

Полтора инварианты.

1. Имеется семь стаканов с водой: первый стакан заполнен водой наполовину, второй — на треть, третий — на четверть, четвертый — на одну пятую, пятый — на одну восьмую, шестой — на одну девятую, и седьмой — на одну десятую. Разрешается переливать всю воду из одного стакана в другой или переливать воду из одного стакана в другой до тех пор, пока он не заполнится доверху. Может ли после нескольких переливаний какой-нибудь стакан оказаться заполненным а) на одну двенадцатую; б) на одну шестую?

2. На доске записано целое число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и умноженная на 5 прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число 7^{1998} . Может ли после применения нескольких таких операций получиться число 1998^7 ?

3. Квадратный трехчлен $f(x)$ разрешается заменить на один из трехчленов $x^2 f\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ или $(x - 1)^2 f\left(\frac{1}{x - 1}\right)$. Можно ли с помощью таких операций из квадратного трехчлена $x^2 + 4x + 3$ получить трехчлен $x^2 + 10x + 9$?

4. В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

5. Исходно на доске написаны многочлены $x^3 - 3x^2 + 5$ и $x^2 - 4x$. Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, разрешается дописать на неё многочлены $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, где c — произвольная (не обязательно целая) константа. Может ли на доске после нескольких операций появиться ненулевой многочлен вида $x^n - 1$?

6. Имеется таблица $n \times n$, в $n - 1$ клетках которой записаны единицы, а в остальных клетках — нули. С таблицей разрешается проделывать следующую операцию: выбрать клетку, вычесть из числа, стоящего в этой клетке, единицу, а ко всем остальным числам, стоящим в одной строке или в одном столбце с выбранной клеткой, прибавить единицу. Можно ли из этой таблицы с помощью указанных операций получить таблицу, в которой все числа равны?