

Треугольник Паскаля и Ко

Определение 1. Треугольником Паскаля называется таблица из чисел, расположенных в форме “треугольника”: (то есть, по форме таблица симметрична, в первой ее строке стоит одно число, а в каждой следующей на одно число больше), такая, что

					1					
					1		1			
				1	2	1				
			1	3	3	1				
		1	4	6	4	1				
	1	5	10	10	5	1				

а) на границе треугольника стоят единицы, а внутри каждое число равно сумме двух чисел, стоящих над ним;
б) каждое из чисел равно числу способов добраться до него, двигаясь от самого верхнего числа по числам треугольника строго ниже;
в) k -ое число в n -ой строке треугольника равно C_n^k , (если нумерацию строк и чисел в строках начинать с нуля).

Утверждение 1. Все перечисленные определения равносильны (т.е. неважно как заполнять треугольник, всё равно получится одно и то же).

1. а) Встречается ли в треугольнике Паскаля число 2019? б) Найдите натуральное число, большее единицы, которое встречается в треугольнике Паскаля больше трех раз. в) Тот же вопрос, но число должно встретиться более четырех раз.

2. Рассмотрим n -ую строчку треугольника Паскаля. а) Чему равна сумма чисел, стоящих в этой строчке? б) Докажите, что сумма чисел, стоящих на чётных местах в строчке равна сумме чисел на нечётных местах. в) Найдите, чему равна сумма чисел, стоящих на нечётных местах.

3. Докажите для натурального n тождество

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n.$$

4. На сколько нулей оканчивается число $11^{2019} - 1$?

5. На окружности отмечено 2019 синих и одна красная точка. Рассматриваются всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше - тех, у которых есть красная вершина, или тех, у которых нет?

6. Найдите остаток от деления числа 204^{2040} на а) 13, б) 61.

7. В ряд выложены 2020 гирек, причем масса двух любых соседних гирек отличается на 1 г. Требуется разложить гирьки на две кучки с равными массами и равным количеством гирь. Всегда ли это удастся?

8. Имеется замкнутая самопересекающаяся ломаная. Известно, что она пересекает каждое свое звено ровно один раз. Докажите, что число звеньев четно.

9. В классе, в котором 11 человек, по субботам проходит кружок, причем каждую следующую субботу состав школьников меняется следующим образом: либо к предыдущему составу добавляется один ученик, либо приходят все, кто был на

прошлой неделе, кроме какого-то одного ученика. Руководитель кружка отменяет занятие, если видит, что пришли меньше трех человек. Известно, что за все время существования кружка ни одно занятие не было отменено и ни один состав не был повторен дважды. Могло ли оказаться, что при этом все возможные составы учеников реализованы?

10. Сколькими способами из компании, состоящей из 54 девочек и 54 мальчиков, можно выбрать несколько мальчиков и девочек на парный танец (в паре мальчик танцует с девочкой)?