Добавочка

1. Докажите, что ни при каком натуральном k число $3^k + 5^k$ не является квадратом натурального числа.

2. а) Среди 9 с виду одинаковых монет одна фальшивая и легче остальных. Можно ли её определить за 2 взвешивания на чашечных весах. б) А если монет 3^n, сколько потребуется взвешиваний?

3. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «Нале-во!» некоторые из них повернулись налево, некоторые – направо, а остальные – кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

4. Игра «Ханойская башня».
Имеется пирамида с 7 кольцами возрастающих размеров (внизу — самое большое) и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней. Решите ту же задачу для 1000 колец.

5. Имеется хромая ладья, которая может ходить на любое количество клеток, но если она сходила налево, то потом идёт вниз, если вниз, то потом на право, если направо, то потом вверх, если вверх, то потом налево. Найти все такие m и n, что ладья может обойти все клетки доски $m \times n$, побывав на каждой клетке ровно один раз (остановившись).

6. На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой. На каждой точке написано число. Известно, что сумма чисел на любой прямой, проходящей через 2 и более точек, равна нулю. Докажите, что все числа равны 0.

7. Назовем натуральное число n удобным, если $n^2 + 1$ делится на 1000001. Докажите, что среди чисел 1, 2, ..., 1000000 четное число удобных.