$P(10)$ — адические числа

1. Для любого k существует ровно 4 k-значных последовательности цифр, таких, что квадрат любого числа, заканчивающегося такой последовательностью, тоже заканчивается такой последовательностью.

Замечание. Заметим, что из двух нетривиальных последовательностей одна заканчивается на 5 (обозначим её x_k), а другая на 6 (y_k).

2. Покажите, что x_k — последовательность, состоящая из последних k цифр числа x_{k-1}^2.

3. Покажите, что y_k — последовательность, состоящая из последних k цифр числа y_{k-1}^5.

Замечание. Получается, что x_k и y_k получаются из x_{k-1} и y_{k-1} приписыванием слева одной цифры. Если не остановить этот процесс приписывания цифр, мы получим , кроме двух тривиальных бесконечных последовательностей $000\ldots000$ и $000\ldots001$ ещё две нетривиальные: $\ldots8212890625$ и $\ldots1787109376$. Обозначим их X и Y соответственно.

Определение 1. Бесконечные влево последовательности десятичных цифр назовём 10-адическими числами.

Определение 2. Бесконечные влево последовательности остатков при делении на p назовём p-адическими числами.

4. Найдите:
а) $\ldots325325325+\ldots73737373$
б) $\ldots325325325+\ldots89898989$
в) $\ldots33333333^2$ (5 последних цифр и принцип нахождения).
г) -1 (10-адическое число, дающее $0=\ldots000$ при сложении с числом 1).

5. а) Покажите, что $XY = 0$.
б) Докажите, что $X + Y = 1$.
в) Для простого p найдите критерий существования обратного элемента к элементу x ($xy = 1$).

6. Покажите, что $X - Y$ является решением уравнения $x^3 = x$.

7. а) При $m = 2k$ уравнение $x^m = x$ имеет ровно четыре решения;
б) При $m = 4k - 1$ уравнение $x^m = x$ имеет ровно девять решений;
в) При $m = 4k + 1$ уравнение $x^m = x$ имеет ровно пятнадцать решений в 10-адических числах.