Содержание

1 Чётность

1.1 Чётность суммы чисел

1. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы в результате получился 0?

2. В пятом классе 34 ребенка, которые ходят заниматься в две аудитории. Однажды Александр Владимирович обнаружил, что в одной учебной аудитории пятиклассников на 3 больше, чем в другой. Докажите, что кто-то из ребят ещё не пришёл на занятие.

3. Существуют ли три натуральных числа, попарные суммы которых равны а) $6, 7, 8$, б) $7, 8, 9$.

4. Определите чётность числа $1 + 2 + 3 + \ldots + 999$.

5. В Солнечном городе 10 домов, которые стоят по кругу. Однажды утром из каждого дома на праздничную площадь вышли несколько коротышек. Причём количество коротышек, вышедших из любых двух соседних домов отличаются на 1. Могло ли на зарядке быть 36 человек? А если домов 9?

6. Вася приобрел 35 гирь по 2 грамма каждая и 5 гирь по 4 грамма каждая. Можно ли разложить их на две кучки равного веса?

7. Можно ли числа от 1 до 21 разбить на несколько групп, в каждой из которых имеется число, равное сумме всех остальных?

8. Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято с перевесом в 23 голоса, оппозиция закричала: «Это обман!». Почему?

9. В стране Арагонии жили 100 рыцарей, 99 принцесс и 101 дракон. Рыцари убивают драконов, драконы едят принцесс, а принцессы изводят до смерти рыцарей. Древнее заклятие запрещает убивать того, кто сам погубил нечетное число других жителей. Сейчас в Арагонии остался всего один житель. Кто это?

10. На доске написаны числа от 1 до 100. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них их разность. Может ли после 99 таких операций остаться число 1?

11. Можно ли расставить числа в квадратной таблице 5×5 так, чтобы сумма чисел в каждой строке была чётной, а в каждом столбце нечётной?

12. На столе лежат 15 карточек (см. рисунок). Можно ли убрать двенадцать из них так, чтобы сумма оставшихся была равна 50?

11	23	15	5	23
21	15	7	35	9
15	13	1	17	3

13. Трем пятиклассницам выдали 7 карточек, на которых были написаны числа от 1 до 7. Саша взяла себе три карточки, Маргарита и Аделина – по две. Аделина практически сразу потеряла свои карточки. Но Саша сказала Аделине: «Я точно знаю, что сумма чисел на твоих карточках четна», и оказалась абсолютно права. Какие числа были написаны на карточках у Саши?

14. Учитель написал на листке бумаги число 20. Тридцать три ученика передают листок друг другу, и каждый прибавляет к числу или отнимает от него единицу – как хочет. Может ли в результате получиться число 10?

15. Трое пятиклассников играют в «Мега-банальности». Каждый записывает по сто слов. После этого записи сравнивают. Если слово встретилось у всех троих, за него дают 0 очков, если у двоих – каждый получает 1 очко, если у одного – он получает 4 очка. Может ли в результате один набрать 161, другой – 180, а третий – 286 очков?

16. Есть 101 монета, из которых 50 фальшивых, отличающихся по весу на 1 грамм от настоящих. Петя взял одну монету и за одно взвешивание на весах со стрелкой, показывающих разность весов на чашках, хочет определить, фальшивая ли она. Сможет ли он это сделать?

17. Книга состоит из 30 рассказов объемом 1, 2, ..., 30 страниц. Рассказы печатаются с первой страницы, каждый рассказ начинается с новой страницы. Какое наибольшее количество рассказов может начинаться с нечетной страницы?

1.2 Разбиение на пары

18. Можно ли на шахматной доске поставить 15 коней так, чтобы каждый бил ровно одного другого?

19. На занятие шла стройная колонна пятиклассников. У каждого в карманах пряники: сколько в правом кармане, столько и в левом. Могло ли у них вместе быть 2017 пряников?

20. Докажите, что на шахматной доске 100×100 чёрных и белых клеток поровну.

21. За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей мальчик — девочка и девочка — мальчик четно.

22. В пиратской команде а) 100, б) 101 человек. Каждый вечер трое пиратов выходят устраивают весёлую драку. Можно ли составить график драк так, чтобы любые два пирата ровно один раз подрались друг с другом?

23. Существуют ли 55 различных двухзначных чисел таких, что сумма любых двух не равна 100?

24. Два числа A и B отличаются только перестановкой цифр. Может ли сумма чисел A и B равняться $99\dots9$ (999 девяток)?

25. Найдите сумму всех шестизначных чисел состоящих из цифр 1,2,3,4

26. У профессора Чайникова на полке стоят книги, все авторства разных писателей. Профессор посчитал, что есть ровно 225 способов расставить книги на полке так, чтобы Чехов и Тургенев оказались рядом. Может ли это быть правдой?

27. Может ли ребус АБВ+ГДЕ=1000 иметь ровно а) 2000, б) 791 решений (разные буквы означают разные цифры)?

2 Сумма арифметических прогрессий

28. а) Четно или нечетно число $101+102+103+104+\ldots+197+198+199+200$? б) На сколько сумма всех четных чисел первой сотни (т.е. $2+4+6+\ldots+96+98+100$) больше суммы всех нечетных чисел первой сотни (т.е. $1+3+5+\ldots+97+99$)?

29. У Васиного друга Пети есть гирьки с весами: а) 1 г, 2 г, 3 г, ..., 12 г. б) 1 г, 2 г, 3 г, ..., 13 г. в) 1 г, 2 г, 3 г, ..., 14 г. Можно ли разложить эти гирьки на три кучки равного веса ?

30. Найдите сумму а) всех чисел; б) чётных чисел; в) нечётных чисел от 1 до 146.

31. а) Найдите сумму всех нечётных чисел от 1 до 19. б) Докажите равенство $1+3+5+\ldots+(2n-3)+(2n-1)=n^2$.

