2.4. АВТОМАТИ НА МИЛИ И МУР

1. Определение

Автомати, разпознаващи думите над дадена азбука се наричат идентификатори на езици. Автомати, преобразуващи думите от език L_1 в думи от език L_2 (не обезателно различен от L_1), се наричат преобразуватели на езици. Автоматите-преобразуватели използват две азбуки (входна и изходна). На всяка дума над входната азбука или от определен език над нея се съпоставя по една дума над изходната азбука. Автоматите работят последователно на тактове. На всеки такт се прочита по една буква от входната дума. В зависимост от входната буква и предходното състояние, автоматът преминава в ново състояние и извежда една буква от изходната азбука. Автоматът стартира от определено начално състояние S_0 и завършва ако е достигнал състояние S и входна буква a, за които не е дефиниран или са изчерпани всички букви на входната дума. Резултатът е получената изходна дума.

2. Автомат на Мили

Автоматът на Мили е наредена шесторка $M = \langle N, \Sigma, W, \Delta, \Phi, S_0 \rangle$, където N е крайното непразно множество – азбука на състоянията на автомата; Σ - крайната входна азбука; W - крайната изходна азбука; $\Delta : N \times \Sigma \to N$ - функцията на преходите; $\Phi : N \times \Sigma \to W$ - изходната функция; $S_0 \in N$ - началното състояние на автомата.

Функциониране на автомата на Мили:

Входна дума: $\alpha = a_1 a_2 ... a_I \in \Sigma^*$:

- по начално състояние S_0 и първа буква a_1 се определя следващо състояние $S_1 = \Delta(S_0, a_1)$ и изходна буква $b_1 = \Phi(S_0, a_1)$;
- по състояние S_{i-1} и i-та буква на входната дума, на i-тия такт се определя ново състояние $S_i = \Delta(S_{i-1}, a_i)$ и i-та буква на изходната дума $b_i = \Phi(S_{i-1}, a_i)$, където $i = 1, 2, ..., I$.

Думата $\alpha = a_1 a_2 ... a_I \in \Sigma^*$ се преобразува в думата $w = b_1 b_2 ... b_I \in W^*$, т.е. $w = M(\alpha)$.

Автоматът M преобразува формалния език $L_1 \subset \Sigma^*$ в език $L_2 \subset W^*$, т.е.

$$L_2 = \{ w \in W^* \mid w = M(\alpha), \alpha \in L_1 \}.$$

Диаграмата на преходите на автомата на Мили се строи аналогично на детерминирания краен автомат. Ориентираното ребро от връх S_i до връх S_j се означава с a/bр което дефинира функция на преходите $\Delta(S_i, a) = S_j$ и изходна функция $\Phi(S_j, a) = b$.

Пример: Даден е автомат на Мили:

$M = (\{S_0, S_1\}, \{a, b\}, \{0, 1\}, \Delta, \Phi, S_0)$

Функцията на преходите и изходната функция се определят по следния начин:

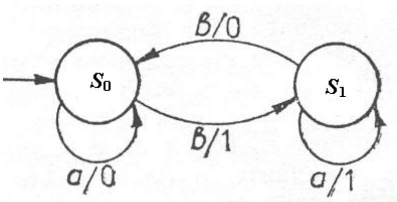
$\Delta(S_0, a) = S_0$, $\Phi(S_0, a) = 0$.

$\Delta(S_0, b) = S_1$, $\Phi(S_0, b) = 1$.

$\Delta(S_1, a) = S_1$, $\Phi(S_1, a) = 1$.

$\Delta(S_1, b) = S_0$, $\Phi(S_1, b) = 0$.

Диаграмата на преходите има вида



При входна дума *baabbab* изходната дума е 1110110. Изходните думи имат следното свойство: *n* – тият символ на изходната дума е 1, ако сред първите *n* символа на входната дума има нечетен брой *b*-та, *n* – тият символ на изходната дума е 0, ако сред първите *n* символа на входната дума има четен брой *b*-та.

Пример:

Разглежда се автомат на Мили от вида

$M = \langle \{S_0, S_1, S_2\}, \{0,1\}, \{a, b\}, \Delta, \Phi, S_0 \rangle$,

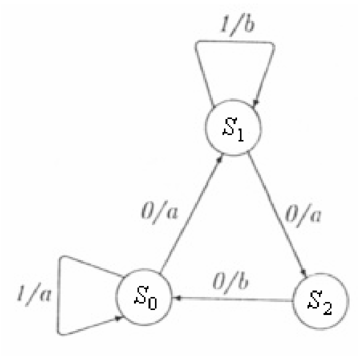
където $\Delta(S_0, 0) = S_1$; $\Delta(S_0, 1) = S_0$
$\Delta(S_1, 0) = S_2$; $\Delta(S_1, 1) = S_1$
$\Delta(S_2, 0) = S_0$;

$\Phi(S_0, 0) = a$; $\Phi(S_0, 1) = a$;
$\Phi(S_1, 0) = a$; $\Phi(S_1, 1) = b$;
$\Phi(S_2, 0) = b$.

При входна дума: 11010 се получава изходна дума *aaaba* за следните стойности на функциите на преходите:

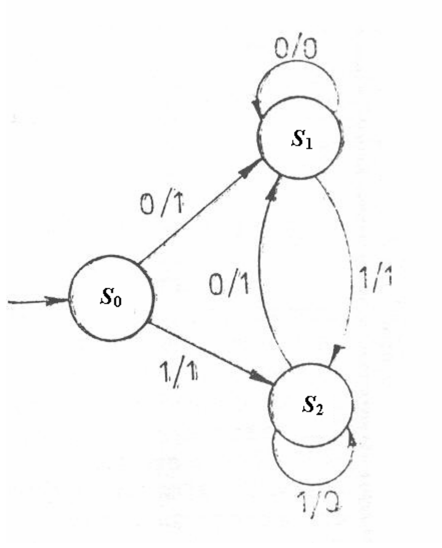
$\Delta(S_0,1) = S_0; \Phi(S_0,1) = a$;
$\Delta(S_0,1) = S_0; \Phi(S_0,1) = a$;
$\Delta(S_0,0) = S_1; \Phi(S_0,0) = a$;
$\Delta(S_1,1) = S_1;\ \Phi(S_1,1) = b$;
$\Delta(S_1,0) = S_2;\ \Phi(S_1,0) = a$.

