FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

09-09-2020 Análisis Numérico I (75.12- 95.04) Integrador

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

Apellido: ..... Nombres : .....

Padrón: .....

1. El teorema del valor medio para integrales establece que:
   Si f es una función continua en un intervalo $[a,b]$, existe $\alpha \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(\alpha)(b-a)$

   a) Sea $f(x) = e^x - sen(\pi x)$ con $x \in [0,2]$, determinar una aproximación del valor de α del teorema del valor medio, usando tres iteraciones del método de la bisección. Usar una aproximación de π y de e con tres decimales.

   b) Sin realizar más iteraciones determinar cuantas se necesitarían para quer el error de truncamiento sea menor que 10^{-6}.

2. Hornbeck en 1975 propuso la siguiente ecuación diferencial ordinaria parásita no lineal:
   $\frac{dy_1}{dt} = 5(y_1 - t^2)$. Si la condición inicial es $y_1(0) = 0.08$. Hallar el valor de $y_1(0.3)$, usando tres iteraciones del método de Runge-Kutta del punto medio.

3. Considerar una masa de 10 kg que está unida a una pared por medio de un resorte de constante $k = 10\frac{N}{m}$. Si se alarga el resorte una distancia de 0.02 m y se suelta a partir del reposo, determinar la posición y la velocidad de la masa en el tiempo $t = 0.3$ s, usar tres pasos del método de Euler. Sabiendo que la ecuación diferencial que caracteriza el movimiento vibratorio del péndulo es:
   $m\frac{dx^2}{dt^2} + kx = 0$

4. *a*) Calcular el trabajo que realiza la fuerza $f(x,y) = (3y^2 + 2, 16x)$ sobre una partícula que recorre la semi circunferencia superior que une los puntos $(1,0)$ con $(-1,0)$ usando la regla de *Simpson 1/3* con $N = 12$.Usar $\pi \simeq 3$. Usar al menos cuatro decimales y redondeo.

   b) Indicar si el error es menor o igual a un décimo.
   $(W = \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt,\ \sigma : [a,b] \to \mathbf{R}^2 / \sigma(t) = (cos(t), sen(t)))$

5. Dado el sistema lineal $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$

   a) Demostrar que $\rho(T_{GS}) = 0.5$. Siendo T_{GS} la matriz del método de *Gauss-Seidel* asociada al sistema.

   b) Realizar tres iteraciones del método de *Gauss-Seidel* utilizar al menos 4 decimales y redondeo. Estimar el error relativo cometido entre dos iteraciones consecutivas.

1	2	3	4	5
R	B	B	B	B

Ferrer, Nicolás 102682

① Teorema del valor medio para integrales

$f \in [a,b]$, $\exists\, \alpha \in [a,b] \,/\, \int_a^b f(x)\,dx = f(\alpha)(b-a)$

a) Sea $f(x) = e^x - \operatorname{sen}(\pi x)$, $x \in [0,2]$

Determinar aprox de α del teorema anterior, usando 3 iteraciones de la bisección. Usar una aprox de π y de e con 3 decimales.

$\pi \approx 3{,}142$ $\qquad e \approx 2{,}718$

Sucesión $\rightarrow$ $p_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^2 \left(e^x - \operatorname{sen}(\pi x)\right) dx = \left[e^x + \frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]\Bigg|_0^2$$

$$= e^2 + \frac{\cos(2\pi)}{\pi} - 1 = \underline{\underline{6{,}706}}$$

$\hookrightarrow \dfrac{6{,}706}{b-a} \cong \dfrac{6{,}706}{2} \cong \boxed{f(\alpha) \cong 3{,}353}$

$\boxed{f(0) = 1}$
$\boxed{f(2) = 7{,}387}$

Sucesión $\boxed{p_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}}$

$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ b_1 = 2 \end{array}\right\}$ $p_1 = 1$

$\hookrightarrow f(p_1) = 2{,}718 \rightarrow$ $\boxed{\text{por lo tanto } \alpha \text{ está entre } p_1 \text{ y } b_1}$

$\left.\begin{array}{l} a_2 = p_1 = 1 \\ b_2 = b_1 = 2 \end{array}\right\}$ $p_2 = 1{,}5 \rightarrow f(p_2) = 5{,}481 \rightarrow$ α está entre a_2 y p_2

$\left.\begin{array}{l} a_3 = a_2 = 1 \\ b_3 = p_2 = 1{,}5 \end{array}\right\}$ $\boxed{p_3 = 1{,}25} \rightarrow \boxed{f(p_3) = 4{,}197}$

NOTA

Scanned with CamScanner

Ferrer, Nicolás 102682 9/9/20

b) Iteraciones necesarias para que el error de truncamiento sea menor que 10^{-6}.

