Перед многоборьем — 3

Задача 1 (Теорема Менелая). Дан треугольник ABC. Пусть точка C_1 лежит на стороне AB, точка B_1 — на стороне AC, а точка A_1 – на продолжении стороны BC (либо все три на продолжени), тогда точки ABC лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

Задача 2. $M_1, M_2, \ldots, M_6$ — середины сторон выпуклого шестиугольника. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6.

Задача 3. В треугольнике ABC медиана, проведённая из вершины A к стороне BC, в четыре раза меньше стороны AB и образует с ней угол $60°$. Найдите угол $\angle BAC$.

Задача 4. На прямой в указанном порядке отмечены точки A, B, C и D такие, что $AB \neq CD$. По одну сторону от этой прямой построены равносторонние треугольники ABX, BCY и CDZ. Оказалось, что $XY = YZ$. Найдите углы треугольника XYZ.

Задача 5. На сторонах AB и AC равностороннего треугольника ABC выбраны точки P и R так, что $AP = CR$. Пусть M — середина PR. Докажите, что $BR = 2AM$.

Задача 6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $BC = 1$, $DA = 3$, $\angle BAD = 60°$ и $\angle BCD = 120°$. Докажите, что этот четырёхугольник — трапеция.