1	2	3
B-	B	B

9 (nueve)

Análisis Numérico — Parcial, 3ra. fecha — 13-12-2023

No exprese ningún cálculo en forma fraccionaria. El examen se aprueba con dos ejercicios correctamente resueltos en su totalidad y un ejercicio planteado. Salvo indicación contraria, use al menos 5 cifras significativas (preferible usar memorias de la calculadora)

Apellido, nombre(s): Jancumpa Salazar Mario Pascal

1. El volumen de agua de un tanque esférico de radio $R = 3$ está definida por la función $V(x) = \frac{\pi x^2(9-x)}{3}$. Se desea conocer el valor de x para el cuál el tanque esférico se encuentra con 30 litros de agua. Encuentre la función que modela el problema mencionado y halle la raíz por el método que crea correcto (justificar), interrumpa el algoritmo cuando la diferencia absoluta entre iteraciones consecutivas sea menor a 0.001. Exprese el resultado $x = \overline{x} \pm \Delta x$ (utilizando la convención mencionada en clase).

2. Se sabe que el tiempo de espera entre dos sucesos en un proceso de Poisson tiene una distribución de probabilidad exponencial, si se cumple la condición que la probabilidad de producirse el evento en un instante no depende del tiempo transcurrido. Siendo x una variable aleatoria positiva que representa el tiempo de espera hasta la próxima revisión del motor de un avión, su función de densidad entonces es:

$$f(x) = \alpha \cdot e^{-\beta \cdot x} \tag{1}$$

Si bien no conocemos los parámetros α y β, nos podemos valer de los siguientes datos para estimarlos:

x	$f_{(x)}$
0.05	0.0494
0.02	0.0498
1	0.039
2.75	0.0252
7	0.0086

(a) Estime los parámetros de la función de densidad de la variable aleatoria x. No está permitido descartar ningún dato.

(b) ¿Qué valor tiene la función de densidad para $x = 5$?

3. Estime a través de un polinomio de interpolación de orden mínimo 3, los valores con su cota de error correspondiente de $f(1,01)$ y $f(1,28)$ a partir de la siguiente tabla:

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30
$f(x)$	1,00000	1,02470	1,04881	1,07238	1,09544	1,11803	1,14017

1) nos piden que $\boxed{V_{(x)}(R) = 30\,l}$ / Datos

$R = 3$

$V_{max} = 2R = 6$

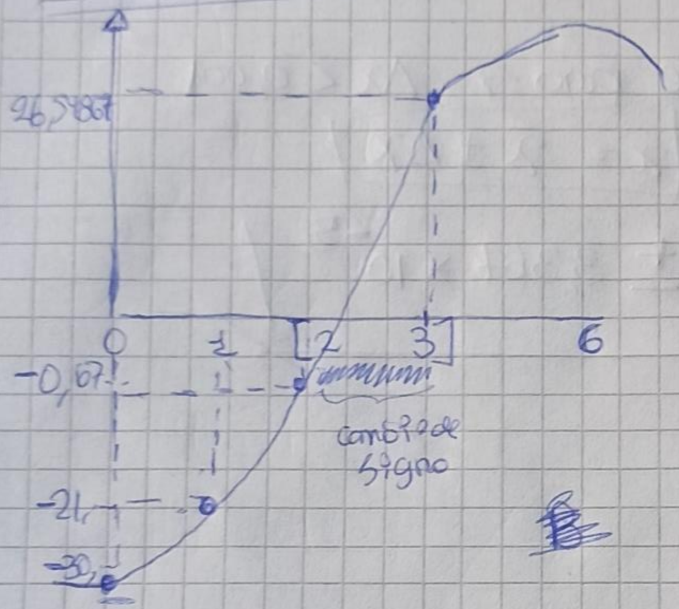
$\boxed{0 \leq x \leq 6}$ ↳ condición

y tenemos $\boxed{V_{(x)} = \frac{\pi x^2 (9-x)}{3}}$

Entonces nuestra función que modela al problema sería

$$\underbrace{\frac{\pi x^2 (9-x)}{3} - 30}_{F(x)} = 0 \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 6$$

Graficamos $F(x)$



Mediante el gráfico podemos tener un intervalo de interés, verificamos

$F(2) = -0{,}67847$

$F(3) = 26{,}54867$

Se refleja un cambio de signo y por el Método de Bolzano sabemos que Hay una Raíz en $I = [2,3]$

Buscamos la Raíz por medio del Método N-R donde tiene que cumplir

- $F \in C^2$
- $F' \neq 0$

Comprobemos

- $f(x) \in C^2 \; \forall \; I[0,2]$ debido a que es por ser de forma polinómica
- $f'(3) \neq 0$? ↳ $F'(x) = \frac{9\pi x^2 - \pi x^3 - 90}{3}$ ... $f'(3) = \underbrace{28{,}27434}_{\neq 0}$ ✓

$f'(x) = \frac{18\pi x - 3\pi x^2}{3}$ → $K = \underbrace{28{,}27434}_{\text{Innecesario}}$

