Геометрия

1. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ такой, что $AD = AB + CD$. Оказалось, что биссектриса угла A проходит через середину стороны BC. Докажите, что биссектриса угла D также проходит через середину BC.

2. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). На меньшей дуге AB описанной около него окружности взята точка D. На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно BC. Описанная окружность треугольника BDE пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что прямые EF и BC параллельны.

3. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке P. Через центр ω_1 проведена прямая ℓ_1, касающаяся ω_2. Аналогично, прямая ℓ_2 касается ω_1 и проходит через центр ω_2. Оказалось, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 непараллельны. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе одного из углов, образованных прямыми ℓ_1 и ℓ_2.

4 (Прямая Симсона). Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных их точки описанной окружности треугольника ABC на прямые AB, BC и CA лежат на одной прямой.

5. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D такая, что $BD = AC$. Медиана AM этого треугольника пересекает отрезок BD в точке K. Оказалось, что $DK = DC$. Докажите, что $AM + KM = AB$.

6. Точки A, B и C лежат на окружности, а прямая b касается этой окружности в точке B. Из точки P, лежащей на прямой b, опущены перпендикуляры PA_1 и PC_1 на прямые AB и BC соответственно (точки A_1 и C_1 лежат на отрезках AB и BC). Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$.

7. На стороне AC треугольника ABC отметили произвольную точку D. Пусть E и F — точки, симметричные точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно.