

Лес рубят, висячие вершины летят

Определение 1. *Лесом* называется граф без циклов. *Почему так называется?*

1. Сколько рёбер в графе, являющимся лесом с n вершинами и k компонентами связности?
2. Может ли сумма 13 точных ненулевых квадратов быть точным квадратом ?
3. Сколько минимум рёбер нужно удалить из полного графа на n вершинах так, чтобы он стал а) деревом б) несвязным?
4. а) В связном графе все вершины имеют четную степень. Докажите, что в графе есть цикл. б) В дереве все вершины имеют нечётную степень. Докажите, что более половины вершин - висячие.
5. Докажите, что если граф связан и между любыми двумя вершинами существует ровно один путь, то граф является деревом
6. Докажите, что число $300^{3000} - 1$ делится на 1001.
7. Куб со стороной n ($n \geq 3$) разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между единичными кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?
8. Дан правильный треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку C взята точка D , а на продолжении стороны BC за точку C — точка E так, что $BD = DE$. Докажите, что $AD = CE$.
9. Докажите, что уравнение $x^2 + 5 = y^3$ не имеет решений в целых числах.
10. Квадратная страна 2000×2000 км разбита на прямоугольные области 100×200 км. Области объявили независимость, и каждая пара областей, имеющих общий участок границы, построила на двоих одну таможню. Какое наибольшее число таможен могло быть построено?