ОТА, площади и ко

Задача 1. а) Докажите, что простых чиел бесконечно много.
б) Доказать, что простых чисел вида $4k+3$ бесконечно много.

Задача 2. Положительные числа a и b таковы, что $ab = 2$. Докажите неравенство $(a+1/a)(b+1/b) \geq 9/2$.

Задача 3. Пусть числа a, b, c принадлежат отрезку $[0{,}1]$. Докажите, что $\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq 1$

Задача 4. Решите уравнение в гатуральных числах $x^y = y^x$.

Теорема 1 (Китайская теорема об остатках). *Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_k$ попарно взаимно простые числа, $m = |m_1 m_2 \cdot \dots \cdot m_k|$. Тогда для любых чисел r_i, существует число r, такое, что $r \underset{m_i}{\equiv} r_i$. Причёл любые такие числа r и x сраввнимы по модулю $r \underset{m}{\equiv} x$ (это означает, что среди чисел от 0 до $m-1$ есть ровно одно такое число).*

Задача 5. Найдите все натуральные n такие, что n делится на $\varphi(n)$.

Задача 6. В треугольнике ABC стороны равны соответственно a, b, c а его площадь равна S. Найдите радиус вписанной окружности.

Задача 7. Стороны вписанного четырёхугольника $ABCD$ удовлетворяют соотношению $AB \cdot BC = AD \cdot DC$. Докажите, что площади треугольников ABC и ADC равны.

Задача 8. Можно ли двумя прямолинейными разрезами, проходящими через две вершины треугольника, разрезать его на четыре части так, чтобы три треугольника (из числа этих частей) были равновеликими?

Задача 9. Докажите, что если два треугольника, получающихся при продолжении сторон выпуклого четырёхугольника до их пересечения, равновелики, то одна из диагоналей делит другую пополам.