Бесконечность

Задача 1. а) В горах живут три бесконечнодолгожителя. Каждый день каждый из них посвящает либо сну, либо еде. Докажите, что занятия каких-то двух из них совпадут бесконечно много раз.
б) Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

Задача 2. Верно ли, что в любой бесконечной десятичной дроби можно так переставить цифры, что полученная дробь станет а) периодической с предпериодом б) периодической без предпериода?

Задача 3. Круг разделен на 1000 секторов, и в каждом написано натуральное число. В один из секторов ставится фишка. Каждым ходом прочитывается число в секторе где фишка, фишка сдвигается на это число секторов по часовой стрелке, и там, где она остановилась, число увеличивается на 1. Докажите, что через некоторое число ходов все числа станут больше миллиона.

Задача 4. Дана доска 8×8 и фишка на ней. В каждой клетке доски стоит стрелка. Каждую секунду фишка передвигается в соседнюю клетку, куда указывает стрелка, а сама стрелка поворачивается на 90^o против часовой стрелке. Докажите, что когда-нибудь фишка упадёт.

Задача 5. Имеется N целых чисел ($N > 1$). Известно, что каждое из них отличается от произведения всех остальных на число, кратное N. Докажите, что сумма квадратов этих чисел делится на N.

Задача 6. Числа a, b, c, d таковы, что $a+b = c+d, a^2+b^2$. Докажите, что $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$.

Задача 7. На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002. Какие числа остались на доске?

Задача 8. Можно ли все клетки таблицы 9×2002 заполнить натуральными числами так, чтобы сумма чисел в любом столбце и сумма чисел в любой строке были бы простыми числами?