

Маленькая, но удаленькая

Определение 1. Циклом называется замкнутый путь (*вспомните определение-пути*) по ребрам графа без повторяющихся ребер. Простым циклом называется цикл без повторяющихся вершин.

1. Докажите, что если в графе есть цикл, то в нём есть и простой цикл.

Определение 2. Целые числа a_1, \dots, a_k образуют полную систему вычетов по модулю m , если любое целое число сравнимо по модулю m с одним и только одним из этих чисел.

Любая полная система вычетов по модулю m состоит из m чисел, которые попарно не сравнимы по модулю m .

2. Рассмотрим простое число p и целое число a такое, что $(a, p) = 1$. Тогда числа $0 \cdot a, 1 \cdot a, 2 \cdot a, \dots, (p-1) \cdot a$ образуют полную систему вычетов. а) Найдите, с чем сравнимо $a^{p-1}(p-1)!$ по модулю p . б) Докажите, что $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (*поздравляем, теперь вы знаете, что такое малая теорема Ферма*).

3. Найдите остаток числа 13^{1001} при делении на 101.

4. В стране несколько городов, некоторые пары соединены дорогами. Известно, что можно построить ещё три дороги так, что из любого города можно будет проехать в любой другой. Докажите, что можно разделить страну не более чем на четыре республики так, что любая дорога соединяла города из одной республики.

5. Правильную дробь перевернули. Какая из двух дробей ближе к единице: исходная или перевернутая?

6. Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $AC = BD$, $AB = CD$. Докажите, что $\angle CAD = \angle BDA$ и $\angle BAC = \angle CDB$.

7. В стране несколько городов, из каждого выходит а) 99; б) 100 дорог в другие города. Из любого города можно проехать в любой другой. Может ли так оказаться, что закрытие одной дороги на ремонт лишит жителей возможности проехать в любой другой город?

8. На окружности даны несколько точек. Кто-то посчитал количество способов провести три отрезка с концами в данных точках, не имеющих общих точек (в том числе и концов). Докажите, что это количество делится на 5.

9. Докажите, что чисел взаимно простых с натуральным числом $n > 2$ и меньших его чётное число.

10. Докажите, что если в связном графе степень каждой вершины чётна, то существует цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз. (Этот цикл называется **эйлеровым циклом**.)