

ОТА, неравенства, геом

Задача 1. Докажите неравенство $\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Задача 2. У чисел m и n перемножили все делители, включая сами числа m и n . Получившиеся числа оказались равны. Докажите, что $n = m$.

Задача 3. Продолжения боковых сторон трапеции с основаниями AD и BC пересекаются в точке O . Концы отрезка EF , параллельного основаниям и проходящего через точку пересечения диагоналей, лежат соответственно на сторонах AB и CD . Докажите, что $\frac{AE}{CF} = \frac{AO}{CO}$.

Задача 4. Докажите, что для любых положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n , сумма которых равна 1, справедливо неравенство

$$\frac{a_1}{2 - a_1} + \frac{a_2}{2 - a_2} + \dots + \frac{a_n}{2 - a_n} \geq \frac{n}{2n - 1}.$$

Задача 5. Натуральные числа a, b и c удовлетворяют условию $c(ac + 1)^2 = (5c + 2b)(2c + b)$. Докажите, что c — нечётный квадрат.

Задача 6. Точки A_1, B_1 и C_1 симметричны центру описанной окружности треугольника ABC относительно его сторон. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Задача 7. Решите в натуральных числах уравнение $x^{(y-x)} = y^x$.

Задача 8. Три прямые, параллельные сторонам данного треугольника, отсекают от него три треугольника, причём остаётся равносторонний шестиугольник. Найдите длину стороны шестиугольника, если длины сторон треугольника равны a, b и c .

Задача 9. Для положительных чисел x и y докажите неравенство

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}$$