Сравним

Определение 1. Целые числа a и b называют сравнимыми по модулю целого ненулевого числа c, если $a-b$ делится на c.

Определение 2. Целые числа a и b называют сравнимыми по модулю целого ненулевого числа c, если a и b дают одинаковые остатки при делении на c. *Обозначение* $a \underset{p}{\equiv} b$ *или* $a \equiv b(mod\ c)$.

1. Докажите, что определения равносильны (если выполнено одно, то выполнено и другое).

2. Докажите свойства сравнений:
а) если $a \underset{p}{\equiv} b$ и $b \underset{p}{\equiv} c$, то $a \underset{p}{\equiv} c$;
б) если $a \underset{p}{\equiv} b$ и $c \underset{p}{\equiv} d$, то $a \pm c \underset{p}{\equiv} b \pm d$;
в) если $a \underset{p}{\equiv} b$ и $c \underset{p}{\equiv} d$, то $ac \underset{p}{\equiv} bd$;

3. Что больше: $2^{100}+3^{100}+4^{100}$ или 4^{101}?

4. Найдите остаток выражения $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 998 \cdot 997 \cdot 996 \cdot 995$ при делении на 999.

5. Может ли оказаться, что в некоторый момент шахматного турнира, в котором участвуют 11 семиклассников, каждый сыграл по 3 партии?

6. Докажите, что $\overline{abcdef} \underset{3}{\equiv} a+b+c+d+e+f$.

7. На доске написано три различных натуральных числа a, b, c каждую минуту робот стирает числа и пишет вместо них $a+b-c$,$c+b-a$, $c+a-b$. Докажите, что через некоторое время на доске появится отрицательное число.

8. На двух параллельных прямых отметили по n точек и соединили отрезками все точки с одной прямой с всеми точками с другой прямой. Сколько получилось точек пересечения?

9. Докажите, что произведение k последовательных натуральных чисел делится на $k!$. *Вспомните задачу про* $\frac{2008!}{(251!)^8}$.

10. Пусть A — произведение всех нечетных чисел от 1 до 2009, B — произведение всех четных чисел от 2 до 2010. Докажите, что $A+B$ делится на 2011.