Неравенство Маклорена и Ко

1. Известно, что уравнение $ax^5 + bx^4 + c = 0$ имеет три различных кор- ня. Докажите, что уравнение $cx^5 + bx + a = 0$ также имеет три различных корня.

2 (Неравенство Маклорена). Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные положительные числа. Обозначим через

$$b_k = \frac{\sum a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}}{C_n^k}.$$

Докажите неравенства:
а) $b_1 \geqslant \sqrt{b_2}$;
б) $b_k \geqslant \sqrt{b_{k+1} b_{k-1}}$, $(k = 2, \ldots n-1)$;
в) $\sqrt[k]{b_k} \geqslant \sqrt[k+1]{b_{k+1}}$, $(k = 2, \ldots n-1)$.

3. Про корни x_1, x_2 двух квадратных многочленов $ax^2 + bx + b$ и $ax^2 + ax + b$ известно, что $x_1 x_2 = 1$, найдите x_1.

4. Многочлен $P(x)$ степени n имеет n различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?

5. У многочлена $P(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_0$ есть n действительных корней, причём коэффициенты p_i, p_{i+1}, $\ldots$, p_j положительны. Докажите, что существует такой индекс k $(i \leqslant k \leqslant j)$, что $p_i \leqslant \ldots \leqslant p_k \geqslant \ldots \geqslant p_j$.

6. Рассмотрим многочлен $p(x) = \frac{(1-(1-x)^n)^2}{x}$, $n > 1$.
а) Докажите, что производная $p'(x)$ имеет на интервале $(0, 1)$ ровно один корень.
b) Докажите, что уравнение $p(x) = p(x^2)$ имеет в интервале $(0, 1)$ единственное решение.