

Конечные поля и алгебраические числа

Определение 1. *Характеристикой* поля F называется наименьшее число n такое, что $1 + 1 + \dots + 1 = 0$ (всего n слагаемых). Если такого числа нет, то говорят, что характеристика поля равно 0.

Упражнение 1. Докажите, что характеристика поля либо 0, либо простое число p .

Упражнение 2. Докажите, что если характеристика поля F равна p , то F содержит \mathbb{Z}_p как подполе.

1. Докажите, что количество элементов конечного поля делится на характеристику поля.

2. Докажите, что если количество элементов конечного поля равно p^k , где p — характеристика поля.

Упражнение 3. Напомним малую теорему Ферма: для любого $a \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$, $a^{p-1} = 1$. Сформулируйте и докажите ее аналог для любого конечного поля.

Упражнение 4. Является ли полем множество остатков многочленов $\mathbb{R}[x]$ с действительными коэффициентами по модулю многочлена

а) $x^2 - 1$; б) $x^2 + 1$?

Определение 2. Число называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Говорят, что алгебраическое число имеет *степень* d , если оно является корнем *неприводимого* многочлена с рациональными коэффициентами степени d .

Упражнение 5. Является ли число $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ алгебраическим?

Упражнение 6. Число α является алгебраическим тогда и только тогда, когда числа $1, \alpha, \alpha^2, \dots$ являются линейно зависимыми над \mathbb{Q} .

Упражнение 7. Если α — алгебраическое число, то существует многочлен P с рациональными коэффициентами такой, что $\alpha^{-1} = P(\alpha)$.

Упражнение 8. Докажите, что числа вида $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$ образуют поле.

Определение 3. Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$. Через $\mathbb{Q}(\alpha)$ обозначается минимальное подполе комплексных чисел, содержащее α .

3. Пусть α — алгебраическое число степени d . Докажите, что выражения вида $a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{d-1}\alpha^{d-1}$ образуют поле (т.е. степень расширения $\mathbb{Q}(\alpha)$ над \mathbb{Q} равна d).

4. а) Докажите, что сумма алгебраических чисел — алгебраическое число. б) Докажите, что алгебраические числа образуют поле.