Скалярное произведение и ко

Определение 1. Пусть даны три вектора $\overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{e'}$ и $\overrightarrow{b}$, такие что $\overrightarrow{e} \perp \overrightarrow{e'}$ и оба имеют единичную длину. Тогда $\overrightarrow{b} = x\overrightarrow{e} + y\overrightarrow{e'}$. Число x называется проекцией вектора $\overrightarrow{b}$ на направение $\overrightarrow{e}$. Обозначение $x = \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{b})$.

Упражнение 1. а) Когда выполнены следующие равенства $\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{b}) = 0, \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{b}|$?
б) Докажите, что для любых векторов $\overrightarrow{e} \neq \overrightarrow{0}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$ верно равенство $\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2}) = \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{b_1}) + \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{b_2})$.
в) Докажите равенство для $\overrightarrow{e} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ $\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{b}| \cdot \cos(\angle(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{b}))$.

Определение 2. Скалярным произведением векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется число $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}| \cdot \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{a}} \overrightarrow{b}$.

Упражнение 2. а) Когда выполнено $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$?
б) Чему равно $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})$?
в) Докажите равенство $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$.
г) Пусть дана координатная плоскость с базисными единичными векторами $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$. Вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ имеют координаты в этом базисе (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Найдите $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.

1. Квадрат со стороной 1 разрезали на прямоугольники, у каждого из которых отметили одну сторону. Докажите, что сумма длин всех отмеченных сторон не может быть меньше 1.

2. Докажите неравенство $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leqslant (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y^2)$.

3. Выпуклый $2n$-угольник $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ вписан в окружность радиуса 1. Докажите, что

$$|\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}| \leqslant 2$$

4. Правильный n-угодьник $A_1A_2 \ldots A_n$ вписан в окружность радиуса R и X — произвольная точка. Докажите

$$A_1X^2 + \ldots + A_nX^2 = n(R^2 + d^2).$$

5. На окружности радиуса 1 с центром O дано $2n+1$ точек $P_1, \ldots, P_{2n+1}$, лежащих по одну сторону от некоторого диаметра. Докажите, что

$$\left|\overline{OP_1} + \cdots + \overline{OP_{2n+1}}\right| \geq 1.$$

6. Пусть O – центр описанной окружности, H — ортоцентр и M — точка пересечения медиан треугольника ABC.   а) Докажите, что $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$. б) Выведите из этого, что точки M, H, O лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причем $MH = 2OM$.   в) Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.