4.2. ПРЕДИКАТНА ЛОГИКА

1. Същност на предиката

Предикатът е твърдение (изказване), съдържащо поне една логическа променлива, която е с неизвестна истинност. Предикатът изразява отношение между обектите или техните свойства. Истинността на предиката зависи от текущите стойности на променливите.

Предикатът p от n променливи представлява n-местна предикатна функция, която се записва във вида $p(x_1, x_2, ..., x_n)$, където $x_i \in D \mid D$ е дефиниционната област на променливата x_i.

Пример:

по-голямо (X,Y) – тълкува се $X > Y$. Операторният и предикатният записа са еквивалентни: $X > Y \leftrightarrow > (X,Y)$.

За определяне на D се използват *кванторите*: $\exists x$ – Existence (за съществуване, чете се: съществува поне едно x, за което предикатът $p(x)$ е истинен); $\forall x$ – All (за общност, чете се: за всяко x от D, предикатът $p(x)$ е истинен).

Пример:

$\exists x p(x) \leftrightarrow \exists x(p(x)) \leftrightarrow (\exists x)(p(x)) \leftrightarrow T$;

$\forall x p(x) \leftrightarrow \forall x(p(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x)) \leftrightarrow T$.

Квантифицирани (*свързани*) *променливи* са тези променливи, които се намират в областта на действието на кванторите:

Пример:

$\forall x p(x, y)$, x е свързана променлива; y – свободна променлива;

$\forall x p(x, y_1) \leftrightarrow p(x, y_2)$.

2. Език на предикатната логика

Променлива - A_i^n $(i \geq 1, n \geq 0)$ за дефиниране на n – аргументна функция – променлива (име на функцията), където i – индекси, по които се отличават променливите; n – броят на аргументите, които се отнасят към променливата A.

Константа a_i^n $(i \geq 1, n \geq 0)$ за дефиниране на n – аргументна функция - константа (име на функцията), където i – индекси, по които се отличават константите; n – броят на аргументите, които се отнасят към константата a.

Пример:

$A \equiv A^0$, $A(X) \equiv A^1$, $A_1(X,Y) \equiv A_1{}^2$.

Азбука на предикатната логика: $\Sigma = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5 \cup G_6$,

където

$G_1 = \{f_i^n\}$ е множеството от n – аргументни функции - константи; $f_i^0 = a_i$ - индивидна константа.

Константна функция означава, че е постоянно името на функцията, а не стойностите на аргументите. Трябва да се подчертае, че n – аргументните константни функции дават като резултат аритметична стойност.

Пример:
$G_1 = \{a_1, a_2, f_3(...), \sin(x), ...\}$.

$G_2 = \{p_i^n\}$ - множество от n – местни константни предикати; $p_i^0 = p_i$ - съждителна константа.

Константният предикат се отнася към името на предиката, а не за стойността на аргументите. Трябва да се подчертае, че n – местните константни предикати дават като резултат – логическа стойност.

Пример:

$G_2 = \{p, T, F, p(1,2), \text{бяло}(x), ...\}$.

$G_3 = \{F_i^n\}$ - множество от n –аргументните функции; $F_i^0 = X_i$ - индивидна променлива. Името на функцията е променлива. Променливите се пишат с главни букви.

Пример: $G_3 = \{X_1, X_2, Y, F_2(...), ...\}$.

$G_4 = \{P_i^n\}$ - множество от n – местните предикати; P_i^0 - съждителна променлива.

Пример: $G_4 = \{P_1, P_2, Q, P_2^2(...)\}$.

За множествата G_3, G_4 обектите се делят на функции и предикати, при което аргументите и имената могат да са променливи. Функциите дават винаги аритметична стойност, а предикатите дават винаги логическа стойност.

$G_5 = \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists, \forall\}$ - множеството от логическите съюзи;

$G_6 = \{'(', ')', ','\}$ - множеството от символи.

Предикатното смятане е формален език за символно представяне на логически доказателства в математиката. Изреченията в този език се наричат правилно построени форми (ППФ).

3. Правила за построяване на правилно построени формули

ППФ се изграждат от три класа изрази:

Терми (t) – изрази, даващи постоянна или променлива аритметична стойност:

а) всяка индивидна константа $f_i^0 = a_i$ и всяка индивидна променлива $F_i^0 = X_i$ са терми;

б) ако $t_1, t_2, ..., t_n$ са терми, то $f_i^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ и $F_i^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ са терми.

Пример: 3 – 16; X_1; Y; $t(3,4)$, 3+4, $F(X,3)$,*X** (4-2) са терми, както и всеки аритметичен израз.

Атоми (*атомни форми* (аф)) – изрази, даващи постоянна или променлива логическа стойност:

а) *T* и *F* са атомни форми;

б) всички съждителни константи и всички съждителни променливи са атомни форми.

Термите участват в изграждането на атомите.

Пример: *T*, *F*, *A, B* > (6,4), 5 > 2, $X \geq (Y + 6)$, синьо (небе), *P* (*x*)

ППФ - (логически изрази, изградени от аф, при което резултатът е винаги логическа стойност):

а) всяка аф е ППФ;

б) ако *A* и *B* са ППФ, то

$\overline{A}$, $(A \cup B)$, $(A \cap B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ са ППФ;

в) ако *X* е променлива (съждителна или индивидна) и *A* е ППФ, то $(\forall x)A(x)$ и $(\exists x)A(x)$ са ППФ.

ППФ: $\forall P\left\{\left[P(a) \wedge (\forall x)\left[\left[\overline{x = a} \wedge P(f(x))\right] \to P(x)\right]\right] \to (\forall x)P(x)\right\}$

се чете: за всеки (едноместен) предикат P върху *D* (дефиниционна област), ако $P(a)$ е вярно, и за всяко $x \in N$, ако $x \neq a$ и $P(f(x))$ са верни, то $P(x)$ е вярно, то за всяко $x \in N$ - $P(x)$ е вярно.

Класът от описаните ППФ се нарича предикатно смятане от втори ред (с равенства) със следните подкласове с допустимо множество от символи за константи и променливи:

- Съждително смятане:

а) съждителни константи p_i^0.

- Съждително смятане с квантори:

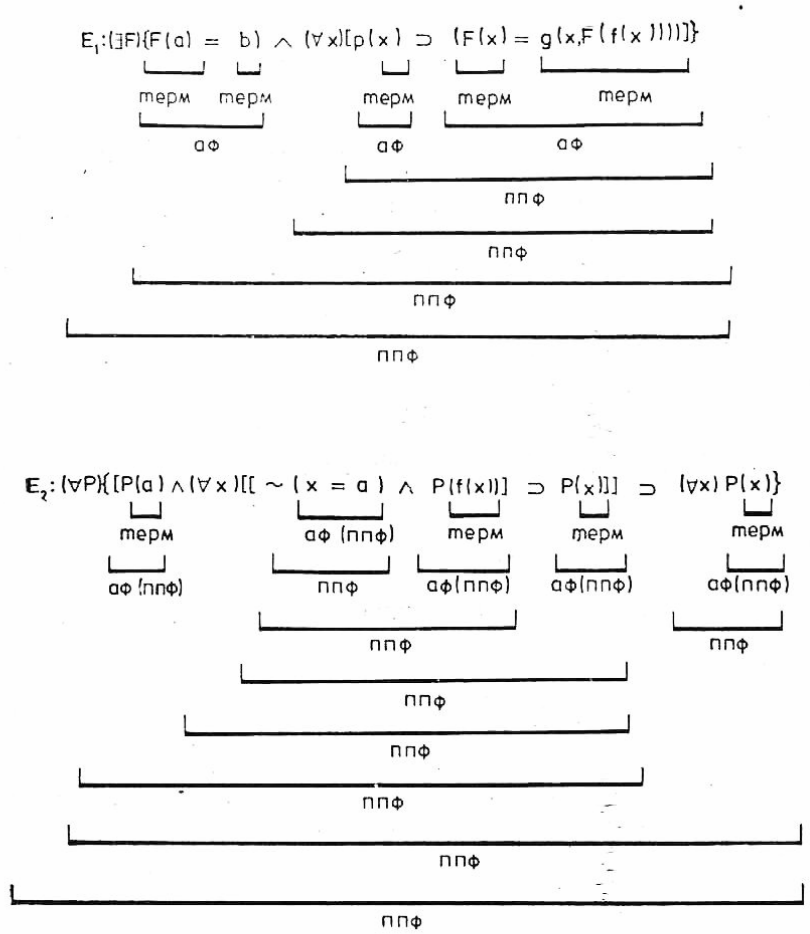
а) съждителни константи p_i^0;

б) съждителни променливи P_i^0.

