4.1. ПРЕПОЗИЦИОННА ЛОГИКА

1. Определение

Математическата логика е наука за логическите схеми на съжденията (твърденията), като игнорира техните доводи. Определянето на истинността на отделните твърдения не е задача на математическата логика. Математическата логика определя дали дадено съждение (логическа верига, доказателство) е правилно, независимо дали е истина. Предмет на математическата логика е анализът на методите за съждения.

Обобщени схеми на твърдения:

Всички елементи на множеството A притежават свойство B, C е елемент от множеството $\Rightarrow$ *C притежава свойство B.*

Всички елементи на множеството A са в релация с B, C е елемент от множеството $\Rightarrow$ *C е в релация с B.*

Съждение – елементарно твърдение с известна истинност, която се определя субективно и не подлежи на по-нататъшен анализ. Съжденията се означават с азбуката на съждителната логика.

Предмет на съждителната логика - методите за установяване на истинността на сложни съждения (логически изрази) независимо от истинността на елементарните съждения.

2. Език на съждителната алгебра

Азбуката на съждителната алгебра включва три множества:

$\Sigma = G_1 \cup G_2 \cup G_3$,

където
$G_1 = \{A_0, A_1, ..., A_n\}$ е множество от символи;
$G_2 = \{\bar{\ }, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ - множество от логически съюзи,
където
$\bar{\ }$, $\neg$ - логическо отрицание (инверсия);
$\wedge$, $\&$ - логическо “и”;
$\vee$, $|$ - логическо “или”;
$\leftrightarrow$, $\equiv$ - логическа еквивалентност;
$\to$, $\supset$ - логическа импликация (“следва”);
$G_3 = \{'(', ')', ',' \}$ - множество от спомагателни символи.

3. Формули на съждителната алгебра

Правилно (построени) форми (ППФ) са логически изрази, които се образуват по следните правила:

1. Съждителните променливи са ППФ.
2. Ако P и Q са ППФ, то $\overline{P},(P \vee Q),(P \wedge Q),(P \to Q),(P \leftrightarrow Q)$ са ППФ.
3. Таблица на истинност: true, $T = 1$; false , $F = 0$.

P	Q	$\overline{P}$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
					$\overline{P} \vee Q$	$(\overline{P} \vee Q) \wedge (P \vee \overline{Q}) = \overline{(P \wedge \overline{Q})} \wedge \overline{(\overline{P} \wedge Q)} = \overline{\overline{(\overline{P} \vee Q)} \vee \overline{(P \vee \overline{Q})}}$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

4. Формули за преобразуване на ППФ.

а) импликация (следва):

$T \to B \equiv B \qquad B \to T \equiv T$

$F \to B \equiv T \qquad B \to F \equiv \overline{B}$

$B \to B \equiv T \qquad \overline{B} \to B \equiv B$

$\overline{\overline{B}} \equiv B$

б) логическо "или": $T \vee B \equiv T,\ B \vee B \equiv B$;

в) логическо "и" : $T \wedge B \equiv B,\ B \wedge B \equiv B$;

г) ($\leftrightarrow$) еквивалентност и ($\oplus$) сума по модул 2:

$T \leftrightarrow B \equiv B \qquad B \leftrightarrow T \equiv B$

$F \leftrightarrow B \equiv \overline{B} \qquad B \leftrightarrow F \equiv \overline{B}$

$B \leftrightarrow B \equiv T \qquad \overline{B} \leftrightarrow B \equiv F$

$B \leftrightarrow \overline{B} \equiv F$

д) Помощни формули

$A \to B \equiv \overline{A} \vee B \qquad A \to B \equiv \overline{A \wedge \overline{B}}$

$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

$\overline{A \to B} \equiv A \wedge \overline{B}$

$\overline{A \leftrightarrow B} \equiv \overline{(A \to B) \wedge (B \to A)} =$

$= \overline{A \to B} \vee \overline{(B \to A)} = (A \wedge \overline{B}) \vee (B \wedge \overline{A})$

