

Немножко алгебры

1. Чему равна следующая сумма?

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2020}.$$

2. Решите в целых числах уравнение $(2x + y)(5x + 3y) = 7$.

3. Какое наибольшее значение может принимать выражение $\frac{1}{a + \frac{2019}{b + \frac{1}{c}}}$, где a, b и c — попарно различные ненулевые цифры?

4. Произведение пяти чисел не было равно нулю. Вася уменьшил каждое из этих чисел на единицу, перемножил и заметил, что произведение не изменилось. Не ошибся ли Вася?

5. Может ли число

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

быть целым при $n > 1$?

6. Докажите, что если для чисел a, b и c выполняются неравенства $|a - b| \geq |c|$, $|b - c| \geq |a|$, $|c - a| \geq |b|$, то одно из этих чисел равно сумме двух других.

7. Каждой паре чисел a и b поставлено в соответствие некоторое число $a \star b$. Найдите $2019 \star 2020$, если известно, что для любых трех чисел a, b и c выполнены тождества: $a \star a = 0$ и $a \star (b \star c) = (a \star b) + c$.