4.3. МЕТОД НА РЕЗОЛЮЦИЯТА

1. Базов метод на резолюцията

1.1. Обща характеристика

Методът на резолюцията е алгоритъм за определяне дали една ППФ на предикатната логика от I ред е неудовлетворима, т.е. еквивалентна на (false). При зададена ППФ A методът на резолюцията установява, че A е неудовлетворима. В случай, че A е удовлетворима, се получава безкраен цикъл. За установяване на удовлетворимостта на ППФ A, методът на резолюцията се прилага върху инвертираната ППФ - $\overline{A}$. Ако методът установи че $\overline{A}$ е неудовлетворима, тогава следва, че A е удовлетворима т.е. еквивалентна на (true). Логическото доказателство се базира върху еквивалентните преобразувания.

Нека $\Gamma \equiv A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$ са предпоставки за B, следователно:

$$\Gamma \to B \equiv \overline{\Gamma \wedge \overline{B}}.$$

Ако се докаже, че $\Gamma \wedge \overline{B}$ е неудовлетворима (false), следва, че $\Gamma \to B$ е удовлетворима (true). Методът на резолюцията се прилага само към специален вид ППФ, наречена *клаузна форма*.

Логическото доказателство за неудовлетворимост на една ППФ се разделя на два етапа:

1. Преобразуване на правилно-построената формула на предикатната логика в клаузна форма.
2. Прилагане на метода на резолюцията, който се базира на алгоритъма за унификация.

Дефиниции:

Клаузна форма е ППФ, която се състои от конюнкции "$\wedge$" на клаузи и всички квантори за общност са изместени вляво на формулата:

$$\underbrace{\forall x_1, \forall x_2, ..., \forall x_n}_{\textit{префикс}} \underbrace{(c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_n)}_{\textit{матрица}}$$

където $c_i \;\middle|\; i = 1....K$ са клаузи.

Клауза е дизюнкция от литерали:

Пример:

$$\underbrace{p(f(x), a)}_{\text{аф}} \vee \underbrace{\overline{g(x)}}_{\text{аф}} \vee \underbrace{\overline{p(a, y)}}_{\text{аф}}.$$

Литерал е атомна формула или нейното отрицание.

Базова клауза – конюнкция от всички базови екземпляри на клаузата.

Базов екземпляр на клауза – получава се чрез замяна на всички индивидни променливи с константни терми от съответната им дефиниционна област.

Пример:

<u>Клауза:</u> $A:\left(p(X)\vee q(c,X)\right)$, където $X\in D=\{a,\ b\}$ е индивидна променлива.

<u>Базова клауза:</u> $A:\left(p(a)\vee q(c,a)\right)\wedge\left(p(b)\vee q(c,b)\right)$;

1.2. Същност на базовия метод на резолюцията

Ако G_1 и G_2 са базови клаузи и ако G_1 и G_2 съдържат общ литерал с инверсия и без инверсия, тогава *резолюцията* включва:

1. Общият литерал се премахва от G_1 и G_2, които се свеждат до G_1' и G_2'.
2. Съставя се нова клауза G_3, наречена *резолвента*, която се състои от конюнкция на G_1' и G_2', т.е. $G_3=G_1'\wedge G_2'$.

Процесът на *резолиране* продължава, докато се получи празна клауза.

Пример:

Дадени са базовите клаузи G_1 и G_2, където $G_1=c$, $G_2=\overline{c}$. Резолвентата е $G_3=G_1\wedge G_2$ с резултат $G_3=c\wedge\overline{c}$, $G_3=\square$ - празната клауза.

Ако в резултат на резолюцията се получи празна клауза, ППФ от предикатната логика е неудовлетворима, в противен случай, тя се счита удовлетворима.

Базовият метод на резолюцията изисква:

1. Преди началото на резолюцията да се образуват всички базови екземпляри на всички клаузи, което означава пълно комбиниране на всички променливи, като се включат всичките им стойности от дефиниционните области.
2. Машинно време за формиране на множеството базови екземпляри на всички клаузи.
3. Памет за съхраняване на базовите екземпляри на всички клаузи.

В процеса на резолюцията е възможно извеждането на празна клауза на базата на значително по-малка част от базовите екземпляри. Дефиниционните области на някои променливи (естествените числа) са неограничени, което прави методът в този вид практически неосъществим като логически програмен език.

