FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

Apellido: Dio ..... Nombres : martin nicolas .....

Padrón: 111048 .....

1. a) La rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente. Se sabe que la cantidad en el instante inicial $t_0 = 0$ es 50 y la constante de proporcionalidad es: $k = -0.6$ (el tiempo está medido en años). Plantear el *Problema de valores iniciales (PVI)* para $0 \leq t \leq 5$.

   b) Usar el método de *Runge Kutta del punto medio* para estimar la cantidad de sustancia presente en $t = 2$ años. Usar $h = 0.5$ y cinco decimales con redondeo.

2. Se sabe que la tasa de crecimiento de una determinada población de bacterias es directamente proporcional al número de bacterias existentes. Se realiza un cultivo en un laboratorio, introduciendo 2.5 millones de bacterias en un recipiente. Se observa que la población se triplica cada hora. Completar la siguiente tabla. Calcular la población existente al cabo de 3.5 horas, usando cuadrados mínimos.

t	0	1.00	2.00	3.00	4.00
$P(t)$	2.5	7,5	22,5	67,5	202,5

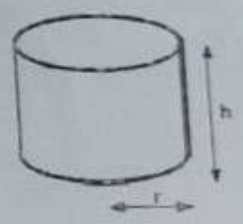
3. a) Use la serie de Taylor para aproximar $f'(x)$ y $f''(x)$ en un entorno de x. Indique claramente todas las hipótesis que usa.

   b) Con lo hecho en el punto anterior resolver por diferencias finitas el siguiente problema de valores en la frontera:

$$y'' = -27x + \frac{28}{3}, \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad y(0) = 1, \qquad y(1) = 0 \tag{1}$$

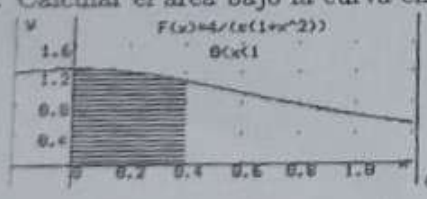
   Con $N = 4$. Usar toda la precisión de la calculadora.

4. Se desea construir un recipiente cilíndrico de metal, con ambas tapas, que tenga de capacidad de 1.2 metros cúbicos. Calcular las dimensiones del radio r y altura h que debe tener sabiendo que se puede contar con 7 metros



cuadrados de material. Usar para la aproximación dos iteraciones del método de *Newton Raphson*.

5. Calcular el área bajo la curva en el intervalo $[0, 0.45]$, que se muestra en la gráfica contigua,



considerar las siguientes coordenadas de los puntos del gráfico y utilizar el método de *Simpson 1/3* para realizar la estimación. Indicar claramente el N y el h que utiliza.

x	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
$y = f(x)$	1.2732	1.2701	1.2606	1.2452	1.2243	1.1983	1.1681	1.1343	1.0976	1.0732

FINAL 2024 2C PRIMERA FECHA	[redacted]	1/

1) a)

DATOS

$$y' = +k\,y$$

$t_0 = 0 \wedge y(t_0) = 50 \wedge k = -0{,}6$

PVI con $0 \leq t \leq 5$

$$\begin{cases} y' = -0{,}6\,y & \text{con } 0 \leq t \leq 5 \\ y(0) = 50 = y_0 \end{cases}$$

b) RK pto medio, estimar en $t = 2$ usando $h = 0{,}5$

x a):

$$\begin{cases} y' = -0{,}6 \cdot y = f(t, y) \rightarrow f(y) \rightarrow \\ y(0) = 50 = y_0 \end{cases}$$

si existe "t" lo saco porque no se usa

x RK pto medio:

$$y_{i+1} = y_i + h\,m_2 \quad \text{con} \quad \begin{aligned} m_1 &= f(y_i) \\ m_2 &= f\left(y_i + \frac{h}{2} \cdot m_1\right) \end{aligned}$$

Tengo q' $t_0 = 0$; $t_1 = t_0 + h = 0{,}5$; $t_2 = 1$; $t_3 = 1{,}5 \wedge t_4 = 2$

~~Aproximación~~

Iteración 1:

$m_1 = f(y_0) = -0{,}6 \cdot 50 = -30$

$m_2 = f\left(50 + \frac{h}{2} \cdot (-30)\right)$
$= -0{,}6 \cdot 42{,}5 = -25{,}5$

$y_1 = y_0 + h\, m_2 = 50 + 0{,}5 \cdot (-25{,}5) = \underbrace{37{,}25} \cong y(0{,}5)$

