Двойное отношение, проективная геометрия

Определение 1. *Двойным отношением* точек Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 на комплексной плоскости называется выражение вида:

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}.$$

1. Рассмотрим окружность $|z - i| = 1$ и точки Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, лежащие на ней. Спроецируем данную окружность из точки $2i$ на вещественную ось. Пусть образы наших точек — это Z'_1, Z'_2, Z'_3, Z'_4.
а) Почему двойные отношения точек Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 и Z'_1, Z'_2, Z'_3, Z'_4 равны?
б) Докажите, что для любой точки Z на круге её образ равен $z' \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d некоторые числа, зависящие от Z_1, Z_2, Z_3.

2 (Теорема о бабочке). Пусть через точку , являющуюся серединой хорды PQ некоторой окружности, проведены две произвольные хорды и CD той же окружности. Пусть хорды AD и пересекают хорду PQ в точках X и Y. Тогда является серединой отрезка XY.

Определение 2. *Проективной прямой* называется прямая вместе с добавленной к ней точкой бесконечность.

Определение 3. *Проективным преобразованием* будем называть композицию центральных проектирований и аффинных преобразований.

3. Сформулируйте и докажите аналог задачи 1 для проективных преобразований.

4. а) Докажите, что с помощью проективного преобразования любые три точки проективной прямой можно перевести в точки 0, 1 и ∞.
б) Докажите, что существует проективное преобразование прямой, переводящее три точки в любые три точки.
в) Докажите, что такое преобразование единственно .

Определение 4. *Проективной плоскостью* называется плоскость вместе с добавленными к ней бесконечно удаленными точками: по одной для каждого направления.

Прямая на проективной плоскости — это либо прямая на обычной плоскости вместе с соответствующей бесконечно удаленной точкой, либо бесконечно удаленная прямая, которая состоит из всех бесконечно удаленных точек.

5. Через любые две точки проективной плоскости проходит ровно одна прямая. Любые две прямые пересекаются ровно по одной точке.

6. а) Докажите, что существует проективное преобразование, переводящее четыре точки общего положения в вершины единичного квадрата.
б) Докажите, что существует проективное преобразование, переводящее четыре точки общего положения в любые четыре точки общего положения.

в) Докажите, что такое преобразование единственно (используйте, что двойное отношение сохраняется).

7 (Теорема о полном четырехстороннике). Даны четыре точки A, B, C, D. Пусть P, Q, R — точки пересечения прямых AB и CD, AD и BC, AC и BD соответственно; K и L — точки пересечения прямой QR с прямыми AB и CD соответственно. Докажите, что $(Q, R, K, L) = -1$.

8. Существует проективное преобразование, оставляющее данную окружность на месте и переводящее прямую, не пересекающую окружность, в бесконечно удаленную.

9. Дана окружность ω и точка P внутри нее. Рассмотрим вписанный в эту окружность четырехугольник $ABCD$ такой, что P является точкой пересечения AC и BD. Докажите, что геометрическое место точек пересечения продолжений сторон этих четырехугольников является прямой. (Эта прямая называется *полярой* точки P.)