Алгебраический разнобой

1. Даны натуральные числа M и N, большие 10, состоящие из одинакового количества цифр и такие, что $M = 3N$. Чтобы получить число M, надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из остальных цифр прибавить по нечетной цифре. Какой цифрой могло оканчиваться число N?

2. Из цифр $2, 3, \ldots, 9$ составили два натуральных числа (каждая цифра использовалась ровно один раз). Могло ли одно из этих чисел оказаться вдвое больше другого?

3. Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 \geqslant 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 2$.

4. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?

5. 99 последовательных натуральных чисел разбили произвольным образом на 33 группы по 3 числа, в каждой группе подсчитали произведение чисел, и у каждого из 33 полученных произведений подсчитали сумму цифр. Могут ли все полученные суммы цифр быть равными?

6. Имеются 2013 карточек, на которых написана цифра 1, и 2013 карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек 4026-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше?

7. Докажите, что четыре точки Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 лежат на одной окружности или одной прямой тогда и только тогда, когда их *двойное отношение*

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

вещественно.

8. Какое множество комплексной плоскости задается условием:
$|z - 2| = |z + 4i|$?