Немного о множествах

Пусть множество содержит ровно n различных элементов.

Определение 1. Система различных непустых подмножеств C_1, C_2, ..., C_k этого множества называется цепью, если $C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_k$. При $n = k$ цепь называется полной.

Определение 2. Система различных непустых подмножеств этого множества называется антицепью, если ни одно из этих подмножеств не содержится в другом.

1. а) Сколько полных цепей существует в n — элементном множестве?
б) Подмножество множества содержит k элементов. Сколько существует полных цепей, содержащих подмножество ?
в) В n-элементном множестве выделили несколько подмножеств, содержащих x, y, ..., z элементов соответственно. Известно, что ни одно из этих множеств не содержится в другом. Докажите неравенство

$$\frac{1}{C_n^x} + \frac{1}{C_n^y} + \frac{1}{C_n^z} \leqslant 1.$$

2 (Теорема Шпернера об антицепях). Самая большая антицепь в n-элементном множестве содержит $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ подмножеств.

Определение 3. Рассмотрим произвольную циклическую перестановку элементов множества . Будем говорить, что подмножество входит в эту перестановку, если его элементы, взятые в некотором порядке, подряд встречаются в этой перестановке.

Упражнение 1. а) Сколько существует циклических перестановок на n-элементном множестве?
б) Сколько существует циклических перестановок на n-элементном множестве, в которые входит данное k-элементное множество?

3. Пусть $n \geqslant 2k$. Пусть в некоторую циклическую перестановку входят t различных k-элементных подмножеств, любые два из которых пересекаются. Тогда $t \leqslant k$.

4 (Теорема Эрдёша-Радо). Пусть $n \geqslant 2k$. Тогда наибольшее количество k-элементных подмножеств n-элементного множества , любые два из которых пересекаются, равно C_{n-1}^{k-1}.

5. Даны 1985 множеств, каждое из которых содержит 45 элементов. Известно, что объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех множеств?

6. Даны n подмножеств некоторого множества . Разрешается брать пересечения и объединения имеющихся множеств, а также – дополнять их до множества . Найдите наибольшее возможное число подмножеств, которые можно получить таким образом (рекомендация: внимательно разберите случаи $n = 1$, $n = 2$).