Кузнечики

1. По окружности длины 1 прыгает кузнечик с шагом $\alpha > 0$, стартуя из точки A. Докажите, что для $\forall \epsilon > 0$ он когда-нибудь окажется на расстоянии не больше ϵ от A. Оцените количество прыжков.

2. По окружности длины 1 прыгает кузнечик с иррациональным шагом $\alpha > 0$. Докажите, что рано или поздно кузнечик попадет на любую заранее выбранную дугу.

3. Если $\alpha > 0$ – иррациональное число, то произвольный интервал (a, b) содержит число вида $n\alpha - m$, m, n – неотрицательные целые числа.

4. В каждой целочисленной точке плоскости сидит дятел радиуса ϵ. Докажите, что для иррационального k луч $y = kx$ пересекает какого-то дятла, кроме центрального. Верно ли это для рационального k?

5. Докажите, что степень двойки может начинаться на любую комбинацию цифр.

6. Петя задумал натуральное число n и сообщил Васе знаки следующих чисел: $\sin n, \sin(n+1), \ldots, \sin(n+100)$. Докажите, что Вася не сможет однозначно определить Петино число.

7. Докажите, что квадрат целого числа может начинаться на любую комбинацию цифр.

8. На окружности сидят 12 кузнечиков в различных точках. Эти точки делят окружность на 12 дуг. По сигналу кузнечики одновременно прыгают по часовой стрелке, каждый – из конца своей дуги в ее середину. Образуются новые 12 дуг, прыжки повторяются, и т. д. Может ли хотя бы один кузнечик вернуться в свою исходную точку после того, как им сделано 12 прыжков?

9. Докажите, что для каждого x такого, что $\sin x \neq 0$, найдётся такое натуральное n, что $|\sin nx| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. По окружности из точки A скачут два кузнечика с шагами α и β. Докажите, что на некотором шаге два кузнечика одновременно попадут в ямку радиуса $\frac{1}{n}$ с центром в A.

11. Внутри круга расположены точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а на его границе – точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ так, что отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ не пересекаются. Кузнечик может перепрыгнуть из точки A_i вточку A_j ,если отрезок A_iA_j не пересекается ни с одним из отрезков A_kB_k, $k = i, j$. Докажите, что за несколько прыжков кузнечик сможет попасть из любой точки A_p в любую точку A_q.

12. Кузнечик прыгает параллельно любой стороне некоторого правильного семиугольника на расстояние, равное 1 (всякий раз выбирается один из возможных 14 векторов, на который он может сместиться). На плоскости расположена круглая кормушка радиуса 0,01. Докажите, что кузнечик всегда может попасть в кормушку.