Como verificamos que cumple con el Metodo N-R comenzamos con las iteraciones donde nuestra semilla de arranque sera obtenido por Biseccion de I [2,3)

$$x_0 = \frac{2+3}{2} \Rightarrow x_0 = 2,5$$

Metodo Newton

i	x_i
0	2,5
1	2,0437291
2	2,026939348
3	2,026905728
4	11

$> \Delta P$

$$P_n = P_{n-1} - \frac{F(P_{n-1})}{F'(P_{n-1})}$$

$$\Delta P = |P_{n} - P_{n-1}|$$

$$\Delta P = 3,367 \times 10^{-5}$$

Entonces cumple con el criterio de paro $\Rightarrow \Delta x < 0,001$

El Resultado expresado en $\boxed{x = \bar{x} \pm \Delta x}$

es $\Rightarrow$ $\boxed{2,026905728 \pm 3,367 \times 10^{-5}}$

2) $F(x) = \alpha \cdot e^{-\beta x}$ donde linealizamos

$\ln(y) = \ln(\alpha) \cdot -\beta x$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ln(\alpha) \\ -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(y_0) \\ \ln y_1 \\ \ln y_2 \end{bmatrix}$$

Entonces para los datos

x	$f(x)$
0.05	0.0494
0.02	0.0498
1	0.039
2.75	0.0252
7	0.0086

$$\rightsquigarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.05 \\ 1 & 0.02 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2.75 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}}_{A'} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ln(\alpha) \\ -\beta \end{bmatrix}}_{x'} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ln(0{,}0494) \\ \ln(0{,}0498) \\ \ln(0{,}039) \\ \ln(0{,}0252) \\ \ln(0{,}0086) \end{bmatrix}}_{B'}$$

donde la expresión no tiene solución. Entonces tomamos $A^T A \cdot x = A^T B$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}02 & 1 & 2{,}75 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.05 \\ 1 & 0.02 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2.75 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}} \cdot x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}02 & 1 & 2{,}75 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln(0{,}0494) \\ \ln(0{,}0498) \\ \ln(0{,}039) \\ \ln(0{,}0252) \\ \ln(0{,}0086) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10{,}82 \\ 10{,}82 & 57{,}5654 \end{bmatrix} \cdot x' = \begin{bmatrix} -17{,}6886 \\ -46{,}8690 \end{bmatrix}$$

; Hacemos que $\ln(\alpha) = x^*$, $-\beta = \beta^*$

$$5x^* + 10{,}82\beta^* = -17{,}6886$$
$$10{,}82x^* + 57{,}5654\beta^* = -46{,}8690$$

$\rightsquigarrow$ donde por medio de la calculadora obtenemos que

$\alpha^* = -2{,}9934 \longrightarrow \ln(\alpha) = \alpha^* \rightarrow \alpha = e^{-2{,}9934}$

$\beta^* = -0{,}2516 \longrightarrow -\beta = \beta^* \rightarrow \beta = 0{,}2516$

a) la estimación de los parámetros de α y β =

b) $F(5) \cong e^{-2{,}9934} \cdot e^{-0{,}2516 \cdot (5)} \cong 0{,}01424$

$\hookrightarrow$ Notar que está entre los valores $F(2{,}75)$ y $F(7)$ ✓

3)

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30
$f(x)$	1,00000	1,02470	1,04881	1,07238	1,09544	1,11803	1,14017

Nos pide $f(1{,}01)$ y $f(1{,}28)$ // Notar que no sabemos la Derivadas y nos pide un Polinomio de Grado 3. Entonces agarro 4 nodos y uno mas para estimar el error / Aplico el Metodo NR

Hago el calculo mediante Diferencias Divididas

$$\boxed{F(x_i; x_{i+1}) = \frac{F[x_{i+1}] - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}}$$

Mis nodos elegidos son arbitrariamente y armo la tabla

x_i	F_i				
1,00	1,00000				
		0,494			
1,05	1,02470		-0,1094		
		0,46665		0,0466667	
1,25	1,11803		-0,0954		$\boxed{-0,053267}$
		0,4428		0,04134	
1,30	1,14017		-0,093333		
		0,4568			
1,10	1,04881				

Para estimar el Error

Planteo el Polinomio

$$\begin{cases} P_n(x) = 1{,}00000 + 0{,}494(x-1{,}00) + (-0{,}1094)(x-1{,}05)(x-1{,}00) + 0{,}0466667(x-1{,}00)\cdot(x-1{,}05)(x-1{,}25) \\ \varepsilon(x) = -0{,}053267(x-1{,}00)(x-1{,}05)(x-1{,}25)(x-1{,}30) \end{cases}$$

Resolucion de la estimacion

$F(1{,}01) \cong 1{,}0049882 4 \pm 2{,}05824 \times 10^{-6}$ ✓

$F(1{,}28) \cong 1{,}1313648 \pm 1{,}48245 \times 10^{-6}$ ✓

Notar que en la aproximacion corresponde en la tabla, significa que es valido ✓