Сиди и пиши

1. Каждый из пассажиров автобуса получил билет с шестизначным номером, причем все номера билетов — последовательные числа. Какое наибольшее количество пассажиров могло ехать в автобусе, если ровно у 1/12 из них в номере билета есть цифра 7?

2. Число, написанное на доске, каждую минуту либо удваивается, либо из него вычитается единица. После нескольких таких операций из числа 1 было получено число 2002. Докажите, что в некоторый момент на доске было написано число, содержащее в своей записи цифру 3.

3. Рациональные числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0.$$

Докажите, что число $1 - ab$ является квадратом рационального числа.

4. Семь лыжников с номерами 1, 2, ..., 7 ушли со старта по очереди и прошли дистанцию — каждый со своей постоянной скоростью. Оказалось, что каждый лыжник ровно дважды участвовал в обгонах. (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника — тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.) По окончании забега должен быть составлен протокол, состоящий из номеров лыжников в порядке финиширования. Докажите, что в забеге с описанными свойствами может получиться не более двух различных протоколов.

5. Дан квадрат $n\times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?

6. Докажите, что попарно различные точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда отношение $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ вещественно.

7. Нарисуйте на комплексной плоскости множество $\mathrm{Im}(1/z) > 1$