Généralités sur les suites

I Modes de génération

Une suite numérique est la donnée d'une infinité de nombres réels, appelés termes, numérotés à l'aide d'entiers naturels.

Une suite est généralement notée (u_n), mais son terme de rang n est noté u_n.

On peut définir l'ensemble des termes d'une suite de deux manières.

- → Une suite est définie explicitement lorsque chacun de ses termes est défini par une formule ne dépendant que de son rang, généralement noté n.
  Exemples. Écrire « pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 2n - 3 + n^2$ » ou « pour tout entier $n \geqslant 2$, $v_n = \dfrac{3n}{n-1}$ » permet de définir deux suites (u_n) et (v_n) de façon explicite.
- → Une suite est définie par récurrence lorsque son premier terme est donné et que chacun de ses termes ultérieurs est défini à partir du précédent (ou des précédents).
  Exemple. Écrire « On pose $u_2 = 7$ et pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = 6n - 11u_n$ » permet de définir une suite (u_n) par récurrence.

Calculer les termes d'une suite définie par récurrence

$u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 7 - 6u_n$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 7 - 6 \times 2 \\ &= -5 \\ u_2 &= 7 - 6 \times (-5) \\ &= 37 \end{aligned}$$

$v_7 = 2$ et pour tout entier $n \geqslant 7$,

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{6-n}$$

$$\begin{aligned} v_8 &= \frac{2}{6-7} = -1 \\ v_9 &= \frac{-1}{6-8} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$w_0 = w_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_{n+1} = -7(n+1)w_n - \frac{(w_{n-1})^2}{n}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= -7 \times 2 \times 2 - \frac{2^2}{1} \\ &= -32 \\ w_3 &= -7 \times 3 \times (-32) - \frac{2^2}{2} \\ &= 670 \end{aligned}$$

Rédiger un algorithme calculant un terme d'une suite définie par récurrence

On rappelle que dans une boucle introduite par `for k in range(p, q)`, la variable `k` prend les valeurs entières de `p` à `q - 1`.

```
def calculer_u(N):
  u = 2
  for n in range(..., ......):
    u = ...........
  return u
```

```
def calculer_v(N):
  v = 2
  for n in range(..., ......):
    v = ......................
  return v
```

II Sens de variation

Certaines suites ont des termes triés dans l'ordre croissant ou décroissant relativement à leur rang. On dit qu'elles sont monotones.

Soit (u_n) une suite numérique dont le premier terme est de rang p.

→ On dit que (u_n) est croissante lorsque pour tout entier $n \geqslant p$, on a l'inégalité $u_{n+1} \geqslant u_n$.

→ On dit que (u_n) est croissante lorsque pour tout entier $n \geqslant p$, on a l'inégalité $u_{n+1} \geqslant u_n$.

→ On dit que (u_n) est strictement croissante lorsque pour tout entier $n \geqslant p$, on a l'inégalité $u_{n+1} > u_n$.

→ On dit que (u_n) est strictement décroissante lorsque pour tout entier $n \geqslant p$, on a l'inégalité $u_{n+1} < u_n$.

- Une suite vérifiant l'une de ces quatre propriétés admet un sens de variation.
- Si (u_n) vérifie l'une des deux premières propriétés, elle est dite monotone.
- Si (u_n) vérifie l'une des deux dernières propriétés, elle est dite strictement monotone.
- Il existe des suites sans aucun sens de variation : on dit qu'elle ne sont pas monotones.
  Exemple. $u_n = (-1)^n$.

Déterminer le sens de variation d'une suite en étudiant une différence

Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.
Soit un entier $n \geqslant 1$.
Calculons :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{2n(n+2) - n(n+1) - (n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{\cancel{2n^2} + \cancel{4n} - \cancel{n^2} - \cancel{n} - \cancel{n^2} - \cancel{2n} - \cancel{n} - 2}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{-2}{n(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
En conclusion, la suite (u_n) est décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{2-n}{2+n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Calculons :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{2-(n+1)}{2+n+1} - \frac{2-n}{2+n} \\
&= \frac{1-n}{3+n} - \frac{2-n}{2+n} \\
&= \frac{(1-n)(2+n) - (2-n)(3+n)}{(3+n)(2+n)} \\
&= \frac{2 + \cancel{n} - \cancel{2n} - \cancel{n^2} - 6 - \cancel{2n} + \cancel{3n} + \cancel{n^2}}{(3+n)(2+n)} \\
&= \frac{-4}{(3+n)(2+n)}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.
En conclusion, la suite (v_n) est décroissante.

