19-02-2025 Análisis Numérico I (75.12, 95.04, 95.13) Integrador

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

Apellido: .... Nombres : ....

Padrón: ....

1. Se sabe que la función $f(x) = e^x + x$ tiene un cero doble en el intervalo $[-1, 0]$. Usar tres iteraciones del método de *Newton Raphson modificado* para raíces múltiples, para estimar dicho cero. Usar como semilla $x_0 = -1$ y trabajar con tres decimales y redondeo.

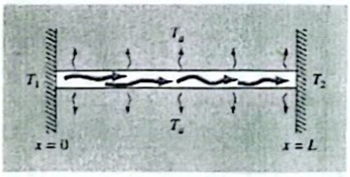
2. El siguiente conjunto de datos exhibe la cantidad de material (en metros cuadrados) requerido en la fabricación de un cilindro circular recto con altura de 4 metros y radio k (en metros).

k	0	1	2	3	4
$A(k)$	0	31.4159	75.3982	131.9469	201.0619

   Se sabe que el comportamiento es del tipo cuadrático. Determinar el área requerida para la fabricación de un cilindro circular recto de radio $k = 3.5$ metros usando cuadrados mínimos.

3. La velocidad de un objeto en movimiento está dado por la función $s(t) = \frac{t^3 e^t}{(t^2+1)^2}$ determinar el cambio de posición en el intervalo de tiempo $[1, 2]$. Utilizar el método de *Simpson* $\frac{1}{3}$, tomar una partición de 10 intervalos.

4. Se puede utilizar la conservación del calor para desarrollar un balance de calor para una barra larga y delgada . Si la barra no está aislada en toda su longitud y el sistema se encuentra en estado estacionario, la ecuación resultante es: $\frac{d^2T}{dx^2} + h(T_a - T) = 0$.
   donde h es un coeficiente de transferencia de calor (m^{-2}) que parametriza la velocidad con que se disipa el calor en el medio ambiente, y T_a es la temperatura del medio ambiente (° C).Utilizar el método de diferencias finitas para aproximar la temperatura cada dos metros de la barra. La longitud de la barra es de 10 metros, $h = 0.01m^{-2}$, $T_a = 20$ y las condiciones de frontera $T(0) = 40$ y $T(10) = 200$.



5. Cierto material de forma cúbica, con una masa de $M = 0.5$ kg se pone en el extremo inferior de un resorte sin masa. El extremo superior se fija a una estructura en reposo. El cubo recibe una resistencia de $R = -B\frac{dy}{dt}$ del aire, donde B es una constante de amortiguamiento. La ecuación de movimiento es:
   $M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + ky = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
   donde y es el desplazamiento desde la posición estática, $k = 100\frac{kg}{seg^2}$ es la constante del resorte y $B = 10\frac{kg}{seg}$. Calcular $y(t)$ para $0 < t < 0.05$ mediante dos iteraciones del método *Runge Kutta del punto medio*.

RAMIRO MINELDIN | 105876 42375245 | HOJA N° 1/4 | FECHA 19/02/25

2) $A(k) = ak^2 + bk + c \rightarrow$ COMPORTAMIENTO CUADRATICO

PLANTEO EL SISTEMA $Ax = B$ CON LOS DATOS DE LA TABLA PARA CALCULAR LOS COEFICIENTES

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 31{,}4159 \\ 75{,}3982 \\ 131{,}9469 \\ 201{,}0619 \end{pmatrix}$$

RESUELVO EL SISTEMA ~~USANDO~~ RESOLVIENDO $A^TAx = A^TB$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^TB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 31{,}4159 \\ 75{,}3982 \\ 131{,}9469 \\ 201{,}0619 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4737{,}5212 \\ 1382{,}3006 \\ 439{,}8229 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4737{,}5212 \\ 1382{,}3006 \\ 439{,}8229 \end{pmatrix}$$

$a = 6{,}2832$ $\quad b = 25{,}1327$, $c = 0$ $\quad$ TOMANDO 4 DECIMALES CON REDONDEO

