1.1. ТЕОРИЯ НА МНОЖЕСТВАТА

1. Основни определения в теорията на множествата

Съвкупност от подредени елементи (обекти) се нарича *множество* и се дефинира чрез:

1) изброяване на съставящите го елементи, т.е.

(1) $A = \{a, b, c, d\}$;

2) правила за образуване на множеството, когато елементите се характеризират с общ признак, т.е.

(2) A = {общ елемент | правила за образуване}.

Пример:

(3) $B = \{x \mid x \in A, \pi(x)\}$,

което се чете: от елементите x, принадлежащи на множеството A се образува ново множество B с помощта на твърдението (правилото) $\pi(x)$. Изразът $\{x \mid x \in A, \pi(x)\}$ означава съвкупността от всички елементи $x \in A$, за които $\pi(x)$ е истина.

Дефиниция (3) се нарича *аксиома на отделянето*. Всяко множество B, получено от множеството A в съответствие с аксиомата на отделянето се нарича *подмножество* на A, което се означава $B \subset A$ (B е подмножество на A) или $B \subseteq A$ (B съвпада с A ($A = B$), или B е подмножество на A).

Всички множества са подмножества на едно универсално множество U. Всяко множество A се определя напълно и еднозначно от принадлежността на някакви елементи към него, което се дефинира с *аксиома на обема*

(4) $\forall a\ (a \in A \Leftrightarrow a \in B) \Rightarrow A = B$,

което се чете: Ако за всяко значение a е вярно: a принадлежи на A и a принадлежи на B, то A съвпада с B. Оттук следва, че всеки елемент участва еднократно в множеството.

Броят на елементите на множеството A дефинират неговата мощност, която се означава с $|A|$.

Елементите на едно множество I се използват за означение на елементите на друго множество A. Множеството I се нарича се нарича *индексно множество*, а множеството A *индиксирано множество*.

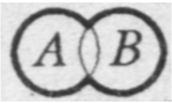
Пример: $A = \{a_i \mid i \in I\}$, където i е индекс на елементите на множеството A.

Основни означения:

$\wedge$, (ε)- празен елемент;
$\{\}$, $\varnothing$ - празно множество;
$\{\wedge\}$ - непразно множество, което съдържа празния елемент;
$\{0,1\}$ - множество от елементи 0, 1;
“$\cap$”, “,” – логическо “и”;
“$\cup$”, “;” – логическо “или”;
$\in$ - принадлежи на...; $\notin$ - не принадлежи на...;
$\forall$ - квантор за общност ($\forall x$ “за всяко x”);
$\exists$ - квантор за съществуване ($\exists y$ “съществува поне едно y”);
$\Rightarrow$ - импликация (ако...то);
$\Leftrightarrow$ - еквивалентност (тогава и само тогава).

2. Операции над множествата

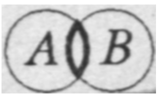
а. **Дизюнкция** (обединение или сума): множество, което се състои от всички елементи, принадлежащи поне на едно от множествата A и B.



(5) $A \cup B = B \cup A = \{x \mid x \in A; x \in B\}$;

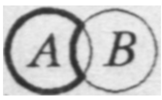
(6) $A \subset B \cup A$; $B \subset B \cup A$.

б. **Конюнкция** (пресичане или произведение): множество, което се състои от елементите принадлежащи едновременно на A и B



(7) $A \cap B = B \cap A = \{x \mid x \in A, x \in B\}$.

в. Разлика $A - B = \{ x \mid x \in A, x \notin B \}$;

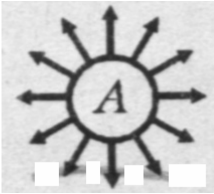


(8) $A - B \subset A$.

г. Симетрична разлика

$A \Delta B = \{ x \mid x \in A, x \notin B \} \cup \{ x \mid x \notin A, x \in B \}$;

г. Отрицание (допълване)

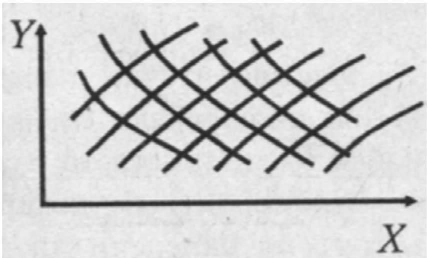


(9) $\overline{A} = -A = \{\, x \mid x \notin A\}$, т.е. $x \notin A$, но $x \in$ U, като елемент от универсалното множество U.

д. Декартово произведение на множествата

(10) $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$

Множеството $A \times B$ се нарича Декартово произведение на множествата A и B, а елементите му (a, b) – наредени двойки.