32. Разложите а) 55, б) 100 орехов на 10 кучек так, чтобы в них было разное число орехов, но никакую из куч нельзя было бы разбить на две так, чтобы получилось 11 кучек с разным числом орехов.

33. Какое наибольшее число клеточек на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в любом уголке из трех клеточек было хотя бы одна незакрашенная клетка?

34. Докажите, что из а) 2017;б) 2018 полосок бумаги шириной 1 и длинами 1, 2, ..., 2017 (2018) можно составить прямоугольник, длина и ширина которого больше 1. Какова будет его площадь?

35. Найдите сумму всех натуральных чисел от 1 до n.

3 Принцип Дирихле

36. Какое наибольшее количество ладей можно поставить на доску 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

37. Хулиган Вася пытается расставить числа $-1, 0, 1$ в квадрате 4×4 так, чтобы суммы чисел по вертикалям, горизонталям и двум диагоналям различны. Удастся ли это ему?

38. Хулиган Вася натуральные числа от 1 до 2017 некоторым образом переставили, а затем от каждого числа отняли номер места, на котором оно стоит. Докажите, что у Васи среди полученных разностей есть хотя бы одно четное число.

39. Можно ли на шахматной доске раставить а) 15, б) 14 слонов так, чтобы они не били друг друга?

40. 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.

41. Зал на дискотеку был украшен 50 шариками. Докажите, что среди них найдутся либо 8 одноцветных шариков, либо 8 шариков разных цветов

42. В классе 30 учеников. Во время контрольной работы Вася сделал 13 ошибок, а остальные — меньше. Докажите, что найдутся три ученика, сделавшие одинаковое число ошибок.

43. Числа 1, 2, . . . , 9 разбиты на три группы. Докажите, что произведение чисел хотя бы в одной из групп меньше 72.

44. В компьютерном классе может находиться не менее 3 и не более 12 компьютеров. В городе 91 школа, в каждой их которых имеется компьютерный класс. Докажите, что найдется, по крайней мере, 10 школ, в компьютерных классах которых стоит одинаковое число компьютеров.

45. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга королей можно поставить на шахматную доску?

46. Докажите, что в компании из 10 школьников найдутся двое, у которых одинаковое число друзей среди этих школьников.

47. Числа 1, 2,. . . , 9 разбиты на три группы. Докажите, что произведение чисел хотя бы в одной из групп не меньше 72.

48. Восемь преподавателей 447-ой аудитории решили поделить между собой 43 ученика. Преподаватель, которому доставалось менее 11 учеников, впадал в неизъяснимую грусть. Докажите, что теперь в 447-ой аудитории не менее пяти грустных преподавателей.

49. Пятнадцать мальчиков собрали вместе сто орехов. Докажите, что какие-то двое из них набрали одинаковое количество орехов.

50. У биологов Наташи, Ани и Оли есть 49 лабораторных мышей. Пытливые экспериментаторы поделили мышей между собой. Докажите, что хотя бы у одной из них найдутся или пять одинаковых мышек, или пять разных.

51. 10 подружек договорились в «День подружек» обменяться поздравлениями. Каждая отправила по одной SMS-ке пяти подругам. Докажите, что какие-то две из них обменялись SMS-ками друг с другом.

52. У Иогана Дирихле живёт 146 кроликов, которых он рассадил по 11 клеткам. Докажите, что существует клетка, в которой живут как минимум 14 кроликов.

53. Верно ли, что хотя бы два жителя нашей планеты родились в одну и ту же секунду? А три?

54. В квадратном ковре со стороной 1 м моль проела 51 точечную дырку. Докажите, что некоторой квадратной заплаткой стороной 20 см можно закрыть не менее трёх дырок.

55. На шахматной доске стоит 31 фишка. Докажите, что найдется свободный «уголок» из трех клеток.

56. Докажите, что среди 1200 школьников найдутся минимум трое с однинаковым днём рождением?

57. В ковре размером 4×4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из этого ковра можно вырезать коврик размера 1×1 метр, в котором нет ни одной дырки.

58. Доска размером 4×4 покрыта 13 доминошками 2×1. Докажите, что можно убрать одну доминошек так, что оставшиеся будут по-прежнему покрывать всю доску.

59. Двенадцать волейбольных команд сыграли турнир в один круг (каждая сыграла с каждой один раз).
а) Сколько всего было сыграно матчей?
б) Докажите, что есть команда, которая выиграла не менее 10 матчей (ничей в волейболе не бывает).
в) Обязательно ли найдутся такие три команды, что каждая из девяти оставшихся команд проиграла хотя бы одной из этих трех?

60. Даны 8 различных натуральных чисел, каждое из которых не больше 15. Доказать, что среди их попарных разностей найдутся три одинаковых.

61. Какое наибольшее количество коней можно поставить на шахматную доску, чтобы они не били друг друга?

62. На торжественный банкет в честь хорошей погоды и попутного ветра пришло 100 пиратов. Назовём двух пиратов *сокружечниками*, если они выпили друг с другом кружку кваса. Докажите, что найдётся два пирата, у которых одинаковое число *сокружечников*.

63. а) Лиса Алиса и кот Базилио делят 6 золотых. Алиса предлагает Базилио положить их по одной в некоторые клетки таблицы 4×4. Дальше она оставляет за собой право вычеркнуть две строки и два столбца в этой таблице, а оставшиеся клетки вместе с имеющимися там золотыми оставить Базилио. Докажите, что у лисы Алисы всегда есть возможность присвоить себе все монеты.
б) Придумайте для Базилио такой способ раскладки 7 монет, чтобы после «честного» дележа ему досталась хотя бы одна монета.

4 Десятичная запись числа

64. Найдите последнюю цифру числа а) 6^{2017}; б) 111^{2017}; в) 9^{2017}; г) 2^{2017}.

