Алгебраический разнобой. 28 января

1. На доске записаны несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел могло быть записано на доске?

2. Ненулевые числа a и b таковы, что уравнение $a(x-a)^2+b(x-b)^2=0$ имеет единственное решение. Докажите, что $|a|=|b|$.

3. Косинусы углов одного треугольника соответственно равны синусам углов другого треугольника. Найдите наибольший из шести углов обоих треугольников.

4. Решите в действительных числах уравнение

$$(5x+3)(x^2+x+1)(x^2+2x+3)=1001.$$

5. Пусть $a>0$. Рассмотрим последовательность, заданную следующим образом: $a_1=0$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+a}$ для всякого натурального n. Докажите, что в этой последовательности встретится бесконечно много иррациональных чисел.

6. Пусть a — вещественное число. Зададим последовательность x_1, x_2, x_3 ... условиями $x_1=1$ и $ax_n=x_1+x_2+\ldots+x_{n+1}$ при всех $n\geqslant 1$. Найдите наименьшее a, при котором все члены этой последовательности неотрицательны.

Малый Механико-Математический Факультет, ауд. 1302 *2016–2017*

Алгебраический разнобой. 28 января

1. На доске записаны несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел могло быть записано на доске?

2. Ненулевые числа a и b таковы, что уравнение $a(x-a)^2+b(x-b)^2=0$ имеет единственное решение. Докажите, что $|a|=|b|$.

3. Косинусы углов одного треугольника соответственно равны синусам углов другого треугольника. Найдите наибольший из шести углов обоих треугольников.

4. Решите в действительных числах уравнение

$$(5x+3)(x^2+x+1)(x^2+2x+3)=1001.$$

5. Пусть $a>0$. Рассмотрим последовательность, заданную следующим образом: $a_1=0$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+a}$ для всякого натурального n. Докажите, что в этой последовательности встретится бесконечно много иррациональных чисел.

6. Пусть a — вещественное число. Зададим последовательность x_1, x_2, x_3 ... условиями $x_1=1$ и $ax_n=x_1+x_2+\ldots+x_{n+1}$ при всех $n\geqslant 1$. Найдите наименьшее a, при котором все члены этой последовательности неотрицательны.