# 2.1. КРАЙНИ АВТОМАТИ

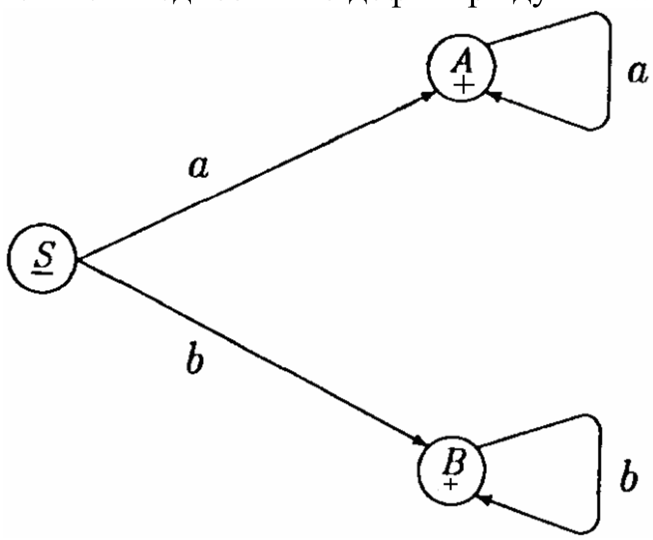
## 1. Определение

Краен ориентиран граф с дефинирано начало и крайни върхове представлява *краен автомат без памет* $A$ над азбуката $\Sigma = \{a_1, a_2, ... a_n,\}$.

Ако $G = \langle \Sigma, N, S, P \rangle$ е автоматна граматика, то тя се представя чрез ориентиран граф с върхове – нетерминалните символи от $N$ и дъги – терминалните елементи на Σ. Например, автоматната граматика

$$G = \langle \{a,b\}, \{S, A, B\}, S, P \rangle \text{ с продукции } P = \{S \to aA|bB, A \to aA|a, B \to bB|b\}$$

се представя с ориентирания граф на фиг. 1, където върхът $\underline{S}$ е начало на всеки път по графа. Всеки един от върхове $A$ и $B$ може да е краен за пътищата в графа. Пътят $S \to A \to A \to A$ еднозначно дефинира думата *aaa* над азбуката Σ.




Фиг. 1.

*Детерминиран краен автомат* (ДКА) е всяка наредена петорка $A = \langle N, \Sigma, \Delta, S, F \rangle$, където

- $N$ е крайното множество от състояния на автомата (азбука на състоянията);
- Σ - крайното множество от входни букви (входна азбука);
- Δ: $N \times \Sigma \to N$ – функцията на преходите, която по текущото състояние и входната буква привежда автомата в ново състояние;
- $S$ – началното състояние на автомата;
- $F \subset N$ - множеството от крайни състояния на автомата.

## 2. Принцип на работа на крайния автомат

Допуска се, че $w = a_1 a_2 ... a_I \in \Sigma *$ е произволна дума над Σ. По начално състояние $n_0 = S$ и първия символ $a_1$ на $w$, чрез функцията на преходите Δ се определя следващото състояние на автомата $n_1$ с равенството

$n_1 = \Delta(S, a_1)$.

На $i+1$- та стъпка, по текущото състояние $n_i$ и входен символ $a_{i+1}$ се определя следващото състояние:

$n_{i+1} = \Delta(n_i, a_{i+1})$ $\forall i$ в интервала $0 \le i \le I-1$.

След изчерпване на всички входни символи $a_i$, $i = \overline{1, I}$, се стига до състояние

$n_I = \Delta(n_{I-1}, a_I)$.

Ако състояние $n_I \in F$ автоматът $A$ разпознава думата $w$. При $n_I \notin F$ автоматът $A$ не разпознава думата $w$.

