Чередующиеся цепи

Определение 1. *Паросочетанием* графа называется множество ребер графа без общих вершин.

Определение 2. Для данного паросочетания *чередующейся цепью* называется путь, в котором чередуются принадлежащие и не принадлежащие паросочетанию ребра, причем крайние вершины пути не принадлежат ребрам паросочетания.

Задача 1. а) Есть два паросочетания M_1 и M_2, причём рёбер в M_1 меньше, чем в M_2. Докажите, что для паросочетания M_1 есть чередующаяся цепь. б) Докажите, что паросочетание максимально тогда и только тогда, когда нет ни одной чередующейся цепи.

Задача 2. Дан граф с mn рёбрами ребра которого раскрашены в n цветов, причем ни какая вершина не имеет два ребра одинакового цвета. Докажите, что можно перекрасить эти рёбра так, что рёбер всех цветов станет поровну и по–прежнему ни от какой вершины не отходит два ребра одного цвета.

Задача 3. 100 человек устраиваются работать на 100 различных вакантных мест. Каждый из двух агентов по трудоустройству предложил каждому из этих 100 человек одно определенное место, причем разным людям - разные места. Каждый из 100 претендентов принял одно из двух предложений, и оказалось, что все места заполнены. Докажите, что если бы каждый принял другое предложение, все места тоже оказались бы заполненными.

Задача 4. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: «Я могу одновременно женить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!». Вторая сваха говорит: «А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!». Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: «В таком случае можно сделать и то, и другое одновременно!». Прав ли он?

Задача 5 (лемма Холла). Есть несколько юношей и девушек. Докажите, что все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых тогда и только тогда, когда для любого k любые k юношей знают не менее k девушек.

Указание. Поженим максимальное количество юношей. Допустим, какой-то юноша не женат. Возьмём этого юношу, его знакомых девушек, их мужей, их знакомых девушек и т.д. Докажите, что либо в построенном множестве есть незамужняя девушка и можно поженить по-другому тех же юношей вместе с выбранным, либо для указанного множества юношей не выполнено условие леммы Холла.

Теорема 1 (теорема Брукса). *Пусть G — связный граф, отличный от K_{d+1} (полного графа на $d+1$ вершине). Количество вершин в нём не меньше 3 и степень каждой не больше чем d. Докажите, что это граф можно правильным образом раскрасить в d цветов.*