

Выпуклость

Определение 1. Фигурой будем называть множество точек на плоскости.

Определение 2. Фигура F называется выпуклой, если для любых двух точек $A, B \in F$ выполнено, что весь отрезок AB принадлежит F .

Определение 3. Выпуклой оболочкой множества точек G называется наименьшая по вложению выпуклая фигура F , которая содержит все точки из G .

Факт. Следующие определения эквивалентны:

- а) Многоугольник называется *выпуклым*, если он содержит любую свою диагональ.
- б) Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от любой своей стороны.
- в) Многоугольник называется *выпуклым*, если все его внутренние углы меньше 180° .

Упражнение 1. Найдите выпуклую оболочку а) трёх точек, б) точки и прямой.

1. Докажите, что если вершины треугольника принадлежат выпуклой фигуре, то и весь треугольник принадлежит ей.

2. Докажите, что пересечение выпуклых фигур выпукло.

3. На плоскости даны 4 точки A, B, C и D . Барон Мюнхгаузен утверждает, что зная значения площадей всех 4-ёх треугольников, он может определить, лежит ли точка D внутри треугольника ABC . Правда ли это?

4. а) На плоскости даны 5 точек. Двое по очереди проводят отрезки соединяющие эти точки, так чтобы проведенные отрезки не пересекались. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

б) Тоже самое для n точек.

5. Докажите, что выпуклая оболочка конечного множества точек — многоугольник (возможно вырожденный).

6. На плоскости дано n точек, причём любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Докажите, что эти точки являются вершинами выпуклого n -угольника.

7. Докажите, что существует такое число N , что среди любых N точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать 100 точек, являющихся вершинами выпуклого многоугольника.

8. а) Докажите, что если на плоскости даны 4 выпуклых множества, причём любые три из них имеют общую точку, то все четыре множества имеют общую точку. *Указание. Выделите эти четыре точки и рассмотрите, какой может быть их выпуклая оболочка.*

б) Докажите это утверждение для n точек.