

Окружность Аполлония

1. Дан остроугольный треугольник ABC . Пусть O — центр его описанной окружности.

а) Докажите, что все окружности Аполлония относительно отрезка AB имеют общую радикальную ось.

б) Рассмотрим окружность Аполлония, определенную любыми двумя вершинами треугольника и произвольным отношением $\lambda > 0$. Докажите, что точка O имеет относительно всех таких окружностей одинаковую степень.

в) Пусть s_b — окружность Аполлония, определенная точками A и C и проходящая через вершину B . Аналогично определяются окружности s_a и s_c . Докажите, что эти три окружности соосны.

г) Пусть окружность s_b пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках B и M . Докажите, что BM содержит симедиану треугольника ABC .

д) Рассмотрим две точки пересечения X и Y окружностей s_a , s_b и s_c (см. пункт в). Докажите, что эти две точки инверсны относительно описанной окружности.

е) Пусть точка X (см. пункт д) лежит внутри треугольника ABC . Докажите, что проекции точки X на стороны треугольника ABC являются вершинами равностороннего треугольника.

ж) Докажите, что точка X изогонально сопряжена точке Торичелли (т.е. точке, из которой все стороны видны под углом 120°).

2. Дан треугольник ABC . Рассмотрим все пары точек (X, Y) такие, что $AH : BH : CH = AY : BY : CY$. Докажите, что все прямые XY проходят через некоторую фиксированную точку плоскости.