

# Løsningsforslag – Eksamen R1, våren 2018

Laget av Anita G.

Sist oppdatert: 8. september 2018

Antall sider: 12

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på [https://github.com/matematikk/vgs\\_eksamener](https://github.com/matematikk/vgs_eksamener).

## Del 1 - uten hjelpemidler

### Oppgave 1

- a) Vi skal derivere  $f(x) = x^4 - x + 2$ . Vi bruker regelen  $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ . Vi får da at  $f'(x) = 4x^3 - 1$ .
- b) Her ser vi at funksjonen  $g$  er sammensatt av to funksjoner som er multiplisert sammen, nemlig  $x^3$  og  $\ln(x)$ . Vi bruker derfor produktregelen:  $f(x) = uv \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$ . Vi får da

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 \cdot \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 3x^2 \ln(x) + x^2 \\ &= x^2(3 \ln(x) + 1) \end{aligned}$$

- c) Her får vi bruk for kjerneregelen, der vi velger at kjernen vår er  $u = 2x^2 + x$ . Vi har at

$$\begin{aligned} h(x) = e^{u(x)} &\Rightarrow h'(x) = (e^{u(x)})' \cdot u'(x) \\ &= e^{u(x)} \cdot (4x + 1) \\ &= (4x + 1)e^{2x^2+x} \end{aligned}$$

### Oppgave 2

- a)

$$\frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

Først faktorerer vi nevnerene for å finne ut hva fellesnevneren til brøkene er. Nevneren i det første leddet faktoreres slik:  $2x - 2 = 2(x - 1)$ . Nevneren i andre ledd kan ikke faktoreres, mens nevneren i det tredje leddet kan vi faktorisere for eksempel ved bruk av abc-formelen. Etter faktoriseringen ser uttrykket ut slik

$$\frac{1}{2(x-1)} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$$

Vi ser dermed at fellesnevneren er  $2(x-1)(x-3)$ . Vi ganger første ledd med  $(x-3)$  i både teller og nevner, andre ledd med  $2(x-1)$  og tredje ledd med 2.

$$\begin{aligned} & \frac{1(x-3)}{2(x-1)(x-3)} + \frac{2 \cdot 2(x-1)}{2(x-1)(x-3)} - \frac{2(x-3)}{2(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{x-3+4x-4-2x+4}{2(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{3x-3}{2(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{3(x-1)}{2(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{3}{2(x-3)} \end{aligned}$$

- b) Her må vi ta i bruk logaritmesetningene. Disse er:  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ ,  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$  og  $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$ .

$$\begin{aligned} & 2\ln(x \cdot y^3) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \\ &= 2(\ln(x) + \ln(y^3)) - \frac{1}{2}(\ln(x^4) - \ln(y^2)) \\ &= 2(\ln(x) + 3\ln(y)) - \frac{1}{2}(4\ln(x) - 2\ln(y)) \\ &= 2\ln(x) + 6\ln(y) - 2\ln(x) + \ln(y) \\ &= \underline{\underline{7\ln(y)}} \end{aligned}$$

### Oppgave 3

- a) Vektoren mellom to punkter  $(x_1, y_1)$  og  $(x_2, y_2)$  er gitt ved  $[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$ . Vi får da:

$$\vec{AB} = [-1 - (-2), -3 - (-1)] = [1, -2]$$

$$\vec{BC} = [3 - (-1), -1 - (-3)] = [4, 2]$$

- b) Vi har at de to vektorene står vinkelrett på hverandre dersom  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$   
 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = [1, -2] \cdot [4, 2] = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = 4 + (-4) = 0$

Vektorene står vinkelrett på hverandre.

