Производная

1. Многочлен f степени n имеет ровно n действительных корней с учётом кратностей. Докажите, что его производная f' имеет ровно $n-1$ действительный корень с учётом кратностей.

2. Докажите, что непостоянный многочлен начиная с некоторого момента монотонен.

3. Шесть членов команды Фаталии на Международной математической олимпиаде отбираются из 13 кандидатов. На отборочной олимпиаде кандидаты набрали $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ баллов ($a_i \neq a_j$ при $i \neq j$).

Руководитель команды заранее выбрал 6 кандидатов и теперь хочет, чтобы в команду попали именно они. С этой целью он подбирает многочлен $P(x)$ и вычисляет *творческий потенциал* каждого кандидата по формуле $c_i = P(a_i)$. При каком минимальном n он заведомо сможет подобрать такой многочлен $P(x)$ степени не выше n, что творческий потенциал любого из его шести кандидатов окажется строго больше, чем у каждого из семи оставшихся?

4. Многочлен $P(x)$ степени n имеет n различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?

5. У многочлена $P(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_0$ есть n действительных корней, причём коэффициенты $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_j$ положительны. Докажите, что существует такой индекс k ($i \leqslant k \leqslant j$), что $p_i \leqslant \ldots \leqslant p_k \geqslant \ldots \geqslant p_j$.

6. Рассмотрим многочлен $p(x) = \frac{(1-(1-x)^n)^2}{x}$, $n > 1$.
a) Докажите, что производная $p'(x)$ имеет на интервале $(0,1)$ ровно один корень.
b) Докажите, что уравнение $p(x) = p(x^2)$ имеет в интервале $(0,1)$ единственное решение.