Графът на автомата на Мили е показан на фиг. 1.



Фиг. 1.

Пример: Да се построи автомат на Мили с входна азбука {0, 1} и изходна азбука {0, 1}, изходните думи на който имат следното свойство: *n* – тият символ на една изходна дума е 0, ако началото с дължина *n* на входната дума завърши с 11 или 00, и е единица, ако началото с дължина *n* на входната дума не завършва с 11 или 00. Използват се три състояния на автомата: S_0 – начално; S_1- което помни, че пред него има 0, и S_2 – което помни че пред него има 1. Получава се следната диаграма на преходите



3. Автомат на Мур

Автоматът на Мур е наредена шесторка $K = \langle N, \Sigma, W, \Delta, \Phi, S_0 \rangle$, където N е крайното непразно множество – азбука на състоянията на автомата; Σ - крайната входна азбука; W - крайната изходна азбука; $\Delta : N \times \Sigma \rightarrow N$ - функцията на преходите; $\Phi : N \times \Sigma \rightarrow W$ - изходната функция на автомата на Мур, където Σ е празно множество; $S_0 \in N$ - началното състояние на автомата.

3.1. Функциониране на автомата на Мур

Входна дума: $\alpha = a_1 a_2 ... a_I \in \Sigma *$:

- от начално състояние S_0 се получава първата буква $b_1 = \Delta(S_0)$ на изходната дума; по начално състояние S_0 и първа буква a_1 се определя следващо състояние $S_1 = \Delta(S_0, a_1)$;
- на i-тия такт по състояние S_{i-1} се определя i-та буква на изходната дума $b_i = \Phi(S_{i-1})$ и новото състояние $S_i = \Delta(S_{i-1}, a_i)$ за $i = 1,2,...,I$.

Автоматът на Мур завършва работата си в краен брой тактове, т.е. достига в състояние, в което не е дефиниран или буквите на $\alpha = a_1 a_2 ... a_I \in \Sigma *$ са изчерпани. Резултатът от работата на автомата на Мур е изходната дума $w = b_1 b_2 ... b_{I+1} \in W *$. Очевидно, ако $\alpha = \varepsilon$, то $w = \Phi(S_0) = b_1$. Автоматът на Мур *преобразува* входната дума $\alpha \in \Sigma *$ в изходната дума $w = b_1 b_2 ... b_{I+1} \in W *$, което се изразява чрез функцията $w = K(\alpha)$.

Пример:

Даден е автомат на Мур $K = \langle \{S_0, S_1, S_2\}, \{0,1\}, \{a,b\}, \Delta, \Phi, S_0 \rangle$,

където

$\Delta(S_0,0) = S_1$; $\Delta(S_0,1) = S_2$

$\Delta(S_1,0) = S_2$; $\Delta(S_2,1) = S_0$

$\Phi(S_0) = a$; $\Phi(S_1) = a$;

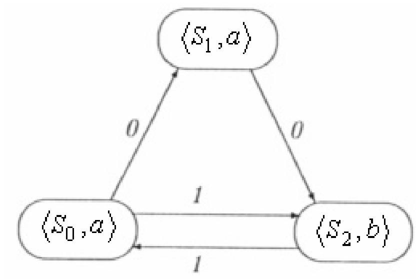
$\Phi(S_2) = b$.

Функциите Δ и Φ могат да се зададат чрез таблици:

Δ	0	1
S_0	S_1	S_2
S_1	S_2	-
S_2	-	S_0

Φ	a	a	b
	S_0	S_1	S_2

Диаграмата на автомата на Мур е представена като краен ориентиран граф на фиг. 2.



Фиг. 2

Пример: Даден е автомат на Мур

$K = (\{S_0, S_1, S_2\}, \{a, b\}, \{0, 1\}, \Delta, \Phi, S_0)$,

Функцията на преходите и изходната функция имат вида

$\Delta(S_0, a) = S_1$, $\Phi(S_0) = 0$.

$\Delta(S_0, b) = S_2$, $\Phi(S_1) = 1$.

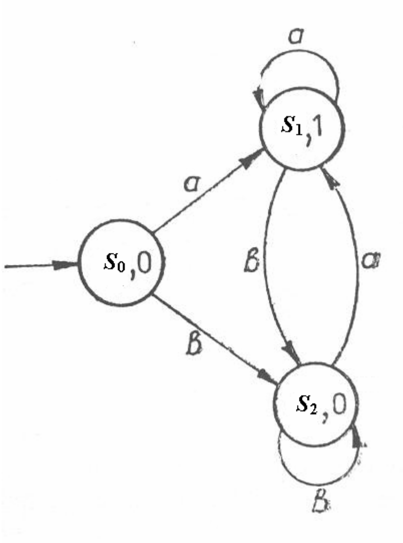
$\Delta(S_1, a) = S_1$, $\Phi(S_2) = 0$.

$\Delta(S_1, b) = S_2$.

$\Delta(S_2, a) = S_1$.

$\Delta(S_2, b) = S_2$.

Диаграмата на преходите на автомата на Мур има вида



Изходната дума без първата буква се получава от входната дума чрез побуквена замяна на *a* с 1 и на *b* с 0.