УДК 512.628.2

Обобщённые сепаранты дифференциальных многочленов

М. А. Лимонов[1]

Пусть $f \in K\{y\}$ — элемент кольца дифференциальных многочленов от одной дифференциальной переменной y с одним дифференцированием δ. Рассмотрим многочлен $g = \delta^n(f)$. Для любой переменной y_k многочлен g можно представить в виде $g = A_k y_k + g_0$, где g_0 не зависит от y_k. Если y_k — старшая переменная g, то A_k является сепарантой многочлена f. Для больших n и k мы нашли формулу для A_k и продемонстрировали её применение.

Ключевые слова: Дифференциальный многочлен, сепаранта, обобщённая сепаранта квазилинейный многочлен.

Let $f \in K\{y\}$ be an element of a ring of differential polynomials in one differential variable y with one differentiatial operator δ. Let us consider $g = \delta^n(f)$. This polynomial can be represented in the form $g = A_k y_k + g_0$ for any variable y_k, where g_0 does not depend on y_k. If y_k is the leader of g, then A_k is a separant of g. We find a formula for A_k for sufficiently large numbers k and n. Also the we demonstrate some applications of this formula.

Key words: Differential polynomial, separant, generalized separant, quasilinear polynomial.

Хорошо известно, что если f — дифференциальный многочлен, то все его производные «линейны» по старшей переменной (все определения см. ниже). В частности, в случае одной дифференциальной переменной и одного дифференцирования, n-ую производную f можно записать в виде $f^{(n)} = S_f y_{n+l} + g$, где l — порядок многочлена f, S_f — сепаранта f, а многочлен g зависит от переменных, порядок которых меньше $n + l$. Таким образом, у всех производных f есть общая постоянная часть при старшей переменной. Мы исследуем аналогичное свойство для переменных, порядок которых предшествует старшей переменной, а также в случае любого числа дифференциальных переменных и дифференцирований.

Дадим несколько стандартных определений и обозначений из дифференциальной алгебры [1].

Определение 1. *Пусть $\mathcal{R}$ — коммутативное кольцо с единицей. Тогда отображение $\delta : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ называется* дифференцированием*, если для любых элементов a и b кольца $\mathcal{R}$ выполнены следующие свойства:*

1. $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$ — *линейность;*
2. $\delta(ab) = a\delta(b) + b\delta(a)$ — *правило Лейбница.*

Пусть дано некоторое ассоциативное коммутативное кольцо $\mathcal{R}$ с единицей. Оно называется *дифференциальным кольцом*, если на нём задан набор дифференцирований, коммутирующих между собой.

Элементарный дифференциальный оператор может быть записан однозначно в виде $\theta = \delta_1^{j_1} \ldots \delta_m^{j_m}$. Порядком такого оператора называется $\operatorname{ord}\theta := \Sigma_{i=1}^m j_i$. Множество элементарных дифференциальных операторов образуют моноид Θ. Идеал $I \subseteq \mathcal{R}$ называется *дифференциальным идеалом*, если $\Theta I \subseteq I$.

Напомним понятие кольца дифференциальных многочленов. Рассмотрим поле $\mathcal{K}$ и $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — набор независимых дифференциальных переменных. Тогда кольцо дифференциальных многочленов — это всевозможные конечные суммы слагаемых вида $a(\theta_1 v_{j_1})^{i_1}(\theta_2 v_{j_2})^{i_2} \ldots (\theta_r v_{j_r})^{i_r}$, i_k — неотрицательные целые числа, где $\theta_k \in \Theta, a \in \mathcal{K}$. Это кольцо многочленов от бесконечного числа переменных вида θv_i над полем $\mathcal{K}$. Осталось определить дифференцирование такого многочлена. В силу линейности и правила Лейбница достаточно определить дифференцирование на каждой переменной (на элементах поля дифференцирование у нас будет тождественно нулевым). Пусть $\delta_i(\theta v_j) = (\delta_i\theta)v_j$. Кольцо дифференциальных многочленов от переменных $\{v_1, \ldots, v_n\}$ над полем $\mathcal{K}$ будем обозначать $K\{v_1, ..., v_n\}$.

