

ГМТ

Определение 1. Геометрическое место точек (ГМТ), обладающих данным свойством — это фигура, состоящая из тех и только тех точек, которые обладают этим свойством.

Факт. ГМТ, которые равноудалены от двух данных точек A и B — серединный перпендикуляр к отрезку AB .

Факт. ГМТ, равноудаленных от сторон данного угла и лежащих внутри данного угла, есть биссектриса данного угла.

Задача 1. а) Найдите ГМТ, равноудаленных от двух данных прямых.
б) Найдите ГМТ, равноудаленных от трёх данных прямых.

Задача 2. Найдите ГМТ, удалённых от данной прямой на данное расстояние d .

Задача 3. Найдите ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом.

Задача 4. Отрок Дементий решил забраться на лестницу, приставленную к стене. Едва он успел добраться до середины, лестница съехала на пол. Какова траектория Дементия до удара об пол?

Задача 5. Пусть O лежит на отрезке AB . Найдите ГМТ M таких, что $\angle MOB = 2\angle MAB$.

Задача 6. Из точки O на прямой Ox выходит 2^{1000} человек. Из них половина идет направо, половина — налево. Через час каждая группа снова делится пополам и половина идет направо, а половина — налево. Такое разделение происходит каждый час. Сколько человек придет к каждой точке этой прямой через 1000 часов после выхода?

Задача 7. Докажите, что $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots = F_n$, где F_n — n -ое число Фибоначчи.

Задача 8. Докажите, что $(C_n^0)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Задача 9. Компьютер печатает числа одно за другим по следующему алгоритму: вначале печатаются три натуральных числа, введенных с клавиатуры (все они больше 100), а затем каждую секунду компьютер складывает три последних напечатанных им числа и печатает полученную сумму. Может ли компьютер напечатать восемь простых чисел подряд?

Задача 10. Решите в целых числах уравнение $6xy - 4x + 9y - 366 = 0$.

Задача 11. Найдите все пары простых p, q , такие что $p^2 + q^3$ и $q^2 + p^3$ точные квадраты.