

## Непрерывность-2

**Теорема 1.** Пусть  $f$  — непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция, такая, что  $f(a) < 0$  и  $f(b) > 0$ . Докажите, что существует такая точка  $x_0 \in [a, b]$ , что  $f(x_0) = 0$ .

1. Пусть  $f$  — непрерывная на отрезке  $[a, b]$ . Докажите, что для любого  $c \in [f(a), f(b)]$  существует такая точка  $x_0 \in [a, b]$ , что  $f(x_0) = c$ .

2. Пусть  $f$  — непрерывная на отрезке  $[a, b]$ . Докажите, что образ отрезка  $f([a, b])$  тоже отрезок. А образ интервала чем может быть?

3. Функции  $f, g$  — непрерывны на отрезке  $[0, 1]$  и  $f(0) = 1, f(1) = 0, g(0) = 0, g(1) = 1$ . Докажите, что существует точка  $x_0 \in [0, 1]$ , что  $f(x_0) = g(x_0)$ .

4. Докажите, что многочлен нечётной степени с вещественными коэффициентами всегда имеет вещественный корень.

*Соглашение.* В этом листике под фигурой мы будем понимать выпуклую ограниченную фигуру.

5. Докажите, что для любой фигуры можно провести прямую, параллельную данной, такую, что она разделит площадь пополам.

6. Докажите, что для любой фигуры можно найти две точки  $A$  и  $B$ , делящие периметр пополам, такие, что  $AB$  параллельно данной прямой.

7. Докажите, что для любой фигуры можно провести прямую через данную точку так, что она разделит площадь пополам.

8. Докажите, что любую фигуру можно вписать в квадрат.

9. Докажите, что в любую фигуру можно вписать равносторонний треугольник.

**10 (Теорема Борсука-Улама для окружности).** Докажите, что непрерывная функция на окружности в некоторых двух диаметрально противоположных точках принимает одинаковые значения. Докажите, что сейчас на экваторе есть две противоположные точки с одинаковой температурой.