Комплексные числа и многочлены

Теорема 1. *Любой неконстантный многочлен над $\mathbb{C}[x]$ имеет хотябы один корень.*

Упражнение 1. Докажите, что любой многочлен над $\mathbb{C}[x]$ степени n имеет ровно n корней с учётом кратности. Иными словами любой многочлен над $f \in \mathbb{C}[x]$ можно представить следующим образом (причём представление единственное и уникальное):

$$f(x) = a(x - z_1)^{a_1} \dots (x - z_k)^{a^k}, a_1 + \dots + a_k = n.$$

Упражнение 2. Найдите все неприводимые над а) $\mathbb{C}[x]$; б) $\mathbb{R}[x]$.

Новый взгляд на старые задачи.

1. При каких натуральных n выполнено $x^{2n} + x^n + 1 \;\vdots\; x^2 + x + 1$?

2. Найдите все многочлены из $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ такие, что $f(x-1) = f(x)$.

3. Найдите нод многочленов а) $(x^m - 1, x^n - 1)$,б) $(x^m + 1, x^n + 1)$.

4. Найдите все целые x такие, что число $x^4 + 4$ простое.

5. Докажите, что многочлен $P(z)$ представляет собой чётную функцию от $z \in \mathbf{C}$ тогда и только тогда, когда существует многочлен $Q(z)$, такой что $P(z) = Q(-z)Q(z)$.

6. Существует ли многочлен $P(x)$, степени 1000 такой, что $P(x^2+x+1)$ делится на $P(x)$.

7. Найдите все ненулевые многочлены $P(x)$, удовлетворяющие тождеству

$$P(x^2) = (P(x))^2.$$

Указание: посмотрите на корни, могут ли они быть все вещественные? какие модули могут быть у корней?

8. Многочлен с действительными коэффициентами принимает неотрицательные значения во всех действительных точках тогда и только тогда, когда он представим в виде суммы квадратов двух других многочленов с действительными коэффициентами.

Указание: разложите многочлен на неприводимые множители

9. Найдите, чему равны следующие суммы: а) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$, б) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots$, в) $C_n^0 + C_4 + C_n^8 + \dots$,г) $C_n^0 + C_3 + C_n^6 + \dots$.

10. Какие преобразования комплексной плоскости задают следующие отображения: а) $z :\to az$, где a вещественное;
б) $z :\to az$, где a комплексное число, по модулю равное 1;
в) $z :\to a(z - z_0) + z_0$, где a комплексное число, по модулю равное 1, а z_0 произвольное комплексное число;