Праздники закончились, пора учиться

1. Каждый из 7 мальчиков имеет не менее 3 братьев среди остальных 6. Докажите, что все мальчики братья.

2. а) Пираты Йо и Йа нашли 10 разных золотых монет. Каким количеством способов они могут разделить их между собой (кому-то может даже совсем ничего не достаться =()?
б) Найдите, чему равняется сумма $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$?

3. Даны натуральные x и y такие, что $x^2 + y^2$ делится на 3, докажите, что x и y также дялтся на 3.

4. На доске написаны числа 4, 5, 6. Разрешается выбрать любые два числа a и b и заменить их на числа а) $\dfrac{5a-3b}{2}$ и $\dfrac{5b-3a}{2}$; б) $\dfrac{b^2}{a}$ и $\dfrac{a^2}{b}$. 4. Можно ли такими операциями получить числа 6, 7, 8?

5. Семь грибников собрали вместе 59 грибов, причем каждый собрал разное количество. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 33 грибов.

6. В клетке $a1$ шахматной доски стоит фишка. За один ход её разрешается передвинуть на одну клетку вправо или вверх. Каким количеством способов фишка сможет добраться до клетки $h8$, не проходя черед клетку $e5$?

7. В марсианском метро с любой станции можно проехать на любую. Докажите, что можно так выбрать станцию и закрыть ее на ремонт (без права проезда через нее), что по-прежнему можно будет проехать с любой оставшейся станции на любую оставшуюся.

8. Какое наименьшее число прямоугольников 1×2 нужно закрасить на доске 8×8 клеток, чтобы любой квадрат 2×2 содержал, по крайней мере, одну закрашенную клетку.

9. Докажите, что в записи числа 2^{300} а) не меньше 90 цифр; б) не больше 100 цифр.

10. Квадратная страна 2000×2000 км разбита на прямоугольные области 100×200 км. Области объявили независимость, и каждая пара областей, имеющих общий участок границы, построила на двоих одну таможню. Какое наибольшее число таможен могло быть построено?