

Дискретная непрерывность и ко

1. В языке жителей Банановой Республики количество слов превышает количество букв в их алфавите. Докажите, что найдется такое натуральное k , для которого можно выбрать k различных слов, в записи которых используется ровно k различных букв.

2. Журнал "Юный диверсант" выходит нерегулярно — два или три раза в год. На обложке стоит номер журнала и год выпуска: №1 — 2001, №2 — 2001, №3 — 2002, Докажите, что если редакцию не поймают, то рано или поздно выйдет номер, где два числа на обложке совпадут

3. Докажите, что при любом натуральном n , число $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n \equiv 0 \pmod{7}$ (что простыми словами вы доказали?).

4. В ряд выложено 50 белых и 50 черных шариков. Самый левый и самый правый шарики — белые. Докажите, что можно отсчитать несколько шариков, начиная с левого, так, чтобы среди них оказалось поровну черных и белых.

5. В ряд были выписаны натуральные числа 1, 2, 3, ..., 2004. Их выписали в другом порядке: сначала все кратные 2 по возрастанию (то есть 2, 4, 6...), затем все из оставшихся кратные 3 по возрастанию, затем — оставшиеся кратные 5, потом — кратные 7 и т.д. На последнее место записали число 1. Докажите, есть как минимум два числа, которые не сдвинулись со своего места.

6. На плоскости отмечены 10000 точек. Докажите, что найдется не проходящая через эти точки прямая, по одну сторону которой лежит ровно 2010 отмеченных точек.

7. Сколько решений имеет уравнение $x + y + z + t = 30, x > 4$ в натуральных числах?