No exprese ningún cálculo en forma fraccionaria. El examen se aprueba con dos ejercicios correctamente resueltos en su totalidad y un ejercicio planteado. Salvo indicación contraria, use al menos 5 cifras significativas (preferible usar memorias de la calculadora)

Apellido, nombre(s): ZINABIMBNGS FRANCISCO MANUEL

M

1. Halle la primera raíz positiva de la ecuación $x = 2cos(x)$, a través del método de punto fijo.
   - Encuentre explícitamente un intervalo de interés.
   - Estudie las propiedades de convergencia del método propuesto.
   - M Encuentre el cero buscado con una diferencia entre dos iteraciones sucesivas de $1 \cdot 10^{-7}$.
   - M Represente la respuesta final respetando la convención del curso $x = \bar{x} \pm \Delta x$

2. De una función desconocida se obtuvieron los siguiente valores.

b

x	0.5	1.0	1.5	2.0	4.0
y	7.105	7.030	6.575	6.070	0.880

   (a) Plantee el modelo que crea correspondiente (que mejor ajuste los datos).
   (b) Plantee el sistema $A^T Ax = A^T b$.
   (c) Resolver utilizando la estrategia de descomposición[1] y expresar el modelo planteado con los valores hallados.
   (d) Estime el valor de la función en 1.8.

3. Estime a través de un polinomio de interpolación de orden mínimo 3, los valores con su cota de error correspondiente de $f(1,01)$ y $f(1,28)$ a partir de la siguiente tabla:

B

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30
$f(x)$	1,00000	1,02470	1,04881	1,07238	1,09544	1,11803	1,14017

[1] puede ser tanto LU o Cholesky, sin pivoteo parcial

ZIMBIMBAKIS
41836170

HOJA N°

FECHA

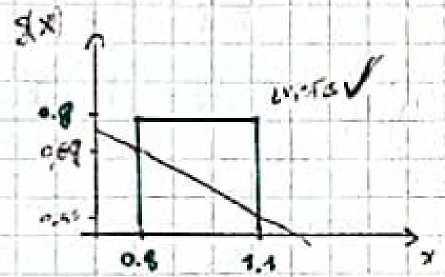
(1)

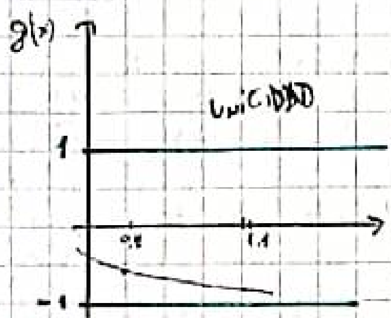
DADO $x = 2\cos(x)$ ⇒ TENGO UNA $f(x) = 2\cos(x) - x$ A LA QUE LE APLICO PUNTO FIJO.

