

2D-Листик

Определение 1. Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, что никакие его два ребра (за исключением ребер, выходящих из общей вершины) не имеют общих точек. Граф, нарисованный таким образом, называется *плоским*.

Плоский граф разбивает плоскость на несколько частей. Эти части называются *гранями* плоского графа. Любой плоский граф содержит ровно одну неограниченную грань, которая называется *внешней*, остальные — *внутренними*.

1 (Формула Эйлера). Для любого связного плоского графа верно равенство

$$B - P + \Gamma = 2,$$

где B — число вершин, P — число ребер, Γ — число граней графа.

2. Докажите, что для связного планарного графа с $B \geq 3$ вершинами и P ребрами выполняются неравенства

$$\text{а) } 3\Gamma \leq 2P, \quad \text{б) } P \leq 3B - 6.$$

3. В одной деревне ровно три дома и три колодца. Жители разных домов перестали доверять друг другу и решили проложить от своих домов по три дороги, ведущих к каждому из колодцев так, чтобы дороги не пересекались. Удастся ли им это?

4. Букашка, сидящая на стенке лабиринта, может попасть в любое другое место на стенке лабиринта единственным путем. Докажите, что крыса, сидящая в лабиринте, сможет выбраться.

5. Докажите, что в любом планарном графе есть вершина степени не более, чем 5.

6. Государства, расположенные на острове, имеют форму треугольников, в вершинах которых находятся туристические агентства. Известно, что ни внутри острова, ни внутри сторон треугольных государств нет точек, в которых сходятся границы трех государств. Сколько государств находится на острове, если туристических агентств всего а) 10, б) n .

7. Докажите, что в условиях предыдущей задачи найдется государство, у которого ровно один сосед.

8. При каких натуральных n полный граф на n вершинах будет планарным?

9. На плоскости даны 5 кругов, любые два из которых пересекаются. Докажите, что какие-то три из них имеют общую точку.