Остатки сладки

Определение 1. Пусть a – целое число, b – натуральное. Тогда существует такие целые числа q и r, что $a = bq + r$, $0 \leqslant r < b$. Числа q и r определены однозначно для каждых a и b. Число r называется *остатком* при делении числа a на число b, а число q — *неполным частным.*

1. Разделите числа а) 100 , б) -100 с остатком на 13.

2 (Очень важная задача). а) Докажите, что если два целых числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на целое число n, то их разность делится на n.
б) Докажите, что если $a - b$ делится на n. то a и b имеют одинаковые остатки при делении на n.

3. В клубе интеллектуальных игр у Елены Анатольевны участвуют 4 девочки и 8 мальчиков. Для участия в конкурсе нужно выбрать
а) пять человек;
б) пять человек, среди которых ровно одна девочка;
в) пять человек, среди которых должна быть хотя бы одна девочка.
Сколькими способами это можно сделать?

4. Докажите, что среди $n + 1$ целого числа найдутся два, разность которых делится на n.

5. Каких 7-значных чисел больше: тех, в записи которых есть 1, или остальных?

6. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что какая-то из ладей бьёт не более двух других.

7. Какое наибольшее количество фигурок $1 \times 2 \times 2$ можно вырезать из куба $3 \times 3 \times 3$?

8. У некоторого числа зачеркнули последнюю цифру и сложили с исходным, получив в сумме 2013. Найдите все такие числа

9. Докажите, чо у натурального числа чётное число делителей тогда и только тогда, когда оно является точным квадратом (представимо ввиде $n = a^2$, где a натуральное).

10. Докажите, что числа от 40 до 99 нельзя разбить на группы по 4 числа так, чтобы числа каждой группы в одном разряде совпадали, а цифры другого разряда шли бы подряд (например “54, 55, 56, 57”; “44, 54, 64, 74”)