FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

1	2	3	4	5
B	B	B	B	B

10-07-2024 **Análisis Numérico I (75.12- 95.04)** Integrador

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

Apellido: ROLANDELLI Nombres : SANTIAGO

Padrón: 108015

10 (diez)

1. Se quiere encontrar una función de la forma: $f(x) = ax^3 + bx + c$ que pase por los puntos $(1,4)$, $(-2,-23)$ y $(2,21)$.

   a) Plantear el sistema de ecuaciones y calcular los coeficientes de f usando dos iteraciones del método de Gauss-Seidel.

   b) Indicar si el método converge. Justificar la respuesta.

2. Un misil es lanzado desde territorio enemigo y su posición en vuelo es observada por dispositivos de rastreo de radar en las siguientes posiciones:

Tiempo(s)	250	500	750	1000
Altura(m)	8	15	19	20

Suponga que nuestras fuentes de inteligencia indican que los misiles enemigos están programados para seguir un camino de vuelo parabólico, un hecho que parece ser consistente con el diagrama obtenido al trazar las observaciones sobre el sistema de coordenadas.

   a) Usar cuadrados mínimos para establecer el modelo que mejor ajusta los datos tabulados. Usar al menos seis decimales y redondeo.

   b) Predecir el tiempo que tarda el misil en aterrizar.

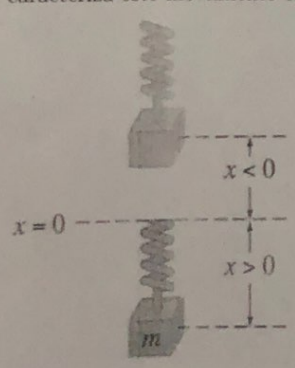
3. Aproximar mediante el método de *Simpson* $\frac{1}{3}$ el trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}(x,y,z) = x^2\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, para mover una partícula que se desplaza sobre la curva $\sigma(t) = (cos(t), sen(t), t)$ con $t \in [0,\pi]$. ($W = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t))\sigma'(t)dt$) Tomar $\pi = 3$ y una partición del intervalo con $n = 6$.

4. Se quieren aproximar las raíces de la ecuación $(5-x)e^x = 5$. Se sabe que existen dos soluciones, una es $x = 0$ y la otra $x = \alpha$ que se encuentra en el intervalo $[1,5]$.

   a) Aproximar α realizando dos pasos del método de Nawton-Raphson tomando como semilla $x_0 = 4.7$.

   b) Indicar si el problema se puede resolver usando el método de punto fijo usando la función $\phi(x) = 5 - \frac{5}{e^x}$, partiendo de cualquier semilla en el intervalo $[ln(5), 5]$.

5. Una masa que pesa 2 libras alarga un resorte 0.5 pies el resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está $\frac{2}{3}$ pie por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $\frac{4}{3}$ (pie/s). La ecuación que caracteriza este movimiento es: $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 64x(t) = 0$.



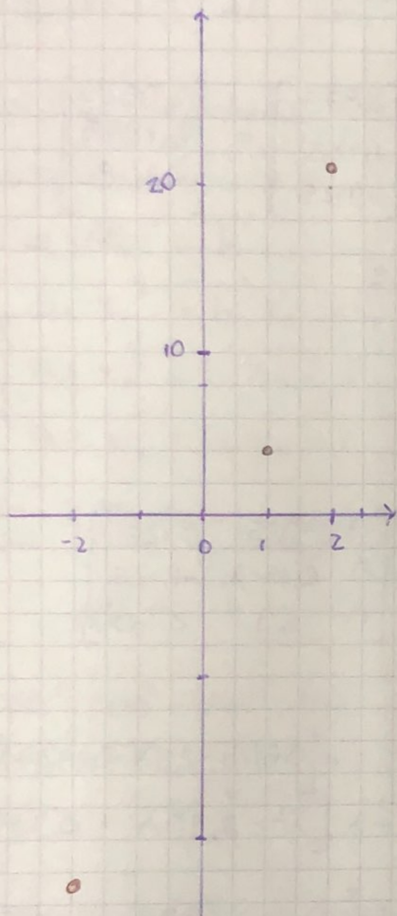
   a) Plantear el prroblema de valores iniciales.

   b) Hallar una aproximación de la posición y la velocidad de la masa al cabo de 0,2 segundos utilizando dos iteraciones del método de Runge-Kutta del punto medio.

