

### Многочлены, Поехали

1. Пусть многочлен  $C_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-(k-1))}{k!}$ . Докажите равенство  $C_k(x) \equiv C_{k-1}(x-1) + C_k(x-1)$ .

2. Найдите все многочлены  $P(x)$ , которые удовлетворяют равенству:

$$P(x) = \frac{P(x-1) + P(x+1)}{2}.$$

3. Существует ли многочлен, который в каждой положительной целой точке принимает значение, равное её сумме цифр?

4. Про многочлен  $f(x)$  с целыми коэффициентами известно, что  $f(x) - 2008$  имеет не менее 81 целых различных корней. Докажите, что если  $f(x) = h(x)g(x)$ , где  $g(x)$  и  $h(x)$  непостоянные многочлены с целыми коэффициентами, то степень многочлена  $g(x)$  больше 5.

5. При каких натуральных  $n$  выполнено  $x^{2n} + x^n + 1 \vdots x^2 + x + 1$ ?

6. Пусть многочлены  $P(x), R(x), Q(x)$  и  $S(x)$  удовлетворяют тождеству:

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) \equiv (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x).$$

Докажите, что  $P(x)$  делится на  $x - 1$ .