Арифметика остатков

Упражнение 1. а) Рассмотрим $n \in \mathbb{Z}$, докажите, что остатки при делении на n значений любого многочлена будут периодической функцией.
б) Докажите, что при фиксированном a остатки при делении на n выражения $a^{g(k)}$ будут периодической функцией.

Определение 1. Пусть $a \in \mathbb{Z}_n, (a, n) = 1$, тогда показателем a называется наименьшее натуральное l такое, что $a^l \underset{n}{\equiv} 1$.

1. Пусть $P_1(x), P_2(x) \ldots, P_n(x)$ — непостоянные многочлены с целыми коэффициентами. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных k, что все числа $|P_1(k)|, |P_2(k)| \ldots, |P_n(k)|$ составные.

Упражнение 2. Докажите следующие свойства показателей:
а) Для любого $a \in \mathbb{Z}_n, (a, n) = 1$ показатель существует.
б) Пусть у a показатель l, тогда все числа $a^0, a^1, \ldots, a^{l-1}$ попарно несравнимы по модулю n.
в) Пусть у a показатель l, тогда, если выполнено $a^k \underset{n}{\equiv} a^{k'}$, то $k \underset{l}{\equiv} k'$.
г) Пусть у a показатель lm, тогда у числа a^m показатель l.
д) Пусть у a показатель x, у b показатель y и $(x, y) = 1$, тогда ab имеет показатель xy.

2. По простому модулю p существует остаток с показателем $p-1$, такие остатки называются *первообразными корнями по модулю p.* (*Указание/ план:*
пусть $p - 1 = q_1^{a_1} \ldots q_n^{a_n}$, *любой показательья является делителем этого числа. Тогда либо найдётся число с показателем* $q_1^{a_1}$., *либо в разложение на простые множители любого показателя* q_1 *будет входить в степень меньше, чем* a_1. *Если выполнено второе, рассмотрите многочлен* $x^t - 1$ *над* $\mathbb{Z}_p$, *где* $t = \dfrac{p-1}{q_1}$.)

3. Найдите все такие многочлены с целыми коэффициентами, что если $(m, n) = 1$, то $(f(m), f(n)) = 1$.

4. Докажите, что для любого натурального $a > 1$ можно выбрать бесконечное множество чисел вида $a^n(a+1) - 1$ таких, что они все попарно взаимно просты.

5. Найдите все многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами такие, что числа $f(n)$ и $f(2^n)$ взаимно просты при каждом натуральном n.