Пример:

Автоматът $A$ е от вида $A = \langle \{A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, \Delta, A, \{D, E\} \rangle$, където $\Delta : N \times \Sigma \to N$ е изображение, определящо функцията на прехода, която са задава таблично:

| Състояние $n$ | Символ $a_i$ | $\Delta(n, a_i)$ |
|---|---|---|
| $A$ | $a$ | $B$ |
| $A$ | $b$ | $C$ |
| $B$ | $b$ | $B$ |
| $C$ | $a$ | $D$ |
| $C$ | $b$ | $C$ |
| $D$ | $a$ | $B$ |
| $D$ | $b$ | $E$ |
| $E$ | $a$ | $E$ |

Функцията на прехода $\Delta(n, a_i)$ може да се зададе и с матрицата на прехода $A_\Delta$. Елементите на Σ и $N$ се номерират по следния начин: $\Sigma = \{a_1, a_2, ... a_j, ... a_q\}$; $N = \{n_1, n_1, ... n_i, ... n_p\}$. Матрицата на прехода $A_\Delta$ е с $p$ - реда и $q$ стълба и елементи, дефинирани от израза

$A_\Delta(i, j) = l \Leftrightarrow \Delta(n_i, a_j) = n_l$.

За разглеждания автомат: $n_1 = A$, $n_2 = B$, $n_3 = C$, $n_4 = D$, $n_5 = E$, $a_1 = a$, $a_2 = b$. Елементи на матрицата на прехода:

$\Delta(n_1,\ a_1) \to n_2 = B$ (2); $\Delta(n_1,\ a_2) \to n_3 = C$ (3);

$\Delta\ (n_2,\ a_1) \to$ * (не дефиниран); $\Delta(n_2,\ a_2) \to n_2 = B$ (2);

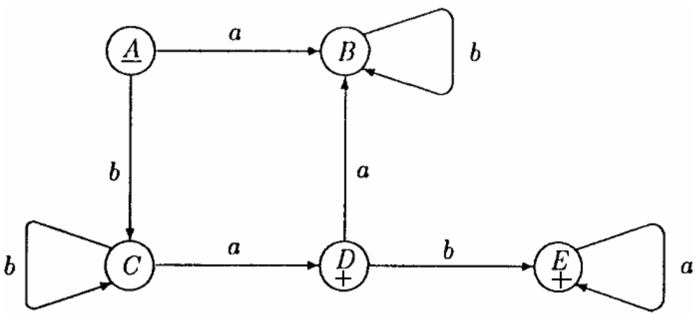
$\Delta(n_3, a_1) \to n_4 = D$ (4); $\Delta(n_3, a_2) \to n_3 = C$ (3);

$\Delta(n_4, a_1) \to n_2 = B$ (2); $\Delta(n_4, a_2) \to n_5 = E$ (5);

$\Delta(n_5, a_1) \to n_5 = E$ (5); $\Delta(n_5, a_2) \to *$ (не дефиниран).

Матрица на прехода: $A_\Delta(i,j) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ * & 2 \\ 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 5 & * \end{pmatrix}$

Автоматът $A$ е представен с краен ориентиран граф на фиг. 2.




Фиг. 2.

Ако $A$ е детерминиран краен автомат множеството

$L(A) = \{w \in \Sigma^* | \Delta(S, w) \in F\}$

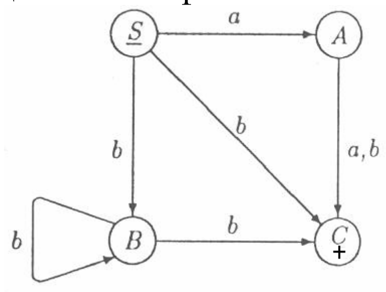
е език, разпознаван от автомата $A$. $L(A)$ се състои от всички входни думи $w \in \Sigma^*$, с които $A$ достига състояние $F$ от начално състояние $S$.

*Недетерминиран краен автомат* е наредена петорка $A = \langle N, \Sigma, \Delta, S, F \rangle$, където функцията на преходите $\Delta : N \times \Sigma \to P(N)$ е изображение на $N \times \Sigma$ в множеството $P(N)$ от всички подмножества на $N$. Множествата от азбуки $N, \Sigma$, множеството от крайни състояния $F$ и началното състояние $S$ са дефинирани, както при детерминиран краен автомат.

