# Разнобой 2

**Задача 1.** Известно, что сумма а) двух; б) трёх; в) десяти неотрицательных чисел равна 10. Найдите максимально возможную величину их произведения.

**Задача 2.** Пусть $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$, где $p_1, p_2, \dots, p_m$ — различные простые числа. а) С помощью формулы включений-исключений найдите количество натуральных чисел, не превосходящих $n$, и имеющие с $n$ общий делитель (запись может быть не компактной).
б) Докажите, что $\varphi(n) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_m})$.

**Задача 3.** Дан квадрат $ABCD$. Найдите ГМТ точек $X$ таких, что $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}$.

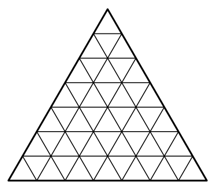
**Задача 4.** Докажичто, что если а) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$; б) $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$, то $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

**Задача 5.** Докажите неравенство $\frac{x}{x^2+y+z} + \frac{y}{x+y^2+z} + \frac{z}{x+y+z^2} \geq 1$ для $0 \leq x, y, z \leq 1$

**Задача 6.** В корзине лежат $n \times k$ шариков, покрашенных в $k$ цветов. Докажите, что их можно так разложить в $k$ коробок по $n$ штук, что в каждой коробке будут находиться шарики не более двух цветов.

**Задача 7.** Дан треугольник $ABC$ и точка $D$. Прямая $AD$ пересекает $BC$ в точке $X$. Докажите, что $\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \frac{S_{XDB}}{S_{XDC}}$.

**Задача 8. Теорема Чевы.** На сторонах $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ взяты соответственно точки $C_1$, $A_1$, $B_1$. Докажите, что отрезки $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.



**Задача 9.** Парк в плане представляет из себя равносторонний треугольник, разбитый н 49 меньших равносторонних треугольников (см. рисунок). Вершины всех треугольников — пункты, стороны — дорожки. Петя и Вася играют, гуляя вместе. Сначал Петя выбирает пункт старта. Далее на каждом шаге они выбирают дорожку, по которой идут от текущего пункта к следующему, где ещё не были. Дорожки выбирают по очереди, начинает Вася. Кто не может выбрать дорожку, тот проиграл. Кто из них сможет всегда выигрывать, как бы не играл соперник?