

## Shut up and calculate

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

2. Про числа  $a, b, c$  известно, что  $a + b + c = 2$ ,  $abc = 2$  и  $ab + bc + ca = 2$ . Найдите  $a^3 + b^3 + c^3$ .

3. Докажите, что  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n-1}{n}$ .

4. Все девятизначные числа, десятичная запись которых содержит цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному разу, выписали в ряд в порядке возрастания. Каждую минуту выбирают наибольшее и наименьшее из них и стирают. Какие два числа будут стерты последними?

5. Число, написанное на доске, каждую минуту либо удваивается, либо из него вычитается единица. После нескольких таких операций из числа 1 было получено число 2002. Докажите, что в некоторый момент на доске было написано число, содержащее в своей записи цифру 3.

6. Про числа  $G_n$  известно, что  $G_1 = 1$ ,  $G_2 = 4$ , а при  $n \geq 2$  выполняется равенство:  $G_{n+1} = G_n + 3G_{n-1}$ . Докажите, что

$$G_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n}{\sqrt{13}}.$$