1.5. ОРИЕНТИРАНИ ГРАФИ И ДЪРВЕТА

1. Определение

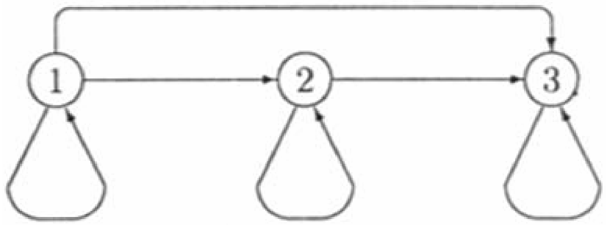
Графът $G = \langle V, L \rangle$, на който всяка дъга е ориентирана, т.е. единият й край е начален (начало), а другият - краен (край), е *ориентиран граф*. Ориентираната дъга $\vec{x} = (a, b)$, свързваща началото a с края b, се нарича *изходяща* (*излизаща*) от върха a и *входяща* (*влизаща*) във върха b.

Краен ориентиран граф се състои от крайно множество от елементи, наречени върхове и крайно множество от наредени двойки (a, b) от върхове, наречени насочени дъги. Връх, белязан със знак "-" е начален връх. Множеството от върхове, белязани с "+" са крайни върхове. Началният връх може да бъде също и краен. Върховете понякога се наричат състояния.

Ориентираният граф е двучленна релация R в крайно множество от върхове V, с графика (множество от ориентирани дъги) $L \subset V \times V$, т.е. aRb тогава и само тогава, когато $(a, b) \in L$. Всяка двучленна релация R се представя с ориентиран граф и всеки ориентиран граф е граф, получен от двучленна релация в множеството от неговите върхове.

Пример:

Релацията "$\leq$" в множеството $V = \{1, 2, 3\}$ се описва с диаграмата на фиг. 3, която е графично представяне на графа $G = \langle V, L \rangle$, където $L = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$.



Фиг. 3.

2. Матрица на съседство

Краен ориентиран граф може да се зададе чрез *матрицата на съседство*. Допуска се, че $G = \langle V, L \rangle$ е ориентиран граф, където $V = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Матрицата на съседство за графа $G = \langle V, L \rangle$ е квадратната матрица $M = \{m_{ij}\}$ от n-ти ред, елементите на която се дефинират с израза

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ако } \langle a_i, a_j \rangle \in L \\ 0, \text{ ако } \langle a_i, a_j \rangle \notin L. \end{cases}$$

Ориентиран път в графа $\vec{G}$ с дължина l се нарича редицата $a_0, \vec{x}_1, a_1, ..., a_{l-1}, \vec{x}_l, a_l$, където $\vec{x}_i$ е ориентирана дъга, изходяща от върха a_{i-1} и входяща във върха a_i. Ако всичко върхове a_i в този път са различни, той формира *отворена ориентирана* верига, която свързва a_0 с a_l. Ако върховете a_0 и a_l съвпадат, пътят формира *ориентиран цикъл*. Ако съществува ориентирана верига, която свързва a с b, което се означава $a \Rightarrow b$, се казва, че върхът b е *достижим* от върха a.

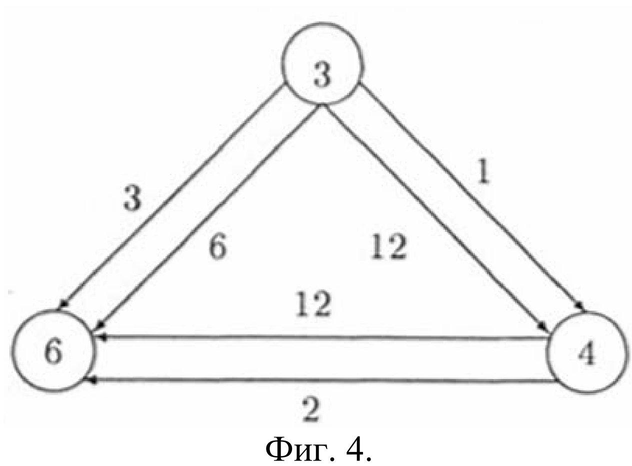
Ориентиран граф с тегла (маркиран граф) върху ребрата е наредена тройка $G = \langle V, L, W \rangle$, където V е множеството от върховете на G; W - множеството от теглата и $L \subset V \times W \times V$ - множеството от ориентирани ребра с тегла.

Пример:

Разглежда се множеството $V = \{3, 4, 6\}$. Да се определят двучленните релации в V, дефиниращи целочислените функции – най-голям общ делител (НОД) и най-малкото общо кратно (НОК):

$xR_i y \Leftrightarrow$ НОД (x, y)= i и $x < y$ за $i = 1, 2, 3$;
$xR_6 y \Leftrightarrow$ НОК (x, y) = 6 и $x < y$;

$xR_{12} y \Leftrightarrow$ НОК (x, y) = 12 и $x < y$.



Фиг. 4.

НОД между връх 3 и връх 4 $\rightarrow$ 1;
НОД между връх 3 и връх 6 $\rightarrow$ 3;

НОД между връх 4 и връх 6 $\to$ 2;
НОК между връх 3 и връх 4 $\to$ 12;
НОК между връх 3 и връх 6 $\to$ 6;
НОК между връх 4 и връх 6 $\to$ 12.

Графът представящ петте релации е представен на фиг. 4. Теглата на графа са индексите i на релациите, в които са двата върха, свързани със съответните дъги (ребра).