

## Хватит считать клеточки

**Определение 1 (Почти определение).** *Площадь фигуры* — это неотрицательная числовая характеристика, удовлетворяющая следующим свойствам:

**Свойство 1.** Площади равных многоугольников равны.

**Свойство 2.** Площадь объединения двух многоугольников, не имеющих общих внутренних точек, равна сумме площадей этих многоугольников.

**Свойство 3.** Площадь прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$  равна  $S = ab$ .

1. Найдите площадь а) прямоугольного треугольника с катетами  $a$  и  $b$ ;  
б) треугольника  $ABC$ , у которого известны длины стороны  $BC$  и высоты  $AH$ ;  
в) параллелограмма  $ABCD$ , у которого известны длины стороны  $BC$  и высоты  $BH$ .

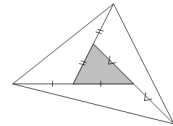
2. Докажите, что медиана треугольника делит его площадь пополам.

3. В квадрате  $ABCD$  со стороной 1 отметили точку  $G$  — середину стороны  $BC$ . Найдите площадь треугольника  $ABG$ .

4. а) Точки  $D$  и  $E$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  единичной площади. Найдите площадь треугольника  $DBE$ .

б) Найдите площадь большого треугольника на рисунке, если площадь закрашенного треугольника равна 1.

5. Любая диагональ выпуклого пятиугольника отсекает от него треугольник единичной площади. По каждой из диагоналей провели разрез, в результате чего пятиугольник распался на 10 треугольников и пятиугольник. Докажите, что все пять из получившихся треугольников, содержащих сторону исходного пятиугольника, имеют одинаковую площадь.



6. Точки  $E$  и  $F$  — середины сторон  $BC$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$ . Отрезки  $AE$  и  $BF$  пересекаются в точке  $K$ . Что больше: площадь треугольника  $AKF$  или площадь четырехугольника  $KECF$ ?

7. Внутри выпуклого четырехугольника  $ABCD$  единичной площади выбрана точка  $O$ . Точку  $O$  отразили относительно каждой из сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  и у четырехугольника, образованного четырьмя полученными точками, посчитали площадь. Чему она могла быть равна?

8. Среди всех способов замостить шахматную доску доминошками, покрывающими две клетки доски, каких способов больше: в которых есть доминошка  $a1 - a2$  или в которых есть доминошка  $b2 - b3$ ?

9. Квадрат разрезали на 25 квадратиков, ровно у одного из которых сторона имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных сторона равна 1). Чему была равна площадь исходного квадрата?

10. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  точки  $E$  и  $F$  — середины сторон  $CD$  и  $AD$ , соответственно, а отрезки  $AC$  и  $BE$  пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что площадь треугольника  $BKF$  в два раза меньше, чем площадь треугольника  $ABC$ .