

Постоянство — признак мастерства

1. На доске написано десять плюсов и пятнадцать минусов. Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них плюс, если они одинаковые, и минус в противном случае. Какой знак останется на доске после выполнения 24 таких операций?
2. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 3y^2 = 8$.
3. По кругу расставлены числа от 1 до 50. Затем одновременно к каждому числу прибавили число, равное количеству соседних чисел больших его. Чему равна сумма всех полученных чисел?
4. Даны целые числа a и b . Докажите, что если ab делится на простое число p то либо a , либо b делится на p (вспомните про линейное разложение НОД).
5. Каким числом способов можно расставить на доске $n \times n$ k ладей так, чтобы они не били друг друга?
6. Разрежьте шахматную доску по границам клеток на 20 частей одинакового периметра.
7. На доске написаны числа от 1 до 100. Каждую секунду берутся какие-то два числа a и b и заменяются на число а) $a + b - 1$, б) $ab + a + b$. Какое число будет написано на доске через 99 секунд.
8. На конференции было три секции: химики, алхимики и лекари. По кругу выстроились 112 участников, среди которых химиков и лекарей поровну. На вопрос «Верно ли, что оба твоих соседа из одной секции» каждый ответил «Да». Химик всегда говорит правду, алхимик всегда лжёт, а лекарь лжёт, если стоит рядом с алхимиком (а иначе говорит правду). Могло ли в этом круге быть 66 алхимиков?
9. Найдите количество пятизначных чисел, все цифры которых идут в порядке возрастания.
10. Докажите, что количество способов выбрать нечётное количество предметов из n различных равно количеству способов выбрать чётное количество предметов из n различных.