

Инверсия

Пусть на плоскости дана окружность S с центром O и радиусом R .

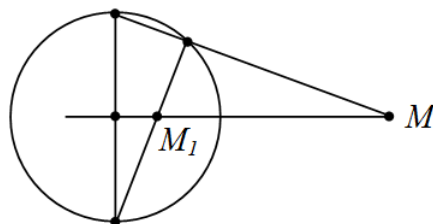
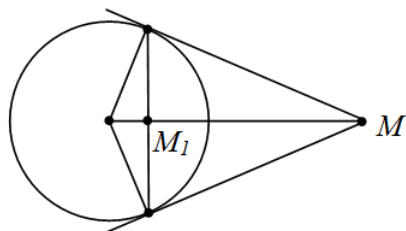
Определение 1. *Инверсией* относительно окружности S называется преобразование, которое сопоставляет произвольной точке A , отличной от O , точку A_1 , лежащую на луче $[OA)$ такую, что $|OA| \cdot |OA_1| = R^2$

Окружность S называется *окружностью инверсии*, точка O называется *центром инверсии*, радиус R называется *радиусом инверсии*.

Свойства инверсии:

- Точки, расположенные на окружности инверсии, остаются на месте, расположенные внутри нее переходят вовне, а расположенные вне круга инверсии переходят во внутренние точки круга.
- Инверсия определена на всей плоскости кроме центра инверсии. Удобно рассматривать плоскость, пополненную бесконечно удаленной точкой образом центра инверсии.

1. Сформулируйте и обоснуйте два способа построения (с помощью циркуля и линейки) образа точки при инверсии.



2. Центр инверсии является точкой касания двух окружностей. Найдите образ этих окружностей при инверсии.

3. Центр инверсии является точкой касания окружности и прямой. Найдите их образы при инверсии. А если центр инверсии лежит на прямой, но не совпадает с точкой касания? Центр лежит на окружности? Центр лежит вне окружности и прямой?

4. Дан равносторонний треугольник, одна вершина которого лежит в центре инверсии, а две другие на ее окружности. Найдите образ треугольника при инверсии.

5. Постройте образ точки при инверсии только при помощи одного циркуля.

6. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найдите множество их точек касания.

7. В сегмент вписываются всевозможные пары пересекающихся окружностей, и для каждой пары через точки их пересечения проводится прямая. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.