No exprese ningún cálculo en forma fraccionaria. El examen se aprueba con dos ejercicios correctamente resueltos en su totalidad y un ejercicio planteado. Salvo indicación contraria, use al menos 5 cifras significativas (preferible usar memorias de la calculadora)

Apellido, nombre(s[redacted]

1. El volumen de agua de un tanque esférico de radio $R = 3$ está definida por la función $V(x) = \frac{\pi x^2 (9-x)}{3}$. Se desea conocer el valor de x para el cuál el tanque esférico se encuentra al 30 %.
   Encuentre la función que modela el problema mencionado y halle la raíz por el método que crea correcto (justificar), interrumpa el algoritmo cuando la diferencia absoluta entre iteraciones consecutivas sea menor a 0.001. Exprese el resultado $x = \overline{x} \pm \Delta x$ (utilizando la convención mencionada en clase).

2. Se sabe que el tiempo de espera entre dos sucesos en un proceso de Poisson tiene una distribución de probabilidad exponencial, si se cumple la condición que la probabilidad de producirse el evento en un instante no depende del tiempo transcurrido. Siendo x una variable aleatoria positiva que representa el tiempo de espera hasta la próxima revisión del motor de un avión, su función de densidad entonces es:

$$f(x) = \alpha \cdot e^{-\beta \cdot x} \tag{1}$$

   Si bien no conocemos los parámetros α y β, nos podemos valer de los siguientes datos para estimarlos:

x	$f_{(x)}$
0.05	0.247
0.02	0.249
1	0.195
2.75	0.126
7	0.043

   (a) Estime los parámetros de la función de densidad de la variable aleatoria x. No está permitido descartar ningún dato.

   (b) ¿Qué valor tiene la función de densidad para $x = 5$?

3. Se quiere estimar a través de un polinomio interpolante el valor de la función en 1 y su error cometido, el polinomio debe ser al menos de orden 3. En caso de descartar información justificar.
   Para ello se tienen los siguientes datos.

x	$f_{(x)}$
0	-4
2	9
3	-3
4	2
5	-1
6	8

Nota: confirmé con los profes que la resolución está bien

[redacted]

Ejercicio #1 [redacted]

[redacted]

$$V(x) = \frac{\pi x^2 (9-x)}{3} \leadsto \underbrace{V_n(x)}_{\text{Vol. relativo}} = \frac{\pi x^2 (9-x)}{3V_t}$$

* Volumen del tanque: $\boxed{V_t = \frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{4}{3}\pi \cdot 27 = \underbrace{113{,}097}_{\text{no hizo falta}}$

busco $x_0 / V_n(x_0) = 0{,}3 \leadsto \dfrac{\pi x_0^2 (9-x_0)}{3V_t} = 0{,}3$

$$\leadsto \frac{\cancel{\pi} x^2 (9-x)}{\cancel{3} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} \cancel{\pi} R^3} - 0{,}3 = 0 \leadsto \frac{x^2(9-x)}{\underbrace{4R^3}_{4 \times 27 = 108}} - 0{,}3 = 0$$

- sea $\boxed{f(x) = \frac{9x^2 - x^3}{108} - 0{,}3}$, buscamos su raíz $(f(x_0) = 0)$

$\underbrace{f(2) = -0{,}04 \quad , \quad f(3) = 0{,}2}_{\text{calculadora (table)}}$

como $f \in C^1[2;3]$, Hay una raíz en $[2;3]$, la buscamos con N-R

$f'(x) = \dfrac{18x - 3x^2}{108}$, sea $x_0 = 2{,}5$ (arbitrario en $[2;3]$)

- $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leadsto \dfrac{\frac{9x^2 - x^3}{108} - 0{,}3 \cdot 108}{\frac{18x - 3x^2}{108}} = \dfrac{9x^2 - x^3 - 32{,}4}{18x - 3x^2}$

$\Downarrow$

- $x_{n+1} = x_n - \dfrac{9x_n^2 - x_n^3 - 32{,}4}{18x_n - 3x_n^2}$ (Para la calculadora)

NOTA

la cota. dio los 2 resultados iguale

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	2,5	—
1	2,1866667	0,31333
2	2,179549908	0,00711
3	2,179544947	5×10^{-6}
4	2,179544947	≈ 0

* extra, ~~[illegible]~~

* La solución al problema original es entonces:

$$x = 2{,}179544 \pm 5\cdot10^{-6}$$

(!) Utilicé Newton-Raphson por rapidez, y viendo la cantidad de iteraciones, fue una buena elección

