

Разнобой

1. Квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f'(x)g'(x) \geq |f(x)| + |g(x)|$ при всех действительных x . Докажите, что произведение $f(x)g(x)$ равно квадрату некоторого трёхчлена.

2. Дан выпуклый 7-угольник. Выбираются четыре произвольных его угла и вычисляются их синусы, от остальных трёх углов вычисляются косинусы. Оказалось, что сумма таких семи чисел не зависит от изначального выбора четырёх углов. Докажите, что у этого 7-угольника найдутся четыре равных угла.

3. На доске написано выражение $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$, где a, b, c, d, e, f — натуральные числа. Если число a увеличить на 1, то значение этого выражения увеличится на 3. Если в исходном выражении увеличить число c на 1, то его значение увеличится на 4; если же в исходном выражении увеличить число e на 1, то его значение увеличится на 5. Какое наименьшее значение может иметь произведение bdf ?

4. Все клетки квадратной таблицы $n \times n$ пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до n^2 . Петя делает ходы по следующим правилам. Первым ходом он ставит ладью в любую клетку. Каждым последующим ходом Петя может либо поставить новую ладью на какую-то клетку, либо переставить ладью из клетки с номером a ходом по горизонтали или по вертикали в клетку с номером большим, чем a . Каждый раз, когда ладья попадает в клетку, эта клетка немедленно закрашивается; ставить ладью на закрашенную клетку запрещено. Какое наименьшее количество ладей потребуется Пете, чтобы независимо от исходной нумерации он смог за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?

5. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непесекающиеся конечные подмножества A_1, A_2, A_3, \dots так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k , равнялась $k + 2013$?

6. Назовем многогранник хорошим, если его объем (измеренный в m^3) численно равен площади его поверхности (измеренной в m^2). Можно ли какой-нибудь хороший тетраэдр разместить внутри какого-нибудь хорошего параллелепипеда?