

Площади+

Задача 1. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O . Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD .

Задача 2. а) Докажите, что половина произведения двух любых сторон треугольника больше его площади;

б) Дан четырёхугольник $ABCD$, докажите, что $S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}(AB \cdot BC + AD \cdot DC)$;

в) Дан четырёхугольник $ABCD$, докажите, что $S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC)$;

Задача 3. В выпуклом шестиугольнике $AC_1BA_1CB_1$ дано: $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$ и $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1$. Докажите, что площадь треугольника ABC равна половине площади шестиугольника.

Задача 4. Известно, что на сторонах CD и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбраны точки, соответственно, K и M такие, что каждая из прямых AK та CM делит четырёхугольник $ABCD$ на две равновеликие части. Пусть P — точка пересечения прямых KM и BD . Найдите отношение площади четырёхугольника $ABCD$ к площади четырёхугольника $ABCP$.