Ejercicio #2 [redacted]

x	$f(x)$
0,02	2,49
0,05	2,47
1	0,195
2,75	0,126
7	0,043

$$f(x) = y = \alpha e^{-\beta x} \rightsquigarrow \ln(y) = \ln(\alpha e^{-\beta x})$$

$$\rightsquigarrow \ln(y) = \ln(\alpha) + \ln(e^{-\beta x})$$

$$\rightsquigarrow \ln(y) = \ln(\alpha) - \beta x \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha^* = \ln(\alpha) \\ \beta^* = -\beta \\ y^* = \ln(y) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow y^* = \alpha^* + \beta^* x$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0,02 & 1 \\ 0,05 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2,75 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta^* \\ \alpha^* \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 0,91228 \\ 0,90421 \\ -1,63476 \\ -2,07147 \\ -3,14656 \end{pmatrix}}^{\ln(f(x)) \to y^*}}_{\bar{b}} \Longleftrightarrow A\bar{x} = b$$

El sistema no tiene solución, por c.m., resolvemos: $A^tA\bar{x} = A^t\bar{b}$

$$\begin{pmatrix} 0,02 & 0,05 & 1 & 2,75 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,02 & 1 \\ 0,05 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2,75 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 57,565 & 10,82 \\ 10,82 & 5 \end{pmatrix}}^{A^tA}$$

$$\begin{pmatrix} 0,02 & 0,05 & 1 & 2,75 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,91228 \\ 0,90421 \\ -1,63476 \\ -2,07147 \\ -3,14656 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} -29,294 \\ -5,0363 \end{pmatrix}}^{A^t b}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 57,565 & 10,82 \\ 10,82 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^* \\ \alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29,294 \\ -5,0363 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{calc}]{} \begin{pmatrix} \beta^* \\ \alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,53866 \\ 0,15840 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^* = \ln(\alpha) \rightsquigarrow \alpha = e^{\alpha^*} = e^{0,15840} \rightsquigarrow \alpha = 1,1716$$

$$\beta^* = -\beta \rightsquigarrow \beta = -\beta^* \longrightarrow \beta = 0,53866$$

y tenemos la estimación: $\tilde{f}_X(x) = 1,1716\, e^{-0,53866x}$

entonces: $f_X(5) \approx \tilde{f}_X(5) = 1,1716\, e^{-0,53866\cdot 5} = 0,07928$

Ejercicio #3 [redacted]

n	x	f(x)	$f[x_i,x_j]$	$f[x_1 \ldots x_3]$	$f[x_0 \ldots x_4]$	$f[x_0 \ldots x_5]$
0	0	-4				
			$\frac{9-(-4)}{2-0}=6{,}5$			
1	2	9		$\frac{-12-6{,}5}{3-0}=-6{,}16667$ ($-\frac{37}{6}$)		
			$\frac{-3-9}{3-2}=-12$		$\frac{8{,}5-(-6{,}16667)}{4-0}=3{,}66667$ ($\frac{11}{3}$)	
2	3	-3		$\frac{5-(-12)}{4-2}=8{,}5$		$\frac{-4{,}16667-3{,}6667}{5-0}=-1{,}56667$
			$\frac{2-(-3)}{4-3}=5$		$\frac{-4-8{,}5}{5-2}=-4{,}16667$ ($-\frac{25}{6}$)	
3	4	-2		$\frac{-3-5}{5-3}=-4$		
			$\frac{-1-2}{5-4}=-3$			
4	5	-1				
5	~~6~~	~~8~~				

Para meter en la calculadora.

Interpolamos mediante un polinomio de Newton*, usando de datos los nodos 0 al 3 para generar un polinomio de grado 3, y usando el nodo 4 para calcular el error. El nodo 5 no nos aporta ninguna información útil, así que lo descartamos ya que con el resto nos alcanza para calcular lo pedido.

- $P_N(x) = -4 + 6{,}5x - 6{,}16667x(x-2) + 3{,}66667x(x-2)(x-3)$

y su error
- $|\mathcal{E}(x)| = \underbrace{1{,}56667}_{|f[x_0,\ldots,x_4]|} \cdot |x(x-2)(x-3)(x-4)|$

*Lógica de la elec.:
- Lag: mucho trabajo
- Her: no hay f'
- Spl: no conozco el error
- New: bien en este caso

Para estimar la función en $x=1$, evaluamos el polinomio y su error:

- $P_N(1) = 16{,}00001$ (calc.), $|\mathcal{E}(1)| = 4{,}40002 \approx 9$ (calc.)

→ entonces, la estimación obtenida es

$$f(1) = 16 \pm 9$$

El error es muy alto. Con Lagrange se hubiese obtenido el mismo error, y no se podía aplicar Hermite porque no se conocen los valores de la derivada. Spline se podría aplicar pero no conocemos su error. (no lo vimos en clase)

[redacted]