FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

Apellido: ..... Nombres : .....

Padrón: .....

1. Suponga que en un pequeño bosque la población de venados $P(t)$, inicialmente con 25 individuos, satisface la ecuación logística:

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = 0.0225P(t) - 0.0003P(t)^2 \\ P(0) = 25 \quad \text{el tiempo está medido en meses} \end{cases}$$

   a) Utilizar tres iteraciones del método de Runge-Kutta del punto medio para aproximar la población en 6 meses. Trabajar al menos con cuatro cifras decimales y redondeo.

   b) ¿Qué porcentaje de la población se incrementó en ese tiempo?

2. Se sabe que la tasa de crecimiento de una determinada población de bacterias es directamente proporcional al número de bacterias existentes. Se realiza un cultivo en un laboratorio, introduciendo 2.5 millones de bacterias en un recipiente. Se observa que la población se triplica cada hora. Completar la siguiente tabla. Calcular la población existente al cabo de 3.5 horas, usando cuadrados mínimos:

t	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00
$P(t).10^6$	2.5				

3. El teorema del valor medio para integrales establece que:
Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, existe $\alpha \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(\alpha)(b - a)$

   a) Sea $f(x) = e^x - sen(\pi x)$ con $x \in [0, 2]$, determinar una aproximación del valor de α del teorema del valor medio, usando tres iteraciones del método de la bisección. Usar una aproximación de π y de e con tres decimales.

   b) Sin realizar más iteraciones determinar cuantas se necesitarían para quer el error de truncamiento sea menor que 10^{-6}.

4. *a*) Calcular el trabajo que realiza la fuerza $f(x, y) = (3y^2 + 2,16x)$ sobre una partícula que recorre la semi circunferencia superior que une los puntos $(1, 0)$ con $(-1, 0)$ usando la regla de *Simpson 1/3* con $N = 12$.Usar $\pi \simeq 3$. Usar al menos cuatro decimales y redondeo.

   b) Indicar si el error es menor o igual a un décimo.
$(W = \int_a^b f(\sigma(t))\sigma^{'}(t)dt,\ \sigma : [a, b] \to \mathbf{R}^2/\sigma(t) = (cos(t), sen(t)))$

5. Considerar una barra delgada de longitud l que se mueve en el plano $x-y$. La barra se fija en uno de sus extremos con un alfiler y con una masa en el otro. Este sistema se resuelve con la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:
$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - \frac{g}{l}\theta(t) = 0$. Sabiendo que: $g = 9.81\frac{m}{s^2}$, $l = 0.5$ m, $\theta(0) = 0$ y $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0.25\frac{rad}{s}$. Hallar el ángulo y la velocidad angular en $t = 0.2$ segundos utilizando dos iteraciones del método de Runge-Kutta del punto medio.

1	2	3	4	5
B	M	∅	B	B

Ej 1) Tengo el siguiente PVI (sem)

$$\begin{cases} P' = 0{,}0225\,P - 0{,}0003\,P^2 \quad — f(t,P) \\ P(0) = 25 = P_0 \end{cases}$$

1-a) Con tres iteraciones de RK del punto medio quiero aproximar la población en 6 meses

$$\Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{6-0}{3} = 2$$

RK del punto medio:

$$P_{n+1} = P_n + h\,K_2 \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} K_1 = f(t\ ;\ P) \\ K_2 = f(t+\frac{h}{2}\ ;\ P+\frac{h}{2}K_1) \end{array}$$

Tengo que: $t_0 = 0$; $t_1 = t_0 + h = 2$; $t_2 = 4$ y $t_3 = 6$

<u>Iteración 1:</u>

$$P_1 = P_0 + h\,K_2 = 25 + 2 \cdot 0{,}3778 = \underline{25{,}7556}$$

$$K_1 = 0{,}0225 \cdot 25 - 0{,}0003 \cdot 25^2 = 0{,}3750$$

$$K_2 = 0{,}0225 \cdot \left(25 + \tfrac{2}{2} \cdot 0{,}375\right) - 0{,}0003 \cdot (25 + 0{,}375)^2$$
$$= 0{,}3778$$

→

Iteración 2:

$$P_2 = P_1 + h K_2 = 25{,}7556 + 2 \cdot 0{,}3831 = \boxed{26{,}5218}$$

$$K_1 = 0{,}0225 \cdot 25{,}7556 - 0{,}0003 \cdot (25{,}7556)^2 = 0{,}3805$$

$$K_2 = 0{,}0225 \cdot (25{,}7556 + 0{,}3805) - 0{,}0003 \cdot (25{,}7556 + 0{,}3805)^2$$
$$= 0{,}3831$$

