

Возвращение к чередующимся цепям

Определение 1. Паросочетанием графа называется множество ребер графа без общих вершин.

Определение 2. Для данного паросочетания *чередующейся цепью* называется путь, в котором чередуются принадлежащие и не принадлежащие паросочетанию ребра, причем крайние вершины пути не принадлежат ребрам паросочетания.

Факт. а) Есть два паросочетания M_1 и M_2 , причём рёбер в M_1 меньше, чем в M_2 . Докажите, что для паросочетания M_1 есть чередующаяся цепь.
б) Докажите, что паросочетание максимально тогда и только тогда, когда нет ни одной чередующейся цепи.

Факт (лемма Холла). Есть несколько юношей и девушек. Докажите, что все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых тогда и только тогда, когда для любого k любые k юношей знают не менее k девушек.

Теорема 1 (теорема Брукса). Пусть G — связный граф, отличный от K_{d+1} (полного графа на $d + 1$ вершине). Количество вершин в нём не меньше 3 и степень каждой не больше чем d . Докажите, что этот граф можно правильным образом раскрасить в d цветов.

Задача 1. 100 человек устраиваются работать на 100 различных вакантных мест. Каждый из двух агентов по трудоустройству предложил каждому из этих 100 человек одно определенное место, причем разным людям — разные места. Каждый из 100 претендентов принял одно из двух предложений, и оказалось, что все места заполнены. Докажите, что если бы каждый принял другое предложение, все места тоже оказались бы заполненными.

Задача 2. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: «Я могу одновременно женить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!». Вторая сваха говорит: «А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!». Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: «В таком случае можно сделать и то, и другое одновременно!». Прав ли он?

Задача 3. В стране провели анкету, в которой требовалось назвать своего любимого писателя, художника и композитора. Оказалось, что каждый упомянутый хоть раз деятель искусств является любимым ровно k людьми. Докажите, что всех опрошенных можно разделить на $3k - 2$

Задача 4. В каждой строке и в каждом столбце доски 20×20 стоят по три ладьи. Докажите, что можно выбрать 20 ладей, не бьющих друг друга.