

Инварианты

1. Круг разделен на 6 секторов, и в каждом написано число. Разрешается одновременно увеличивать на 1 числа в любых двух соседних секторах. Можно ли сделать все 6 чисел равными, если в начале они такие: а) 1,0,0,0,0,0; б) 1,0,1,0,0,0 (именно в таком порядке)?
2. На доске написаны числа от 1 до 100. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них их разность. Может ли после 99 таких операций остаться число 1?
3. На шахматной доске разрешается за один ход перекрашивать все клетки в одной строке или в одном столбце. Может ли после нескольких ходов остаться ровно одна белая клетка?
4. Фирма "Id Software" плодит монстров. Каждый день монстры мутируют. Если сегодня монстр имеет m ручек и n ножек, то завтра он будет иметь $2m - n$ ручек и $2n - m$ ножек. Монстр погибает, когда число ручек или ножек становится отрицательным. При каком начальном количестве ручек и ножек монстр сможет жить вечно?
5. Население города состоит из n человек, и каждый живёт в отдельном доме. Однажды жители решили поменяться домами. После обмена выяснилось, что расстояние между новыми домами любых двух жителей не меньше, чем между их старыми домами. Докажите, что в результате обмена расстояние между домами любых двух жителей города не изменилось.
6. В капище храма Бога Инварианта по кругу подвешено 12 бутылок, 11 из которых висят горлышком вверх, а оставшаяся - горлышком вниз. Жрец утверждает, что если вместо нее перевернутой окажется соседняя бутылка, то стоит ожидать крупных неприятностей: а) если добиться этого, переворачивая по 6 соседних бутылок, то будет гром и молния; б) если это сделать, переворачивая по 5 соседних бутылок, то будет землетрясение; в) по 4 - наводнение; г) по 3 - конец света. Какие стихийные бедствия жрец может вызвать?
7. На доске написаны числа от 1 до 20. Можно пару чисел (x, y) заменить на $4(x+y)$. Может ли в конце остаться 4000?