1	2	3	4	5
B/5	B	B	R/M	B

8 (5 ptos)

FINAL - ANÁLISIS NUMÉRICO

① Dado el sistema lineal

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

ⓐ Hallar $\rho(T_{GS})$. Siendo T_{GS} la matriz del método de Gauss Seidel. Justificar convergencia.

→ $\rho(T_{GS})$ se trata del autovalor de mayor módulo de la matriz T_{GS}.

→ Escribo el sistema matricialmente como $Ax = b$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}}_{b} \longrightarrow Ax = b$$

→ Reescribo la matriz A como $A = D - L - U$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}}_{L} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

→ Opero matricialmente

$$Ax = b \Rightarrow (D - L - U)x = b \Rightarrow (D-L)x - Ux = b$$

$$\Rightarrow (D-L)x = Ux + b \Rightarrow x = \underbrace{(D-L)^{-1}U}_{T_{GS}}x + \underbrace{(D-L)^{-1}b}_{c_{GS}}$$

$$\rightarrow x = (D-L)^{-1}Ux + (D-L)^{-1}b$$

$$\underline{\underline{x = T_{GS}x + c_{GS}}}$$ ~ Método de Gauss Seidel

NOTA

→ Calculo la matriz $T_{GS} = (D-L)^{-1} U$

$$\left(\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.3 & -0.1 \\ 0 & -0,06 & 0.28 \\ 0 & 0,048 & -0.074 \end{bmatrix}$$

→ Ahora calculo los autovalores de T_{GS}

$$\det(T_{GS} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -0.3 & -0.1 \\ 0 & -0.06-\lambda & 0.28 \\ 0 & 0.048 & -0,074-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} -0.06-\lambda & 0.28 \\ 0.48 & -0.074-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(-\lambda)\left[(-0.06-\lambda)(-0.074-\lambda) - 0.28 \times 0.48\right] = 0$$

$$(-\lambda)\left[(-0.06-\lambda)(-0.074-\lambda) - 0.1344\right]$$

$$(-\lambda)\left[0,00444 - 0,\ \lambda + \lambda^2 - 0.1344\right]$$

$$(-\lambda)(\lambda - 0,433672878 7)(\lambda + 0,29967 28787)$$

→ Los autovalores son $\sigma(T_{GS}) = \{0; 0,4337; 0.2997\}$

Por lo tanto el radio espectral es $\boxed{\rho(T_{GS}) = 0.4337}$

→ El método va a converger porque el sistema está dispuesto como diagonal dominante y además $\rho(T_{GS}) < 1$

(6) Realizar 2 iteraciones del método de Gauss Seidel. estimar error relativo y usar $x^{(0)} = [0\,0\,0]^T$ como semilla. 2 decimales al menos y redondeo.

Obtengo T_{GS} y C_{GS}

$$T_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & -0.3 & -0.1 \\ 0 & -0.06 & 0.28 \\ 0 & 0.048 & -0.074 \end{bmatrix}, \quad C_{GS} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0.78 \\ 1.026 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ $(D-L)^{-1} U$ $\qquad$ $\downarrow$ $(D-L)^{-1} b$

HOJA N°

FECHA

Iteración 1

$$X^{(1)} = T_{GS}\, X^{(0)} + C_{GS} \rightarrow X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0.78 \\ 1.026 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty}{\|X^{(1)}\|_\infty} = \frac{|1.026 - 0|}{|1.026|} = 1$$

Iteración 2

$$X^{(2)} = T_{GS}\, X^{(1)} + C_{GS} \rightarrow X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,06340 \\ 1,02048 \\ 0,98752 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{\|X^{(2)} - X^{(1)}\|_\infty}{\|X^{(2)}\|_\infty} = \frac{|1.0634 - 1.026|}{|1.0634|} = 0,03517$$

→ Solución aproximada → $\boxed{X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.06340 \\ 1.02048 \\ 0.98752 \end{bmatrix}}$

3. Dada la siguiente tabla correspondiente a los valores de la posición de un móvil, calcular el valor aproximado de la velocidad en $t = 1$ usando extrapolación de Richardson.

t	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2.00
x(t)	1.0000	1.0645	1.2840	1.7551	2.7183	4.7707	9.4817	21.7809	54.5982

→ La extrapolación de Richardson se emplea utilizando un árbol de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc} R(h) & & \\ & R^1(h) & \\ R(h/2) & & R^2(h) \\ & R^1(h/2) & \\ R(h/4) & & \end{array}$$

