

Графско-комбинаторный

Задача 1. Докажите, что в прямоугольнике диагонали равны.

Задача 2. На окружности даны несколько точек. Кто-то посчитал количество способов провести три отрезка с концами в данных точках, не имеющих общих точек (в том числе и концов). Докажите, что это количество делится на 5.

Задача 3 (Эйлеров путь). Докажите, что если степень каждой вершины чётна, то существует путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз. (Этот путь называется **эйлеровым путём**.)

Задача 4. В некотором государстве между некоторыми городами проложены дороги. Из каждого города выходят дороги не менее чем в n других городов. Кроме того, известно, что, выехав из города, необходимо проехать не менее чем по пяти различным дорогам, чтобы вернуться назад. Докажите, что общее число городов не может быть меньше n^2 .

Задача 5 (Формула эйлера). На плоскости нарисован граф, причём никакие рёбра у него не пересекаются. Он разбил плоскость на G частей. Пусть V — количество вершин в этом графе, E — количество рёбер в нём. Докажите формулу эйлера

$$V + G - E = 2.$$

Задача 6. а) На плоскости нарисован квадратик размером 1×1 . Рома каждый раз пририсовывает к имеющемуся прямоугольнику возле большей стороны квадрат. Какой прямоугольник он получит после 5 пририсовываний? После n пририсовываний?

б) Используя пункт а) найдите $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2$.

Задача 7. Коля берёт прямоугольный бумажный лист $m \times n$ см, отрезает от него квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, и кидает его на пол. От оставшегося прямоугольника он снова отрезает квадрат, кидает на пол и так далее, до тех пор, пока это возможно. Что же останется в руках у Коли, когда он закончит свою деятельность и приступит к уборке мусора? (в парочке задач было нечто схожее, поэкспериментируйте с маленькими m и n и угадайте ответ)