

По умолчанию мы находим функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Когда ты видишь ФУРУ, то спроси себя:

Нет ли хорошей замены?

1. $f(3x + 5) = x^2 + 1$.

2. $f(x^2) = x + 2$.

Не пишется ли «обычная» система уравнений?

3. $x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$.

Нельзя ли разделить переменные: $A(x) = B(y)$?

4. $f(x) - f(y) = x^3 - y^3$?

Нельзя ли отловить нарушение симметрии?

5. $f(x + y) = x + f(y)$.

ли посчитать $f(0), f(1), f(2), f(-1)$ и т.п и это использовать?

6. $f(x)f(y) = f(xy) + x + y$.

является ли функция инъективной?

7. Докажите инъективность функции с условием $f(f(x) + f(y)) = x + y$.

8. Найдите все инъективные функции со свойством $f(x + f(y)) = f(f(x)) + f(y)$.

Не является ли функция сюръективной?

9. Докажите сюръективность функции с условием $f(f(x) + f(y)) = x + y$.

10. $xf(y) + yf(x) = 0$.

11. $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ при $x \neq 0$.

12. $f(1/x) + \frac{1}{x}f(-x) = x$ при $x \neq 0$.

13. $f(f(x + y)) = x + f(y)$.

14. $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$.

15. $f(x - y) = f(x + y)f(y)$.

Для решивших всё предыдущее

16. $f(x^2 - y^2) = x^2 - f(y^2)$.

17. $f(x + y) - f(x - y) = 4xy$. Указание: естественна замена.

18. $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$. Указание: не теряем случаи!

19. $f(x + y + f(y)) = f(f(x)) + 2y$. Указание: сначала докажете инъективность.