Интегралы, задачи

Теорема 1 (Кантора о равномерной непрерывности). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке (компакте), то она равномерно непрерывна на нём.*

1. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема (по Риману) на нём.

Интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$, обозначается через

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Также, положим по определению

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,\ \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

2. a) Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема по большему из отрезков с концами a и b, b и c, c и a, то она интегрируема и по двум другим и имеет место равенство

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x) + \int_b^c f(x)\,dx,$$

каково бы ни было взаимное расположение точек a, b, c.
b) Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то для любых чисел α и β функция $(\alpha f + \beta g)(x)$ также интегрируема на нём и имеет место равенство

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

3. a) Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, $a < b$ и $f(x) \geqslant 0$ на всём отрезке $[a, b]$, то и $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.
b) Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, $a < b$ и $f(x) \geqslant g(x)$ на всём отрезке $[a, b]$, то и $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

4. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдётся такое число $c \in [a, b]$, что $\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) \cdot f(c)$.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Определим на отрезке $[a, b]$ функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Иногда функцию $\Phi(x)$ называют *интегралом с переменных верхним пределом.*

5. Докажите, что функция $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

6. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке $c \in [a, b]$, то функция $\Phi(x)$ дифференцируема в точке c и $\Phi'(c) = f(c)$.

7. (основная формула интегрального исчисления; формула Ньютона–Лейбница). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, функция $F(x)$ — её *первообразная* на этом отрезке, т.е. такая дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция, что для любой точки $c \in [a, b]$ выполнено $F'(c) = f(c)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \stackrel{\text{def}}{=} F(x)\Big|_a^b.$$

8. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Пусть также имеется функция $\varphi(t)$, определённая на отрезке $[\alpha, \beta]$, причём
1) функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha, \beta]$;
2) значения функции $\varphi(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ не выходят за пределы $[a, b]$;
3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

9. Составьте таблицу основных интегралов.

10. Пусть $\alpha \geqslant 0$. Используя интеграл, найдите $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$.

11. Для любых действительных чисел a_1, a_2, …, a_n докажите неравенство

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{a_i a_j}{i + j - 1} \geqslant 0.$$