når selskapet har solgt 122 billetter. I sannsynlighetskalkulatoren legger vi da inn $n = 122$, $p = 0.94$ og $P(X \leq 116)$. Resultatet blir da:



The image shows the GeoGebra Binomial Distribution Calculator interface. It includes a dropdown menu set to 'Binomisk fordeling', input fields for 'n' (122) and 'p' (0.94), and a calculation area showing 'P(X ≤ 116) = 0.7466'.

Sannsynligheten for at alle som møter får plass på flyet er 74.7%

- c) Siden vi skal finne ut hvor mange billetter selskapet kan selge, er det altså n i denne oppgaven vi må bestemme. Da lar vi fremdeles $p = 0.94$, $P(X \leq 116)$, og så tester vi for hvilke verdier av n som gjør at sannsynligheten vi får ut blir $\geq 95\%$. Vi vet fra oppgaven over at de ikke kan selge 122 billetter, for da blir sannsynligheten for at alle får plass for liten i forhold til hva selskapet øker. Derfor kan vi prøve å sette inn for eksempel $n = 120$

Binomisk fordeling n 120 p 0.94

$P(X \leq 116) = 0.934$

Vi ser at dette antallet også vil gi for liten prosent. Vi prøver da med for eksempel $n = 119$

Binomisk fordeling n 119 p 0.94

$P(X \leq 116) = 0.9764$

Dette ser vi gir en bedre prosent enn ønskelig, så flyselskapet kan altså selge 119 billetter og få at sannsynligheten er minst 95 % for at alle som møter opp får plass på flyet.

Oppgave 4

- a) Her må vi først finne ut hvor lange sidene s er som funksjon av x . Da kan vi først se på trekant ABE. Denne er likebeint, så vi vet at den rette linjen fra E ned til linjen AB vil danne 90° med linjen AB, og den vil dele AB i to like store deler. Vi får altså to 90° trekanter, og da kan vi bruke Pytagoras' setning.

Den ene kateten vil da være halvparten av $AB = \frac{10}{2}$, mens den andre må vi lete litt mer etter.


Vi ser at høyden i hele firkanten er 10, og at det er en lik trekant som ABE helt øverst i figuren også. Det vil si at vi kan dele denne trekanten opp på samme måte som ABE og få en høyde også her. Vi ser da av figuren at høydene i de to trekantene til sammen er $10 - x$, og da vil høyden i hver av trekantene være $\frac{10-x}{2}$. Da har vi altså begge katetene og kan bruke Pytagoras' setning til å finne s .

$$\begin{aligned}
s^2 &= \left(\frac{10-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 \\
&= \sqrt{\left(\frac{10-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{(10-x)^2}{4} + \frac{10^2}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(10-x)^2 + 10^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(x-10)^2 + 10^2}
\end{aligned}$$

Den totale strekningen er

$$\begin{aligned}
g(x) &= x + 4s \\
&= x + 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(x-10)^2 + 10^2} \\
&= \underline{\underline{x + 2\sqrt{(x-10)^2 + 10^2}}}
\end{aligned}$$

- b) Denne oppgaven kan gjøres på forskjellige måter i CAS. Her har jeg valgt å først skrive inn funksjonsuttrykket for g , deretter derivere dette, og finne ut når den deriverte er 0 ved å bruke kommandoen nullpunkt. Deretter sjekket jeg hva den andrederiverte var i dette punktet. Siden den andrederiverte var større enn 0, vet vi at punktet vi fant er et bunnpunkt.

1	$g(x) := x + 2\sqrt{(x-10)^2 + 10^2}$	
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow g(x) := x + 2\sqrt{x^2 - 20x + 200}$	
2	Derivert ($g(x)$)	
<input type="radio"/>	$\rightarrow \frac{2x - 20}{\sqrt{x^2 - 20x + 200}} + 1$	
3	Nullpunkt (\$2)	
<input type="radio"/>	$\rightarrow \left\{ x = \frac{-10\sqrt{3} + 30}{3} \right\}$	
4	$g''\left(\frac{-10\sqrt{3} + 30}{3}\right)$	
<input type="radio"/>	≈ 0.13	
5	$g\left(\frac{-10\sqrt{3} + 30}{3}\right)$	
<input type="radio"/>	≈ 27.32	

Oppgave 5