Общие делители

Определение 1. *Наибольший общий делитель* двух целых чисел — это наибольшее целое число, делящее два данных целых числа. Обозначается (a, b).

1. а) Докажите, что если натуральное число a делится на натуральное число b, то $(a, b) = b$. б) Для целых чисел a, b докажите равенство $(a, b) = (a - b, b)$.

2. В отряде шестого класса 26 мальчиков и 8 девочек. Для участия в КВН нужно выбрать троих, чтобы среди них были хотя бы две девочки. Сколькими способами это можно сделать?

3. В вершинах куба расставлены числа 1 и -1. Затем в центре каждой грани написали произведение всех чисел, стоящих в вершинах этой грани. Может ли сумма всех 14 чисел равняться 0?

4. Сколькими способами может выбрать модница Лена из 10 пллатьев 4?

5. Можно ли отметить на плоскости 10 красных, 10 синих и 10 зелёных точек, все расстояния между которыми различны, так, чтобы для каждой красной точки ближайшая к ней цветная была синяя, для каждой синей – зелёная, а для каждой зелёной – красная?

6. На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 11точек. Сколько существует
а) треугольников с вершинами в этих точках;
б) четырехугольников с вершинами в этих точках?

7. Среди номеров билетов от 000000 до 999999 каких больше: тех, где каждая цифра больше предыдущей, или тех, где каждая цифра меньше предыдущей?

8. Докажите, что число $\overline{a_{100}a_{99}\ldots a_2a_1} - \overline{a_{100}a_{99}} - \overline{a_{98}a_{97}} - \ldots - \overline{a_2a_1}$ делится на 11.

9. В пещере живёт 2010-головая гидра. Гидра считается побеждённой, если в некоторый момент времени у неё отсутствуют все головы. Геракл за один раз может срубить 10 или 7 голов. Если он срубит 10, тогда у гидры вырастет 7 новых, а если 7, то 16 новых голов. Сможет ли Геракл победить гидру (сразу после его удара должно остаться 0 голов)?

10. В шахматном турнире в один круг участвовали несколько студентов и два школьника (каждый участник турнира сыграл с каждым ровно одну партию, за победу в партии давалось 1 очко, за ничью — 0,5, за проигрыш — 0). Известно, что все студенты набрали одинаковое число очков, а оба школьника набрали по 7 очков. Сколько студентов могло участвовать в турнире? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.