Сравнения по модулю

Задача 1. Докажите, что $a^n + b^n$ делится на $a + b$ при любом нечётном натуральном n.

Задача 2. а) Пусть p простое число и a не делится на p. Докажите, что числа $0, a, 2a, \dots (p-1)a$ попарно не сравнимы. Переформулируйте этот результат на языке остатков.
б) Докажите малую теорему Ферма: $a^{p-1} \equiv_p 1$.(*Указание: попробуйте как-то из предыдущего пункта получить выражение, содержащее* $a^{(p-1)}$*, ну и вспомнить тему занятия.*)

Задача 3. Пусть p простое число и a не делится на p. Докажите, что существует b, что $ab \equiv_p 1$.

Задача 4. а) Пусть p — простое число. Докажите, что $(a+b)^p \equiv_p a^p + b^p$.
б) Докажите малую теорему Ферма: $a^p \equiv_p a$. (*Указание: доказывайте по индукции, используйте предыдущий пункт при* $b = 1$)

Задача 5. Докажите, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ делится на n при любом нечётном n.

Задача 6. Докажите, что $3^{100} - 2^{100}$ делится на $3^{10} + 2^{10}$.

Задача 7. Назовём число n удобным, если $n^2 + 1$ делится на 1000001. Докажите, что среди числе $1, 2, \ldots, 1000000$ чётное число удобных чисел.

Задача 8. Докажите, что $(3^n + 1)^n - 2$ делится на $3^n - 2$.

Задача 9. а) Пусть p простое число. Докажите, что $(p-1)! \equiv_p -1$.
б) Докажите, что если $(p-1)! \equiv_p -1$, то p — простое число.

Теорема 1 (Теорема Вильсона). *Число p является простым тогда и только тогда, когда* $(p-1)! \equiv_p -1$.