Гомотетия

Определение 1. *Гомотетия* с положительным коэффициентом k и центром O — это преобразование плоскости с отмеченной точкой O, которое переводит каждую точку X в точку X', лежащую на луче OX, такую, что $OX' = k \cdot OX$. Обозначение H_O^k.

Если коэффициент $k < 0$, то определим гометию в точке O как композицию центральной симметрии и гомотетитии с коэфиуиентом $|k|$.

Упражнение 1. Основные свойства гомотетии H_O^k: а) Это биекция;
б) Если точки A и B переходят в точки A_1 и B_1, то что $A_1B_1 = |k|AB.$;
в) Прямую переводит в прямую;
г) Окружность переходит в окружность;
д) Равые углы в равные углы;
е) Точки параллельные прямые в параллельные, точки пересечения в точки пересечения;
ж) Треугольник в подобный треугольник;

Задача 1. а) Даны два параллельных отрезка разной длины. Укажите гомотетию, которая переводит один из них в другой. б) Сколько существует таких гомотетий?
б) Даны две окружноси(одна не лежит внутри другой). Найдите гомотетии, которая переводит одну в другую.

Задача 2. а) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. б) Найдите центр гомотетии, переводящей треугольник в его серединный треугольник. в) (*Прямая Эйлера*) Докажите, что точка пересечения медиан треугольника лежит на одной прямой с ортоцентром и центром описанной окружности (причем между ними). В каком отношении она делит отрезок между ними?

Задача 3. Докажите, что касательная к окружности переходит в касательную к окружности.

Задача 4. Через точку M касания двух окружностей проведена секущая, пересекающая окружности соответственно в точках A и B. Докажите, что касательные, проведенные к окружностям в точках A и B, параллельны.

Задача 5. а) Пусть высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Рассмотрим следующие 9 точек: середины сторон, основания высот, середины отрезков AH, BH, CH. Докажите, что после гомотетии с центром в точке H и коэффициентом 2 эти точки попадут на описанную окружность.
б) Докажите, что исходные 9 точек лежали на одной окружности (эта окружность называется окружностью Эйлера или окружностью 9 точек).
в) Найдите радиус окружности 9 точек. Докажите, что центр этой окружности лежит на прямой Эйлера.