1	2	3	4	5

9 (nueve)

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

19-07-2023 Análisis Numérico I (75.12- 95.04) Integrador

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

Apellido: [redacted]
Padrón: [redacted]

1. Modelo de combate *Un modelo matemático sencillo para el combate de un ejército convencional contra la guerrilla está dado por el sistema (1) donde x_1 y x_2 son la fuerza de la guerrilla y las tropas convencionales, respectivamente, y 0.1 y 1 son los coeficientes de eficacia en combate.*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -0.1x_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \end{cases} \qquad (1)$$

   a) Plantear el problema de valores iniciales sabiendo que: $x_1(0) = 10$ y $x_2(0) = 15$.

   b) Aplicar dos iteraciones del método de Runge Kutta del punto medio, con $h = 0.1$. Para saber ¿Quién va ganando el conflicto, las tropas convencionales o la guerrilla?

2. *a)* Aproximar mediante el método de *Simpson* $\frac{1}{3}$ la masa del alambre cuya densidad de masa $\delta(x, y, z)$ es proporcional a la distancia de un punto del alambre al plano xy El alambre tiene la forma de la curva $\sigma(t) = (cos(t), sen(t), t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.
   $(M = \int_a^b \delta(\sigma(t))\|\sigma^{'}(t)dt\|)$ Tomar $\pi = 3$ y una partición del intervalo con $n = 12$.

   b) Indicar si el resultado de la integral es exacto. Justificar la respuesta.

3. Hallar una aproximación de la solución, en el primer cuadrante, del sistema que figura a continuación : $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$ Utilizar tres iteraciones del *método de Newton para sistemas no lineales*, para la estimación usar como semilla $(x_0, y_0)^t = (1.9, 0.6)^t$.

4. El potencial electroestático u, entre dos esferas concéntricas de radio $r = 1$ y $r = 4$ se determina a partir del siguiente problema de valores en la frontera: $\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du(r)}{dr} = 0$, $u(1) = 50$, $u(4) = 100$. Hallar el potencial en los nodos intermedios con $n = 6$, usando el método de diferencias finitas.

5. La población de una especie sigue la siguiente función $P(t) = a + \frac{t}{e^{\frac{t}{2}}}$ con $t \geq 0$. Donde $P(t)$ es el número de individuos de la población (medida en miles) y t el tiempo (medido en meses) y a es una constante positiva.

   a) Calcular a sabiendo que inicialmente había 3000 individuos.

   b) ¿En qué momento alcanza la población un máximo? Estimar este tiempo usando dos iteraciones del *método de NEWTON RAPHSON*, tomar como semilla $t = 1.9$. Para el valor de t estimado, ¿Cuánto es el valor de dicho máximo?

Ej 1, 5 [redacted] 1/4

19/07/19

*Ejercicio #1:

(resultados con 4 decimales y redondeo)

a)
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -0{,}1x_1x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 \\ x_{1_0} = 10 \\ x_{2_0} = 15 \end{cases}$$

sea: $f(x_1; x_2) = -0{,}1x_1x_2$

$g(x_1, x_2) = x_1$

$$\begin{pmatrix} x_{1_{n+1}} \\ x_{2_{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1_n} \\ x_{2_n} \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$m_1 = f(x_{1_n}, x_{2_n})$

$k_1 = g(x_{1_n}, x_{2_n})$

$m_2 = f\left(x_{1_n} + \frac{hm_1}{2}, x_{2_n} + \frac{hk_1}{2}\right)$

$k_2 = g\left(x_{1_n} + \frac{hm_1}{2}, x_{2_n} + \frac{hk_1}{2}\right)$

$h = 0{,}1$

n	0	1	2
t	0	0,1	0,2
x_1	10	8,5663	7,2770
x_2	15	15,9250	16,7134
aux m_1	\	-15	-13,6418
k_1	\	10	8,5663
m_2	\	-14,3375	-12,8933
k_2	\	9,25	7,8842

b) las tropas convencionales van ganando

*Ejercicio #2: $\delta(x,y,z) = k|z|$, con $k>0$ la cte de proporción

$\vec{\sigma}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$\vec{\sigma}'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1)$

$\|\vec{\sigma}'(t)\|^2 = \operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) + 1 = 2$

notar que $\pi \approx 3$, $t \geq 0$

$\therefore M = \int_0^{2\pi} \delta(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} k|t| \cdot \sqrt{2}\, dt = k\sqrt{2} \int_0^6 t\, dt$; sea $f(t) = t$

