1.2. ФУНКЦИИ В МНОЖЕСТВАТА

1. Определение

Релацията $f \subseteq X \times Y$ е функция, ако $\forall x \in X, \exists$ не повече от едно $y \in Y$, такова че $\langle x, y \rangle \in f$. Множеството $X = D(f)$ е **дефиниционната област** или **област на аргументите** на функцията. Множеството $Y = R(f)$ е **област на стойностите** или **кообласт**.

В случай, че $\forall x \in X, \exists$точно едно $y \in Y$такова, че $\langle x, y \rangle \in f$, функцията f е тотална. Функцията е еднозначно отношение, което се дефинира с израза $y = f(x)$. Релацията $f \subseteq X \times Y$се записва $f : X \to Y$, което дефинира функция - **инекция** (влагане) f от X в Y, т.е. изобразяваща X в Y. За да се покаже значението на функцията върху произволен елемент $a \in X$, се използва означението f (a), където a е *независима променлива*. Ако е в сила $\langle x, y \rangle \in f$, то се записва $f(x) = y$.

В случай, че $\forall y \in Y \quad \exists x \in X$такова, че $f(x) = y$, функцията f е **сюрекция** (налагане) на X върху Y или изобразява X върху Y.

Ако $f : X \to Y$ е тотална функция и $\forall y \in Y \quad \exists$ единствено $x \in X$ такова, че $f(x) = y$, функцията е взаимно еднозначна или **биекция**.

Пример: Релацията $R = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid y = 2x\}$ е релация в множеството на цели числа. Ако $(x, y_1) \in f$ и $(x, y_2) \in f$, то $y_1 = 2x$, $y_2 = 2x$. От двете равенства следва $y_1 = y_2$, т.е. f е функция.

Записът на тази функция може да се извърши по следния начин

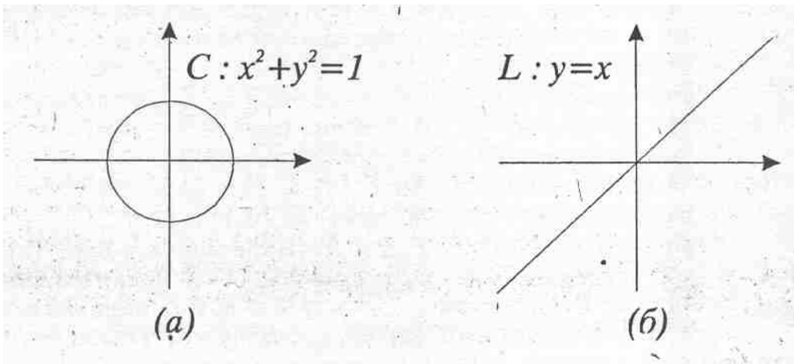
$$y = 2x,\ x \in \mathbf{Z};$$

$$f : \begin{cases} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \\ x \to 2x; \end{cases}$$

$$f(x) = 2x,\ x \in \mathbf{Z};$$

Пример:

Ако дефиниционната област X е декартово произведение $X = X_1 \times X_2 \ldots \times X_n$ се използва означение $f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ с независими променливи $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ и вместо $((a_1, a_2, a_3, \ldots a_n), b) \in f$ се записва $f(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n) = b$. Релацията C на фиг. 1, *a* не е функция, тъй като за всяко a в интервала (-1, 1) съществува повече от едно b, за което $C(a) = b$. Релацията L, представена на фиг. 1, *b*, е функция.



Фиг. 1

Пример:
Разглежда се декартовият квадрат $X = J_2^2 = \{0,1\}^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Функцията $f : J_2^2 \to J_2$ се дефинира като $\forall (a_1, a_2) \in J_2^2$ се дефинира такова $b \in J_2$, такова че $f(a_1, a_2) = b$. Например $f(0, 0) = 0$, $f(0, 1) = 1$, $f(1, 0) = 1$, $f(1, 1) = 1$.