- c) Vektorene  $\vec{CD}$  og  $\vec{AB}$  er parallelle dersom  $\vec{CD} = k \cdot \vec{AB}$  der  $k$  er et tall. Vi finner først  $\vec{CD}$  på samme måte som vi fant vektorene i oppgave a.  
 $\vec{CD} = [t - 3, t^2 + 2 - (-1)] = [t - 3, t^2 + 3]$

$$\begin{aligned} \vec{CD} &= k \cdot \vec{AB} \\ [t - 3, t^2 + 3] &= k \cdot [1, -2] = [k, -2k] \end{aligned}$$

For at to vektorer skal være like må x-koordinatene være like hverandre og y-koordinatene være like hverandre i de to vektorene. Vi får altså to likninger med to ukjente:

$$t - 3 = k \quad \vee \quad t^2 + 3 = -2k$$

Likning nr 1 gir oss et uttrykk for  $k$ . Dette setter vi inn for  $k$  i likning nr 2 og løser for  $t$ .

$$t^2 + 3 = -2(t - 3)$$

$$t^2 + 3 = -2t + 6$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

vi bruker abc-formelen og får

$$t = 1 \quad \text{eller} \quad t = -3$$

Vi har altså at  $\vec{CD}$  og  $\vec{AB}$  er parallelle hvis  $t = 1$  eller hvis  $t = -3$ .

## Oppgave 4

- a) En divisjon  $P(x) : (x - a)$ , der  $P(x)$  er et polynom, går opp dersom  $P(a) = 0$ . Vi må altså sjekke for hvilke verdier av  $k$  som gjør at  $f(1) = 0$ .

$$f(1) = 1^3 + k \cdot 1 + 12 = 0$$

$$1 + k + 12 = 0$$

$$k + 13 = 0$$

$$k = -13$$

- b) Vi har nå at  $f(x) = x^3 - 13x + 12$ . Vi vet at  $f(x)$  er delelig med  $(x - 1)$ , derfor gjør vi en polynomdivisjon med dette for å faktorisere  $f$ . Vi vil få et andregradspolynom etter polynomdivisjonen som vi kan faktorisere videre ved hjelp av abc-formelen.

$$\begin{array}{r} x^3 \phantom{+ 0x^2 + 0x + 0} - 13x + 12 \\ - x^3 + x^2 \phantom{+ 0x + 0} \\ \hline x^2 - 13x \phantom{+ 0} \\ - x^2 \phantom{+ 0} + x \phantom{+ 0} \\ \hline - 12x + 12 \\ 12x - 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ved hjelp av abc-formelen får vi at  $(x^2+x-12)$  kan faktoriseres til  $(x+4)(x-3)$ . Når vi nå setter sammen alle de lineære faktorene vi har funnet, har vi at  $f(x)$  kan faktoriseres slik:  $f(x) = x^3 - 13x + 12 = \underline{\underline{(x-1)(x+4)(x-3)}}$ .

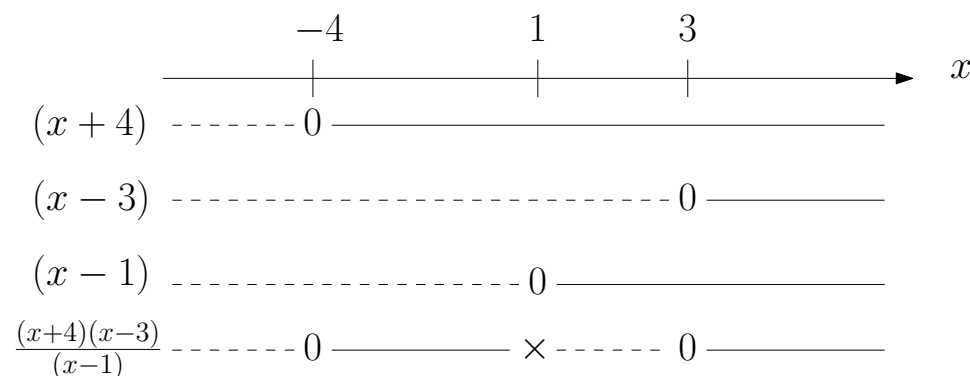
c)

$$\frac{x^2 + x - 12}{x - 1}$$

Fra forrige oppgave vet vi at telleren kan faktoriseres til  $(x+4)(x-3)$ , som vil si at vi kan skrive brøken som

$$\frac{(x+4)(x-3)}{x-1}$$

Vi lager fortegnsskjema.



