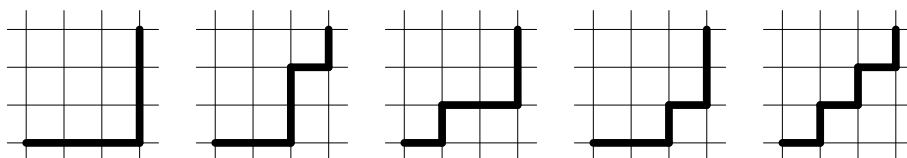


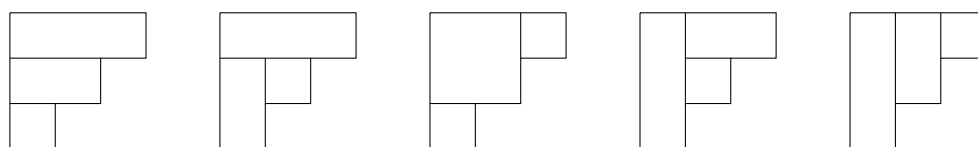
Разнобой на пройденное

1. Решите уравнение $z^3 = \bar{z}$. Можете ли вы объяснить, почему корней получилось больше, чем степень уравнения?

2. а) Докажите, что количество путей по линиям сетки из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) , не поднимающихся выше диагонали $y = x$, равно C_n .



б) Докажите, что количество способов разрезать “клетчатый равнобедренный прямоугольный треугольник” со стороной n на n прямоугольников равно C_n .



3 (Свёртка Вандермонда). а) Докажите, что

$$C_{a+b}^k = \sum_{i=0}^k C_a^i C_b^{k-i}$$

б) Обозначим $\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-k+1)}{k!}$, $a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Числа $\binom{a}{k}$ называются (обобщенными) биномиальными коэффициентами. Докажите, что свёртка Вандермонда верна и для обобщённых биномиальных коэффициентов.

4. Головоломка представляет собой два цикла из а) 7; б) 8 шариков каждый, имеющих один общий шарик. Можно поворачивать каждый цикл. Можно ли добиться произвольного расположения шариков?

5. Пусть на стороне AC выбрана точка D . Обозначим через I_A и I_C центры окружностей вписанных в треугольники ABD и CBD соответственно, а через B'_0 — точку касания вписанной окружности $\triangle ABC$ со стороной AC . Докажите, что $\angle I_A B'_0 I_C = 90^\circ$.

6. а) В треугольнике ABC , в котором $AB + BC = 3AC$, вписанная окружность с центром I , касается сторон AB и BC в точках D и E , соответственно. Пусть K и L симметричны точкам D и E относительно I . Докажите что $ACKL$ вписанный.
б) Для такого треугольника точка Нагеля лежит на его вписанной окружности. Почему?