

Варьирование

Идея варьирования — это поиск решения последовательными улучшениями от произвольной начальной ситуации к искомой, в ходе которого нужные нам характеристики «не ухудшаются».

Задача 1. Треугольник целиком содержится в параллелограмме. Докажите, что площадь треугольника не превышает половины площади параллелограмма.

Задача 2. В кладовой лежат 300 сапог: 100 хромовых, 100 кирзовых и 100 яловых, причём левых и правых поровну — по 150. Докажите, что из имеющихся сапог можно составить по крайней мере 50 пар.

Задача 3. Выпуклый многоугольник содержится полностью внутри другого. Докажите, что периметр внешнего больше чем периметр внутреннего.

Задача 4. В парламенте у каждого не более $2n + 1$ врагов. Докажите, что
а) при $n = 1$; б) произвольном n парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в его палате будет не более одного n врагов.

Задача 5. Докажите, что среди всех n -угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный.

Задача 6 (Транс-неравенство). а) Известно, что $x_1 > x_2$ и $y_1 > y_2$. Что больше: $x_1y_1 + x_2y_2$ или $x_1y_2 + x_2y_1$?

б) Докажите транс-неравенство: если $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$, $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ и c_1, c_2, \dots, c_n — некоторая перестановка чисел b_1, b_2, \dots, b_n , то

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1.$$