

## Центральное проектирование

**Определение 1.** Пусть  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — две плоскости в пространстве,  $O$  — точка, не лежащая ни на одной из плоскостей. Центральным проектированием плоскости  $\alpha_1$  на плоскость  $\alpha_2$  с центром  $O$  называется отображение, которое точке  $A_1$  плоскости  $\alpha_1$  ставит в соответствие точку пересечения прямой  $OA_1$  с плоскостью,  $\alpha_2$ .

**Определение 2.** *Исключительной прямой* центральной проекции называется прямая тех точек, у которых нет соответствующих им точек на другой плоскости

**Упражнение 1.** Докажите, что при центральном проектировании прямые переходят в прямые. А что происходит при центральном проектировании?

1. Докажите следующие свойства центрального проектирования:

- а) если прямые пересекаются вне исключительной прямой, то их образы пересекаются тоже вне исключительной прямой;
- б) если прямые пересекаются на исключительной прямой, то их образы параллельны;
- в) если прямые параллельны друг другу и параллельны исключительной прямой, то их образы также параллельны между собой и параллельны исключительной прямой
- г) если прямые параллельны друг другу и НЕ параллельны исключительной прямой, то их образы пересекаются на исключительной прямой.

2. а) Докажите, что при центральном проектировании любые две прямые можно сделать параллельными.

б) Докажите, что при центральном проектировании любые две пары пересекающихся прямых можно сделать попарно параллельными.

**3 (Теорема Паппа).** Пусть  $A, B, C$  — три точки на одной прямой,  $A', B', C'$  — три точки на другой прямой. Пусть прямые  $AB'$  и  $BA'$  пересекаются в точке  $X$ ,  $BC'$  и  $CB'$  пересекаются в точке  $Y$ ,  $CA'$  и  $AC'$  пересекаются в точке  $Z$ . Тогда точки  $X, Y, Z$  лежат на одной прямой.

4. Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ , а  $E, F$  — точки пересечения продолжений сторон  $AB$  и  $CD$ ,  $BC$  и  $AD$  соответственно. Прямая  $EO$  пересекает стороны  $AD$  и  $BC$  в точках  $K$  и  $L$ , а прямая  $FO$  пересекает стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что точка  $X$  пересечения прямых  $KN$  и  $LM$  лежит на прямой  $EF$ .

**5 (Теорема Дезарга).** Даны два треугольника  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Докажите, что следующие условия эквивалентны:

- прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в одной точке;
- точки пересечения прямых  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $CB$  и  $B_1C_1$ ,  $AC$  и  $A_1C_1$  лежат на одной прямой.