Rolandelli Santiago
PD = 108015

1 Sea $f(x) = ax^3 + bx + c$

que pase por los puntos $(1,4)$; $(-2,-23)$; $(2,21)$



Busco que

$$\begin{cases} -2^3 a - 2b + c = -23 \\ a + b + c = 4 \\ 2^3 a + 2b + c = 21 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -23 \\ 4 \\ 21 \end{bmatrix}}_{b}$$

El método de Gauss Seidel plantea:

$$A\bar{x} = b$$

$$(D-L-U)\bar{x} = b$$

$$(D-L)\bar{x} = U\bar{x} + b$$

$$\bar{x}^{(k+1)} = \underbrace{(D-L)^{-1} U}_{T_{GS}} \bar{x}^{(k)} + \underbrace{(D-L)^{-1} . b}_{C_{GS}}$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{L} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

$$T_{GS} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}25 & 0{,}125 \\ 0 & 0{,}25 & -1{,}125 \\ 0 & 1{,}5 & 1{,}250 \end{bmatrix}$$

$$C_{GS} = (D-L)^{-1} . b = \begin{bmatrix} 2{,}875 & 1{,}125 & -4{,}25 \end{bmatrix}^T$$

Iteración ① Partimos con la semilla $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{x}^{(k+1)} = T_{GS} \cdot \bar{x}^{(k)} + C_{GS}$$

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}25 & 0{,}125 \\ 0 & 0{,}25 & -1{,}125 \\ 0 & 1{,}5 & 2{,}50 \end{bmatrix} \cdot \bar{x}^{(0)} + \begin{bmatrix} 2{,}875 \\ 1{,}125 \\ -4{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}875 \\ 1{,}125 \\ -4{,}25 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}25 & 0{,}125 \\ 0 & 0{,}25 & -1{,}125 \\ 0 & 1{,}5 & 2{,}50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2{,}875 \\ 1{,}125 \\ -4{,}25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2{,}875 \\ 1{,}125 \\ -4{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}0625 \\ 6{,}1875 \\ -13{,}18 \end{bmatrix}$$

Con dos iteraciones se obtiene

$f(x) = 2{,}0625\, x^3 + 6{,}1875\, x - 13{,}18$.

¿Convergencia?

$$\rho(T_{GS}) = \det |T_{GS} - \lambda I| = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -0{,}25 & 0{,}125 \\ 0 & 0{,}25-\lambda & -1{,}125 \\ 0 & 1{,}5 & 2{,}50-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 0{,}25-\lambda & 0{,}125 \\ 1{,}5 & 2{,}5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \left[((0{,}25-\lambda)(2{,}5-\lambda)) - 0{,}1875 \right] = -\lambda \left[0{,}625 - 2{,}5\lambda - 0{,}25\lambda + \lambda^2 - 0{,}1875 \right]$$

$$= -\lambda \left[\lambda^2 - 2{,}75\lambda + 0{,}4375 \right]$$

$$\rho(T_{GS}) = \max_{1 \le i \le 3} |\lambda_i| = 2{,}5804 \qquad \lambda = \{ 0 \ ; \ 2{,}5804 \ ; \ 0{,}1695 \}$$

Vemos que $\rho(T_{GS}) > 1$, por lo tanto el método diverge.

Si hubieramos realizado algunas iteraciones más del método, veríamos que los valores de $\bar{x}^{(k)}$ rápidamente se disparan en lugar de tender a algún resultado.

Rolandelli Santiago
PD = 108015

② Según las fuentes se indican que los misiles se fabrican para seguir una trayectoria parabólica.

Planteo el modelo $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

Este modelo ya se encuentra linealizado.

buscamos a, b, c tal que

$$\begin{cases} a(x_1)^2 + b x_1 + c = y_1 \\ a x_2^2 + b x_2 + c = y_2 \\ a x_3^2 + b x_3 + c = y_3 \\ a x_4^2 + b x_4 + c = y_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

El sistema anterior no se puede resolver, por lo que planteamos $A^T A \bar{x} = A^T b$ (proy. ortogonal sobre Col(A)).

$A^T A$ $\bar{x}$

$$\begin{bmatrix} 250^2 & 500^2 & 750^2 & 1000^2 \\ 250 & 500 & 750 & 1000 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 250^2 & 250 & 1 \\ 500^2 & 500 & 1 \\ 750^2 & 750 & 1 \\ 1000^2 & 1000 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}3828125\,E^{12} & 1562500000 & 1875000 \\ 1562500000 & 1875000 & 2500 \\ 1875000 & 2500 & 4 \end{bmatrix}$$

$A^T . b =$

$$\begin{bmatrix} 250^2 & 500^2 & 750^2 & 1000^2 \\ 250 & 500 & 750 & 1000 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 19 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34937500 \\ 43750 \\ 62 \end{bmatrix}$$

Entonces =

$$\begin{bmatrix} 1{,}3828125\,E^{12} & 1562500000 & 1875000 \\ 1562500000 & 1875000 & 2500 \\ 1875000 & 2500 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3493750\,0 \\ 43750 \\ 62 \end{bmatrix}$$

Obtengo $[a b c]^T = \begin{bmatrix} -2{,}4\,E^{-5} \\ 0{,}046 \\ -2 \end{bmatrix}$

El modelo queda de la forma

$$Y = -2{,}4\,E^{-5}\,x^2 + 0{,}046\,x - 2$$

Se busca predecir el momento de aterrizaje.