$\therefore \frac{M}{k\sqrt{2}} = \int_0^6 f(t) dt$; sea $n = 12$, $h = 0,5$ $\rightsquigarrow \int_0^6 f(t)dt \approx \frac{h}{3}\left(f(0) + f(6) + 4\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} f(t_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(t_{2k})\right)$

$\rightsquigarrow \frac{M}{k\sqrt{2}} \approx \frac{0,5}{3}\left(0 + 6 + 4(0,5+1,5+2,5+3,5+4,5+5,5) + 2(1+2+3+4+5)\right) =$

$= \frac{0,5}{3}(6 + 4 \cdot 18 + 2 \cdot 15) = 18,0000$

nota: $\sqrt{2} \approx 1,4142$

a) $M = 18,0000 \cdot k \cdot 1,4142 = k \cdot 25,4556$

b) El resultado de la integral $\int_0^6 f(t)dt$ es exacto, pues el método de Simpson 1/3 aproxima la integral por medio de su polinomio de Lagrange de grado 2* y $f(t)$ es un polinomio de grado uno, por lo que coincide con su P.L. Sin embargo; el resultado final para la integral original $\int_0^6 \delta(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|dt$ no es exacto, pues tomamos aproximaciones para π y $\sqrt{2}$.

Nota: esta parte está mal y no hacía falta

Ej 3,2 [redacted] 4/4

19/7/?

***Ejercicio #3:** (resultados con 4 decimales y redondeo)

$$\begin{cases} x^2+2y^2-4=0 \\ xy-1=0 \end{cases}$$

sea $\vec{F}((x_0,y_0)^t)=\begin{pmatrix} x^2+2y^2-4 \\ xy-1 \end{pmatrix}$, busco $\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\vec{0}$

$$J_F\begin{pmatrix} x_0 \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & 4y \\ y & x \end{pmatrix} \qquad \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1,9 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} J_F(x_n,y_n)\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=-\vec{F}(x_n,y_n) \\ (x_{n+1},y_{n+1})^t=(x_n,y_n)^t+(u_n,v_n)^t \end{cases}$$

sea $\bar{x}_n=(x_n,y_n)^t$

$\bar{y}_n=(u_n,v_n)^t$

$$J_F(\bar{x}_0)\bar{y}_0=-\vec{F}(\bar{x}_0) \longrightarrow \begin{pmatrix} 3,8 & 2,4 \\ 0,6 & 1,9 \end{pmatrix}\bar{y}_0=\begin{pmatrix} -0,33 \\ -0,14 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{y}_0=\begin{pmatrix} -0,0503 \\ -0,0578 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_1=\begin{pmatrix} 1,9 \\ 0,6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -0,0503 \\ -0,0578 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1,8497 \\ 0,5422 \end{pmatrix}$$

$$J_F(\bar{x}_1)\bar{y}_1=-\vec{F}(\bar{x}_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 3,6994 & 2,1688 \\ 0,5422 & 1,8497 \end{pmatrix}\bar{y}_1=\begin{pmatrix} -0,0094 \\ -0,0029 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{y}_1=\begin{pmatrix} -0,0020 \\ -0,0010 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_2=\begin{pmatrix} 1,8497 \\ 0,5422 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -0,0020 \\ -0,0010 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1,8477 \\ 0,5412 \end{pmatrix}$$

$$J_F(\bar{x}_2)\bar{y}_2=-\vec{F}(\bar{x}_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 3,6954 & 2,1648 \\ 0,5412 & 1,8477 \end{pmatrix}\bar{y}_2=\begin{pmatrix} 0,0002 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{y}_2=\begin{pmatrix} 0,0001 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_3=\begin{pmatrix} 1,8477 \\ 0,5412 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0,0001 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1,8478 \\ 0,5412 \end{pmatrix} \rightarrow \times$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1,8478 \\ 0,5412 \end{pmatrix}$$

