

Многочлены Чебышёва

Определение 1.

1. Пусть $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. а) Найдите T_n при $n = 0, 1, 2, 3$.
б) Докажите, что $T_{n+1}(x) = 2T_n(x) - T_{n-1}(x)$.
в) Докажите, что $T_n(x)$ — многочлен степени n и найдите его старший коэффициент. Выведите рекуррентную формулу.
г) Найдите все его корни и экстремумы.

2. Докажите, что $T_n(x)$ при чётных n является чётной функцией, а при нечётных — нечётной.

Определение 2. Многочлен $T_n(x)$ называется *многочленом Чебышёва*.

Определение 3. Величина $\max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ называется *уклонением от нуля* многочлена $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

3. а) Найдите уклонение многочлена Чебышёва на отрезке $[-1; 1]$.
б) Докажите, что $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.
в) Докажите, что если $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$, то $f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$.

Замечание. Таким образом, многочлен $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ является наименее уклоняющимся от нуля среди всех унитарных многочленов степени n .

4. а) Докажите, что $T_m(T_n(x)) = T_n(T_m(x))$.
б) Пусть $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$. Вычислите $T_n\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)$.
в) Найдите $T_n(\sin \alpha)$.

5. Докажите, что $P_n(x) = 2T_n\left(\frac{x}{2}\right)$ также является многочленом с целыми коэффициентами.

- а) Докажите, что если $\alpha \in \mathbb{Q}$ и $\cos(\alpha\pi) \in \mathbb{Q}$, то $\cos(\alpha\pi) \in \{0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}\}$.
б) Докажите, что при $n > 4$ не существует правильного n -угольника с вершинами в узлах клетчатой сетки.

6. Известно, что $\sin \alpha = 3/5$. Докажите, что $\sin 25\alpha$ имеет вид $\frac{n}{5^{25}}$, где n — целое, не делящееся на 5.