Неравенство Караматы

1 (Лемма о 4-х точках). Пусть f — выпуклая функция и $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ ($y_1 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3$), то $f(y_1) + f(y_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2)$.

Определение 1. Даны два упорядоченных набора $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Будем говорить, что набор a мажорирует набор b ($a \succcurlyeq b$), если

$$\begin{cases} a_1 \geqslant b_1 \\ a_1 + a_2 \geqslant b_1 + b_2 \\ \ldots \\ a_1 + \ldots a_n = b_1 + \ldots + b_n \end{cases}$$

Определение 2. Раздвиганием набора $(x_1, \ldots, x_n)$ будем назвать одновременное увеличение x_i и уменьшение x_j с сохранением суммы $(x_i \geqslant x_j)$

2 (Карамата, Харди, Пойа, Литлвуд). От набора $b = (b_1, \ldots, b_n)$ с помощью последовательных раздвиганий можно перейти к набору $a = (a_1, \ldots, a_n)$ тогда и только тогда, когда $a \succcurlyeq b$.

3. Выведете из неравенства Караматы неравенство Йенсена а) с одинаковыми весами; б) произвольными весами.

4. Пусть $x_1, x_2, \ldots x_n \in [-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}]$. Докажите, что

$$\cos(2x_1 - x_2) + \ldots + \cos(2x_n - x_1) \leqslant \cos x_1 + \ldots + \cos x_n.$$

5. Для положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ докажите неравенство:

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \ldots \frac{a_n^3}{a_1} \geqslant a_1^2 + \ldots a_n^2.$$

(*Указание: сделайте замену* $x_i = \ln a_i$.)

6. Докажите неравенство для положительных a, b, c:

$$\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} \geqslant \sqrt{\frac{ab}{c^2}} + \sqrt{\frac{bc}{a^2}} + \sqrt{\frac{ca}{b^2}}$$

7. Для положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ докажите неравенство:

$$(1 + \frac{a_1^2}{a_2})(1 + \frac{a_2^2}{a_3}) \ldots (1 + \frac{a_n^2}{a_1}) \geqslant (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n).$$

8. Пусть a, b, c положительные числа, докажите неравенство:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant a^2b + b^2c + c^2a + a^2c + b^2a + c^2b.$$

9. Сформулируйте и докажите весовое неравенство Караматы.