Десятичные дроби. 18 марта

1. Пусть $p, q > 5$ — простые числа. Длины периодов дробей $\frac{1}{p}$ и $\frac{1}{q}$ равны a и b соответственно. Найдите длину периода дроби $\frac{1}{pq}$.

2. Докажите, что для каждого положительного действительного α найдутся такие действительные числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_9$, в десятичной записи которых встречаются только цифры 0 и 7, что выполнено равенство $\alpha = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_9$.

3. Пусть $(n, 10) = 1$ и $\frac{1}{n} = 0,(A)$. Докажите, что любое число, которое получается из A циклическим сдвигом, делится на A.
Например, $\frac{1}{7} = 0{,}(142857)$, *а каждое из чисел 428571, 285714, 857142, 571428, 714285 делится на 142857.*

4. Пусть $p > 100$ — простое число, а $m < p$ — натуральное число. a) Пусть $p > 5$ — простое такое, что длина периода A дроби $\frac{m}{p}$ равняется $2k$ для некоторого натурального k. Разделим число A на две части по k цифр в каждой: $A = \overline{A_1A_2}$. Тогда $A_1 + A_2 = 99\ldots9$. *Например,* $\frac{1}{7} = 0{,}(142857)$, *а* $142 + 857 = 999$.
b) Поисследуйте ситуацию, когда длина периода делится на t и мы делим период на t частей.

5. Пусть p — очень большое простое число (например, большее 10^{10}), а длина периода дроби $\frac{1}{p}$ равняется $p-1$, т.е. 10 принадлежит показателю $p-1$ по модулю p. [1] Докажите, что для любого десятизначного числа K в записи дроби $\frac{1}{p}$ можно выделить десять подряд идущих цифр, которые образуют число K.

6. Дима посчитал факториалы всех натуральных чисел от 80 до 99, нашёл числа, обратные к ним, и напечатал получившиеся десятичные дроби на 20 бесконечных ленточках (например, на последней ленточке было напечатано число $\frac{1}{99!} = 0,\underbrace{00\ldots0}_{155\text{ нулей}}10715\ldots$). Саша хочет вырезать из одной ленточки кусок, на котором записано N цифр подряд и нет запятой. При каком наибольшем N он сможет это сделать так, чтобы Дима не смог определить по этому куску, какую ленточку испортил Саша?

[1] Кстати, конечно ли множество таких простых чисел, неизвестно...

Малый Механико-Математический Факультет, ауд. 1302 2016–2017

Десятичные дроби. 18 марта

1. Пусть $p, q > 5$ — простые числа. Длины периодов дробей $\frac{1}{p}$ и $\frac{1}{q}$ равны a и b соответственно. Найдите длину периода дроби $\frac{1}{pq}$.

2. Докажите, что для каждого положительного действительного α найдутся такие действительные числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_9$, в десятичной записи которых встречаются только цифры 0 и 7, что выполнено равенство $\alpha = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_9$.

3. Пусть $(n, 10) = 1$ и $\frac{1}{n} = 0,(A)$. Докажите, что любое число, которое получается из A циклическим сдвигом, делится на A.
Например, $\frac{1}{7} = 0{,}(142857)$, *а каждое из чисел 428571, 285714, 857142, 571428, 714285 делится на 142857.*

4. Пусть $p > 100$ — простое число, а $m < p$ — натуральное число. a) Пусть $p > 5$ — простое такое, что длина периода A дроби $\frac{m}{p}$ равняется $2k$ для некоторого натурального k. Разделим число A на две части по k цифр в каждой: $A = \overline{A_1A_2}$. Тогда $A_1 + A_2 = 99\ldots9$. *Например,* $\frac{1}{7} = 0{,}(142857)$, *а* $142 + 857 = 999$.
b) Поисследуйте ситуацию, когда длина периода делится на t и мы делим период на t частей.

5. Пусть p — очень большое простое число (например, большее 10^{10}), а длина периода дроби $\frac{1}{p}$ равняется $p-1$, т.е. 10 принадлежит показателю $p-1$ по модулю p. [1] Докажите, что для любого десятизначного числа K в записи дроби $\frac{1}{p}$ можно выделить десять подряд идущих цифр, которые образуют число K.

6. Дима посчитал факториалы всех натуральных чисел от 80 до 99, нашёл числа, обратные к ним, и напечатал получившиеся десятичные дроби на 20 бесконечных ленточках (например, на последней ленточке было напечатано число $\frac{1}{99!} = 0,\underbrace{00\ldots0}_{155\text{ нулей}}10715\ldots$). Саша хочет вырезать из одной ленточки кусок, на котором записано N цифр подряд и нет запятой. При каком наибольшем N он сможет это сделать так, чтобы Дима не смог определить по этому куску, какую ленточку испортил Саша?

[1] Кстати, конечно ли множество таких простых чисел, неизвестно...