

## Площади

**Теорема 1.** Площадь треугольника  $ABC$  с высотой  $h_a$ , проведённой из вершины  $A$ , равна  $S_{ABC} = \frac{1}{2}h_a BC$ .

**Задача 1.** Диагонали  $AC$  и  $BD$  трапеции  $ABCD$  ( $BC$  параллельно  $AD$ ) пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что треугольники  $AOB$  и  $COD$  равновелики. Докажите обратное утверждение: если треугольники  $AOB$  и  $COD$  равновелики, то  $BC$  параллельно  $AD$ .

**Задача 2.** а) Докажите, что медиана делит треугольник на две равновеликие части (фигуры называются равновеликими, если имеют одинаковую площадь).

б) На медиане  $AM$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $K$ . Докажите, что площади треугольников  $AKB$  и  $AKC$  равны.

**Задача 3.** а) Дан треугольник  $ABC$  проведены медианы  $AA_1$  и  $BB_1$ , которые пересеклись в точке  $O$ . Докажите, что площади треугольников  $AOC$ ,  $BOA$ ,  $COB$  равны. б) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

**Задача 4.** Точка  $B_1$  лежит на стороне  $OB$  угла  $AOB$ . Докажите, что  $S_{AOB}/S_{AOB_1} = OB/OB_1$ .

**Задача 5.** а) Докажите, что площади треугольников с равным углом относятся как произведения сторон, заключающих этот угол (т.е. если  $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$ , то  $S_{A_1O_1B_1}/S_{A_2O_2B_2} = O_1A_1 \cdot O_1B_1 / O_2A_2 \cdot O_2B_2$ ).

б) Докажите то же утверждение для треугольников с углами, дополняющими друг друга до  $180^\circ$  (т.е. если  $\angle A_1O_1B_1 + \angle A_2O_2B_2 = 180^\circ$ , то  $S_{A_1O_1B_1}/S_{A_2O_2B_2} = O_1A_1 \cdot O_1B_1 / O_2A_2 \cdot O_2B_2$ ).

**Задача 6.** Докажите теорему Фалеса:

а) Две параллельные прямые отсекают на сторонах угла с вершиной  $O$  отрезки  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$ . Докажите, что  $OA_1/A_1A_2 = OB_1/B_1B_2$ .

б) Две прямые отсекают на сторонах угла с вершиной  $O$  отрезки  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$ . Докажите, что если  $OA_1/A_1A_2 = OB_1/B_1B_2$ , то эти прямые параллельны.

**Задача 7 (Теорема Пифагора).** а) Дан прямоугольный треугольник с катетами  $a$ ,  $b$  и гипотенузой  $c$ . Докажите, что  $a^2 + b^2 = c^2$ .

б) Пусть  $a, b, c$  стороны треугольника и  $a^2 + b^2 = c^2$ . Докажите, что треугольник прямоугольный.