Iteración 3:

$$P_3 = P_2 + h K_2 = 26{,}5218 + 2 \cdot 0{,}3882 = \boxed{27{,}2982}$$

$$K_1 = 0{,}0225 \cdot 26{,}5218 - 0{,}0003 \cdot (26{,}5218)^2 = 0{,}3857$$

$$K_2 = 0{,}0225 \cdot (26{,}5218 + 0{,}3857) - 0{,}0003 \cdot (26{,}5218 + 0{,}3857)^2$$
$$= 0{,}3882$$

$$\therefore \boxed{P(6) \cong 27}$$

1-b)

En 6 meses la población pasa de 25 a 27 venados aproximadamente, lo que implica un incremento del 8% en la población.

g2) Inicialmente 3,5 millones de bacterias, se triplican cada hora. Completa la tabla:

t	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00
$P(t)\cdot 10^6$	2,5	7,5	22,5	67,5	202,5

Ante la duda GRAFIQUEN la función, era una boludez este ejercicio.
Atte: el q lo resolvió mal

Ahora quiero $P(3,5)$ usando cuadrados mínimos, ~~ya~~ como tiene un comportamiento lineal propongo la siguiente función para ~~resolver~~:

$$y = a_0 + a_1 x \quad ; \quad x = t \quad y = P(t)$$

mal el modelo

cuando es $P(t) = ae^{bt}$

Usando los datos de la tabla planteo el sistema de la forma $A\hat{x} = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; \hat{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \; ; \; b = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 7,5 \\ 22,5 \\ 67,5 \\ 202,5 \end{pmatrix}$$

Planteo $A^T A \hat{x} = A^T b$ para resolver el sistema, lo que me da como resultado:

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

Reemplazando

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 302,5 \\ 1065 \end{pmatrix}$$

→

Planteo el sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} 5a_0 + 10a_1 = 302{,}5 \longrightarrow a_0 = 60{,}5 - 2a_1 \Rightarrow \boxed{a_0 = -31{,}8} \\ 10a_0 + 30a_1 = 1065 \longrightarrow 605 - 20a_1 + 30a_1 = 1065 \end{cases}$$

$$10a_1 = 460$$

$$\boxed{a_1 = 46}$$

Reemplazo en la ecuación los valores de a_0 y a_1:

$$y = -31{,}8 + 46x$$

Calculo $P(3{,}5)$:

$$\boxed{P(3{,}5) = -31{,}8 + 46 \cdot 3{,}5 = 129{,}2}$$

2

Ej. 5 Tengo que:

$g = 9{,}81 \qquad l = 0{,}5 \qquad \theta(0) = 0 \ \wedge \ \theta'(0) = 0{,}25$

Reemplazando en la ecuación:

$$\theta'' - \frac{9{,}81}{0{,}5}\theta = 0 \longrightarrow \theta'' = 19{,}62\,\theta$$

Quiero $\theta(0{,}2)$ y $\theta'(0{,}2)$ utilizando dos iteraciones de RK del punto medio.

$\Longrightarrow h = \frac{0{,}2-0}{2} = 0{,}1$ y $t_0 = 0$; $t_1 = t_0 + h = 0{,}1$ y $t_2 = 0{,}2$

Planteo que:

$$\begin{cases} \theta'' = 19{,}62\,\theta \\ \theta(0) = 0 \\ \theta'(0) = 0{,}25 \end{cases}$$

Propongo el siguiente cambio de variables: $u = \theta'$

Reemplazando

$$\begin{cases} \theta'(t) = u(t) \\ u' = 19{,}62\,\theta = f(t, \theta, u) \\ \theta(0) = 0 = \theta_0 \text{ ——— } m \\ u(0) = 0{,}25 = u_0 \text{ ——— } k \end{cases}$$

× RK del punto medio:

$$\begin{pmatrix}\theta_{n+1}\\ u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta_n\\ u_n\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}m_2\\ k_2\end{pmatrix}$$

$m_1 = u$ $\qquad$ $k_1 = f(t,\theta,u)$

$m_2 = u + \frac{h}{2}\cdot k_1$ $\qquad$ $k_2 = f\left(t+\frac{h}{2};\theta+\frac{h}{2}\cdot m_1;u+\frac{h}{2}k_1\right)$

<u>Iteración 1:</u>

$m_1 = u_0 = 0{,}25$ $\qquad$ $k_1 = 19{,}62\cdot 0 = 0$

$m_2 = 0{,}25 + \frac{0{,}1}{2}\cdot 0 = 0{,}25$ $\qquad$ $k_2 = 19{,}62\cdot\left(0+\frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}25\right) = 0{,}24525$

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ u_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta_0\\ u_0\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}m_2\\ k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0{,}25\end{pmatrix}+0{,}1\begin{pmatrix}0{,}25\\ 0{,}24525\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}025\\ 0{,}27453\end{pmatrix}$$

