Теоретический разнобой 4

1. Последовательность $x_n y_n$ стремится к нулю. Верно ли, что либо x_n, либо y_n стремится к нулю?

2. Найдите предел последовательностей: а) $1/(1\cdot 2)+1/(2\cdot 3)+...+1/((n-1)\cdot n)$;
б) $\dfrac{P(n)}{G(n)}, P(x), G(x) \in \mathbb{R}[x]$;
в) $\dfrac{P(n)}{a^n}, P(x) \in \mathbb{R}[x], a > 1$.

3. Докажите, что сходящаяся последовательность достигает либо своей верхней, либо своей нижней грани

4. Докажите, что $f \in \mathbb{C}[x]$. Докажите, что $f(x)$ имеет кратный корень тогда и только тогда, ктогда $(f, f') \neq 1$.

5. Какое преобразование комплексной плоскости задано отображением $\forall z \neq 0$ $z \to \frac{1}{z}, 0 \to \infty, \infty \to 0$.

Определение 1. Множество X называется *плотным* в множестве Y, если всякая окрестность любой точки из Y содержит точку из X.

В листочке про кузнечиков мы доказали следующее утверждение

Теорема 1 (Одномерная теорема Кронекера). *Если $\alpha > 0$ — иррациональное число, то множество $\{n\alpha\}$, $n \in \mathbb{N}$ плотно на отрезке $[0, 1]$.*

Рассмотрим двумерный аналог: множество точек $(\{n\alpha\}, \{n\beta\})$, $n \in \mathbb{N}$ в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$. Мы хотим доказать плотность этого множества.

6. Докажите, что при иррациональном отношении α/β множество точек $(\{t\alpha\}, \{t\beta\})$, $t \in \mathbb{R}$ плотно в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$.

7. Пусть $1, \alpha, \beta$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Докажите, что для любого n число $\{n\alpha\}/\{n\beta\}$ — иррационально.

Определение 2. Набор вещественных чисел $x_1, \ldots, x_s$ *линейно независимым* над $\mathbb{Q}$, если равенство $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ влечет равенство нулю всех α_i. (Например, независимость 1 и α означает иррациональность α

Теорема 2 (Двумерная теорема Кронекера). *Пусть $1, \alpha, \beta$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Докажите, что множество точек $(\{n\alpha\}, \{n\beta\})$ плотно в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$*

Идея доказательства. Из задачи про кузнечиков следует, что существует для любого $\varepsilon > 0$ существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $(\alpha', \beta') = (\{k\alpha\}, \{k\beta\})$ отличается от $(0, 0)$ меньше чем на ε. Идея состоит в том, что взять этот маленький вектор (α', β') и при помощи него попасть с малую окрестность произвольной точки x_0, y_0.

8. Приведите пример чисел α, β таких, что числа $1, \alpha, \beta$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.