Vi ser dermed at

$$\frac{(x+4)(x-3)}{x-1} \geq 0$$

når  $-4 \leq x < 1$  og når  $x \geq 3$ .

## Oppgave 5

## Oppgave 6

- a) Vi finner nullpunktene til en funksjon ved å sette funksjonsuttrykket lik 0:  $f(x) = 0$ , og løser likningen.

$$\begin{aligned} e^{2x} - 4e^x + 3 &= 0 & \text{vi setter } e^x &= u \\ u^2 - 4u + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Vi bruker abc-formelen for å løse denne andregradslikningen, og får at  $u = 3$  og  $u = 1$ . Dette gir oss to likninger som vi nå kan løse for  $x$ .

$$\begin{array}{ll}
u = 3 & u = 1 \\
e^x = 3 & e^x = 1 \\
\ln e^x = \ln 1 & \ln e^x = \ln 3 \\
x = 0 & x = \ln 3 \approx 1.10
\end{array}$$

Nullpunktene til  $f(x)$  er altså  $x = 0$  og  $x = \ln 3 \approx 1.10$ .

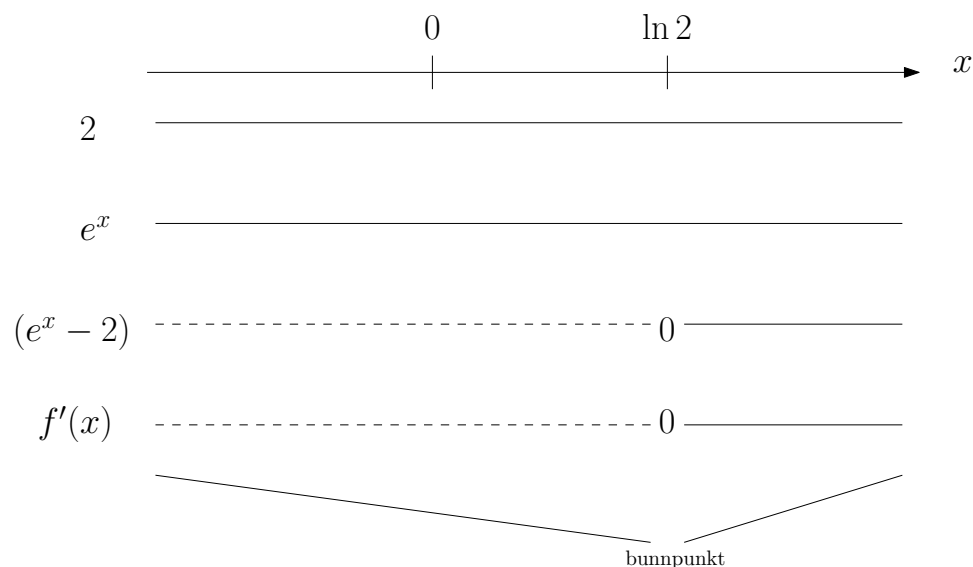
- b) For å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter til funksjonen, deriverer vi funksjonen og ser når den deriverte er lik 0. Det er blant løsningene vi får til  $f'(x) = 0$ , vi vil finne de eventuelle topp- og bunnpunktene.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2e^{2x} - 4e^x \\
&= 2e^x(e^x - 2)
\end{aligned}$$

Så løser vi likningen  $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
2e^x(e^x - 2) &= 0 & 2e^x > 0 \text{ alltid, så vi får} \\
e^x - 2 &= 0 \\
e^x &= 2 \\
\ln e^x &= \ln 2 \\
x &= \ln 2
\end{aligned}$$

Vi lager fortegnslinje for å sjekke om dette punktet er et topp- eller bunnpunkt, eller ingen av delene.



