Неравенства, добавка

1 (Неравенство Минковского). Докажите неравенство

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt[n]{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n} \leqslant \sqrt[n]{(a_1+b_1) \cdot \ldots \cdot (a_n+b_n)}.$$

2. Для $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{2}$ докажите неравенство

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^n} \leqslant \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)\right)^n}$$

3. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — некоторая перестановка чисел от 1 до n. Найдите максимальное значение выражения $a_1^{a_2^{\cdot^{\cdot^{a_n}}}}$.

4 (Из 8-го класса). В натуальных числах решите уравнение $x^y = y^x$.

5. Пусть a, b, c, d —- положительные числа. Докажите неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geqslant a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + d^2b^2 + c^2d^2.$$