Неравенство Йенсена

1. Центр масс системы точек с положительными весами находится внутри выпуклой оболочки данных точек.

2 (Неравенство Йенсена). Пусть функция $f(x)$ является выпуклой на некотором промежутке (a, b) и числа$q_1, q_2, \ldots, q_n$ таковы, что $q_1, q_2, \ldots, q_n > 0$ и $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$. Тогда каковы бы ни были числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из промежутка (a, b), выполняется неравенство:

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n) \le q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \ldots + q_nf(x_n)$$

3. Докажите, что если вторая производная функции положительна, то функция выпукла.

4. Докажите неравенство КБШ с помощью неравенства Йенсена. (*Указание, рассмотрите функцию* x^2).

5 (Неравенство Гёльдера). Пусть p, q — положительные числа и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда для положительных a_1,..., a_n, b_1, ... b_n верно

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

6. Докажите неравенство для положительных чисел

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_i\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}$$

7. Найдите минимальное значение выражения $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}$, если α, β, γ — углы треугольника.

8. Докажите неравенство $\frac{a_1}{a_2 + \ldots + a_n} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + \ldots + a_{n-1}} \geqslant \frac{n}{n-1}$, если $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$.