Интегралы: теория. 8 октября

Напомним некоторые определения и доказанные утверждения.

Определение. *Разбиением* P отрезка $[a,b]$, $a<b$, называется конечная система точек $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.

Отрезки $[x_{i-1},x_i]$ называются *отрезками разбиения.*

Максимум из длин отрезков разбиения называется *диаметром разбиения* (*параметром разбиения*).

Определение. Говорят, что имеется *отмеченное разбиение* (P,ξ) отрезка $[a,b]$, если имеется разбиение P отрезка $[a,b]$ и в каждом из отрезков $[x_{i-1},x_i]$ разбиения P выбрано по точке $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$.

Определение. Говорят, что число I является *определённым интегралом (Римана)* от функции f на отрезке $[a,b]$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся число $\delta>0$ такое, что для любого отмеченного разбиения (P,ξ) отрезка $[a,b]$, диаметр которого меньше δ, выполнено

$$\left|I-\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot|x_i-x_{i-1}|\right|<\varepsilon.$$

Если для функции $f(x)$ существует определённый интеграл (Римана) от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то говорят, что она *интегрируема (по Риману) на отрезке* $[a,b]$.

Утверждение. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Определение. Пусть $f(x)$ — некоторая ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция, P — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. *Нижней и верхней интегральной суммой* или *суммами Дарбу* называется выражение

$$s=\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot|x_i-x_{i-1}| \text{ и } S=\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot|x_i-x_{i-1}|$$

соответственно.

Теорема. *Ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема (по Риману) на нём тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ найдётся число $\delta>0$ такое, что для любого разбиения P диаметром меньше δ выполнено $|S-s|<\varepsilon$.*

Малый Механико-Математический Факультет, ауд. 1302 *2016–2017*

Интегралы: теория. 8 октября

Напомним некоторые определения и доказанные утверждения.

Определение. *Разбиением* P отрезка $[a,b]$, $a<b$, называется конечная система точек $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.

Отрезки $[x_{i-1},x_i]$ называются *отрезками разбиения.*

Максимум из длин отрезков разбиения называется *диаметром разбиения* (*параметром разбиения*).

Определение. Говорят, что имеется *отмеченное разбиение* (P,ξ) отрезка $[a,b]$, если имеется разбиение P отрезка $[a,b]$ и в каждом из отрезков $[x_{i-1},x_i]$ разбиения P выбрано по точке $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$.

Определение. Говорят, что число I является *определённым интегралом (Римана)* от функции f на отрезке $[a,b]$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся число $\delta>0$ такое, что для любого отмеченного разбиения (P,ξ) отрезка $[a,b]$, диаметр которого меньше δ, выполнено

$$\left|I-\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot|x_i-x_{i-1}|\right|<\varepsilon.$$

Если для функции $f(x)$ существует определённый интеграл (Римана) от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то говорят, что она *интегрируема (по Риману) на отрезке* $[a,b]$.

Утверждение. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Определение. Пусть $f(x)$ — некоторая ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция, P — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. *Нижней и верхней интегральной суммой* или *суммами Дарбу* называется выражение

$$s=\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot|x_i-x_{i-1}| \text{ и } S=\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot|x_i-x_{i-1}|$$

соответственно.

Теорема. *Ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема (по Риману) на нём тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ найдётся число $\delta>0$ такое, что для любого разбиения P диаметром меньше δ выполнено $|S-s|<\varepsilon$.*