Vi ser av fortegnslinjen at vi har et bunnpunkt i  $x = \ln 2$ . Funksjonsverdien for denne  $x$ -verdien er

$$\begin{aligned}
f(\ln 2) &= e^{2\ln 2} - 4e^{\ln 2} + 3 \\
&= e^{\ln 2^2} - 4e^{\ln 2} + 3 \\
&= 4 - 8 + 3 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Bunnpunktet er altså  $(\ln 2, -1)$ .

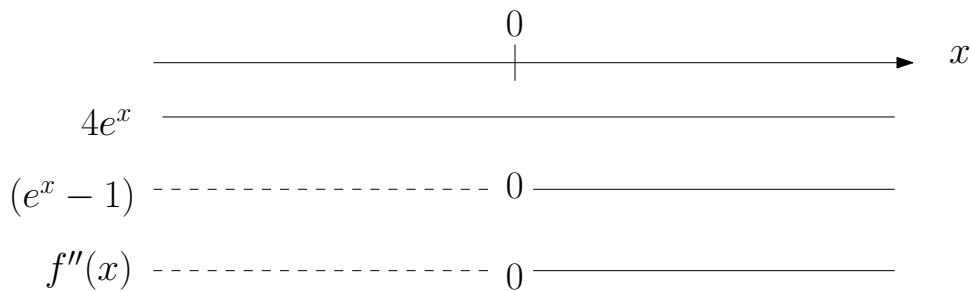
- c) Når vi skal bestemme eventuelle vendepunkt, kan vi undersøke hvor den dobbeltderiverte av funksjonen endrer fortegn. Vi deriverer derfor den deriverte vi fant i forrige deloppgave.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 4e^{2x} - 4e^x \\
&= 4e^x(e^x - 1)
\end{aligned}$$

Deretter setter vi den dobbeltderiverte lik 0, og lager igjen fortegnslinje som i oppgaven over.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
4e^x(e^x - 1) &= 0 && 4e^x > 0 \text{ alltid, så vi får} \\
e^x - 1 &= 0 \\
e^x &= 1 \\
\ln e^x &= \ln 1 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

Fortegnslinjen vil se slik ut:

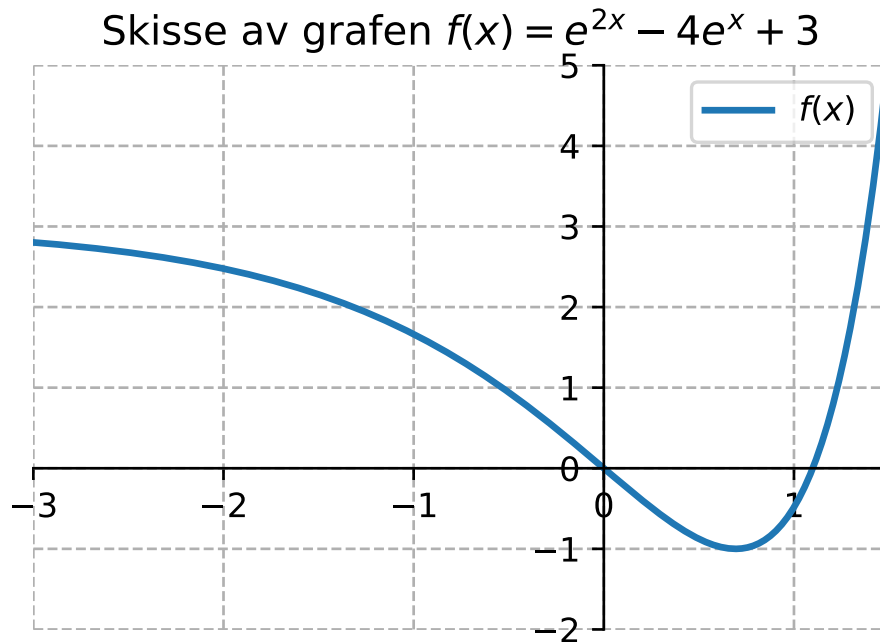


Vi ser altså at den dobbeltderiverte skifter fortegn når  $x = 0$ . Den tilhørende funksjonsverdien er:

$$\begin{aligned}
f(0) &= e^{2 \cdot 0} - 4e^0 + 3 \\
&= 1 - 4 + 3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

