Остатки сладки

Определение 1. Пусть a – целое число, b – натуральное. Тогда существует такие целые числа q и r, что a = bq + r, $0 \le r < b$. Числа q и r определены однозначно для каждых a и b. Число r называется $ocmam\kappa om$ при делении числа a на число b, а число q — nenonhum часmhum.

- 1. Разделите числа а) 100, б) -100 с остатком на 13.
- **2** (Очень важная задача). а) Докажите, что если два целых числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на целое число n, то их разность делится на n.
- б) Докажите, что если a-b делится на n. то a и b имеют одинаковые остатки при делении на n.
- 3. В клубе интеллектуальных игр у Елены Анатольевны участвуют 4 девочки и 8 мальчиков. Для участия в конкурсе нужно выбрать
- а) пять человек;
- б) пять человек, среди которых ровно одна девочка;
- в) пять человек, среди которых должна быть хотя бы одна девочка.

Сколькими способами это можно сделать?

- **4.** Докажите, что среди n+1 целого числа найдутся два, разность которых делится на n.
- 5. Каких 7-значных чисел больше: тех, в записи которых есть 1, или остальных?
- **6.** На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что какая-то из ладей бьёт не более двух других.
- 7. Какое наибольшее количество фигурок $1 \times 2 \times 2$ можно вырезать из куба $3 \times 3 \times 3$?
- 8. У некоторого числа зачеркнули последнюю цифру и сложили с исходным, получив в сумме 2013. Найдите все такие числа
- **9.** Докажите, чо у натурального числа чётное число делителей тогда и только тогда, когда оно является точным квадратом (представимо ввиде $n=a^2$, где a натуральное).
- **10.** Докажите, что числа от 40 до 99 нельзя разбить на группы по 4 числа так, чтобы числа каждой группы в одном разряде совпадали, а цифры другого разряда шли бы подряд (например "54, 55, 56, 57"; "44, 54, 64, 74")