Определение 2. *Порядком переменной* $\operatorname{ord}\theta v_i$ *назовем* $\operatorname{ord}\theta$. *Порядком многочлена назовем максимальный порядок переменной, входящей в него.*

[1] *Лимонов Максим Амирьянович* — аспирант каф. высшей алгебры механико-математического ф-та МГУ, e-mail: matemaks@ya.ru.

Рассмотрим поле K характеристики 0, набор независимых дифференциальных переменных $v_1, \ldots, v_n$ и набор дифференцирований $\delta_1, \ldots, \delta_m$. Тогда кольцо дифференциальных многочленов $K\{v_1, \ldots, v_n\}$. Рассмотрим многочлен $f \in K\{v_1, \ldots, v_n\}$, для любой переменной θv_i наш многочлен можно представить в виде $g = A_{\theta v_i} \theta v_i + g_0$, где многочлен g_0 не зависит от θv_i. По данному многочлену f и дифференциальному оператору $\Delta = \delta_1^{i_1} \ldots \delta_m^{i_m}$ нужно определить явно, чему равен «коэффициент» $A_{\theta v_i}$ у многочлена $\Delta(f)$.

Заметим, что дифференциальные операторы линейны. Следовательно, нам достаточно решать данную задачу для случая, когда f является мономом. Введем мультииндексы для более компактной записи: $v_{j,(i_1,\ldots,i_m)} := \delta_1^{i_1} \ldots \delta_m^{i_m}(v_j)$. Тогда $\delta_1^{a_1} \ldots \delta_m^{a_m}(v_{j,(b_1,\ldots,b_m)}) = v_{j,(a_1+b_1,\ldots,a_m+b_m)}$. Теперь наша задача переписывается в следующем виде: нам дан моном $f = v^{k_1}_{j_1,(i_{1,1},\ldots,i_{m,1})} \ldots v^{k_r}_{j_r,(i_{1,r},\ldots,i_{m,r})}$, к нему применяется оператор $\Delta = \delta_1^{i_1} \ldots \delta_m^{i_m}$ и нам требуется найти «коэффициент» при $v_{j,(j_1,\ldots,j_m)} = v$.

Лемма 3. *Пусть моном g записан в виде $g = v_{j_1,(i_{1,1},\ldots,i_{m,1})} \ldots v_{j_r,(i_{1,r},\ldots,i_{m,r})}$ (переменные могут повторяться). Тогда*

$$\delta_1^i(g) = \sum_{\substack{s_j \geqslant 0, \\ s_1+\ldots+s_r=i}} \frac{i!}{s_1! \ldots s_r!} \prod_{k=1}^{r} v_{j_k,(i_{1,k}+s_k, i_{2,k},\ldots,i_{m,k})}$$

и

$$\delta_1^{i_1} \ldots \delta_m^{i_m}(g) = \sum_{\substack{s_{j,i} \geqslant 0, \\ s_{j,1}+\ldots+s_{j,r}=i_j \ \forall j: 1\leqslant j \leqslant m}} \frac{i_1!}{s_{1,1}! \ldots s_{1,r}!} \cdots \frac{i_m!}{s_{m,1}! \ldots s_{m,r}!} \prod_{k=1}^{r} v_{j_k,(i_{1,k}+s_{1,k},\ldots,i_{m,k}+s_{m,k})}.$$

Доказательство. Первая формула следует непосредственно из правила Лейбница, а вторая получается по индукции из первой.

Лемма 4. *Пусть* $\operatorname{ord} \Delta = n$, $\operatorname{ord} f = l$, $\operatorname{ord} v_{j,(j_1,\ldots,j_m)} = \operatorname{ord} v = p$ *и выполнено условие* $2p > n + 2l$. *Тогда* A_v *не зависит от* v.

