

Перед многоборьем

1. Для чисел $0 \leq x, y, z \leq 1$ докажите неравенство

$$(x + y + z)((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2) \leq 4.$$

2. Числа x, y, z из отрезка $[0, 1]$. Докажите неравенство

$$\frac{x}{7 + y^3 + z^3} + \frac{y}{7 + x^3 + z^3} + \frac{z}{7 + y^3 + x^3} \leq \frac{1}{3}.$$

3. Внутри треугольника взята точка O , через которую провели прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате образовалось три параллелограмма и три треугольника. Найдите площадь исходного треугольника, если известны а) площади параллелограммов; б) площади треугольников.

4. Дана доска 15×15 . Некоторые пары центров соседних по стороне клеток соединили отрезками так, что получилась замкнутая несамопересекающаяся ломаная, симметричная относительно одной из диагоналей доски. Докажите, что длина ломаной не больше 200.

5. Может ли ладья обойти все клетки доски 10×10 , не проходя по клеткам дважды и чередуя ходы на одну и две клетки.

6. Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$ не имеет решения в целых числах.

7. В один из дней года оказалось, что каждый житель города сделал не более одного звонка по телефону. Докажите, что население города можно разбить не более, чем на три группы так, чтобы жители, входящие в одну группу, не разговаривали в этот день между собой по телефону.

8. Докажите неравенство

$$\sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{4 + \dots + \sqrt[2014]{2014}}} < 2$$