Основательный листик

1. Даны три числа: 2000, 2001, 2002. За ход разрешается заменить числа a, b, c на ab/c, ac/b, bc/a. Можно ли через несколько ходов получить числа 1000, 2001, 2002?

2. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 4y^2 = 13$.

3. Периметр прямоугольника меньше 2. Может ли его площадь быть больше 3?

4. К квадрату целого числа прибавили 1 и получили десятизначное число. Докажите, что в его записи найдутся две одинаковые цифры.

5. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

6. Круг разделен на 6 секторов, в каждом из которых стоит фишка. За один ход разрешается сдвинуть любые две фишки в соседние с ними секторы. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

7. Три автомата печатают карточки. Первый по карточке (a, b) печатает $(a + 1, b + 1)$; второй по (a, b) печатает $(a/2, b/2)$, если a и b — четные; третий по (a, b) и (b, c) печатает (a, c). Прочитанные автоматом карточки возвращаются. Можно ли, начав с карточки (5, 19), получить а) (1,50) ; б) (1, 100) ?

8. В таблицу 5×5 записали различные натуральные числа от 1 до 25 так, что любые два числа, отличающиеся на единицу, стоят в соседних по стороне клетках. Какое наибольшее количество простых чисел может стоять в одном столбце?

9. а) Пусть $a = p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}$, где $p_1, \dots, p_k$ различные простые числа и $b_1 > 0, \dots, b_k > 0$. Докажите, что если простое число p делит a, то оно равно одному из $p_1, \dots, p_k$.
б) **Основная теорема арифметики.** Любое натуральное число $a > 1$ можно однозначно представить ввиде $a = p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}$, где $p_1, \dots, p_k$ различные простые числа и $b_1 > 0, \dots, b_k > 0$ с точностью до порядка множетелей.

10. В группе из 25 школьников любые двое имеют общего знакомого. Докажите, что из этой группы можно не менее, чем 36 способами выбрать пару знакомых школьников.