

Вспоминаем

1. Каждый следующий член последовательности есть сумма квадратов цифр предыдущего. Докажите, что последовательность периодична.

2. *Диаграммой Юнга* называется лестница, в которой каждая следующая ступень не выше предыдущей. а) Докажите, что количество диаграмм Юнга из n клеток равно количеству способов разбить число n на натуральные слагаемые (способы отличающиеся только перестановкой слагаемых считаются одинаковыми). б) Число разбиений числа n на не более чем k слагаемых равно числу разбиений n на слагаемые, каждое из которых не больше k .

3. Докажите, что для любых неотрицательных чисел x_1, x_2, \dots, x_n , не превосходящих M , справедливо неравенство

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq M(x_1 + 3x_2 + 5x_3 + \dots + (2n-1)x_n).$$

4. Сумма положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n равна 1. Докажите, что

$$\sum_{i < j} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n-1}{4}.$$

5. Последовательность задана соотношением $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$ и $0 < x_1 < 1$. Докажите, что последовательность периодична тогда и только тогда, когда число x_1 рационально.

6. Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке P , а продолжений сторон AB и AC — в точках Q и R соответственно. Докажите, что если середина PQ лежит на описанной окружности треугольника ABC , то и середина PR тоже лежит на этой описанной окружности.