

## ДЗ

Напоминание.

1. Докажите, что хорды  $z_1z_2$ ,  $z_3z_4$  единичной окружности параллельны тогда и только тогда, когда  $z_1 \cdot z_2 = z_3 \cdot z_4$ . А перпендикулярны, когда  $z_1 \cdot z_2 + z_3 \cdot z_4 = 0$

2. Пусть  $|a| = 1$ . Докажите, что уравнение  $z\bar{a} + a\bar{z} = 2$  определяет касательную к единичной окружности в точке  $a$ .

3. На единичной окружности с центром в начале координат отмечены две точки, с координатами  $a$  и  $b$ . Докажите, что касательные пересекаются в точке  $\frac{2ab}{a+b}$ .

Конец напоминаю.

4. а) Докажите, что уравнение  $z + ab\bar{z} = a + b$  задаёт уравнение секущей, проходящей через точки  $a$  и  $b$  единичной окружности.

б) На единичной окружности даны точки  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ . Докажите, что хорды, проходящие через точки  $a, b$  и  $c, d$  пересекаются в точке  $\bar{z} = \frac{(a+b) - (c+d)}{ab - cd}$ .

в) Докажите, что основание перпендикуляра из точки  $m$ , на прямую, проходящую через точки  $a$  и  $b$ , лежащих на единичной окружности, задаётся уравнением  $z = \frac{1}{2}(a + b + m - ab\bar{m})$ .

5. а) Докажите, что если точки  $a, b, c$  лежат на единичной окружности, то ортоцентр треугольника, образованного ими, имеет координаты  $a + b + c$ . (Для начала найдите отчки пересечения высот с окружностью, в этом вам поможет задача 1.)

б) Докажите ортоцентр, центр масс, центр описанной окружности лежат на одной прямой. Разместите систему координат так, чтобы описанная окружность треугольника была началом координат и радиус был равен 1.

**6 (Теорема Ньютона).** В описанном около окружности четырёхугольнике середины диагоналей коллинеарны с центром окружности.

7. а) Найдите все первообразные корни по модулю 11.

б) Найдите все квадратичные вычеты по модулю 13.