Клетчатые задачи

1. Клетки доски 8×8 раскрашены в шахматном порядке. Одним ходом разрешается перекрасить любую клетку в цвет одной из соседних с ней клеток. Можно ли с помощью таких перекрашиваний изменить цвет всех клеток на противоположный? (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

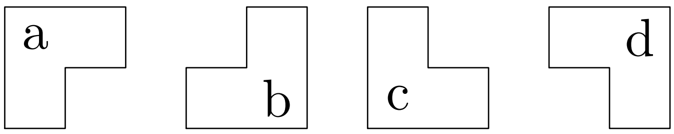
2. Можно ли в таблице 11×11 расставить натуральные числа от 1 до 121 так, чтобы числа, отличающиеся друг от друга на единицу, располагались в клетках с общей стороной, а все точные квадраты попали в один столбец?

3. Треугольник разбит на 25 меньших треугольников, занумерованных числами от 1 до 25 естественным образом. Можно ли эти же числа расставить в клетках квадрата 5×5 так, чтобы любые два числа, записанные в соседних (по стороне) треугольниках, были записаны и в соседних (по стороне) клетках квадрата?

4. Можно ли разбить клетчатую доску 12×12 на уголки из трех клеток так, чтобы каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток пересекал одно и то же количество уголков? (Ряд пересекает уголок, если содержит хотя бы одну его клетку.)

5. N^3 единичных кубиков просверлены по диагонали и плотно нанизаны на нить, после чего нить связана в кольцо (т. е. вершина первого кубика соединена с вершиной последнего). При каких N такое "ожерелье" из кубиков можно упаковать в кубическую коробку с ребром длины N?

6. Прямоугольник $m \times n$ разрезан на уголки:



Докажите, что разность между количеством уголков вида a и количеством уголков вида b делится на 3.