

Графы это не только пафосное звание

1. а) Верно ли, что если $ab \equiv_n ac$, то $b \equiv_n c$? б) Сформулируйте и докажите достаточное условие для того, чтобы это было верно.

Теорема 1. В графе сумма степеней равна удвоенному числу ребер.

2. Может ли сумма квадратов трех нечетных чисел быть квадратом целого числа?

3. В некоторой стране из каждого города выходит 5 или 15 дорог, ведущих в города этого государства. Докажите, что число городов в государстве делится на два, а число дорог делится на пять.

4. В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Можно ли попасть в столицу из нестоличного города?

5. Некоторое число делится на 18, но не делится ни на 4, ни на 27. Каких делителей у этого числа больше – делящихся на 6 или не делящихся на 6? Во сколько раз?

6. Кирилл и Глеб живут в Дубае в высотном доме с одним подъездом, в котором на каждом этаже 10 квартир. Номер этажа Кирилла равен номеру квартиры Глеба. Может ли сумма номеров их квартир равняться 2014?

7. В некотором государстве каждый город соединен с каждой дорогой. Сумасшедший король хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы выехав из любого города, в него нельзя было вернуться. Можно ли так сделать?

8. Докажите, что а) $\frac{512!}{(256!)^2}$, б) $\frac{768!}{(256!)^3}$ — целое число.

9. Полоска 1×100 разбита на единичные квадраты. В эти квадраты записывают числа 1, 2, ..., 100 следующим образом: сначала в какой-нибудь квадрат записывают число 1, затем в один из соседних квадратов записывают число 2, затем в один из соседних с уже занятыми квадратов записывают число 3 и так далее. Сколькими способами это можно проделать?