65. Найдите последнюю цифру числа а) 7^{2017}, б) 115^{2017},в) 3^{2017},г) 8^{2017}.

66. Количество задач, решённых Максимом Амирьяновичем к приходу школьников, выражается трехзначным числом, начинающимся на 9. Если первую цифру этого числа перенести в конец, то получим количество задач, решённых Еленой

Анатольевной. Известно, что Елена Анатольевна решила на 90 задач меньше. Сколько задач решил каждый из указанных преподавателей?

67. Найдите все двузначные числа, которые в 6 раз больше суммы своих цифр.

68. Найдите последнюю цифру числа $2017^{2017} + 2018^{2018} + 2019^{2019}$.

69. Шифр замка-автомата — семизначное число, три первые цифры которого одинаковые, остальные четыре цифры так же одинаковые. Сумма всех цифр этого числа — число двузначное, первая цифра которого совпадает с первой цифрой шифра, а последняя – с последней. Найдите этот шифр.

70. Между цифрами двузначного числа вставили ноль, в результате чего оно увеличилось в 9 раз. Найдите все такие числа.

71. Докажите, что разность трёхзначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99.

72. По окружности в произвольном порядке расставлены цифры от 1 до 9 (каждая — ровно один раз). Начиная с любой цифры, по часовой стрелке читаем трёхзначное число. Докажите, что сумма всех этих девяти чисел не зависит от расположения цифр.

73. Записали некоторое трехзначное число, приписали к нему такое же. Разделили получившееся шестизначное число на 11, затем на 13, а потом на 7. Какое число получили?

74. Докажите, что разность пятизначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 11.

75. а) Докажите, что из любых 11 натуральных чисел можно выбрать два таких, что их разность делиться на 10.
б) Докажите, что из любых 7 натуральных чисел можно выбрать два таких, что их разность или сумма делиться на 10.

76. Натуральное число назовём тройным, если оно представимо в виде суммы трёх трёхзначных чисел $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$, где a, b, c – различные ненулевые цифры. Сколько существует тройных чисел?

77. а) Из пятизначного числа вычли его сумму цифр. Докажите, что полученное число делиться на 9.
б) Из пятизначного числа вычли число, составленное из его двух последних цифр. Докажите, что полученное число делиться на 4 и 25.

78. Шестизначное число оканчивается на единицу. Если её перенести в начало, то число уменьшится в 3 раза. Какое это число?

79. Докажите, что пятизначное число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, составленное из двух его последних цифр, делится на 4.

80. а) Докажите, что если сумма цифр четырёхзначного числа делится на 9, то и само число делится на 9.б) Докажите, что если четырёхзначное число делится на 9, то сумма его цифр делится на 9.

Определение 1. Знакопеременной суммой цифр числа $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1}$ называется число $(-1)^{n-1}a_n + (-1)^{n-2}a_{n-1} + \ldots + a_3 - a_2 + a_1$.

81. а) Докажите, что число, составленное из чётного количества девяток делится на 11. б) Докажите, что число $1\underbrace{000000\ldots00000000}_{\text{чётное количество нулей}}1$ делится на 11.

в) Докажите, что шестизначное число делится на 11 тогда и только тогда, когда его знакопеременная сумма цифр делиться на 11.

82. Докажите, что число $\overline{abcdef} - \overline{defabc}$ делится на 27.

83. Цифры a и b таковы, что $a+b$ делится на 7. Докажите, что число $\overline{aba}$ делится на 7.

84. И сказал Кащей Ивану Царевичу: «Жить тебе до завтрашнего утра. Утром явишься пред мои очи, задумаю я цифры x, y и z. Назовёшь ты мне три натуральных числа a, b и . Выслушаю я тебя и скажу, чему равно $ax + by + cz$. Не отгадаешь, какие числа я задумал — голову с плеч долой!» Запечалился Иван Царевич и пошёл думу думать. Может ли он в живых остаться?

85. И сказал Кащей Ивану Царевичу: «Жить тебе до завтрашнего утра. Утром явишься пред мои очи, задумаю я натуральные числа x, y и z. Назовёшь ты мне три натуральных числа a, b и c. Выслушаю я тебя и скажу, чему равно $ax+by+cz$. У тебя есть две попытки. Не отгадаешь, какие числа я задумал — голову с плеч долой!» Запечалился Иван Царевич и пошёл думу думать. Может ли он в живых остаться?

86. Найдите двузначное число, обладающее следующим свойством: если зачеркнуть его последнюю цифру, то получится число в 14 раз меньшее.

87. Все цифры шестизначного числа А – различны и расположены в порядке возрастания. Чему может равняться сумма цифр числа 9А?

88. Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причем $\overline{abc} - \overline{def}$ делится на 7. Докажите, что само число делится на 7.

5 Расскраска

5.1 Шахматная раскраска

89. Хулиган Вася выпилил у шахматной доски а) угловую клетку; б) две угловые клетки на одной стороне; в) две противоположные угловые клетки. Можно ли разрезать получившуюся доску на доминошки (двуклеточные прямоугольники).

90. Вася приобрел дрессированного лягушонка, который умеет прыгать по прямой дорожке на 1 см вправо или влево. Может ли случиться так, что лягушонок сделает ровно 25 прыжков и вернется в исходное положение?

91. В углу клетчатой доски 8×8 сидит дрессированный лягушонок, который умеет прыгать в соседнюю по стороне клетку. Может ли он за 25 прыжков добраться в противоположный угол доски?

92. Можно ли шахматным конём обойти все клетки доски 9×9, побывав в каждой ровно один раз, и вернуться в исходную клетку?

