

## Идеалы

**Определение 1.** Идеалом в коммутативном кольце  $K$ , называется множество  $I$ , замкнутое относительно сложения и для любого  $a \in K$  верно, что  $aI \subseteq K$ , обозначается  $I \triangleleft K$ .

**Упражнение 1.** а) Приведите пример идеалов в кольце целых чисел. б) Найдите все идеалы в поле. в) Приведите пример идеала в кольце  $K[x]$ .

**Определение 2.** Идеал  $I \triangleleft K$  называется порождённым, элементами  $a_1, \dots, a_n$ , если  $\forall a \in I$  существуют  $b_1, \dots, b_n \in K$ , что  $a = \sum b_i a_i$ .

**Определение 3.** Идеал  $I \triangleleft K$  называется главным, если существует  $k \in I$  такой, что  $\forall i \in I$  верно, что  $i : k$ . Обозначается  $I = (k)$ .

**Упражнение 2.** Приведите пример неглавного идеала в  $K[x, y]$ .

1. Докажите, что все идеалы в кольце целых чисел и кольце многочленов от одной переменной над полем главные.

**Определение 4.** Радикалом идеала  $I \triangleleft K$  называется множество элементов  $J \subseteq K$ , что  $\forall j \in J \exists m \in \mathbb{N}$ , что  $j^m \in I$ , обозначается  $J = \sqrt{I}$ .

**Упражнение 3.** Найдите радика идеала  $I = ((x-1)^2(x-2)^3) \triangleleft \mathbb{R}[x]$ .

2. Докажите, что радикал идеала тоже идеал.

**Определение 5.** Пусть  $I \triangleleft K$ , тогда два элемента  $a, b \in K$  называются сравнимыми по модулю идеала, если  $a - b \in I$ . Обозначается  $a \equiv_I b$ .

**Определение 6.** Многообразием идеала  $I \triangleleft K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , где  $K$  поле, называется множество точек  $V \subseteq K^n$  таких, что  $\forall x_0 \in V$  и  $\forall f \in I$  верно, что  $f(x_0) = 0$ , обозначается  $V(I)$ .

Пусть  $V' \subseteq K^n$ , тогда идеалом, порождённым  $V'$  называется множество всех многочленов в  $f \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  таких, что  $\forall x_0 \in V'$  верно, что  $f(x_0) = 0$ , обозначается  $I(V')$

**Теорема 1. теорема Гильберта о нулях.** Для любого алгебраически замкнутого поля  $K$  и идеала  $I \triangleleft K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  верно, что  $\sqrt{I} = I(V(I))$ .

**Теорема 2. теорема Гильберта о нулях, слабая версия.** Для любого алгебраически замкнутого поля  $K$  и идеала  $I \triangleleft K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  верно, что  $I = K \Leftrightarrow V(I) = \emptyset$ .

3. Число  $4x + 3y$  делится на 7. Докажите, что число  $4x + 10y$  делится на 7.

4.  $a, b, c$  — натуральные числа такие, что  $ab + 9b + 81$  и  $bc + 9c + 81$  делятся на 101. Докажите, что тогда и  $ca + 9a + 81$  тоже делится на 101.

5. а) Существуют ли многочлены  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ , для которых выполнено тождество  $(x - y + 1)^3 P + (y - z - 1)^3 Q + (z - 2x + 1)^3 R = 1$ ?

б) Тот же вопрос для тождества  $(x - y + 1)^3 P + (y - z - 1)^3 Q + (z - x + 1)^3 R = 1$ ?

6. Существует ли такой многочлен  $P(x, y)$  с вещественными коэффициентами, что многочлен  $P(x, y)^2 + 1$  делится на многочлен  $x^2 + y^2 + 1$ ?