$\boxed{\varepsilon = 10^{-6}}$

$$\boxed{n > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}$$

- $b = 2$
- $a = 0$
- n = número de iteraciones

en caso de no ser entero se redondea hacia arriba.

Asegura que el error sea menor a ε.

Se puede obtener antes

$$n > \log_2\left(\frac{2}{10^{-6}}\right)$$

$$n > 20{,}9316$$

Con $n = 21$ iteraciones aseguramos un error menor que 10^{-6}.

Scanned with CamScanner

Ferrer, Nicolás 102682

HOJA N°

FECHA 9/9/20

(3) $m = 10\ kg$; $K = 10\ \frac{N}{m}$

Determinar posición y velocidad de la masa en $t = 0{,}3$ seg
3 pasos del método de Euler.

$$\begin{cases} m \cdot \frac{dx^2}{dt^2} + kx = 0 \\ x(0) = 0{,}02\ m \end{cases} \qquad \begin{cases} m x'' + kx = 0 \\ \boxed{\begin{matrix} x(0) = 0{,}02 \\ V(0) = 0 \end{matrix}} \end{cases}$$

Realizo un cambio de variable $\rightarrow$ $\boxed{V = x'}$
De modo que queda:

$$\begin{cases} 10 \cdot V' + 10x = 0 \rightarrow V' = -x \rightarrow \boxed{f(V, x) = -x} \\ x(0) = 0{,}02 = x_0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} V_{i+1} \\ X_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_i \\ X_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(V_i, x(t_i)) \\ V_i \end{pmatrix}}$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

$$h = \frac{0{,}3 - 0}{3}$$

$$\boxed{h = 0{,}1}$$

- $$\begin{pmatrix} V_1 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 \\ X_0 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} f(V_0 ; x_0(t_0 = 0)) \\ V_0 \end{pmatrix} \rightarrow f(0 ; 0{,}02) = -0{,}02$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}02 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} -0{,}02 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}002 \\ 0{,}02 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} V_2 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ X_1 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} f(V_1 ; x_1(t_1 = 0{,}1)) \\ V_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}002 \\ 0{,}02 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} f(-0{,}002 ; 0{,}02) \\ -0{,}002 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow -0{,}02$

NOTA

Scanned with CamScanner

Ferrer

- $\begin{pmatrix} V_2 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}002 \\ 0{,}02 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} -0{,}02 \\ -0{,}002 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} V_2 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}004 \\ 0{,}0198 \end{pmatrix}}$

- $\begin{pmatrix} V_3 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 \\ X_2 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} f(V_2; X_2) \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}004 \\ 0{,}0198 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} -0{,}0198 \\ -0{,}004 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} V_3 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}00598 \\ 0{,}0194 \end{pmatrix}}$$

↳ Por lo tanto la velocidad y la posición de la masa en el tiempo $t = 0{,}3$ segundos es $-0{,}00598 \ \frac{m}{s}$ y $0{,}0194$ m respectivamente

Scanned with CamScanner

Ferrer, Nicolás 102682

HOJA N°

FECHA 9/9/20

(2) ecuación diferencial ordinaria parásita no lineal:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 5(y_1 - t^2) \\ y_1(0) = 0{,}08 \end{cases}$$

Hallar $y_1(0{,}3)$ usando 3 iteraciones del método de Runge-Kutta del punto medio.

$$\Downarrow \begin{cases} y_1' = 5(y_1 - t^2) \\ y_1(0) = 0{,}08 \end{cases} \longrightarrow \boxed{f(t_i; y_1) = 5(y_1 - t^2)}$$

$$\boxed{y_{1\,i+1} = y_{1\,i} + h \cdot k_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= f(t_i; y_{1\,i}) \\ k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}; y_{1\,i} + \frac{h k_1}{2}\right) \end{aligned}}$$

$N = 3$ (iteraciones)

$h = \dfrac{b-a}{N}$ (paso)

$h = \dfrac{0{,}3}{3} \rightarrow \boxed{h = 0{,}1}$

$\boxed{i=0}$ • $k_1 = f(t_0; y_{1\,0}) = f(0; 0{,}08) = 2/5$

$k_2 = f\left(t_0 + \frac{0{,}1}{2}; y_{1\,0} + \frac{0{,}1 \cdot 2/5}{2}\right) = f(0{,}05; 1) = 39/80$

