Код Прюфера

Определение 1. Пометим вершины дерева целыми числами. Будем кодировать дерево последовательностью чисел. Первым элементом кода Прюфера будет номер вершины, смежной с минимальным по номеру листом. После добавления в код Прюфера первого элемента, лист с минимальным номером удаляется из дерева. Далее снова нужно найти лист с минимальным номером и вписать в код Прюфера номер вершины, смежной с ним, после чего удалить этот лист из дерева, и так далее, пока в дереве не останется только две вершины. На этом построение кода Прюфера заканчивается.

Упражнение 1. Восстановите по коду дерево $(3, 5, 6, 2, 4)$.

1. Номер вершины v встречается в коде Прюфера тогда и только тогда, когда v не является листом, причём встречается этот номер к коде дерева в точности $\deg v - 1$ раз.

2. а) Сколько существует помеченных графов на n вершинах? б) Сколько существует помеченных деревьев на n вершинах?

3. Дан набор из N различных помеченных графов на n вершинах. Докажите, что в нём найдутся не менее $N/n!$ неизоморфных графов(графы называюится изоморфными, если можно перенумеровать вершины одного, чтобы получился другой).

4. а) Докажите, что помеченных уницикличеких графов на n вершинах не больше чем $n^{n-2}C_n^2/3$ и не меньше чем $n^{n-2}C_n^2/100$(*унициклический граф — граф, у которого один цикл*).
б) Докажите формулу для числа всех помесенных уницикличеких графов на n вершинах:

$$u_n = \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n} C_n^k k!(n)^{n-k-1}$$

5. Покажите, что число помеченных графов на n вершинах без изолированных вершин ровно

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k 2^{C_{n-k}^2}$$

6. Каких графов больше: тех, у кого есть изолированные вершины или тех, у которых её нет?

7. Докажите, что помеченных лесов на n вершинах, в которых ровно r деревьев, каждое из которых содержит ровно по одной вершине из множества $\{1, 2, \dots, r\}$, в точности rn^{n-1-r}.

8. Обозначим за T_n — число помеченных деревьев на n вершинах. Докажите, что верно следующее тождество

$$2(n-1)T_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k k(n-k)T_{n-k}T_k$$