Разнобой

1. Число $\underbrace{11\ldots1}_{n}2\underbrace{1\ldots11}_{n}$ делится на 11. Докажите, что оно делится на 121.

2. С квадратным трехчленом $ax^2 + bx + c$ разрешается производить такие операции:

- Заменить в нем x на $x - d$, где d произвольное вещественное число.
- Заменить его на трехчлен $cx^2 + (b + 2c)x + (a + b + c)$.

Можно ли с помощью таких операций из трехчлена x^2-3x-4 получить трехчлен $x^2 - 2x - 5$?

3. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ стороны BC и CD равны. Окружность Ω с центром C касается отрезка BD. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABD. Докажите, что прямая, проходящая через I параллельно AB, касается Ω.

4. На плоскости даны 2014 векторов. Докажите, что их можно разбить на некоторое число групп (возможно, одну) так, чтобы выполнялись два условия:
(1) в каждой группе угол между любым её вектором и суммой векторов этой группы не более 90°;
(2) угол между суммами векторов в любых двух различных группах больше 90°.

5. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Докажите, что любое натуральное число встречается хотя бы на одной карточке.

6. Даны натуральные m и n, причём $n < m - 1$. Жители города, население которого составляет m человек, организовали несколько клубов так, что в каждом клубе не менее n членов, а каждый горожанин состоит хотя бы в n клубах. При этом нет двух клубов, состоящих из одних и тех же людей. При каком наименьшем k обязательно найдутся такие k (или менее) клубов, что каждый горожанин состоит хотя бы в одном из них?

7. (P.T. Bateman, P. Erdős) Пусть k — натуральное число, и пусть $p_1, \ldots, p_k$ — первые k простых чисел. Обозначим через $f_k(n)$ количество представлений n в виде суммы чисел $p_1, \ldots, p_k$ с повторениями (представления, отличающиеся порядком, считаются одинаковыми; например, $f_4(7) = 3$, ибо $7 = 2 + 2 + 3 = 2 + 5 = 7$).
а) Найдите явную формулу для $f_2(n)$.
б) Докажите, что $f_3(n + 1) \geqslant f_3(n)$ для любого натурального n.
в) Докажите, что $f_3(n+1) > f_3(n)$ для всех натуральных $n > 5$ таких, что $n \underset{6}{\equiv} \pm1$.
г) Докажите, что $f_k(n + 1) \geqslant f_k(n)$ для любого натурального n и $k \geqslant 3$.