

## Ходим по кругу

1. Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, и из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая, и длина периода не больше 10000.
2. Жители страны Пуп Мира очень гордятся тем, что у них президентская форма правления: каждые 4 года президентом избирается либо республиканец, либо демократ. ПупМировские социологи обнаружили строгий закон, по которому определяется партийность очередного президента. Хотя этот закон засекречен «Актом о демократии», в печать просочились сведения, что партийность очередного президента полностью определяется партийностью предыдущих десяти. Докажите, что последовательность партийностей президентов заикнется, и оцените как-нибудь длину периода.
3. В тридесятom королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь, Любящий Разнообразие, выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что его маршрут заикнется.
4. Петя написал программу на языке Удав для своего компьютера, которая должна печатать на принтере цифры десятичной записи числа  $\sqrt{2}$ . Докажите, что хоть Петя и крутой прогрессив, но его программа рано или поздно напечатает не то, что требуется.
5. Следующий член последовательности натуральных чисел равен последней цифре произведения двух предыдущих. Докажите что последовательность а) периодична; б) с периодом длины не больше 26; в) меньше 17.
6. Бесконечная последовательность чисел  $x_n$  определяется условиями:  $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$ , причем  $0 \leq x_1 \leq 1$ . Докажите, что последовательность, начиная с некоторого места, периодическая а) в том б) и только в том случае, если  $x_1$  рационально.
7. Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что всегда можно вернуть его в первоначальное состояние, выполнив эту комбинацию еще несколько раз.