Iteración 2:

$m_1 = f(y_1) = -0{,}6 \cdot 37{,}25 = -22{,}35$

$m_2 = -0{,}6 \cdot \left(37{,}25 + \frac{0{,}5}{2} \cdot (-22{,}35)\right)$
$= -0{,}6 \cdot 31{,}6625$
$= -18{,}9975$

$y_2 = y_1 + h\, m_2 = 37{,}25 + 0{,}5 \cdot -18{,}9975 = \underbrace{27{,}75125} \cong y(1)$

Iteración 3:

$m_1 = -0{,}6 \cdot 27{,}75125 = -16{,}65075$

$m_2 = -0{,}6 \cdot \left(27{,}75125 + \frac{0{,}5}{2} \cdot -16{,}65075\right)$
$= -0{,}6 \cdot 23{,}58856$
$= -14{,}15314$

$y_3 = y_2 + h\, m_2 = 27{,}75125 + 0{,}5 \cdot -14{,}15314 = \underbrace{20{,}67468} \cong y(1{,}5)$

Iteración 4

$m_1 = -0{,}6 \cdot 20{,}67468 = -12{,}40481$

$m_2 = -0{,}6 \cdot \left(20{,}67468 + \frac{0{,}5}{2} \cdot -12{,}40481\right)$
$= -0{,}6 \cdot 17{,}57348$
$= -10{,}54409$

$y_4 = y_3 + h\, m_2 = 20{,}67468 + 0{,}5 \cdot -10{,}54409 = \underbrace{15{,}40264} \cong y(2)$

$\therefore \boxed{y(t=2) = 15{,}40264}$

2

En $t=0$ se introduce 2,5 millones y se triplica cada hora

t	0	1	2	3	4
$P(t)$	2,5	7,5	22,5	67,5	202,5

Con mínimos cuadrados, EXPONENCIAL calcular $P(3,5)$

•)

Y=A0 * e^(A1*X) → ln Y = ln A0 + A1*X

$$\begin{cases} \ln a_0 = \ln y0 \\ \ln a_0 + a_1 = \ln y1 \\ \ln a_0 + 2a_1 = \ln y2 \\ \ln a_0 + 3a_1 = \ln y3 \\ \ln a_0 + 4a_1 = \ln y4 \end{cases}$$

Con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} ; \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} \ln a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} \ln y0 \\ \ln y1 \\ \ln y2 \\ \ln y3 \\ \ln y4 \end{pmatrix}$$

y si $A^T A \hat{x} = A^T b$ queda que:

$$\begin{pmatrix} m & \sum_{i=0}^{4} x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \ln Yi \\ \sum Xi * \ln Yi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sum}(\ln Yi) \\ \text{sum}(Xi * \ln Yi) \end{pmatrix}$$

Planteo sist. y se resuelve

$$\begin{cases} 5a_0 + 10a_1 = \text{sum}(\ln Yi) \\ 10a_0 + 30a_1 = \text{sum}(Xi * \ln Yi) \end{cases}$$

Se encuentra los valores de A0 y A1, y se reemplaza en la ec: Y=A0 * e^(A1*X)

3 6 DIFERENCIAS FINITAS - PVF

DATOS

$$y'' = -27x + \frac{28}{3} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 1 \quad , \quad y(1) = 0 \quad \wedge \quad N = 4$$

• Dif. Finitas:

se q'

- $y''_i \cong \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$

- $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{4} = 0{,}25$

Planteo el PVF

$$\begin{cases} y'' + 27x - \frac{28}{3} = 0 \\ y(0) = 1 = y_0 \\ y(1) = 0 = y_4 \\ 0 \leq x \leq 1 \ , \ x_0 = 0 \ \wedge \ x_4 = 1 \end{cases}$$

Reemplazo en la ec. / Discretizo:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{0{,}0625} + 27x_i = \frac{28}{3}$$

$$y_{i+1} - 2y_i + y_i - 1 + \frac{27}{16} x_i = \frac{7}{12} \rightarrow \text{ec. para trabajar.}$$

Evalúo la ec. en $i = 1, 2, 3$

$$i=1 \quad y_2 - 2y_1 + \underbrace{y_0}_{=1} + \frac{27}{16} \cdot \underbrace{x_1}_{=0{,}25} = \frac{7}{12}$$

$$i=2 \quad y_3 - 2y_2 + y_1 + \frac{27}{16} \cdot \underbrace{x_2}_{=0{,}5} = \frac{7}{12}$$

$$i=3 \quad \underbrace{y_4}_{=0} - 2y_3 + y_2 + \frac{27}{16} \cdot \underbrace{x_3}_{=0{,}75} = 7/12$$

