

Ориентированные графы и ко

1. Дима, приехав из Врунляндии, рассказал, что там есть несколько озер, соединенных между собой реками. Из каждого озера вытекают три реки, и в каждое озеро впадают четыре реки. Докажите, что он ошибается.

2. Пусть p простое число и a — ненулевой остаток при делении на p . Определим ориентированный граф умножений на множестве ненулевых остатков по модулю p .

Из вершины x ведёт ребро в вершину $x \cdot a$.

а) Докажите, что в каждую вершину входит ровно одно ребро.

б) Докажите, что весь граф разбился на непересекающиеся циклы.

в) Докажите, что существует такое число k , что $a^k \equiv 1 \pmod{p}$. г) Докажите, что все циклы имеют одинаковую длину d .

д) Докажите, что $p - 1 \div d$.

е) Докажите, что $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

3. В связном графе степени всех вершин четны. Докажите, что на ребрах этого графа можно расставить стрелки так, чтобы выполнялись следующие условия:

а) двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой;

б) для каждой вершины числа входящих и выходящих ребер равны.

4. Найдите все точки X внутри треугольника ABC такие, что $\frac{S_{ABX}}{S_{CDX}} = \frac{a}{b}$.

5. В одном государстве 100 городов и каждый соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения на одной дороге так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.

6. Какие-то две команды набрали в круговом волейбольном турнире одинаковое число очков. Докажите, что найдутся команды А, В и С такие, что А выиграла у В, В выиграла у С, а С выиграла у А.

7. Про треугольник известно, что все его высоты не превосходят 1. Какую наибольшую площадь он может иметь?

8. Точку M , лежащую внутри треугольника, соединили со всеми его вершинами. Оказалось, что площади образовавшихся треугольников равны. Докажите, что M — точка пересечения медиан.

9. На шахматной доске 8×8 стоит 50 пешек. Разрешается выбрать квадрат 2×2 , в котором стоит единственная пешка, и снять ее. Докажите, что не удастся снять все пешки.

10. Играют двое. Первый выписывает в строку слева направо 19-значное число из цифр 1 и 2. После выписывания Первым очередной цифры Второй, если хочет, меняет между собой какие-то две цифры из уже написанного ряда. Всегда ли

Второй может добиться того, чтобы итоговое число читалось одинаково слева направо и справа налево?