$A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$

$$A \to (B \to C) \equiv B \to (A \to C)$$
$$A \leftrightarrow B \equiv (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$$
$$A \leftrightarrow B \equiv \overline{(A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)}$$
$$A \leftrightarrow B \equiv \overline{A} \leftrightarrow \overline{B}$$
$$A \to B \equiv \overline{B} \to \overline{A}$$

5. Закони на препозиционната логика

а) Закони на Де Морган

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$
$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

б) Закон на Шенон

$$\overline{\overline{A} \vee B} \wedge \overline{C} = \overline{\overline{A} \vee B \vee C}$$

в) Дистрибутивни закони

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

г) Комутативни закони

$$A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$$

д) Закони за съкращение (поглъщане)

$$A \wedge (\overline{A} \vee B) = A \wedge B$$
$$A \vee (\overline{A} \wedge B) = A \vee B$$
$$A \wedge (A \vee B) = A$$
$$A \vee (A \wedge B) = A$$

е) Асоциативен закон

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

Пример:

Да се докаже, че ППФ $\Big(\big((P \wedge Q) \to R\big) \wedge (P \to Q)\Big) \to (P \to R) \equiv T$ е общовалидна (еквивалентна на true), т.е. ППФ $\equiv T$

Решение:

Премахва се импликацията, след което се разчленява инверсията и прилагат се законите на съждителната логика до доказване на общовалидността в съответствие с изразите

$A \to B \equiv \overline{A} \vee B$, $A \to B \equiv \overline{A \wedge \overline{B}}$, $Q \vee \overline{Q} = T$ и комутативния закон, т.е.

$$\left(\left(\left(\overline{P \wedge Q}\right) \vee R\right) \wedge (\overline{P} \vee Q)\right) \to (\overline{P} \vee R) \equiv T$$
$$\overline{\left(\left(\left(\overline{P \wedge Q}\right) \vee R\right) \wedge (\overline{P} \vee Q)\right)} \vee (\overline{P} \vee R) \equiv T$$
$$\overline{\overline{P \wedge Q} \vee R} \vee \overline{\overline{P} \vee Q} \vee (\overline{P} \vee R) \equiv T$$
$$P \wedge Q \wedge \overline{R} \vee P \wedge \overline{Q} \vee \overline{P} \vee R \equiv T$$
$$P \wedge P \wedge \overline{R} \vee Q \wedge \overline{Q} \vee \overline{P} \vee R \equiv T$$
$$P \wedge \overline{R} \vee R \wedge \overline{Q} \vee \overline{P} \vee Q \equiv T$$
$$P \wedge \overline{R} \vee R \wedge \overline{P} \vee \overline{Q} \vee Q \equiv T$$
$$Q \wedge \overline{R} \vee \overline{Q} \wedge P \vee \overline{P} \vee R \equiv T$$
$$Q \wedge \overline{R} \vee \overline{Q} \wedge T \vee R \equiv T .$$
$$Q \wedge T \vee \overline{Q} \wedge \overline{R} \vee R \equiv T$$
$$T \wedge Q \vee \overline{Q} \wedge \overline{R} \vee R \equiv T$$
$$T \wedge T \wedge T \equiv T ;$$

6. Изчисления със съждения

Естествена формална система

Крайно множество от общовалидни ППФ (аксиоми) и крайно множество от съответствия между общовалидни ППФ (правила на извод) дефинират естествена формална система (ЕФС). Една ППФ A е изводима (доказуема, удовлетворима или общовалидна) в рамките на ЕФС, ако може да бъде образувана крайна редица, наречена доказателство на А, от общовалидни ППФ, в която A е последна, а всички предходни са аксиоми или са изведени чрез правилата за извод. Изчислението със съждения е по същество доказателство за общовалидност.

Секвенция от ППФ

Секвенцията Г е поредица от ППФ, свързани с логически съюз $"\wedge"$ ("и"), т.е.

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots A_n \to B \equiv \underbrace{A_1, A_2, \ldots, A_n}_{\Gamma} \to B \equiv \Gamma \to B .$$

Секвенцията е предпоставена поредица, от която следва ППФ – B. Редът на предпоставките не е от значение. Съществуват следните три основни форми на секвенция:

1. Секвенцията Г е предпоставка за извода на *B*: $\underbrace{A_1, A_2, ..., A_n}_{\Gamma} \to B$.
2. Аксиомата *B* винаги е вярна без предпоставки: $\to B$.
3. Секвенцията е противоречива, от нея не следва нищо: $\underbrace{A_1, A_2, ..., A_n}_{\Gamma} \to$.

Правило за извод на ППФ

Секвенцията Γ може да бъде изведена от Γ_1 до Γ_n, т.е. $\left.\frac{\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n}{\Gamma}\right\}$, където Γ_i и Γ са произволни секвенции.

Доказателство на ППФ A_n.

ППФ A_n се доказва чрез съставяне на такава последователност от преобразувания, чрез които се извежда ППФ A_n, т.е.

$$\Gamma_1 \Rightarrow A_1, \Gamma_2 \Rightarrow A_2, ..., \Gamma_n \Rightarrow A_n.$$

Всяко правило $\Gamma_i \Rightarrow A_i$ може да бъде или аксиома, или изводимо чрез правила за извод.

7. Аксиоми и правила в съждителната алгебра

Аксиома за предпоставките

От секвенция Г и предпоставка *A* следва, че предпоставката *A* е винаги истина:

$$\to \Gamma, A \Rightarrow A.$$

Въвеждане на предпоставка: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma, A \Rightarrow B}$.

Ако е дадена секвенция Г, която представлява предпоставка за *B*, то от добавянето на някаква друга предпоставка *A*, следствието не се променя, т.е. $\Gamma \Rightarrow B$.

Елиминиране на предпоставка: $\dfrac{(\Gamma, A \Rightarrow B) \wedge (\Gamma, \overline{A} \Rightarrow B)}{\Gamma \Rightarrow B}$.

Ако е вярно, че от секвенция Г и предпоставка *A* следва *B*, както и че от Г и $\overline{A}$ следва B, то от Г следва B, а *A* е излишна предпоставка и може да се премахне, т.е. $\Gamma \Rightarrow B$.

Аксиома за истинност

Секвенция от предпоставки е истина, т.е.

$\Gamma \Rightarrow T$, $\Gamma \Rightarrow \overline{F}$, $A \Rightarrow A$.

Други аксиоми

$$\left(\left(A \wedge B\right) \to A\right) \quad \left(\left(A \vee B\right) \to B\right)$$
$$\left(A \to \left(A \wedge B\right)\right) \quad \left(B \to \left(A \vee B\right)\right)$$
$$\left(A \to \overline{B}\right) \to \left(B \to \overline{A}\right)$$
$$\left(\overline{A} \to A\right).$$

8. Правила за извод

Правила за $''\vee''$ (логическо "или"):

Въвеждане на $''\vee''$: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}$;

Елиминиране на $''\vee''$: $\dfrac{(\Gamma, A \Rightarrow C) \wedge (\Gamma, B \Rightarrow C) \wedge (\Gamma \Rightarrow A \vee B)}{\Gamma \Rightarrow C}$.

Правила за $''\wedge''$ (логическо "и"):

Въвеждане на $''\wedge''$: $\dfrac{(\Gamma \Rightarrow A) \wedge (\Gamma \Rightarrow B)}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$;

Елиминиране на $''\wedge''$: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}{\Gamma \Rightarrow A} \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}{\Gamma \Rightarrow B}$;

Правила за $''\to''$ (импликация):

Въвеждане на $''\to''$: $\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}$;

Елиминиране на $''\to''$: $\dfrac{(\Gamma \Rightarrow A) \wedge (\Gamma \Rightarrow A \to B)}{\Gamma \Rightarrow B}$.

