Разнобой

1. Рассмотрим последовательность из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$, кажое из которых равно ± 1 и сумма их равна 1.
а) Докажите, что существует циклическая перестановка этой последовательности $b_1, b_2, \ldots, b_{2n+1}$, которая удовлетворяет следующему свойству: $b_1 + b_2 + \ldots + b_i > 0$ для любого $0 \leqslant i \leqslant 2n+1$.
б) Докажите, что сувществует ровно одна такая циклическая перестановка с данным свойством.
в) Найдите, чему равно C_{n+1}.

2. Докажите для положительных чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n$ неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + \ldots + b_n}$$

3. Последовательность натуральных чисел задана по правилу: $a_1 = k$, $a_2 = k+1$, $a_{n+1} = a_n a_{n-1} + 1$, при $n > 1$.Докажите, что для любого простого p в этой последовательности найдется элемент кратный p. *Указание: попробуйте построить эту последовательность в обратную сторону.*

4. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность S, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности S в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения лежит на медиане треугольника, проведенной из вершины B.

5. Последовательность натуральных чисел a_n строится следующим образом: a_0 — некоторое натуральное число; $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{5}$,если a_n делится на 5; $a_{n+1} = [\sqrt{5}a_n]$,если a_n не делится на 5. Докажите, что начиная с некоторого члена последовательность a_n возрастает.

6. Пусть a_n – последовательность, заданная соотношениями $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ для $n > 3$. Докажите, что a_p делится на p для любого простого p. *Указание: Покажите, что a_n – количество способов разрезать клетчатое кольцо из n клеток на доминошки и триминошки.*