93. На каждой клетке доски 5×5 сидит один дрессированный лягушонок. По команде «Ква!» каждый лягушонок перепрыгивает на одну из соседних клеток, (клетки считаются соседними, если они имеют общую сторону). Докажите, что после команды «Ква!» какие-то два лягушонка окажутся на одной клетке.

94. Дрессированный лягушонок Васи опять прыгает вдоль прямой. Сначала он прыгнула на 1 см, затем на 2 см в том же или в противоположном направлении, затем на 3 см в том же или в другом направлении, затем на 4 см и т. д. Мог ли он после 50-го прыжка оказаться а) на 25 см левее исходной точки; б) в исходной точке?

95. Фигура «верблюд» ходит по доске 10×10 на три клетки по вертикали и одну по горизонтали, или на три по горизонтали и одну по вертикали. Можно ли пройти «верблюдом» с какого-то исходного поля на соседнее с ним по стороне?

96. В каждой клетке шахматной доски 5×5 стоит конь. Можно ли одновременно сделать ход всеми конями таким образом, чтобы все клетки доски снова стали заняты?

97. На доске 10×10 стоят фишки, занимая два противоположных квадрата 5×5. Фишки могут свободно прыгать друг через друга по вертикали, горизонтали или диагонали (если только поле, на которое прыгает фишка свободно). Можно ли за несколько ходов переместить фишки так, чтобы они заняли прямоугольник 5×10?

98. Васин лягушонок подрос и теперь прыгает по клеткам доски 12×12, притом каждый раз только на соседнюю *по диагонали* клетку. Сможет ли он вернуться на ту клетку, с которой начинал, сделав 239 прыжков?

99. На квадратной площади со стороной 1 км стоит 51 памятник П.Г.Л.Дирихле. Докажите, что какие-то три памятника помещаются на квадратном участке со стороной 200 м.

100. На квадратной доске 10×10 клеток расставлены шашки, причём на всех вертикалях стоит разное (возможно, нулевое) число шашек, и на всех горизонталях стоит разное (возможно, нулевое) число шашек. Сколько всего шашек может быть на доске?

101. Можно ли разрезать прямоугольник 4×5 на 5 различных фигурок «тетрамино» (фигурки, составленные из четырех клеток, как-то примыкающих друг к другу по стороне)?

102. Зал имеет форму правильного треугольника, разделенного на 25 маленьких залов той же формы. В каждой стене между залами проделана дверь. Путник ходит по замку, не посещая ни один из залов более одного раза. Найти наибольшее число залов, которое ему удастся посетить.

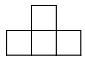
103. а) На доске 10×10 для «морского боя» стоит двухпалубный корабль. Какое наименьшее число выстрелов необходимо произвести, чтобы наверняка ранить его? б) Та же задача для трёхпалубного корабля.

104. Правильный треугольник со стороной 10 разбит прямыми, параллельными сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Имеется 10 плиток-«треугольников» и 15 плиток-«параллелограммов». Можно ли замостить ими весь исходный треугольник?

105. Можно ли выписать в ряд по одному разу цифры от 1 до 9 так, чтобы между единицей и двойкой, между двойкой и тройкой,..., восьмеркой и девяткой было нечетное число цифр?

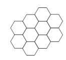
106. По ребрам куба ползает муравей, нигде не поворачивая обратно. Может ли он в одной из вершин побывать 15 раз, а в остальных – по 10 раз?

107. На клетчатой бумаге отметили 100 клеток. а) Докажите, что из них можно выбрать 50 так, чтобы среди выбранных клеток не было соседних по стороне.
б) Докажите, что из них можно выбрать 25 так, чтобы среди выбранных клеток не было соседних по стороне углу.

108. Докажите, что квадрат 10×10 нельзя разрезать на фигуры вида:  .

109. Мышонок ест куб сыра $3\times3\times3$, съедая за один присест один кубик $1\times1\times1$. После того, как кубик съеден, мышонок переходит к соседнему с ним по грани кубику. Может ли этот зверь съесть весь сыр без центрального кубика?

110. На шестиугольной решетке (см. рисунок) отметили 300 шестиугольников. Докажите. что из них можно выбрать 100 так, чтобы не было соседних по стороне.

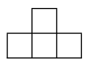


5.2 Матрасная раскраска

111. На каждой клетке доски 5×5 сидит один дрессированный лягушонок. По команде «Ква!» каждый лягушонок перепрыгивает по диагонали на одну клетку. Докажите, что после команды «Ква!» хотя бы на 5 клетках не будет лягушат.

112. Можно ли выложить шахматную доску тридцатью двумя доминошками так, чтобы 17 из них были расположены горизонтально, а 15 – вертикально?

113. Хромой король может ходить на любую соседнюю по стороне или углу клетку доски, кроме верхней и нижней (не более 6 возможных ходов с каждой клетки). Может ли хромой король обойти все клетки доски 9×9, побывав на каждой клетке по одному разу?

114. Можно ли доску размером 10×10 покрыть фигурами вида  ?

5.3 Диагональная раскраска

115. Можно ли доску 8×8 без угловой клетки разрезать на а) уголки из трёх клеток; б) прямоугольники 1×3?

116. Докажите, что доску 8×8 нельзя замостить 15 фигурками 1×4 и одной фигуркой из четырех клеток в форме буквы "Г".

117. Можно ли доску 10×10 покрыть прямоугольниками 1×4?

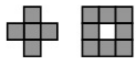
118. Можно ли разрезать автопортрет Страшилы (то, что не закрашено), на триминошки 1×3?

119. Из доски 8×8 вырезали одну клетку так, что остаток можно разрезать на прямоугольники 3×1. Где могла находиться вырезанная клетка?

5.4 Другие расскраски

120. Дно прямоугольной коробки выложено плитками 2 и 1×4. Плитки высыпали из коробки, но одна плитка 2×2 потерялась. Вместо нее достали плитку 1×4. Докажите, что выложить дно коробки плитками теперь не удастся.

