

Разнойбой

1. а) На прямой отмечено конечное число отрезков так, что любые два имеют общую точку. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.
б) На координатной плоскости отмечено несколько прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат так, что любые два имеют общую точку. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.
2. В единичный квадрат бросили 101 точку, причём никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не превосходит $1/100$
3. Многочлен с целыми коэффициентами $f(x)$ таков, что $f(100) = 100$. Найдите наибольшее возможное количество целых решений уравнения $f(x) = x^3$.
4. P и Q — простые числа, $Q^3 - 1$ делится на P ; $P - 1$ делится на Q . Докажите, что $P = 1 + Q + Q^2$.
5. Каждый из двух равновеликих квадратов разбит на 100 равновеликих частей. Докажите, что можно сложить эти квадраты в стопку и проткнуть в 100 точках так, чтобы каждая из 100 частей каждого из квадратов была проткнута.