NOTA

$\Rightarrow A(K) = 6{,}2832\, K^2 + 25{,}1327 K$

$A(3{,}5) = 6{,}2832 \times 3{,}5^2 + 25{,}1327 \times 3{,}5$

$A(3{,}5) = 164{,}9337$

NOTA

RAMIRO MINELDIN	106876 42375245	HOJA N° 2/4 FECHA 19/02/25

3) SE PIDE CALCULAR

$$\int_1^2 S(t)\,dt \qquad \text{CON } S(t) = \frac{t^3 e^t}{(t^2+1)^2}$$

UTILIZANDO EL METODO DE SIMPSON $\frac{1}{3}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k})\right]$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

EN ESTE CASO $h = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$

	t_i	$S(t_i)$
0	1	0,67957
1	1,1	0,81869
2	1,2	0,96365
3	1,3	1,1141
4	1,4	1,27
5	1,5	1,4320
6	1,6	1,6008
7	1,7	1,7772
8	1,8	1,9625
9	1,9	2,1578
10	2	2,3645

$$\int_1^2 S(t)\,dt \cong$$

$$\cong \frac{0{,}1}{3}\left[S(1)+S(2)+4\sum_{k=0}^{4} S(t_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{4} S(t_{2k})\right]$$

$$\cong 0{,}033333\left[3{,}0441+4\left(S(t_1)+S(t_3)+S(t_5)+S(t_7)+S(t_9)\right) + 2\left(S(t_2)+S(t_4)+S(t_6)+S(t_8)\right)\right]$$

$$\cong 0{,}033333\left[3{,}0441 + 4\times 7{,}2998 + 2\times 5{,}7970\right]$$

$$= 1{,}4612$$

$$\Rightarrow \int_1^2 S(t) \cong 1{,}4612$$ UTILIZANDO 5 CIFRAS SIGNIFICATIVAS Y REDONDEO

NOTA

Scanned with CamScanner

RAMIRO MINELDIN	105876 42375245	HOJA N° 3/4 FECHA 19/02/20

4)

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h(T_a - T) = 0$$

$h = 0{,}01\,m^{-2}$, $T_a = 20$ $\quad T(0) = 40 \quad T(10) = 200$

REESCRIBO LA ECUACION

$T'' - 0{,}01T = -0{,}01 \times 20$

$T'' - 0{,}01T = -0{,}2$

SE PIDE UTILIZAR EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS PARA APROXIMAR LA TEMPERATURA CADA 2 METROS DE LA BARRA

EN ESTE CASO

$P(x) = 0$, $Q(x) = -0{,}01$, $f(x) = -0{,}2$

$x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$, $x_4 = 8$ → PUNTOS MALLA

PLANTEO EL SISTEMA DE ECUACIONES CON $y_i = T_i$ Y

$$\left(1 + \frac{P(x_i)h}{2}\right) y_{i+1} + \left(-2 + h^2 Q(x_i)\right) y_i + \left(1 - \frac{P(x_i)h}{2}\right) y_{i-1} = h^2 f(x_i)$$

$y_2 + (-2{,}04)\, y_1 + y_0 = -0{,}8$

$y_3 + (-2{,}04)\, y_2 + y_1 = -0{,}8$

$y_4 + (-2{,}04)\, y_3 + y_2 = -0{,}8$

$y_5 + (-2{,}04)\, y_4 + y_3 = -0{,}8$

NOTA

REEMPLAZANDO y_0 Y y_5 NOS QUEDA

$$y_2 - 2{,}04\, y_1 = -40{,}8$$

$$y_3 - 2{,}04\, y_2 + y_1 = -0{,}8$$

$$y_4 - 2{,}04\, y_3 + y_2 = -0{,}8$$

$$-2{,}04\, y_4 + y_3 = -200{,}8$$

$$\begin{bmatrix} -2{,}04 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2{,}04 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2{,}04 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2{,}04 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40{,}8 \\ -0{,}8 \\ -0{,}8 \\ -200{,}8 \end{pmatrix}$$

