

Рекуррентные соотношения

Определение 1. Последовательность чисел $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ называется рекуррентной, если каждый последующий ее член выражается через один или несколько предыдущих.

$$a_n = f(a_{n-1}, \dots, a_0).$$

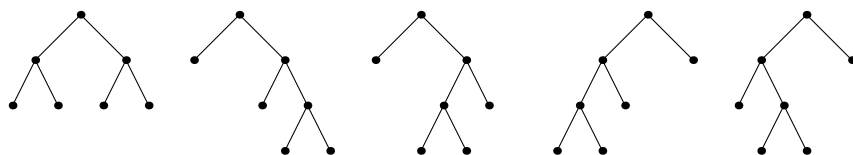
Определение 2. Обозначим через C_n количество способов выстроить правильную скобочную последовательность из n открывающихся и n закрывающихся скобок. Число C_n называется n -ым числом Каталана.

1. Докажите, что числа Каталана определяются рекуррентным соотношением

$$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \dots + C_n C_0 \quad (n \geq 0)$$

и начальным членом $C_0 = 1$.

2. Докажите, что количество *плоских корневых строго двоичных деревьев* (у каждой вершины либо два сына, либо ни одного [и тогда это по определению лист]) с $n + 1$ листом равно C_n .



3. Дана последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, в которой a_1 не делится на 5 и для всякого n имеет место равенство

$$a_{n+1} = a_n + b_n,$$

где b_n — последняя цифра числа a_n . Докажите, что последовательность содержит бесконечно много степеней двойки.

4. Назовём слово из букв X, P, Y *повторюшным*, если рядом с любой его буквой стоит такая же (неважно слева или справа). Найдите количество повторюшных слов длины n .

5. Последовательность натуральных чисел a_n строится следующим образом: a_0 — некоторое натуральное число; $a_{n+1} = \frac{a_n}{5}$, если a_n делится на 5; $a_{n+1} = [\sqrt{5}a_n]$, если a_n не делится на 5. Докажите, что начиная с некоторого члена последовательность a_n возрастает.

6. По данному натуральному числу a_0 строится последовательность $\{a_n\}$ следующим образом $a_{n+1} = a_n^2 - 5$, если a_n нечетно, и $\frac{a_n}{2}$, если a_n четно. Докажите, что при любом нечетном $a_0 > 5$ в последовательности $\{a_n\}$ встретятся сколь угодно большие числа.

7. Пусть a_n — последовательность, заданная соотношениями $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ для $n > 3$. Докажите, что a_p делится на p для любого простого p . Указание: Покажите, что a_n — количество способов разрезать клетчатое кольцо из n клеток на доминошки и триминошки.