

Графско-комбинаторный

Задача 1. Параллелограмм— четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне перпендикулярны.

Задача 2. На окружности даны несколько точек. Кто-то посчитал количество способов провести три отрезка с концами в данных точках, не имеющих общих точек (в том числе и концов). Докажите, что это количество делится на 5.

Задача 3 (Эйлеров путь). Докажите, что если степень каждой вершины чётна, то существует путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз. (Этот путь называется **эйлеровым путём**.)

Задача 4. В некотором государстве между некоторыми городами проложены дороги. Из каждого города выходят дороги не менее чем в n других городов. Кроме того, известно, что, выехав из города, необходимо проехать не менее чем по пяти различным дорогам, чтобы вернуться назад. Докажите, что общее число городов не может быть меньше n^2 .

Задача 5. Четыре кузнеца должны подковать пять лошадей. Какое наименьшее время они могут затратить на работу, если каждый кузнец тратит на одну подкову пять минут? (Лошадь не может стоять на двух ногах.)

Задача 6 (Формула эйлера). На плоскости нарисован граф, причём никакие рёбра у него не пересекаются. Он разбил плоскость на G частей. Пусть V — количество вершин в этом графе, E — количество рёбер в нём. Докажите формулу эйлера

$$V + G - E = 2.$$