BUSCO UNA $g(x)$ QUE CUMPLA EXISTENCIA Y UNICIDAD EN UN INTERVALO $[0{,}8,\ 1.1]$

→ ~~DESPEJANDO x DE f(x)~~ PROPONGO UNA $g(x)$: $g(x) = 2\cos(x)$

OBS: $g'(x) = -\text{sen}(x)$





$|g'(1.1)|$ ES EL MAXIMO

$x_0 = -0{,}87121$ fuera del intervalo

$x_1 = \cos(x_0) = 0{,}6284734$

$x_2 = \cos(x_1) = 0{,}80892577$

$x_3 = \cos x_2 = 0{,}69027594$

$x_4 = \cos(x_3) = 0{,}77107034$

$x_5 = \cos(x_4) = 0{,}7171651558$

$x_6 = \cos(x_5) = 0{,}753671958$

$x_7 = \cos(x_6) = 0{,}72918$

$x_8 = \cos(x_7) = 0{,}7457203$

$x_9 = 0{,}734579 = \cos(x_8)$

$x_{10} = \cos(x_9) = 0{,}7420974$

$x_{11} = \cos(x_{10}) = 0{,}7370514$

$x_{12} = \cos(x_{11}) = 0{,}7404536$

$x_{13} = \cos(x_{12}) = 0{,}738163$

$x_{14} = \cos(x_{13}) = 0{,}7397062$

$x_{15} = \cos(x_{14}) = 0{,}73866661$

$x_{16} = \cos(x_{15}) = 0{,}73935698$

$x_{17} = \cos(x_{16}) = 0{,}7388952449$

$x_{18} = \cos(x_{17}) = \ldots$

$x_{38} = 0{,}7390851805$

$x_{39} = 0{,}7390851013$

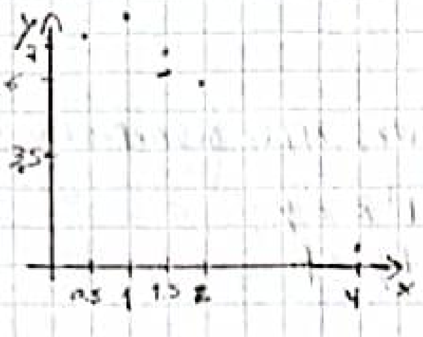
$|x_{38} - x_{39}| < 10^{-7}$
$= 0{,}00000008$

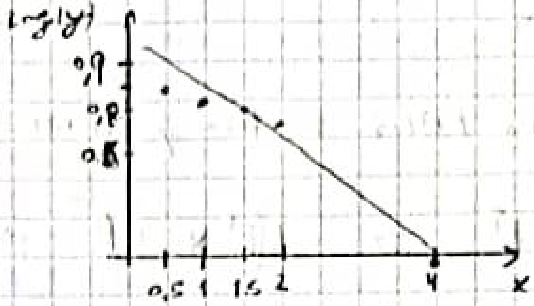
$x = 0{,}73908510 \pm \boxed{0{,}00000008}$ usar cota teórica.

NOTA

103295

(2)





a) Planteo un ajuste por una exponencial; ya que el gráfico x - Log(y) tiende a ser lineal:

$$y = a\,10^{bx}$$

$$\log y = \log\left(a\,10^{bx}\right)$$

$$\log y = \log(a) + bx$$

$$\begin{cases} \log(7.105) = \log(a) + (0.5)b \\ \log(7.030) = \log(a) + b \\ \log(6.575) = \log(a) + 1.5\,b \\ \log(6.070) = \log(a) + 2b \\ \log(0.880) = \underbrace{\log(a)}_{\hat{a}} + 4b \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1.5 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ \hat{a} \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \log(7.105) \\ \log(7.030) \\ \log(6.575) \\ \log(6.070) \\ \log(0.880) \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\cancel{A\hat{x} = b} \rightarrow A^T A x = A^T b$$

b)

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 1.5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1.5 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 23.5 & 9 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}}_{\alpha}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 1.5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log(7.105) \\ \log(7.030) \\ \log(6.575) \\ \log(6.070) \\ \log(0.880) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3.843889073 \\ 3.244086528 \end{pmatrix}}_{\beta}$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha\, x = \beta}$$

NOTA

c) $\underbrace{\begin{pmatrix}23.5 & 9\\ 9 & 5\end{pmatrix}}_{\alpha} x = \begin{pmatrix}3.843889073\\ 3.244086528\end{pmatrix}$

