Разнобой

1 (Изогональное сопряжение). Дан треугольник ABC и точка P, докажите, что прямые, симметричные прямым PA, PB, PC относительно биссектис соответствующих углов треугольника, пересекаются в одной точке либо параллельны.

2. Назовём натуральное число почти квадратом, если оно равно произведению двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что каждый почти квадрат можно представить в виде частного двух почти квадратов.

3. Известно, что клетчатый квадрат можно разрезать на n одинаковых фигурок из k клеток. Докажите, что его можно разрезать и на k одинаковых фигурок из n клеток

4. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB < AC < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω, описанной около треугольника ABC, так, что касательные к ω в этих точках проходят через D; при этом отрезки AD и CE пересекаются. Оказалось, что $\angle ABF = \angle DCE$. Найдите угол ABC.

5. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Выпишем дроби $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ и приведём каждую к несократимому виду; сумму числителей полученных дробей обозначим через $f(n)$. При каких натуральных $n > 1$ числа $f(n)$ и $f(2015n)$ имеют разную чётность?

6. Существует ли такое натуральное число $n > 10^{1000}$, не делящееся на 10, что в его десятичной записи можно переставитьдве различные ненулевые цифры так, чтобы множество его простых делителей не изменилось?

7. Петя и Вася придумали десять многочленов пятой степени. Затем Вася по очереди назвал последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставил в один из многочленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные числа образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать.

8. Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что для любого натурального k сумма любых k идущих подряд членов этой последовательности делится на $k+1$?