7 (siete)

No exprese ningún cálculo en forma fraccionaria. El examen se aprueba con dos ejercicios correctamente resueltos en su totalidad y un ejercicio planteado. Salvo indicación contraria, use al menos 5 cifras significativas (preferible usar memorias de la calculadora)

Apellido, nombre(s): [redacted]

M

, No Justificó elección Intervalo

, El error le da "cero"

1. La siguiente función tiene 3 raíces $f(x) = (x - 1.5)e^{-4(x-1.5)^2}$.
La raíz número 1 en $x = 1.5$ y las otras dos en $\pm\infty$.
Se pide hallar la raíz número 1, a través del método de Newton Raphson.
   - Encuentre explícitamente un intervalo de interés para la raíz $x = 1.5$, justificando su propuesta.
   - Estudie las propiedades de convergencia del método Newton Raphson.
   - Encuentre el cero buscado con una diferencia entre dos iteraciones sucesivas de $1 \cdot 10^{-7}$.
   - Represente la respuesta final respetando la convención del curso $x = \bar{x} \pm \Delta x$

B

2. De una función desconocida se obtuvieron los siguiente valores.

x	0	1	2	3	4	5
y	1.0000	2.7183	7.8991	20.086	54.598	148.41

   (a) Plantee el modelo que crea correspondiente (que mejor ajuste los datos).

   (b) Plantee el sistema $A^T Ax = A^T b$.

   (c) Resolver utilizando la estrategia de descomposición[1] y expresar el modelo planteado con los valores hallados.

   (d) Estime el valor de la función en e.

B

3. Se quiere estimar a través de un polinomio interpolante el valor de la función en 1 y su error cometido, el polinomio debe ser al menos de orden 3. En caso de descartar información justificar.
Para ello se tienen los siguientes datos.

x	$f_{(x)}$
0	-4
2	9
3	-3
4	2
5	-1
6	8

[1]puede ser tanto LU o Cholesky, sin pivoteo parcial

[redacted]

Parcial: Análisis Numérico

Ejercicio 1

$$f(x) = (x-1{,}5)\, e^{-4(x-1{,}5)^2}$$

Primer raíz $f(1{,}5) = 0$

Para plantear el método de Newton-Raphson, busco su derivada.

$$f'(x) = -8(x-1{,}5)^2 e^{-4(x-1{,}5)^2} + e^{-4(x-1{,}5)^2}$$

→ Por qué?

Planteo el intervalo $I = [1{,}25 ; 1{,}75]$ como intervalo de interés.

No es justificación

~~Busco que~~

I es un intervalo de interés ya que la derivada de f es continua en el intervalo

Siendo $f(p) = 0$, la derivada cumple que $f'(p) \neq 0$

El método Newton-Raphson genera la sucesión

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

Por teorema, esta sucesión $\{p_n\}_{n \geq 1}$ para cualquier aproximación inicial $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$, $\delta > 0$

Entonces la sucesión definida por $p_n = g(p_n)$ converge cuadráticamente a p, sabiendo que $g'(p) = 0$ y g'' es continua y está estrictamente a un intervalo abierto al que contiene p.

acotada

Ahora sí, como la derivada tampoco se anula en I
Entonces

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Buscamos como condición de corte que

$$|x_{n+1} - x_n| < 1 \cdot 10^{-7}$$

Utilizo como semilla $x_0 = 1,45$.
Armo el cuadro

n	x_n	x_{n+1}	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	1,45	1,501020	0,051024
	~~1,499992~~		
	1,501		

Lo hago devuelta para ser mas preciso

n	x_n	x_{n+1}	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	1,45	1,50102040	0,0510204
1	1,50102040	1,49999992	$1,02041 \cdot 10^{-3}$
2	1,49999999	1,5	$1 \cdot 10^{-7}$
3	1,5	1,5	0

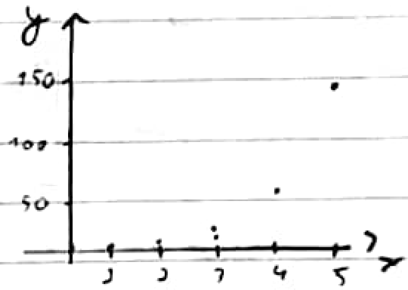
Entonces para f la raíz se encuentra
en $x = 1,5 \pm 0$ MAL

[redacted]

Ejercicio 2

x	0	1	2	3	4	5
y	1,0000	2,7183	7,8557	20,086	54,598	148,47

Podemos observar claramente que se trata de un crecimiento exponencial



$$f(x) = a\, e^{bx}$$
$$y = a\, e^{bx}$$

Linealizamos la ecuación

$$\ln(y) = \ln(a) + b x$$

Ahora podemos utilizar el método de cuadrados mínimos.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}_{A'} \underbrace{\begin{bmatrix} \ln(a) \\ b \end{bmatrix}}_{\bar{x}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ln(1,0000) \\ \ln(2,7183) \\ \ln(7,8557) \\ \ln(20,086) \\ \ln(54,598) \\ \ln(148,47) \end{bmatrix}}_{b'}$$

Generado el sistema $A'\bar{x}' = b'$, planteo $A^T A x = A^T b$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \ln(a) \\ b \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 14,8452 \\ 54,5175 \end{bmatrix}}_{b}$$

~~Ho~~

Dado el sistema obtenido, podemos descomponer la matriz A en dos matrices L y U para resolverlo utilizando el metodo LU.

$$\overbrace{LU}^{\hat{A}} x = b \Rightarrow \begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}$$

Con $A = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 - 2{,}5 f_1} = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 0 & 17{,}5 \end{bmatrix} = U$$

Entonces $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2{,}5 & 1 \end{bmatrix}$

Entonces planteamos $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14{,}8452 \\ 54{,}5119 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14{,}8452 \\ 17{,}7589 \end{bmatrix}$$

Teniendo y, planteamos $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 0 & 17{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14{,}8452 \\ 17{,}7589 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0685 \\ 1{,}01708 \end{bmatrix}$$

$x_1 = \log(a) = -0{,}0685$

$a = e^{-0{,}0685} = 0{,}933793$

$x_2 = b = 1{,}01708$

Entonces queda $f(x) = 0{,}933793 \cdot e^{1{,}01708\,x}$

Estimando en e

$f(e) = 14{,}8234$

[redacted]

Ejercicio 3

x	$f(x)$
0	-4
2	9
3	-3
4	2
5	-1
6	8

Podemos utilizar el método interpolante de Newton. Usando los primeros 4 nodos ya nos va a servir para tener un polinomio de grado 3, sin embargo usamos un 5^{to} nodo para determinar el error

1^{era}

Por diferencias divididas: $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$

Planteamos entonces

0 -	-4	6,5	-6,1667	3,66667	-1,56667
2 -	9	-12	8,5	-4,1667	
3 -	-3	5	-4		
4 -	2	-3			
5 -	-1				

Planteamos el polinomio de Newton

$P_N(x) = -4 + 6,5x + (-6,16667)x(x-2) + 3,66667x(x-2)(x-3)$

El error

$$|E(x)| = |-1,56667x(x-2)(x-3)(x-4)$$

Estimando estos valores en 1

$P_N(1) = 16$ $\qquad |E(x)| \approx 9,4$

Entonces para $x=1$, $16 \pm 9,4$