Двойное отношение и инверсия

Определение 1. Множество $\mathbb{C} \cup \infty$ называется *пополненой комплексной плоскостью.*

Факт. Точки Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 лежат на обобщённой окружности тогда и только тогда, когда их *двойное отношение*

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

вещественно.

Определение 2. Преобразование $z \mapsto 1/z$ будем называть *преобразование обращения.*

Определение 3. Биективное преобразование пополненой комплексной плоскости вида $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ называется *дробно-линейным* преобразованием.

1. Докажите, что преобразование плоскости вида $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ является иньекцией тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$ (т. е. многочлены $az + b$ и $cz + d$ нельзя сократить)

2. а) Дробно-линейные преобразования суть композиции движений, гомотетий и преобразований обращения.
б) Дробно-линейные преобразования переводят обобщенные окружности в обобщенные окружности (используйте предыдущую задачу).
в) Композиция любого числа движений, гомотетий и инверсий есть либо дробно-линейное преобразование, либо сопряженное к нему.

3. а) Докажите, что дробно-линейные преобразования переводят обобщенные окружности в обобщенные окружности, используя уравнение обобщенной окружности $Az\bar{z} + Bz + C\bar{z} + D = 0$, где A, D — вещественные, $C = \bar{B}$. б) Хорошо бы доказать, что это уравнение окружности.

4. Докажите, что дробно-линейные преобразования сохраняют двойное отношение.

Определение 4. Двойным отношением точек A, B, C, D, лежащих на одной окружности называется отношение:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

Обозначается $(ABCD)$.

Упражнение 1. а) Как это определение соотносится с определением двойного отношения в начале листочка? б) Точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Докажите, что если $(ABCD) = 1$, то либо $A = B$, либо $C = D$.
в) Докажите, что если $(ABCX) = (ABCY)$, то $X = Y$ (все точки попарно различны, кроме, быть может, точек X и Y, и лежат на одной прямой).

Ещё немного инверсии.

5. а) Постройте отрезок, который в n раз короче данного отрезка.
б) Постройте окружность, в которую переходит данная прямая AB при инверсии относительно данной окружности с данным центром O.
в) Постройте окружность, проходящую через три данные точки.
г) Постройте точки пересечения данной окружности S и прямой, проходящей через данные точки A и B.
д) Постройте точку пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, где A_1, B_1, A_2 и B_2 — данные точки.

6 (Теорема Мора — Маскерони). Любую точку, которую можно построить с помощью циркуля и линейки, можно построить с помощью одного циркуля.

Упражнение 2. На плоскости даны точки O, A и B. В точке O произвели инверсию с радиусом R. Найдите расстояние между образами точек A и B.

7 (Теорема Птолемея). а) Докажите, что во вписанном четырехугольнике сумма произведений противолежащих сторон равна произведению диагоналей.
б) Верно ли обратное?

8. а) Окружности S и T перпендикулярны прямой l и окружности ω. Нарисуйте образ этой картинки после инверсии с центром в точке N — точке пересечения l и ω.
б) Докажите, что для любых двух окружностей существует инверсия, которая переводит их либо на пару прямых, либо на две концентрические окружности.

9 (поризм Штейнера). Окружность w_1 лежит внутри окружности w_2. Предположим, что существует цепочка окружностей $S_1, S_2, \ldots, S_n$ таких, что каждая касается двух соседних (S_n касается S_1 и S_{n-1}), а также w_1 и w_2. Тогда для любой окружности T, касающейся w_1 и w_2, существует аналогичная цепочка из n окружностей.