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда после дифференцирования в каком-то мономе $\Delta(f)$ переменная v встречается не меньше, чем во 2-й степени. Воспользуемся формулой из леммы 3. Пусть $v_{j_k,(i_{1,k}+s_{1,k},\ldots,i_{m,k}+s_{r,k})} = v$ и $v_{j_t,(i_{1,t}+s_{1,t},\ldots,i_{m,t}+s_{r,t})} = v$. Тогда получаем

$$\operatorname{ord} v_{j_k,(i_{1,k}+s_{1,k},\ldots,i_{m,k}+s_{r,k})} = i_{1,k} + s_{1,k} + \ldots + i_{m,k} + s_{r,k} = \sum_{j=1}^{m} i_{j,k} + \sum_{j=1}^{m} s_{j,k} \leqslant l + \sum_{j=1}^{m} s_{j,k},$$

$$\operatorname{ord} v_{j_t,(i_{1,t}+s_{1,t},\ldots,i_{m,t}+s_{r,t})} = i_{1,t} + s_{1,t} + \ldots + i_{m,t} + s_{m,t} = \sum_{j=1}^{m} i_{j,t} + \sum_{j=1}^{m} s_{j,t} \leqslant l + \sum_{j=1}^{m} s_{j,t}.$$

Но тогда приходим к противоречию с тем, что

$$2p = \operatorname{ord} v_{j_k,(i_{1,k}+s_{1,k},\ldots,i_{m,k}+s_{r,k})} + \operatorname{ord} v_{j_t,(i_{1,t}+s_{1,t},\ldots,i_{m,t}+s_{r,t})} \leqslant 2l + \sum_{j=1}^{m} (s_{j,k} + s_{j,t}) \leqslant 2l + n.$$

Следующая лемма была доказана нами для случая одного дифференцирования и одной дифференциальной переменной в статье [5]. В связи с громоздкостью обозначений и выкладок мы приведём только её формулировку. Само доказательство можно получить из группировки слагаемых в лемме 3 или проделав аналогичные шаги, как в доказательстве леммы 4 из [5].

Лемма 5. *Пусть $m\{v_1, \ldots, v_n\}$ — кольцо дифференциальных многочленов с n независимыми переменными и m дифференцированиями. Рассмотрим многочлен $f \in K\{v_1, \ldots, v_n\}$,* $\operatorname{ord} f = l$, *дифференциальный оператор $\Delta = \delta_1^{i_1} \ldots \delta_m^{i_m}$,* $\operatorname{ord} \Delta = n$, *и переменную $v = v_{j,(j_1,\ldots,j_m)}$,* $\operatorname{ord} v = p$. *Тогда, если $2p > n + 2l$, то многочлен $\Delta(f)$ можно представить в виде $\Delta(f) = A_{\theta v}(\theta v) + g_0$, где g_0 не зависит от v, и*

$$A_{\theta v} = \sum_{v_{j,(i_{1,j},\ldots,i_{m,j})}} C_{i_1}^{j_1 - i_{1,j}} \cdot C_{i_2}^{j_2 - i_{2,j}} \cdot \ldots \cdot C_{i_m}^{j_m - i_{m,j}} \delta_1^{i_1 - (j_1 - i_{1,j})} \ldots \delta_m^{i_m - (j_m - i_{m,j})} \left(\frac{\partial f}{\partial v_{j,(i_{1,j},\ldots,i_{m,j})}} \right).$$

Замечание. Сумма ведётся по всем возможным переменным, которые входят в f. Предполагается, что если $k > n$, то $C_n^k = 0$.

Посмотрим, что нам даёт эта формула для случая одной дифференциальной переменной v_1 и одного дифференцирования δ. Пусть $v = v_{1,i}$. Выражение из леммы 5 преобразуется в следующий вид:

$$\delta^n(f) = A_{\theta v}(\theta v) + g_0, A_{\theta v} = \sum_{v_{1,j}} C_n^{i-j} \delta^{n-(i-j)} \left(\frac{\partial f}{\partial v_{1,j}} \right).$$

Наша формула преобразовалась в достаточно компактный и простой вид. Для дальнейшей работы нам нужно перейти к удобным обозначениям для случая одного дифференцирования и одной дифференциальной переменной.

