

## Смотря как посчитать

**Определение 1.** Будем говорить, что задан *граф*, если задано множество его *вершин* и про любую пару различных вершин сказано, связаны они ребром или нет. На рисунке вершины изображаются точками, а ребра отрезками или кривыми.

1. В классе больше 30, но меньше 40 человек. Каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка - с пятью мальчиками. Сколько человек в классе?

2. В стране 101 город, каждый из которых соединен авиалинией как минимум с 50 другими. Докажите, что из каждого города можно добраться в любой другой, сделав не более одной пересадки.

3. Из доски  $4 \times 4$  вырезали все угловые клетки. Можно ли обойти ее ходом коня и вернуться на исходную клетку, побывав на каждой клетке ровно по разу?

4. Докажите, что число  $43^{23} + 23^{43}$  делится а) на 6, б) на 66.

5. В турнире по настольному теннису участвует 25 спортсменов. Когда партия выдается особенно скучной, главный судья перестает следить за игрой - вместо этого он подсчитывает число игр, сыгранных каждым из 25 теннисистов, и записывает эти числа напротив фамилий соответствующих игроков. По прошествии нескольких игр главный судья вдруг замечает, что после каждой скучной партии напротив фамилий игроков появлялось хотя бы одно четное число. Совпадение ли это?

6. В каждой клетке таблицы  $10 \times 10$  записано по числу так, что каждое число есть среднее арифметическое чисел в соседних по стороне клетках. Сколько различных значений может встретиться среди этих чисел?

7. Докажите, что среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

8. Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.

9. В школе у каждого двух семиклассников есть ровно пять общих друзей. Докажите, что количество пар друзей делится на 3.

10. Проводится чемпионат по футболу среди 20 команд. В первый день все команды сыграли по одной игре, во второй день тоже. Докажите, что после второго дня можно указать 10 команд, среди которых нет двух, уже сыгравших друг с другом.