Para calcular los $R(h)$, se usa la fórmula:

$$R(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

NOTA

→ Para calcular los $R^{(k)}(h)$ se usa la fórmula

$$R^{(k)}(h) = \frac{4^{(k-1)}(h/2) - R^{(k-1)}(h)}{4^{(k)} - 1}$$

→ Primero calculo los $R(h)$, $R(h/2)$, $R(h/4)$ donde $h = 1$ y t es el valor de la derivada a aproximar. → $t = 1$

- $R(1) = \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} = \frac{x(2) - x(0)}{2} = \boxed{26,7991}$

- $R(0.5) = \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} = \frac{x(1.5) - x(0.5)}{1} = \boxed{8,2037}$

- $R(0.25) = \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} = \frac{x(1.25) - x(0.75)}{0.5} = \boxed{6,0312}$

→ Ahora calculo los $R^1(h)$

- $R^1(1) = \frac{4\,R(h/2) - R(h)}{4-1} = \frac{4R(0.5) - R(1)}{4-1} = \boxed{2,0052333333}$

- $R^1(0.5) = \frac{4\,R(h/2) - R(h)}{4-1} = \frac{4R(0.25) - R(0.5)}{4-1} = \boxed{5,3070333333}$

→ Finalmente calculo $R^2(h) \cong f'(1)$

$$R^2(1) = \frac{4^2 R^1(h/2) - R^1(h)}{4^2 - 1} = \frac{16\,R^1(0.5) - R^1(1)}{16-1} = \boxed{5,527153333}$$

Por lo tanto, $\boxed{f'(1) \cong 5,527153333}$

NOTA

HOJA N°

FECHA

② ~~Un lago de volumen $V = 10 Km^3$ tiene contaminantes A y B distribuidos en cantidades iniciales 1 y 7 tn~~

→ Sistema de ecuaciones del problema.

$$\begin{cases} A'(t) = 6 - 0.6\,A(t) \\ B'(t) = 2 - 0.6\,B(t) \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} f_A(t_i, A_i) &= 6 - 0.6\,A_i \\ f_B(t_i, B_i) &= 2 - 0.6\,B_i \end{aligned}$$

→ Las condiciones iniciales se indican al comienzo del inciso. $A(0) = 1$, $B(0) = 7$

→ El tiempo pedido es de $t = 0.5$ años y se piden 5 iteraciones, por lo tanto. $h = \frac{0.5 - 0}{5} = 0.1$

→ Defino el método de Euler

$$\begin{bmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_A(t_i, A_i) \\ f_B(t_i, B_i) \end{bmatrix}$$

$[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5]$

$[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]$

→ Iteración 1 $A(0.1) \cong A_1$, $B(0.1) \cong B_1$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_A(t_0, A_0) \\ f_B(t_0, B_0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 6 - 0.6\,A_0 \\ 2 - 0.6\,B_0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.54 \\ 6,78 \end{bmatrix}$$

→ Iteración 2

$A(0.2) \cong A_2$, $B(0.2) = B_2$

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_A(t_1, A_1) \\ f_B(t_1, B_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.54 \\ 6.78 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 6 - 0.6\,A_1 \\ 2 - 0.6\,B_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0476 \\ 6,5732 \end{bmatrix}$$

NOTA

Iteración 3 $\quad A(0.3) \cong A_3, \quad B(0.3) \cong B_3$

$$\begin{bmatrix} A_3 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_A(t_2, A_2) \\ f_B(t_2, B_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_3 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0476 \\ 6.5732 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 6 - 0.6 A_2 \\ 2 - 0.6 B_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_3 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,524744 \\ 6.378808 \end{bmatrix}$$

Iteración 4 $\quad A(0.4) \cong A_4, \quad B(0.4) \cong B_4$

$$\begin{bmatrix} A_4 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 \\ B_3 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_A(t_3, A_3) \\ f_B(t_3, B_3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_4 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 \\ B_3 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 6 - 0.6 A_3 \\ 2 - 0.6 B_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A_4 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,97325936 \\ 6.19607952 \end{bmatrix}$$

Iteración 5 $\quad A(0.5) \cong A_5, \quad B(0.5) \cong B_5$

$$\begin{bmatrix} A_5 \\ B_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_4 \\ B_4 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_A(t_4, A_4) \\ f_B(t_4, B_4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_5 \\ B_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_4 \\ B_4 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 6 - 0.6 A_4 \\ 2 - 0.6 B_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A_5 \\ B_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,394863798 \\ 6,024314749 \end{bmatrix}$$

→ Las cantidades de contaminantes varían en medio año

(A) → Aproximadamente, se triplica su concentración.

