Комбинаторный разнобой

Теорема 1 (Теорема Турана). *Пусть $n, m > 1$ — натуральные числа и r — остаток при делении n на $m-1$. Тогда в графе n вершинах, не содержащим K_m(полного графа на m вершинах), рёбер не более чем*

$$\frac{(m-2)(n^2-r^2)}{2m-2}+\frac{r(r-1)}{2}.$$

Теорема 2 (лемма Холла). *Есть несколько юношей и девушек. Докажите, что все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых тогда и только тогда, когда для любого k любые k юношей знают не менее k девушек.*

1 (Лемма Холла для арабских стран). Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

2. Докажите, что при $m \leqslant 7$ формулу в теоереме Турана можно переписать в следующей форме:

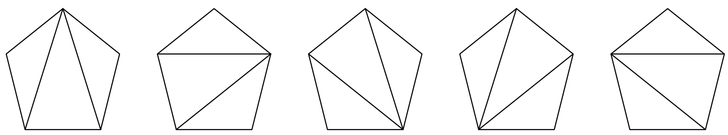
$$\left[\frac{n^2(m-1)}{2m}\right].$$

3. Все вершины двудольного графа имеют степень d. Докажите, что в этом графе есть паросочетание такое, что любая вершина принадлежит ребру из паросочетания.

4. В группе из n^2 человек каждый имеет не более n знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать n человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.

5. Юра выложил в ряд 2001 монету достоинством 1, 2 и 3 копейки. Оказалось, что между любыми двумя копеечными монетами лежит хотя бы одна монета, между любыми двумя двухкопеечными монетами лежат хотя бы две монеты, а между любыми двумя трехкопеечными монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько у Юры могло быть трехкопеечных монет?

6. Докажите, что количество *триангуляций* (разрезаний на n треугольников непересекающимися диагоналями) выпуклого $(n+2)$–угольника равно C_n.



7. За круглым столом сидят n человек. Разрешается любых двух людей, сидящих рядом, поменять местами. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате каждые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?