Шаблон

Факт (Неравенства между средними). Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ методом Штурма докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

Факт (Транс-неравенство). Если $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – некоторая перестановка чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$, то

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \geq a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n \geq a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1.$$

Задача 1. Докажите для натурального n, что $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Задача 2. Найдите минимальное значение выраженияа) $x^2+\dfrac{2}{x^2}$; б) $x^2+\dfrac{1}{x}$ при $x>0$.

Задача 3. Вещественные числа a, b и c не меньше 1. Докажите неравенство

$$\frac{1+ab}{b+c}+\frac{1+bc}{a+c}+\frac{1+ca}{a+b} \geqslant 3$$

Задача 4. Для натуральных m и n докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} \geqslant 1$$

Задача 5. Пусть $a_1+a_2+\ldots+a_n = S$, все числа положительные. Докажите неравенство

$$\sqrt{a_1(S-a_1)}+\sqrt{a_2(S-a_2)}+\ldots+\sqrt{a_n(S-a_n)} \leqslant \sqrt{n-1}S$$

Задача 6. Даны вещественные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n, большие некоторого положительного числа k. Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{a_2-k}+\frac{a_2^2}{a_3-k}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_1-k} \geqslant 4kn$$

Задача 7. Вещественные числа a_1, a_2, $\ldots$удовлетворяют условию $a_{i+j} \leq a_i+a_j$ для всех i, $j=1, 2, \ldots$. Для всех натуральных n докажите неравенство

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n} \geq a_n.$$