# Последний листик с комплексными числами и многочленами

**1.** Найдите все такие $n$, что для любых двух корней $z_1, z_2 \neq 1$ многочлена $x^n - 1$ верно, что один является степенью другого.

**2.** Докажите, что многочлен $x^{66} + x^{55} + \ldots + x^{11} + 1$ делится на многочлен $x^6 + x^5 + \ldots + x + 1$.

**3.** Пусть $z_0, \ldots, z_{n-1}$ корни многочлена $z^n - 1$ и дано число $k$. Найдите сумму $z_0^k + \ldots z_{n-1}^k$, если а) $k \in \mathbb{N}$; б) $k \in \mathbb{Z}$.

**4.** Докажите, что композиция двух поворотов — поворот.(*Указание: вспомните, как записать в комплексных координатах поворот, геометрически мы верим, что вы сможете решить эту задачу.*)

**5.** Пусть $A$, $B$, $C$, $D$ — точки единичной окружности. Докажите, что прямые $AB$ и $CD$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $ab + cd = 0$.

**6.** Докажите, что точки $A$, $B$ и $C$ расположены в вершинах правильного треугольника тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$.

**7.** На единичной окружности с центром в начале координат отмечены две точки, с координатами $a$ и $b$. Докажите, что касательные пересекаются в точке $\dfrac{2ab}{a+b}$.

**8.** Обозначим через $[k]_q! = 1(1+q)\ldots(1+q+\ldots+q^k)$, $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что $[n]_q!$ делится на $[k]_q! \cdot [n-k]_q!$

**9.** С помощью комплексных координат докажите теорему Наполеона. На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.