12.2 Método de Runge-Kutta de Punto Medio (Orden 2)

Este método mejora la precisión respecto a Euler utilizando una estimación intermedia para evaluar la pendiente. Aplicado al sistema:

$$\begin{cases} y' = u, \\ u' = f(x, y, u), \end{cases}$$

el método de punto medio toma la forma:

$$\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ u_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_i \\ u_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \tilde{m} \\ \tilde{k} \end{pmatrix},$$

donde se calculan los valores intermedios:

$$\begin{aligned} m_1 &= u_i, \\ k_1 &= f(x_i, y_i, u_i), \\ m_2 &= u_i + \frac{h}{2}k_1, \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}m_1, u_i + \frac{h}{2}k_1\right), \end{aligned}$$

y finalmente:

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= m_2, \\ \tilde{k} &= k_2. \end{aligned}$$

Es decir, el paso completo se expresa como:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \cdot m_2, \\ u_{i+1} &= u_i + h \cdot k_2. \end{aligned}$$

12.3 Método de Runge-Kutta de Orden 4

La versión de RK4 aplicada al sistema es:

$$\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ u_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_i \\ u_i \end{pmatrix} + \frac{h}{6} \begin{pmatrix} m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4 \\ k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

donde:

$$\begin{aligned} m_1 &= u_i, \\ m_2 &= u_i + \frac{1}{2}hk_1, \\ m_3 &= u_i + \frac{1}{2}hk_2, \\ m_4 &= u_i + hk_3, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i, u_i), \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}m_1, u_i + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}m_2, u_i + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + hm_3, u_i + hk_3). \end{aligned}$$