Квадратичный трёхчлен

Задача 1. Пусть a и c положительные числа. Сумма наименьшего возможного значения квадратного трехчлена $ax^2 - bx + c$ и наименьшего значения $cx^2 + bx + a$ равна 0. Докажите, что наименьшее значение каждого из них равно 0.

Задача 2. Рассматривая квадратный трехчлен $(a_1+tb_1)^2+(a_2+tb_2)^2+\ldots+(a_n+tb_n)^2$, докажите неравенство КБШ (Коши – Буняковского – Шварца): для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполнено

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Задача 3. Рациональные числа a, b, c удовлетворяют условию $\dfrac{1}{1+bc} + \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{1}{1+b}$. Докажите, что b — квадрат рационального числа.

Задача 4. Парабола на координатной плоскости называется красивой, если её вершина и две точки пересечения с осью абсцисс образуют равносторонний треугольник. Докажите, что у всех квадратных трёхчленов с красивыми графиками одинаковый дискриминант.

Задача 5. Число r называется *квадратичным вычетом* модулю p (простое нечётное), если существует такое целое a такое, что $r \underset{p}{\equiv} a^2$. Сколько квадратичных вычетов среди чисел $0, \ldots, p-1$.

Задача 6. Сколькими способами числа $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{2005}$ можно разбить на два непустых множества A и B так, чтобы уравнение $x^2 - S(A)x + S(B) = 0$,где $S(M)$ —сумма чисел множества M, имело целый корень?