Множеството от точки на евклидовата равнина, в която е въведена правоъгълна координатна система посредством две перпендикулярни реални прави X и Y, е Декартово произведение. Всяка точка P еднозначно се определя от наредената двойка (x, y), където x е ортогоналната проекция на т. P върху оста X, y е ортогоналната проекция на т. P върху оста Y. Множествата X и Y се дефинират със следните правила:
$X = \{x \mid x$ натурално число$\}$;
$Y = \{y \mid y$ натурално число$\}$.

За цялата равнина се получава

(11) $D = X \times Y = \{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle .... \langle x_n, y_n\rangle\}$.

Пример: Декартовият квадрат на множеството $J = \{0,1\}$, се дефинира с израза

(12) $J \times J = J^2 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$.

3. Свойства на основните операции с множества

а. Идемпотентност:

(13) $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.

б. Комутативност:

(14) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$; $A\Delta B = B\Delta A$.

в. Асоциативност:

(15) $$\begin{aligned}&(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);\\&(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap \mathrm{C});\\&(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C).\end{aligned}$$

г. Дистрибутивност:

(16) $$\begin{aligned}&(A \cup B) \cap C =(A \cap C) \cup (B \cap C);\\&(A \cap B) \cup C =(A \cup C) \cap (B \cup C).\end{aligned}$$

д. Некомутативни и неасоциативни операции:

(17) $$\begin{aligned}&A - B \neq B - A;\ A \times B \neq B \times A;\\&A - (B - C) \neq (A - B) - C;\\&A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C.\end{aligned}$$

е. Свойства на допълнението:

(18) $A \cup \overline{A} = \mathrm{U}$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $\overline{\overline{A}} = A$.

ж. Свойства на празното и универсалното множество:

(19) $$\begin{aligned}&A \cup \varnothing = A,\ A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U};\\&A \cap \mathrm{U} = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing.\end{aligned}$$

з. Закони на Де Морган.

(20) $$\begin{aligned}&\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};\\&\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.\end{aligned}$$

и. Свойства на поглъщане:

$$(21)\quad \begin{aligned}&(A \cup B) \cap B = B;\\ &(A \cap B) \cup B = B.\end{aligned}$$

II . РЕЛАЦИИ (ОТНОШЕНИЯ) В МНОЖЕСТВАТА

1. Определение

Нека $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $B = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ са две множества. Множество, чиито елементи са подредени двойки, се нарича двучленна релация (отношение). Двучленната релация R е множество или подмножество на декартовото произведение на множествата A и B:

$$(18)\quad R = \{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle ... \langle x_n, y_n\rangle\}.$$

Множество $R \subseteq A \times B$, при което $\langle x, y\rangle \in R$, е релация между x и y (x и y са в релация R). Включването $\langle x, y\rangle \in R$ се записва във вида xRy или $R\langle x, y\rangle$.

Всяка двучленна релация $R = \{\langle x, y\rangle | x \in A, y \in B\}$ дефинира две множества, които са подмножества на A и B:

а. Множество от аргументи (дефиниционна област):

$$D(R) = \{x \in A | \exists y \in B, \text{така, че} (x, y) \in R\}.$$

б. Множество от стойности (кообласт):

$$P(R) = \{y \in B | \exists x \in A, \text{така, че} (x, y) \in R\}.$$

Пример:

$R = \{\langle xy\rangle | x, y \in N, x < y\}$ е двучленна релация “по-малко” в множеството на естествените числа.

Релация *конгруентност* (*сравнимост*) по модул p: Две числа са сравними по модул p, ако имат един и същ остатък при делението с p, което се записва по следния начин

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\, p).$$

Пример:

$1 \equiv 4(\text{mod } 3)$, $1 \neq 4(\text{mod } 2)$.

2. Свойства на двучленни релации, дефинирани в едно и също множество (A=B).

Разглеждат се релациите над Декартовите квадрати, дефинирани с множеството $R \subseteq A \times A$.

а. Рефлексивност (отразимост, R е рефлексивна):

$\forall x \in A \Rightarrow (x, x) \in R$.

б. Симетричност (R е симетрична):

$\forall (x, y) \in R \Rightarrow \forall (y, x) \in R$.

в. Антисиметричност:

$\forall (x, y) \in R \cap \forall (y, x) \in R \Rightarrow x \equiv y$ (x съвпада с y).

г. Транзитивност (преносимост):

$\forall (x, y) \in R \cap \forall (y, z) \in R \Rightarrow \forall (x, z) \in R$.

