# Постулат Бертрана

**Теорема 1.** *Для любого натурального $n \geqslant 2$ между числами $n$ и $2n$ найдётся простое число.*

- Сформулирована Ж.Л. Бертраном в 1845 году (и проверена до $n = 3000000$).
- Первое доказательство – П.Л. Чебышев в 1850 г.
- Более простое доказательство – Рамануджан в 1919 г.
- Самое простое доказательство – П. Эрдёш в 1932 г.

В этом листке $p$ всегда обозначает простое число.

**1 (Акт первый мерлезонского балета, «Фламандцы»).** а) Докажите, что $C_{2n}^n$ делится на $\prod\limits_{n<p_i\leqslant 2n} p_i$ (произведение всех простых чисел, лежащих от $n+1$ до $2n$).
б) Докажите, что $C_{2n}^n < 2^{2n}$.
в) Докажите, что $\prod\limits_{p_i\leqslant n} p_i < 4^{n-1}$.

**2 (Акт второй мерлезонского балета,«Пажи»).** а) Докажите, что если $p > 2n$, то $C_{2n}^n$ не делится на $p$.
б) Докажите, что если $n < p \leqslant 2n$, то $p$ входит в $C_{2n}^n$ ровно в первой степени.
в) Докажите, что если $\dfrac{2n}{3} < p \leqslant n$, то $C_{2n}^n$ не делится на $p$.

**3 (Акт третий мерлезонского балета,«Лотарингцы»).** а) Докажите, что максимальная степень $p$, на которую делится $n!$ равна

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right] + \ldots$$

б) Докажите, что максимальная степень $p$, на которую делится $C_{2n}^n$ равна

$$\left(\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right]\right) + \left(\left[\frac{2n}{p^2}\right] - 2\left[\frac{n}{p^2}\right]\right) + \ldots + \left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right) + \ldots$$

в) Докажите, что $0 \leqslant [2x] - 2[x] \leqslant 1$.
г) Докажите, что если $C_{2n}^n$ кратно $p^k$, то $p^k < 2n$. В частности, при $p > \sqrt{2n}$ , $p$ входит в $C_{2n}^n$ не выше чем в первой степени.

**4 (Акт пятый мерлезонского балета, «Ловчие»).**
а) Докажите, что

$$C_{2n}^n < \prod_{p\leqslant\sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n}<p\leqslant\frac{2n}{3}} p \cdot \prod_{n<p\leqslant 2n} p$$

б) Докажите, что $C_{2n}^k < C_{2n}^n$ при $k \neq n$.

в) Докажите, что $\dfrac{4^n}{2n} < C_{2n}^n$ .

Получили

$$\frac{4^n}{2n} < C_{2n}^n < \prod_{p\leqslant\sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n}<p\leqslant\frac{2n}{3}} p \cdot \prod_{n<p\leqslant 2n} p$$

**5 (Акт тринадцатый мерлезонского балета,«Крестьяне»).** Предположим, что $\prod\limits_{n<p\leqslant 2n} p = 1$, т.е. нет простых чисел между $n$ ии $2n$. Тогда введённых выше обозначениях докажите: а) $4^n < (2n)^{1+\sqrt{2n}} \cdot 4^{\frac{2n}{3}}$ и $2^{\frac{2n}{3}} < (2n)^{1+\sqrt{2n}}$;
б) $a < 2^a$ для любого $a$.
в) Выведите из этого, что $2n = (\sqrt[6]{2n})^6 < 2^{6\sqrt[6]{2n}}$.
г) Докажите, что $(2n)^{1+\sqrt{2n}} < (2n)^{\frac{10}{9}\sqrt{2n}} < 2^{\frac{20}{3}\sqrt[6]{2n}^4}$ при $n \geqslant 50$.

**6 (Акт тринадцатый мерлезонского балета,«Большой балет»).** а) Докажите постулат Бертрана при . *Указание. Рассмотрим простые числа 2,3,5,7,14,23,43,83,163,317,631,1259,2503,4001.*
б) Докажите постулат Бертрана.

**Гипотеза Лежандра.** Для любого $n \geqslant 2$ найдётся простое число $p$ между $n^2$ и $(n+1)^2$. Эта гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута.

*Мерлезо́нский балет (часто также Марлезо́нский балет, от фр. Le ballet de la Merlaison, букв. «Балет дроздования», то есть «Балет об охоте на дроздов») — балет в 16-ти актах, поставленный королём Франции Людовиком XIII.*

*Мерлезонский балет описан в романе «Три мушкетёра» как арена развязки в интриге с алмазными подвесками королевы Анны (часть первая, глава XXII).*

*В телевизионном фильме «Д'Артаньян и три мушкетёра» добавлена комическая сцена, связанная с балетом, которая отсутствует в романе. Распорядитель бала церемониально объявляет: «Вторая часть Марлезонского балета!» — после чего, торопясь доставить подвески королеве, его сбивает с ног врывающийся в зал д'Артаньян. В русском языке закрепилась крылатая фраза «вторая часть Марлезонского балета», указывающая на неожиданное развитие событий, или развитие, о котором говорят с иронией. Аналогично, выражение «Марлезонский балет» иногда употребляется в переносном смысле для обозначения череды событий гротескного характера.[*