Víctor Zacarías; 6 hojas de cuaderno

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

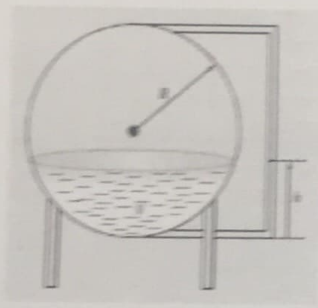
8 (ocho)

1	2	3	4	5
B	B	B	R	R

10-08-2022 Análisis Numérico I (75.12-95.04) Integrador

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

1. Suponga que está diseñando un tanque esférico de almacenamiento de agua para un poblado pequeño de un país en desarrollo. El volumen del líquido que puede contener se calcula como: $V = \frac{\pi h^2(3R-h)}{3}$ donde V = volumen (m^3), h = profundidad del agua en el tanque (m) y R = radio del tanque (m).



Si $R = 3m$, ¿a qué profundidad debe llenarse el tanque de modo que contenga $30m^3$? Hacer tres iteraciones del método de Newton-Raphson para determinar la respuesta. Encuentrar el error relativo aproximado después de cada iteración. Trabajar con 2 decimales ($\pi = 3.14$).

2. Usar tres iteraciones del método de Newton para sistemas no lineales, para obtener una aproximación de la intersección de las circunferencias:
$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$
Tomar como semilla $(x_0, y_0)^t = (3.8, 1.7)$

3. Un automóvil diesel acelera gradualmente, de tal manera que para los primeros 10 segundos la aceleración está dada por: $a(t) = 0.12t^2 + 0.6t$, $(\frac{m}{s^2})$. Si el auto parte del reposo, con velocidad inicial nula. Se pide:

   a) Plantear el problema de valores iniciales.

   b) Usar 2 iteraciones del método de Runge Kutta del punto medio, para obtener la posición y la velocidad del móvil al cabo de 1 segundo.

4. Se desea aproximar la función $f(x) = 3^x - 1$ mediante un trazador cúbico natural de la forma: $S(x) = \begin{cases} S_0 = a_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3 & x_0 \le x \le x_1 \\ S_1 = a_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3 & x_1 \le x \le x_2 \end{cases}$ Tomar $(x_0, x_1, x_2) = (0, 1, 3)$. Determinar los coeficientes y calcular $S(2.5)$

5. Se observa que ciertos datos medidos tienen un comportamiento aproximadamente lineal en un gráfico $x - \log(y)$. (Donde $\log(y)$, es el logaritmo decimal de y)

   a) Use la aproximación de cuadrados mínimos para determinar una ecuación que ajuste los datos.

   b) Estime el valor de y para $x_0 = 3.0$

x	0.5	1.0	1.5	2.0	4.0
y	5.655	4.582	3.240	2.868	0.980

Alumno: Victor Zacarías; DNI: 95.979.449; Padrón: 107080

(1)

- Resolución ejercicio #1:

$$V = \frac{\pi \cdot h^2 \cdot (3R - h)}{3} \quad ; \quad R = 3m \quad ; \quad \pi = 3{,}14$$

¿A qué altura h debe llenarse el tanque de modo que tenga $30m^3$?

Usar Newton - Raphson (3 Iteraciones)

$$V = \frac{(3{,}14) \cdot h^2 (9m - h)}{3}$$

$$30m^3 = \frac{28{,}26\, h^2 m - 3{,}14\, h^3}{3}$$

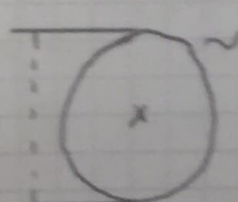
Para hallar h / $V = 30m^3$ basta con hallar el cero de la función:

$$F(h) = \frac{28{,}26\, h^2 m - 3{,}14\, h^3}{3} - 30m^3 \Rightarrow F(h) = 9{,}42\, h^2 m - 1{,}05\, h^3 - 30m^3$$

