

Признаки равноостаточности

1. а) Докажите, что число и его последняя цифра дают одинаковые остатки при делении на 5.

б) Докажите, что число, составленное из трёх последних цифр данного числа и само число дают одинаковые остатки при делении на 8, на 125.

2. Пусть целое a при делении на c даёт остаток r_1 , а число b – остаток r_2 . Докажите, что у чисел а) $a + b$ и $r_1 + r_2$ б) ab и $r_1 r_2$ совпадают остатки при делении на c .

3. Все шестиклассники бегают по футбольному полю с шишкой в руке. По свистку они останавливаются, и каждый кидает шишкой в ближайшего к нему шестиклассника (все расстояния между ребятами различны). Докажите, что какие-то два кинут шишки друг в друга.

4. На окружности отмечено 2000 синих точек и одна красная точка. Чего больше — треугольников с вершинами в синих точках или четырёхугольников, у которых одна вершина красная, а остальные три синие?

5. В футбольной команде 12 человек (вместе с тренером). Найдите количество способов разделиться этой команде на две равные.

6. а) Решая числовой ребус ДВА + ТРИ = ПЯТЬ, Вася получил 177 возможных ответов. Докажите, что Вася нашел не все решения ребуса. б) Подумав, Вася нашел еще одно решение. Верно ли, что теперь Вася нашел все решения ребуса?

Определение 1. Знакопеременной суммой цифр числа $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1}$ называется число $(-1)^{n-1} a_n + (-1)^{n-2} a_{n-1} + \dots + a_3 - a_2 + a_1$.

7. а) Докажите, что шестизначное число и его сумма цифр дают одинаковые остатки при делении на 3, на 9.

б) Докажите, что семизначное число и его знакопеременная сумма цифр дают одинаковые остатки при делении на 11.

8. На полях шахматной доски расставлены числа 1, 2, ..., 64. Докажите, что найдется пара соседних по стороне клеток, где числа отличаются не меньше, чем на 5.

9. Каким количеством способов можно раскрасить вершины правильного пятиугольника в n цветов, если способы, отличающиеся поворотом, считаются одинаковыми?

10. Автобусный билет называется счастливым, если сумма первых трех цифр его шестизначного номера равна сумме трех последних цифр его номера (билеты идут от 000000 до 999999). Докажите, что счастливых билетов столько же, сколько номеров с суммой цифр 27.