Разнобой

1. Докажите, что при $0 < x < \pi$ — выполнено неравенство $(\operatorname{tg} x)^{\sin} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geqslant 2$.

2. Боковое ребро четырехугольной пирамиды назовем хорошим, если медианы двух содержащих его граней, проведенные в середину этого ребра, равны. Докажите, что если в пирамиде три боковые ребра хорошие, то четвертое боковое ребро также является хорошим.

3. Усердная Аня выписала в некотором порядке числа от 1 до 50. Настойчивая Соня прибавила к каждому числу его порядковый номер. Докажите, что среди полученных сумм существует хотя бы две, дающие одинаковый остаток при делении на 50.

4. В полном графе на n вершинах каждое ребро раскрашено в один из k цветов и все цвета присутствуют. Известно, что не существует треугольника с рёбрами трёх разных цветов. Докажите, что $k \leqslant n - 1$ и оценка точная.

5. В стране 2000 городов. Каждый город связан беспосадочными двусторонними авиалиниями с некоторыми другими городами, причём для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки (то есть 1, 2, 4, 8, ...). Для каждого города А статистик подсчитал количество маршрутов, имеющих не более одной пересадки, связывающих А с другими городами, а затем просуммировал полученные результаты по всем 2000 городам. У него получилось 100000. Докажите, что статистик ошибся.

6. Множество M, содержащее 2003 различных числа, таково, что для любых двух различных элементов a, b из M число $a^2 + b\sqrt{2}$ рационально. Докажите, что для любого a из M число $a\sqrt{2}$ рационально.