Когда ладьи...

Определение 1. Рассмотрим бесконечную клетчатую плоскость. *Доской* называется произвольный конечный набор клеток на этой плоскости. *Ладья* — фигура, которая держит под боем все кетки плоскости, находящиеся с ней в одной строке или одном столбце.

Определение 2. Зафиксируем произвольную доску B, обозначим через $r_n(B)$ — количество способов поставить n ладей на доску B.

Упражнение 1. Пусть B — доска.а) Докажите, что начиная с некоторого N при всех $n > N$ $r_n(B) = 0$. б) Найдите $r_1(B)$.

Упражнение 2. Пусть B — квадратная доска $n \times n$. Найдите $r_n(B)$.

Определение 3. Пусть c — клетка доски B. *Крестом*(c) называется множество клеток B, лежащих в ней в одной строке или столбце.

1. Докажите следующую формулу:

$$r_k(B) = r_k(B \backslash c) + r_{k-1}(B \backslash \text{Крест}(c)).$$

Множество $A \backslash B$ — все элементы A, которые не входят в B.

Определение 4. Каждой доске B соответствует набор чисел $\{r_1(B), r_2(B), \ldots, r_n(B), \ldots\}$. Две доски A и B называются эквивалентными, если соответствующие им наборы чисел совпадают.

2. Найдите наименьшее количество клеток n такое, что при нём существует две эквивалентные доски A и B такие, что одна не получется из другой движением.

3. Докажите, что если доски A и B получаются друг из друга перестановкой строк и столбцов, то они эквивалентны.

4. Рассмотрим две доски: квадратную диаграмму Юнга из n столбцов и диаграмму Юнга, у которойстроки имеют длину $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$. Докажите, что эти доски эквивалентны.

5. Какое максимальное количество ладей можно поставить, чтобы каждая била не более двух других.

6. В клетках шахматной доски написаны различные числа. На ней поставили 8 ладей, не бьющих друг друга так, что сумма чисел , на которых стоят ладьи максимальна. Докажите, что найдётся ладья, которая стоит на максимальном числе в своём столбце.

7. На каждом поле таблицы $n \times n$ стоит буква. Известно, что все строки различны. Доказать, что существует столбец, после удаления которого все строки останутся различными.