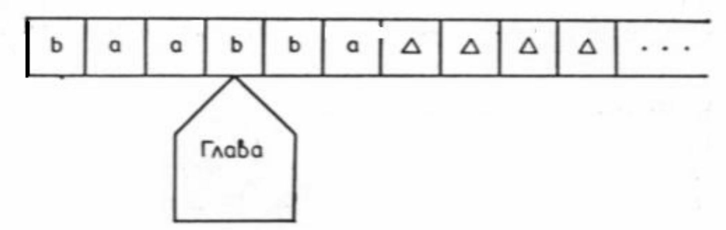
2.7. МАШИНА НА ТЮРИНГ

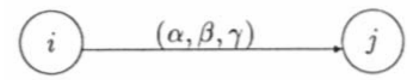
1. Определение

Машина на Тюринг M над азбука $\Sigma=\{a,b\}$ е дискретна система от три компонента:

- *Лента, разделена на клетки*: най отляво е с клетка, най-отдясно е безкрайна. Всяка клетка съдържа по един лентов символ (буква) над $\Sigma=\{a,b\}$, или символ от помощна азбука V, или празен символ (Δ) за празна клетка.
- *Четящо-записващо устройство* (*глава*): във всеки момент чете (и/или евентуално записва) един символ и се предвижва с една клетка наляво или надясно.



- *Програма, дефинирана с краен ориентиран граф* (*автомат*) с върхове - състоянията на автомата, начално състояние –START, крайно състояние – HALT (END). Всяка дъга, маркирана с тройка (α, β, γ), на автомата има вида



където $\alpha \in \Sigma \cup V \cup \{\Delta\}$; $\beta \in \Sigma \cup V \cup \{\Delta\}$; $\gamma \in \{L, R\}$; L – ляво, R – дясно.

2. Принцип на действие на машината на Тюринг

Ако машината е в състояние i, а главата е позиционирана върху символ α, то машинатата преминава в състояние j. Главата отпечатва символ β на мястото на α и се предвижва с една клетка наляво, ако $\gamma = L$ или надясно, ако $\gamma = R$.

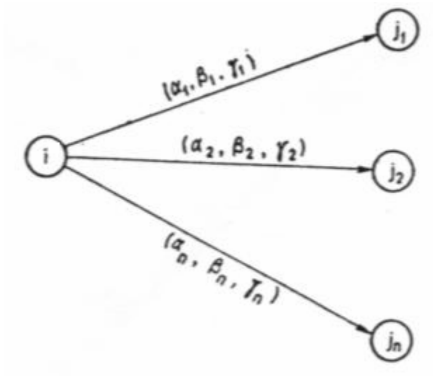
Машината на Тюринг е *детерминирана*, ако всички дъги, които произлизат от i са с различни стойности на α.

Входна дума w над Σ се намира в най-лявата част на лентата останалите клетки до безкрайност съдържат символ Δ. Първоначално главата е върху символа в най-лявата позиция. Действието на машината е в съответствие с инструкциите на програмата. От началното състояние на крайния автомат и в зависимост от символите върху лентата и маркировката на дъгите машината преминава от едно състояние към съседно състояние.

Машината на Тюринг спира:

- при достигане на крайно състояние "HALT", т.е M разпознава w, множеството от всички думи $\{w\}$, които се разпознават от M, се означава с **accept** (M);

- M е в състояние i и дъгите са маркирани със символи $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, различни от символа α върху лентата:



M не разпознава (отхвърля) думата w над Σ.

- когато главата е в най-лява позиция и следващата команда за движение наляво. M не разпознава (отхвърля) думата w. Множеството от всички думи $\{w\}$, което не се разпознава (отхвърля) от M, се означава с **reject**(M).

Във всички останали случаи машината на Тюринг зацикля. Множеството от думи, при които M зацикля, се бележи с **loop**(M). За машина на Тюринг над азбука $\Sigma=\{a,b\}$ трите множества от думи **accept** (M), **reject** (M), **loop**(M) дефинират следните релации:

1. **accept**(M) $\cap$ **reject**(M) $\cap$ **loop**(M) = $\varnothing$ - трите множества не се пресичат, т.е. няма дума, която да се разпознава и същевременно да се отхвърля и да предизвиква зацикляне.
2. **accept**(M) $\cup$ **reject**(M) $\cup$ **loop**(M) = Σ^* - трите множества дефинират всички възможни думи над азбуката $\Sigma=\{a,b\}$.

2.1. Изчисление с машината на Тюринг

Основно приложение на машината на Тюринг е като идентификатор на езиците, описани от всички видове граматики.