$\hookrightarrow y_{1\,1} = y_{1\,0} + h \cdot k_2 \rightarrow y_1 = 0{,}08 + 0{,}1 \cdot \frac{39}{80} \rightarrow \boxed{y_1 = \frac{103}{800}}$

$\boxed{i=1}$ • $k_1 = f(t_1; y_1) = f(0{,}1; 103/800) = 19/32$

$k_2 = f(t_1 + 0{,}05; y_1 + 0{,}05 \cdot k_1) = f\left(0{,}15; \frac{507}{3200}\right) = 87/128$

$\hookrightarrow y_2 = y_1 + h k_2 \rightarrow y_2 = \frac{103}{800} + 0{,}1 \cdot \frac{87}{128} \rightarrow \boxed{y_2 = \frac{1259}{6400}}$

$\boxed{i=2}$ • $k_1 = f(t_2; y_2) = f\left(0{,}2; \frac{1259}{6400}\right) = 1003/1280$

• $k_2 = f(t_2 + 0{,}05; y_2 + 0{,}05 k_1) = f\left(0{,}25; \frac{6039}{25600}\right) = \frac{4439}{5120}$

$\hookrightarrow y_3 = y_2 + h k_2 \rightarrow y_3 = \frac{1259}{5120} + 0{,}1 \cdot \frac{4439}{5120} \Rightarrow \boxed{y_3 = 0{,}2834}$

(Respuesta con 3 decimales)

NOTA

Scanned with CamScanner

Ferrer, Nicolás 102682 7/7/20

(4) a) Calcular el trabajo que realiza la fuerza $f(x,y) = (3y^2+2 ; 16x)$ sobre una partícula que recorre una semicircunferencia que une los puntos $(1;0)$ con $(-1;0)$ usando la regla de Simpson 1/3 con $N=12$. ($\pi \simeq 3.$ 4 decimales y redondeo)

~~La semicircunferencia se escribe como~~

~~$C(x,y) = (\cos(x) ; \operatorname{sen}(x)) ; x \in [0,\pi]$~~

$$W = \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt \quad ; \quad \sigma \in [a,b] \to \mathbb{R}^2 \,/\, \sigma(t) = (\cos(t) ; \operatorname{sen}(t))$$

en nuestro caso $\sigma \in [0, \pi]$ $\boxed{a = 0 \text{ y } b = 3}$

$$\underbrace{f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)}_{} = (3\operatorname{sen}^2 t + 2 ; 16\cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t ; \cos t)$$

$$\boxed{g(t) = -3\operatorname{sen}^3 t - 2\operatorname{sen} t + 16\cos^2 t}$$

Por lo tanto, usamos Simpson 1/3 para resolver (aproximando)

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_0^3 g(t)\,dt \cong \frac{h}{3}\left[g(a) + g(b) + 4\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}} g(t_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} g(t_{2k})\right]$$

$$\boxed{\int_0^3 g(t)\,dt \cong \frac{1}{12}\left[g(0) + g(3) + 4\sum_{k=0}^{5} g(t_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{5} g(t_{2k})\right]} \quad h = \frac{b-a}{N} = \frac{3}{12}$$

(1) $\boxed{h = 0{,}25}$

donde $\to$ $g(0) = -3\operatorname{sen}^3(0) - 2\operatorname{sen}(0) + 16\cos^2(0)$

$\boxed{g(0) = 16}$

$\hookrightarrow g(3) = -3\operatorname{sen}^3(3) - 2\operatorname{sen}(3) + 16\cos^2(3) \Rightarrow \boxed{g(3) = 15{,}3907}$

$\hookrightarrow 4\sum_{k=0}^{5} g(t_{2k+1}) = 4[g(0{,}25) + g(0{,}75) + g(1{,}25) + g(1{,}75)$
$g(2{,}25) + g(2{,}75)]$

NOTA

Scanned with CamScanner

Ferrer, Nicolás 102682 FECHA 9/9/20

(4) (continuación)