Se aplica el método de Newton - Raphson para estimar dicho cero

$$P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f'(P_{n-1})}$$

C.A Determinación de la semilla P_0



Esfera de $r = 3m$, $\therefore D = 6m$

Luego $0 \leq h \leq 6$

↳ La esfera puede estar vacía o llena

$$P_0 = \left(\frac{6 + 0}{2}\right)m \Rightarrow P_0 = 3m$$

Fin C.A

↗ Se calcula a partir de $n = 1$

$$P_n = P_{n-1} - \frac{9,42\,h^2 \cdot m - 1,05\,h^3 - 30\,m^3}{18,84\,h\,m - 3,15\,h^2} \quad ; \quad h = P_{n-1}$$

$P_0 = 3m$; $\Delta I = -$

$P_1 = 2,06$; $\Delta I = 0,94$

$P_2 = 2,02$; $\Delta I = 0.04$

$P_3 = 2,03$; $\Delta I = 0,01$

Alumno: Víctor Zacarías ; Padrón: 107080; DNI: 95.979.449

2

- Resolución ejercicio #2

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 5 & (I) \\ x^2 + y^2 = 16 & (II) \end{cases}$$

Tomando como semilla $[x_0 ; y_0]^T = [3,8 ; 1,7]$

Usar 3 iteraciones del método de Newton para sistemas no lineales:

~~Se escribe una función vectorial que tiene por componentes a I y II.~~

~~F(x;y) = ((x-4)^2 + y~~

Si se reescribe el sistema de la forma:

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 - 5 = 0 & (I) \\ x^2 + y^2 - 16 = 0 & (II) \end{cases}$$

Y se usa (I) y (II) como las componentes de una Función Vectorial $\overline{F}$.

$$\overline{F}(x;y) = \left((x-4)^2 + (y-4)^2 - 5 \,;\, x^2 + y^2 - 16 \right)$$

El problema de resolver el sistema es equivalente a hallar los ceros de $\overline{F}$

Es decir $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \overline{F}(x;y) = \overline{0}$

Estos pueden ser aproximados a través del Método de Newton.

Método de Newton - 3 iteraciones

$$x^{(K)} = x^{(K-1)} + y^{(K-1)}$$

$$J_F(x^{(K-1)}) \cdot y^{(K-1)} = -\bar{F}(x;y)$$ llamese $\tilde{F}$

La Matriz Jacobiana de $\bar{F}$

$$J_F = \begin{bmatrix} 2(x-4) & 2(y-4) \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F} = -((x-4)^2 + (y-4)^2 - 5 \ ; \ x^2 + y^2 - 16)$$

Iteración I

$$x^{(1)} = x^{(0)} + y^{(0)}$$

C.A Determinación de $y^{(0)}$:

Resuelto con calculadora

$$\begin{bmatrix} -0,4 & -4,6 \\ 7,6 & 3,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{-0,83} \ -0,93 \\ -1,33 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,215 \\ +0,090 \end{bmatrix}$$ Fin C.A

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3,8 \\ 1,7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,215 \\ +0,090 \end{bmatrix} \to x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3,585 \\ 1,790 \end{bmatrix}$$

Iteración II

$$x^{(2)} = x^{(1)} + y^{(1)}$$

C.A Determinación de $y^{(1)}$:

Resuelto con calculadora

$$\begin{bmatrix} -0,830 & -4,420 \\ 7,170 & 3,580 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,056 \\ -0,056 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,016 \\ 0,016 \end{bmatrix}$$

Fin C.A

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 3{,}585 \\ 1{,}790 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}016 \\ 0{,}016 \end{bmatrix}$$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 3{,}569 \\ 1{,}806 \end{bmatrix}$$

<u>Iteración III</u>

$$X^{(3)} = X^{(2)} + Y^{(2)}$$

<u>C.A</u> Determinación de $Y^{(2)}$

$$\begin{bmatrix} -0{,}862 & -4{,}388 \\ 7{,}198 & 3{,}612 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}030 \times 10^{-4} \\ 6{,}030 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}705 \\ -1{,}709 \end{bmatrix}$$ mal

Resuelto con calculadora

<u>Fin C.A</u>

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 3{,}569 \\ 1{,}806 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}705 \\ -1{,}709 \end{bmatrix}$$

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 5{,}274 \\ 0{,}097 \end{bmatrix}$$

Resolución ejercicio # 3:

