Большой листик

1. Пусть $a = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}, b = p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}$, где $p_1, \dots, p_k$ — различные простые числа, $a_1 \geqslant 0, \dots, a_k \geqslant 0, b_1 \geqslant 0, \dots, b_k \geqslant 0$. Докажите, что а) $(a, b) = p_1^{\min(a_1,b_1)} \dots p_k^{\min(a_k,b_k)}$, б) $[a, b] = p_1^{\max(a_1,b_1)} \dots p_k^{\max(a_k,b_k)}$ ($[a, b]$ — *НОК чисел a и b*), в) $ab = (a, b)[a, b]$.

2. Сумма трёх кубов натуральных чисел делится на 7. Докажите, что как минимум одно из этих чисел тоже делится на 7.

3. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали то же самое и так далее, 120 раз. Докажите, что в результате получился нуль.

4. Автомат выполняет два действия: прибавляет к числу 8 или умножает число на 3. Из каких однозначных чисел за несколько действий с помощью этого автомата можно получить 2005?

5. В соревновании участвуют 4 фигуриста. Соревнования судят трое судей следующим способом: каждый судья по-своему распределяет между фигуристами места (с первого по четвёртое), после чего победителем считается фигурист с наименьшей суммой мест – рейтингом. Какое наибольшее значение может принимать рейтинг победителя в случае, когда победитель единственный?

6. а) Незнайка отметил несколько точек на прямой. Он утверждает, что каждая отмеченная точка является серединой отрезка, соединяющего какие-то две отмеченные точки. Покажите, что Незнайка где-то что-то не досмотрел.
б) Незнайка отметил ещё несколько точек вне прямой и уверяет, что теперь точно каждая отмеченная точка является серединой отрезка, соединяющего какие-то две отмеченные точки. Докажите, что Незнайка ошибается.

7. Кубик Рубика $3 \times 3 \times 3$ надо распилить на единичные кубики. После распила части можно перекладывать и прикладывать так, чтобы можно было пилить несколько частей одновременно. Какое наименьшее число распилов нам понадобится?

8. Полоска 1×10 разбита на единичные квадраты. В квадраты записывают числа 1, 2, ..., 10. Сначала в один какой-нибудь квадрат записывают число 1, затем число 2 записывают в один из соседних квадратов, затем число 3 – в один из соседних с уже занятыми и т. д. (произвольными являются выбор первого квадрата и выбор соседа на каждом шагу). Сколькими способами это можно проделать?

9. Докажите, что существует 100 подряд идущих натуральных чисел, среди которых нет простых.

10. Докажите, что простых чисел вида $4k + 3$ бесконечно много.