

Разнобой

1. Найдите все тройки ненулевых чисел a, b и c , образующих арифметическую прогрессию, и таких, что из чисел $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$ также можно составить арифметическую прогрессию.

2. Найдите все тройки чисел a, b и c , являющихся степенями пятерки с целыми неотрицательными показателями, такие, что одно из них получается выписыванием двух других подряд.

3. Существует ли такая последовательность действительных чисел a_0, a_1, \dots , что для каждого натурального n многочлен $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ имеет ровно n различных действительных корней?

4. Докажите, что следующий многочлен не имеет кратных корней:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

5. Куб со стороной n ($n \geq 3$) разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между единичными кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?

6. Даны два правильных тетраэдра с ребрами длины $\sqrt{2}$, переводящихся один в другой при центральной симметрии. Пусть F — множество середин отрезков, концы которых принадлежат разным тетраэдрам. Найдите объем фигуры F .

7. Четырехугольник $ABCD$ является одновременно и вписанным, и описанным, причем вписанная в $ABCD$ окружность касается его сторон AB, BC, CD и AD в точках K, L, M, N соответственно. Биссектрисы внешних углов A и B четырехугольника пересекаются в точке K' , внешних углов B и C — в точке L' , внешних углов C и D — в точке M' , внешних углов D и A — в точке N' . Докажите, что прямые KK', LL', MM' и NN' проходят через одну точку