Многочлены, интерполяция

1. Существует ли многочлен $f(x) \in K[x]$, где K — поле, который в различных точках $x_0, \ldots, x_n$ принимает данные значения $y_0 = f(x_0), \ldots, y_n = f(x_n)$? Единственный ли этот многочлен?

2. Пусть a, b взаимно простые числа. а) Докажите, что существует n такое, что $n \underset{a}{\equiv} 1$, $n \underset{b}{\equiv} 0$.

б) Докажите, что для любого $0 \leqslant r_1 < a$ существует n такое, что $n \underset{a}{\equiv} r_1$, $n \underset{b}{\equiv} 0$.

в) Prove that for every integer numbers $0 \leqslant r_1 < a, 0 \leqslant r_2 < b$, there exist n such that $n \underset{a}{\equiv} r_1$, $n \underset{b}{\equiv} r_2$.

г) Докажите, что число n из предыдущей задачи единственно по модулю ab.

3 (Китайская теорема об остатках). Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_k$ попарно взаимно простые числа, $m = m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$. Тогда для любых остатков r_i, $0 \leqslant r_i < m_i$, существует единственный остаток r, $0 \leqslant r < m$ такой, что $r \underset{m_i}{\equiv} r_i$.

4. а) Постройте многочлен P, который в точках $x_1, \ldots, x_n$ равен нулю, а в остальных точках отличен от нуля.

б) Постройте многочлен P степени n, который в точке x_0 принимает значение 1, а в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равен нулю.

в) Постройте многочлен P степени n, который в точке x_0 принимает значение y_0, а в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равен нулю.

г) Постройте многочлен P степени n, который в точке x_1 принимает значение y_1, а во всех точках $x_0, x_2, \ldots, x_n$ равен нулю.

д) Постройте многочлен P степени *не выше* n, который в точке x_0 принимает значение y_0, в точке x_1 принимает значение y_1, а в точках $x_2, \ldots, x_n$ равен нулю.

е) Постройте многочлен P степени *не выше* n такой, что $P(x_i) = y_i$, где $i = 0, 1, \ldots, n$

5. Опишите все многочлены, которые в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принимают значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Определение 1. Интерполяционный многочлен в виде

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \qquad (1)$$

называется *интерполяционным многочленом Ньютона.*

6. Докажите, что для любых точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и значений $y_0, y_1, \ldots, y_n$ существуют числа a_i такие, что многочлен (1) в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принимает значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

7. Квадратный трехчлен $P(x)$ принимает целые значения при всех целых x. Докажите, что все коэффициенты многочлена $2P(x)$ — целые.

8. Многочлен $f(x)$ имеет целые коэффициенты, причём $f(0)$ и $f(1)$ — чётные. Докажите, что для любого целого числа n значение $f(n)$ — чётное число.

9. Докажите, что если многочлен n-ой степени в $n+1$ последовательном целомчисле принимает целые значения, то он принимает целые значения во всех целых числах.

10. Многочлен $P(x)$ степени n удовлетворяет равенствам:а) $P(k) = 1$; б) $P(k) = (-1)^k k$; в) $P(k) = \frac{k}{k+1}$, где $k = 0, 1, \ldots, n$. Найти $P(n+1)$.