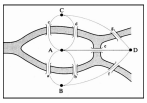
А вы бродили по кёнингсбергским мостам?



1. Докажите, что если в связном графе степень всех вершин кроме двух чётна, то существует путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз.(Этот путь называется **эйлеровым путём**.)

2. Докажите, что число $5^{30n} - 7^{60n}$ делится на 31 при любом натуральном n.

3. а) Можно ли из куска проволоки длиной 12 см, не ломая его, сделать каркас кубика с ребром 1 см?
б) На какое наименьшее число частей надо разломать эту проволоку, чтобы из них можно было сложить такой кубик?
в) Какой наименьшей длины надо взять кусок проволоки, чтобы из него, не ломая, можно было сделать каркас кубика с ребром 1 см?

4. Рёбра связного графа, в котором каждая вершина степени 3, раскрашены в три цвета так, что из каждой вершины выходят ребра трёх разных цветов. Докажите, что при удалении любого ребра граф останется связным.

5. Для какого количества пар чисел из множества от 1000 до 1999 нет переноса через разряд при их сложении?

6. Докажите, что для любого целого a, не делящегося на 17, либо $a^8 + 1$, либо $a^8 - 1$ делится на 17.

7. Незнайка хочет прогуляться по парку и его окрестностям (см. рис.) так, чтобы перелезть через каждый забор ровно один раз. Удастся ли ему это?

8. Докажите, что $a^{561} - a \vdots 561$ при всех натуральных a (такие числа называют числами Кармайкла).

9. Можно ли покрасить клетки таблицы 8×8 в 16 цветов (каждая клетка красится в один цвет) так, чтобы для любых двух цветов нашлись клетки, которые покрашены этими цветами и имеют общую сторону?

10. В отряде 101 боец. Каждый вечер трое из них выходят в дозор. При этом любая пара солдат не может ходить в дозор вместе более трех раз. Какое максимальное количество вечеров отряд может отправлять в дозор бойцов?