

## Вспоминаем былое

1. а) С помощью равенства  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$  и площадей докажите теорему Пифагора. б) Пусть  $a^2 + b^2 = c^2$ . Перекроите квадрат со стороной  $c$  в два квадрата со сторонами  $a$  и  $b$ , разрезав его не более, чем на 5 частей (число частей не должно зависеть от  $a$  и  $b$ ).
2. Перекроите квадрат в правильный шестиугольник, разрезав его не более, чем на а) 8 частей; б) 5 частей.
3. Перекроите квадрат в 3 равных квадрата, разрезав его не более, чем на а) 10 частей; б) 7 частей.
4. На ребрах связного графа расставлены стрелки так, что для каждой вершины числа входящих и выходящих ребер равны. Докажите, что двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой.
5. Муравей ползает по клеткам доски  $8 \times 8$ . Сначала он ползет на соседнюю клетку по горизонтали, потом на соседнюю клетку по вертикали, потом снова на соседнюю клетку по горизонтали и так далее. Может ли он обойти все клетки, побывав в каждой ровно один раз?
6. На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Оказалось, что любые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдётся учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.
7. Докажите, что произведение чисел от  $n+1$  до  $2n$  делится на  $2^n$ .
8. Докажите, что из любых  $2^{n+1}$  натуральных чисел можно выбрать  $2^n$  сумма которых делится на  $2^n$ .
9. Через середину высоты равнобедренного треугольника проведены две прямые, соединяющие ее с вершинами основания. Какую часть площади треугольника составляет каждая из 6 частей, на которые эти две прямые разрезают треугольник?