Lorsque la suite (u_n) est strictement positive et que l'égalité la définissant présente un caractère multiplicatif, il pourra être plus pratique d'utiliser le critère suivant :

→ Si, pour tout entier $n \geqslant p$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la suite (u_n) est croissante.

→ Si, pour tout entier $n \geqslant p$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Naturellement, si l'inégalité vérifiée par le quotient est stricte, alors la monotonie est stricte.

Déterminer le sens de variation d'une suite en étudiant un quotient

Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{3^n}{n}$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.
Soit un entier $n \geqslant 1$.

Calculons :
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n}{n}}\\ &= \frac{3^{n+1}n}{\cancel{3^n}(n+1)}\\ &= \frac{3n}{n+1}\end{aligned}$$

Or, $0 < n+1 \leqslant 3n$.
Donc, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
En conclusion, la suite (u_n) est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculons :
$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\frac{n+2}{n+3}}{\frac{n+1}{n+2}}\\ &= \frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}\\ &= \frac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3}\end{aligned}$$

Or, $0 < n^2+4n+3 \leqslant n^2+4n+4$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1$.
En conclusion, la suite (v_n) est croissante.

III Suites arithmétiques

Soit (u_n) une suite numérique dont le rang de son premier terme est p.

On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique, lorsqu'il existe $r \in \mathbb{R}$, appelé raison, tel que pour tout entier $n \geqslant p$,
$$u_{n+1} = u_n + r$$
C'est une suite définie par récurrence. L'obtention de la valeur d'un terme se fait en ajoutant la raison au terme de rang immédiatement inférieur.

La raison d'une suite arithmétique est indépendante du rang où on l'ajoute. Ainsi, que l'on calcule u_{1000} à partir de u_{999} ou u_{54} à partir de u_{53}, c'est le même réel r que l'on ajoute.

Démontrer qu'une suite est arithmétique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{7-3n}{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :
$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{7-3(n+1)}{2} - \frac{7-3n}{2}\\ &= \frac{\cancel{7} - \cancel{3n} - 3 - \cancel{7} + \cancel{3n}}{2}\\ &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Finalement, (u_n) est arithmétique de raison $-\dfrac{3}{2}$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{7}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_3 = -3$, et pour tout entier $n \geqslant 3$, $v_{n+1} = 15v_n - (v_n)^2 + (v_n-7)^2$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :
$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= 15v_n - (v_n)^2 + (v_n-7)^2 - v_n\\ &= 14v_n + (v_n-7)^2 - (v_n)^2\\ &= 14v_n + (\cancel{v_n} - 7 - \cancel{v_n})(v_n - 7 + v_n)\\ &= \cancel{14v_n} - 7(2v_n - 7)\\ &= 49\end{aligned}$$

En conclusion, (v_n) est arithmétique de raison 49 et de premier terme $v_3 = -3$.

Connaissant la raison et le premier terme d'une suite arithmétique, on peut donner une formule explicite de son terme de rang n :

$$\text{terme de rang } n = \text{premier terme} + \text{raison} \times (n - \text{rang du premier terme})$$

Exprimer un terme d'une suite arithmétique en fonction de son rang

On considère la suite (v_n) introduite dans l'exemple précédent. Exprimer v_n en fonction de n.
On sait que (v_n) est une suite arithmétique de raison 49 et de premier terme $v_3 = -3$. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$v_n = -3 + 49 \times (n - 3) = 49n - 150$$

Une formule permet de calculer la somme de termes successifs d'une suite arithmétique :

$$\begin{array}{c}\text{Somme des termes d'une} \\ \text{suite arithmétique}\end{array} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Calculer une somme de termes successifs d'une suite arithmétique

Calculer $\mathrm{S} = u_{54} + u_{55} + \cdots + u_{74} + u_{75}$.

S est la somme de $75 - 54 + 1 = 22$ termes successifs de la suite arithmétique (u_n) donc

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= 22 \cdot \frac{u_{54} + u_{75}}{\cancel{2}} \\ &= 11\Big[(7 - 3 \times 54) + (7 - 3 \times 75)\Big] \\ &= 4\,103 \end{aligned}$$

Pour tout entier $n \geqslant 12$, on pose $\mathrm{S}_n = v_{12} + \cdots + v_n$. Exprimer S_n en fonction de n.
Soit un entier $n \geqslant 12$. S_n est la somme de $n - 12 + 1 = n - 11$ termes successifs de la suite arithmétique (v_n) donc

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_n &= n - 11 \cdot \frac{v_{12} + v_n}{\cancel{2}} \\ &= \frac{(n-11)(49 \times 12 - 150 + 49n - 150)}{2} \\ &= \frac{(n-11)(49n + 288)}{2} \end{aligned}$$

IV Suites géométriques

Soit (u_n) une suite numérique dont le rang de son premier terme est p.