1.3. Преобразуване на ППФ в клаузна форма

Дадена е ППФ: $\exists y\forall z\left(p(z,y)\leftrightarrow\overline{\exists x\left(p(z,x)\wedge p(x,z)\right)}\right)$

1. Премахване на импликацията и еквивалентността от ППФ чрез прилагане на следните логически преобразувания:

$$A \to B \equiv \overline{A} \vee B$$
$$A \leftrightarrow B \equiv (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \vec{B})$$

откъдето следва

$$\exists y \forall z \left\{ \left[\overline{p(z,y)} \vee \overline{\exists x \left(p(z,x) \wedge p(x,z) \right)} \right] \wedge \left[p(z,y) \vee \exists x \left(p(z,x) \wedge p(x,z) \right) \right] \right\}$$

2. Разчленяване на инверсията

Прилагат се законите на Де Морган, Шенон и правилата за кванторите:

$$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$$
$$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$$
$$\overline{\forall x \left(p(x) \right)} \equiv \exists x \left(\overline{p(x)} \right)$$
$$\overline{\exists x \left(p(x) \right)} \equiv \forall x \left(\overline{p(x)} \right),$$

откъдето следва

$$\exists y \forall z \left\{ \left[\overline{p(z,y)} \vee \forall x \left(\overline{p(z,x)} \vee \overline{p(x,z)} \right) \right] \wedge \left[p(z,y) \vee \exists x \left(p(z,x) \wedge p(x,z) \right) \right] \right\}.$$

3. Премахване на кванторите за съществуване (скулемизация)

Прилагат се следните логически правила:

$\forall y \ldots \{ \exists x (p(x)) \} \equiv \forall y \{ (p(f(y))) \}$ - чрез произволна функция $f(y)$;

$\exists x (p(x)) \equiv p(a)$ - чрез константа.

По този начин се определя свързаната променлива спрямо дефиниционната област на променливата, в областта на която се намира квантифицираната променлива.

$$\forall z \left\{ \left[\overline{p(z,a)} \vee \forall x \left(\overline{p(z,x)} \vee \overline{p(x,z)} \right) \right] \wedge \left[p(z,a) \vee \left(p(z,f(z)) \wedge p(f(z),z) \right) \right] \right\}.$$

4. Изместване на кванторите за общност наляво във формулата

$$\forall z \forall x \left\{ \left[\overline{p(z,a)} \vee \left(\overline{p(z,x)} \vee \overline{p(x,z)} \right) \right] \wedge \left[p(z,a) \vee \left(p(z,f(z)) \wedge p(f(z),z) \right) \right] \right\}.$$

5. Прилагане на дистрибутивните закони

Правила:

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,

откъдето следва

$$\forall z \forall x \{[\overline{p(z,a)} \vee (\overline{p(z,x)} \vee \overline{p(x,z)})] \wedge [p(z,a) \vee p(z, f(z))] \wedge [p(z,a) \vee p(f(z), z)]\},$$

където $\forall z \forall x$ е префикс; $\{\overline{p(z,a)} ....\}$ - матрица.

Получават се следните базови клаузи:

$c_1 : \overline{p(z,a)} \vee (\overline{p(z,x)} \vee \overline{p(x,z)})$;

$c_2 : p(z,a) \vee p(z, f(z))$;

$c_3 : p(z,a) \vee p(f(z), z)$.

6. Приложение на базовия метод на резолюцията

Пример:

Дадена е ППФ клаузна форма:

$$S : \overline{p(a,a)} \wedge (\overline{p(a,a)} \vee \overline{p(a,b)} \vee \overline{p(b,a)}) \wedge$$
$$\wedge (p(a,a) \vee p(a,b)) \wedge (p(a,a) \vee p(b,a))$$

Да се провери S за неудовлетворимост по базовия метод на резолюцията.

Базовите екземпляри на клаузите са:

$c_1 : \overline{p(a,a)}$
$c_2 : \overline{p(a,a)} \vee \overline{p(a,b)} \vee \overline{p(b,a)}$
$c_3 : p(a,a) \vee p(a,b)$
$c_4 : p(a,a) \vee p(b,a)$

$c_5 : \overline{p(b,a)}$ резолюция на c_2 и c_3;
$c_6 : p(a,a)$ резолюция на c_4 и c_5;
$c_7 : \square$ резолюция на c_6 и c_1.

Резултатът е празна клауза, поради което ППФ е неудовлитворима.