Последний разнобой

1. Докажите неравенства а) $2(a^3+b^3+c^3) \geqslant a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b \geqslant 6abc$; б) $a^4+b^4+c^2 \geqslant a^2bc+b^2ac+c^2ab$; в) $a^pb^q+a^qb^p \leqslant a^{p+1}b^{q-1}+a^{q-1}b^{p+1}$ для положительных a, b, c и натуральных p, q.

Пусть есть два набора чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Определение 1. Пусть $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x_n$ и $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \ldots \geq y_n$. Будем говорить, что набор x мажорирует набор y, и писать $x \succ y$, если выполняются следующие условия:

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$

2) для любого $1 \leq k \leq n$ выполняется неравенство $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \geq \sum\limits_{i=1}^{k} y_i$

2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — два набора целых неотрицательных чисел, тогда следующее неравенство верно

$$\sum_{\sigma \in S_n} x_1^{(a_{\sigma(1)})} \ldots x_n^{(a_{\sigma(n)})} \geqslant \sum_{\sigma \in S_n} x_1^{(b_{\sigma(1)})} \ldots x_n^{(b_{\sigma(n)})}$$

для положительных $x_1, \ldots, x_n$ тогда и только тогда, когда набор a мажорирует набор b.

3. Пусть a, b, c — положительные числа такие, что $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{(a^5+b^5+c^5)(a+b+c)}{a^3+b^3+c^3} \geqslant 3.$$

4. На плоскости задан набор векторов, длина каждого из которых не превосходит 1. Докажите, что все векторы можно повернуть на один и тот же угол по или против часовой стрелки так, что длина суммы полученных векторов будет не больше 1.

5. Докажите, что существует последовательность, состоящая из натуральных чисел такая, что любое натуральное число единственным образом представляется в виде разности двух ее членов.

6. На плоскости расположено n точки. Докажите, что можно выбрать три из них так, чтобы угол «между ними» был не больше $\frac{180}{n}$.