Сумма Минковского

1. Пусть A и B — фиксированные точки, λ и μ — фиксированные числа. Выберем произвольную точку X и зададим точку P равенством $\overline{XP} = \lambda\overline{XA} + \mu\overline{XB}$. Докажите, что положение точки P не зависит от выбора точки X тогда и только тогда, когда $\lambda + \mu = 1$. Докажите также, что в этом случае точка P лежит на прямой AB.

Определение 1. Если $\lambda + \mu = 1$, то точку P из предыдущей задачи будем обозначать $P = \lambda A + \mu B$.

Пусть M_1 и M_2 — выпуклые многоугольники, λ_1 и λ_2 — положительные числа, сумма которых равна 1. Фигуру $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$, состоящую из всех точек вида $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, где A_1 — точка M_1, а A_2 — точка M_2, называют суммой Минковского многоугольников M_1 и M_2.

Упражнение 1. Найдите сумму Минковского а) двух отрезков;б) выпуклой фигуры самой с собой.

Определение 2. На плоскости дана точка O. Суммой Минковского фигур A и B называется множество точек C таких, что для $\forall C' \in C, \exists A' \in A, B' \in B$: $\overline{OC'} = \overline{OA'} + \overline{OB'}$

Упражнение 2. Чем является сумма двух равных фигур по второму определению?

2. Докажите, что сумма выпуклых фигур выпукла.

3. Чему равна ширина суммы двух фигур по направлению?

4. Докажите, что сумма фигур постоянной ширины есть фигура постоянной ширины. Докажите, что если фигуру постоянной ширины сложить с собой, повёрнутой на π, то получится окружность.

5. Докажите, что если M_1 и M_2 — выпуклые многоугольники, то $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$—выпуклы многоугольник, число сторон которого не превосходит суммы чисел сторон многоугольников M_1 и M_2. А периметр сумме периметров исходных фигур, помноженных на коэффициенты.