Ejercicio #4:

sea $u_i = u(r_i)$; $r_i = r_0 + hi$; $h = \frac{4-1}{6} = 0{,}5$
$r_0 = 1$ $\qquad n = 6$

$$\begin{cases} u_i'' + \frac{2}{r_i} u_i' = 0 \\ u_0 = 50 \\ u_6 = 100 \end{cases}$$

usando dif. finitas centradas, v.g:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{2}{r_i}\,\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0$$

$$\rightsquigarrow u_{i+1}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{r_i h}\right) - u_i\left(\frac{2}{h^2}\right) + u_{i-1}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{r_i h}\right) = 0 \ ; i = 1, \cdots, 5$$

$$\therefore \begin{cases} u_2\left(\frac{1}{(0{,}5)^2} + \frac{1}{1{,}5\cdot 0{,}5}\right) - u_1\left(\frac{2}{(0{,}5)^2}\right) + u_0\left(\frac{1}{(0{,}5)^2} - \frac{1}{1{,}5\cdot 0{,}5}\right) = 0 \\ u_3\left(\frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{2\cdot 0{,}5}\right) - u_2\left(\frac{2}{0{,}25}\right) + u_1\left(\frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{2\cdot 0{,}5}\right) = 0 \\ u_4\left(\frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{2{,}5\cdot 0{,}5}\right) - u_3\left(\frac{2}{0{,}25}\right) + u_2\left(\frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{2{,}5\cdot 0{,}5}\right) = 0 \\ u_5\left(\frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{3\cdot 0{,}5}\right) - u_4\left(\frac{2}{0{,}25}\right) + u_3\left(\frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{3\cdot 0{,}5}\right) \\ u_6\left(\frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{3{,}5\cdot 0{,}5}\right) - u_5\left(\frac{2}{0{,}25}\right) + u_4\left(\frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{3{,}5\cdot 0{,}5}\right) \end{cases}$$

, Despejando u_0 ; u_6 ; y simplif.:

$$u_2\cdot 5{,}3333 - 8u_1 = -133{,}3333$$
$$u_3\cdot 5 \quad - 8u_2 + u_1\cdot 3 = 0$$
$$u_4\cdot 4{,}8 \quad - 8u_3 + u_2\cdot 3{,}2 = 0$$
$$u_5\cdot 4{,}6667 - 8u_4 + u_3\cdot 3{,}3333 = 0$$
$$-8u_5 + 3{,}4286\cdot u_4 = -457{,}1429$$

↗

Nota → Resultados con 4 decimales

$$\begin{pmatrix} -8 & 5{,}3333 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}2 & -8 & 4{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}3333 & -8 & 4{,}6667 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}4286 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -133{,}3833 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -457{,}1429 \end{pmatrix}$$

Nota: las ecuaciones están bien pero resolví el sistema mal, los resultados correctos (de WolframAlpha) son:

u_1 = u(1,5) = 72,2219
u_2 = u(2,0) = 83,3334
u_3 = u(2,5) = 90,0003
u_4 = u(3,0) = 94,4449
u_5 = u(3,5) = 97,6196

Ejercicio #5: $P(t) = a + \dfrac{t}{e^{t/2}}$; $P(0) = 3000$; $t \geq 0$

$\rightsquigarrow P(0) = a + 0e^{-0/2} = a = 3000$

La función $P(t)$ alcanza un máximo cuando $P'(t) = 0$

a) $P(t) = 3000 + t e^{-t/2}$

$P'(t) = -\dfrac{t}{2}e^{-t/2} + e^{-t/2} = e^{-t/2}\left(1 - \frac{t}{2}\right)$; sea $f(t) = e^{-t/2}\left(1-\frac{t}{2}\right)$

sea: $\begin{cases} t_{n+1} = t_n - \dfrac{f(t)}{f'(t)} \\ t_0 = 1{,}9 \end{cases}$

$f'(t) = -\dfrac{e^{-t/2}}{2} + \dfrac{t}{4}e^{-t/2} - \dfrac{1}{2}e^{-t/2} = e^{-t/2}\left(\frac{t}{4} - 1\right)$

$\rightarrow f'(t) = e^{-t/2}\left(\frac{t}{4} - 1\right)$

$\therefore t_{n+1} = t_n - \dfrac{e^{-t/2}\left(1 - \frac{t}{2}\right)}{e^{-t/2}\left(\frac{t}{4} - 1\right)}$

$t_{n+1} = t_n - \dfrac{1 - \frac{t}{2}}{\frac{t}{4} - 1}$

n	0	1	2	3
t_n	1,9	1,995238	1,999989	2,000000

$\uparrow = \tilde{t}$

$\therefore P(t)$ alcanza un máximo en $\tilde{t} = 1{,}99989$; y $P(\tilde{t}) \cong 3000{,}735760$

Nota: como P está medido en miles, P(0) = a = 3

$P(1{,}99989) = 3{,}735$

mal