

Чёрный ящик

Задача 1. Имеется некоторое множество A и имеется чёрный ящик. Известно, что если вы положите любой элемент a из A в него, то ящик выдаст некий элемент b , который тоже принадлежит A . Причём на одно и тоже a ящик выдаёт всегда одно и тоже b .

Мальчик Петя взял некий элемент $a_1 \in A$, положил его в ящик и получил элемент a_2 . С элементом a_2 он поступил точно также, получил a_3 . И так далее. В итоге получился бесконечный ряд метаморфоз элемента $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Докажите, что этот ряд начиная с некоторого момента заикнется.

Задача 2. ЛМШонок решил сдать Александру Владимировичу задачу. А.В. оставил на дверях всех комнат корпуса №9 записки следующего содержания: «Я в комнате № ...» и исчез в неизвестном направлении (разные записки могут сообщать разную информацию). ЛМШонок начал поиски А.В. с 15-ой комнаты, руководствуясь этими указаниями. а) Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу. б) Можно ли утверждать, что ЛМШонок когда-нибудь вернется в 15-ую комнату?

Определение 1. Последовательность называется периодической с периодом T , если существует такое число n_0 , что $a_n = a_{n+T}$ для любого $n \geq n_0$. Начало последовательности до первого периода называется предпериодом.

Задача 3. а) Пусть x – дата вашего рождения. Разделите x на 17 в столбик, докажите, что в частном будет периодическая дробь, найдите период. б) Докажите что любое рациональное число P/Q записывается периодической десятичной дробью.

Задача 4. Какой остаток при делении на 7 дает число а) 3^{100} , б) 5^{100n} , в) 3^{4^n} ?

Задача 5. В последовательности 1,9,9,9,... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырех цифр. Встретятся ли дальше в этой последовательности следующие наборы цифр: а) 1,9,9,9? б) 9,0,1,9? в) 2,0,1,1?

Задача 6. а) В стране из каждого города выходят ровно три дороги в другие города. Путешественник выехал из города А и поворачивал все время направо. Докажите, что когда-нибудь он снова попадет в город А. б) То же самое, но путешественник сворачивал поочередно то налево, то направо. в) То же самое, но путешественник поворачивал по такой программе: два раза направо, три раза налево; потом снова два раза направо, три раза налево и т. д.