

Разнобой по теории чисел

Задача 1. Докажите, что для каждого натурального n дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима.

Задача 2. Найдите наибольшее натуральное число n , такое, что числа 78, 559, 1151 при делении на n дают одинаковые остатки.

Задача 3. Найдите все пары простых p, q , такие что p^2+q^3 и q^2+p^3 точные квадраты.

Задача 4. Докажите, что из n целых чисел всегда можно выбрать несколько, что их сумма делится на n .

Задача 5. Имеется N целых чисел ($N > 1$). Известно, что каждое из них отличается от произведения всех остальных на число, кратное N . Докажите, что сумма квадратов этих чисел делится на N .

Задача 6. Шайка разбойников отобрала у купца мешок с монетами. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую монету не отложи, оставшиеся монеты можно поделить между разбойниками так, что каждый получит одинаковую сумму. Докажите, что число монет без одной делится на число разбойников в шайке.

Задача 7. Докажите, что произведение k последовательных натуральных чисел делится на $k!$

Задача 8. Натуральные числа a и b таковы, что $a^2 + b \vdots b^2 + a$ и $a + b > 2$. Докажите, что $b^2 + a$ — составное число.