

Числа Фибоначчи

Определение 1. Последовательность чисел, заданная условиями $F_1 = F_2 = 1$ и $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ называется *последовательностью чисел Фибоначчи*.

1. Кузнечик прыгает в одном направлении по разделенной на клетки полосе. За один прыжок он может сместиться либо на одну, либо на две клетки. Сколькими способами он может добраться с 1-й клетки на 12-ю клетку?

2. Доску $2 \times n$ разрезают на доминошки (прямоугольники 2×1).

а) Выясните, сколькими способами это можно сделать для $n = 1, 2, 3, 4$.

б) Что за последовательность получается? Сформулируйте гипотезу.

в) Докажите свою гипотезу.

3. Найдите НОД двух соседних чисел Фибоначчи.

4. В треугольнике ABC $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 70^\circ$. Через вершину B проведена прямая BD так, что луч BC — биссектриса угла ABD . Докажите, что AC параллельно BD .

5. а) На плоскости нарисован квадратик размером 1×1 . Рома каждый раз пририсовывает к имеющемуся прямоугольнику возле большей стороны квадрат. Какой прямоугольник он получит после 5 пририсовываний? После n пририсовываний?

б) Найдите $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2$.

6. В задаче про кузнечика найдите:

а) Каким количеством способов он может добраться на $n + m$ клетку?

б) В каком количестве способов он побывает на n клетке, а в каком не побывает?

в) Докажите, что $F_{n+m} = F_n F_{m+1} + F_{n-1} F_m$.

7. Докажите, что $F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n+1}$.

8. Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Докажите, что средняя линия треугольника параллельна его стороне.