Клетчатые задачи

Задача 1. Обозначим через c_m количество жителей в m-ом по величине населения доме, а через d_k — количество таких домов, в которых живет не меньше k жителей. Докажите равенство $c_1 + c_2 + \ldots = d_1 + d_2 + \ldots$

Задача 2. В квадрате 8×8 покрасили 14 клеток в чёрный цвет. Разрешается выбрать любой квадрат 2×2 и, если в нём 3 клетки чёрные, покрасить оставшуюся в чёрный цвет, можно ли так расположить начальные клетки, чтобы в итоге все клетки стали чёрными?

Задача 3. В небольшом калифорнийском отеле есть 8 комнат с номерами 1, 2,...8. Приезжающие за скромную плату в 1 доллар могут снять либо две комнаты с соседними номерами на один день, либо одну комнату на два дня. Пляжный сезон длится 8 дней. Какова максимальная выручка калифорнийского отеля за этот сезон, если известно, что в первый день восьмую комнату никто не занимал, и в последний день никто не занимал первую комнату?

Задача 4. На квадратном поле 10×10 девять клеток 1×1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что тем не менее бурьян не сможет распространиться на все клетки.

Задача 5. Из бесконечной шахматной доски вырезали многоугольник со сторонами, идущими по сторонам клеток. Отрезок периметра многоугольника называется черным, если примыкающая к нему изнутри многоугольника клетка — черная, соответственно белым, если клетка белая. Пусть A — количество черных отрезков на периметре, B — количество белых, и пустьмногоугольник состоит из a черных и b белых клеток. Докажите, что $A - B = 4(a - b)$.

Задача 6. Можно ли числа от 40 до 99 разбить на группы по 4 числа так, чтобы в каждой либо разряд десятков образовывал четыре подряд идущих числа, а разряд единиц не менялся, либо наоборот.