14. Problemas con Valores en la Frontera

Otro tipo de problema consiste en resolver una ecuación diferencial de segundo orden donde se especifican condiciones en distintos puntos del intervalo. Este tipo de planteo se llama **Problema de Valores en la Frontera (PVF)**.

Un problema típico se representa como:

$$\begin{cases} a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \\ y(a) = y_0, \\ y(b) = y_1. \end{cases}$$

Los valores dados:

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1$$

se denominan **condiciones en la frontera**. Una solución del problema anterior es una función que satisface la ecuación diferencial en un intervalo que contiene $[a, b]$ y cuya gráfica pasa por los puntos (a, y_0) y (b, y_1).

En el caso de ecuaciones diferenciales de segundo orden, también pueden considerarse otras combinaciones de condiciones en la frontera:

$$\begin{aligned} y'(a) &= y_0, \quad y(b) = y_1, \\ y(a) &= y_0, \quad y'(b) = y_1, \\ y'(a) &= y_0, \quad y'(b) = y_1. \end{aligned}$$

Estos casos particulares son ejemplos de las condiciones en la frontera *generales*:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2. \end{aligned}$$

14.1 Problema de Valores en la Frontera de Segundo Orden

Analizaremos un método numérico para resolver un problema con valores en la frontera de segundo orden del tipo:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b, \\ y(a) = \alpha, \\ y'(b) = \beta. \end{cases}$$

A diferencia de los problemas de **valores iniciales**, en los PVF no se requiere transformar la ecuación de segundo orden en un sistema de primer orden. Usaremos directamente un método basado en **diferencias finitas**.

14.2 Aproximaciones por Diferencias Finitas

A partir del desarrollo en serie de Taylor centrado en x, tenemos:

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + y'(x)h + \frac{h^2}{2}y''(x) + \cdots, \\ y(x-h) &= y(x) - y'(x)h + \frac{h^2}{2}y''(x) + \cdots. \end{aligned}$$

Sumando (1) y (2), se elimina el término con la derivada primera, y se obtiene una aproximación para la derivada segunda:

$$y''(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}.$$