18-12-2024

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Análisis Numérico I (75.12, 95.04, 95.13)

Integrador

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

Apellido: ..... Nombres : .....

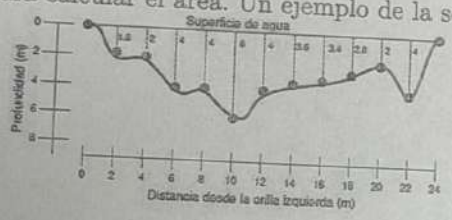
Padrón: .....

1. En una prueba de calidad del acero se determinaron los desgaste por rozamiento del acero dulce y la viscosidad del aceite. Los datos representativos con, x igual a la viscosidad del aceite e y el volumen del desgaste (10^{-2}mm) son:

x	1.6	1.8	2.1	2.5	3.0	4.0
y	2.7	3.5	5.0	8.0	14.5	48.5

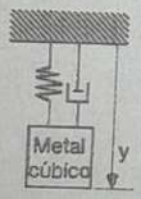
Ajustar un modelo exponencial para estimar el volumen de desgaste para una viscosidad $x = 3.5$.

2. Las áreas de la sección transversal de los ríos se necesitan en varias tareas en la ingeniería hidráulica, como pronósticos de inundación y diseño de presas. A menos que se disponga de dispositivos electrónicos de sonido para obtener perfiles continuos del fondo del río, el ingeniero debe basarse en mediciones discretas de la profundidad para calcular el área. Un ejemplo de la sección transversal en un río se muestra en la siguiente figura:



Los puntos representan las posiciones donde se ancló un bote y se tomaron lecturas de diferentes profundidades. Estimar el área de la sección transversal mediante el método de *Simpson 1/3* indicar el error que comete en la estimación.

3. Cierto material de forma cúbica, con una masa $M = 0.5$ kg se pone en el extremo inferior de un resorte sin masa. El extremo superior se fija a una estructura en reposo. El cubo recibe una resistencia de $R = -B\frac{dy}{dt}$ del aire, donde B es una constante de amortiguamiento. La ecuación de movimiento es: $M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + ky = 0$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Donde y es el desplazamiento desde la posición estática. La constante $k = 100\frac{kg}{seg^2}$, es la constante del resorte y $B = 10kg/seg$.



.Utilizar dos iteraciones del método de *Runge Kutta* del punto medio para estimar el desplazamiento y la velocidad al cabo de 0.1 segundos.

4. La ecuación diferencial para un cable flexible de 50 metros de largo, que está fijo en sus dos extremos es: $y''(x) = -w(x)/T$, $y(0) = y(50) = 0$ donde x se mide en metros, $y(x)$ es el desplazamiento del cable medido desde el nivel de sus dos extremos (con sentido positivo hacia abajo), T es la componente horizontal de la tensión ($5000kg$) y $w(x)$ es la distribución de carga, dada por: $w(x) = 20[1 + e^{\frac{x}{25}}]\frac{kg}{m}$. Determinar la deflexión del cable. Utilizar 5 intervalos en la retícula.

5. La distribución de la velocidad de un fluido cerca de una superficie plana está dada por la siguiente tabla:

i	0	1	2	3	4
y_i	0	0.002	0.004	0.006	0.008
u_i	0	0.006180	0.011756	0.016180	0.019021

La ley de Newton para la tension superficial está dada por: $\tau = \mu\frac{du}{dy}$. Donde μ es la viscosidad que suponemos vale $0.001\frac{Ns}{m^2}$ Calcular la tensión superficial en y_2. Si es posible use diferencias centradas, caso contrario justifique la respuesta.

FINAL 2024 2C – SEGUNDA FECHA

(1) A partir con un modelo exponencial para estimar con $x = 3,5$

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1,6	1,8	2,1	2,5	3,0	4,0
y_i	2,7	3,5	5,0	8,0	14,5	48,5

Planteo

$$y = a_0 e^{a_1 x}$$

Linealizando:

$$\ln y_i = \ln a_0 + a_1 x_i$$

Planteo el sist.:

$$\begin{cases} \ln a_0 + a_1 \cdot 1,6 = \ln 2,7 \\ \ln a_0 + a_1 \cdot 1,8 = \ln 3,5 \\ \ln a_0 + a_1 \cdot 2,1 = \ln 5 \\ \ln a_0 + a_1 \cdot 2,5 = \ln 8 \\ \ln a_0 + a_1 \cdot 3 = \ln 14,5 \\ \ln a_0 + a_1 \cdot 4 = \ln 48,5 \end{cases}$$

Donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1,6 \\ 1 & 1,8 \\ 1 & 2,1 \\ 1 & 2,5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} ; \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} \ln a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} \ln 2,7 \\ \ln 3,5 \\ \ln 5 \\ \ln 8 \\ \ln 14,5 \\ \ln 48,5 \end{pmatrix}$$

Planteo $A^T A \hat{x} = A^T b$ con lo q' queda:

$$\begin{pmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma \ln y_i \\ \Sigma x_i \ln y_i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 15 & 41,46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,49060664 \\ 35,97130079 \end{pmatrix}$$

Planteo el sist. y resuelvo

$$\begin{cases} 6 \ln a_0 + 15 a_1 = 12,\ldots \\ 15 \ln a_0 + 41,46 a_1 = 35,\ldots \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_0 = 0,40104 \\ a_1 = 1,19818 \end{matrix}$$

$$\therefore \boxed{y = 0,40104 e^{1,19818 \cdot x}} \quad \boxed{y(3,5) = 26,57973}$$

Con $y = a_0 \cdot 10^{a_1 x}$

$\rightarrow \log y_i = \log a_0 + a_1 x_i$

Queda el sig. sist.

$$\begin{cases} 6 \log a_0 + 15 a_1 = 5,42460 \\ 15 \log a_0 + 41,46 a_1 = 15,62214 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 = 0,52036 \quad a_0 = 0,67246$$

$$\Rightarrow y = 0,67246 \cdot 10^{0,52036 \cdot x}$$

$$y(3,5) = 44,55808$$

NO TIENE MUCHO SENTIDO ESTE VALOR CON LOS DATOS DADOS

2) Estimar el área mediante Simpson 1/3

DATOS

x_i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$f(x_i)$	0	1,8	2	4	4	6	4	3,6	3,4	2,8	2	4	0
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Tengo 13 datos $\Rightarrow n = 12 \rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{24-0}{12} = 2$

x Simpson (1/3)

$$\int_0^{24} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\underbrace{\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k+1})}_{\text{SUMO IMPARES}} + 2\underbrace{\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k})}_{\text{SUMO PARES}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[0+0+4\sum_{k=0}^{5} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{5} f(x_{2k})\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[4\cdot 22{,}2 + 2\cdot 15{,}4\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[119{,}6\right] = 79{,}73333$$

$$\therefore \boxed{\int_0^{24} f(x)\,dx \cong 79{,}73333}$$

El error es del orden $O(h^4)$

$\therefore h^4 = 2^4 = 16$

$\Rightarrow$ El error q' se comete es de ± 16

③ RK pto medio

DATOS

$M = 0{,}5 \quad k = 100 \quad B = 10$

ec. de movimiento $M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + ky = 0$

$y(0) = 1 \wedge y'(0) = 0$

Estimar desplazamiento y velocidad al cabo de 0,1 seg. con 2 iteraciones de RK pto medio.

•) Reemplazando con los datos en la ec.

$$\begin{cases} 0{,}5\,y'' + 10\,y' + 100\,y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variables $u(t) = y'(t)$:

SI EXISTE "t" PERO COMO NO SE USA LO SACO

$$\begin{cases} u(t) = y'(t) \\ 0{,}5\,u' + 10\,u + 100\,y = 0 \rightarrow -20u - 200y = u' = f(t, y, u) - f(y, u) \\ y(0) = 1 = y_0 - m \\ u(0) = 0 = u_0 - k \end{cases}$$

× RK pto medio

$$\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ u_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_i \\ u_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

con

$m_1 = u_i \qquad k_1 = f(y_i, u_i)$

$m_2 = u_i + \frac{h}{2} \cdot k_1 \qquad k_2 = f\left(y_i + \frac{h}{2} \cdot m_1 ; u_i + \frac{h}{2} \cdot k_1\right)$

→

→ quiero ir hasta 0,1 con 2 iteraciones

$\Rightarrow h = \frac{0{,}1-0}{2} = 0{,}05$

y tengo q': $t_0 = 0$; $t_1 = t_0 + h = 0{,}05$; $t_2 = t_1 + h = 0{,}1$

Iteración 1

$m_1 = u_0 = 0$

$m_2 = 0 + \frac{0{,}05}{2} \cdot -200 = -5$

$k_1 = -20 \cdot \overset{u_0}{0} - 200 \cdot \overset{y_0}{1} = -200$

$k_2 = -20 \cdot \left(\frac{0{,}05}{2} \cdot -200\right) - 200 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{2} \cdot 0\right)$