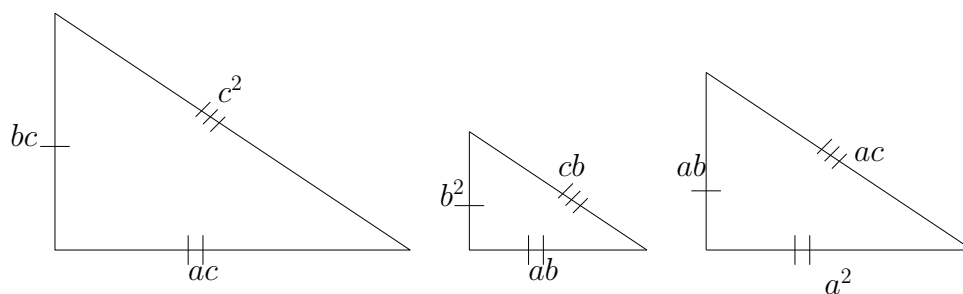
Vendepunktet for funksjonen er altså i punktet  $(0, 0)$ .

- d) Når vi lager en skisse av grafen til funksjonen, er det veldig lurt å tegne inn de punktene vi har funnet i oppgavene over. Disse punktene gir oss god informasjon om hvordan grafen omtrent kan se ut.



## Oppgave 7

- a) En måte å vise at trekantene er formlike på, er å sjekke at forholdet mellom samsvarende sider er det samme.



Vi starter med å vise at trekant 1 og 2 er formlike. Forholdet mellom de formlike sidene er:

$$\begin{aligned} \frac{bc}{b^2} &= \frac{c}{b} \\ \frac{ac}{ab} &= \frac{c}{b} \\ \frac{c^2}{cb} &= \frac{c}{b} \end{aligned}$$

Deretter sjekker vi om trekant 2 og 3 er formlike

$$\frac{b^2}{ab} = \frac{b}{a}$$
$$\frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a}$$
$$\frac{cb}{ac} = \frac{b}{a}$$

Vi ser altså at trekant 1 er formlik med trekant 2 og at trekant 2 er formlik med trekant 3. Da må også trekant 1 og 3 være formlike.

- b) For å vise at punktene E, D og C ligger på en rett linje, må vi vise at  $\angle ADE + \angle BDC = 180^\circ$ . Siden de tre trekantene er formlike, vet vi at samsvarende vinkler er like store. Vi vet også at  $\angle ADB = 90^\circ$ , så det gjenstår å vise at  $\angle ADE + \angle BDC = 90^\circ$ .

Dette gjør vi ved å trekke to hjelpelinjer som vist på figuren nedenfor. Vi vet at to parallelle linjer som skjæres av samme linje danner samsvarende vinkler. I tillegg får vi toppvinkler. Derfor vet vi at  $\angle BAD$  er samsvarende vinkel med  $\angle ADE$ , som vil si at disse to vinklene er like store. Vi får samme tilfelle for  $\angle ABD$ . Denne er samsvarende med vinkel  $\angle BDC$ , altså er disse to vinklene også like store.

Siden summen av vinklene i en trekant er 180, vet vi at  $\angle BAD + \angle ABD = 90^\circ$ , og dermed vet vi også at  $\angle ADE + \angle BDC = 90^\circ$ . Vi har da at  $\angle EDC = 180^\circ$ , og dermed må punktene E, D og C ligge på samme linje.

- c) Fra oppgaven over har vi at  $\angle DAE + \angle BAD = 90^\circ$  og at  $\angle DBA + \angle CBD = 90^\circ$ . Da har vi at alle hjørnene i firkanten vår er  $90^\circ$ , altså har vi et rektangel.

I et rektangel vet vi at parallelle sider er like lange, det vil si at lengden av siden EC skal være lik lengden av siden AB. Altså:  $a^2 + b^2 = c^2$ , som er Pytagoras' setning.



