Рядом с «максимальными» простыми

1. Докажите, что выражение $S(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ ни при каком целом $n > 1$ не принимает целое значение.

2. Федя выписывает слева направо бесконечную последовательность ненулевых цифр. После выписывания каждой цифры он раскладывает получившееся число на простые множители. Докажите, что рано или поздно один из этих множителей будет больше 100

3. Все простые делители натурального числа n меньше 100. Докажите, что у числа n существует такой делитель d, что $d^2 \leq n < 100d^2$.

4. На доске в строчку написано n подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Под каждым из этих чисел написан его делитель, меньший этого числа и больший 1. Оказалось, что эти делители тоже образуют строчку подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Докажите, что каждое из исходных чисел больше, чем $\frac{n^k}{p_1 p_2 \cdots p_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — все простые числа, меньшие n.

И ещё немного разного.

5. В 17 ячейках записаны натуральные числа от 1 до 17, но неизвестно, какие где. Про любой набор ячеек можно узнать, является ли среднее арифметическое чисел в нем целым. Про какие числа можно узнать, в каких ячейках они находятся?

6. Пусть m, n — натуральные числа такие, что $2^n > (1+n)^m$. Докажите, что среди чисел 1, 2, 3,…, 2^n существует по крайней мере $m+1$ простое число.

7. Для попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_s$, докажите , что любую правильную дробь вида $\frac{c}{m_1 m_2 \ldots m_s}$ можно записать в виде алгебраической суммы(с учётом знака) правильных дробей вида $n_i/m_i (i = 1, \ldots, n)$.

8. Пусть целые числа $a_1, \ldots, a_n$ в совокупности взаимно просты. Докажите, что любое целое число c можно представить в виде линейной комбинации $c = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$, где числа $b_1, \ldots, b_n$ также целые.