Симедиана и центр поворотной гомотетии. 15 апреля

Определение. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC, а N — такая точка на стороне BC, что $\angle BAM = \angle CAN$. Тогда AN называется *симедианой* треугольника ABC.

Утверждение. *Пусть* Γ *— описанная окружность треугольника* ABC*. Пусть касательные к* Γ *в точках* B *и* C *пересекаются в точке* D*. Тогда прямая* AD *содержит симедиану треугольника* ABC*.*

1. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) отмечена точка P такая, что $\angle PAB = \angle PBC$. Докажите, что если M — середина отрезка AB, то $\angle APM + \angle BPC = 180°$.

2. Через точки A и B проведены две окружности, общая касательная к которым пересекает их в точках P и Q. Пусть касательные в точках P и Q к описанной окружности треугольника APQ пересекаются в точке S; пусть H — точка, симметричная точке B относительно прямой PQ. Докажите, что точки A, S и H лежат на одной прямой.

3. Дан треугольник ABC. Пусть X — центр поворотной гомотетии, переводящей направленный отрезок BA в направленный отрезок AC. Докажите, что AX содержит симедиану треугольника ABC.

4. Пусть G — центр масс треугольника ABC, точка P лежит на отрезке BC. Точки Q и R на сторонах AC и AB соответственно таковы, что $PQ \parallel AB$ и $PR \parallel AC$. Докажите, что описанные окружности треугольника AQR проходят через фиксированную точку X, не зависящую от точки P.

5. Пусть ABC — остроугольный неравнобердренный треугольник, а M, N и P — середины сторон BC, CA и AB соответственно. Пусть серединные перпендикуляры к отрезкам AB и AC пересекают луч AM в точках D и E соответственно, а прямые BD и CE пересекаются в точке F, лежащей внутри треугольника ABC. Докажите, что точки A, N, F и P лежат на одной окружности.

6. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно проходят через точку A. Прямая ℓ касается ω_1 и ω_2 в точках B и C соответственно. Пусть O_3 — центр описанной окружности треугольника ABC. Точка D такова, что A — середина отрезка O_3D; M — середина O_1O_2. Докажите, что $\angle O_1DM = \angle O_2DA$.

Малый Механико-Математический Факультет, ауд. 1302 *2016–2017*

Симедиана и центр поворотной гомотетии. 15 апреля

Определение. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC, а N — такая точка на стороне BC, что $\angle BAM = \angle CAN$. Тогда AN называется *симедианой* треугольника ABC.

Утверждение. *Пусть* Γ *— описанная окружность треугольника* ABC*. Пусть касательные к* Γ *в точках* B *и* C *пересекаются в точке* D*. Тогда прямая* AD *содержит симедиану треугольника* ABC*.*

1. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) отмечена точка P такая, что $\angle PAB = \angle PBC$. Докажите, что если M — середина отрезка AB, то $\angle APM + \angle BPC = 180°$.

2. Через точки A и B проведены две окружности, общая касательная к которым пересекает их в точках P и Q. Пусть касательные в точках P и Q к описанной окружности треугольника APQ пересекаются в точке S; пусть H — точка, симметричная точке B относительно прямой PQ. Докажите, что точки A, S и H лежат на одной прямой.

3. Дан треугольник ABC. Пусть X — центр поворотной гомотетии, переводящей направленный отрезок BA в направленный отрезок AC. Докажите, что AX содержит симедиану треугольника ABC.

4. Пусть G — центр масс треугольника ABC, точка P лежит на отрезке BC. Точки Q и R на сторонах AC и AB соответственно таковы, что $PQ \parallel AB$ и $PR \parallel AC$. Докажите, что описанные окружности треугольника AQR проходят через фиксированную точку X, не зависящую от точки P.

5. Пусть ABC — остроугольный неравнобердренный треугольник, а M, N и P — середины сторон BC, CA и AB соответственно. Пусть серединные перпендикуляры к отрезкам AB и AC пересекают луч AM в точках D и E соответственно, а прямые BD и CE пересекаются в точке F, лежащей внутри треугольника ABC. Докажите, что точки A, N, F и P лежат на одной окружности.

6. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно проходят через точку A. Прямая ℓ касается ω_1 и ω_2 в точках B и C соответственно. Пусть O_3 — центр описанной окружности треугольника ABC. Точка D такова, что A — середина отрезка O_3D; M — середина O_1O_2. Докажите, что $\angle O_1DM = \angle O_2DA$.