

Среднее значение функции. 15 октября

Синий косяк.

Косяк — синий.

1. Вычислите а) $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx$; б) $\int_0^{2\pi} |\cos x| \, dx$.

2. На плоскости дан некоторый отрезок длины a . Обозначим через $\ell_a(\alpha)$ длину проекции отрезка a на прямую, образующую угол α с заданным направлением. Найдите $\int_0^{2\pi} \ell_a(\alpha) \, d\alpha$.

3. На плоскости даны два выпуклых многоугольника Φ_1 и Φ_2 , причём Φ_2 лежит строго внутри Φ_1 . Пользуясь результатом задачи 2. докажите, что периметр Φ_2 меньше периметра Φ_1 .

4. а) Докажите, что если длины всех сторон и диагоналей выпуклого многоугольника не превосходят d , то его периметр не превосходит πd .

б) Докажите, что константа π в пункте а) является точной.

5. Докажите, что периметр выпуклой оболочки любой замкнутой ломанной не превосходит длины этой ломанной.

6. На плоскости даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, сумма которых равна $\vec{0}$. Докажите, что $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| \geq |\vec{a} + \vec{d}| + |\vec{b} + \vec{c}|$.

7. а) На плоскости даны векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, сумма длин которых равна 1. Докажите, что среди них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не меньше $1/\pi$.

б) Докажите, что константа $1/\pi$ в пункте а) является точной.

Среднее значение функции. 15 октября

Синий косяк.

Косяк — синий.

1. Вычислите а) $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx$; б) $\int_0^{2\pi} |\cos x| \, dx$.

2. На плоскости дан некоторый отрезок длины a . Обозначим через $\ell_a(\alpha)$ длину проекции отрезка a на прямую, образующую угол α с заданным направлением. Найдите $\int_0^{2\pi} \ell_a(\alpha) \, d\alpha$.

3. На плоскости даны два выпуклых многоугольника Φ_1 и Φ_2 , причём Φ_2 лежит строго внутри Φ_1 . Пользуясь результатом задачи 2. докажите, что периметр Φ_2 меньше периметра Φ_1 .

4. а) Докажите, что если длины всех сторон и диагоналей выпуклого многоугольника не превосходят d , то его периметр не превосходит πd .

б) Докажите, что константа π в пункте а) является точной.

5. Докажите, что периметр выпуклой оболочки любой замкнутой ломанной не превосходит длины этой ломанной.

6. На плоскости даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, сумма которых равна $\vec{0}$. Докажите, что $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| \geq |\vec{a} + \vec{d}| + |\vec{b} + \vec{c}|$.

7. а) На плоскости даны векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, сумма длин которых равна 1. Докажите, что среди них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не меньше $1/\pi$.

б) Докажите, что константа $1/\pi$ в пункте а) является точной.