## Del 2 - med hjelpemidler

### Oppgave 1

- a) Først husker vi at vinkelen i en sirkel er  $360^\circ$ . Vi har en sentralvinkel i figuren, nemlig  $u$ . Siden vinkelen i sirkelen må være  $360^\circ$  vet vi derfor at resten av vinkelen i sirkelen må være  $360^\circ - u$ , siden da blir summen av de to vinklene lik  $360^\circ$ .  $\angle DCB$  spenner over buen  $BC$ , det samme gjør sentralvinkelen vi nettopp fant,  $360^\circ - u$ . Vi vet at periferivinkler som spenner over samme bue som en sentralvinkel vil være halvparten så stor som sentralvinkelen. Dermed har vi

$$\angle DCB = \frac{1}{2} \cdot (360^\circ - u) = 180^\circ - \frac{1}{2}u$$

Altså har vi vist at  $\angle DCB = 180^\circ - \frac{1}{2}u$

- b) Fra oppgave a) vet vi at  $\angle DCB = 180^\circ - \frac{1}{2}u$ .  $\angle BAD$  er en periferivinkel som spenner over samme sirkelbue som sentralvinkelen  $u$ , derfor vet vi at  $\angle BAD = \frac{1}{2}u$ . Legger vi nå sammen disse to vinkelene får vi:

$$\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u = 180^\circ$$

Videre er summen av vinkler i en firkant  $360^\circ$ , derfor vet vi at  $\angle CBA + \angle ADC = 180^\circ$

Dermed har vi vist at  $\angle BAD + \angle DCB = \angle CBA + \angle ADC = 180^\circ$ .

### Oppgave 2

Likningen for en sirkel kan skrives


$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

, og vi får oppgitt at  $A(3, 8)$ ,  $B(9, 6)$  og  $C(13, -2)$  ligger på sirkelperiferien.

- a) For at likningen skal gjelde for en sirkel som går gjennom alle de gitte punktene, må likningen gå opp uansett hvilket punkt vi setter inn i likningen. For å finne et likningssystem som svarer til det over, setter vi altså inn  $x$ - og  $y$ -koordinatene for hvert av punktene i hver sin likning. Likningssystemet blir da:

$$\begin{cases} 3^2 + 8^2 + 3a + 8b + c = 0 \\ 9^2 + 6^2 + 9a + 6b + c = 0 \\ 13^2 + (-2)^2 + 13a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

- b) Vi skriver inn hver likning i CAS, markerer alle linjene og trykker på x=. Vi kan også bruke kommandoen Løs, og skrive inn hvilke linjer CAS skal løse. Dette ville vi i mitt tilfelle gjort slik:  $\text{Løs}(\{ \$1, \$2, \$3 \})$ .

1	$3^2 + 8^2 + 3a + 8b + c = 0$ $\rightarrow 3a + 8b + c + 73 = 0$	
2	$9^2 + 6^2 + 9a + 6b + c = 0$ $\rightarrow 9a + 6b + c + 117 = 0$	
3	$13^2 + (-2)^2 + 13a - 2b + c = 0$ $\rightarrow 13a - 2b + c + 173 = 0$	
4	$\{ \$1, \$2, \$3 \}$ Løs: $\{ \{ a = -6, b = 4, c = -87 \} \}$	

### Oppgave 3

- a) For at vi i denne situasjonen skal kunne bruke en binomisk sannsynlighetsmodell må vi anta at alle delforsøkene er uavhengige. Det vil i praksis si at dersom flere reiser sammen, så vil fremdeles alle i reisefølget møte opp eller ikke uavhengig av hva de andre i gruppen gjør.
- b) Her kan vi bruke sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra. Siden flyet har plass til maks 116 passasjerer, må vi altså undersøke hva sannsynligheten er for at 116 passasjerer eller mindre møter opp når selskapet har solgt 122 billetter. I sannsynlighetskalkulatoren legger vi da inn  $n = 122$ ,  $p = 0.94$  og  $P(X \leq 116)$ . Resultatet blir da:



The image shows the GeoGebra Binomial Distribution Calculator interface. It includes a dropdown menu set to 'Binomisk fordeling', input fields for 'n' (122) and 'p' (0.94), and a calculation area showing 'P( X ≤ 116 ) = 0.7466'.

