

Разнойбой

1. В клетчатом квадрате 10×10 отмечены центры всех единичных квадратиков (всего 100 точек). Какое наименьшее число прямых, не параллельных сторонам квадрата, нужно провести, чтобы вычеркнуть все отмеченные точки?

2. Дан треугольник с площадью S . Из его медиан построен другой треугольник, затем из медиан полученного треугольника построен третий треугольник и т. д. до бесконечности. Найдите сумму площадей всех треугольников этой последовательности.

3. Докажите с помощью проективного преобразования, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанной окружностью, пересекаются в одной точке.

4. Пусть $x_0 \in \mathbb{C}$ — корень многочлена с целыми коэффициентами. Многочлен $g \in \mathbb{Z}[x]$ называется минимальным многочленом для x_0 , если x_0 его корень и g имеет наименьшую степень среди всех таких многочленов из $\mathbb{Z}[x]$. Докажите, что g а) неприводим; б) не имеет кратных корней.

5. В углу шахматной доски размером $m \times n$ полей стоит ладья. Двое по очереди передвигают ее по вертикали или по горизонтали на любое число полей; при этом не разрешается, чтобы ладья стала на поле или прошла через поле, на котором она уже побывала (или через которое уже проходила). Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто из играющих может обеспечить себе победу: начинающий или его партнер, и как ему следует играть?

6. Окружность пересекает прямые BC , CA , AB в точках A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , C_1 и C_2 . Пусть l_a — прямая, соединяющая точки пересечения прямых BB_1 и CC_2 , BB_2 и CC_1 ; прямые l_b и l_c определяются аналогично. Докажите, что прямые l_a , l_b и l_c пересекаются в одной точке (или параллельны).