

Разнобой

1. Заведующая библиотекой, увидев, что 8 томов энциклопедии стоят в беспорядке, указала на это библиотекаря. Тот в ответ заявил: «Беспорядок - небольшой, так как каждый том стоит либо на своем месте, либо на соседнем». Сколькими способами можно расставить тома энциклопедии в соответствии с этим условием?
2. Найдите все натуральные n и k , что $n! + 2 = k^2$.
3. Может ли количество способов разрезать квадрат 6×6 на доминошки равняться а) 250, б) 635, в) 1024?
4. Докажите, что $3^{100} - 2^{100}$ делится на $3^{10} + 2^{10}$.
5. Есть 10 одинаковых бочек. Из них 9 ? доверху заполнены вином своего сорта, а десятая пустая. Можно переливать из любой бочки в любую любое количество вина. Докажите, что можно сделать так что каждая из 10 бочек будет на $9/10$ заполнена равномерной смесью 9 вин.
6. Дана последовательность чисел $1, 1, 2, 3, 7, 22, \dots$, где каждый следующий член равен произведению двух предыдущих плюс один. Докажите, что в последовательности нет чисел кратных 4.
7. В некотором государстве между некоторыми городами проложены дороги. Из каждого города выходят дороги не менее чем в n других городов. Кроме того, известно, что, выехав из города, необходимо проехать не менее чем по пяти различным дорогам, чтобы вернуться назад. Докажите, что общее число городов не может быть меньше n^2 .