# Теория Рамсея

**Определение 1.** Число Рамсея $R(k, l)$ есть наименьшее целое $n$, такое, что при любой раскраске ребер полного $n$-вершинного графа в синий и красный цвета либо существует красный подграф $K_k$ (т. е. полный подграф на $k$ вершинах, каждое ребро которого раскрашено в красный цвет), либо существует синий подграф $K_l$.

**1.** Найдите а) $R(2, n)$, б) $R(3, 3)$.

**2.** Докажите неравенство $R(k, l) \leqslant R(k-1, l) + R(k, l-1)$.

**Теорема 1.** *Для любых $k$ и $l$ существует число Рамсея.*

**3.** Сформулируйте и докажите теорему рамсея для нескольких цветов.

**4.** Докажите, что $R(k, l) \leqslant C_{r+s-2}^{r-1}$.

**5 (Теорема Шура).** Доказать, что для любого $r \in \mathbb{N}$ существует $n$, такое, что для любого раскрашивания первых $n$ натуральных чисел в $r$ цветов найдется одноцветное решение уравнения $x + y = z$.

**Теорема 2** (Теорема Рамсея). *Пусть $p, q, r$ — натуральные числа, причём $p, q \geqslant r$. Существует число $N(q, p, r)$ такое, что для любого $n \geqslant N(q, p, r)$ верен следующий факт: если мы разобьё все $r$ элементные подмножества некоторого $n$-элементного множества $A$ на две непересекающиеся части $B$ и $C$, то либо существует $q$ элементное подмножество $D \subseteq A$ такое, что все его $r$-элементные подмножества принадлежат $B$, либо существует элементное подмножество $E \subseteq A$ такое, что все его $r$-элементные подмножества принадлежат $C$.*

*О чём теорема. Понимать нужно примерно так, у нас есть группа из n людей. В этой группе рассматриваются всевозможные подгруппы из 5 людей. Для каждой такой подгруппы смотрится — удовлетворяет она какому-то свойству (например, что из букв их имён можно сложить слово «БРЯК» или нет). Таким образом мы все подгруппы разбили на два класса: в первом классе находятся подгруппы (не люди!), которые удовлетворяют свойству, во втором, которые не удовлетворяют. Оказывается, тогда для достаточно большого n, мы можем выбрать либо таких p людей, что их всевозможные подгруппы из 5 человек будут лежать в первом класс, т.е. удовлетворять свойству. Либо можно выбрать q людей, чтобы их всевозможные подгруппы из 5 человек не будут удовлетворять свойству, т.е. лежать во втором классе.*

**Определение 2.** Фигура $F$ называется выпуклой, если для любых двух точек $A, B \in F$ верно, что весь отрезок $AB$ содержится в $F$. *Выпуклой оболочкой* системы точек называется наименьшая фигура (наименьшая по включению), содержащая все эти точки.

**6 (Задача со счастливым концом).** а) Докажите, что если для любых четырёх вершин многоугольника верно, что их выпуклая оболочка образует четырёхугольник, то весь многоугольник выпуклый.

б) Докажите, что среди любых 5 точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой), можно выбрать 4 таких, что их выпуклая оболочка образует четырёхугольник.
в) Докажите, что для любого натурального $n$ существует такое $N$, что для любого набора точек общего положения, в котором точек не меньше $N$, можно выбрать $n$, что они образуют выпуклый $n$-угольник.

**Теорема 3** (Теорема Ван дер Вардена). *Зафиксируем натуральные числа $r, k$. Расскрасим первые $N$ натуральных чисел в $r$ цветов произвольным образом. Тогда для достаточно большого $N$ найдётся одноцветная арифметическая прогрессия из $k$ членов.*

В последующих задачах не обязательно применяются предыдущие теоремы, может быть только схожие идеи.

**7.** Докажите следующие неравенства а) $R(3,4) \leqslant 9$; б) $R(3,5) \leqslant 14$; в) $R(4,4) \leqslant 18$;

**Определение 3.** Турниром на $n$ вершинах называется полный граф, в котором каждому ребру задали ориентацию. Транзитивный турнир - такой, когда $a \to b$, $b \to c$ влечет $a \to c$.

**8.** Доказать, что, если $n \geqslant 2^k$, то в любом турнире на $n$ вершинах содержится транзитивный подтурнир на $k$ вершинах.

**9.** На вечеринку пришло а) 13; б) 14 гостей, причем среди любых трех из них есть двое знакомых. Докажите, что гости могут разбиться на 4 группы, в каждой из которых все попарно знакомы.

**10.** Будем рассматривать перестановки порядка $N \in \mathbb{N}$ без повторений, то есть упорядоченные наборы $\{a_i \in \{1, .., N\}, i = 1, ..., N; a_i \neq a_j, i \neq j\}$. Пусть также на элементы перестановок наложены дополнительные $M$-ограничения: $j - M \leq a_j \leq j + M, j = 1, ..., N$, для некоторого фиксированного $M \in \mathbb{N}$.

Доказать, что для любого $M \in \mathbb{N}$ существует $N_0 \in \mathbb{N}$ такое, что в любой перестановке порядка $N \geq N_0$ с $M$-ограничением найдётся тройка элементов $a_j, a_k, a_l$, значения и индексы которых составляют арифметические прогрессии.

**11.** Пусть дана последовательность чисел длины $mn + 1$. Тогда в ней найдется либо неубывающая подпоследовательность длины $n + 1$, либо неубывающая подпоследовательность длины $m + 1$.

**12.** Ребра графа на 30 вершинах покрашены в два цвета таким образом, что он не содержит одноцветного треугольника. Какое наибольшее число ребер в нем может быть?