

Перестановки, повторение

Определение 1. Перестановкой n элементов (или подстановкой из n элементов) называется биекция n -элементного множества на себя. Множество всех перестановок множества $\{1, \dots, n\}$ обозначается S_n .

Определение 2. Произведением перестановок называется их композиция как отображений (обозначение: $\alpha\beta$). Перестановка, переводящая каждый элемент в себя, называется тождественной и обозначается e .

Определение 3. Порядком перестановки α называется наименьшее натуральное число n , такое что $\alpha^n = e$.

Определение 4. Циклом длины l называется перестановка $\alpha \in S_n$ элементов i_1, \dots, i_l , такая что $\alpha(i_j) = i_{j+1}$ (сложение происходит по модулю l), а на всех остальных элементах тождественна. Для упрощения записи $\alpha = (i_1, \dots, i_l)$.

Определение 5. Циклы называются независимыми, если их элементы не пересекаются. Если циклы α и β независимы, то $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Теорема 1. Любую перестановку можно представить в виде произведения независимых циклов.

Определение 6. Графом перестановки α называется ориентированный граф, вершины которого числа от 1 до n , а ребра ведут из i в $\alpha(i)$.

Определение 7. Транспозицией называется перестановка, которая меняет два элемента местами, а все остальные оставляет неподвижными. Т.е. циклическая перестановка длины два, обозначать можно (i, j) . Элементарной транспозицией называется транспозиция, меняющая два соседних элемента местами $(i, i + 1)$.

Определение 8. Пусть перестановка σ разложена в произведение транспозиций. Тогда чётностью перестановки σ называется чётность количества этих транспозиций.

Определение 9. Инверсией перестановки σ называется такая пара чисел i, j , что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

1. а) Докажите, что при домножении на элементарную транспозицию изменяется чётность числа инверсий.

б) Докажите, что чётность перестановки определена корректно (т.е. чётность числа транспозиций не зависит от выбора разложения).

2. Любую перестановку можно представить в виде произведения а) транспозиций.

3. Зная чётность двух перестановок из S_n можно ли определить чётность их произведения?

4. Каких перестановок в S_n больше: четных или нечетных?

5. Определите чётность циклической перестановки.

6. Граф перестановки распался на циклы длины d_1, \dots, d_k . Можно ли определить чётность перестановки?
7. Докажите, что любую чётную перестановку можно представить в виде произведения тройных циклов.
8. Докажите, что любую перестановку можно получить перемножая транспозицию (12) и длинный цикл $((12 \dots n))$.
9. Что происходит с циклической перестановкой при возведении её в квадрат?
10. Любая ли четная перестановка является квадратом некоторой перестановки?
11. Докажите, что существует ровно два отображения их перестановок в числа таких, что $f(e) = 1$ и $f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\beta)$. А именно $f(\alpha) = 1$ и $f(\alpha) = (-1)^\alpha$ (минус один в степени чётность перестановки α).