Пример:

$R = \{\langle x, y\rangle | x = y\}$ - рефлексивна и симетрична релация;
$R = \{\langle x, y\rangle | x < y\}$ - транзитивна релация, т.е.
$R = \{\langle x, y\rangle | y < x\}$;
$R = \{\langle y, z\rangle | z < y\}$;
$R = \{\langle x, z\rangle | z < x\}$;
$R^{-1} = \{\langle y, x\rangle | \langle x, y\rangle \in R\}$ - обратна релация, релация с разменени елементи;
$\langle x, y\rangle \in R_1 . R_2 \Rightarrow \exists z \langle x, y\rangle \in R_1$ - композиция.

Всяка двучленна релация в дадено множество A, $R \subseteq A \times A$, притежаваща свойства а, б и г се нарича релация на ***еквивалентност*** или ***еквивалентност*** в A.

Пример за релация на еквивалентност: Дадена е двучленната релация в множеството ***Z*** на целите числа $R = \{(x, y) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} \mid x - y$ се дели на $3\}$.

1. От това, че 0 се дели на 3, следва, $(x, x) \in R$, т.е. R е рефлексивна.

2. Ако $x - y$ се дели на 3, то $y - x$ също се дели на 3, т.е R е симетрична.
3. Ако $x - y$ и $y - x$ се дели на 3, то $x - z$, т.е. R е транзитивна.

Следователно R е релация на еквивалентност в $\boldsymbol{Z}$.

Ако се положи $a \equiv b$, записът $(a, b) \in R$ получава вида

...- 6 ≡ - 3 ≡ 0 ≡ 3 ≡ 6 ≡...
...- 5 ≡ - 2 ≡ 1 ≡ 4 ≡ 7 ≡...
...- 4 ≡ - 1 ≡ 2 ≡ 5 ≡ 8 ≡...

Всяко цяло число попада в тези редове на съвпадения и не се среща в два различни реда.

Всяка еквивалентност R в A позволява произволно множество A да се представи този начин.

Нека релацията R е еквивалентност в множеството A и за всяко $a \in A$ се дефинира множеството

$$K_a = \{x \in A \mid (a, x) \in R\}$$

Множеството K_a е **клас на еквивалентност** при релацията R, съдържащ елемента $a \in A$. Т.е. от рефлексивната релация R следва $a \in K_a$.

Ако M е множество, то подмножествата M_1, M_2, ... образуват **разбиване** на M, ако $M_1 \cup M_2 \cup \ ... = M$ и $M_i \cap M_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Теорема: Ако релацията R е еквивалентност в множеството A, то съвкупността от всички класове на еквивалентност при релацията R образуват разбиване на A.

Тъй като за всяко $a \in A$ е в сила $a \in K_a$, то $\bigcup\limits_{a \in A} K_a \subset A$. За всеки два елемента a и b от A, ако $K_a \cap K_b \neq \varnothing$, то $K_a = K_b$. С други думи, когато $(a, b) \in R$ следва $K_a = K_b$.

Теорема: Ако A множество и A_1, A_2 ... е разбиване на A, то съществува релация на еквивалентност R в A, на която A_1, A_2 ... са класове на еквивалентност.

Дефиниция: Двучленна релация в дадено множество A, която притежава свойствата 1, 3 и 4 се нарича **релация на подреждане** в A или **подредба** в A.

Пример: Разглежда се двучленната релация в множеството на целите положителни числа $\mathbf{N}^+$ от вида $R = \{(x, y) \in \mathbf{N}^+ \times \mathbf{N}^+ \mid x \text{ дели } y\}$:

1. От условието, че всяко число дели себе си следва, че R е рефлексивна релация.
2. От условието x дели y и y дели x, то $x = y$ следва, че R антисиметрична релация.
3. От условието x дели y и y дели z, то x дели z следва, че R транзитивна релация, т.е. R е наредба в $\mathbf{N}^+$.

Наредбата R в множеството A е **линейна** (**пълна**), ако за всеки два елемента $a, b \in A$ е в сила $(a, b) \in R$ или $(b, a) \in R$.

Пример: Наредбата от примера за релация на еквивалентност не е линейна, тъй като $(5,7) \notin R$

Релацията $R_1 = \{(x, y) \in \mathbf{N}^+ \times \mathbf{N}^+ \mid x \leq y\}$ в $\mathbf{N}^+$ е **линейна наредба.** За всеки две естествени числа $a \leq$ или $a \leq b$.

ЗАДАЧИ:

1. Множества

Пример:

Да се докаже

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

I. $x \in A \cap (B \cup C)$;
$x \in A, x \in B \cup C \Rightarrow$
1) $x \in A, x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2) $x \in A, x \in C \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (A \cap B)$
Следователно: $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
II.
1) $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A, x \in B \Rightarrow x \in A, x \in (B \cup C) \Rightarrow$
$x \in A \cap (B \cup C)$
2) $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A, x \in C \Rightarrow x \in A, x \in (C \cup B) \Rightarrow$
$x \in A \cap (C \cup B)$
От 1) и 2) следва, че $x \in A \cap (B \cup C)$.

