

## Перестановки, чётность

**Определение 1.** *Транспозицией* называется перестановка, которая меняет два элемента местами, а все остальные оставляет неподвижными. Т.е. циклическая перестановка длины два, обозначать можно  $(i, j)$ . *Элементарной транспозицией* называется транспозиция, меняющая два соседних элемента местами  $(i, i + 1)$ .

**Задача 1.** Любую перестановку можно представить в виде произведения транспозиций.

**Определение 2.** Пусть перестановка  $\sigma$  разложена в произведение транспозиций. Тогда *чётностью перестановки  $\sigma$*  называется четность количества этих транспозиций.

**Определение 3.** *Инверсией* перестановки  $\sigma$  называется такая пара чисел  $i, j$ , что  $i < j$ , но  $\sigma(i) > \sigma(j)$ .

**Задача 2.** Минимальное число транспозиций в разложении перестановки в произведение элементарных транспозиций равно числу беспорядков.

**Задача 3.** а) Докажите, что при домножении на элементарную транспозицию изменяется чётность числа инверсий.

б) Докажите, что четность перестановки определена корректно (т.е. четность числа транспозиций не зависит от выбора разложения).

**Задача 4.** Зная чётность двух перестановок из  $S_n$  можно ли определить чётность их произведения?

**Задача 5.** Каких перестановок в  $S_n$  больше: четных или нечетных?

**Задача 6.** Граф перестановки распался на циклы длины  $d_1, \dots, d_k$ . Можно ли определить чётность перестановки?

**Задача 7.** В колоде 16 карт, пронумерованных сверху вниз. Разрешается снять часть колоды сверху, после чего снятую и оставшуюся части колоды, не переворачивая «врезать» друг в друга. Может ли случиться, что после нескольких таких операций карты окажутся пронумерованными снизу вверх? Если да, то за какое наименьшее число операций это может произойти?

**Задача 8.** а) В городе Урюпинске разрешены только тройные обмены квартир. Может ли в результате нескольких обменов получиться так, что семья Ивановых поменяется квартирами с семьёй Петровых, а все остальные жители останутся при своих квартирах?

б) Какие перестановки можно получить перемножая циклы длины 3?