Определение 6. *Кольцо $\mathcal{R}$ называется* обыкновенным дифференциальным кольцом*, если на нем задано одно дифференцирование.*

Нас будет интересовать

Определение 7. *Пусть K — обыкновенное дифференциальное поле.* Кольцом дифференциальных многочленов *от одной неизвестной над K называется кольцо многочленов от счетного числа переменных $K[y_0, \ldots, y_n, \ldots]$ (обозначается $K\{y\}$) с дифференцированием δ, таким, что $\delta(y_i) = y_{i+1}$ и δ, ограниченное на K, совпадает с дифференцированием поля K. Дифференцирование δ, заданное таким способом, однозначно продолжается на $K\{y\}$ по линейности и правилу Лейбница.*

Далее мы будем считать, что поле K, над которым рассматриваются многочлены, является алгеброй Ритта с тождественно нулевым дифференцированием. Для удобства будем обозначать n-ю производную многочлена f как $\delta^n(f) = f^{(n)}$. Также нам потребуется понятие порядка многочлена и сепаранты.

Пусть $M = \prod\limits_{i=0}^{n} y_i^{a_i}$, где $a_i \geqslant 0$, причем $a_n > 0$. Тогда, согласно определению порядка диффернциального мономв, n является порядком M.

Определение 8. *Будем говорить, что переменная y_i старше переменной y_j (обозначение: $y_i \succ y_j$), если $i > j$.*

Определение 9. *Для элемента f кольца $\mathbb{K}\{y\}$ определим* сепаранту S_f *как частную производную по старшей переменной. Для элементов поля полагаем ее нулем.*

Определение 10. *Многочлен, не равный нулю, называется* квазилинейным*, если его сепаранта принадлежит полю K.*

Будем обозначать скобками «()» и «[ ]» соответственно алгебраический и дифференциальный идеалы, порождённые элементами, заключенными внутри скобок.

Далее мы будем использовать букву n для обозначения порядка дифференцирования и l для порядка многочлена.

Напомним, что мы можем представить многочлен g в виде $g = g_0 + A_{g,k} y_k$, где g_0 не зависит от y_k, а многочлен $y_k A_{g,k}$ получается из многочлена g нахождением всех мономов, зависящих от y_k, и вынесением этой переменной за скобки. Доказательство следующей теоремы и следствия из нее представлены в [5, лемма 4 и утверждение 1]

Теорема 11. *Пусть f — дифференциальный многочлен и* $\operatorname{ord} f = l$. *Тогда для любых k и n с условием $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant k \in \mathbb{Z}$, $n > 2k$ верно следующее равенство:*

$$A_{f^{(n)}, n+l-k} = \sum_{j=0}^{l} C_n^{k-l+j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \right)^{(k-l+j)}.$$

Здесь мы по умолчанию понимаем $C_n^k = 0$ для отрицательных k.

Следствие 12. *Пусть f — дифференциальный многочлен,* $\operatorname{ord} f = l$ *и $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant k \in \mathbb{Z}$, $n > 2k$. Тогда*

1. $\operatorname{ord} A_{f^{(n)}, n+l-k} \leqslant k + l$.

2. Выполнено равенство

$$f^{(n)} = \sum_{i=0}^{k} A_{f^{(n)},n+l-i}\, y_{n+l-i} + Q,$$

где $\operatorname{ord} Q < n + l - k$.

Определение 13. *Пусть* $f \in K\{y\}, \operatorname{ord} f = l$ *и* $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant k \in \mathbb{Z}$, *такие, что* $n > 2k$. Обобщёнными сепарантами *многочлена* f *будем назвать многочлены* $S_{f,n,k} = \sum\limits_{j=0}^{l} C_n^{k-l+j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)^{(k-l+j)}$. *В частности, при* $k = 0$ *обобщённая сепаранта совпадает с обычной:* $S_{f,n,0} = S_f = \frac{\partial f}{\partial y_l}$.

Из доказанного выше следует, что $f^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{k} S_{f,n,i}\, y_{n+l-i} + Q$, где $2k < n \in \mathbb{N}\,, \operatorname{ord} Q < n + l - k$. Таким образом мы получили, что старшие производные дифференциального многочлена линейны не только по своей старшей переменной, но и по переменным с меньшим порядком. Кроме того, эта формула описывает, как выглядят мономы в $f^{(n)}$ содержащие переменные высоких порядков, что может быть использовано в изучении дифференциальных многочленов. Мы получили также обобщение этой формулы для общего случая нескольких дифференциальных переменных и нескольких дифференцирований, которое мы не приводим здесь из-за громоздкости.