(B) → Su concentración se redujo en casi 1 tn

$$\begin{bmatrix} A(0.5) \\ B(0.5) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 3.39486 \\ 6.02431 \end{bmatrix}$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

(4). Se sabe que $f(x) = x^2 - 5x - e^x$ tiene raíz en $[-1,0]$

(0) (a) Hallar dicha raíz usando $g(x)$ admisible. Realizar 3 iteraciones y usar $x_0 = -0.5$. Hallar error relativo

→ La raíz de $f(x_0)$ cumple que

$$f(x) = x_0^2 - 5x_0 - e^x = 0.$$

→ Para obtener $g(x)$ tal que $g(x_0) = x_0$, despejo x

$$x^2 - 5x - e^x = 0 \rightarrow x = \frac{x^2 - e^x}{5}$$

→ Por lo tanto, $g(x) = \frac{x^2 - e^x}{5}$ ✓

→ Verifico que $g(x)$ sea admisible

$|g'(x)| \leq K \rightarrow |g'(b) - g'(a)| \leq K$, con $K < 1$

no es la única condición

$$g'(x) = \frac{1}{5}(2x - e^x) \qquad |-0.2 - (-0.47358)| \leq 0.27358$$

$$\rightarrow K = 0.27358 < 1 \; !$$

→ $g(x)$ es admisible

→ Aplico el método.

$x_1 = g(x_0) = -0.0713$

$x_2 = g(x_1) = -0.1852$

- $x_1 = x_0 - g(x_0) \rightarrow x_1 = -0,4286938681$

no

- $x_2 = x_1 - g(x_1) \rightarrow x_2 = -0,3351776944$

- $x_3 = x_2 - g(x_2) \rightarrow x_3 = -0.2146043146$

(0) Errores → No me alcanzó el tiempo.

$$\frac{|x_1 - x_2|}{|x_1|}, \quad \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|}, \quad \frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|}$$

NOTA

FECHA

(5) Sistema que se modela como

$$\frac{d^2 T}{dx} = -f(x)$$

- $f(x)$ es una función que define el calor a lo largo de la barra.
- Los extremos son fijos $T(0,t) = T_1$, $T(L,t) = T_2$
- Resolver PVF para una barra de 10cm con

$T(0,t) = 75$, $T(10,t) = 150$ y $f(x) = 10$

→ El sistema se puede escribir como.

$$\begin{cases} T'' = -10 \\ T(0) = 75, \quad T(10) = 150 \end{cases}$$

→ Utilizo el método de diferencias finitas donde

$$\begin{cases} T'' + P(x)T' + Q(x)T = f(x) \\ T(0) = \alpha, \quad T(10) = 150 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} P(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \\ f(x) = -10 \end{array}$$

→ Utilizo $N = 5$, por lo tanto

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{10-0}{5} = \boxed{2} \rightarrow \boxed{h = 2}$$

→ La formula de recurrencia es:

$$\left(1 + \frac{h}{2}P_i\right)T_{i+1} + \left(-2 + h^2 Q_i\right)T_i + \left(1 - \frac{h}{2}P_i\right)T_{i-1} = h^2 f_i$$

→ Planteo para $i = 1, 2, 3, 4$

$2^2 \times (-10) = -40$

$$\begin{cases} T_2 - 2T_1 + T_0 = 40 \\ T_3 - 2T_2 + T_1 = -40 \\ T_4 - 2T_3 + T_2 = -40 \\ T_5 - 2T_4 + T_3 = -40 \end{cases}$$

Conozco T_5 y T_0

Por lo que me queda un sistema de 4x4

NOTA

$$\begin{cases} T_2 - 2T_1 + 75 = -40 \\ T_3 - 2T_2 + T_1 = -40 \\ T_4 - 2T_3 + T_2 = -40 \\ 100 - 2T_4 + T_3 = -40 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2T_1 + T_2 = -115 \\ T_1 - 2T_2 + T_3 = -40 \\ T_2 - 2T_3 + T_4 = -40 \\ T_3 - 2T_4 = -140 \end{cases}$$

→ Resuelvo con la calculadora y obtengo

$T(0) = 75$

$T(2) \cong T_1 = 170$

$T(4) \cong T_2 = 225$

$T(6) \cong T_3 = 240$

$T(8) \cong T_4 = 215$

$T(10) = 150$