

Самый ..., неравенства и гео

Задача 1. В трёх школах учатся по n школьников, причём каждый из них знает ровно по $n + 1$ школьнику из двух других школ. Докажите, что можно взять из каждой школы по одному человеку, чтобы они были попарно знакомы.

Задача 2. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство $\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+2ac}{c^2+a^2} + \frac{c^2+2ab}{a^2+b^2} \geq 3$.

Задача 3. Сумма положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n равна 1, докажите, что

$$(1 + a_1)(2 + a_2) \dots (n + a_n) \leq 2(n!)$$

Задача 4. В корзине лежат $n \times k$ шариков, покрашенных в k цветов. Докажите, что их можно так разложить в k коробок по n штук, что в каждой коробке будут находиться шарики не более двух цветов.

Задача 5. На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты различных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые n квадратов различных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздем. Докажите для а) $n = 2$, б) произвольного n , что все квадраты некоторого цвета можно прибить к столу $2n - 2$ гвоздями.

Задача 6. На доске записано произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{100}$, где a_1, a_2, \dots, a_{100} — натуральные числа. Рассмотрим 99 выражений, каждое из которых получается заменой одного из знаков умножения на знак сложения. Известно, что значения ровно 32 из этих выражений четные. Какое наибольшее количество четных чисел среди a_1, a_2, \dots, a_{100} могло быть?

Задача 7. На стороне AB треугольника ABC сидит жук. Он начинает ползти параллельно стороне BC до стороны AC , затем параллельно стороне AB до стороны BC , затем параллельно стороне AC до стороны AB , и так далее. Докажите, что через несколько шагов Кирюша вернется в исходную точку, и найдите сколько шагов ему на это потребуется (ответ может зависеть от исходного положения жука на AB).

Задача 8. Бумажный треугольник с углами $20^\circ, 20^\circ, 140^\circ$ разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника, один из которых также разрезается по биссектрисе, и так далее. Может ли после нескольких разрезов получиться треугольник, подобный исходному?