Почти разнобой

Задача 1. Найдите сумму

$$\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{4}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{2^{1000}}{3}\right].$$

Задача 2. Решите уравнение $\{(x+1)^3\} = x^3$.

Задача 3. Продолжения боковых сторон трапеции с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Концы отрезка EF, параллельного основаниям и проходящего через точку пересечения диагоналей, лежат соответственно на сторонах AB и CD. Докажите, что $\frac{AE}{CF} = \frac{AO}{CO}$.

Задача 4. Точки A_1, B_1 и C_1 симметричны центру описанной окружности треугольника ABC относительно его сторон. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Задача 5. Три прямые, параллельные сторонам треугольника, пересекаются в одной точке, причём стороны треугольника высекают на этих прямых отрезки длиной x. Найдите x, если длины сторон треугольника равны a, b и c.

Задача 6. Решите уравнение $x^{2012} + \dfrac{1}{x^{2012}} = 1 + x^{2013}$.

Задача 7. Имеется набор гирь со следующими свойствами:
1) В нем есть 5 гирь, попарно различных по весу.
2) Для любых двух гирь найдутся две другие гири того же суммарного веса.
Какое наименьшее число гирь может быть в этом наборе?

Задача 8. В ячейки куба $11 \times 11 \times 11$ поставлены по одному числа 1, 2, ..., 1331. Из одного углового кубика в противоположный угловой отправляются два червяка. Каждый из них может проползатьв соседний по грани кубик, при этом первый может проползать, если число в соседнем кубике отличается на 8, второй— если отличается на 9. Существует ли такая расстановка чисел, что оба червяка смогут добраться до противоположного углового кубика?

Задача 9. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N так, что $MN||AC$. Докажите, что $S_{ABM} = S_{CBN}$.