Es decir, $x \,/\, y(x) = 0$.

Resuelvo de la forma $Y = -2{,}4\,E^{-5}\,x^2 + 0{,}046x - 2 = 0$

Con calculadora se obtiene que $x/y(x)=0$ es

$x = 1872{,}154675$ seg. Con seis cifras decimales

③ Sea $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y, z)$

sobre la curva $\sigma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$ con $t[0,\pi]$

$$\int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt$$

$$\sigma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$$

$$\sigma'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1)$$

$$\vec{F}(\sigma(t)) = (\cos^2(t)\,\hat{i} + \operatorname{sen}(t)\,\hat{j} + t\,\hat{k})$$

Rolandelli Santiago
PD = 108015

FECHA ③

$$W = \int_a^b g(x)\,dx \qquad g(x) = (\cos^2(t), \operatorname{sen}(t), t)\cdot(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1)$$

$$g(x) = (-\operatorname{sen}(t)\cos^2(t) + \operatorname{sen}(t)\cos(t) + t)$$

Modelo de Simpson (1/3) =

$$\int_0^3 g(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k+1})\right]$$

Mi intervalo de t es $[0, \pi] = [0, 3]$; $N = 6$ $\quad h = \frac{b-a}{N} = \frac{3}{6} = 0{,}5$

$f(x_0) = f(0) = 0$

$f(x_1) = f(0{,}5) = 0{,}551505$

$f(x_2) = f(1) = 1{,}209001$

$f(x_3) = f(1{,}5) = 1{,}565569$

$f(x_4) = f(2) = 1{,}464128$

$f(x_5) = f(2{,}5) = 1{,}636420$

$f(x_6) = f(3) = 2{,}721983$

$$\simeq \frac{0{,}5}{3}\left[f(0) + f(3) + 2\cdot\sum_{k=1}^{2} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=0}^{2} f(x_{2k+1})\right]$$

$$\simeq \frac{0{,}5}{3}\left[0 + 2{,}721983 + 2\cdot(2{,}673129) + 4(3{,}753494)\right]$$

$\simeq 3{,}847036$

Además, el error es del órden de h^4, es decir $(0{,}5)^4 = 0{,}0625$.

De esta forma se asegura el resultado hasta la primer cifra decimal.

Rolandelli Santiago

④ $f(x) = (5-x) \cdot e^{x} = 5$

Se desea buscar la raiz no nula, $x \in [1,5]$ de la función $(5-x)e^{x} - 5 = 0$, mediante el método de Newton Raphson

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0 \text{ (semilla)} \end{cases}$$

Se debe garantizar que $f'(p) \neq 0$ y tomar una semilla lo suficientemente cercana para que el método converja.

$f(x) = (5-x)e^{x} - 5$

$f'(x) = -e^{x} + (5-x)e^{x} = e^{x}(5-x-1) = e^{x}(4-x)$

Modelo $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{(5-x)e^{x} - 5}{e^{x}(4-x)} \\ x_0 = 4,7 \end{cases}$

Iteración ① $\Rightarrow$ $x_0 = 4.7$

$x_1 = 4,7 - \dfrac{(5-4,7)e^{4,7} - 5}{e^{4,7}(4-4,7)} = 5,063605$ ✓

Iteración ② $\Rightarrow$ $x_1 = 5,063605$

$x_2 = 4,974081$

$\alpha = x \,/\, f(x) = 0 \quad = 4,974081$ (luego de dos iteraciones)

B

Ⓑ Si se quisiera resolver por punto fijo,

$$\begin{cases} g(x) = x - \psi(x) \cdot f(x) \\ x_0 \end{cases}$$

donde $g(x)$ debe ser admisible = cumplir
- * EXISTENCIA (i)
- * UNICIDAD (ii)

(i) $g(x)$ debe pertenecer a $[a,b]$ $\forall\ x \in [a,b]$.

(ii) $\exists\ g'(x)$ Tal que $|g'(x)| \leq k < 1$ $\forall\ x \in (a,b)$.

