

## Вспоминаем остатки и ко

**Определение 1.** Целое число  $a$  разделить с остатком на целое число  $b$  означает найти такие целые числа  $c, r$ , что  $a = bc + r$  и  $0 \leq r < |b|$

**Задача 1 (Великий старый, всем известный факт).** Докажите, что числа  $a$  и  $b$  дают одинаковые остатки при делении на  $c$  тогда и только тогда, когда  $a - b$  делится на  $c$

**Задача 2.** Сумма всех трехзначных чисел, дающих один и тот же остаток при делении на 19, равна 25803. Чему равен остаток?

**Задача 3.** Найдите все такие  $p$ , что числа  $p, 2p + 4, 5p + 2$  простые.

**Задача 4.** Решите уравнение в целых числах  $5m^2 + 3m + 1 = 12n^2 + 5$ .

---

**Задача 5.** Докажите, что  $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b)$

**Задача 6.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 5x + y + 2z = 3. \\ 2x - y + 3z = 3. \end{cases}$$

**Задача 7.** Пусть в огороженном месте имеется пара кроликов (самка и самец) в первый день января. Эта пара кроликов производит новую пару кроликов в первый день февраля и затем в первый день каждого следующего месяца. Каждая новорожденная пара кроликов становится зрелой уже через месяц и затем через месяц дает жизнь новой паре кроликов. а) Сколько пар кроликов будет в огороженном месте через год, то есть через 12 месяцев с начала размножения? б) А через  $n$  месяцев?

**Задача 8.** В стране Конкуренции 2010 городов, некоторые из которых соединены прямыми авиарейсами (в обе стороны). Докажите, что можно распределить эти рейсы между 1005 авиакомпаниями так, чтобы ни одна авиакомпания не могла предоставить своим пассажирам кольцевой маршрут более чем по двум городам.

**Задача 9.** а) Докажите, что квадрат  $4 \times 4$  без одной клетке можно разрезать на уголки из трёх клеток.

б) Докажите, что квадрат  $8 \times 8$  без одной клетке можно разрезать на уголки из трёх клеток.

в) Докажите, что квадрат  $2^n \times 2^n$  без одной клетке можно разрезать на уголки из трёх клеток.