

Сравнения и Ко

1. Докажите следующее свойство чисел Фибоначчи

$$F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

2. а) Докажите, что для любого простого p и целых чисел a и b верно, что $(a + b)^p \equiv a^p + b^p$.

б) Докажите с помощью индукции, что для любого простого p и целого a верно, что $a^p \equiv a$.

3. Докажите, что для любого четного n число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323.

4. Может ли $5^n - 1$ делиться на $4^n - 1$ при натуральном n ?

5. Из доски 8×8 по клеточкам вырезали 12 прямоугольников 1×2 . Обязательно ли из оставшейся части можно «по клеточкам» вырезать прямоугольник 1×3 ?

6. а) Дано простое число p и целое число a такое, что $(a, p) = 1$. Докажите, что существует целое число b такое, что $ab \equiv 1$.

б) Найдите все такие x , что $x^2 \equiv 1$ для простого p . в) Найдите, какой остаток даёт число $(p - 1)!$ при делении на простое число p .

г) Теорема Вильсона. Целое число p является простым тогда и только тогда, когда $(p - 1)! \equiv -1$.