HACIENDO

$F_2 + F_1 \times \dfrac{1}{2{,}04}$, LUEGO $F_3 + F_2 \times \dfrac{1}{1{,}5498}$ Y POR ULTIMO $F_4 + \dfrac{1}{1{,}3948} F_3$

NOS QUEDA

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2{,}04 & 1 & 0 & 0 & -40{,}8 \\ 0 & -1{,}5498 & 1 & 0 & -20{,}8 \\ 0 & 0 & -1{,}3948 & 1 & -14{,}2211 \\ 0 & 0 & 0 & -1{,}3231 & -210{,}9957 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow y_4 = 159{,}4707$ $\Rightarrow y_2 = 93{,}7722$

$\Rightarrow y_3 = 124{,}5281$ $y_1 = 65{,}9668$

RAMIRO MINELDÍN	105876 42575245	HOJA N° 4/4 FECHA 19/02/25

5) $M \frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + ky = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

$k = 100 \frac{Kg}{Seg^2}$ $B = 10 \frac{Kg}{Seg}$ $M = 0{,}5kg$

SE PIDE CALCULAR $y(t)$ PARA $0 < t < 0{,}05$ MEDIANTE DOS ITERACIONES DEL METODO RUNGE KUTTA DEL PUNTO MEDIO

COMO PIDE 2 ITERACIONES Y $0 < t < 0{,}05 \Rightarrow h = 0{,}025$

REESCRIBO LA ECUACION CON LOS DATOS CORRESPONDIENTES

$0{,}5\, y'' + 10\, y' + 100 y = 0$

$$y'' = \frac{-10y' - 100y}{0{,}5} = -20y' - 200y$$

REALIZO EL SIGUIENTE CAMBIO DE VARIABLE

$y' = u$ $y_0 = 1$, $u_0 = 0$

$u' = -20u - 200y = f(u, y)$

$$\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ u_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_i \\ u_i \end{pmatrix} + 0{,}025 \begin{pmatrix} M_2 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

$M_1 = u_i$ $K_1 = f(u_i, y_i)$

$M_2 = u_i + \frac{K_1 h}{2}$ $K_2 = f\left(u_i + \frac{K_1 h}{2}, y_i + \frac{M_1 h}{2}\right)$

NOTA

PRIMER ITERACION

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ u_0 \end{pmatrix} + 0{,}025 \begin{pmatrix} M_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$M_1 = u_0 = 0$ $\qquad K_1 = -20\, u_0 - 200\, y_0 = -200$

$M_2 = u_0 + \frac{K_1 h}{2} = 0 + \frac{-200 \times 0{,}025}{2} = -2{,}5$ $\qquad K_2 = -20\left(u_0 + \frac{K_1 h}{2}\right) - 200\left(y_0 + \frac{M_1 h}{2}\right)$

$K_2 = -20(-2{,}5) - 200\left(1 + \frac{0 \times 0{,}025}{2}\right)$

$K_2 = -150$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}025 \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9375 \\ -3{,}75 \end{pmatrix}$$

SEGUNDA ITERACION

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9375 \\ -3{,}75 \end{pmatrix} + 0{,}025 \begin{pmatrix} M_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$M_1 = u_1 = -3{,}75$ $\qquad K_1 = -20\, u_1 - 200\, y_1 = -112{,}5$

$M_2 = u_1 + \frac{K_1 h}{2} = -3{,}75 + \frac{-112{,}5 \times 0{,}025}{2} = -5{,}1563$

$K_2 = -20\left(u_1 + \frac{K_1 h}{2}\right) - 200\left(y_1 + \frac{M_1 h}{2}\right)$

$K_2 = -20(-5{,}1563) - 200(0{,}89063) = -75$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9375 \\ -3{,}75 \end{pmatrix} + 0{,}025 \begin{pmatrix} -5{,}1563 \\ -75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}80859 \\ -5{,}625 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow y(0{,}025) = 0{,}9375$

$\quad y(0{,}05) = 0{,}80859$

USANDO 5 CIFRAS SIGNIFICATIVAS Y REDONDEO

NOTA