Ако $f : X \to Y$ е биекция, тогава еднозначно е определена биекцията $f^{-1} = Y \to X$, така че $\forall y' \in Y \quad f^{-1}(y') = x'$ и $f(x') = y'$. Биекцията $f^{-1} = Y \to X$ се нарича обратна функция на *f*. Функцията на фиг. 1, *б* е биекция.

Дефиниция: Множеството е A крайно, ако $A = \varnothing$ или $\exists n \in N$ и биекция $f : A \to I_n$. Мощността $|A| = 0$, ако $A = \varnothing$. Мощността $|A| = n$ се нарича брой на елементите (кардиналност) на *A*.

Дефиниция: Множеството *A* е изброимо безкрайно, ако съществува биекция $f : X \to N$. Множеството *A* е **изброимо**, ако е крайно или изброимо безкрайно. Индексацията на елементите на едно множество *X* с елементите на друго множество е знак за съществуващата между тях бекция $f : X \to I$.

Дефиниция: Едно множество е безкрайно, ако е равномощно на свое собствено подмножество.

Пример: Тъй като изображението

$$f : \begin{cases} \mathrm{N} \to \mathrm{N}_2 \\ n \to 2n \end{cases}$$

е биективно изображение на множеството N в собственото му подмножество N_2 на четните естествени числа следва, че N е безкрайно множество

Две множества са равномощни ако имат равни мощности.

Пример:

Множеството $A = \{0, 1, 2\}$ е крайно, тъй като не съществува биекция между A и собственото му подмножество

Дефиниция: Ако $R \subseteq A \times A$, $R' \subseteq A' \times A'$ и функцията $\gamma : A \to A'$ е такава, че $(a, b) \in R \Rightarrow (\gamma(a), \gamma(b)) \in R'$, то γ се нарича **хомоморфизъм** на R в R'. Ако $\gamma : A \to A'$ е биекция, то γ е **изоморфизъм** на R в R'.

Принцип на Дерихле:

Ако X и Y са крайни множества, чиито мощности са в съотношение $|X| > |Y|$, то за всяка тотална функция $f : X \to Y$, съществуват $a_1 \neq a_2 \in X$, за които е в сила $f(a_1) = f(a_2)$.

Принципът на Дерихле неформално се дефинира с **принципа на чекмеджетата:** Ако се вземе X предмета и се поставят по произволен начин в $|Y|$ чекмеджета и $|X| > |Y|$, то поне в едно чекмедже ще има поне два предмета.

2. Двоични функции

Разглежда се множеството $B=\{0,1\}$. Дефинира се декартовото произведение B^n, т.е.

$$B^n = B \times B \times \ldots \times B$$

Елементите на B^n се наричат двоични n-орки. Техният брой е 2^n.

Определение: Двоична функция е функцията

$$f : B^n \to B,$$

където B^n е област, B – кообласт.

Теорема: Броят на всички двоични функции на n променливи е 2^{2^n}, което следва от $|B^n| = 2^n$, $|B| = 2$.

Двоичната функция $f : B^n \to B$ съпоставя на всяка двоична n-орка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ стойностите 0 или 1.

Двоичната функция f се представя във вида $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, като променливите $x_1, x_2, \ldots x_n$ и самата функция приемат стойности 0 или 1.

Определение: Променливата x_i е фиктивна или несъществена за функцията за функцията f, ако е в сила равенството

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n,) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Ако променливата не е фиктивна, се нарича **съществена**. В съответствие с теоремата за броя на функциите на една променлива съответстват четири двоични функции, а на две променливи – 16. В таблица 1 са представени четирите двоични функции на една променлива

Табл. 1

x_1	0	x_1	$\bar{x}_1$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Първата и четвърта функции са функции константи. За тях променливата x_1 е фиктивна. Тези функции се означава съответно с 0 и 1 и се различават от двоичните константи 0 и 1, които може да се разглеждат като функции на нула променливи. Втората функция се означав x_1 и се нарича тъждествена функция. Третата функция се означава $\bar{x}_1$ и се нарича отрицание. Веднага се проверява, че е в сила свойството $x_1 = \bar{\bar{x}}_1$, което се нарича закон на двойното отрицание.

