Линейность

Определение 1. функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *аффинной*, если для любой точки C делющую прямую AB в отношении $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{a}{b}$ выполнено равенство $f(C) = \dfrac{a}{a+b}f(A) + \dfrac{b}{a+b}f(B)$.

Определение 2. Назовем *аффинной* функцию, которая, будучи ограниченной на любую прямую, становится линейной. То есть при введении координат на этой прямой можно записать как $kx + b$.

1. Докажите, что данные определения эквивалентны.

Определение 3. функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если существуют такие a, b и c, что для любой точки (x, y) $f((x, y)) = ax + by + c$.

2. Докажите, что эти функции аффинны: $f(X) = \overrightarrow{S}_{AXB}$; $f(X) = AX^2 - BX^2$.

3. Докажите, что если h, g — аффинные функции, то функция $\lambda h + \mu g$ также аффинна.

4. Докажите аффинность функций: $X \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{S}_{A_iXB_i}$; $X \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} k_i C_i X^2$ $(\sum k_i = 0)$.

5. Докажите, что $\{X : f(X) = d\}$ есть либо $\emptyset$, либо прямая, либо вся плоскость.

6. Докажите, что аффинная функция и линейная- одно и тоже.

Метод решения задач.

- Если в задаче требуется доказать, что какие-то три (или более) точки (например, A, B, C) лежат на одной прямой, можно попытаться придумать функцию f, так чтобы, во-первых, уравнение $f(X) = 0$ задавало прямую на плоскости, а во-вторых, этому уравнению удовлетворяли все три точки: $f(A) = f(B) = f(C) = 0$.
- Если в задаче требуется доказать, что какие-то три прямые (например, a, b, c) пересекаются в одной точке, можно попытаться придумать функции f_a, f_b, f_c, задающие эти прямые (т.е. уравнение $f_\ell(X) = 0$ равносильно $X \in \ell$ для $\ell \in \{a, b, c\}$), так чтобы одна из этих функций выражалась линейно через две оставшиеся (т.е. $f_c = \alpha f_a + \beta f_b$. Тогда точка пересечения a и b будет принадлежать c.

7. Дан четырехугольник. В одной паре его противоположных углов провели внешние биссектрисы – получили точку их пересечения. Потом в другой паре – получили вторую точку. Потом противоположные стороны продлили до пересечения, получили два угла – по ним аналогично построили третью точку. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой.

8. Дан правильный треугольник ABC и произвольная точка D. Точки I_A, I_B и I_C — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CAD и ABD соответственно. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин A, B и C на прямые соответственно I_BI_C, I_AI_C и I_AI_B, пересекаются в одной точке.

9. Докажите, что если в тетраэдре $ABCD$ оказалось, что $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$, то и $AD \perp BC$.