1. 4. ГРАФИ И ДЪРВЕТА

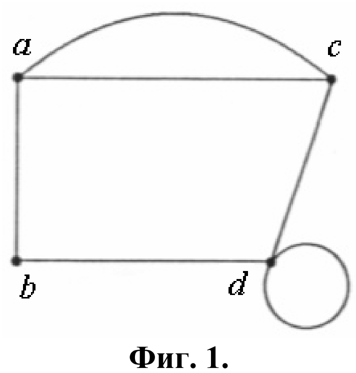
1. Дефиниция за граф

Наредена двойка $G = \langle V, L \rangle$ от две множества V и L, от които V е крайно множество, L - множество от наредени двойки, елементи на V, се нарича *граф*. Елементите на V се наричат *върхове* на G, а елементите на L - *дъги* (*ребра*) на графа.

Дъгата (a,b) свързва върховете a и b, тя е инцидентна с върховете a и b. Върховете a и b се наричат *краища на дъгата* (a,b). Два върха – краища на дъга, са *съседни*. Броят на дъгите, инцидентни с връх a на графа G определя *степен* (*валентност*) на a, което се бележи $\deg(a)$. Дъга, свързваща един и същи връх сам със себе си, дефинира *самосвързан връх*. Двойки върхове, свързани с повече от една дъга дефинират *паралелни* (*успоредни*) *дъги*. Граф, в който липсват паралелни ребра и самосвързани върхове е *прост граф*. Мощността на L на простия граф се определя от израза:

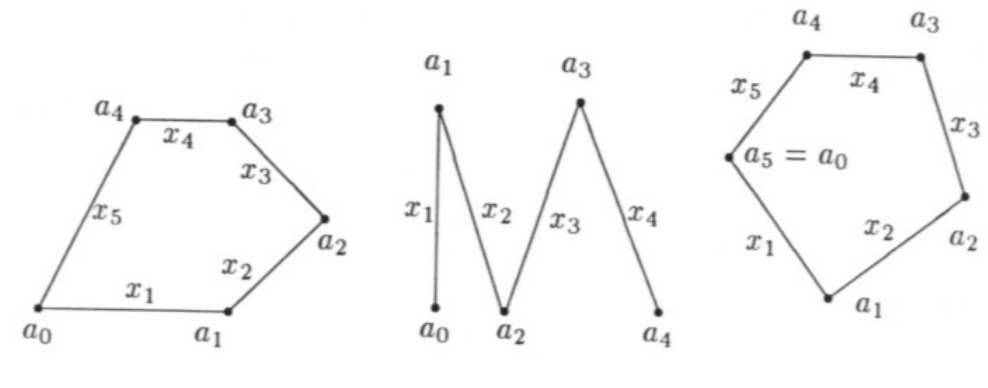
$$|L| = \frac{1}{2} \sum_{a \in V} \deg(a),$$

За простия граф е в сила теоремата: Ако $\deg(a)$ е нечетно, броят на върховете a е четно число.



Фиг. 1.

Всяка редица от вида $t = a_0 x_1, a_1 x_2, \ldots a_{l-1} x_l, a_l$, където $a_i \in V$, $x_i = (a_i a_{i-1}) \in L$, се нарича *път* с дължина l, съединяващ върховете a_0 и a_l. При $a_0 \neq a_l$ пътят е *отворен*. При $a_0 \equiv a_l$ пътят е *затворен*. Ако всички ребра са различни пътят е *прост* (Фиг. 2, *а*). Отворен път, на който всички върхове са различни, се нарича *верига*, съединяваща a_i и a_l (бележи се $a_i a_l$ -верига) (фиг. 2, *б*). Затворен прост път, на който всички върхове са различни се нарича *цикъл* (фиг. 2, *в*).

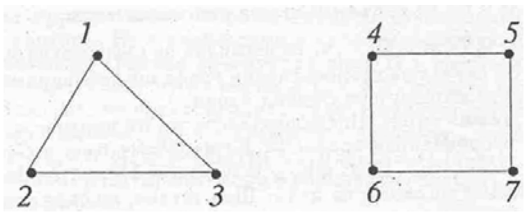


а) ***б***) ***в***)

Фиг. 2.

Теорема: Ако между два върха a_0 и a_l, в даден граф, съществува **прост път**, който ги свързва, то между тях може да се построи (a_0, a_l) – верига или цикъл, съдържащ тези върхове.

Графът $G = \langle V, L \rangle$ се нарича *свързан граф*, ако между всеки два негови върха съществува път, който ги свързва, т.е. ако $v_i, v_j \in V$, съществува път в G от v_i до v_j. Всеки свързан граф има една свързана компонента. Графът от фиг. 2, *а* е свързан, а графът от фиг. 3 е несвързан. Той има две свързани компоненти.

