Остатки

Факт. На сторонах AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 от соответственно. Докажите, что $AC_0 = CA_0$ тогда и только тогда, когда точки A_0, C_0, B, B_1 лежат на одной окружности, где B_1 — середина дуги CBA описанной окружности $\triangle ABC$.

Факт. На сторонах AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно. Докажите, что $AC_0 + CA_0 = AC$ тогда и только тогда, когда точки A_0, C_0, B, I лежат на одной окружности, где I — центр вписанной окружности $\triangle ABC$.

1. Пусть на сторонах BA и BC треугольника ABC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, а точки M и M_0 — середины отрезков AC и A_0C_0. Докажите, что если $AC_0 = CA_0$, то прямая MM_0 параллельна биссектрисе угла ABC.

2. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$.

а) Пусть I_A, I_B и I_C центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $I_AI_BI_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

б) Пусть O_A, O_B и O_C центры окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, соответственно. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник $O_AO_BO_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

3. Тругольник $ABC (AB > BC)$ вписан в окружность Ω. На сторонах AB и BC выбраны точи M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K. Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK, а Q — центр вневписанной окружности треугольника CNK, касающейся стороны CN. Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q.

4. Многочлен $P(x)$ степени n удовлетворяет равенствам:а) $P(k) = 1$; б) $P(k) = (-1)^k k$; в) $P(k) = \frac{k}{k+1}$, где $k = 0, 1, \ldots, n$. Найти $P(n+1)$.

5. Какое максимальное количество ладей можно поставить на квадратную доску 9×9, чтобы каждая била не более двух других.