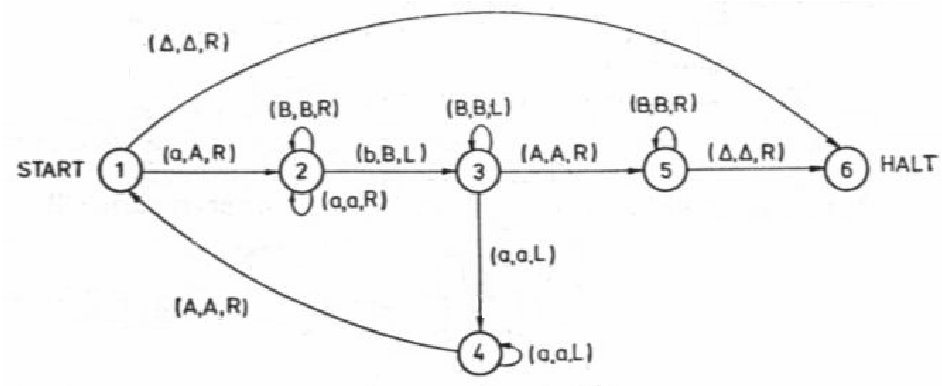
Пример:

Да се опише процесът на идентификация от машина на Тюринг M_1 над азбуката $\Sigma=\{a,b\}$ и помощната азбука $V=\{A,B\}$, която разпознава всяка дума от вида $a^n b^n$, $n \geq 0$ и отхвърля всички други думи над Σ. Трите множества от думи от езика $L(M_1)=\{a^n b^n | n \geq 0\}$ са

- **accept**$(M_1)=\{a^n b^n | n \geq 0\}$;
- **loop**$(M_1)=\varnothing$ - няма множество от думи, при които M зацикля;
- **reject**$(M_1)=\Sigma^* -$**accept**(M_1);

$$\mathbf{reject}(M_1) = \Sigma^* - \mathbf{accept}(M_1) - \mathbf{loop}(M_1).$$

Крайният ориентиран граф на крайния автомат е представен на фиг. 1.

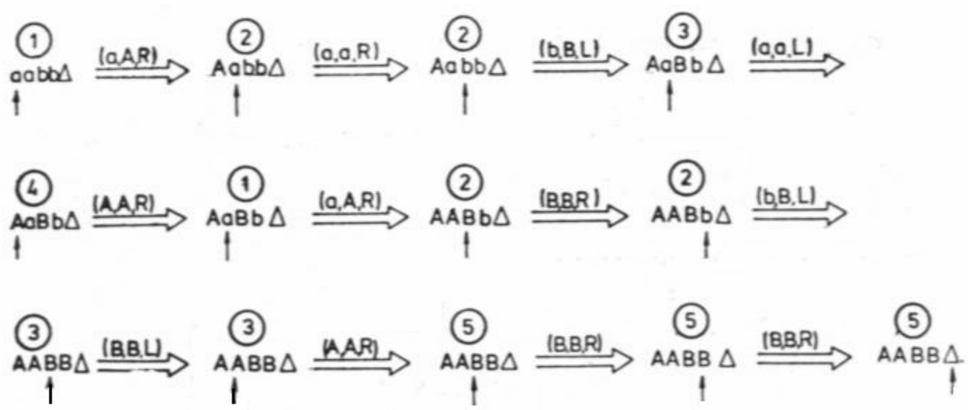


Фиг. 1.

Машината стартира се от състояние 1. Извършва се движение надясно. Машината заменя последователно по един символ от Σ със символ от V. Най-лявото a се заменя с A, а след това най-лявото b се заменя с B. От състояние 3 крайният автомат се връща към новото най-ляво a и тръгва от състояние 1. Този цикъл се повтаря n – пъти. Когато се стигне до състояние 5 всяко от n-те a-та ще бъде заместено с A, а всяко от най-левите b-та – с B. Ако символът непосредствено отдясно на n-тото B е символът на празната клетка Δ, входната дума е разпозната.

Принципът на идентификация на M се описва чрез анализ на крайния ориентиран граф за думата $aabb$ (фиг. 2). Следва да се отбележи, че за разпознаване на думите $a^n b^n$ са необходими не само краен автомат, но и външна памет, предоставена от лентата на машината на Тюринг.

В начално състояние на крайния автомат, в лявата част на лентата е записана входната дума. Върху най-лявата буква е позициониран четящо-записващата глава:



Фиг. 2.

При преминаване във всяко ново състояние се обозначава текущото съдържание на лентата (АaВbΔ). С вертикална стрелка към символ се посочва текущият символ, върху който е позиционирана главата. Символите (a,A,R) върху белязаната стрелка означават коя инструкция от програмата се изпълнява

Пример:

Да се построи машина на Тюринг над азбуката Σ={a,b}, която да намира най-големият общ делител на две положителни числа. Числата са записани върху лентата като поредици от a-та и b-та, ограничени със символа Δ в началото и в края. Резултатът да се запише върху лентата като поредица от $a...a$.

