Математическое ожидание. 17 декабря

Определение. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство. *Случайной величиной* называется произвольная функция $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$. ($\xi$ читается как «кси».)

Определение. Пусть случайная величина ξ принимает конечное множество значений a_1, a_2, $\ldots$, a_s. *Математическим ожиданием* ξ называется число $\mathbb{E}\xi = \sum\limits_{k=1}^{s} a_k \cdot P(\xi = a_k)$.

1. Пусть $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $P(x_i) = p_i$. Докажите, что $\mathbb{E}\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k \cdot \xi(x_k)$.

2 (Линейность математического ожидания). Пусть ξ, η (η читается как «эта») — две случаные величины (на одном и том же вероятностном пространстве), c — некоторая постоянная.

Докажите, что $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$ и $\mathbb{E}(c \cdot \xi) = c \cdot \mathbb{E}\xi$.

3. Честную монету подбрасывают 100 раз подряд. Найдите математическое ожидание числа орлов.

4. По веревочной лестнице в ужасную грозу поднимаются 7 гномов. Если случится гром, то каждый гном с испугу может упасть вниз с вероятностью $p = 0{,}2$. Если гном падает, то он увлекает за собой всех гномов, которые под ним, и они тоже падают. Вдруг раздался гром. Сколько гномов следует ожидать Белоснежке внизу?

Определение. Пусть $p \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Под *случайным графом* $G(n, p)$ мы понимаем вероятностное пространство, элементами которого являются графы на (одних и тех же) n вершинах, при этом вероятность графа с k рёбрами равна $p^k(1-p)^{C_n^2 - k}$.

5. Рассмотрим случайный граф $G(n, p)$. Для данных n и p найдите математическое ожидание в этом графе количества
a) ребер;
b) треугольников;
c) изолированных вершин;
d) гамильтоновых циклов;
e) простых циклов длины k;

6. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует полный ориентированный граф с n вершинами и по меньшей мере $2^{1-n} \cdot n!$ гамильтоновыми путями.

Малый Механико-Математический Факультет, ауд. 1302 *2016–2017*

Математическое ожидание. 17 декабря

Определение. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство. *Случайной величиной* называется произвольная функция $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$. ($\xi$ читается как «кси».)

Определение. Пусть случайная величина ξ принимает конечное множество значений a_1, a_2, $\ldots$, a_s. *Математическим ожиданием* ξ называется число $\mathbb{E}\xi = \sum\limits_{k=1}^{s} a_k \cdot P(\xi = a_k)$.

1. Пусть $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $P(x_i) = p_i$. Докажите, что $\mathbb{E}\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k \cdot \xi(x_k)$.

2 (Линейность математического ожидания). Пусть ξ, η (η читается как «эта») — две случаные величины (на одном и том же вероятностном пространстве), c — некоторая постоянная.

Докажите, что $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$ и $\mathbb{E}(c \cdot \xi) = c \cdot \mathbb{E}\xi$.

3. Честную монету подбрасывают 100 раз подряд. Найдите математическое ожидание числа орлов.

4. По веревочной лестнице в ужасную грозу поднимаются 7 гномов. Если случится гром, то каждый гном с испугу может упасть вниз с вероятностью $p = 0{,}2$. Если гном падает, то он увлекает за собой всех гномов, которые под ним, и они тоже падают. Вдруг раздался гром. Сколько гномов следует ожидать Белоснежке внизу?

Определение. Пусть $p \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Под *случайным графом* $G(n, p)$ мы понимаем вероятностное пространство, элементами которого являются графы на (одних и тех же) n вершинах, при этом вероятность графа с k рёбрами равна $p^k(1-p)^{C_n^2 - k}$.

5. Рассмотрим случайный граф $G(n, p)$. Для данных n и p найдите математическое ожидание в этом графе количества
a) ребер;
b) треугольников;
c) изолированных вершин;
d) гамильтоновых циклов;
e) простых циклов длины k;

6. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует полный ориентированный граф с n вершинами и по меньшей мере $2^{1-n} \cdot n!$ гамильтоновыми путями.

7. Поля шахматной доски пронумерованы естественным образом числами от 1 до 64. На доску случайным образом поставлено 6 ладей, которые не бьют друг друга. Найдите математическое ожидание суммы номеров полей, занятых ладьями.

8. Преподаватель кружка по теории вероятностей откинулся в кресле и посмотрел на экран. Список записавшихся готов. Всего получилось n человек. Только они пока не по алфавиту, а в случайном порядке, в каком они приходили на занятие.

— Надо отсортировать их в алфавитном порядке, – подумал преподаватель. – Пойду по порядку сверху вниз, и, если нужно, буду переставлять фамилию ученика вверх в подходящее место. Каждую фамилию придётся переставить не более одного раза.

Найдите математическое ожидание числа фамилий, которые не придётся переставлять.

7. Поля шахматной доски пронумерованы естественным образом числами от 1 до 64. На доску случайным образом поставлено 6 ладей, которые не бьют друг друга. Найдите математическое ожидание суммы номеров полей, занятых ладьями.

8. Преподаватель кружка по теории вероятностей откинулся в кресле и посмотрел на экран. Список записавшихся готов. Всего получилось n человек. Только они пока не по алфавиту, а в случайном порядке, в каком они приходили на занятие.

— Надо отсортировать их в алфавитном порядке, – подумал преподаватель. – Пойду по порядку сверху вниз, и, если нужно, буду переставлять фамилию ученика вверх в подходящее место. Каждую фамилию придётся переставить не более одного раза.

Найдите математическое ожидание числа фамилий, которые не придётся переставлять.