

Разнойбой

Определение 1. Пусть l_1 и l_2 — две прямые на плоскости, O — точка, не лежащая ни на одной из прямых. Центральным проектированием прямой l_1 на прямую l_2 с центром O называется отображение, которое точке A_1 прямой l_1 ставит в соответствие точку пересечения прямой OA_1 с прямой l_2 .

1. Докажите, что двойное отношение сохраняется при центральном проектировании, т.е. $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$.

2. Многочлен $Q(x)$ таков, что уравнение $Q(x) = x$ не имеет вещественных решений. Докажите, что уравнение $Q(Q(x)) = x$ также не имеет вещественных решений.

3. а) Докажите, что существует аффинное преобразование, переводящее данную точку внутри остроугольного треугольника в ортоцентр.

б) **[Прямая Гаусса]** Если никакие стороны четырёхугольника не параллельны, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.

4. Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ имеет хотя бы один действительный корень и $a_0 \neq 0$. Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число a_0 так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.

5. На окружности расставлено несколько действительных чисел. Рассмотрим группы из одного или нескольких чисел подряд с неотрицательной суммой, и назовем число на окружности хорошим, если оно является первым по часовой стрелке хотя бы в одной из этих групп. Докажите, что сумма хороших чисел неотрицательна.

6. Окружность ω касается равных сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L . Отрезок AK пересекает ω второй раз в точке M . Точки P и Q симметричны точке K относительно точек B и C соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника PMQ касается окружности ω .