

Уравнение Маркова

Определение 1. Уравнением Маркова называется диофантово уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

Упражнение 1. а) Найдите ненулевое решение данного уравнения.

б) Можно ли найти все решения данного уравнения, зная положительные?

Упражнение 2. а) Пусть (a, b, c) — положительное решение уравнения Маркова. Тогда a — корень квадратного уравнения $F(x) = x^2 - 3bcx + b^2 + c^2$. б) Найдите второе нетривиальное решение уравнения Маркова.

Определение 2. Первое и второе решения уравнения Маркова назовём сингулярными. Решения отличающиеся только одной координатой назовём соседними.

1. Если у решения (a, b, c) уравнения Маркова две координаты равны, то это решение сингулярно.

2. Докажите, что любое несингулярное решение имеет ровно три различных соседних решения, причём одно из них имеет меньшую максимальную координату, а два других — большую, по сравнению с исходным решением.

3. Любое положительное решение уравнения Маркова соединяется цепочкой соседних решений с сингулярным решением $(1, 1, 1)$.

Упражнение 3. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ не имеет ненулевых решений в целых числах.

4. Все решения уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ получаются по формулам $A = 3a, B = 3b, C = 3c$, где (a, b, c) — произвольное решение уравнения Маркова.

Теорема 1. Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$ имеет решение только при $k = 1, 3$.