

Алгоритм Евклида и Ко

Задача 1. Докажите, что любая точка на биссектрисе равноудалена от сторон угла и все точки, которые равноудалены от сторон угла лежат на биссектрисе.

Определение 1. Алгоритм Евклида: для того, чтобы найти *НОД* двух целых чисел a и b , нужно выполнить последовательно несколько делений с остатком:

$$a = bq_1 + r_1$$

$$b = r_1q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3$$

$$r_2 = r_3q_4 + r_4$$

...

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0$$

Задача 2. Найдите а) (1547,2010) б) (-144,-233)

Определение 2. Даны два целых числа a, b . Линейным представлением *НОДа* $c = (a, b)$ называется выражение такого типа: $c = ar + bq$, где q, r — целые числа.

Задача 3. С помощью алгоритма Евклида найдите линейное представление *НОД* чисел 13 и 21.

Задача 4. Какие значения может принимать наибольший общий делитель чисел $3n + 1$ и $7n - 4$ в зависимости от n ?

Задача 5. Найдите наибольшее натуральное число n , такое, что числа 78, 559, 1151 при делении на n дают одинаковые остатки.

Задача 6. Буратино, Мальвина и Пьеро приехали в страну Дураков. В этой стране 8 городов и между каждыми двумя ходят электрички. В столице, в Центральном Дурагенстве им предложили 28 билетов: по одному на каждый из маршрутов. По такому билету одна персона может проехать между данными двумя городами в любом направлении, но при выходе с электрички билет отбирается. Смогут ли друзья, взяв каждый по 8 билетов, посетить все города и вновь встретиться возле Центрального Дурагенства?

Задача 7. Дано n точек, $n > 4$. Докажите, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в каждую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум.

Задача 8. Мэрия решила построить в каждом квартале города, имеющего 155 перекрестков и 260 отрезков улиц между перекрестками, универсам. Сколько будет построено универсамов.

Задача 9. Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к середине гипотенузы равна половине гипотенузы.

Задача 10. Докажите неравенство $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$.