Разнобойчик от А.В. с Колма.

1. Сколько существует перестановок $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ чисел от 1 до n, для которых можно подобрать выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ и прямую ℓ так, что проекции $B_1, \ldots, B_n$ всех вершин многоугольника $A_1, \ldots, A_n$ соответственно на эту прямую различны и расположены в порядке $B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots, B_{k_n}$ (двигаться по прямой можно в любом из двух направлений)?

2. Для натурального $n \geq 2$ докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \cdots + \sqrt[n]{\frac{n}{n-1}} \leq n.$$

3. Многочлен $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ имеет n различных действительных корней. Докажите, что многочлен

$$Q(x) = C_{2n}^{n}a_nx^n + C_{2n-1}^{n-1}a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + C_{n+1}^{1}a_1x + C_n^0a_0$$

также имеет n различных действительных корней.

4. Города некоторой страны соединены дорогами так, что из любого города в любой можно проехать единственным образом. Некоторые из городов этой страны являются *стратегическими*; каждый город, лежащий на пути между двумя стратегическими городами, поддерживает радиосвязь хотя бы с одним из них. Докажите, что найдутся два соседних города, в объединении поддерживающие радиосвязь со всеми стратегическими городами (считается, что стратегический город поддерживает связь сам с собой).

5. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 —- высоты остроугольного треугольника ABC, а точка P внутри треугольника не лежит на них. Лучи AP, BP, CP вторично пересекают описанную окружность в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что дуги окружностей AA_1A_2, BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в одной точке.

6. Мальчик Андрей пишет на очень длинном рулоне туалетной бумаги подряд без пробелов числа $1234567891011\ldots$, пока ему не надоест. Надоедает ему тогда, когда в этой строке есть все не более чем n-значные числа ($n > 10$). Какое число Андрей выпишет последним?