Reemplazo los valores conocidos y queda el sist.:

$$\begin{cases} y_2 - 2y_1 = -\frac{161}{192} \\ y_3 - 2y_2 + y_1 = -\frac{25}{96} \\ -2y_3 + y_2 = -\frac{131}{192} \end{cases}$$

Resolviendo queda q':

$$\Rightarrow \quad y_2 = \frac{49}{48} \quad y_3 = \frac{109}{128} \quad y_1 = \frac{119}{128}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{y(0{,}5)}{y_2 = 1{,}020833333} \ ; \ \underset{y(0{,}75)}{y_3 = 0{,}8515625} \ ; \ \underset{y(0{,}25)}{y_1 = 0{,}9296875}}$$

5) Calcular área bajo la curva en $[0; 0{,}45]$ con Simpson($1/3$)

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35
$f(x_i)$	1,2732	1,2701	1,2606	1,2452	1,2243	1,1983	1,1681	1,1343

	8	9
	0,4	0,45
	1,0976	1,0732

¿n y h? Sin $f(x)$ no puedo agregar datos y si o si hay q' tener en cuenta los extremos de la integración

× Simpson($1/3$):

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k+1})+2\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k})\right]$$

Usando $n=8$ y $h=0{,}05625$ porque si y agarramos todos los puntos menos x_8 también porq' sí:

$$\int_0^{0{,}45} f(x)\,dx \cong \frac{0{,}05625}{3}\left[f(0)+f(0{,}45)+4\underbrace{\sum_{k=0}^{3} f(x_{2k+1})}_{\text{SUMO IMPARES}}+2\underbrace{\sum_{k=1}^{3} f(x_{2k})}_{\text{SUMO PARES}}\right]$$

$$= 0{,}01875\left[2{,}3464 + 4\cdot 4{,}8479 + 2\cdot 3{,}653\right]$$

$$= 0{,}01875 \cdot 29{,}044 = 0{,}544575$$

$$\therefore \boxed{\int_0^{0{,}45} f(x)\,dx \cong 0{,}544575}$$

4) Capacidad para $1{,}2\ m^3$

Calcular r y h, con $7m^2$ de material.

Fijo uno de los valores.

$$\left.\begin{array}{l} V = 1{,}2\ m^3 = \dfrac{\pi . D^2}{4} . h \Rightarrow h = \dfrac{1{,}2\ m^3 . 4}{\pi . D^2} \\ A = 7\ m^2 = 2 . \dfrac{\pi . D^2}{4} + \pi . D . h \end{array}\right\} 7m^2 = \frac{\pi . D^2}{2} + \frac{\cancel{\pi} \cancel{D} . 1{,}2m^3 . 4}{\cancel{\pi} . D^{\cancel{2}}}$$

$$\Rightarrow 7m^2 = \frac{\pi}{2} D^2 + 4{,}8m^3 . \frac{1}{D}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} D^3 - 7m^2 . D + 4{,}8\ m^3 \longrightarrow$$ Continua por ser de forma polinómica

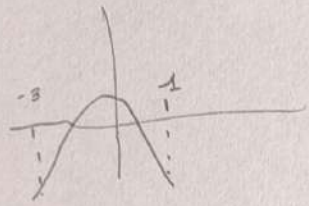
Entre -3 y 1 hay cambio de signo

$f(-3) = -16{,}612$

$f(1) = -0{,}6292$

$f(-2) > 0$

$f(0) > 0$



- Como D tiene que ser > 0
- Tomo intervalo entre 0 y 1 $\quad I = [0 ; 1]$

Analizo $f'(x) = \frac{3\pi}{2} D^2 - 7$ Entre 0 y 1 es siempre negativa

Se cumple que no se anula.

Hago N-R

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{\pi}{2} x_n^3 - 7 x_n + 4{,}8}{\frac{3\pi}{2} x_n^2 - 7}$$

Semilla $= 0{,}5$

x_n	x_{n+1}	Δ
0,5	0,757020	> 0,042406
0,757020	0,799426	> 0,001638
0,799426	0,801064	> 0,000003
0,801064	0,801067	

$$\boxed{D = 0{,}801067 \pm 0{,}000003}$$

$$h = \frac{1{,}2\ m^3 \cdot 4}{\pi \cdot D^2} = \underline{2{,}38097}$$

Adopto $r = 0{,}4\ m$

$h = 2{,}38\ m$