

Пути и циклы

1. Докажите, что если в графе степень каждой вершины не превосходит 2, то граф разбивается на простые циклы и простые пути.

2. Степени всех вершин графа не меньше d . Докажите, что в нем есть простой цикл длины не менее $d + 1$.

3. В графе между любыми двумя вершинами существует простой путь четной длины. Докажите, что между любыми двумя вершинами существует простой путь нечетной длины.

Определение 1. *Расстоянием* между вершинами u и v графа G называется величина $d(u, v)$, равная длине кратчайшего пути между u и v .

Определение 2. *Диаметром* $d(G)$ графа G называется наибольшее расстояние между его вершинами.

Эксцентриситетом $e(v)$ вершины v называется наибольшее из расстояний между вершиной v и другими вершинами графа G .

Радиусом $r(G)$ графа G называется наименьший из эксцентриситетов его вершин.

4. а) Докажите, что $r(G) \leq d(G) \leq 2r(G)$.

б) Докажите, что в связном графе любые два простых пути, длина которых равна диаметру, имеют общую вершину.

Определение 3. *Центром* графа называется вершина, эксцентриситет которой равен радиусу графа (то есть найдется вершина, расстояние от которой до данной равно радиусу).

5. Докажите, что у дерева может быть не более двух центров.