

## А сколько счастливых билетов?

1. Докажите, что КСБ не более 100000.

**Определение 1.** Обозначим через  $a_k$  – количество трехзначных номеров с суммой цифр  $k$ ,  $b_k$  – количество шестизначных номеров с суммой цифр  $k$ .

2. Докажите, что КСБ с суммой цифр  $2k$  равно  $a_k^2$ .

3. Найдите а)  $a_4$ ; б)  $a_9$ .

4. Докажите, что КСБ равно  $a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{27}^2$ .

5. Докажите, что  $a_k = a_{27-k}$ .

6. Докажите, что КСБ равно  $2(a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{13}^2)$ .

**Определение 2.** Рассмотрим все тройки неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих уравнению  $x + y + z = k$ . Назовем нарушением, если  $x$ ,  $y$  или  $z$  больше 9. Назовем тройку хорошей, если в ней нет нарушений и плохой в противном случае. Аналогично определяются плохие и хорошие шестерки.

7. Найдите количество плохих троек при  $k = 10$  и  $k = 11$ .

8. Докажите, что при  $10 \leq k \leq 19$  количество плохих троек равно  $3a_{k-10}$ .

9. Найдите все  $a_k$  при  $k = 0, 1, 2, \dots, 12, 13$  и вычислите КСБ.

10. Докажите, что КСБ равно количеству шестизначных номеров с суммой цифр 27.

11. Докажите, что КСБ меньше  $C_{32}^5$ .

12. Докажите, что при  $10 \leq k$  количество плохих шестерок не более  $C_{k-5}^5$ .

13. Докажите, что КСБ больше  $C_{32}^5 - 6C_{22}^5$ .

14. Докажите, что при данном  $k$  количество плохих шестерок с двумя нарушениями в данных местах равно  $C_{k-15}^5$ .

15. Докажите, что  $\text{КСБ} = C_{32}^5 - 6C_{22}^5 + C_6^2 C_{12}^5$ .

16. Найдите количество а) четырехзначных; б) восьмизначных счастливых билетов.