

Линейное представление НОД

1. Даны два целых числа a, b . Рассмотрим множество I — это все числа вида $ax + by$. Докажите, что

а) если c принадлежит I и d принадлежит I , то $c + d$ принадлежит I , $c - d$ принадлежит I и cn принадлежит I ;

б) если c принадлежит I и d принадлежит I , то остаток от деления c на d принадлежит I ;

в) пусть e — самое маленькое положительное число в I , тогда если c принадлежит I , то $c : e$ (в частности покажите отсюда, что e является общим делителем a и b);

г) пусть $m = (a, b)$ (НОД a и b), тогда если c принадлежит I , то $c : m$;

д) докажите, что $e = m$;

Теорема 1 (Линейное разложение НОД). *Даны два целых, ненулевых числа a и b . Тогда существуют целые числа x и y такие, что выполнено равенство $ax + by = (a, b)$. Данное представление наибольшего общего делителя чисел a и b называется линейным разложением НОД.*

2. а) Пусть $ab : c$ и $a \nmid c$. Верно ли, что $b : c$?

б) Пусть $c : a$ и $c : b$. Верно ли, что $c : ab$?

в) Пусть $(a, c) = 1$ и $ab : c$. Докажите, что $b : c$.

г) Пусть $(a, b) = 1$, $c : a$ и $c : b$. Докажите, что $c : ab$.