

Неравенство Караматы

1 (Лемма о 4-х точках). Пусть f — выпуклая функция и $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ ($y_1 \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3$), то $f(y_1) + f(y_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.

Определение 1. Даны два упорядоченных набора $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$. Будем говорить, что набор a мажорирует набор b ($a \succcurlyeq b$), если

$$\begin{cases} a_1 \geq b_1 \\ a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \\ \dots \\ a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n \end{cases}$$

Определение 2. Раздвиганием набора (x_1, \dots, x_n) будем называть одновременное увеличение x_i и уменьшение x_j с сохранением суммы ($x_i \geq x_j$)

2 (Карамата, Харди, Пойа, Литлвуд). От набора $b = (b_1, \dots, b_n)$ с помощью последовательных раздвиганий можно перейти к набору $a = (a_1, \dots, a_n)$ тогда и только тогда, когда $a \succcurlyeq b$.

3 (Неравенство Караматы). Пусть f выпуклая на интервале $(a; b)$ функция, тогда для любых двух наборов $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ принадлежащих данному интервалу с условием $a \succcurlyeq b$ верно, что

$$f(a_1) + \dots + f(a_n) \geq f(b_1) + \dots + f(b_n).$$

4. Выведете из неравенства Караматы неравенство Йенсена а) с одинаковыми весами; б) произвольными весами.

5. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}]$. Докажите, что

$$\cos(2x_1 - x_2) + \dots + \cos(2x_n - x_1) \leq \cos x_1 + \dots + \cos x_n.$$

6. Для положительных чисел a_1, \dots, a_n докажите неравенство:

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \dots + \frac{a_n^3}{a_1} \geq a_1^2 + \dots + a_n^2.$$

(Указание: сделайте замену $x_i = \ln a_i$.)

7. Докажите неравенство для положительных a, b, c :

$$\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} \geq \sqrt{\frac{ab}{c^2}} + \sqrt{\frac{bc}{a^2}} + \sqrt{\frac{ca}{b^2}}$$

8. Для положительных чисел a_1, \dots, a_n докажите неравенство:

$$(1 + \frac{a_1^2}{a_2})(1 + \frac{a_2^2}{a_3}) \dots (1 + \frac{a_n^2}{a_1}) \geq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n).$$

9. Пусть a, b, c положительные числа, докажите неравенство:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + b^2c + c^2a + a^2c + b^2a + c^2b.$$

10. Сформулируйте и докажите весовое неравенство Караматы.