$= -20 \cdot (-5) - 200 \cdot 1$

$= -100$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ u_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}05 \begin{pmatrix} -5 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ -5 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} y(0{,}05) \\ u(0{,}05) \end{pmatrix}$$

Iteración 2

$m_1 = u_1 = -5$

$m_2 = -5 + \frac{0{,}05}{2} \cdot -50 = -6{,}25$

$k_1 = -20 \cdot (-5) - 200 \cdot 0{,}75 = -50$

$k_2 = -20 \cdot (-6{,}25) - 200 \cdot \left(0{,}75 + \frac{0{,}05}{2} \cdot -5\right)$

$= -20 \cdot (-6{,}25) - 200 \cdot 0{,}625$

$= 0$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ -5 \end{pmatrix} + 0{,}05 \begin{pmatrix} -6{,}25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4375 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boxed{\begin{pmatrix} y(0{,}1) \\ u(0{,}1) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0{,}4375 \\ -5 \end{pmatrix}}$$

//

④ PVF

Datos

$L = 50\,m$ $\qquad y''(x) = -w(x)/T$

$y(0) = y(50) = 0$; $T = 5000$

$w(x) = 20\left[1 + e^{x/25}\right]$

Determinar la deflexión del cable con 5 intervalos

$\cdot$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{50-0}{5} = 10 \leftarrow \text{PASO}$$

Reemplazo con los datos:

$$y'' = -\frac{20\left[1+e^{x/25}\right]}{5000} = -\frac{1+e^{x/25}}{250}$$

× Dif. Finitas

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$\begin{cases} y'' = -\dfrac{1+e^{x/25}}{250} \\ y(0) = 0 = y_0 \\ y(50) = 0 = y_5 \\ \underset{x_0}{0} \le x \le \underset{x_5}{50} \end{cases}$$

PVF

Reemplazo en la ec.:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{10^2} = -\frac{1+e^{x_i/25}}{250}$$

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = -\frac{2}{5}\left[1+e^{x_i/25}\right]$$

Trabajo con esta ultima ec.

→

→ Plantear ec. con $i = 1, 2, 3, 4$

$$i=1 \quad y_2 - 2y_1 + \overset{=0}{y_0} = -\frac{2}{5}\left[1 + e^{x_1/25}\right]$$
$$i=2 \quad y_3 - 2y_2 + y_1 = -\frac{2}{5}\left[1 + e^{x_2/25}\right]$$
$$i=3 \quad y_4 - 2y_3 + y_2 = -\frac{2}{5}\left[1 + e^{x_3/25}\right]$$
$$i=4 \quad \underbrace{y_5}_{=0} - 2y_4 + y_3 = -\frac{2}{5}\left[1 + e^{x_4/25}\right]$$

Dado $x_1 = 10$; $x_2 = 20$; $x_3 = 30$, $x_4 = 40$
Plantear el sist. reemplazando los valores conocidos:

$$\begin{cases} y_2 - 2y_1 = -0{,}99673 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 = -1{,}29022 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 = -1{,}72805 \\ -2y_4 + y_3 = -2{,}38121 \end{cases}$$

Resolviendo el sist. tengo q':

$$\boxed{\begin{array}{ll} y_1 = 2{,}73899 & y_2 = 4{,}48123 \\ y_3 = 4{,}93326 & y_4 = 3{,}65724 \end{array}}$$

5

ec. tensión superficial : $T = \mu \frac{du}{dy}$

$\mu = 0{,}001$

Calcular la T en $y_2 = 0{,}004$ ^ $u_2 = 0{,}011756$ con diferencias centradas.

• x Dif. centradas

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

Como tengo el dato anterior y sig. de u_2 puedo usar diferencias centradas.

Reemplazo con $h = \frac{b-a}{n} = \cancel{\frac{4-0}{4} = 1}$ $h = \frac{0{,}008-0}{4} = 0{,}002$

$$T(y_2, u_2) = 0{,}001 \cdot u_2'(y_2)$$

$$= 0{,}001 \cdot \frac{u_3 - u_1}{2 \cdot h}$$

$$= 0{,}001 \cdot \frac{0{,}016180 - 0{,}006180}{2 \cdot 0{,}002}$$

$$\boxed{T(y_2, u(y_2)) = 0{,}0025}$$