Немного про вектора

Определение 1. Пусть задана система координат с центром в точке $O(0,0)$, $O_1(1,0)$, $O_2(0,1)$. Дальше мы будем использовать следующие обозначения $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OO_2}$,

1. а) Даны точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ разложения по базису векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$. б) Найдите координаты точки пересечения медиан треугольник ABC.

2. Докажите, что сумма векторов, идущих из центра правильного n-угольника в его вершины, равна $\overrightarrow{0}$.

3. Пусть на плоскости даны точки A, B, C. Докажите, что вектор

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|}$$

параллелен биссектрисе угла $\angle BAC$.

Определение 2. Радиусом вектором точки $A(x_0, y_0)$ называется вектор $\overrightarrow{OA}$, где O — начало координат. Соответственно, координаты этого вектора в разложении по $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ это (x_0, y_0).

4. Даны два вектора $\overrightarrow{a}(x_1, y_1)$ и $\overrightarrow{b}(x_2, y_2)$. а) Докажите, что вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$. б) Докажите, что вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

5. Дана точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\overrightarrow{a}(x_1, y_1)$. Напишите уравнение прямой проходящей через A и а) параллельной; б) перпендикулярной вектору $\overrightarrow{a}$.

6. а) Докажите, что на сторонах и диагоналях многоугольника с нечетным числом сторон можно расставить стрелки так, чтобы сумма всех полученных векторов была равна нулю. б) Всегда ли это можно сделать для многоугольника с данным четным числом сторон?

7. Дано $2n$ векторов на плоскости, двое по очереди берут себе по одному вектору. Выигрывает тот, у кого длина суммы его векторов будет больше. Кто выиграет при правильной игре, начинающий или его противник?

8. По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент времени они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.