Правило Штурма

Определение 1. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется точкой подьёма функции f, если $\exists \epsilon > 0$, что при $x - \epsilon < t < x$ $f(x_0) > f(t)$ и при $x + \epsilon > t > x$ $f(x_0) < f(t)$.

Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется точкой спуска функции f, если $\exists \epsilon > 0$, что при $x - \epsilon < t < x$ $f(x_0) < f(t)$ и при $x + \epsilon > t > x$ $f(x_0) > f(t)$.

Определение 2. Алгебраическим числом прообразов значения y функции f называеся число $a(f, y) = p - s$, где p и s — количество точек подъёма и спуска среди прообразов y.

Упражнение 1. Докажите, что для многочлена $a(f, y)$ не зависит от y

1. Для многочлена P количество решений уравнения уравнения $P(x) = 0$ равно $-a\left(\dfrac{P'}{P}, y\right)$ для достаточно большого y.

Пусть $P = p_n x^n + \ldots + p_0$ и $Q = q_m x^m + \ldots + q_0$ — многочлены, не имеющие общих непостоянных множителей, $p_n q_m \neq 0$, $f = P/Q$.

2. Если $m < n$, то пусть $y \neq 0$, если $m = n$, пусть $p_n \neq y q_m$. Тогда $a(f, y)$ не зависит от выбора y. Поэтому это число будет обозначаться $a(f)$.

3 (Правило Штурма в формулировке Хованского). а) Докажите, что если P и Q многочлены, то $a\left(\dfrac{P}{Q}\right) = -a\left(\dfrac{Q}{P}\right)$.

б) Тсли P, G и Q многочлены и $\deg P < \deg Q$, то $a\left(G + \dfrac{P}{Q}\right) = a(G) - a\left(\dfrac{Q}{P}\right)$.

в) Предложите алгоритм нахождения количества корней многочлена.

4 (Теорема Фурье-Бюдан). Пусть $N(t)$ — число перемен знака в последовательности $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$, где f многочлен степени f. Тогда число корней многочлена f (с учётом кратности) заключённых между между a и b, где $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$ и $a < b$ не превосходит числа $N(a) - N(b)$, причём отличается от него на чётное число.

5 (Правило Декарта). Количество положительных корней многочлена $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ не превосходит числа перемен знака в последовательности $a_0, \ldots, a_n$.

Определение 3. Пусть f — многочлен и $f_1 = f'$. В результате работы алгоритма Евклида для (f, f_1) получается последовательность остатков $f_2, \ldots, f_n$. Последовательность $f, f_1, \ldots, f_n$ называется *последовательностью Штурма.*

6 (Теорема Штурма). Пусть $\omega(t)$ число перемен знака в последовательности Штурма. Тогда количество корней без учёта кратности на отрезке $[a, b]$, где $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$ и $a < b$ в точности равно $\omega(a) - \omega(b)$.