ОТА и около неё

Задача 1. Докажите, что произведение пяти последовательных нечетных натуральных чисел не может быть точным квадратом.

Задача 2. Для любых попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и остатков $r_1, r_2, \ldots, r_n$ по этим модулям найдутся n последовательных чисел таких, что первое даёт остаток r_1 при делении на m_1, второго r_2 при делении на m_2 и т.д.

Задача 3. Существует ли такое натуральное число n, что каждое из чисел $n, 2n, 3n, \ldots, 2014n$ является степенью (отличной от первой) натурального числа?

Задача 4. Федя выписывает слева направо бесконечную последовательность ненулевых цифр. После выписывания каждой цифры он раскладывает получившееся число на простые множители. Докажите, что рано или поздно один из этих множителей будет больше 100

Задача 5 (Теорема Редеи). Докажите $n^m \underset{m}{\equiv} n^{m-\phi(m)}$ при натуральных m, n больших единицы.

Задача 6. На доске в строчку написано n подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Под каждым из этих чисел написан его делитель, меньший этого числа и больший 1. Оказалось, что эти делители тоже образуют строчку подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Докажите, что каждое из исходных чисел больше, чем $\dfrac{n^k}{p_1 p_2 \ldots p_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — все простые числа, меньшие n.