Разнобой 1

Задача 1. Пусть a, b и c —попарно взаимно простые натуральные числа. Найдите все возможные значения $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$, если известно, что это число целое.

Задача 2. Правильный шестиугольник со стороной n разбит прямыми на треугольники со стороной 1. В одном из образовавшихся узлов стоит фишка. Двое играющих по очереди передвигают ее в один из соседних узлов, причем запрещается ходитьв узел, в котором фишка уже побывала. Проигрывает тот, кто не может сделатьхода. Кто выигрывает при правильной игре?

Определение 1. $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел от 1 до n, взаимно простых с n. Выражение $\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера.*

Задача 3. Теорема Эйлера. Пусть a и m взаимно просты. Докажите, что

$$a^{\phi(m)} \equiv_m 1.$$

Задача 4. Для некоторых натуральных чисел a, b, c и d выполняются равенства $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab+1}{cd+1}$. Докажите, что $a = c$ и $b = d$.

Задача 5. В графе каждая вершина имеет степень 3. Всегда ли можно выбрать в нём несколько рёбер так, чтобы в каждую его вершину входило ровно одно выбранное ребро?

Задача 6. В шести секторах круга стоит по фишке. За ход можно передвинуть две фишки в соседние сектора. Можно ли собрать их в одном секторе?

Задача 7. На льду лежат 3 шайбы A,B,C (в вершинах треугольника). Хоккеист ударяет по одной из них так, чтобы она пролетела между двумя другими. Могут ли после 2003 таких ударов все шайбы оказаться на своих исходных местах?

Задача 8. Треугольник разрезан на несколько выпуклых многоугольников. Докажите, что среди них есть либо треугольник, либо два многоугольника с одинаковым количеством сторон.