Графы

Задача 1. В отряде 8 класса 70 человек. Известно, что среди любых четверых найдется хотя бы один человек, знакомый с тремя остальными. Сколько человек могут знать всех в отряде? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

Задача 2. Страна разделена на 5 республик, причем каждая республика связна (то есть от любой ее точки можно дойти до любой другой, не пересекая границу). Докажите, что какие-то две республики не граничат между собой.

Задача 3. В волейбольном турнире с участием 73 команд каждая команда сыграла с каждой по одному разу. В конце турнира все команды разделили на две группы так, что любая команда первой группы одержала n побед, а любая команда второй группы ровно m побед. Могло ли оказаться, что $m \neq n$?

Задача 4 (Теорема Турана). Пусть $n, m > 1$ — натуральные числа и r — остаток при делении n на $m-1$. Тогда в графе n вершинах, не содержащим K_m(полного графа на m вершинах), рёбер не более чем

$$\frac{(m-2)(n^2-r^2)}{2m-2} + \frac{r(r-1)}{2}.$$

Задача 5. Пятнадцать команд сыграли однокруговой турнир по волейболу (ничьих не бывает), причем каждая выиграла ровно 7 матчей. Сколько есть таких троек команд A, B, C, что A выиграла у B, B выиграла у C, а C выиграла у A?

Задача 6. В Швамбрании закрыли одну беспосадочную авиалинию. Известно, что после этого от любого швамбранского аэропорта можно долететь до любого другого, быть может, с пересадками. До закрытия линии это можно было сделать, совершив не более n посадок. Докажите, что теперь можно долететь из любого аэропорта в любой другой не более чем с $2n$ посадками (при их подсчете учитывается и посадка в пункте назначения).

Задача 7. Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?