Sannsynligheten for at alle som møter får plass på flyet er 74.7%

- c) Siden vi skal finne ut hvor mange billetter selskapet kan selge, er det altså  $n$  i denne oppgaven vi må bestemme. Da lar vi fremdeles  $p = 0.94$ ,  $P(X \leq 116)$ , og så tester vi for hvilke verdier av  $n$  som gjør at sannsynligheten vi får ut blir  $\geq 95\%$ . Vi vet fra oppgaven over at de ikke kan selge 122 billetter, for da blir sannsynligheten for at alle får plass for liten i forhold til hva selskapet øker. Derfor kan vi prøve å sette inn for eksempel  $n = 120$

Binomisk fordeling    n 120    p 0.94

$P(X \leq 116) = 0.934$

Vi ser at dette antallet også vil gi for liten prosent. Vi prøver da med for eksempel  $n = 119$

Binomisk fordeling    n 119    p 0.94

$P(X \leq 116) = 0.9764$

Dette ser vi gir en bedre prosent enn ønskelig, så flyselskapet kan altså selge 119 billetter og få at sannsynligheten er minst 95 % for at alle som møter opp får plass på flyet.

## Oppgave 4

- d) Her må vi først finne ut hvor lange sidene  $s$  er som funksjon av  $x$ . Da kan vi først se på trekant ABE. Denne er likebeint, så vi vet at den rette linjen fra E ned til linjen AB vil danne  $90^\circ$  med linjen AB, og den vil dele AB i to like store deler. Vi får altså to  $90^\circ$  trekanter, og da kan vi bruke Pytagoras' setning.

Den ene kateten vil da være halvparten av  $AB = \frac{10}{2}$ , mens den andre må vi lete litt mer etter.

Vi ser at høyden i hele firkanten er 10, og at det er en lik trekant som ABE helt øverst i figuren også. Det vil si at vi kan dele denne trekanten opp på samme måte som ABE og få en høyde også her. Vi ser da av figuren at høydene i de to trekantene til sammen er  $10 - x$ , og da vil høyden i hver av trekantene være  $\frac{10-x}{2}$ . Da har vi altså begge katetene og kan bruke Pytagoras' setning til å finne  $s$ .

$$\begin{aligned}
s^2 &= \left(\frac{10-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 \\
&= \sqrt{\left(\frac{10-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{(10-x)^2}{4} + \frac{10^2}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(10-x)^2 + 10^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(x-10)^2 + 10^2}
\end{aligned}$$

Den totale strekningen er

$$\begin{aligned}
g(x) &= x + 4s \\
&= x + 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(x-10)^2 + 10^2} \\
&= \underline{\underline{x + 2\sqrt{(x-10)^2 + 10^2}}}
\end{aligned}$$

- e) Denne oppgaven kan gjøres på forskjellige måter i CAS. Her har jeg valgt å først skrive inn funksjonsuttrykket for  $g$ , deretter derivere dette, og finne ut når den deriverte er 0 ved å bruke kommandoen nullpunkt. Deretter sjekket jeg hva den andrederiverte var i dette punktet. Siden den andrederiverte var større enn 0, vet vi at punktet vi fant er et bunnpunkt.

1	$g(x) := x + 2 \cdot \sqrt{(x-10)^2 + 10^2}$
<input checked="" type="radio"/>	$\approx g(x) := x + 2 \sqrt{x^2 - 20x + 200}$
2	Derivert ( $g(x)$ )
<input type="radio"/>	$\rightarrow \frac{2x - 20}{\sqrt{x^2 - 20x + 200}} + 1$
3	Nullpunkt (\$2)
<input type="radio"/>	$\rightarrow \left\{ x = \frac{-10\sqrt{3} + 30}{3} \right\}$
4	$g''\left(\frac{-10\sqrt{3} + 30}{3}\right)$
<input type="radio"/>	$\approx 0.13$
5	