

Разнойбой

1. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекают окружность, описанную около этого треугольника, в точках A_1 и B_1 соответственно. Окружность, вписанная в этот же треугольник, касается сторон BC и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника SKL , лежит на прямой A_1B_1 .

2. Докажите, что любой многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами можно представить в виде суммы трёх кубов многочленов с вещественными коэффициентами.

3. Дан выпуклый n -угольник и точка P внутри него. Руслан опустил перпендикуляры на все прямые, содержащие стороны n -угольника, и посчитал количество сторон AB , для которых перпендикуляр упал внутрь отрезка AB . Дима посчитал количество углов A n -угольника, для которых луч AP делит угол A на два острых угла. Докажите, что Руслан и Дима получили два равных числа.

4. Пусть k — натуральное число. Докажите, что любой граф, в котором степени всех вершин не меньше $2k$, содержит $(k+1)$ -рёберно связный подграф. (Связный граф называется n -рёберно связным, если в нём есть хотя бы n ребер, и при выкидывании любых $n-1$ рёбер он остаётся связным.)

5. Даны 1000 различных натуральных чисел. Может ли случиться так, что при любом натуральном n сумма их остатков при делении на n не превосходит $1,001n$?

6. Пусть $n \geq 3$ — натуральное число. В квадратной таблице $n \times n$ изначально стоят нули. За ход разрешается выбрать в таблице квадрат $(n-1) \times (n-1)$, прибавить к некоторым числам в этом квадрате по единице и вычесть по единице из всех остальных чисел в этом квадрате. При каких n через несколько таких ходов можно получить таблицу, в которой встречаются все числа $1, 2, \dots, n^2$?