

## Разнобой 3

**Задача 1.** Произведение а) 2; б) 3; в)  $n$  положительных чисел равно  $S$ . Найдите минимальное значение суммы этих чисел.

**Задача 2.** Сумма трёх положительных чисел  $a, b, c$  равна 3, докажите, что  $(1+a)(1+b)(1+c) \leq 8$ .

**Задача 3.** Пять деревень расположены друг за другом на прямой дороге. Где надо выкопать колодец, чтобы сумма расстояний от него до деревень была минимальной?

**Задача 4.** Пусть а)  $n = p_1 p_2 \dots p_m$ ; б)  $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$ . Найдите количество делителей числа  $n$  и их сумму.

**Задача 5.** С помощью теоремы Чебы докажите, что а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты; г) отрезки, соединяющие вершины с точками касания вписанной окружности противоположной стороны пересекаются в одной точке.

**Задача 6.** Докажите, что среди всех  $n$ -угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный.

**Задача 7.** В начале игры в углу шахматной доски стоит король. Двое по очереди делают им ходы по шахматным правилам. При этом запрещается ставить короля на клетку, где он уже стоял раньше. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его противник?

**Задача 8.** Докажите, что функция эйлера мультипликативна, т.е. для любых  $m$  и  $n$  таких, что  $(m, n) = 1$ , верно, что  $\varphi(mn) = \varphi(n)\varphi(m)$ .