También se puede obtener una fórmula para la derivada primera:

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}.$$

Estas son las fórmulas clásicas de diferencias finitas que permiten aproximar derivadas a partir de valores discretos de la función.

14.3 Método de Diferencias Finitas

Consideremos el problema:

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x), \\ y(a) = \alpha, \\ y'(b) = \beta. \end{cases}$$

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de ancho h, con nodos $x_i = a + ih$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Los nodos interiores son:

$$x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = a + (n-1)h.$$

Definimos:

$$y_i = y(x_i), \quad P_i = P(x_i), \quad Q_i = Q(x_i), \quad f_i = f(x_i).$$

Reemplazando las derivadas con sus aproximaciones en diferencias finitas:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + P_i \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + Q_i y_i = f_i.$$

Multiplicando por h^2 para simplificar:

$$\left(1 + \frac{h}{2}P_i\right) y_{i+1} + \left(-2 + h^2 Q_i\right) y_i + \left(1 - \frac{h}{2}P_i\right) y_{i-1} = h^2 f_i.$$

Esta es la **ecuación de diferencias finitas**, que permite construir un sistema lineal para los valores $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

14.4 Representación Matricial

El sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial:

$$A \cdot \vec{y} = \vec{b},$$

donde:

- A es una matriz tridiagonal de tamaño $(n-1) \times (n-1)$, - $\vec{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}]^T$, - $\vec{b}$ contiene los valores del lado derecho $h^2 f_i$, corregidos con las condiciones de frontera en las primeras y últimas filas si corresponde.

Este sistema se puede resolver con métodos directos (eliminación de Gauss, factorización LU) o con métodos iterativos si el tamaño es muy grande.