Геометрия и ко

Задача 1. На рис. 1 $AB = CD$ и $BC = AD$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

Задача 2. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O так, что $AO = OC$ и $BO = OD$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

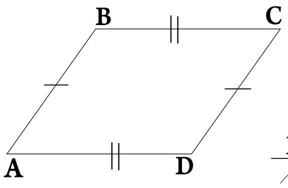

Рис. 1

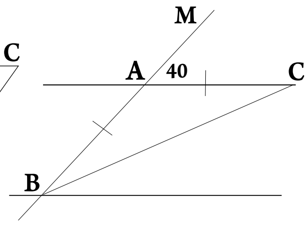

Рис. 2

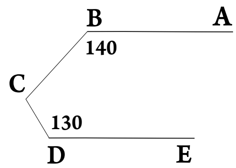

Рис. 3

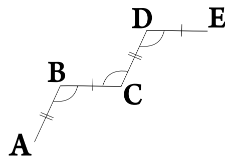

Рис. 4

Задача 3. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD, что $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Докажите, что $AD \parallel BC$.

Задача 4. На рис. 2 $AC \parallel BD$ и $AC = AB$, $\angle MAC = 40°$. Найдите $\angle CBD$.

Задача 5. На рис. 3 $BA \parallel DE$, $\angle CBA = 140°$, $\angle CDE = 130°$. Докажите, что $BC \perp CD$.

Задача 6. На рис. 4 $AB = CD$ и $BC = DE$, $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE$. Докажите, что точки A, C и E лежат на одной прямой.

Задача 7. Сломанный калькулятор умеет только складывать и вычитать числа. Докажите, что с помощью него можно найти остаток от деления числа a на число b.

Задача 8. Делится ли на 3 количество упорядоченных троек натуральных чисел (a_1, a_2, a_3) таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{100}$?

Задача 9. У Васи есть трехзначное число A и двузначное число B. Если к B справа приписать A, то полученное пятизначное число будет на 88011 больше пятизначного числа, которое получится, если к A справа приписать B. Найдите эти числа.

Задача 10. В гандбольном турнире в один круг участвовали несколько студенческих команд и две школьных. Каждая команда сыграла с каждой ровно один матч. За победу давалось 2 очка, за ничью — 1, за проигрыш — 0. Известно, что все студенческие команды набрали одинаковое число очков, а обе школьные — по 14 очков. Сколько студенческих команд могло участвовать в турнире (найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)?

Задача 11. Степень каждой вершины графа меньше d. Докажите, что его вершины можно покрасить в d цветов *правильным образом* (т.е. так что вершины одного цвета не были соединены ребром)

Задача 12. Докажите, что для любого n существует набор различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$, что сумма $\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1$.