

Листик на крайний случай

1. При каких натуральных n на шахматную доску можно поставить несколько ладей так, чтобы каждая из них была ровно n других?
2. Существуют ли такие натуральные числа x и y , что $x^2 - y^2 = 2019^{2019} - 1$?
3. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 (цифры могут повторяться).
4. По окружности записаны 30 чисел. Каждое из этих чисел равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Какие значения могут иметь эти числа?
5. Верно ли, что $45^{45} \cdot 19^{19} - 55^{55} \cdot 21^{21} \equiv 70 \pmod{8}$?
6. Существуют ли такие 2019 различных натуральных чисел, что сумма каждых 2018 из них не меньше квадрата оставшегося?
7. На столе лежит куча из 2019 камней. Ход состоит в том, что из какой-либо кучи, содержащей более одного камня, выкидывают камень, а затем одну из куч делят на две. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучки, состоящие из двух камней?
8. Докажите, что а) $\overline{a_1 a_2 \dots a_{10}} \equiv_9 \overline{a_{10} a_9 \dots a_1}$ б) $\overline{a_1 a_2 \dots a_{10}} \equiv_{11} -\overline{a_{10} a_9 \dots a_1}$ (что на самом деле мы здесь доказали?).
9. По окружности расставлены натуральные числа. Между каждыми двумя соседними числами Крокодил Гена записывает их наибольший общий делитель, после чего стирает исходные числа, а с оставшимися проделывает то же самое, и так далее. Докажите, что через несколько шагов все числа у Крокодила Гены станут равными.
10. Чебурашка записал 8642 подряд идущих нечетных чисел и перемножил их. Может ли полученное число быть точным квадратом?