121. Как раскрасить лист клетчатой бумаги в 5 цветов так, чтобы внутри любой фигуры типа А (см. рисунок) клетки были окрашены во все 5 цветов, а внутри любой фигуры типа В – не все?


A B

6 Комбинаторика

6.1 Круги Эйлера

122. На лужайке расположились 10 крокодилов. Крокодилов в галстуке было 6, а 4 крокодила были больны. Сколько было на лужайке крокодилов здоровых и без галстука?

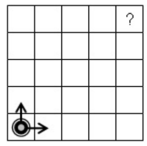
123. В классе 35 учеников. Из них 20 занимаются в математическом кружке, 11 – в биологическом, 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько биологов увлекаются математикой?

124. а) На пиратском корабле трудятся 67 морских разбойников. У 47 из них есть ухо, у 35 —- глаз, а у 23 счастливчиков есть и то, и другое. Сколько пиратов не имеют ни уха, ни глаза?
б) Новая инструкция Профсоюза Работников Абордажного Крюка предписывает корабельному врачу учитывать также наличие носа. В дополнение к данным п. а) оказалось, что 20 пиратов имеют нос, 12 —- и нос, и ухо, 11 —- и нос, и глаз, а 5 —- все три органа. Сколько пиратов не имеют ничего?

125. Большая группа пиратов собралась на Исла-де-Муэрте. Из них владеет пистолетами 28 человек, саблями — 13, дубинами – 10, пистолетами и саблями — 8, саблями и дубинами — 5, дубинами и пистолетами — 6, всеми тремя оружиями — двое, а 41 пират забыли своё оружие в самый не подходящий момент. Сколько всего пиратов?

6.2 Пути

126. В левом нижнем углу шахматной доски 5×5 стоит фишка. За один ход её разрешается передвинуть на одну клетку вправо или вверх. В каждой клетке записывается число способов передвинуть фишку из начального положения в данную клетку. Какое число записано в правом верхнем углу?



127. Сколькими способами можно добраться из города A в город C, если схема дорог представлена а) на рисунке *а*, б) на рисунке *б* в) на рисунке *в* (возвращаться назад нельзя)?

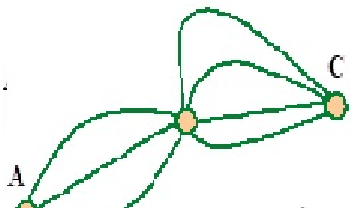


Рис. а)

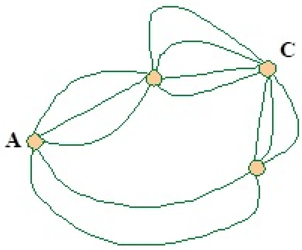


Рис. б)

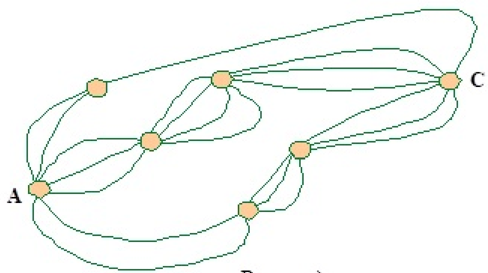
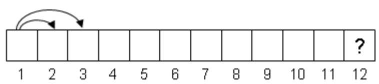
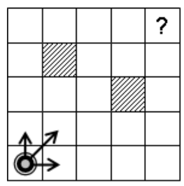


Рис. в)

128. Заяц прыгает в одном направлении по разделенной на клетки полосе. За один прыжок он может сместиться либо на одну, либо на две клетки. Сколькими способами может заяц добраться с 1-й клетки на 12-ю?



129. «Хромой король» стоит в левой нижней клетке доски 5×5 и может передвигаться в трех направлениях, показанных на рисунке.
а) Сколькими способами он может пройти в верхнюю правую клетку?
б) В заштрихованных клетках — лежат мины. Сколько существует путей в верхнюю правую клетку, следуя которым, «хромой король» останется в живых?



130. Сколькими способами можно прочитать слово «ДРАКОН» на картинке?

Д Р А К О Н
Р А К О Н
А К О Н
К О Н
О Н
Н

6.3 Произведение и сумма

131. В арсенале настоящего пирата 6 пистолетов, 7 сабель и 3 дубины (и всё обязательно различное).
а) Чтобы дравить палубу ему надо взять ровно оружие. Сколько вариантов снарядиться дравить палубу?
б) Чтобы пойти в плаванье ему надо по одному оружию разного типа. Сколько вариантов снарядиться пирату в плаванье?

132. 65 школьников написали 3 контрольные работы. За каждую контрольную работу ставилась одна из оценок: «2», «3», «4» или «5». Докажите, что найдутся школьники, написавшие все контрольные работы одинаково.

133. В арсенале настоящего манчкина 6 щитов, 7 посохов, 4 головняка и 3 обувки (и всё обязательно различное). Чтобы пойти в секретную пещеру ему надо надеть на себя как минимум 3 шмотки разного типа. Сколько вариантов снарядиться манчкину в пещеру?

134. Туземцы захватили в плен Паганеля и заставили его быть поваром. Он умеет готовить 10 видов мяса и 5 видов гарнира. Каждый день на обед надо приготовить один гарнир и а) один, б) два вида мяса. Если он повторит меню – его съедят за ужином. Через полгода придет спасительный корабль. Сможет ли Паганель продержаться?

135. В пиратской команде 10 человек. а) Сколько способов выстроить 10 пиратов в ряд? б) Выбрать капитана и боцмана? в) Выбрать двух неудачников драить палубу?

136. Каким числом способов можно поставить на шахматную доску двух королей так, чтобы они не били друг друга?