Del enunciado se deduce:

$$\frac{dx^2(t)}{dt} = 0,12t^2 + 0,6t \qquad 0 \leq t \leq 10$$

La ecuación se cumple para los primeros 10 s del movimiento

t_0

$$\frac{dx(0)}{dt} = 0 \;;\; x(0) = 0$$

(a) Planteamiento del PVI

$$\begin{cases} x''(t) = 0,12t^2 + 0,6t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 10$$

(b) Usar 2 iteraciones R-K 1/2 para estimar $x(1)$ y $x'(1)$

C.A Cambio de Variables al sistema

$$\begin{cases} U = x' \\ U' = x'' \end{cases} \qquad \begin{cases} U'(t) = \underbrace{0,12t^2 + 0,6t}_{f(t)} \;;\; U = x' \\ U(0) = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Fin C.A

RK 1/2 $\quad h = 0,5$

$t_i = t_0 + ih$ — En dos iteraciones $t = 1$!

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ U_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ U_n \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \cdot \begin{bmatrix} k_1 + k_2 \\ m_1 + m_2 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = U_n \qquad m_1 = f(t_n)$$

$$k_2 = U_n + \frac{h}{2} \cdot m_1 \qquad m_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}\right)$$

Alumno: Víctor Zacarías; Padrón: 107080; DNI: 95.979.149

4

Iteración I

$K_1 = U_0 \to K_1 = 0 \quad | \quad m_1 = F(t_0) \to m_1 = 0$

$K_2 = 0 \quad | \quad m_2 = F(t_n + \frac{h}{2}) \to m_2 = \cancel{0{,}1575}$ $0{,}1575$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} + 0{,}25 \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1575 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}039375 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}039375 \end{bmatrix} \to t = 0{,}5$$

78

Iteración II

$t_1 = 0{,}5$

$K_1 = U_1 \to K_1 = 0{,}039375 \quad | \quad m_1 = F(t_1) \to m_1 = 0{,}33$

$K_2 = U_1 + \frac{h}{2} \cdot m_1 \to K_2 = 0{,}121875 \quad | \quad m_2 = F(t_1 + \frac{h}{2}) \to m_2 = 0{,}5175$

6

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}039375 \end{bmatrix} + 0{,}25 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}16125 \\ 0{,}8475 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0403125 \\ 0{,}25125 \end{bmatrix} \to T = 1$$

8

33

- Resolución ejercicio #4: $F(x) = 3^x - 1$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x) + c_0(x)^2 + d_0(x)^3 & 0 \le x \le 1 \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x-1) + c_1(x-1)^2 + d_1(x-1)^3 & 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

- Determinación de los coeficientes de $S(x)$

1] $S_0(0) = F(0) \rightarrow \boxed{a_0 = 0}$ $S_1(3) = F(3)$

$S_1(1) = F(1) \rightarrow \boxed{a_1 = 2}$ $\rightarrow a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 = 26$ ✗

2] $S_0(1) = S_1(1) \rightarrow a_0 + b_0 + c_0 = a_1 = 2$ ✗

3] $$S'(x) = \begin{cases} S'_0(x) = b_0 + 2c_0(x) + 3d_0(x)^2 & 0 \le x \le 1 \\ S'_1(x) = b_1 + 2c_1(x-1) + 3d_1(x-1)^2 & 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

$S'_0(1) = S'_1(1)$

$\rightarrow b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1$ ✗

4] $$S''(x) = \begin{cases} S''_0(x) = 2c_0 + 6d_0(x) & 0 \le x \le 1 \\ S''_1(x) = 2c_1 + 6d_1(x-1) & 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

$S''_0(1) = S''_1(1)$

$\rightarrow 2c_0 + 6d_0 = 2c_1$ ✗

5] $S''_0(0) = 0 \rightarrow 2c_0 = 0$ ✗ $\rightarrow \boxed{c_0 = 0}$

$S''_1(3) = 0 \rightarrow 2c_1 + 12d_1 = 0$ ✗

Coeficientes

Víctor Zacarías; 107080; 95.979.449

(5)