Следствие 14. *Пусть* $f \in K\{y\}$, *где* K *— поле нулевой характеристики, и* $\operatorname{ord} f = l$. *Если в идеале* $[f]$ *содержится квазилинейный многочлен, то* $\left[f, \frac{\partial f}{\partial y_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_l}\right] = (1)$.

Доказательство. Пусть $g \in [f]$ — квазилинейный многочлен порядка m. Его можно записать в виде $g = \sum\limits_{i=0}^{n} g_i f^{(i)} = g_0 + y_m$, где g_0 не зависит от переменных порядка выше, чем $m - 1$. Предположим, что $n < 2m - 2l$. Тогда будет выполнено, что $2k = 2(n + l - m) < n$, где $k = n + l - m$. По следствию 12 и определению обобщённых сепарант мы можем для любого $m - l \leqslant p \leqslant n$ каждый многочлен $f^{(p)}$ представить в виде $f^{(p)} = \sum\limits_{i=0}^{k} S_{f,p,i}\, y_{p+l-i} + Q$, где $k = p + l - m$, $\operatorname{ord} Q < p + l - k = m$. Все многочлены $f^{(j)}$, $j < m - l$, не зависят от переменных y_m и старше, следовательно, $\dfrac{\partial f^{(j)}}{\partial y_m} = 0$.

$$1 = \frac{\partial g}{\partial y_m} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_m} f^{(i)} + \sum_{i=m-l}^{n} \frac{\partial f^{(i)}}{\partial y_m} g_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_m} f^{(i)} + \sum_{i=m-l}^{n} S_{f,i,i+l-m} g_i \in \left[f, \frac{\partial f}{\partial y_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_l}\right].$$

Вторая часть суммы принадлежит идеалу $\left[f, \frac{\partial f}{\partial y_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_l}\right]$, т. к. $S_{f,n,k} = \sum\limits_{j=0}^{l} C_n^{k-l+j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)^{(k-l+j)}$.

Если $n > 2m - 2l$, то мы можем продифференцировать g k раз (k определим позже), и от этого многочлен не перестанет быть квазилинейным. Положим $m' = m + k$, $n' = n + k$. Возьмём теперь k таким, чтобы выполнялось неравенство $n' < 2m' - 2l$. Лемма доказана.

Отметим, что это следствие не является необходимым условием присутствия квазилинейного многочлена в идеале. Например, в идеале $[y_1^n + y_0]$ имеется квазилинейный многочлен если и только если $n \neq 2$ [4], однако условие следствия выполняется для этого идеала при всех n.

Наличие в дифференциальном идеале квазилинейного многочлена оказывается связанным с существованием у этого идеала конечного лексикографического дифференциального стандартного базиса [3, 4]. В настоящее время неизвестен алгоритм, проверяющий по образующим идеала, есть ли в нём квазилинейный многочлен. Поэтому такие результаты, как доказанное следствие, представляются важными для построения алгоритмов дифференциальной компьютерной алгебры.

Мы покажем ещё одно применение обобщённых сепарант. Как известно, любой дифференциальный идеал является алгебраическим идеалом, порождённым бесконечным количеством многочленов. Мы задались вопросом: может ли конечно порождчнный алгебраический идеал содержать в себе дифференциальный идеал. Ответ оказался отрицательным, если алгебраический идеал не совпадает со всем кольцом.

Лемма 15. *Пусть $I = (g_1, g_2 \dots, g_n) \in K\{y\}$ — нетривиальный алгебраический идеал, поле K имеет характеристику 0. Тогда $\forall f \neq 0 \in K\{y\}$ верно, что $[f] \not\subseteq I$.*

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по степени многочлена f. База: $\deg f = 0$, тогда $f = a$, $[f] = [a] = (1)$, $(1) \not\subseteq I$.

