

Элементарно, Ватсон, Индукция

1. У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растет щетина. Его пересекает несколько прямых общего положения (никакие две прямые не параллельны и никакие три не проходят через одну точку), на каждой из которых с одной из сторон растет щетина. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется бородатой снаружи.

2. Чему равна сумма $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$?

3. В ряд стоят 30 сапог: 15 левых и 15 правых. Докажите, что среди некоторых десяти подряд стоящих сапог левых и правых поровну.

4. Докажите, что $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, если $x \geq -1$, а n - натуральное число.

5. Фрекен Бок сообщила Малышу и Карлсону по натуральному числу и сказала, что эти числа отличаются на единицу. После этого Малыш и Карлсон по очереди задают друг другу один и тот же вопрос: "Знаешь ли ты мое число?". Докажите, что рано или поздно один из них ответит положительно.

6. В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трех цветов, по n штук каждого цвета. Доказать, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

7. Чему равна сумма $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$?