Идеалы

Определение 1. Идеалом в коммутативном кольце K, называется множество I, замкнутое относительно сложения и для любого $a \in K$ верно, что $aI \subseteq I$, обозначается $I \lhd K$.

Упражнение 1. а) Привидите пример идеалов в кольце целых чисел. б) Найдите все идеалы в поле. в) Привидите пример идеала в кольце $K[x]$.

Определение 2. Идеал $I \lhd K$ называется порождённым, элементами $a_1, \dots, a_n$, если $\forall a \in I$ существуют $b_1, \dots, b_n \in K$, что $a = \sum b_i a_i$.

Определение 3. Идеал $I \lhd K$ называется главным, если существет $k \in I$ такой, что $\forall i \in I$ верно, что $i \vdots k$. Обозначается $I = (k)$.

Упражнение 2. Привидите пример неглавного идеала в $K[x, y]$.

1. Докажите, что все идеалы в кольце целых чисел и кольце многочленов от одной переменной над полем главные.

Определение 4. Радикалом идеала $I \lhd K$ называется множество элементов $J \subseteq K$, что $\forall j \in J\ \exists m \in \mathbb{N}$, что $j^m \in I$, обозначается $J = \sqrt{I}$.

Упражнение 3. Найдите радика идеала $I = ((x-1)^2(x-2)^3) \lhd \mathbb{R}[x]$.

2. Докажите, что радикал идеала тоже идеал.

Определение 5. Пусть $I \lhd K$, тогда два элемента $a, b \in K$ называются сравнимыми по модулю идеала, если $a - b \in I$. Обозначается $a \underset{I}{\equiv} b$.

Определение 6. Многообразием идеала $I \lhd K[x_1, x_2, \dots x_n]$, где K поле, назвается множество точек $V \subseteq K^n$ таких, что $\forall x_0 \in V$ и $\forall f \in I$ верно, что $f(x_0) = 0$, обозначается $V(I)$.

Пусть $V' \subseteq K^n$, тогда идеалом, порождённым V' называется множество всех многочленов в $f \in K[x_1, x_2, \dots x_n]$ таких, что $\forall x_0 \in V'$ верно, что $f(x_0) = 0$, обозначается $I(V')$

Теорема 1. теорема Гильберта о нулях. *Для любого алгебраически замкнутого поля K и идеала $I \lhd K[x_1, x_2, \dots x_n]$ верно, что $\sqrt{I} = I(V(I))$.*

Теорема 2. теорема Гильберта о нулях, слабая версия. *Для любого алгебраически замкнутого поля K и идеала $I \lhd K[x_1, x_2, \dots x_n]$ верно, что $I = K \Leftrightarrow V(I) = \emptyset$.*

3. Число $4x + 3y$ делится на 7. Докажите, что число $4x + 10y$ делится на 7.

4. a, b, c — натуральные числа такие, что $ab + 9b + 81$ и $bc + 9c + 81$ делятся на 101. Докажите, что тогда и $ca + 9a + 81$ тоже делится на 101.

5. а) Существуют ли многочлены $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, для которых выполнено тождество $(x - y + 1)^3 P + (y - z - 1)^3 Q + (z - 2x + 1)^3 R = 1$?
б) Тот же вопрос для тождества $(x - y + 1)^3 P + (y - z - 1)^3 Q + (z - x + 1)^3 R = 1$?.

6. Существует ли такой многочлен $P(x, y)$ с вещественными коэффициента-ми, что многочлен $P(x, y)^2 + 1$ делится на многочлен $x^2 + y^2 + 1$?