137. Алфавит племени Мумба-Юмба состоит из трех букв А, Б, В, а любое слово содержит не более 5 букв.
а) Словами-«табу», является любая последовательность, состоящая из неповторяющихся букв. Сколько таких слов в языке племени Мумба-Юмба?
б) Афоризмом является любая последовательность, состоящая не более, чем из четырех букв. Сколько афоризмов в языке племени?
в) Архаизмом же является любая последовательность, не содержащая буквы В. Сколько существует архаизмов в языке племени?

138. Три кота, Фикус, Крокус и Кактус, нашли мешок с 10 разными сосисками. Сколькими способами они могут разделить эти сосиски между собой? (Кстати, кому-то из них может ничего не достаться)

139. Старательный пятиклассник желает сдать Кристине Артаковне сразу 10 задач. Она, естественно, может поставить за каждую задачу либо «плюс», либо «минус». Сколько разных последовательностей плюсов и минусов может появиться в ведомости после их разговора?

140. В распоряжении капитана имеется 10 пиратов.а) Сколькими способами он может выбрать из них юнгу, кока и боцмана? б) Сколькими способами он может выбрать трёх пиратов в тайную вылазку?

141. Каким числом способов можно расставить 8 ладей на доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

142. У Вождя племени есть 10 различных бусин. Сколько разных ритуальных браслетов он сможет из них составить?

143. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова а) «ПИРАТ»; б) «АБОРДАЖ»; в) «ЙОХОХОИБУТЫЛКАКВАСА» (*словом называется произвольная последовательность букв*)?

144. У Талии Маратовны есть 12 различных фруктов, а у Александра Игоревича только 10. Сколькими способами они могут обменять три фрукта одного на три фрукта другого?

6.4 Дополнение

145. Автобусные билеты имеют шестизначные номера, от 000000 до 999999. а) Сколько всего номеров? б) Сколько номеров, не содержащих цифру 7? в) Сколько номеров, содержащих цифру 7? г) Сколько номеров, у которых есть хоть одна нечётная цифра?

7 Неравенства

146. Известно, что 9 стаканов чая стоят дешевле 10 рублей, а 10 стаканов чая - дороже 11 рублей. Сколько стоит стакан чая?

147. Докажите, что a) число $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$ меньше, чем 100^{100}; b) меньше чем 99^{98}.

148. Определите числовое значение слова ТРАНСПОРТИРОВКА, если одинаковые буквы заменить соответственно одинаковыми цифрами, разные — разными, причём так, чтобы были выполнены неравенства

$$\text{Т} > \text{Р} > \text{А} > \text{Н} < \text{С} < \text{П} < \text{О} < \text{Р} < \text{Т} > \text{И} > \text{Р} > \text{О} < \text{В} < \text{К} < \text{А}.$$

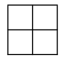
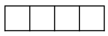
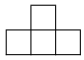
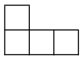
8 Конструкции

149. а) Вася купил шоколадку 5×5, разделенную по бороздкам на 25 маленьких квадратиков. Удастся ли ему разрезать эту шоколадку на уголки из трех клеток? б) Петя подарил Васе другую шоколадку: 5×9. Удастся ли Васе разрезать на уголки из трех клеток эту шоколадку?

150. Расставьте шашки на клетчатой доске 6×6 так, чтобы чтобы на всех горизонталях стояло разное число шашек, а на всех вертикалях — одинаковое.

151. В однокруговом турнире за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0. Спартак одержал больше всех побед, мог ли он занять последнее место?

152. Новый корпус для пятиклассников имеет форму квадрата 6×6. Маляр обошёл часть комнат, переходя каждый раз в соседнюю комнату. В каждой комнате, где он был, маляр покрасил пол в оранжевый цвет (возможно несколько раз). Может ли среди комнат с оранжевым полом быть 12 таких, которые имеют общую стену ровно с одной оранжевой?

153. Докажите, что квадрат 8×8 можно разрезать на фигуры вида: а)  ; б)  ; в)  ; г)  . Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

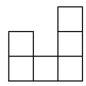
154. Есть кран, раковина и два бидона ёмкостью 15 и 16 литров, можно ли отмерить 8 литров?

155. Могут ли а) 8; б) 7 слонов побить все клетки доски 4×10?

156. На гранитном карьере добыли 200 плит гранита, из которых 120 весят по 7 тонн каждая, а остальные - по 9. На платформу можно погрузить до 40 тонн. Какое минимальное число платформ понадобится для перевозки?

157. Вася со своим другом Петей ехали на кружок на трамвае, и купили у кондуктора два последовательных билетика (номер каждого билетика шестизначное число). Петя заметил, что сумма цифр его билета делится на 7. Вася посмотрел на свой билетик и закричал, что и у него сумма цифр тоже делится на 7. Могло ли такое случиться ?

158. Можно ли расставить на доске а) 6×6, б) 8×8 шесть (восемь) ферзей так, чтобы они не били друг друга?

159. Сложите из следущих фигур квадрат:  .

160. Можно ли так расставить числа от 1 до 16 в квадрате 4×4 так, чтобы каждое число было либо меньше всех соседних по стороне либо больше?

161. Обойдите все клетки доски 8×8 конём, побывав на каждой клетке ровно один раз и вернитесь в исходную клетку.

162. Маляр, в распоряжении которого чёрная и белая краска, ставится на угловую клетку доски 8×8, где все клетки белые. Он может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку, после этого должен перекрасить ее в противоположный цвет. Докажите, что маляр может покрасить доску в шахматную раскраску.

163. Среди 10 человек, подозреваемых в преступлении, двое виновных и восемь невинных. Экстрасенсу предъявляют подозреваемых по трое. Если среди троих есть преступник, экстрасенс указывает на него, если два преступника — на одного из них, а если преступников нет — на любого из троих. а) Как за 4 сеанса найти хотя бы одного преступника. б) Как за 6 таких сеансов наверняка выявить обоих преступников?