Шестнадесетте функции на две променливи са зададени в Таблица-2.

Табл. 2

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

От таблицата следва:
f_0 - тъждествено равна на 0; при нея променливите x_1 и x_2 са фиктивни и тази функция не се различава от нулата, разглеждана като функция на 0 или 1 променлива;
f_{15} - тъждествено равна на 1 и може да се разглежда аналогично на 0;
f_1 - означаваме с $x_1\ x_2$ и се нарича конюнкция; за същата функция се използват означенията $x_1 \wedge x_2$ и x_1 & x_2, както и наименованията логическо умножение и логическо “и”;

f_3 - съвпадаща с тъждествената функция x_1;

f_5 – съвпадаща с тъждествената функция x_2;
f_6 – означава се с $x_1 + x_2$ и се нарича сума по модул 2, функцията се означава $x_1 \oplus x_2$ и се нарича изключващо “или”;
f_7 - означава се с $x_1 \vee x_2$ и се нарича дизюнкция (или логическо “или”);

f_8 - означаваме с $x_1 \downarrow x_2$ и се нарича функция (или стрелка на Пирс;
f_9 - означава се $x_1 \equiv x_2$ и се нарича еквивалентност;
f_{13} - означава се $x_1 \rightarrow x_2$ и се нарича импликация;
f_{14} - означава се $x_1 | x_2$ и се нарича функция (или черта) на Шефер.

Ето някои от свойствата на тези функции:

1. $x_1\, x_1 = x_1$, $x_1 \vee x_1 = x_1$, $x_1 + x_1 = x_1$;
2. $x_1\, x_2 = x_2\, x_1$, $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$, $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$.
3. $x_1\, (x_2\, x_3) = (x_1\, x_2)\, x_3$, $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$,
$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$.
4. $x_1(x_2 \vee x_3) = (x_1\, x_2) \vee (x_1 x_3)$, $x_1 \vee (x_2\, x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$.
$x_1\, (x_2 + x_3) = (x_1\, x_2) + (x_1 x_3)$.
5. $x_1\, 0 = 0$, $x_1 \vee 0 = x_1$, $x_1 + 0 = x_1$.
6. $x_1\, 1 = x_1$, $x_1 \vee 1 = 1$, $x_1 + 1 = \bar{x}_1$.
7. $x_1 \bar{x}_1 = 0$, $x_1 \vee \bar{x}_1 = 1$, $x_1 + \bar{x}_1 = 1$.
8. $\overline{(x_1 x_2)} = (\bar{x}_1) \vee (\bar{x}_2)$, $\overline{(x_1 \vee x_2)} = (\bar{x}_1)(\bar{x}_2)$.

Първите две равенства в т. 1 дефинират закони за идемпотентност, т.2 - закони за комутативност, т. 3 свойствата за асоциативност, т. 4 - за дистрибутивност, т. 8 - закони на Ме Морган.

Изброените свойства се доказват с директна проверка. Променливите във всички изрази могат да се заменят с константи по краен брой начини и не е трудно да се установи, че винаги десните страни на равенствата ще съвпадат с левите.

Табл. 3.

x_1	x_2	$x_1\, x_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\overline{x_1 x_2}$	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Пример. Да се установи верността на първия закон на Де Морган. За това е достатъчна таблицата 2, в която са разгледани и четирите възможни замествания на променливите x_1 и x_2 с константи.

Според закона за асоциативността (т.3) редът на пресмятане на функциите в изрази като $x_1\, x_2 \ldots\, x_k$, $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_k$ и $x_1 + x_2 + x_1 + \ldots. + x_k$ не се отразява на крайния резултат и затова подобни изрази не се поставят в скоби, които да определят реда на изчисление. Изразите са по-прегледни и с по-малко скоби, ако се въведат приоритети на функциите в един израз по следния начин: пресмятат се отляво надясно всички възможни

а) подизрази, заградени в скоби;
б) отрицания;
в) конюнкции;
г) дизюнкции и суми по модул 2;
д) всички останали функции.