

## Разнойбой-3

1. Пять машин стартовали из разных точек и целый день ездили по кругу. Вечером каждая оказалась на том же месте, откуда стартовала. Докажите, что было совершено чётное число обгонов.
2. Докажите, что если в игре «пятнашки» поменять местами фишки с номерами «14» и «15», то, играя в эту игру, невозможно получить правильное расположение фишек.
3. Докажите, что количество разбиений числа  $n$  на неупорядоченные нечётные слагаемые равно количеству разбиений  $n$  на слагаемые, в которых самое большое слагаемое встречается нечётное количество раз, а все остальные входят чётное число раз.
4. Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a^3 + b^3 + ab$  делится на  $ab(a-b)$ . Докажите, что  $\text{НОК}(a, b)$  точный квадрат.
5. Выпуклый  $n$ -угольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что можно выбрать хотябы  $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$  вершины этого многоугольника, которые попарно не соединены между собой ни сторонами, ни проведёнными диагоналями.
6. Докажите, что для любого многочлена  $P(x)$  (исключая  $P(x) \equiv x$ ) многочлен  $P(P(P(\dots P(x) \dots))) - x$  делится на  $P(x) - x$ .
7. Пусть  $P(x) = x^2 - x + 1$ . Докажите, что для любого натурального  $n$  числа  $n, P(n), P(P(n)), \dots$ , попарно взаимно просты.