

## Да будем арбористами

**Определение 1.** *Деревом* называется связный граф без циклов.

**Утверждение 1.** Из любого связного графа путём выкидывания рёбер можно получить дерево.

1. Найдите все такие пары простых чисел  $p > q$ , что  $p + q + 1$  делится на  $p - q$ .
2. а) Докажите, что в любом дереве есть висячая вершина (вершина степени 1).  
б) Докажите, что их как минимум две.
3. Куб  $11 \times 11 \times 11$  разбит на кубики  $1 \times 1 \times 1$ . Сколько существует путей из углового кубика в противоположный? (За шаг разрешается сдвигаться вправо, вверх или «вглубь» на 1 кубик.)
4. Докажите что в любом дереве на  $n$  вершинах  $n - 1$  ребро.
5. Докажите, что если в связном графе на  $n$  вершинах  $n - 1$  ребро, то данный граф — дерево.
6. Будет ли число  $1001^{200} + 100$  простым?
7. В стране 10 городов. Любые два города соединены дорогой, если и только если из них выходит одинаковое число дорог. Может ли число дорог равняться 20?
8. В треугольнике  $ABC$  отрезок  $AM$  — медиана. Пусть  $P$  — середина  $AM$ , а точка  $E$  — точка пересечения прямой  $CP$  со стороной  $AB$ . Известно, что  $BM = BP$ . Докажите, что  $AE = PE$ .
9. В ряд выписали несколько натуральных чисел (не обязательно различных). Затем под каждым числом подписали, сколько раз оно встречается в этом ряду. Получился второй ряд чисел. По нему таким же образом построили третий ряд, и т. д. Докажите, что на некотором шаге получатся два идущих подряд одинаковых ряда.
10. На плоскости отмечены 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует не более 90 равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках.