

Разнойбой

1. Докажите, что при всех $x, 0 < x < \pi/3$, справедливо неравенство

$$\sin 2x + \cos x > 1.$$

2. Трехчлен $ax^2 + bx - 17$ имеет два целых корня одного знака. Найдите a , для которых это возможно.

3. Докажите неравенство для чисел Фибоначчи:

$$\frac{F_2}{F_1 F_3} + \frac{F_3}{F_2 F_4} + \dots + \frac{F_{2016}}{F_{2015} F_{2017}} < 2.$$

4. Найдите все натуральные числа n , для которых сумма цифр числа 5^n равна 2^n

5. В стране 1993 города, и из каждого выходит не менее 93 дорог. Известно, что из любого города можно проехать по дорогам в любой другой. Докажите, что это можно сделать не более, чем с 62 пересадками. (Дорога соединяет между собой два города.)

6. В правильном 17-ти угольнике провели 8 векторов, вершины которых являются вершинами многоугольника, и никакие два вектора не имеют общую вершину. Докажите, что сумма этих векторов не может равняться нулю.