

Разнойбой

1. Let $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ be a complex polynomial with $a_n \neq 0$ and $M = \max_{0 \leq k < n} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|$. If $a_{n-1} = \dots = a_{n-k+1} = 0$, then all roots of the polynomial P are less than $1 + \sqrt[k]{M}$ in modulus. In particular, for $k = 1$, each zero of $P(x)$ is of modulus less than $M + 1$.

2. Существует ли ограниченная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f(1) > 0$ и $f(x)$ удовлетворяет при всех $x, y \in \mathbb{R}$ неравенству $f^2(x+y) \geq f^2(x) + 2f(xy) + f^2(y)$?

3. Последовательности положительных чисел (x_n) и (y_n) удовлетворяют условиям $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}^2, y_{n+2} = y_n^2 + y_{n+1}$ при всех натуральных n . Докажите, что если все числа x_1, x_2, y_1, y_2 больше 1, то $x_n > y_n$ при каком-нибудь натуральном n .

4. a и b — различные натуральные числа такие, что $ab(a+b)$ делится на $a^2 + ab + b^2$. Докажите, что $|a - b| > \sqrt[3]{ab}$.

5. Пусть A' — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC . Прямая a проходит через точку A' и параллельна биссектрисе внутреннего угла A . Аналогично строятся прямые b и c . Докажите, что a, b и c пересекаются в одной точке.