Пример:

Да се докаже:

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

I. $x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A; x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A}; x \in \overline{B}$

1) $x \in \overline{A} \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$
2) $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{B} \cup \overline{A}$

От 1) и 2) следва $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

II. $x \in \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow$

1) $x \in \overline{A} \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in \overline{A \cap B}$
2) $x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin B \cap A \Rightarrow x \in \overline{B \cap A}$

2. Релации:

За релациите R_1 и R_2 да се докаже, че $\left(R_1 \cup R_2\right)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

I. $x \in \left(R_1 \cup R_2\right)^{-1} \Rightarrow x = (y,z) \Rightarrow (z,y) \in R_1 \cup R_2$
1) $(z,y) \in R_1 \Rightarrow (y,z) \in R_1^{-1} \Rightarrow x = (y,z) \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$
2) $(z,y) \in R_2 \Rightarrow (y,z) \in R_2^{-1} \Rightarrow x = (y,z) \in R_2^{-1} \cup R_1^{-1} \Rightarrow x \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$;

От 1) и 2) следва $\left(R_1 \cup R_2\right)^{-1} \subseteq R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

II. $x \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

1) $x \in R_1^{-1} \Rightarrow x = (y,z) \Rightarrow (y,z) \in R_1^{-1} \Rightarrow (z,y) \in R_1 \Rightarrow (z,y) \in R_1 \cup R_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (y,z) \in (R_1 \cup R_2)^{-1}$
2) $x \in R_2^{-1} \Rightarrow x = (y,z) \Rightarrow (y,z) \in R_2^{-1} \Rightarrow (z,y) \in R_2 \Rightarrow (z,y) \in R_2 \cup R_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (y,z) \in (R_2 \cup R_1)^{-1}$

От 1 и 2 следва [].

2. Декартово произведение

Да се докаже:

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

I. $x \in (A \cup B) \times C \Rightarrow x = \langle y,z \rangle, y \in A \cup B, z \in C \Rightarrow$

1) $y \in A, z \in C \Rightarrow \langle y,z \rangle \in A \times C \Rightarrow x \in A \times C \Rightarrow x \in (A \times C) \cup (B \times C)$;

2) $y \in B, z \in C \Rightarrow \langle y,z \rangle \in B \times C \Rightarrow x \in B \times C \Rightarrow x \in (B \times C) \cup (A \times C)$

От 1) и 2) следва

$(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$
II. $x \in (A \times C) \cup (B \times C)$

1) $x \in A \times C \Rightarrow x = \langle y,z \rangle, y \in A, z \in C \Rightarrow y \in A \cup B, z \in C$
$\Rightarrow \langle y,z \rangle \in (A \cup B) \times C$;
2) $x \in B \times C \Rightarrow x = \langle y,z \rangle, y \in B, z \in C \Rightarrow y \in B \cup A, z \in C \Rightarrow$
$\Rightarrow \langle y,z \rangle \in (B \cup A) \times C$;
От 1) и 2) следва

$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$

Пример:

Да се докаже:

$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

I. $x \in (A \setminus B) \times C \Rightarrow x = \langle y,z \rangle \Rightarrow y \in A \setminus B, z \in C \Rightarrow y \in A, y \notin B, z \in C \Rightarrow$
$\langle y,z \rangle \in A \times C, x \notin B \times C; x \in \overline{B \times C} \Rightarrow x \in (A \times C) \setminus (B \times C)$

3. Регулярни изрази

Да се докаже:

$(b + aa^*b) + (b + aa^*b)(a + ba^*b)^*(a + ba^*b) = a^*b(a + ba^*b)^*$

$(b + aa^*b) + (b + aa^*b)(a + ba^*b)^*(a + ba^*b) =$
$= (b + aa^*b)\left[\Lambda + (a + ba^*b)^*(a + ba^*b)\right] =$

От правилото $R^* = \Lambda + RR^*$ следва

$= (b + aa^*b)(a + ba^*b)^* =$

$= (\Lambda + aa^*)b(a + ba^*b) =$

$= a^*b(a + ba^*b)^*$.

Да се опростят регулярните изрази

1) $\Lambda + b^*(abb)^*(b^*(abb)^*)^* = (b^*(abb)^*)^* =$

От правило $(R+S)^* = (R^*+S^*)^* = (R^*S^*)^*$ следва

$=(b+abb)^*$.