4. ВАРИАЦИИ, ПЕРМУТАЦИИ, КОМБИНАЦИИ

1. Вариации

Нека А = $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ е множество от n елемента. Под вариации от k-ти клас се разбира наредена k-орка от елементи на A, в която елементите са различни.

Пример: Ако А $=\{a, b, c\}$, всички вариации от втори клас са (a, b), (a,c), (b, c), (b, a), (c, a), (c, b).

Означава се с V_n^k броят на всички вариации от k-ти клас с елементи от A. Очевидно V_n^k зависи само от числата n и k, при което е изпълнена следната теорема:

$$V_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2. Пермутации

Под пермутация на n елемента $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ се разбира всяка тяхна вариация от n-ти клас. Пермутацията задава едно възможно подреждане $\left\langle a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n} \right\rangle$ на n-те елемента. Броят на всички пермутации на n елемента се определя в съответствие с горната теорема:

$$V_n^n = n(n-1)...(n-n+1) = n!$$

3. Комбинации

Комбинация на елементи на множеството $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ от k-ти клас се нарича всяко подмножество на A с k елемента. Броят на всички комбинации на елементите на A от k-ти клас се определят от израза

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Следва да се отбележи, че при $n = k$, $(n-n)! = 0! = 1$.

Теорема:

Броят на всички подмножества на множеството $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ е равен на 2^n (като се включват празното множество и самото A).

Доказателство: Съгласно горната теорема от k елемента се образуват $C_n^k = \binom{n}{k}$ подмножества. Сумира се по k от 0 до n и се получава

$$1+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^i1^{n-i}=(1+1)^n=2^n.$$

Числата $C_n^k = \binom{n}{k}$ се наричат биномни коефициенти.

Пример: От бинома $(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\dots(x+y)}_{n-\text{пъти}}$

следва, че произведението $x^k y^{n-k}$ в дясната страна, може да се получи, като вземем x от k множители $(x+y)$, които се избират по произволен начин. Следователно, броят на събираемите, които съдържат x^k ще бъде $\binom{n}{k}$. Ясно е, че y ще се вземе от останалите $n-k$ множители, от които x не е избран. Следователно

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

При $x=y=1$ се получава $2^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$, а при $x=-1$ и $y=1$се получава $0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.

Пример. Да се определи броят на различните начини за разполагане на n различни предмета в кръг.

Разглежда се произволно разполагане $a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_n}$ на n елемента върху кръга. Изписването им може да започва не само от a_{i_1}, а от всеки друг елемент без да се измени разположението, върху кръга. Например, същото разполагане може да се запише и като $a_{i_3}a_{i_4}....a_{i_n}a_{i_1}a_{i_2}$ и т.и. За всяко разполагане на n елемента върху кръг се получават n различни записвания, а от друга страна, всяко записване определя по една пермутация на тези n елемента. Следователно броят на разполаганията в кръг е $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

Общият брой на вариациите от k елемента с повторение измежду n елемента е n^k, където $k > 0$.

Наистина, при $k = 0$ съществува една възможност за избор - да не се избере нито един елемент, т.е. $n^0 = 1$. При $k > 0$, начините за попълване на всяка една позиция от вариацията са n на брой, което доказва, че общият брой на такива вариации е точно n^k.

Пример: Символите, които се използват при предаване и обработване на информацията са буквите от азбуката на някои говорим език (най-често английски), цифрите и някои специални символи. Всичките тези символи обикновено се кодират, чрез думи над азбука с две букви 0 и 1, като дължината на тези нови кодови думи е отнапред определена. Най-често тази дължина е 8 двоични символи (8 бита), които образуват един байт. Да се определи колко са различните символи, които могат да се кодират с двоични думи с дължина 8 (т.е. с 1 байт).

Броят на символите съвпада с броя на вариациите на 8 елемента с повторение измежду елементите на множеството $\{0,1\}$. Съгласно казаното по-горе следва, че този брой е $2^8 = 256$.

4. Функция на Мьобиус

В комбинаториката особено важна роля играе една забележителна функция в множеството на целите числа, известна като функция на Мьобиус.

Определение: Нека n е цяло положително число и $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_1}$ е неговото канонично разлагане на прости множители. Функцията на Мьобиус $\mu(n)$ се дефинира по следния начин

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{ако } n = 1 \\ (-1)^k & \text{ако } \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 1 \\ 0, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

Пример: Да се получат стойностите на $\mu(n)$ за $n \leq 10$. В съответствие с дефиницията се съставя следната таблица

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

Ако a и b са цели числа и a е делител на b се използва означението $a \mid b$.

Теорема:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0, \text{ при } n > 1.$$

Сумата в лявата страна е по всички положителни делители на n.

5. Принцип на включено-изключено

Нека A е множество от n елемента, а $p(1)$, $p(2)$, ...,$p(k)$ са свойства, които могат да се притежават от елементите на A. Предполага се, че може да се определи еднозначно, дали даден елемент на A притежава или не свойството $p(j)$ за $j = 1,2,..., k$. Означава се с $n_{i_1 ... i_t}$, броят на елементите от A, които притежават свойствата $p(i_1)$, $p(i_2)$..., $p(i_t)$, а с $n(s)$ се означават броят на елементите в A, които притежават точно s от свойствата $p(1)$,...,$p(k)$. С $n(0)$ се означава броят на елементите в A, които не притежават нито едно от посочените свойства.

Принципът на включеното - изключеното се състои в използването на следното равенство, дефинирано с

Теорема:

$$n(0) = n - \sum_{i=1}^{k} n_i + \sum_{i_1 < i_2} n_{i_1 i_2} - \ldots +$$
$$+ (-1)^t \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_t} n_{i_1 i_2 \ldots n_{i_t}} + \ldots + (-1)^k n_{12\ldots k}$$

От многобройните приложения на принципа на включеното - изключеното, ще се разгледа определянето на броя на пермутациите на k елемента, в които не се съдържат отнапред зададени вариации на s ($s \le k$) елемента без повторение измежду k-те елемента.

Пример: Да се намери броят на пермутациите на числата 1, 2,…,7, които не съдържат вариациите 32 и 56.

Означава се с $p(1)$ и $p(2)$ свойствата на пермутациите да имат съответно вариациите 32 и 56.

Ако вариацията 32 влиза в пермутацията, тя може да заеме 5 възможни позиции. Същото се отнася и за вариацията 56. При всяка една от тези възможности остават 5 позиции за останалите числа от 1 до 7.

Следователно: $n_1 = 5.5!$ и $n_2 = 5.5!$.

Разглеждат се пермутациите, които съдържат и 32 и 56. Има две възможности: 32 да е пред 56 или 56 да е пред 32. При всяка една от тези възможности възникват десет варианта за разместването на останалите три числа - трите да са в началото; трите да са в средата; трите да са в края на пермутацията; едно да е в началото, едно в средата, едно в края; едно в началото две в средата; две в началото, едно в средата; две в началото, едно накрая; едно в средата, две накрая; две в средата, едно накрая; едно в началото, две накрая.

Следователно n_{12}= 2.10.3! = 120. Съгласно принципа на включеното - изключеното следва

$n(0) = n - (n_1 + n_2) + n_{12} = 7! - 10.5! + 20.3! = 3!(840 - 200 + 20) = 3!.660 =$ 3960.