Оценки или всё, что угодно кроме, неравенств

1. Многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1$ с неотрицательными коэффициентами имеет n различных корней. Докажите, что $P(2) \geq 3^n$.

2. Дан многочлен $f \in \mathbb{R}[x], \deg f = n$. Какое наибольшее количество делителей он может иметь (делители, отличающиеся домножением на константу считаются одинаковыми)?

3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве целых чисел, не превосходящих по модулю 1000. Обозначим через m число пар (x, y) (порядок в парах важен, числа не обязательно различны), для которых $f(x) = g(y)$, через n — число пар, для которых $f(x) = f(y)$, а через k — число пар, для которых $g(x) = g(y)$. Докажите, что $2m \leqslant n + k$.

4. В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Растения считаются непохожими, если они различаются не менее, чем по 51 признаку. Пусть в ботаническом саду есть m попарно различных растений. Докажите, что а) $m \leqslant 50$, б) $m \leqslant 34$. *Указание ко второму пункту: добавьте новый признак: чётность количества признаков, тогда если раньше растения были различны не менее по 51 признаку, то теперь они различны не менее, чем по ...*

5. Из точки M внутри треугольника ABC опускаются перпендикуляры MA_1, MB_1, MC_1 на прямые BC, AC, AB соответственно. Какое минимальное значение принимает сумма $\dfrac{BC}{MA_1} + \dfrac{AC}{MB_1} + \dfrac{AB}{MC_1}$? Где при этом должна находиться точка M?

6. На танцах было $2n$ мальчиков и $2n$ девочек. Боря танцевал со всеми девочками, Аня танцевала со всеми мальчиками, и для любых двух девочек есть ровно n мальчиков, танцевавших ровно с одной из них. Докажите, что каждый мальчик, кроме Бори, танцевал ровно с n девочками.