Периодичность

Определение 1. Последовательность называется периодической с периодом T, если существует такое число n_0, что $a_n = a_{n+T}$ для любого $n \geqslant n_0$. Начало последовательности до «первого периода» называется предпериодом.

Задача 1. Докажите, что если последовательность имеет период T_1 и период T_2, то она также имеет период (T_1, T_2).

Задача 2. Из периодической последовательности выбрали каждый сотый член, докажите, что новая последовательность также оказалась периодической.

Теорема 1 (Теорема о периодичности.). *Пусть A — конечное множество, а f — отображение из $f : A \mapsto A$. Тогда для любого $a \in A$ последовательность состояний $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots$ начиная с некоторого момента станет периодичной. Если f биекция, то предпериода нет.*

Задача 3. На острове Швамбрания каждый день — либо солнечный, либо дождливый. Учёные обнаружили, что с незапамятных времён погода каждого дня полностью определяется тем, какими были семь предыдущих дней. Последние три дня шёл дождь. Докажите, что в будущем такая ситуация обязательно повторится.

Задача 4. Докажите, что в последовательности Фибоначчи есть член с номером, большим 100, дающий остаток 13 при делении на 10. Докажите, что его номер не превосходит 200.

Определение 2. Пусть дано отображение $f : A \mapsto A$ конечного множества в себя. Орбитой элемента a называется множество $\{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$.

Задача 5. Некоторая комбинация поворотов граней вывела кубик Рубика из правильного положения. Докажите, что повторив эту комбинацию еще несколько раз, можно вернуться в исходную ситуацию.

Задача 6. Пусть p — простое число, a — не делится на p. Определим отображение на множестве остатков следующим образом: $f : x \mapsto ax$.
а) Как могут быть расположены относительно друг друга орбиты двух элементов отображения f (пересекаются, одна в другую вложена и т.п.)?
б) Пусть d минимальное натуральное число, такое что $a^d \underset{p}{\equiv} 1$ (почему такое d существует?) Докажите, что все орбиты состоят из d элементов.
в) Докажите малую теорему Ферма: $a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1$ (*как связаны между собой*

числа d *и* $p-1$?).
г) Докажите теорему Эйлера: $a^{\varphi(p)} \underset{p}{\equiv} 1$

Задача 7. На проволоку, имеющую форму окружности, насажено несколько стальных шариков одинакового размера. В некоторый момент шарики начинают двигаться с одинаковыми скоростями, но некоторые – по часовой стрелке, а некоторые – против. Сталкиваясь, шарики разлетаются с теми же скоростями в противоположные стороны. Докажите, что через некоторое время расположение шариков на окружности совпадет с исходным, если: а) шарики неразличимы; б) все шарики разного цвета.