

## Конструировали, конструировали и выконструировали

1. Докажите, что квадрат а)  $4 \times 4$ , б)  $8 \times 8$ , в)  $2^n \times 2^n$  без одной клетки можно разрезать на уголки без трёх клеток.

2. В стране дураков имеют хождение монеты достоинством 1, 2, 4,  $\dots$ ,  $2^n$  тугриков. Докажите, что, имея по одной монете каждого достоинства, можно уплатить любую сумму, не превышающую  $2^{n+1} - 1$  тугриков.

3. Пусть  $3x + 7y \equiv 1 \pmod{11}$ .

а) Показать, что  $3x + 40y \equiv 1 \pmod{11}$ .

б) Найти остаток от деления  $14x - 15y$  на 11.

в) Найти остаток от деления  $6x + 3y$  на 11.

4. Плоскость разбита на части несколькими прямыми. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета правильным образом (т.е. так, чтобы никакие две области одного цвета не имели общей границы).

5. На столе стоят  $2^n$  стакана с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно уравнять количество воды в стаканах.

6. Прямоугольник  $2 \times n$  разбит на доминошки. Докажите, что его клетки можно раскрасить в два цвета так, чтобы любая доминошка в данном разбиении содержала клетки разных цветов, но в любом другом разбиении этого прямоугольника на доминошки нашлась бы доминошка, содержащая две клетки одного цвета.

7. а) Отметьте на плоскости 10 точек, которые нельзя зачеркнуть тремя прямыми, но любые 9 из них – можно.

б) Отметьте на плоскости 55 точек, которые нельзя зачеркнуть 9-ю прямыми, но любые 54 из них – можно.