Ещё одни комплексные числа.

1. Дан набор многочленов $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x]$. Докажите, что система уравнений $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$ не имеет решеения тогда и только тогда, когда идеал, порождённый этими многочленами, содержит 1. Верно ли тоже самое, если многочлены из $\mathbb{R}[x]$.

2. Существует ли многочлен $P(x)$, степени 1000 такой, что $P(x^2+x+1)$ делится на $P(x)$.

3. Найдите, чему равны следующие суммы: а) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$, б) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$, в) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$,г) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots$.

4. Какие преобразования комплексной плоскости задают следующие отображения: а) $z :\to az$, где a вещественное;
б) $z :\to az$, где a комплексное число, по модулю равное 1;
в) $z :\to a(z - z_0) + z_0$, где a комплексное число, по модулю равное 1, а z_0 произвольное комплексное число;

5. Докажите, что хорды z_1z_2, z_3z_4 единичной окружности параллельны тогда и только тогда, когда $z_1 \cdot z_2 = z_3 \cdot z_4$.

6. Пусть a, b, c — вершины правильного треугольника, вписанного в единичную окружность с центром в начале координат. Чему равно $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?

7. Пусть $|a| = 1$. Докажите, что уравнение $z\overline{a} + a\overline{z} = 2$ определяет касательную к единичной окружности в точке a.

8. Указать на плоскости множество точек, для которых сумма квадратов расстояний до вершин заданного правильного многоугольника равна d.