

Пришёл, увидел, отразил

1. Докажите, что если в треугольнике ABC стороны AB и BC равны, а $\angle B = 30^\circ$, то выполнено неравенство $AB < 2AC$.

2. По одну сторону от прямолинейной дороги находятся две деревни.

а) В каком месте дороге следует поставить автобусную остановку так, чтобы сумма расстояний от остановки до деревень была минимальной?

б) В каком месте вдоль дороги следует поместить двухметровую платформу, чтобы сумма расстояний от деревень до различных концов платформы была минимальной?

(Считаем, что дорога - это прямая, деревни и остановка - точки, платформа - отрезок).

3. Дан угол и точка внутри него, которая отражается относительно сторон угла, а получившиеся точки соединяются отрезком. Докажите, что часть этого отрезка, отсекаемая углом, составляет меньше половины его длины.

4. а) В правильный треугольник впишите треугольник наименьшего периметра так, чтобы его вершины попали на разные стороны, а одна - в середину стороны.

б) Внутри угла лежат точки A и D . Соедините их ломаной $ABCD$ наименьшей длины с точками B и C на разных сторонах угла.

5. На медиане BB' треугольника ABC отметили точку P так, что $AP = BC$. Прямая AP пересекает отрезок BC в точке D . Докажите, что $BD = PD$.

6. Барон Мюнхгаузен утверждает, что пустил шар от борта бильярда, имеющего форму правильного треугольника, так, что тот, отражаясь от бортов, прошел через некоторую точку три раза в трех различных направлениях и вернулся в исходную точку. Могут ли слова барона быть правдой? (Отражение шара от борта происходит по закону "угол падения равен углу отражения".)

7. Постройте ромб так, чтобы одна из его диагоналей была равна данному отрезку r и лежала на данной прямой a , а две другие вершины лежали на данных прямых b и c .

8. В треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC , провели биссектрису AA' , и при этом оказалось, что $AC = A'B$. Докажите, что $AC = AA'$.