

Коники

Определение 1. *Эллипсом* называется ГМТ с фиксированной суммой расстояний до двух точек. Эти точки называются *фокусами эллипса*.

Гиперболой называется ГМТ с фиксированным модулем разности расстояний до двух точек. Эти точки называются *фокусами гиперболы*.

Параболой называется ГМТ, равноудалённых от точки и прямой. Точка называется *фокусом параболы*, а прямая *директрисой параболы*.

1. а) Докажите, что эллипс, гипербола и парабола являются кривыми второго порядка (т.е. задаются в координатах уравнениями второго порядка). б) Для каждой точки плоскости поймите, какому неравенству она удовлетворяет.

2. Дана прямая ℓ и точки A и B в одной полуплоскости. Для какой точки X на прямой ℓ сумма $AX + XB$ наименьшая?

3. а) (Оптическое свойство эллипса). Дан эллипс с фокусами F_1 и F_2 . Прямая ℓ касается эллипса в точке P . Докажите, что ℓ — внешняя биссектриса угла F_1PF_2 .

б) (Оптическое свойство гиперболы). Дана гипербола с фокусами F_1 и F_2 . Прямая ℓ касается гиперболы в точке P . Докажите, что ℓ — биссектриса угла F_1PF_2 .

в) (Оптическое свойство параболы). Дана парабола с фокусом F и директрисой d . Прямая ℓ касается параболы в точке P , а Q — проекция P на прямую d . Докажите, что ℓ — биссектриса угла FPQ .

4. На а) эллипсе; б) гиперболе с фокусами F_1 и F_2 выбраны точки A и B . Докажите, что существует окружность, касающаяся прямых AF_1 , AF_2 , BF_1 и BF_2 .

в) На параболе с фокусом F и директрисой d выбраны точки A и B . ℓ_A и ℓ_B — перпендикуляры на прямую d из точек A и B соответственно. Докажите, что существует окружность, касающаяся прямых AF , BF , ℓ_A и ℓ_B .

5. Докажите, что фокусы эллипса, вписанного в треугольник, изогонально сопряжены.