164. Разложите гири массами 1, 2, 3, . . . , 555 на три кучи равной массы.

165. На доске вначале выписаны два числа: 3 и 6. За один ход разрешается увеличить любое число на доске на сумму цифр любого из выписанных (в том числе на сумму цифр его самого). Можно ли добиться того, чтобы каждое число превратилось в 2010?

9 Анализ с конца

166. Клетки доски 8×8 раскрашены в шахматном порядке. Одним ходом разрешается перекрасить любую клетку в цвет одной из соседних с ней клеток. Можно ли с помощью таких перекрашиваний изменить цвет всех клеток на противоположный? (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

167. С числами можно выполнять следующие операции: умножать на два или произвольным образом переставлять цифры (нельзя только ставить нуль на первое место). Можно ли из 1 получить а) 23; б) 74; в) 68?

168. Над озерами летели Бабки-Ежки. На каждом садилась половина тех из них, кто летел, и еще полБабки-Ежки, остальные летели дальше. Все сели на 7 озерах. Сколько было Бабок-Ежек?

10 Принцип крайнего

169. Можно ли числа $1, 2, 3, \ldots, 20$ так расставить в вершинах и серединах ребер куба, чтобы каждое число, стоящее в середине ребра, равнялось полусумме чисел на концах этого ребра?

170. Двенадцать волейбольных команд сыграли турнир в один круг (каждая сыграла с каждой один раз). Обязательно ли найдутся такие три команды, что каждая из девяти оставшихся команд проиграла хотя бы одной из этих трех?

171. Можно ли некоторые клетки белой доски 9×9 покрасить в черный цвет так, чтобы каждая клетка (как белая, так и черная) граничила по стороне ровно с двумя черными клетками?

172. Можно ли некоторые клетки белой доски 9×9 покрасить в черный цвет так, чтобы каждая клетка (как белая, так и черная) граничила по стороне с нечетным числом черных клеток?

173. В олимпиаде, состоящей из 6 задач, участвуют 200 школьников. Известно, что каждую задачу решили хотя бы 120 школьников. Докажите, что можно выбрать двух школьников таким образом, чтобы каждую задачу решил кто-либо из этой пары.

174. На физическом кружке учитель поставил следующий эксперимент. Он разложил на чашечные весы 16 гирек массами $1, 2, 3, \ldots, 16$ грамм так, что одна из чаш перевесила. Пятнадцать учеников по очереди выходили из класса и забирали с собой по одной гирьке, причем после выхода каждого ученика весы меняли свое положение и перевешивала противоположная чаша весов. Какая гирька могла остаться на весах?

11 Подсчёт двумя способами

175. В прямоугольной таблице 8 столбцов, сумма в каждом столбце равна 10, а в каждой строке – 20. Сколько в таблице строк?

176. Можно ли пронумеровать ребра куба числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров ребер, которые в ней сходятся, была одинаковой?

177. Крепость имеет форму квадрата, на сторонах которого расположено 12 башен. Может ли так оказаться, что на каждой стороне ровно а) 5; б) 7 башен?

178. Ксения Сергеевна сложила в стопку несколько треугольников, в углах каждого из которых написаны числа 1, 2 и 3. Может ли сумма чисел в каждом углу стопки оказаться равной 55?

179. Григорий и Вася часто играют между собой, и записывают все результаты. Оказалось, что за каждые два месяца подряд в 2017 году Григорий в сумме чаще выигрывал, чем проигрывал. а) Может ли случиться, что в сумме за весь год чаще выигрывал Вася? б) Может ли случиться, что в сумме за первые 11 месяцев года чаще выигрывал Вася?

180. Можно ли вписать в клетки доски 8×8 различные числа от 1 до 64 так, чтобы в любом квадратике 2×2 сумма чисел была равна 120?

181. В квадрате 8×8 расставили числа от 1 до 64. Могло ли так получится, что сумма чисел в каждом прямоугольнике 1×4 а) делится на 3, б) нечётна?

182. На сторонах шестиугольника было записано шесть чисел, а в каждой вершине — число, равное сумме двух чисел на смежных с ней сторонах. Затем все числа на сторонах и одно число в вершине стерли. Можно ли восстановить число, стоявшее в вершине?

183. Когда встречаются двое коротышек из Цветочного города, то один дарит другому василек, а второй в ответ две ромашки. Могло ли случиться так, что за день каждый из 100 жителей города подарил ровно 10 цветков?

12 Разные задачи

184. Пёс и кот одновременно схватили зубами батон колбасы с разных сторон. Если пёс откусит свой кусок и убежит, коту достанется на 300 г больше, чем псу. Если кот откусит свой кусок и убежит, псу достанется на 500 г больше, чем коту. Сколько колбасы останется, если оба откусят свои куски и убегут?

185. В порядке возрастания весов лежат несколько мешков. Есть чашечные весы без гирь. За какое наименьшее число взвешиваний кладовщик Васильич может проверить, что любая пара мешков тяжелее любого другого мешка?

186. Старый гном разложил свои сокровища в 3 цветных сундука, стоящих у стены: в один – драгоценные камни, в другой – золотые монеты, а в третий –

магические книги. Он помнит, что 1) красный сундук правее, чем драгоценные камни; 2) магические книги правее, чем красный сундук. В каком сундуке лежат магические книги, если зеленый сундук стоит левее, чем синий?

187. Винни-Пух и Тигра соревновались в лазании по дереву вверх и обратно. Винни-Пух залез и спустился с одной и той же скоростью. Тигра залез вдвое быстрее, а спустился вдвое медленнее Винни-Пуха. Кто финишировал первым?

