

## Разнобойчик от А.В. 22 октября

1. Выпуклый многоугольник обладает следующим свойством: если все прямые, на которых лежат его стороны, параллельно перенести на расстояние 1 во внешнюю сторону, то полученные прямые образуют многоугольник, подобный исходному, причём параллельные стороны окажутся пропорциональными. Докажите, что в данный многоугольник можно вписать окружность.

2. В треугольной пирамиде  $ABCD$  все плоские углы при вершинах — не прямые, а точки пересечения высот в треугольниках  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$  лежат на одной прямой. Докажите, что центр описанной сферы пирамиды лежит в плоскости, проходящей через середины ребер  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ .

3. У тетраэдра  $ABCD$  все двугранные углы острые, а противоположные рёбра попарно равны. Найти сумму косинусов всех двугранных углов тетраэдра.

4. Дана замкнутая пространственная ломаная с вершинами  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , причём каждое звено пересекает фиксированную сферу в двух точках, а все вершины ломаной лежат вне сферы. Эти точки делят ломаную на  $3n$  отрезков. Известно, что отрезки, прилегающие к вершине  $A_1$ , равны между собой. То же самое верно и для вершин  $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ . Докажите, что отрезки, прилегающие к вершине  $A_n$ , также равны между собой.

5. Можно ли каждую сторону квадрата так разделить на 100 частей, чтобы из полученных 400 отрезков нельзя было бы составить контура никакого прямоугольника, отличного от исходного квадрата?

6. В пространстве даны точка  $O$  и  $n$  попарно непараллельных прямых. Точка  $O$  ортогонально проектируется на все данные прямые. Каждая из получившихся точек снова проектируется на все данные прямые и т. д. Существует ли шар, содержащий все точки, которые могут быть получены таким образом?

## Разнобойчик от А.В. 22 октября

1. Выпуклый многоугольник обладает следующим свойством: если все прямые, на которых лежат его стороны, параллельно перенести на расстояние 1 во внешнюю сторону, то полученные прямые образуют многоугольник, подобный исходному, причём параллельные стороны окажутся пропорциональными. Докажите, что в данный многоугольник можно вписать окружность.

2. В треугольной пирамиде  $ABCD$  все плоские углы при вершинах — не прямые, а точки пересечения высот в треугольниках  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$  лежат на одной прямой. Докажите, что центр описанной сферы пирамиды лежит в плоскости, проходящей через середины ребер  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ .

3. У тетраэдра  $ABCD$  все двугранные углы острые, а противоположные рёбра попарно равны. Найти сумму косинусов всех двугранных углов тетраэдра.

4. Дана замкнутая пространственная ломаная с вершинами  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , причём каждое звено пересекает фиксированную сферу в двух точках, а все вершины ломаной лежат вне сферы. Эти точки делят ломаную на  $3n$  отрезков. Известно, что отрезки, прилегающие к вершине  $A_1$ , равны между собой. То же самое верно и для вершин  $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ . Докажите, что отрезки, прилегающие к вершине  $A_n$ , также равны между собой.

5. Можно ли каждую сторону квадрата так разделить на 100 частей, чтобы из полученных 400 отрезков нельзя было бы составить контура никакого прямоугольника, отличного от исходного квадрата?

6. В пространстве даны точка  $O$  и  $n$  попарно непараллельных прямых. Точка  $O$  ортогонально проектируется на все данные прямые. Каждая из получившихся точек снова проектируется на все данные прямые и т. д. Существует ли шар, содержащий все точки, которые могут быть получены таким образом?