Пример: Крайният автомат $A = \langle \{S, A, B, C\}, \{a, b\}, \Delta, S, F \rangle$ с функцията на преход $\Delta$, дефинирана с таблица

| $N$ | $w$ | $P(N)$ |
|---|---|---|
| $S$ | $a$ | $\{A\}$ |
| $S$ | $b$ | $\{B,C\}$ |
| $A$ | $a$ | $\{C\}$ |
| $A$ | $b$ | $\{C\}$ |
| $B$ | $a$ | $\varnothing$ |
| $B$ | $b$ | $\{B,C\}$ |
| $C$ | $a$ | $\varnothing$ |
| $C$ | $b$ | $\varnothing$ |

и множество от крайни състояния $F = \{C\}$ е недетерминиран краен автомат с краен ориентиран граф, представен на фиг. 3.




Фиг. 3.

Разширява се дефиниционното множество на функцията на преход $\Delta$ върху множеството $P(N) \times \Sigma^*$. Дефинира се функцията $\Delta'$ чрез равенството

$$\Delta'(N', a) = \bigcup_{n \in N'} \Delta(n, a) \mid \ \forall N' \in P(N) \text{ и } a \in \Sigma.$$

При $|N'| = 1$, т.е. върху множеството $N \times \Sigma$, $\Delta' \equiv \Delta$.

За всяко $N' \in P(N)$ и $w = \beta a \in \Sigma^*$ се дефинира функцията $\Delta''$ върху множеството $P(N) \times \Sigma^*$ чрез равенствата

$$\Delta''(N', \varepsilon) = N',$$

$$\Delta''(N', w) = \Delta'(\Delta''(N', \beta), a),$$

Върху множеството $P(N) \times \Sigma^*$ функцията $\Delta'' \equiv \Delta'$, а върху множеството $N \times \Sigma$ - функцията $\Delta'' \equiv \Delta$.

За недетерминирания краен автомат от примера се получава

$$\begin{aligned}\Delta(\{S, A\}, ab) &= \Delta(\Delta(\{S, A\}, a), b) = \\ &= \Delta(\Delta(\{S\}, a) \cup \Delta(\{A\}, a), b) = \Delta(\{A\} \cup \{C\}, b) = \\ &= \Delta(\{A\}, b) \cup \Delta(\{C\}, b) = \{C \cup \varnothing\} = \{C\}.\end{aligned}$$

Множеството от думи, което разпознава недетерминиран краен автомат $A = \langle N, \Sigma, \Delta, S, F \rangle$, се дефинира като

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* | \Delta(\{S\}, w) \cap F \neq \varnothing\}$$

и се нарича **език, разпознаван или породен от** *A*.

Пример:

Думата *aaa* не се разпознава от $A = \langle \{S, A, B, C\}, \{a, b\}, \Delta, S, F \rangle$:

$$\Delta(\{S\}, aaa) = \Delta(\Delta(\Delta(\{S\}, a), a), a) = \Delta(\Delta(\{A\}, a), a) = \Delta(\{C\}, a) = \varnothing.$$

Думата *bbb* се разпознава от $A = \langle \{S, A, B, C\}, \{a, b\}, \Delta, S, F \rangle$:

$$\Delta(\{S\}, bbb) = \Delta(\Delta(\Delta(\{S\}, b), b), b) = \Delta(\Delta(\{B\}, b), b) =$$
$$= \Delta(\{B, C\}, b) = \Delta(\{B\}, b) \cup \Delta(\{C\}, b) = \{B, C\} \cup \varnothing = \{B, C\}.$$

Следователно, думата $aaa \notin L(A)$, а думата $bbb \in L(A)$.

**Дефиниции:**

1. Два крайни автомата $A_1$ и $A_2$ са **еквивалентни**, ако $L(A_1) = L(A_2)$.
2. Формалният език $L$ над азбуката $\Sigma$ се разпознава от детерминиран краен автомат точно тогава, когато може да се разпознае от някой недетерминиран краен автомат.