

Связанные одной целью, скованные одной цепью

1. а) Пусть p — простое число и $(a, p) = 1$. Тогда числа $0, a, 2a, \dots, (p-1)a$ дают разные остатки при делении на p .

б) Пусть $(a, m) = 1$. Докажите, что существует натуральное число n , что $a^n \equiv 1 \pmod{m}$.

2. В шахматном турнире один шахматист заболел и не доиграл свои партии. Всего в турнире было проведено 24 встречи. Сколько всего было шахматистов на турнире, и сколько партий успел сыграть выбывший шахматист?

Определение 1. Путём в G называется такая конечная последовательность рёбер и вершин $S = (A_0, e_0, A_1, e_1, \dots, e_{n-1}, A_n)$, что каждые два соседних ребра e_{i-1} и e_i имеют общую вершину A_i . Путь называется *простым*, если все вершины в нём различны.

Определение 2. Граф называется *связным*, если из любой его вершины существует путь в любую другую вершину.

Определение 3. Часть графа (подграф), состоящая из всех вершин, любые две из которых соединены путём, и всех рёбер, их соединяющих, называется *компонентной связности графа*.

3. Докажите, что если вершинами A и B существует путь, то между ними существует простой путь.

4. Из одной вершины графа существует путь в любую другую вершину графа. Докажите, что граф связан.

5. В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта — ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний — одна, а из всех остальных городов — по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

6. Выбраны 6 различных цветов; требуется раскрасить 6 граней куба, каждую в особый цвет из числа избранных. Сколькими геометрически различными способами можно это сделать? Геометрически различными называются две такие расцветки, которые нельзя совместить одну с другой при помощи вращений куба вокруг его центра.

7. Докажите, что при любом натуральном n число $3^{6n} - 2^{6n}$ делится на 35.

8. Пятизначное число называется неразложимым, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее количество неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

9. В параллели 7-го класса 70 человек. Известно, что среди любых четверых найдется хотя бы один человек, знакомый с тремя остальными. Сколько человек могут знать всех в отряде? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

10. Докажите, что $2n$ -значных чисел, которые состоят из n единиц и n двоек столько же сколько n -значных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, в которых поровну цифр 1 и 2.

Сайт кружка <http://matemax.pythonanywhere.com>