188. Хулиган Вася однажды покатался в лифте 20-этажного дома, после этого в нем стали работать только две кнопки: «+5» (при нажатии на эту кнопку лифт поднимается на 5 этажей вверх), если это возможно, и «-7» (при нажатии на нее лифт опускается на 7 этажей вниз). Можно ли, пользуясь таким лифтом, попасть а) с первого этажа на второй? б) со второго этажа на первый? в) А можно ли вообще пользоваться этим лифтом, то есть позволяет ли он добираться с любого этажа на любой другой?

189. Остров Ваал населен вегетарианцами, которые всегда говорят правду, и каннибалами, которые всегда лгут.
а) Островитянин А в присутствии другого островитянина В говорит: «По крайней мере один из нас — каннибал». Кто такой А и кто такой В?
б) Встретились несколько аборигенов, и каждый из них заявил всем остальным: «Вы все — каннибалы». Сколько вегетарианцев могло быть среди этих аборигенов?

190. На шахматной доске стоят 8 ладей, причем ни одна из них не бьет ни одну из других. Хулиган Вася взял острый ножик и разрезал доску на четыре квадрата 4×4. Докажите, что в левый-верхний квадрат 4×4 попало столько же ладей, сколько в правый нижний квадрат 4×4.

191. Три гнома Эй, Ай и Ой вышли на прогулку в красной, зеленой и синей рубашках. Туфли на них были таких же цветов. У Эя цвет рубашки и туфель совпадал. У Оя ни туфли, ни рубашка не были красными. Ай был в зеленых туфлях, а в рубашке другого цвета. Как были одеты гномы?

192. Клетки доски 11×11 покрашены в белый цвет. Разрешается выбрать любые четыре белые клетки, расположенные в вершинах квадрата со сторонами, параллельными сторонам доски, и две из этих клеток, расположенные по диагонали, перекрасить в черный цвет. Какое наибольшее число черных клеток удастся получить при помощи таких операций?

193. Аделина, Алёна и Вася несколько раз бежали наперегонки. После каждого забега прибежавший первым получал три очка, вторым — два очка, а третьим — одно очко. По итогам всех забегов ребята получили поровну очков. Известно, что Вася прибегал раньше Аделины 17 раз, а раньше Алёны 12 раз. Сколько было забегов?

194. В целом числе без нулей каждая цифра, кроме первых двух, больше хотя бы одной из двух предыдущих. Какое максимальное количество цифр в нем может быть?

195. За столом сидели 5 мальчиков и 6 девочек, а на столе на тарелке лежало несколько булочек. Каждая из девочек дала по булочке с тарелки каждому знакомому мальчику. Затем каждый мальчик дал по булочке с тарелки каждой незнакомой ему девочке. После этого тарелка опустела. Сколько было булочек?

196. Назовем число n сбалансированным, если в десятичной записи чисел 1, 2, …, n каждая цифра суммарно встречается четное число раз. Существует ли стозначное сбалансированное число?

197. Перед Васей положили на два стола монеты на сумму 2014 рублей. Ему можно перевернуть все монеты на одном из столов и взять с обоих столов все монеты, лежащие орлом вверх. Он перевернул монеты на левом столе, и ему досталось 1000 рублей. А сколько денег досталось бы Васе, если бы он перевернул монеты на правом столе? Ответ объясните.

198. Сумма нескольких натуральных слагаемых равна 2014. Докажите, что в записи этого равенства какая-то цифра встретилась более одного раза.

199. Квадрат разбит прямыми на 25 одинаковых квадратиков – клеток. В некоторых клетках нарисована одна из диагоналей так, что никакие две нарисованные диагонали не имеют общей точки (даже общего конца). Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?

200. Город называется большим северным, если по отношению к любому другому городу он либо больше, либо севернее. Аналогично определяется маленький южный город. В Тридевятом царстве все города, кроме Задворска, являются и большими северными и малыми южными одновременно. Докажите, что Задворск -— тоже большой северный и при этом также малый южный город.

201. На шахматной доске 8×8 стоит 50 пешек. Разрешается выбрать квадрат 2×2, в котором стоит единственная пешка, и снять ее. Докажите, что не удастся снять все пешки.

202. На шахматной доске расставлены ладьи, так чтобы каждую ладью бьют не более трёх других. Найти наибольшее количество ладей.

203. На русско-французской встрече не было представителей других стран. Суммарное количество денег у французов оказалось больше суммарного количества денег у русских, и суммарное количество денег у женщин оказалось больше суммарного количества денег у мужчин. Обязательно ли на встрече была француженка?

204. Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих 1000, можно выбрать, чтобы ни одно из этих чисел не делилось на разность никаких двух других?

205. Ковбой Джо зашел в бар и попросил у бармена бутылку виски за 3 доллара, трубку за 6 долларов, три пачки табака и 9 коробок непромокаемых спичек, цену которых он не знал. Бармен потребовал 11 долларов 80 центов, на что Джо вытащил револьвер. Бармен сосчитал снова и исправил ошибку. Как Джо догадался, что бармен пытался его обсчитать?

206. Коридор длины 6 м покрыт тремя трёхметровыми ковровыми дорожками, причем нигде дорожки не лежат в три слоя. Докажите, что какие-то две из них перекрываются не меньше, чем на 1,5 м.

207. В 20 кошельках лежат по 20 монет. Во всех кошельках монеты настоящие, а в одном — фальшивые. Все настоящие монеты весят по 50 г, а фальшивые — по 49 г. Как за одно взвешивание на электронных весах определить кошелек с фальшивыми монетами?

208. Задумайте любое число, не равное нулю. Прибавьте к нему 3. Результат умножьте на 4, потом прибавьте задуманное число, умножьте на 2, вычтите 24 и разделите на задуманное число. У Вас получилось 10. В чём секрет?

209. На шахматной доске стоят 10 шахматных фигур – слоны и ладьи – не бьющие друг друга. Какое наименьшее количество слонов может быть среди них?