

Разнойбой

1. Может ли тангенс острого угла быть в целое число раз больше как синуса, так и косинуса этого же угла?
2. В выпуклом многоугольнике на плоскости содержится не меньше $m^2 + 1$ точек с целыми координатами. Докажите, что в нем найдется $m + 1$ точек с целыми координатами, которые лежат на одной прямой.
3. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ac$.
4. Пусть $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ — приведённый многочлен. Докажите, что начиная с некоторого момента он монотонно возрастает.
5. В магическом квадрате $n \times n$, составленном из чисел $1, 2, \dots, n^2$, центры любых двух клеток соединили вектором в направлении от большего числа к меньшему. Докажите, что сумма всех полученных векторов равна нулю.
6. Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность ω . Касательная к ω , проведенная через A , пересекает продолжение стороны BC за точку B в точке K , а касательная к ω , проведенная через B , пересекает продолжение стороны AD за точку A в точке M . Известно, что $AM = AD$ и $BK = BC$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция.