

## Основная теорема арифметики, продвинутый уровень.

1. Как с точки зрения простых множителей можно описать квадраты, кубы натуральных чисел?
2. Два игрока по очереди выписывают делители натурального числа  $N$ . При этом нельзя повторять те числа, которые уже выписывали ранее, и каждое выписанное число должно быть взаимно просто с числом, которое только что выписал соперник. Кто выигрывает при правильной игре? (Ответ может зависеть от числа  $N$ ).
3. Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от 1 и самого этого числа. Натуральное число называется замечательным, если самый большой его собственный делитель на 1 меньше, чем квадрат самого маленького собственного делителя. Найдите все замечательные числа и докажите, что других нет.
4. Найдите какие-нибудь три решения уравнения  $2x^2 = y^3$  в целых числах.
5. Пусть  $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_k = n$  — все делители натурального числа  $n$ . Найдите все  $n$ , для которых  $n = d_2^2 + d_3^3$ .
6. Положим  $E(n) = n(n+1)(2n+1)(3n+1)(4n+1)(5n+1)(6n+1)(7n+1)$  для каждого натурального  $n$ . Найдите наибольший общий делитель чисел  $E(1), E(2), \dots, E(2012)$ .