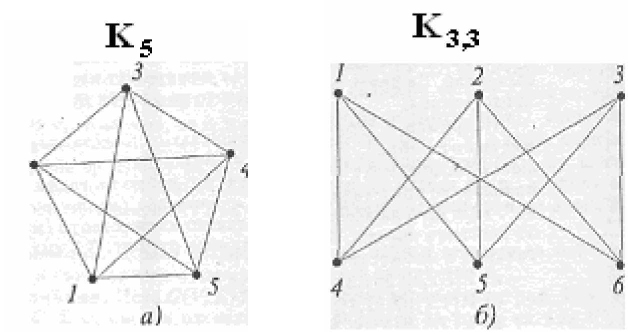


Фиг. 3.

Графът $G = \langle V, L \rangle$ се нарича *пълен*, ако $\forall v_i, v_j \in V$, $(v_i, v_j) \in L$. Пълният граф с n върха се означава с K_n. Пълният подграф $G' = \langle V', L' \rangle$ на графа $G = \langle V, L \rangle$, индуциран от $V' \subseteq V$, се нарича клика на G или m – *клика*, ако $|V'| = m$. За всеки граф се дефинира кликово число $k(G)$ като максимално естествено число m, такова, че G има m-клики.

Дефиниция. Графът $\overline{G}(V, V \times V \setminus L)$ се нарича *допълнение* или допълнение на граф $G = \langle V, L \rangle$. Допълненото на пълния граф K_n се нарича *празен граф.* Празният граф с n върха се означава с $\overline{K}_n$. Празният подграф $G' = \langle V', L' \rangle$ на графа $G = \langle V, L \rangle$, индуциран от $V' \subseteq V$ се нарича *антиклика* на $G = \langle V, L \rangle$, или *m-антиклика*, ако $|V'| = m$.

На Фиг. 4, *а* е показан пълният граф K_5. Максималната клика на K_n съвпада с K_n. Затова $k(K_n) = n$.



Фиг. 4. Пълен (а) и пълен двуделен (б) графи.

Дефиниция. Графът $G = \langle V, L \rangle$ се нарича *двуделен* , ако съществува разбиване $\{V_1, V_2\}$ на V, такова че $\forall (v_i, v_j) \in L$ е в сила $v_i \in V_1$, $v_j \in V_2$. Ако $\forall v_i \in V_1$ и $\forall v_j \in V_2$ е в сила $(v_i, v_j) \in L$, то $G(V_1 \cup V_2, L)$ е *пълен двуделен граф.* Ако $|V_1| = n$, а $|V_2| = m$ тогава пълният двуделен граф $G(V_1 \cup V_2, L)$ се означава $K_{n,\, m}$.

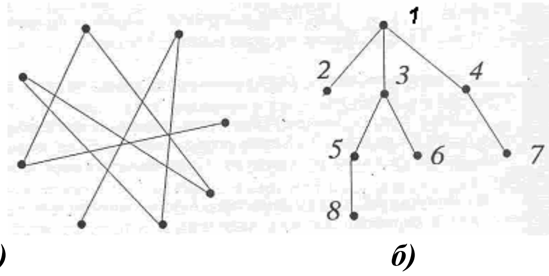
Дефиниция. Графът $G = \langle V, L \rangle$ *е планарен,* ако съществува диаграма на G, в която никои две ребра не се пресичат (общият край на две ребра не е пресечна точка).

Пълният граф K_5 и пълният двуделен граф K_{33} не са планарни. Не е планарен и всеки граф, на който K_5 или K_{33} са подграфи.

2. Дървета

Дефиниция:

Свързан граф без цикли наричаме *дърво,* а несвързан граф без цикли - *гора.* Един граф е дърво точно тогава, когато между всеки два негови различни върха съществува точно една верига. Свързан граф $G = \langle V, L \rangle$ с n върха и $n-1$ дъги е дърво. На Фиг. 5, *а* е показан граф, който е дърво.



а) *б)*

Фиг. 5. Дърво (свързан граф без цикли) (а) и кореново дърво (б).

Дефиниция:

1. Графът $D(\{r\}, \{\})$ с един връх r и без ребра се нарича *дърво с корен r* (*кореново дърво*). Единственият връх r е единствен *лист* на това кореново дърво.
2. Нека $D(V,L)$ е дърво с корен $r \in V$ и листа $l_1, l_2, \dots, l_r, \dots$ Нека $u \in V$, $w \notin V$. Тогава $D'(V', L') = D'(V \cup \{w\}, L \cup \{(u, w)\})$ е също с дърво с корен r. Ако $u = l_i$, $1 \leq i \leq r$, тогава листа на D' са $l_1, \dots, l_{i-1}, w, l_{i+1}, \dots, l_r$. В противен случай листа на D' са $l_1, l_2 \dots, l_r, w$.
3. Няма други коренови дървета.