Правила за $''\,\overline{\ }\,''$ (инверсия):

Въвеждане на $''\,\overline{\ }\,''$, (правило на абсурда) : $\dfrac{(\Gamma, A \Rightarrow B) \wedge (\Gamma, A \Rightarrow \overline{B})}{\Gamma \Rightarrow \overline{A}}$.

Елиминиране на $''\,\overline{\ }\,''$: (правило на противоречието):

$$\frac{(\Gamma \Rightarrow A) \wedge (\Gamma \Rightarrow \overline{A})}{\Gamma \Rightarrow B}.$$

Правила за $''\,\overline{\overline{\ }}\,''$ (двойното отрицание):

Въвеждане, елиминиране на отрицание: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \overline{\overline{A}}} \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \overline{\overline{A}}}{\Gamma \Rightarrow A}$.

Правила за еквивалентност $\Leftrightarrow$

Въвеждане на $"\leftrightarrow"$: $\dfrac{(\Gamma \Rightarrow A \to B) \wedge (\Gamma \Rightarrow B \to A)}{\Gamma \Rightarrow A \leftrightarrow B}$.

Елиминиране на $"\leftrightarrow"$: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \leftrightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B} \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A \leftrightarrow B}{\Gamma \Rightarrow B \to A}$.

Пример: Да се изведе: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \to (B \to C)}{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B) \to C}$

1. $\Gamma \Rightarrow A \to (B \to C)$ -дадено;
2. $\Gamma, A \wedge B \Rightarrow A \to (B \to C)$ - въвеждане на предпоставка;
3. $\Gamma, A \wedge B \Rightarrow A \wedge B$ - аксиома за предпоставка;
4. $\Gamma, A \wedge B \Rightarrow A$ - елиминиране на логическо “и” ($\wedge$);
5. $\Gamma, A \wedge B \Rightarrow B \to C$ - елиминиране на импликация ($\to$) (редове 2 и 4);
6. $\Gamma, A \wedge B \Rightarrow B$ - елиминиране на логическо “и” ($\wedge$) (ред 3);
7. $\Gamma, A \wedge B \Rightarrow C$ - елиминиране на импликация (ред 5) ($\to$);
8. $\Gamma \Rightarrow (A \wedge B) \to C$ - въвеждане на импликация ($\to$).

Пример: Да се докаже $\Rightarrow ((P \wedge Q \to R) \wedge (P \to Q)) \to (P \to R)$

Извежда се $(P \wedge Q \to R)$, $(P \to Q)$, $P \Rightarrow R$. Прилага се правилото за въвеждане на ($\to$) и обобщеното правило за въвеждане на ($\to$).

Решение:

1. Г, $(P \wedge Q \to R)$, $(P \to Q)$, $P \Rightarrow P$ - аксиома за предпоставка;
2. Г, $(P \wedge Q \to R)$,$(P \to Q)$, $P \Rightarrow P \to Q$ - аксиома за предпоставка;
3. Г, $(P \wedge Q \to R)$, $(P \to Q)$, $P \Rightarrow Q$ - елиминиране на $\to$ (ред 1 и 2);
4. Г, $(P \wedge Q \to R)$, $(P \to Q)$, $P \Rightarrow P \wedge Q$ въвеждане на $\wedge$ (ред 1 и 3);
5. Г, $(P \wedge Q \to R)$, $(P \to Q)$, $P \Rightarrow P \wedge Q \to R$ - аксиома за предпоставка;
6. Г, $(P \wedge Q \to R)$, $(P \to Q)$, $P \Rightarrow R$ - елиминиране на $\to$ (ред 4 и 5);
7. Г, $(P \wedge Q \to R)$, $(P \to Q) \Rightarrow P \to R$ - въвеждане на $\to$ (ред 6);
8. $\Rightarrow ((P \wedge Q \to R) \wedge (P \to Q)) \to (P \to R)$ - обобщено въвеждане на $\to$ (ред 7).