

## Внутренняя опорная часть

**Определение 1.** Подграф, содержащий все вершины графа, называется остовным. Если остовный подграф является деревом, то он называется остовным деревом.

**Утверждение 1.** У любого связного графа существует остовное дерево.

1. В городе с любой станции метро можно проехать на любую другую. Докажите, что одну из станций можно закрыть на ремонт без права проезда через нее так, чтобы из любой оставшейся станции можно было проехать на любую другую.

2. Есть бактерия, которая делится на 3 бактерии. В дальнейшем появляющиеся бактерии могут делиться на четыре бактерии, могут на две, а могут и не делиться. Образовалось 102 бактерии. Определите число делений, если известно, что число бактерий, разделившихся на две, в 6 раз больше, чем число бактерий разделившихся на 4.

3. Медианой пятиугольника  $ABCDE$  назовем отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположащей стороны ( $A$  — с серединой  $CD$ ,  $B$  — с серединой  $DE$  и т. д.). Докажите, что если 4 медианы выпуклого пятиугольника перпендикулярны сторонам, к которым они проведены, то таким же свойством обладает и пятая медиана.

4. Докажите, что число  $30^{239} + 239^{30}$  — составное.

5. Составьте из первых 12 натуральных чисел, используя каждое по одному разу, шесть правильных дробей, сумма которых — целое число.

6. Есть ли среди натуральных чисел такое, что при умножении суммы его цифр на произведение его цифр получится 2004?

7. В графе 100 вершин и 100 ребер. Сколько может быть мостов в этом графе? *Мостом* называется ребро, при удалении которого граф становится несвязным.

8. На доске написаны числа  $1, 2, \dots, 2004$ . Разрешается заменять любое число на произведение его цифр или любые два числа на их сумму. Можно ли такими заменами добиться, чтобы среди чисел на доске появилось 3000000?

9. Журналист встретил группу из  $n$  туристов. Журналист знает, что один из туристов шпион — сам знает всех, а его никто не знает. Журналист может спросить любого человека, знает ли он другого человека. Все отвечают правду. а) Докажите, что за  $n - 1$  вопрос журналист сможет узнать шпиона. б) Сможет ли он это сделать быстрее?

10. В стране 100 городов и 199 дорог между ними. Из любого города можно добраться в любой другой. Докажите, что можно закрыть все дороги некоторого кольцевого маршрута на ремонт так, чтобы это условие не нарушилось.