Евклидов алгоритъм:

1. Установява се главата върху последното m-то a от редицата.
2. Заменя се последователно първото срещнато наляво a с A и първото срещнато надясно b с B (сравняване на числата), докато се стигне левият ограничител Δ ($m \le n$) или десният ограничител Δ ($m > n$).
3. При $m \le n$ се заменят всички A с Δ и всички B с a. Ако върху лентата няма повече b крайният автомат преминава в състояние $HALT$. Резултатът е върху лентата ($m = n$). Ако върху лентата има b –та се преминава към т. 2.
4. При $m > n$ всички B-та се заменят с Δ, всички A-та се заменят с b (изваждане) и се преминава към точка 2.

Действие на алгоритъма:

- Изходно състояние: $\Delta\underbrace{aa...a}_{m}\underbrace{bb...b}_{n}\Delta$;
- $m < n$

$$\Delta\underbrace{aa...a}_{m}\underbrace{bb...b}_{m}\underbrace{bb...b}_{n-m}\Delta \Rightarrow \Delta\Delta...\Delta\underbrace{aa...a}_{m}\underbrace{bb...b}_{n-m}\Delta$$

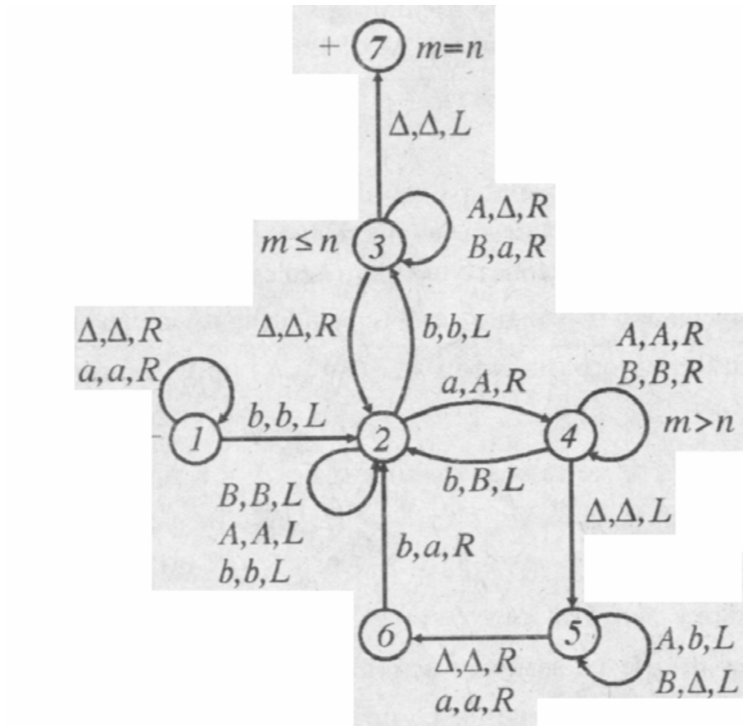
- $m = n$

$$\Delta\underbrace{aa...a}_{m}\underbrace{bb...b}_{n}\Delta \Rightarrow \underbrace{\Delta\Delta...\Delta}_{m}\underbrace{aa...a}_{m=n}\Delta \qquad (n-m)=\varnothing$$

- $m > n$

$$\Delta\underbrace{aa...a}_{m-n}\underbrace{aa...a}_{n}\underbrace{bb...b}_{n}\Delta \Rightarrow \underbrace{aa...a}_{m-n}\underbrace{bb...b}_{n}\underbrace{\Delta\Delta...\Delta}_{n}\Delta$$

Структура на крайния автомат



Резултати от действието на алгоритъма в различни състояния на автомата:

1. При $m=4$ и $n=6$

Δ	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	Δ	1
Δ	*A*	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*B*	*b*	*b*	Δ	2
Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	Δ	3
Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	*a*	*a*	*A*	*A*	*B*	*B*	Δ	2
Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	*a*	*a*	*b*	*b*	Δ	Δ	Δ	4
Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	*A*	*A*	*B*	*B*	Δ	Δ	Δ	2
Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	*a*	*a*	Δ	Δ	Δ	3

2. При $m=3$ и $n=2$

Δ	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	Δ
Δ	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	Δ
Δ	*b*	*b*	*b*	Δ	Δ	
Δ	*a*	*b*	*b*	Δ	Δ	
Δ	*A*	*B*	*b*	Δ	Δ	
Δ	Δ	*a*	*b*	Δ	Δ	
Δ	Δ	*A*	*B*	Δ	Δ	
Δ	Δ	Δ	*a*	Δ	Δ	

Машината на Тюринг намира приложение:
- като идентификатор на езици;
- като генератор и преобразувател на думи;
- като разделител на предикатни функции.