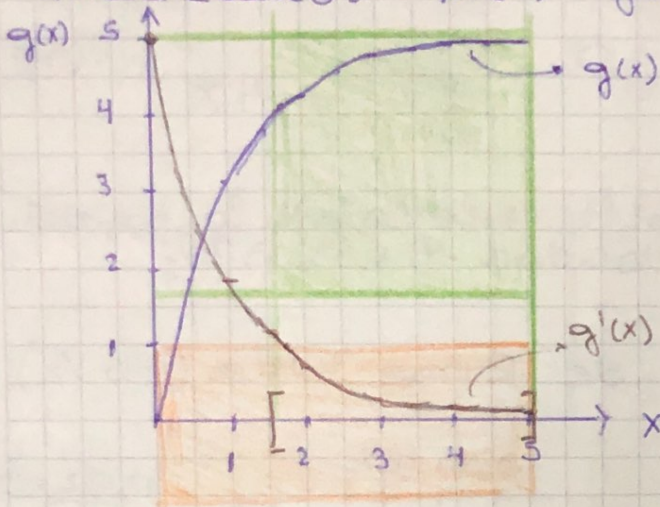
según nuestra notación.

Se proporciona $\phi(x) = g(x) = 5 - 5/e^{x}$ con el intervalo $[\ln(5) ; 5]$

Tomo una aprox para $\ln(5) = 1,609438$

Rolandelli Santiago
PD=108015

Analizamos $\phi(x)$ gráficamente:



Se grafica el recuadro de vértices $[\ln(5); \ln(5)]$; $[\ln(5); 5]$; $[5; \ln(5)]$ y $[5,5]$ donde la función $\phi(x)$ debe caer dentro.

Si realizamos el análisis

$$\ln(5) \leq x \leq 5$$

$$e^{\ln(5)} \leq e^x \leq e^5$$

$$\frac{5}{5} \leq \frac{5}{e^x} \leq \frac{5}{e^5}$$

$$5-1 \leq 5-\frac{5}{e^x} \leq 5-\frac{5}{e^5}$$

$$4 \leq g(x) \leq 4{,}966310$$

Lo cual se comprueba en el gráfico, que se trata de una función creciente en el intervalo $[\ln(5); 5]$, donde

$\phi(\ln(5)) = 4$ y $\phi(5) \simeq 4{,}96631$

Por lo que $\exists$ punto fijo.

ii) $g'(x) = \dfrac{5 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{5}{e^x}$

Se pide que $|g'(x)| \leq k < 1 \quad \forall x \in (\ln(5); 5)$

Se trata de una función decreciente en el intervalo $[\ln(5); 5)$, donde

$|g'(\ln(5))| = 1$, pero como se pide en $\forall x \in (\ln(5); 5)$ se cumple dicha condición, y el punto fijo es único.

Se cumple i, ii, $\rightarrow \phi(x)$ es admisible.

Se grafica también $g'(x)$ y se colorea con naranja el rango en el cual la derivada de la función debe estar acotada para el intervalo.

(5)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 64\ x(t) = 0$$

$$x''(t) + 64\ x(t) = 0$$

PVI

Cambio de variables

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -64x \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = \frac{2}{3}\ ft \\ v(0) = -\frac{4}{3}\ \frac{ft}{s} \end{cases}$$

Se suelta desde (+) 0,66667 ft respecto de la posición de equilibrio, con velocidad (+) 1,33333 ft/s

Mediante el método de Runge-Kutta (pto ½)

Error de signo pero resuelve bien

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ v_n \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} k_2 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

0 0,1 0,2 → t (s), $\underbrace{\quad}_{N=2}$ $\qquad h = \frac{0,2}{2} = 0,1$ (s)

con $k_1 = f(t_n, x_n) = v_n$ $\qquad k_2 = v_n + \frac{h\, m_1}{2}$

$m_1 = f(t_n, x_n, v_n)$ $\qquad m_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}; x_n + \frac{h k_1}{2}; v_n + \frac{h m_1}{2}\right)$

$\boxed{\text{Avance (1)}}$ $t_0 = 0$, $x_0 = 0,66667$, $v_0 = 1,33333$

$k_1 = 1,33333$ $\qquad m_1 = f(0, 0,66667, 1,33333) = -64 \cdot 0,66667 = -42,66688$

$k_2 = 1,33333 + \frac{0,1 \cdot -42,66688}{2} = -0,800014$

$m_2 = f(0,05; 0,73336; -0,800014) = -64 \cdot (0,73336) = -46,93504$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,66667 \\ 1,33333 \end{bmatrix} + 0,1 \begin{bmatrix} -0,800014 \\ -46,93504 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5866686 \\ -3,360204 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Avance (2)}}$ $t = 0,1$; $x_1 = 0,5866686$; $v_1 = -3,360204$

$k_1 = -3,360204$

$m_1 = f(0,1, 0,5866686; -3,360204) = -64 \cdot (0,5866686) = -37,5467904$

$k_2 = -5,23754352$ $\qquad m_2 = -64\ (0,4186584) = -26,7941376$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5866686 \\ -3,360204 \end{bmatrix} + 0,1 \begin{bmatrix} -5,23754352 \\ -26,7941376 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,062914248 \\ -6,03961776 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cong x(0,2) \\ \cong v(0,2) \end{matrix}$$