Поворотная гомотетия. 8 апреля

Определение. *Поворотной гомотетией* называется композиция поворота и гомотетии с общим центром.

1. Поворотная гомотетия с центром в точке O переводит точки A и B в точки C и D соответственно. Докажите, что существует поворотная гомотетия с центром в точке O, переводящая A в B и C в D.

2. Даны различные точки A, B, C, D. Пусть X — точка пересечения прямых AC и BD, а O — вторая точка пересечения окружностей ABX и CDX.
a) Докажите, что существует поворотная гомотетия переводящая направленный отрезок AB в направленный отрезок CD, причём её центр это точка O.
b) Докажите, что такая поворотная гомотетия единственна.

3. Докажите существование точки Микеля через задачи 1 и 2.

4. На сторонах AD и BC четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно так, что $AE/ED = BF/FC$. Луч EF пересекает прямые AB и CD в точках S и T соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников SAE, SBF, TCF и TDE имеют общую точку.

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Пусть P — пересечение диагоналей AC и BD, а Q — вторая точка пересечения окружностей ABP и CDP. Докажите, что $\angle OQP = 90°$.

6. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны BC и AD равны, но не параллельны. На этих сторонах отметили точки E и F соответственно так, что $BE = FD$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые EF и BD — в точке Q, прямые EF и AC — в точке R. Докажите, что описанная окружность треугольника PQR проходит через некоторую точку $S \neq P$, не зависящую от точек E и F.

7. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ и $\angle CBA = \angle DCA = \angle EDA$. Диагонали BD и CE пересекаются в точке P. Докажите, что прямая AP делит сторону CD пополам.

Малый Механико-Математический Факультет, ауд. 1302 *2016–2017*

Поворотная гомотетия. 8 апреля

Определение. *Поворотной гомотетией* называется композиция поворота и гомотетии с общим центром.

1. Поворотная гомотетия с центром в точке O переводит точки A и B в точки C и D соответственно. Докажите, что существует поворотная гомотетия с центром в точке O, переводящая A в B и C в D.

2. Даны различные точки A, B, C, D. Пусть X — точка пересечения прямых AC и BD, а O — вторая точка пересечения окружностей ABX и CDX.
a) Докажите, что существует поворотная гомотетия переводящая направленный отрезок AB в направленный отрезок CD, причём её центр это точка O.
b) Докажите, что такая поворотная гомотетия единственна.

3. Докажите существование точки Микеля через задачи 1 и 2.

4. На сторонах AD и BC четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно так, что $AE/ED = BF/FC$. Луч EF пересекает прямые AB и CD в точках S и T соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников SAE, SBF, TCF и TDE имеют общую точку.

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Пусть P — пересечение диагоналей AC и BD, а Q — вторая точка пересечения окружностей ABP и CDP. Докажите, что $\angle OQP = 90°$.

6. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны BC и AD равны, но не параллельны. На этих сторонах отметили точки E и F соответственно так, что $BE = FD$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые EF и BD — в точке Q, прямые EF и AC — в точке R. Докажите, что описанная окружность треугольника PQR проходит через некоторую точку $S \neq P$, не зависящую от точек E и F.

7. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ и $\angle CBA = \angle DCA = \angle EDA$. Диагонали BD и CE пересекаются в точке P. Докажите, что прямая AP делит сторону CD пополам.