13. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Un sistema de ecuaciones diferenciales tiene la forma general:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_i), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \dots, x_i), \\ \vdots \\ \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_i), \end{cases}$$

con condiciones iniciales:

$$x_1(t_0) = x_{1,0}, \quad x_2(t_0) = x_{2,0}, \quad \dots, \quad x_i(t_0) = x_{i,0}.$$

Este tipo de sistema puede resolverse usando cualquier versión de los métodos numéricos vistos anteriormente (Euler, RK2, RK4, etc.).

13.1 Ejemplo con RK4 para un sistema de dos ecuaciones

Dado:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y), \\ y' = g(t, x, y), \\ x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

el método de Runge-Kutta de orden 4 aplicado al sistema da:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \frac{h}{6} \begin{pmatrix} m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4 \\ k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \end{pmatrix},$$

donde:

$$\begin{aligned} m_1 &= f(t_i, x_i, y_i), \\ m_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}m_1, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \\ m_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}m_2, y_i + \frac{h}{2}k_2\right), \\ m_4 &= f(t_i + h, x_i + hm_3, y_i + hk_3), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} k_1 &= g(t_i, x_i, y_i), \\ k_2 &= g\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}m_1, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= g\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}m_2, y_i + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= g(t_i + h, x_i + hm_3, y_i + hk_3). \end{aligned}$$