

Зимняя учебная олимпиада

1. Можно ли из дробей $1/2007$, $2/2006$, $3/2005$, \dots , $2007/1$ выбрать три, произведение которых равно 1?
2. В противоположных точках кольцевой дороги расположены пункты A и B . Из A по часовой стрелке выехал велосипедист, а из B против часовой стрелки выехал мотоциклист. Проехав треть пути до A , мотоцикл сломался, и завёлся только тогда, когда до него доехал велосипедист. Кто приедет раньше в пункт A — мотоциклист или велосипедист, сделав круг?
3. По кругу стоят 2007 чисел, сумма которых равна 7025. Докажите, что есть два идущих подряд числа, сумма которых больше 7.
4. Мальчики подарили Люде и Полине 10 разноцветных воздушных шаров. Сколькими способами можно разделить эти шары между Людой и Полиной? (К сожалению, кому-то из них может и не достаться шаров.)
5. Найдите остаток при делении на 7 произведения всех чисел от 1 до 1000, которые не делятся на 7.
6. Янез хочет сделать решетку 2006×2008 со стороной квадратной ячейки 1, используя одинаковые элементы в виде буквы L, составленные из двух единичных отрезков. Элементы не должны перекрываться. Сможет ли Янез это сделать?
7. Докажите, что если число вида $33 \dots 33$ (записываемое одними тройками) делится на 7, то оно делится и на 39.
8. Натуральные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a + 201b = 200c$. Докажите, что число $(a + b)(a + c)$ делится на 2010.
9. На конгресс приехало 100 ученых, каждый из которых сделал доклад. После конгресса оказалось, что каждому участнику понравилось не менее 51 доклада коллег. Докажите, что есть такие ученые A, B , и C , присутствовавшие на конгрессе, что A понравился доклад B , B понравился доклад C , а C понравился доклад A .

Олимпиада письменная. Если по каким-то причинам вас не будет на первом занятии в 2019 году, то можно прислать на почту, адрес на сайте. Просьба все решения оформлять в отдельной тоненькой тетрадке более или менее аккуратно, пояснять все переходы максимально подробно.