- Аритметично смятане с равенство:
а) индивидни константи a_i;
б) индивидни променливи X_i.

- Предикатно смятане от I ред с равенство:
а) константи f_i^n, $f_i^0 = a_i$ за n – аргументни функции ($n \geq 0$);
б) константи p_i^n, $p_i^0 = p_i$ за n – местни предикати $n \geq 0$;
в) индивидни променливи X_i.

Пример: Анализ на структурата на следните ППФ



4. Изчисления с предикати

Изчисление с предикати е изчисление на правилно построени формули. Добавят се допълнително правила за кванторите:

а) Правила за $\forall$

- въвеждане на $\forall$: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A(x)}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x)}$;

- елиминиране на $\forall$: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x)}{\Gamma \Rightarrow A(t)}$,

t е свободно за x в $A(x)$; с премахване на квантора x се замества с t, където t не трябва да бъде свързана променлива.

б) Правила за $\exists$

- въвеждане на $\exists$: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A(t)}{\Gamma \Rightarrow \exists x A(x)}$,

където t е свободна за x в $A(x)$; $A(t)$ е резултатът от заместването на всички свободни участия на x в $A(x)$ с t [например, от $\Gamma \Rightarrow p(a, a))$ се извежда като частен случай $\Gamma \Rightarrow \exists x p(x, a)$ или $\Gamma \Rightarrow \exists x p(a, x)$ или $\Gamma \Rightarrow x\ p\ \exists\ (x, x)$];

- елиминиране на $\exists$: $\dfrac{(\Gamma \Rightarrow \exists x A(x)) \wedge (\Gamma, A(b) \Rightarrow C)}{\Gamma \Rightarrow C}$,

където b е индивидна константа, която не участва в никой член на Γ, в $\exists x A(x)$ или в C. В резултат на елиминирането, всяка свързана променлива се заменя с индивидна константа, която не участва в Γ, A и C.

Пример: Да се изведе ППФ: $\exists x \forall y A(x, y) \to \forall y \exists x\, A(x, y)$.

Прилага се правилото за извод на секвенцията:

$\exists x\ \exists \forall y\ A(x, y) \Rightarrow \exists x\ A(x, y)$,

което изисква да се приложи правилото за елиминиране на $\exists$. В съответствие с правилото за елиминиране на квантора $\exists$: $\dfrac{(\Gamma \Rightarrow \exists x A(x)) \wedge (\Gamma, A(b) \Rightarrow C)}{\Gamma \Rightarrow C}$,

се правят следните означения:

$\Gamma = \{\exists x \forall y\ A(x, y)\}$; $\exists x\ A(x) = \exists x\ A(x, y)$,

$A(b) = \forall y\ A(b, y)$;

$C = \exists x A(x, y)$:

1. $\Gamma,\ \exists x\ \forall y\ A(x, y) \Rightarrow \exists x\ \forall y\ A(x, y)$ - аксиома за предпоставките;
2. $\Gamma, \forall y\ A(b, y) \Rightarrow \forall y\ A(b, y)$ - аксиома за предпоставките;
3. $\Gamma, \forall y\ A(b, y) \Rightarrow A(b, t)$ - елиминиране на квантора $\forall$;
4. $\Gamma, \forall y\ A(b, y) \Rightarrow \exists x\ A(x, t)$ - въвеждане на квантора $\exists$;
5. $\Gamma \Rightarrow \exists x\ A(x, t)$ - елиминиране на предпоставка;
6. $\Gamma \Rightarrow \forall y\ \exists x\ A(x, y)$ - въвеждане на квантора $\forall$;
7. $\Rightarrow \exists x\ \forall y\ A(x, y) \to \forall y\ \exists x\ A(x, y)$ – въвеждане на импликация $\to$.