Последнее осеннее

1. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

2. Найдите остаток при делении на 7 следующих чисел: а) 6^{2018}, б) 3^{2018}, в) $5^{2018}4^{2018} + 2^{2018}$.

3. Для участия в конкурсе «Минута славы» поступило 3 заявки от девушек и 7 от юношей. Для проведения игры необходимо выбрать 4 человека, среди которых обязательно должна быть хотя бы одна девушка. Сколькими способами это можно сделать?

4. Десять шестиклассников играли в настольный теннис. Проигравший обижался и уходил. Какое наибольшее число игроков могло выиграть не менее двух партии?

5. Сколько существует способов пройти из левой нижней вершины прямоугольника $2 \times n$ в правую верхнюю, двигаясь только вверх и вправо по линиям сетки?

6. Хулиган Вася стоит в лифте на нулевом этаже дома с бесконечным количеством этажей. Лифт умеет подниматься или опускаться только на а) 13 и 21; б) a и b ($(a, b) = 1$) этажей. Докажите, что Вася может подняться на любой этаж.

7. Сколькими способами можно расставить 4 ладьи на шахматной доске так, чтобы каждая била ровно две?

8. Любые два натуральных числа от 1 до 100 включительно соединены стрелкой, ведущей от меньшего числа к большему. Как раскрасить эти стрелки в красный и синий цвета так, чтобы любой одноцветный путь проходил не более, чем по девяти стрелкам?

9. Докажите, что среди 13 целых чисел всегда можно выбрать несколько так, чтобы их сумма делилась на 13.

10. На табло расположено 10 лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который меняет её состояние. Петя и Вася играют в такую игру: каждый из мальчиков своим ходом может щёлкнуть одним выключателем, изменив состояние одной лампочки. Запрещается повторять ситуацию, которая уже была (включая изначальную). Проигрывает тот, у кого нет хода. Начинает Петя. Кто из ребят выиграет при правильной игре?