

Разнойбой

1. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которые для всех $x, y, z \in \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенству $f(x + y) + f(y + z) + f(z + x) \geq 3f(x + 2y + 3z)$.
2. Числа от 1 до 999 999 разбиты на две группы: в первую отнесено каждое число, для которого ближайшим к нему квадратом является квадрат нечетного числа, во вторую — числа, для которых ближайшими являются квадраты четных чисел. В какой из групп сумма чисел больше?
3. Пусть $2S$ — суммарный вес некоторого набора гирек. Назовем натуральное число k средним, если в наборе можно выбрать k гирек, суммарный вес которых равен S . Какое наибольшее количество средних чисел может иметь набор из 100 гирек?
4. На столе стоят 2004 коробочки, в каждой из которых лежит по одному шару. Известно, что некоторые из шариков — белые, и их количество четно. Разрешается указать любые две коробочки и спросить, есть ли в них хотя бы один белый шарик. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно определить какую-нибудь коробочку, в которой лежит белый шарик?
5. Пусть p простое число с десятичной записью $\overline{a_n \dots a_0}$, $a_n > 1$. Докажите, что многочлен $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ неприводим над \mathbb{Q} .
6. Окружность ω вписана в треугольник ABC , в котором $AB < AC$. Внеписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке A' . Точка X выбирается на отрезке $A'A$ так, что отрезок $A'X$ не пересекает ω . Касательные, проведенные из X к ω , пересекают отрезок BC в точках Y и Z . Докажите, что сумма $XY + XZ$ не зависит от выбора точки X .