

Вероятностный метод

В простейшем виде вероятностный метод состоит в следующем:

Пусть для заданного множества объектов вероятность того, что объект не обладает некоторым свойством, меньше 1. Тогда должен существовать объект, обладающий этим свойством.

1. На русско-французской встрече не было представителей других стран. Суммарное количество денег у французов оказалось больше суммарного количества денег у русских, и суммарное количество денег у женщин оказалось больше суммарного количества денег у мужчин. Обязательно ли на встрече была француженка?

2. В единичном квадрате выбрано 100 множеств, площадь каждого из которых больше, чем 0,99. Докажите, что найдется точка, которая принадлежит всем этим множествам.

3. Дано семейство \mathcal{F} , состоящее из d -элементных подмножеств конечного множества X , причем $|\mathcal{F}| \leq 2^{d-1}$. Докажите, что существует такая раскраска X в два цвета, что в каждом множестве $A \in \mathcal{F}$ есть элементы обоих цветов.

4. Докажите, что числа 1, 2, ..., 2016 можно покрасить в четыре цвета так, чтобы не было одноцветных арифметических прогрессий из 10 членов.

5. Рассмотрим двудольный граф $G = (V, E)$ с n вершинами. Пусть для каждой вершины $v \in V$ задан список $S(v)$ из более чем $\log_2 n$ цветов. Докажите, что существует правильная раскраска графа G , приписывающая каждой вершине v цвет из ее списка $S(v)$.

6. Барон Мюнхгаузен, вернувшись из Кытая, рассказал, что там проводится круговой чемпионат по пинг-понгу (каждые два участника встречаются ровно один раз) с очень ровным составом: каких бы 1000 участников ни взять, найдётся участник, который обыграл их всех! Не преувеличивает ли барон?

7. Докажите, что существует $d > 0$, обладающее следующим свойством.

Пусть S — конечное множество точек на плоскости. Присвоим каждому отрезку между ними, длина которого не больше d , положительный вес так, чтобы сумма весов была равна 1. Тогда точки можно разбить на несколько *кластеров* так, что в каждом наборе расстояния между всеми точками не больше $\frac{1}{1000}$, а сумма весов отрезков, соединяющих точки из разных кластеров, также не превосходила $\frac{1}{1000}$.