

Простота хуже воровства

1. а) Пусть $a = p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}$, где p_1, \dots, p_k — различные простые числа и $b_1 \geq 0, \dots, b_k \geq 0$. Найдите количество натуральных делителей числа a . б) Докажите, что количество делителей натурального числа нечётно тогда и только тогда, когда оно является полным квадратом.

2. На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т.е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик, и т.д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?

3. Дана полоска 1×101 , в первой клетке которой стоит ладья. Каким количеством способов она может за 7 прыжков достичь последней клетке, если а) прыгать можно вперёд и назад, б) прыгать можно только вперёд.

4. Можно ли числа от 1 до 100 расставить по кругу таким образом, чтобы сумма любых трех подряд стоящих чисел была простым числом?

5. В натуральном числе некоторым образом переставили цифры, из-за чего оно уменьшилось в 3 раза. Докажите, что исходное число делится на 27.

6. Какое наибольшее число прямых можно провести на плоскости таким образом, чтобы среди любых десяти из них нашлись две перпендикулярные?

7. На 22 карточках написали натуральные числа от 1 до 22. Из этих карточек составили 11 дробей. Какое наибольшее число этих дробей могут иметь целое значение?

8. а) Вася перемножил все натуральные числа от 100 до 200 включительно и прибавил к этому произведению единицу. Докажите, что все делители полученного числа, кроме единицы, больше 200. б) Докажите, что простых чисел бесконечно много.

9. а) Докажите, что число способов поставить на шахматную доску 14 слонов так, чтобы они не били друг друга — полный квадрат. б) Каким числом способов это можно сделать?

10. Международная комиссия состоит из 9 человек. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, сколько ключей для них нужно изготовить и как их разделить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен тогда и только тогда, когда соберутся не менее 6 членов комиссии?