<u>Iteración 2:</u>

$m_1 = u_1 = 0{,}27453$ $\qquad$ $k_1 = 19{,}62\cdot 0{,}025 = 0{,}4905$

$m_2 = 0{,}27453 + \left(\frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}4905\right) = 0{,}29906$ $\qquad$ $k_2 = 19{,}62\cdot\left(0{,}025+\frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}27453\right) = 0{,}75981$

$$\begin{pmatrix}\theta_2\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta_1\\ u_1\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}m_2\\ k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}025\\ 0{,}27453\end{pmatrix}+0{,}1\begin{pmatrix}0{,}29906\\ 0{,}75981\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}05491\\ 0{,}35051\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \boxed{\theta(0{,}2)=0{,}05491 \ \wedge\ u(0{,}2)=\theta'(0{,}2)=0{,}35051}$$

Utilizando ~~hasta~~ 5 decimales y redondeo.

Ej ④ a) Tengo que:

$f(x,y) = (3y^2+2, 16x)$

$\sigma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$

$N = 12$, $\pi \approx 3$

Como dice que se recorre la semicircunferencia superior entonces $t \in [0;\pi]$ ó $t \in [0;3]$

y $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{12} = 0{,}25$

Calculo:

$f(\sigma(t)) = (3\cdot\operatorname{sen}(t)^2+2, 16\cos(t))$

$\sigma'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$

$f(\sigma(t))\cdot\sigma'(t) = -3\operatorname{sen}(t)^3 - 2\operatorname{sen}(t) + 16\cos(t)^2 = g(t)$

Quiero $W = \int_0^3 g(t)\,dt$ usando Simpson (1/3)

Calculo puntos de la función según el paso $h = 0{,}25$

$g(0) = 16 = g_0$

$g(0{,}25) = 14{,}4804$

$g(0{,}5) = 11{,}0330$

$g(0{,}75) = 6{,}2525$

$g(1) = 1{,}2004$

$g(1{,}25) = -2{,}8710$

$g(1{,}5) = -4{,}8924$

$g(1{,}75) = -4{,}3178$

$g(2) = -1{,}3032$

$g(2{,}25) = 3{,}3444$

$g(2{,}5) = 8{,}4293$

$g(2{,}75) = 12{,}7393$

$g(3) = 15{,}3907 = g_{12}$

→

Resolvo usando Simpson (1/3):

$$W = \int_a^b g(t)\,dt \cong \frac{h}{3}\left[g(a) + g(b) + 4\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} g(t_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} g(t_{2k})\right] =$$

$$= \frac{0{,}25}{3}\left[g(0) + g(3) + 4\sum_{k=0}^{5} g(t_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{5} g(t_{2k})\right] =$$

$$= 0{,}0833\left[16 + 15{,}3907 + 4 \cdot 29{,}6278 + 2 \cdot 14{,}4671\right] =$$

$$= 14{,}8970$$

$$\therefore \boxed{W = \int_0^3 g(t)\,dt \cong 14{,}8970}$$

HOJA Nº

FECHA

4-b) El error en Simpson (1/3) es del orden de

$$O(h^4) = O(0{,}25^4)$$

$$\Rightarrow 0{,}25^4 = 0{,}00390625 < 0{,}1$$

que es menor a un decimo

2

En $t=0$ se introduce 2,5 millones y se triplica cada hora

t	0	1	2	3	4
$P(t)$	2,5	7,5	22,5	67,5	202,5

Con mínimos cuadrados, EXPONENCIAL calcular $P(3,5)$

•)

Y=A0 * e^(A1*X) → ln Y = ln A0 + A1*X

$$\begin{cases} \ln a_0 = \ln y0 \\ \ln a_0 + a_1 = \ln y1 \\ \ln a_0 + 2a_1 = \ln y2 \\ \ln a_0 + 3a_1 = \ln y3 \\ \ln a_0 + 4a_1 = \ln y4 \end{cases}$$

Con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} ; \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} \ln a0 \\ a_1 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} \ln y0 \\ \ln y1 \\ \ln y2 \\ \ln y3 \\ \ln y4 \end{pmatrix}$$

y si $A^T A \hat{x} = A^T b$ queda que:

$$\begin{pmatrix} m & \sum_{i=0}^{4} x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \ln Yi \\ \sum Xi * \ln Yi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sum(\ln Yi) \\ sum(Xi * \ln Yi) \end{pmatrix}$$

Planteo sist. y se resuelve

$$\begin{cases} 5a_0 + 10a_1 = sum(\ln Yi) \\ 10a_0 + 30a_1 = sum(Xi * \ln Yi) \end{cases}$$

Se encuentra los valores de A0 y A1, y se reemplaza en la ec: Y=A0 * e^(A1*X)