Аффинная геометрия

Определение 1. Преобразование плоскости f называется *аффинным*, если оно переводит равные вектора в равные, и линейно на множестве свободных векторов т.е.

$$f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}), \quad f(k\vec{a}) = kf(\vec{a})$$

Замечание. а) В определении подразумевается, что преобразование плоскости является биекцией.
б) Для описания аффинного преобразования удобно выбрать произвольную точку O и базис $\vec{a}, \vec{b}$ и указать их образы $O', \vec{a}', \vec{b}'$. Координаты любой точки в системе $O\vec{a}\vec{b}$ совпадают с координатами образа этой точки в системе $O'\vec{a}'\vec{b}'$, т.е. если $\overrightarrow{OC} = x\vec{a} + y\vec{b}$, то $\overrightarrow{O'C'} = x\vec{a}' + y\vec{b}'$.

Свойства аффинных преобразований:

- Преобразование обратное к аффинному, также является аффинным.
- Прямые переходят в прямые.
- Параллельные прямые переходят в параллельные прямые; пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся прямые.
- Сохраняются отношения длин отрезков, лежащих на одной прямой или параллельных прямых (в частности, середина отрезка переходит в середину отрезка).
- Для любых треугольников ABC и $A'B'C'$, найдется единственное аффинное преобразование, переводящее один треугольник в другой так, что A переходит в A', B — в B', а C — в C' (т.е. треугольник аффинно эквивалентен любому другому, например, правильному).

Определение 2. Две фигуры называются аффинно эквивалентными, если существует аффинное преобразование, переводящее одну в другую.

1. Докажите, что:
а) любой параллелограмм аффинно эквивалентен квадрату;
б) любая трапеция аффинно эквивалентна некоторой равнобедренной трапеции (но не всем равнобедренным трапециям);
в) любые два четырехугольника аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда точка пересечения диагоналей делит диагонали в соответственно равных отношениях.

2. Докажите, что в любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения боковых сторон лежат на одной прямой.

3. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими прямыми, пересекаются в одной точке.