Операцията, която се прилага в индуктивната стъпка на горната дефиниция, се нарича *присъединяване на връх.* Нотацията с наредени двойки показва, че вторият връх е присъединен към първия при построяване на дървото с корен. На Фиг. 5, *б* е показано кореновото дърво $D(V, L)$ с $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $L = \{(1,2), (1,3), (1,4), (3,5), (3,6), (4,7), (5,8)\}$. Корен е върхът 1. Върховете 2, 3 и 4 са присъединени към 1. Върховете 5 и 6 към 3, върхът 7 към 4, а върхът 8 към 5. Листа на това кореново дърво са върховете 2,6,7 и 8 - към никой от тях не е присъединен друг връх.

Теорема: Всяко дърво с корен е дърво.
Теорема: Ако $D(V, L)$ е дърво с корен r, то $|V| = |L| + 1$.
Теорема: Ако $D(V, L)$ е дърво с корен r, съществува единствен път между всеки два върха на D.
Дефиниция: Дължината на пътя от корена r до върха v_i в кореновото дърво D се нарича височина на v_i. Максималната височина на връх на кореновото дърво D се нарича височина на това дърво.

Височината на дървото от Фиг. 5, *б* е 3 (дължината на пътя от 1 до 8).

$p[i]$	0	1	1	1	3	3	4	5
i	1	2	3	4	5	6	7	8

Фиг. 6. Списък на бащите в кореново дърво.

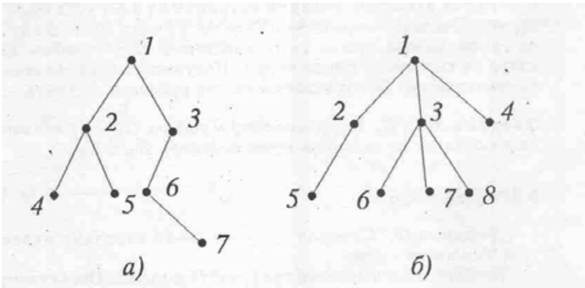
За всеки връх w, с изключение на корена, има единствен връх u, към който е присъединен. Върхът u се нарича баща на w, а w се нарича син на u. Дърво с корен се представя чрез списък на бащите. За корена, който няма баща, в списъка се поставя някой несъществуващ връх. Кореновото дърво от Фиг. 1, *б* е със списък на бащите в едномерен масив p с осем елемента (Фиг. 6), като баща на корена 1 в $p[1]$ е посочен несъществуващият връх 0.

Дефиниция: Максималният брой синове на един връх от кореновото дърво D се нарича разклоненост на това дърво.

Разклонеността на дървото от Фиг. 7, *б* е 3, тъй като има три сина (за корена 1) и няма връх с повече синове.

Ако $D(V,E)$ е кореново дърво с височина h и разклоненост m, то D има не повече от m^h листа.

Дефиниция. Кореново дърво с разклоненост 2 се наричаме двоично дърво.



Фиг. 7

В двоичното дърво всеки връх, който не е лист, има не повече от два сина: ляв син и десен син. На Фиг. 3, *а* е показано двоично дърво със 7 върха. Върхът 2 е ляв, а 3 - десен син на 1. Върхът 3 има само ляв, а върхът 6 - само десен син. Двоичните дървета се представят по сравнително прост и хомогенен начин, който се нарича списък на синовете. Списъкът на синовете съдържа за всеки връх на кореновото дърво наредената двойка от синовете му, като отсъствието на съответен син се означава със знак *, например двоичното дърво от Фиг. 3, *а* се представя със следния списък на синовете:

1: 2 3
2: 4 5
3: 6 *
4: * *
5: * *
6: * 7
7: * *

Аналогично може да се дефинира m-ично дърво, като кореново дърво с разклоненост m. На Фиг. 7, *б* е показано троично дърво. m-ичното дърво може да се представи чрез списък от наредените m-орки от синове на всеки връх. С нарастването на m нараства и възможността много от синовете да липсват, затова при такива дървета посоченото по-горе представяне е неефективно.

Дефиниция: Нека в кореновото дърво *B* е въведена наредба на синовете за всеки връх. Наредената съвкупност от всички синове на даден връх ще наричаме *братство.* Първият в братството син на всеки негов нелист се нарича негов *най-ляв син.* Съседът отдясно на даден връх от братството се нарича *десен брат.* Последният в братството връх няма десен брат.

За коренови дървета с по-голяма разклоненост и много липсващи синове се използува хомогенното представяне, наречено **най-ляв син - десен брат** - списък от наредени двойки, по една за всеки връх на кореновото дърво. Първи елемент на двойката е най-левият син на съответния връх, а втори - неговият десен брат. Отсъствието на съответния син или брат се отбелязва със знака *. За дърво от Фиг. 3, *б* се получава следното представяне:

1: 2 *
2: 5 3
3: 6 4
4: * *
5: * *
6: * 7
7: * 8
8: **

Дърветата с корен се използват в програмистката практика, тъй като са естествени модели на различни информационни явления и процеси.