# Разнобой с $e$

**1.** Пусть $a_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

а) Докажите, что сущуествует предел $e = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

б) Докажите, что $e < 3$.

в) Пусть $b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Докажите, что $b_n < a_n$

г) Докажите, что существует предел $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

д) Докажите, что $b \leqslant e$.

е) Докажите, что $b = e$.

**2.** Докажите неравенства:

а) $\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$;

б) $\left(\frac{n}{4}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$ при $n > 1$;

в) $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n$ при $n > 6$

**3.** Даны положительные числа $a_1$, $a_2$, …, $a_n$. Известно, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \frac{1}{2}$. Докажите, что $(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \cdots \cdot (1 + a_n) < 2$.

**4.** Докажите, что число $e$ иррационально.