

Гауссовы числа

1. а) Докажите, что простое натуральное p является простым числом Эйзенштейна, если уравнение $x^2 + x + 1$ не имеет решений по модулю p .
б) Докажите, что простые числа являются простыми числами Эйзенштейна тогда и только тогда, когда они представимы в виде $6k - 1$.
2. Сколькими способами можно представить натуральное число в виде суммы двух квадратов?
3. Евклидово ли кольцо $a + ib\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{N}$.
4. Решите в целых числах а) $x^2 + 4 = y^3$, б) $x^2 + 2 = y^n$, в) $x^3 + y^3 = z^3$.
5. Докажите, что для любого натурального n , существует такое число R , что на окружности с центром в начале координат радиуса R лежит ровно $4n$ точек с целыми координатами.