

## Ориентированные площади

1. В выпуклом четырехугольнике каждая диагональ делит его на два равновеликих треугольника. Докажите, что он является параллелограммом.

2. **Равные площади.** а) Найдите ГМТ  $X$ , таких что  $S_{ACX} = S_{BCX}$ , где  $ABC$  — данный треугольник.

б) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

в) Найдите все точки  $X$ , такие что площади треугольников  $AXB$ ,  $BXC$ ,  $CXA$  равны.

**Определение 1.** Ориентированная площадь  $\vec{S}_{PQR}$  треугольника  $PQR$  — площадь треугольника  $PQR$ , взятая со знаком “+”, если вершины записаны в положительном порядке (против часовой стрелки), и со знаком “−”, иначе.

3. Даны отрезки  $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ . Что представляет собой множество  $X$ , таких что

$$\lambda_1 \vec{S}_{A_1XB_1} + \lambda_2 \vec{S}_{A_2XB_2} + \dots + \lambda_n \vec{S}_{A_nXB_n} = d,$$

где  $d$  — заданное действительное число?

4. **Теорема Ньютона.** Докажите, что в описанном четырехугольнике центр вписанной окружности лежит на отрезке, соединяющем середины диагоналей.

5. Пусть  $AA'$  и  $BB'$  — биссектрисы треугольника  $ABC$ . Докажите, что для любой точки  $X$  с отрезка  $A'B'$  справедливо  $a + b = c$ , где  $a, b, c$  — расстояния от точки  $X$  до соответствующих сторон треугольника.

6. **Прямая Гаусса.** Продолжения противоположных сторон  $AB$  и  $CD$  четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ , а продолжения сторон  $BC$  и  $AD$  в точке  $Q$ . Докажите, что середины диагоналей  $AC$  и  $BD$ , а также середина отрезка  $PQ$  лежат на одной прямой

7. Центры отрезков  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  расположены на одной прямой. Докажите, что 8 треугольников  $A_iB_jC_k$  можно так разбить на 2 группы, что суммы площадей в группах равны.