# Изогональное сопряжение и симедиана.

**1.** Найдите изогонально сопряжённую точку точке пересечения высот.

**2.** Если прямые $PB$ и $PD$, проведенные вне параллелограмма $ABCD$ составляют равные углы со сторонами $BC$ и $DC$ соответственно, то $\angle CPB = \angle DPA$

**Определение 1.** Возьмем точку внутри треугольника и опустим из нее перпендикуляры на его стороны. Треугольник с вершинами в основаниях этих перпендикуляров назовем *педальным.* А его описанную окружность назовем *педальной окружностью* данной точки.

**3.** Докажите, что педальные окружности двух точек совпадают а) тогда и б) только тогда, когда эти точки изогонально сопряжены. При этом центр педальной окружности лежит посередине между точкой и изогонально сопряженной к ней.

**Определение 2.** Треугольника называется прямая, симметричная его медиане относительно биссектрисы угла, из которого проведена медиана.

**4.** а) Пусть $BM$ — симедиана треугольника $ABC$. Докажите, что $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|^2}{|BC|^2}$.
б) Точка Лемуана Докажите, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

**Определение 3.** Если прямые $a$ и $b$ пересекают прямые $c$ и $d$ так, что угол от прямой $a$ до прямой $c$, отсчитываемый в некотором направлении (например, против часовой стрелки), равен углу от $d$ до $b$, отсчитываемому в том же направлении, то говорят, что прямые $a$ и $b$ антипараллельны относительно прямых $c$ и $d$.

**5.** Дан Треугольник $ABC$, на лучах $AB$ и $AC$ отметили точки $B_1$ и $C_1$ так, что прясые $BC$ и $B_1C_1$ антипараллельны. Докажите, что:
а) четырёхугольник $BCC_1B_1$ вписанный;
б) Треугольник $ABC$ и $AB_1C_1$ можно перевести один в другой композицией гомотетии и симметрией относительно биссектрисы.
в) Медиана $ABC$ из вершины $A$ является симедианой $AB_1C_1$.

**6.** Треугольник $ABC$ вписан в окружность $\omega$, касательные к $\omega$ в точках $B$ И $C$ пересекаются в точке $P$, докажите, что луч $AP$ содержит симедиану.

**Определение 4.** Вписанный четырехугольник называется *гармоническим*, если произведения длин его противоположных сторон равны.

**7.** а) Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, $M$ — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|^2}{|BC|^2} = \frac{|AD|^2}{|DC|^2}$.
б) Докажите, что каждая диагональ гармонического четырехугольника является симедианой треугольников, на которые разбивает четырехугольник другая диагональ.

**8.** а) Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, $M$ — точка пересечения его диагоналей, $P$ — точка пересечения касательной к его описанной окружности в точке $B$ и прямой $AC$. Докажите, что точки $A$, $C$, $M$, $P$ образуют гармоническую четверку точек.

б) Докажите, что вписанный четырехугольник $ABCD$ является гармоническим тогда и только тогда, когда касательные к его описанной окружности в точках $B$ и $D$ пересекаются на прямой $AC$, либо параллельны этой прямой.
в) Докажите, что гармонический четырехугольник однозначно задается тремя своими вершинами (порядок обхода вершин также известен) и укажите способ его построения по трем данным вершинам.
г) Диагональ $BD$ вписанного четырехугольника $ABCD$ является симедианой треугольника $ABC$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ гармонический.

**9.** Пусть $N$ — середина диагонали $AC$ гармонического четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $\angle BNC = \angle DNC$.

**10.** Пусть $PT$ и $PB$ — две касательные к окружности, $AB$ — ее диаметр, и $TH$ — перпендикуляр, опущенный из точки $T$ на $AB$. Докажите, что прямая $AP$ делит пополам отрезок $TH$.

**11.** $ABCD$ — параллелограмм, прямая $\ell$ проходит через $B$ перпендикулярно $BC$. Две окружности с общей хордой $CD$ касаются прямой $\ell$ в точках $P$ и $Q$. Докажите, что отрезки $DP$ и $DQ$ видны из середины $AB$ под равными углами.