

Упражнения по анализу

1. Верно ли, что если последовательности x_n и y_n не имеют предела, то и а) $x_n + y_n$; б) $x_n y_n$ не имеет предела?
2. а) Пусть X и Y два ограниченных сверху числовых множества. Будем называть их суммой Z множество состоящее из всевозможных сумм $x + y$, где $x \in X$, $y \in Y$. Докажите, что $\sup Z = \sup X + \sup Y$.
б) Верно ли, что $\sup X \cdot Y = \sup X \cdot \sup Y$?
3. а) Последовательность x_n бесконечно малая. А последовательность y_n произвольна. Какой может быть предел у последовательности $x_n y_n$?
б) Чему может быть равен предел частного двух бесконечно малых последовательностей?
4. Докажите, что монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда какая-нибудь ее подпоследовательность сходится.
5. Последовательность стремится к $+\infty$. Докажите, что из нее можно выделить монотонную подпоследовательность.
6. Пусть а) $x_1 = 2$; б) $x_1 = 0$; в) $x_1 = 4$, а $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Докажите, что у последовательности есть предел и найдите его.
7. Последовательность x_n такова, что в ней встречаются все дроби вида $\frac{1}{k}$ ровно по одному разу. Верно ли, что у этой последовательности обязательно есть предел?
8. Последовательность x_n задается следующим образом: $x_1 = \sqrt{3}$, $x_{n+1} = \frac{2}{x_n} + \frac{x_n}{2}$. Докажите, что у этой последовательности есть предел и найдите его.