Дискретная производная

Определение 1. Пусть задана последовательность чисел $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$. *Дискретной производной* данной последовательности называется последовательность $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ такая, что $b_i = a_{i+1} - a_i$. Если последовательность задана некоторой функцией $a_i = f(i)$, то её дискретную производную будем обозначать $\triangle f(n)$.

Упражнение 1. Вычислите дискретную производную от следующих последовательностей: а) $f(n) = 1$, б) $f(n) = n + 3$, в) $f(n) = n^k$,
г) $f(n) = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$.

Упражнение 2. Что можно сказать о последовательностях, у которых совпадают дискретные производные?

1. Найдите все такие функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, что $f(n) = a \cdot \triangle f(n)$, где a – некоторое фиксированное число.

Определение 2. Мы можем брать производную от последовательности несколько раз, k-ой дискретной производной функции f называется последовательность $\triangle^k f(n) = (\triangle^k f)(n+1) - (\triangle^k f)(n)$. Определение индуктивное. У нас определена первая производная и потом мы поочерёдно определяем следующие.

2. Докажите, что если $f(n)$ – многочлен, то существует такое k, что $\triangle^k f(n) = 0$. Докажите обратное утверждение.

3. Найдите явную формулу для $\triangle^k f(n)$.

4. Найдите n-ую дискретную производную многочлена n-ой степени. Из этого знания найдите

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^n C_n^k.$$

5. Докажите, что если m и n — целые числа, $1 < m < n$, то

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^m C_n^k = 0.$$

(Подсказка: постройте интерполяционный многочлен для многочлена x^m по n точкам.)

6. Найдите все функции из а) $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$,б) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со свойством $p(x+1) = p(x) + 2x + 1$.

7. Дана функция $f(x)$, значения которой при любом целом x целые. Известно, что для любого простого p существует многочлен $Q_p(x)$ степени не больше 2013 с целыми коэффициентами такой, что $f(n) - Q_p(n)$ делится на p.

Верно ли, что существует многочлен $g(n)$ с вещественными коэффициентами такой, что $g(n) = f(n)$ для любого целого n?

8. а) Докажите, что функция $f(n) = 1^{20} + 2^{20} + \dots + n^{20}$ является многочленом от n с рациональными коэффициентами. б) Найдите значение $f(-\frac{1}{2})$.