On dit qu'une suite (u_n) est géométrique, lorsqu'il existe $q \in \mathbb{R}$, appelé raison, tel que pour tout entier $n \geqslant p$,

$$u_{n+1} = qu_n$$

C'est aussi une suite définie par récurrence. L'obtention de la valeur d'un terme se fait en multipliant par la raison le terme de rang immédiatement inférieur.

La raison d'une suite géométrique est indépendante du rang où elle intervient. Ainsi, que l'on calcule u_{1000} à partir de u_{999} ou u_{54} à partir de u_{53}, c'est le même réel q par lequel on multiplie.

Connaissant la raison et le premier terme d'une suite géométrique, on peut donner une formule explicite de son terme de rang n :

$$\text{terme de rang } n = \text{premier terme} \times \text{raison}^{n - \text{rang du premier terme}}$$

Une formule permet de calculer la somme de termes successifs d'une suite géométrique :

$$\begin{array}{c}\text{Somme des termes d'une} \\ \text{suite géométrique}\end{array} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Démontrer qu'une suite est géométrique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{2^{2n+1}}{5^{n+2}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2^{2(n+1)+1}}{5^{n+1+2}} = \frac{2^{2n+2+1}}{5^{n+1+2}} \\ &= \frac{2^{2n+1} \cdot 2^2}{5^{n+2} \cdot 5^1} = u_n \cdot \frac{2^2}{5^1} \\ &= \frac{4}{5} u_n \end{aligned}$$

Finalement, (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{4}{5}$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{2}{25}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_0 = 7$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n + 5$ et $w_n = v_n + 5$.
Montrons que (w_n) est géométrique.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} + 5 \\ &= 2v_n + 5 + 5 \\ &= 2(w_n - 5) + 10 \\ &= 2w_n \end{aligned}$$

En conclusion, (w_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0 = v_0 + 5 = 13$.

Exprimer un terme d'une suite géométrique en fonction de son rang

Exprimer w_n en fonction de n, puis en déduire v_n en fonction de n.
On sait que (w_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0 = v_0 + 5 = 13$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = 13 \cdot 2^n - 5$$

puis

$$v_n = w_n - 5 = 13 \cdot 2^n - 5$$

Calculer une somme de termes successifs d'une suite géométrique

Calculer $\mathrm{S} = u_2 + \cdots + u_9$.
S est la somme de $9 - 2 + 1 = 8$ termes successifs de la suite géométrique (u_n) de raison $\dfrac{4}{5}$ donc

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= u_2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^8}{1 - \frac{4}{5}} \\ &= \frac{2^5}{5^4} \cdot \frac{\frac{5^8 - 4^8}{5^8}}{\frac{5-4}{5}} \\ &= \frac{2^5}{5^4} \cdot \frac{5(5^8 - 4^8)}{5^8(5-4)} \\ &= \frac{2^5(5^8 - 4^8)}{5^{11}} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{S}_n = w_0 + \cdots + w_n$.
Exprimer S_n en fonction de n.
Soit $n \in \mathbb{N}$. S_n est la somme de $n - 0 + 1 = n+1$ termes successifs de la suite géométrique (w_n) de raison 2, donc

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_n &= w_0 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \\ &= -13(1 - 2^{n+1}) \end{aligned}$$

En déduire $\mathrm{T}_n = v_0 + \cdots + v_n$ en fonction de n.

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_n &= (w_0 - 5) + \cdots + (w_n - 5) \\ &= w_0 + \cdots + w_n \underbrace{-5 - \cdots - 5}_{n+1 \text{ termes}} \\ &= -13(1 - 2^{n+1}) - 5(n+1) \end{aligned}$$

La somme $u_p + \cdots + u_q$ de termes successifs d'une suite est aussi notée $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} u_k$

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 9 + \cdots + 121 + 144 &= 1^2 + \cdots + 12^2 \\ &= \sum_{k=1}^{12} k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1)n &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) \\ &= \sum_{k=2}^{n} (k-1)k \end{aligned}$$