

## Код Прюфера

**Определение 1.** Пометим вершины дерева целыми числами. Будем кодировать дерево последовательностью чисел. Первым элементом кода Прюфера будет номер вершины, смежной с минимальным по номеру листом. После добавления в код Прюфера первого элемента, лист с минимальным номером удаляется из дерева. Далее снова нужно найти лист с минимальным номером и вписать в код Прюфера номер вершины, смежной с ним, после чего удалить этот лист из дерева, и так далее, пока в дереве не останется только две вершины. На этом построение кода Прюфера заканчивается.

**Упражнение 1.** Восстановите по коду дерево (3, 5, 6, 2, 4).

1. Номер вершины  $v$  встречается в коде Прюфера тогда и только тогда, когда  $v$  не является листом, причём встречается этот номер в коде дерева в точности  $\deg v - 1$  раз.

2. а) Сколько существует помеченных графов на  $n$  вершинах? б) Сколько существует помеченных деревьев на  $n$  вершинах?

3. Дан набор из  $N$  различных помеченных графов на  $n$  вершинах. Докажите, что в нём найдутся не менее  $N/n!$  неизоморфных графов (графы называются изоморфными, если можно перенумеровать вершины одного, чтобы получился другой).

4. а) Докажите, что помеченных унициклических графов на  $n$  вершинах не больше чем  $(n)^{n-2}C_n^2/3$  и не меньше чем  $(n)^{n-2}C_n^2/n$  (унициклический граф — граф, у которого один цикл).

б) Докажите формулу для числа всех помеченных унициклических графов на  $n$  вершинах:

$$u_n = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n C_n^k k! (n)^{n-k-1}$$

5. Покажите, что число помеченных графов на  $n$  вершинах без изолированных вершин равно

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k 2^{C_{n-k}^2}$$

6. Каких графов больше: тех, у кого есть изолированные вершины или тех, у которых её нет?

7. Докажите, что помеченных лесов на  $n$  вершинах, в которых ровно  $r$  деревьев, каждое из которых содержит ровно по одной вершине из множества  $\{1, 2, \dots, r\}$ , в точности  $rn^{n-1-r}$ .

8. Обозначим за  $T_n$  — число помеченных деревьев на  $n$  вершинах. Докажите, что верно следующее тождество

$$2(n-1)T_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k k(n-k)T_{n-k}T_k$$