Разнобой-2

1. Докажите, что числа вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b рациональные числа, образуют а) кольцо; б) поле.

Определение 1. Через $\mathbb{Z}_p$ мы будем обозначать множество остатков по модулю p, с операциями «$+$» и «$\cdot$», которые по двум остаткам a и b, выдают новый остаток r, сравнимый с $r \underset{p}{\equiv} a + b$ и $r \underset{p}{\equiv} ab$ соответственно. Таким образом $\mathbb{Z}_p$ образует коммутативное кольцо с единицей относительно этих двух слагаемых.

2. Пусть p — простое число. а) Докажите, что $\mathbb{Z}_p$ поле. б) Докажите, что в кольце многочленов $\mathbb{Z}_p[x]$ выполнена теорема Безу. Докажите, что у не нулевого многочлена из $\mathbb{Z}_p[x]$ различных корней не больше, чем его степень. Сформулируйте результат этой задачи для колец многочленов $K[x]$, где K — поле.

3. а) Докажите равенство многочленов $x^p - x = x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-(p-1))$.
С помощью предыдущего пункта докажите следующие задачи.
б) Докажите теорему Вильсона: $(p-1)! \underset{p}{\equiv} -1$.

Определение 2. Пусть $p_k(n)$ — количество неупорядоченных разбиений числа n на k слагаемых. Пусть $q_k(n)$ — количество диаграмм Юнга, состоящих ровно из n клеточек и к столбцов.

4. а) Докажите, что количество разбиений числа n на произвольное количество слагаемых равно $p_1(n) + p_2(n) + \ldots + p_{n-1}(n) + p_n(n)$
б) Докажите, что количество диаграмм Юнга, состоящих из n клеток равно $q_1(n) + q_2(n) + \ldots + q_{n-1}(n) + q_n(n)$
в) Докажите, что $p_k(n) = p_1(n-k) + p_2(n-k) + \ldots + p_{k-1}(n-k) + p_k(n-k)$.

5. На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков из 16 символов. Докажите, что на ленте записан «периодический» текст, например: ...мамамылараму мамамылараму...

6. Обозначим через $p(n,k)$ количество делителей числа n не меньших чем k. Чему равна сумма $p(1001,1) + p(1002,2) + \ldots + p(2000,1000)$?

7. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что если $AI + AC = BC$, то $\angle BAC = 2\angle ABC$.