Предположим, что для всех многочленов степени не выше $k-1$ мы доказали, докажем для степени k. Пусть $\deg f = k, \operatorname{ord} f = l$ и предположим, что $[f] \subseteq I$. Пусть $n_0 = \max\limits_i(\operatorname{ord} g_i)$, рассмотрим n сильно большее n_0 (например, $n > 2n_0$). Тогда по лемме 12 можем записать $f^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{k} S_{f,n,i}\, y_{n+l-i} + Q$, где $2k < n \in \mathbb{N}, \operatorname{ord} Q < n + l - k$. Тогда, так как $f^{(n)} \in I$ и $\operatorname{ord} y_{n+l-i} > n_0$, то каждое $S_{f,n,i} \in I$. Заметим, что $S_{f,n,i} = \sum\limits_{j=0}^{l} C_n^{i-l+j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)^{(i-l+j)}$.

Рассмотрим подпространство пространства $K\{y\}$, натянутое на векторы $\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)^{(i-l)}, \dots, \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)^{(i-l+l)}\right\}$. Рассмотрим в нём векторы вида $\sum\limits_{j=0}^{l} C_n^{i-l+j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)^{(i-l+j)}$. Из линейной независимости C_n^{i-l+j} как многочленов от n следует, что если у нас будет достаточно большое количество векторов, то через них можно выразить любой порождающий элемент.

Следовательно, так как для любого достаточно большого n обобщенная сепаранта лежит в I, то каждое слагаемое в сумме $\sum\limits_{j=0}^{l} C_n^{i-l+j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)^{(i-l+j)}$ принадлежит I, т.е. для любого $i \geqslant 0$ нашему идеалу I принадлежит $\left(\frac{\partial f}{\partial y_l}\right)^{(i-l+l)} = (S_f)^{(i)}$, что невозможно по предположению индукции, так как $\deg S_f < \deg f$. Переход доказан.

Следствие 16. *Пусть идеал J содержит некоторый дифференциальный идеал. Тогда условие $J \subseteq I$, где I некоторый алгебраический, конечнопорождённый идеал, может быть выполнено тогда и только тогда, когда $I = (1)$.*

Доказательство. Напрямую следует из предыдущей леммы, так как любой дифференциальный идеал содержит идеал вида $[f]$.

С использованием обобщённых сепарант нам удалось также решить в [5] следующую задачу: дан дифференциальный многочлен $f \in K\{y\}$ с условием $[f, S_f] = (1)$, требуется алгоритмически проверить, верно ли равенство $[f] + (S_f) = (1)$. Условия такого вида впервые появляются в работе Колчина [2]. Колчин ввёл и вычислял в этой работе возможные значения *экспоненты* дифференциального идеала $[f]$ — наименьшего m, такого, что $\left(\sqrt{I}\right)^m \subset I$, где f — дифференциальный многочлен первого порядка. Однако при отсутствии сингулярных решений ($[f, S_f] = (1)$) Колчин решил эту задачу лишь при дополнительном условии $[f, S_f] \neq (1)$, доказав, что в этом случае экспонента $[f]$ равна 1, то есть, что этот идеал радикален. В то же время, Трушин в работе [3] доказал, что при условии $[f, S_f] = (1)$ равенство $[f] + (S_f) = (1)$ эквивалентно существованию в идеале $[f]$ квазилинейного многочлена.

Список литературы

[1] E. R. Kolchin. *Differential Algebra and Algebraic Groups.* Academic Press, New York, 1973

[2] E. R. Kolchin. *On the Exponents of Differential Ideals.* The Annals of Mathematics, 1941, Second Series, Volume 42, Issue 3, 740–777.

[3] Д. В. Трушин. *Идеал сепарант в кольце дифференциальных многочленов.* Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, вып. 1, 215–227.

[4] A. Zobnin. *Admissible Orderings and Finiteness Criteria for Differential Standard Bases.* In Proceedings of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, 2005 г., ISSAC-2005, pp. 365–372.

[5] A. Zobnin, M. Limonov. *Algorithm for Checking Triviality of «Mixed» Ideals in the Ring of Differential Polynomials.* Programming and Computer Software, March 2015, Volume 41, Issue 2, pp 84-89.