

Разнобой-2

1. Даны числа a, b, c . Известно, что для любого x верно неравенство $ax^2 + bx + c \geq bx^2 + cx + a \geq cx^2 + ax + b$. Докажите, что $a = b = c$.
2. Числа от 1 до 100 выписали в строку в некотором порядке. Докажите, что найдутся два рядом стоящих числа, сумма которых больше 50, но меньше 150.
3. Дан многочлен а) $f \in \mathbb{R}[x]$; б) $f \in \mathbb{C}[x]$. Можно ли найти все целые его корни?
4. Дан треугольник ABC . Через точку X , лежащую внутри него, проводятся отрезок c_x , параллельный AB с концами на сторонах AC и BC , и отрезок b_x параллельный AC с концами на сторонах AB и CB . Докажите, что все точки X , для которых длины отрезков b_x и c_x равны, лежат на одной прямой.
5. Натуральное число n обладает следующим свойством: для любых натуральных a и b число $(a + b)^n - a^n - b^n$ делится на n . Докажите, что $a^n - a$ делится на n для любого натурального a .
6. Дан треугольник ABC ; точка J является центром вневписанной окружности, соответствующей вершине A . Эта вневписанная окружность касается отрезка BC в точке M , прямых AB и AC — в точках K и L соответственно. Прямые LM и BJ пересекаются в точке F , прямые KM и CJ пересекаются в точке G . Пусть S — точка пересечения прямых AF и BC , T — точка пересечения прямых AG и BC . Докажите, что точка M является серединой отрезка ST .