Теорема Эрдёша-Гинзбурга-Зива

1. а) Докажите, что среди n целых чисел найдется несколько, сумма которых делится на n.
б) Докажите, что среди ... целых чисел найдется ровно n, сумма которых делится на n.
в) Докажите, что существуют такие $2n-2$ целых числа, что среди них не найдется ровно n чисел, сумма которых делится на n.

Теорема 1 (Эрдёша-Гинзбурга-Зива). *Среди любых $2n-1$ целого числа найдется ровно n чисел, сумма которых делится на n.*

2. Докажите, что теорема ЭГЗ верна для $n = a$ и для $n = b$, то она верна и для $n = ab$.

3. а) Даны числа $x_1, \ldots, x_{2p-1} \in \mathbb{Z}_p$. Найдите, чему равна сумма

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} (x_{i_1} + \ldots + x_{i_p})^{p-1}.$$

б) Докажите теорему ЭГЗ.

Теорема 2 (Теорема Шевале). *Пусть $F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_k(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ многочлены с нулевым свободным членом и $\sum\limits_{i=1}^{k} \deg F_i(x_1, \ldots, x_n) < n$, то система*

$$F_1(x_1, \ldots, x_n) \underset{p}{\equiv} 0, \ldots, F_k(x_1, \ldots, x_n) \underset{p}{\equiv} 0$$

имеет ненулевое решение.

Теорема 3 (Роньяи). *Для простого p среди любых $4p-2$ векторов в $\mathbb{Z}^2$ можно выбрать p, среднее арифметическое которых также принадлежит $\mathbb{Z}^2$.*

Упражнение 1. Докажите, что в теореме Роньяи нельзя обойтись $4p-4$ векторами.

4. Пусть $y_1 = (a_1, b_1), \ldots, y_{3p} = (a_{3p}, b_{3p})$ - целочисленные вектора. Известно, что $\sum\limits_{i=1}^{3p} a_i \underset{p}{\equiv} 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{3p} b_i \underset{p}{\equiv} 0$. Тогда сущестуют $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ такие, что $a_{i_1}+\ldots+a_{i_p} \underset{p}{\equiv} 0$ и $b_{i_1} + \ldots + b_{i_p} \underset{p}{\equiv} 0$.

(*Указание: рассмотрите следующиие многочлены $F_1(x_1, \ldots, x_{3p-1}) = \sum\limits_{i=1}^{3p-1} a_i x^{p-1}$, $F_2(x_1, \ldots, x_{3p-1}) = \sum\limits_{i=1}^{3p-1} b_i x^{p-1}$, $F_3(x_1, \ldots, x_{3p-1}) = \sum\limits_{i=1}^{3p-1} x^{p-1}$.*)

5. Пусть $m = 4p - 2$. Рассмотрим многочлен $F = ((\sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_i)^{p-1} - 1)((\sum\limits_{i=1}^{m} b_i x_i)^{p-1} - 1)((\sum\limits_{i=1}^{m} x_i)^{p-1} - 1)(\sigma_p(x_1, \ldots, x_m) - 2)$. В предположениии, что теорема Роньяи неверна для набора векторов $y_1 = (a_1, b_1), \ldots, y_m = (a_m, b_m)$:

а) Найдите значения этого многочлена, когда среди x_i ровно p или $3p$ единиц, остальные 0.

б) Найдите значения этого многочлена, когда среди x_i ровно $2p$ единиц, остальные 0.

в) Найдите значения этого многочлена, когда среди x_i все 0 или 1 и количество единиц не делится на p. г) Найдите многочлен $\mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_m]$ от переменных такой, что степень по каждой переменной не превышает один и его значения на еденичном кубе совпадают со значениями многочлена F.