

Графская индукция

1. Докажите, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + (n-1) \cdot (n-1)! = n! - 1$.
2. В некоторой стране каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой.
3. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым из остальных одну партию. Докажите, что участников можно занумеровать так, что окажется, что ни один участник под номером n не проиграл участнику под номером $n+1$.
4. В графе степень любой вершины не более 100. Докажите, что вершины графа можно раскрасить в 101 цвет так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были бы соединены ребром.
5. В группе из n человек, говорящих на разных языках, любые трое могут общаться (возможно, один переводит двум другим). Доказать, что их можно разбить на пары, в каждой из которых имеется общий язык для а) $n = 4$ б) $n = 100$
6. В одном государстве 100 городов и каждый соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения на одной дороге так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.
7. Между любыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придется поменять вид транспорта не более одного раза.