

## Неравенства

**Факт (Неравенства между средними).** Для положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  методом Штурма докажите неравенство

$$\sqrt[n]{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

**Факт (Транс-неравенство).** Если  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ ,  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$  и  $c_1, c_2, \dots, c_n$  – некоторая перестановка чисел  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , то

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

**Задача 1.** Сумма неотрицательных чисел  $x$  и  $y$  равна 1. Докажите, что  $x^2 + y^2 \geq 1/2$ .

**Задача 2.** Сумма неотрицательных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  равна  $1/2$ . Докажите неравенство

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \frac{1-x_2}{1+x_2} \cdot \dots \cdot \frac{1-x_n}{1+x_n} \geq \frac{1}{3}.$$

**Задача 3.** Сумма вещественных чисел  $a, b$  и  $c$  равна 1. Докажите, пожалуйста, неравенство  $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 4(ab + bc + ca)$ .

**Задача 4.** Вещественные числа  $a, b$  и  $c$  удовлетворяют условию  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Докажите, что  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leq 3$ .

**Задача 5.** Докажите, что при любых положительных числах  $a, b$  и  $c$  справедливо неравенство

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

**Задача 6.** Покажите, что для положительных  $a$  и  $b$  имеет место неравенство

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}.$$

**Задача 7.** Для положительных чисел  $a, b, c$  и  $d$  докажите неравенство

$$(a + 2b + 3c + 4d) \left( \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{4}{d} \right) \geq 100.$$

**Задача 8.** Для положительных  $a, b$  и  $c$  докажите неравенство

$$a + b + c \geq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}.$$