

Геометрия-2

1. а) Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D , DM — её диаметр. Прямая BM пересекает сторону AC в точке K . Докажите, что $AK = DC$.

б) В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр I вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MI , которая пересекает высоту AH в точке E . Докажите, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.

2. а) Вписанная окружность $\triangle ABC$ касается стороны BC в точке A_0 . I_a — центр вневписанной окружности; M — середина стороны BC . Докажите, что $AA_0 \parallel MI_a$.

б) I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей; A_0, B_0, C_0 — середины сторон $\triangle ABC$. Докажите, что прямые I_aA_0, I_bB_0, I_cC_0 конкурентны.

3. Докажите, что точка пересечения медиан, точка Нагеля и инцентр $\triangle ABC$ лежат на одной прямой.

4. Постройте треугольник, если даны центр вписанной в него окружности, середина одной из сторон и основание опущенной на эту сторону высоты.

5. Вневписанная окружность касается стороны BC в точке A_1 . Прямая AA_1 второй раз пересекает вписанную окружность в точке P . M — середина стороны BC . Докажите, что PM касается вписанной окружности.

6. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Окружность ω_1 касается основания BC в точке M и продолжений сторон AB и CD за точки B и C ; окружность ω_2 касается основания AD в точке N и продолжений сторон AB и CD за точки A и D . Докажите, что отрезок MN проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

7. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC , I — центр вписанной в него окружности. C_2 — точка пересечения прямых C_1I и A_1B_1 , C_3 — точка пересечения прямых CC_2 и AB . Докажите, что прямая IC_3 перпендикулярна прямой AB .