- $g(0,25) = 14,4804$
- $g(0,75) = 6,2525$
- $g(1,25) = -2,8710$
- $g(1,75) = -4,3178$
- $g(2,25) = 3,3449$
- $g(2,75) = 12,7393$
- $g(0,5) = 11,0330$
- $g(1) = 1,2009$
- $g(1,5) = -4,8924$
- $g(2) = -1,3032$
- $g(2,5) = 8,8213$

$$\rightarrow 2\sum_{k=1}^{5} g(t_{2k}) = 2\left[g(0,5) + g(1) + g(1,5) + g(2) + g(2,5)\right]$$

Reemplazando en (1) obtengo:

$$\boxed{\begin{aligned} 4\sum_{k=0}^{5} g(t_{2k+1}) &= 118,5112 \\ 2\sum_{k=1}^{5} g(t_{2k}) &= 29,7342 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\int_0^3 g(t)\,dt \cong 14,9697}$$

↳ es el trabajo que realiza la fuerza sobre la partícula.

b) Indicar si el orden del error es menor o igual a 1/10

$$|E_T| \leq h^4 \frac{b-a}{180} \cdot t \quad ; \quad \text{con } |g^{(iv)}(t)| \leq L \quad \forall t \in [0,3]$$

$$g(t) = -3(\operatorname{sen}(t))^3 - 2\operatorname{sen} t + 16(\cos t)^2$$

$$g'(t) = -9(\operatorname{sen} t)^2 \cdot \cos t - 2\cos t + 32\cos t \cdot -\operatorname{sen} t$$

$$g''(t) = -18\operatorname{sen} t \cdot \cos^2 t + 9\operatorname{sen}^3 t + 2\operatorname{sen} t + 32\operatorname{sen}^2 t - 32\cos^2 t$$

$$g'''(t)$$

NOTA

Scanned with CamScanner

Ferrer, Nicolás 102682 9/7/20

b) si el orden del error es menor o igual a 1/10

tenemos $\underline{\underline{h = 0{,}25}}$

el orden del error para Simpson 1/3 es $O(h^4)$

$$\boxed{O(h^4) = \frac{1}{256} \leq \frac{1}{10}} \rightarrow O(h^4) \leq \frac{1}{10}$$

Scanned with CamScanner

Ferrer, Nicolás 102682

HOJA 11

FECHA 9/9/20

(5) sistema $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$

b) 3 iteraciones del método de Gauss-Seidel (4 decimales y redondeo). Estimar error relativo cometido entre 2 iteraciones consecutivas.

$$A \cdot x = b \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$A = D - L - U \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \; L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \; U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X^{(k+1)} = T \cdot x^{(k)} + C}$$

con $\rightarrow T = (D-L)^{-1} \cdot U \rightarrow \boxed{T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}}$

$\rightarrow C = (D-L)^{-1} \cdot b \rightarrow \boxed{C = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}}$

$\rightarrow$ Uso como semilla $X^{(0)}$ la solución trivial $\rightarrow X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $X^{(1)} = T \cdot X^{(0)} + C \rightarrow X^{(1)} = C = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$
- $X^{(2)} = T X^{(1)} + C \rightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ -3/4 \end{pmatrix}$
- $X^{(3)} = T X^{(2)} + C \rightarrow \boxed{X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0{,}875 \\ 1{,}875 \\ -1{,}125 \end{pmatrix}}$

HOJA

Scanned with CamScanner

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \qquad X^{(2)} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ -3/4 \end{pmatrix} \qquad X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,875 \\ 1,875 \\ -1,125 \end{pmatrix}$$

Estimo el error relativo entre $\underbrace{X^{(1)} \text{ y } X^{(2)}}$ y $\underbrace{X^{(2)} \text{ y } X^{(3)}}$.

10.1

- $$\frac{\| X^{(2)} - X^{(1)} \|_\infty}{\| X^{(1)} \|_\infty} = \frac{2}{5/2} = \boxed{\frac{4}{5} = 0,8}$$

- $$\frac{\| X^{(3)} - X^{(2)} \|_\infty}{\| X^{(2)} \|_\infty} = \frac{0,625}{2} = \frac{5/8}{2} = \boxed{\frac{5}{16} = 0,3125}$$

$-0,625$

$-0,125$

$-0,375$

Scanned with CamScanner

Índice de comentarios

1.1 8

1.2 CUAL ES LA F? A LA QUE LE TIENE QUE BUSCAR LA RAIZ POR EL MÉTODO DE LA BISECCION?

5.1 NO TRABAJE CON FRACCIONES

9.1 NO TRABAJE CON FRACCIONES

10.1 NO DEBE DIVIDIR POR LA NORMA DE X2