Планарность и ко

Теорема 1 (Формула эйлера). *На плоскости нарисован граф, причём никакие рёбра у него не пересекаются. Он разбил плоскость на G частей. Пусть V — количество вершин в этом графе, E — количество рёбер в нём. Докажите формулу эйлера*

$$V + G - E = 2.$$

Определение 1. *Картой* называется связный плоский граф. Части, на которые карта разбивает плоскость, называются *гранями* (или *странами*).

Замечание. *В произвольном графе ребра можно считать по вершинам (и тогда удвоенное число ребер равно сумме степеней вершин). А в планарном графе появляется* дополнительная возможность *ребра считать по граням (и тогда удвоенное число ребер равно сумме сторон граней, за некоторыми исключениями).*

Задача 1. В квадрате отметили 10 точек (или n точек), а затем соединили их и вершины квадрата непересекающимися отрезками так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

Задача 2. Дана карта с V вершинами, E ребрами и F странами, причем $V > 2$. Докажите, что а) $2P \geq 3Г$; б) $E \leq 3V - 6$.

Задача 3. Докажите, что в любом планарном графе есть вершина степени не более, чем 5;

Задача 4. Докажите, что любой граф без нечётных циклов можно правильным образом раскрасить в два цвета.

Задача 5. В однокруговом турнире по волейболу участвовало n команд. Докажите, что их можно занумеровать числами от 1 до n так, что первая команда выиграла у второй, вторая у третьей, $\ldots$, $(n-1)$-я у n-й.

Задача 6. Можно ли все ребра и диагонали правильного 55-угольника раскрасить в 54 цвета так, чтобы ребра, выходящие из одной вершины, были разного цвета?

Задача 7. Каждый депутат имеет хотя бы одного врага, любая вражда взаимна. Докажите, что депутатов можно разбить на две фракции так, чтобы каждый имел врага в противоположной фракции.