Разнобой-4

1. Пусть $f \in K[x]$, где K — поле, и пусть $x_0, \ldots, x_n \in K$. Докажите, что остаток при делении многочлена f на многочлен $(x - x_0) \ldots (x - x_n)$ однозначно определяется его остатками при делении на многочлены $x - x_0$, $\ldots$, $x - x_n$.

2. Докажите, что если многочлен бесконечном количестве рациональных точкек принимает рациональные значения, то его коэффициенты рациональные.

3. Многочлен называется *целозначным*, если он принимает целые значения в целых точках.
а) Верно ли, что у любого целозначного многочлена все коэффициенты целые?
б) Докажите, что любой целозначный многочлен можно приставить в виде суммы многочленов:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}, \ldots, P_n(x) = \frac{x(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-n+1)}{n!}, \ldots$$

с целыми коэффициентами.

4. Многочлен P степени n принимает в точках от 0 до n значения равные остатку по модулю 2. (То есть равен 0 в четных точках и 1 в нечетных.). Найдите $P(n+1)$.

5. Докажите тождество: $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{2} C_n^k = \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2}$.

6. Пусть k, m, n — натуральные числа такие, что $k \leq n$. Докажите, что

$$\sum_{r=0}^{m} \frac{k C_m^r C_n^k}{(r+k) C_{m+n}^{r+k}} = 1.$$

7. Дан треугольник ABC, O — центр описанной окружности треугольника ABC, AD — биссектриса угла $\angle A$, $D \in BC$. Из точки D провели прямую l перпендикулярную AO, которая пересекла отрезок AB в точке X. Докажите, что $AX = AC$.

8. Рассмотрим матч по настольному теннису между двумя командами, в каждой из которых по 1000 человек. Каждый игрок первой команды сыграл с каждым игроком второй ровно по разу (в настольном теннисе нет ничьих). Докажите, что в какой-то команде найдутся 10 человек такие, что любой игрок другой команды проиграл хотя бы одному из них.