Поляра

Определение 1. Пусть ω — окружность с центром O радиуса r, P — точка, отличная от O. Полярой точки P называется прямая p, перпендикулярная OP и проходящая через точку P', такую что P' лежит на луче OP и $OP \cdot OP' = r^2$. P называется полюсом прямой p.

Упражнение 1. Дана окружность ω и точка P вне её. Из P опустили касательные на ω, получившиеся точки касания обозначим через S, T. Докажите, что ST — поляра точки P

Упражнение 2. а) Что является полярой бесконечно удаленной точки?
б) Какая точка является полюсом бесконечно удаленной прямой?

1. а) Докажите, что если полюс A прямой a лежит на поляре b точки B, то точка B лежит на прямой a;
б) Пусть A, B, C — точки плоскости, a, b, c — их поляры. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда прямые a, b, c пересекаются в одной точке.
в) Прямая p — поляра точки P, P' — точка пересечения прямых OP и p, где O — центр окружности ω. A, B — точки пересечения прямой OP и окружности ω. Докажите, что $(A, B, P, P') = -1$.

2. Дана точка P вне ω. Из точки P проводятся пары секущих к окружности ω пересекающие окружность в точках A_1, B_1 и A_2, B_2
а) Докажите, что геометрическое место точек пересечения A_1A_2 и B_1B_2 является прямой.
б) Из точки P проведены касательные к ω. Докажите, что точки касания лежат на указанной прямой;
в) Докажите, что эта прямая является полярой точки P.

Упражнение 3. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть P — точка пересечения его диагоналей, Q – точка пересечения прямых AD и BC, R – точка пересечения прямых AB и CD. Докажите, что PQR — *полярный треугольник*, то есть RQ — поляра точки P, PQ — поляра R, PR — поляра Q.

Принцип двойственности: при полярном преобразовании
- точка (полюс) $\longleftrightarrow$ прямая (поляра);
- точки, лежащие на одной прямой $\longleftrightarrow$ прямые, пересекающиеся в одной точке;
- треугольник $\longleftrightarrow$ треугольник
- точка на ω $\longleftrightarrow$ касательная к ω.

3. Сформулируйте, чему двойственны теоремы а) Паскаля, б) Дезарга.в) Докажите, полученные теоремы с помощью проективной геометрии.

4 (Теорема Ньютона). а) Дан описанный четырехугольник $ABCD$. Его вписанная окружность касается сторон AB и CD в точках M и N. Докажите, что прямые AC, BD и MN пересекаются в одной точке.
б) Докажите, что во вписенном четырёхугольнике совпадают точка пересечения

диагоналей и точка пересения отрезков, соединяющих противоположные точки касания.

5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Точка O — центр его описанной окружности, R — точка пересечения диагоналей, P и Q — точки пересечения продолжений сторон. Докажите, что P, Q, R, O образуют *ортоцентрическую четверку точек* (то есть любая из них является ортоцентром треугольника, образованного тремя другими).

Паскаль, Брианшон, Папп, Ньютон

6. На сторонах AB, BC, CD и DA ромба $ABCD$ соответственно выбраны точки E, F, G и H таким образом, что отрезки EF и GH касаются вписанной в ромб окружности. Докажите, что прямые EH и FG параллельны

7. Пусть AK, BL, CM — высоты в остроугольном треугольнике ABC с ортоцентром H, точка P — середина AH. Прямые BH и MK пересекаются в точке S, прямые LP и AM пересекаются в точке T. Докажите, что TS перпендикулярно BC.

8. Окружность пересекает прямые BC, CA, AB в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2. Пусть l_a — прямая, соединяющая точки пересечения прямых BB_1 и CC_2, BB_2 и CC_1; прямые l_b и l_c определяются аналогично. Докажите, что прямые l_a, l_b и l_c пересекаются в одной точке (или параллельны).

9. В четырехугольник $ABCD$ вписаны две касающиеся друг друга в точке F окружности, причем одно из них касается сторон DA, AB и BC, а вторая — BC, CD и DA. K — точка касания первой окружности с AB, L — точка касания второй с CD, O — точка пересечения диагоналей четырехугольника. Докажите, что $OK + OL$ не больше, чем сумма диаметров этих окружностей.

10. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке O. Окружность ω_1 касается стороны BC вточке K и продолжений сторон AB и CD, окружность ω_2 касается стороны AD вточке L и продолжений сторон AB и CD. Известно, что точки O, K, L лежат на одной прямой. Докажите, что середины сторон BC, AD и центр окружности ω лежат на одной прямой.