

Гео разнобой с уклоном в проецивку

1 (Полезный факт). Даны углы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \geq 0^\circ$. Докажите, что если $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 < 180^\circ$ и $\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{\sin(\beta_1)}{\sin(\beta_2)}$, то $\alpha_1 = \beta_1$ и $\alpha_2 = \beta_2$.

2. Пусть AB и CD — две перпендикулярные хорды окружности с центром O , пересекающиеся в точке E ; пусть также N и T — середины отрезков AC и BD соответственно. Докажите, что четырехугольник $ENOT$ — параллелограмм.

3 (Теорема Паппа). Пусть A, B, C — три точки на одной прямой, A', B', C' — три точки на другой прямой. Пусть прямые AB' и BA' пересекаются в точке X , BC' и CB' пересекаются в точке Y , CA' и AC' пересекаются в точке Z . Тогда точки X, Y, Z лежат на одной прямой.

4. В пространстве даны 4 попарно не пересекающиеся прямые. Известно, что любая плоскость, не параллельная ни одной из этих прямых, пересекает их в четырех точках, являющихся вершинами параллелограмма. Докажите, что данные прямые параллельны.

5 (Теорема Паскаля). Точки A, B, C, D, E, F лежат на одной окружности. Докажите, что точки пересечения прямых AB и DE , BC и EF , CD и FA лежат на одной прямой.

6. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S , диаметрально противоположная точке O . Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

7. Докажите, что для любого нечётного $n > 3$ на плоскости можно указать $2n$ различных точек, не лежащих на одной прямой, и разбить их на пары так, чтобы любая прямая, проходящая через две точки из разных пар, проходила бы ещё через одну из этих $2n$ точек.