Разнобой

1. Докажите, что если любые $k (1 \leq k \leq n)$ юношей знакомы в совокупности не менее чем с $k - d$ девушками, то $n - d$ юношей могут выбрать себе невест из числа знакомых.

2. Докажите, что $2^n - 1$ не делится на n при $n > 1$.

3. Петя поставил на шахматную доску несколько фишек (в каждую клетку — не более одной), причём на каждой горизонтали и вертикали оказалось не менее k фишек. При каком наименьшем целом k Вася гарантированно сможет убрать несколько из них так, чтобы на каждой горизонтали и вертикали осталось ровно по одной фишке?

4. Если p – простое, $n > 1$ – нечетно и $3^p - 1 \vdots n$, то $n > 2p$.

5. Сумма кубов трех последовательных натуральных чисел оказалась кубом натурального числа. Докажите, что среднее из этих трех чисел делится на 4

6. Точки M, N, K — точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со сторонами AB, BC, CA соответственно, D — середина AC. Прямая l проходит через точку D параллельно MN и пересекает прямые BC и BA в точках T и S соответственно. Докажите, что $TC = KD = AS$.

7. а) Докажите, что количество путей на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток, равно C_{2n}^{n}, а количество путей из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, -2)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток, равно C_{2n}^{n-1}.
б) Докажите, что количество путей на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и имеющих точки в нижней полуплоскости, равно C_{2n}^{n-1}.
в) Найдите, чему равно C_n