

Геометрическая интерпретация

1. Пусть $a, b, c, A, B, C > 0$ и $a + A = b + B = c + C = k$. Докажите, что $aB + bC + cA < k^2$.

2. Докажите, что если $a, b, c > 0$, то $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$. Когда достигается равенство?

3. Докажите, что

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + \dots + b_n)^2}.$$

Когда достигается равенство?

4. Пусть $|x_1|, |x_2| \leq 1$. Докажите неравенство

$$\sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2} \leq 2\sqrt{1 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}.$$

Когда достигается равенство?

5. а) Докажите, что среди любых четырех чисел найдутся два числа x, y , такие что $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 1$.

б) Докажите, что среди любых шести чисел найдутся два числа x, y , такие что $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

6. Если $0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$, то

$$0 \leq x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + x_3(1 - x_4) + x_4(1 - x_1) \leq 2.$$

7. Докажите, что

$$\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2} + \sqrt{1 - x_3^2 - y_3^2} \leq 3\sqrt{1 - \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2 - \left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2}.$$

Когда достигается равенство?

8. Найдите минимум выражения $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 2} + \sqrt{z^2 + 3} + \sqrt{t^2 + 4}$ при условии $x + y + z + t = 10$.

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ z = 2y^2 - 1 \\ x = 2z^2 - 1 \end{cases}$$