Комплексные числа

Определение 1. Пусть символ i обладает следующим свойством $i^2 = -1$. Комплексным числом будем называть формальную сумму $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Множество таких чисел обозначается $\mathbb{C}$. Операции над комплексными числами:
1) Суммой двух комплексных чисел $e = a + ib, f = c + id$ называется комплексное число $t = e + f = g + ih$, где $g = a + c, h = b + d$.
2) Произведением двух комплексных чисел $e = a + ib, f = c + id$ называется комплексное число $t = ef = g + ih$, где $g = ac - bd, h = bc + ad$.
Число a называется *вещественной частью* и обозначается $\mathrm{Re}(z)$. Число b называется *мнимой частью* и обозначается $\mathrm{Im}(z)$.

Упражнение 1. а) Докажите, что комплексные числа являются коммутативным кольцом с единицей (да, надо вспомнить, что проверять). б) Докажите, что комплексные числа образуют поле относительно введённых нами операций сложения и умножения.

1. Докажите, что из комплексного числа можно извлекать корень. Иными словами, пусть $z \in \mathbb{C}$, тогда существует число $t \in \mathbb{C}, t^2 = z$. Сколько таких чисел?

Упражнение 2. Найдите, чему равны следующие выражения а) $\dfrac{1+i}{1-i}$, б) $\sqrt{i}$.

2. Решите уравнения а) $z^2 + 4z + 5 = 0$; б) $z^2 - (2 + i)z + 2i = 0$; в) $z^3 = 1$.

Определение 2. Пусть $z \in \mathbb{C}, z = a + ib$, *сопряжённым* к числу z называется комплексное число $\overline{z} = a - ib$.

Упражнение 3. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, докажите следующие свойства сопряжения:
а) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, б) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, в) $z_1\overline{z_1} \in \mathbb{R}$.

3. Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ и z_0 его комплексный корень. Докажите, что $\overline{z_0}$ также является корнем многочлена $f(x)$.

4. Будем рассматривать выражения вида $a + bj$, где a и b — остатки по модулю p, $j^2 = d$ (d — фиксированный остаток). При каких d в таких числах возможно деление?

5. Докажите, что каждое комплексное число можно представить в виде $z = r(cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$.Причем r определяется единственным образом, а φ — с точностью до 360° (если число не равно нулю). Число r называется *модулем*, а φ — *аргументом* комплексного числа.