AL SER α UNA MATRIZ SIMÉTRICA Y DEFINIDA POSITIVA, APLICO DESCOMPOSICIÓN DE CHOLESKY:

$$\alpha = L L^T \rightarrow L(L^T x) = \beta \rightarrow \begin{cases} L^T x = y \\ L y = \beta \end{cases}$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \qquad L^T = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{pmatrix}$$

$$L_1 L^{1T} = l_{11}^2 = 23.5 \rightarrow l_{11} = \sqrt{23.5} = 4.8476799$$

$$L_1 L^{2T} = l_{11} \cdot l_{21} = 9 \rightarrow l_{21} = \frac{9}{l_{11}} = 1.856558243$$

$$L_2 L^{1T} = 9 \checkmark$$

$$L_2 L^{2T} = l_{21}^2 + l_{22}^2 = 5 \rightarrow l_{22} = 1.772975397$$

$$L = \begin{pmatrix} 4.8476799 & 0 \\ 1.856558243 & 1.772975397 \end{pmatrix}$$

$$L y = \beta \rightarrow \begin{pmatrix} 4.8476799 & 0 \\ 1.856558243 & 1.772975397 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 3.843889073 \\ 3.244086528 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y = \begin{pmatrix} 0.7929337647 \\ 0.9994266215 \end{pmatrix}}$$

$$L^T x = y \rightarrow \begin{pmatrix} 4.8476799 & 1.856558243 \\ 0 & 1.772975397 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0.7929337647 \\ 0.9994266215 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} -0.05231544382 \\ 0.5637002201 \end{pmatrix}}$$

$\hookrightarrow$ $\boxed{y = 3.661847 \; 10^{-0.052315 \cdot X}}$

OBS: $10^{0.5637002201} = 3.66184$

d)

$$f(1.8) = 3.661847 \times 10^{-0.052315 \times 1.8} \simeq \boxed{2.948038796}$$

FALDUMBARIS
103295

HOJA Nº

FECHA

③ USO EL POLINOMIO DE NEWTON PARA INTERPOLAR. COMO DEBE SER DE ORDEN 3 NECESITO MÍNIMO 4 PUNTOS (NODOS), PERO YA QUE ME PIDE LA COTA DE ERROR USARÉ 5. ADEMÁS, ELIJO NODOS QUE GENEREN UN INTERVALO EN DONDE EL 1,01 Y 1,28 SE ENCUENTREN CONTENIDOS.

HAGO DIFERENCIAS DIVIDIDAS:

x	f_x	DD 1	DD 2	DD 3
1,0	$\boxed{1,0}$	$\frac{1,0247-1}{1,05-1,0}=\boxed{0,494}$	$\frac{0,46665-0,494}{1,25-1,0}=\boxed{-0,1094}$	$\frac{-0,0954+0,1094}{1,30-1,0}=\boxed{0,04666667}$
1,05	1,0247	$\frac{1,1163-1,0247}{1,25-1,05}=0,46665$	$\frac{0,4478-0,46665}{1,30-1,05}=-0,0954$	$\frac{-0,0913+0,0954}{1,15-1,05}=0,04066667$
1,25	1,1163	$\frac{1,14017-1,1163}{1,30-1,25}=0,4478$	$\frac{0,45193333-0,4478}{1,15-1,25}=-0,09133333$	
1,30	1,14017	$\frac{1,07238-1,14017}{1,15-1,30}=0,45193333$		
1,15	1,07238			

$$DD4 = \frac{0,04066667-0,04666667}{1,15-1,0} = \boxed{6,626666689}$$

$$\rightarrow P(x) = 1 + 0,494 \cdot (x-1,0) - 0,1094 \cdot (x-1,0)(x-1,05) + 0,0466666669(x-1,0)(x-1,05)(x-1,25)$$

$$f(1,01) \simeq P(1,01) = \boxed{1,00498824}$$

$$f(1,28) \simeq P(1,28) = \boxed{1,1313648}$$

$$\rightarrow e = \left|6,62\,(x-1,0)(x-1,05)(x-1,25)\right|$$

OBS: USO LA DD4 PARA CALCULAR AMBAS COTAS DE ERROR.

$$f(1,01) \simeq 1,00498824 \pm 6,3616 \times 10^{-4}$$

$$f(1,28) \simeq 1,1313648 \pm 0,012803$$

NOTA