A partir de 1-5, se arma un sistema para poder determinar los coeficientes:

$$\boxed{a_0=0 \;;\; a_1=2 \;;\; c_0=0 \;;\; b_0=2}$$

~~2 + 2b_1 + 4~~

~~2 + a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 = 26~~

~~3d_0 = b_1~~

$$\begin{cases} 2 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 = 26 & (I) \\ \boxed{2+3d_0 = b_1} & (II) \\ 6d_0 = 2c_1 \to \boxed{d_0 = \boxed{0{,}333\,c_1}} & (III) \\ 2c_1 + 12d_1 = 0 \to \boxed{d_1 = -0{,}166\,c_1} & (IV) \end{cases}$$

... Reemplazo (II) (III) y (IV) en (I)

~~2 + 2(2+3d_0) + 4c_0~~

$$2 + 2(2+3(0{,}333\,c_1)) + 4c_1 + 8(-0{,}166\,c_1) = 26$$

$$1{,}998\,c_1 + 4c_1 - 1{,}328\,c_1 = 20$$

$$4{,}67\,c_1 = 20 \to \boxed{c_1 = 4{,}28}$$

$c_1 = 5$

$a_0 = 0$	$a_1 = 2$
$b_0 = 2$	$b_1 = 2 + 3(0{,}333\,c_1) = 6{,}275$
$c_0 = 0$	~~$c_1 = 4{,}28$~~
$d_0 = 0{,}333\,c_1 = 1{,}425$	$d_1 = -0{,}166\,c_1 \Rightarrow d_1 = -0{,}710$

$d_1 = -0{,}833$

Coeficientes

IV

Calculo de $S(2,5)$

$$S(x) = \begin{cases} S_{1} = 2X + 1{,}425X^{3} & 0 \leq X \leq 1 \\ S_1 = 2 + 6{,}275(X-1) + 4{,}28(X-1)^{2} + -0{,}716(X-1)^{3} & 1 \leq X \leq 3 \end{cases}$$

$S(2,5) = 35{,}766$

mal

arrastra error de cuentas

El valor está fuera de rango

Nombre Padrón DNI

Victor Zacarías ; 107030 ; 95.979.449

6

- Resolvemos ejercicio #5:

... Se propone como aproximación $\boxed{y(x) = a \cdot e^{bx}}$

La tabla (gráfico es aproximadamente una curva exponencial).

$y(x) = a\,10^{bx}$

C.A Linealización de y

$$\log_{10}(y(x)) = \log_{10} a + bx \cdot \log_{10} e$$

$$\underbrace{\log_{10}(y(x))}_{y'(x)} = \underbrace{\log_{10} a}_{a'} + \underbrace{0{,}4343\, b}_{b'}x$$

$$y'(x) = a' + b'x$$

Fin C.A

A partir de la tabla del enunciado se construye una nueva tabla para y'

x	0,5	1	1,5	2	4
y	0,7524	0,6610	0,5105	0,4576	$-8{,}77\times10^{-3}$

(a) A partir de una aproximación por C.M es posible estimar a' y b' (y en consecuencia a y b)

Sea $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1{,}5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7524 \\ 0{,}6610 \\ 0{,}5105 \\ 0{,}4576 \\ -8{,}77\times10^{-3} \end{bmatrix}$$

$\nexists$ Sol por $Ax=b$ por lo que se propone sol por C.M

$$A^t \cdot A \cdot \hat{X} = A^t \cdot b$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 1{,}5 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_{A^t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1{,}5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = A^t \cdot \begin{bmatrix} 0{,}7524 \\ 0{,}6610 \\ 0{,}5105 \\ 0{,}4576 \\ -8{,}77\times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 23{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{}\ 2{,}377 \\ 3{,}283 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}718 \\ -0{,}135 \end{bmatrix} \rightarrow$$ Resuelto con la calculadora

- $a' = \log_{10}(a) \rightarrow 10^{a'} = a \rightarrow \boxed{a = 5{,}2239}$
- $b' = 0{,}4343\, b \rightarrow b = b'/0{,}4343 \rightarrow \boxed{b = -0{,}3108}$

$$y = 5{,}2239 \cdot e^{-0{,}3108 \cdot x}$$

(b) $y(3)$

$$\boxed{y = 2{,}0562}$$

Mezcla el modelo con los datos que le dan