FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

Apellido: ..... Nombres : .....

Padrón: .....

1. Se sabe que la función $f(x) = e^x + x$ tiene un cero doble en el intervalo $[-1, 0]$. Usar tres iteraciones del método de *Newton Raphson modificado* para raíces múltiples, para estimar dicho cero. Usar como semilla $x_0 = -1$ y trabajar con tres decimales y redondeo.

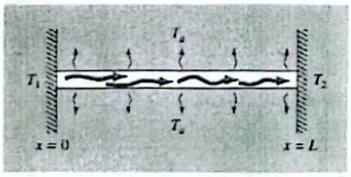
2. El siguiente conjunto de datos exhibe la cantidad de material (en metros cuadrados) requerido en la fabricación de un cilindro circular recto con altura de 4 metros y radio k (en metros).

k	0	1	2	3	4
$A(k)$	0	31.4159	75.3982	131.9469	201.0619

Se sabe que el comportamiento es del tipo cuadrático. Determinar el área requerida para la fabricación de un cilindro circular recto de radio $k = 3.5$ metros usando cuadrados mínimos.

3. La velocidad de un objeto en movimiento está dado por la función $s(t) = \frac{t^3 e^t}{(t^2+1)^2}$ determinar el cambio de posición en el intervalo de tiempo $[1, 2]$. Utilizar el método de *Simpson* $\frac{1}{3}$, tomar una partición de 10 intervalos.

4. Se puede utilizar la conservación del calor para desarrollar un balance de calor para una barra larga y delgada . Si la barra no está aislada en toda su longitud y el sistema se encuentra en estado estacionario, la ecuación resultante es: $\frac{d^2T}{dx^2} + h(T_a - T) = 0$.
donde h es un coeficiente de transferencia de calor (m^{-2}) que parametriza la velocidad con que se disipa el calor en el medio ambiente, y T_a es la temperatura del medio ambiente (° C).Utilizar el método de diferencias finitas para aproximar la temperatura cada dos metros de la barra. La longitud de la barra es de 10 metros, $h = 0.01m^{-2}$, $T_a = 20$ y las condiciones de frontera $T(0) = 40$ y $T(10) = 200$.



5. Cierto material de forma cúbica, con una masa de $M = 0.5$ kg se pone en el extremo inferior de un resorte sin masa. El extremo superior se fija a una estructura en reposo. El cubo recibe una resistencia de $R = -B\frac{dy}{dt}$ del aire, donde B es una constante de amortiguamiento. La ecuación de movimiento es:
$M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + ky = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
donde y es el desplazamiento desde la posición estática, $k = 100\frac{kg}{seg^2}$ es la constante del resorte y $B = 10\frac{kg}{seg}$. Calcular $y(t)$ para $0 < t < 0.05$ mediante dos iteraciones del método *Runge Kutta del punto medio.*

Scanned with CamScanner

19/02/25
2C 3ra FECHA

1) $f(x) = e^x + x \quad , \quad x \in [-1, 0]$

Tiene un cero doble en dicho intervalo
Usar tres iteraciones del método de N-R modificado para raíces multiples para estimar dicho cero
Usar como semilla $x_0 = -1$

•)
$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n - \dfrac{f(p_n) \cdot f'(p_n)}{[f'(p_n)]^2 - f(p_n) \cdot f''(p_n)} \\ p_0 = -1 \end{cases}$$

$f'(x) = e^x + 1 \quad \wedge \quad f''(x) = e^x$

$\boxed{p_n = x_n}$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_{n+1} = p_n - \dfrac{(e^{x_n} + x_n) \cdot (e^{x_n} + 1)}{[e^x + 1]^2 - (e^x + x) \cdot (e^x)} \\ p_0 = -1 \end{cases}$$

Comienzo a iterar, trabajo con tres decimales y redondeo

p_n	p_{n+1}
-1	-0,589
-0,589	-0,567
-0,567	-0,567

$\Rightarrow \boxed{p_3 = -0,567}$

② Comportamiento de tipo CUADRATICO
Determinar con $k = 3{,}5$ m usando cuadrados mínimos

• Planteo

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Busco resolver mediante $A\hat{x} = b$ con los datos dados

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 31{,}4159 \\ 75{,}3982 \\ 131{,}9469 \\ 201{,}0619 \end{pmatrix}$$

Planteo resolver el sist. mediante $A^T A \hat{x} = A^T b$, lo q' me da los sig. ec. normales

$$\begin{cases} n a_0 + \left(\sum x_i\right) a_1 + \left(\sum x^2\right) a_2 = \sum y_i \\ \left(\sum x_i\right) a_0 + \left(\sum x_i^2\right) a_1 + \left(\sum x_i^3\right) a_2 = \sum x_i y_i \\ \left(\sum x_i^2\right) a_0 + \left(\sum x_i^3\right) a_1 + \left(\sum x_i^4\right) a_2 = \sum x_i^2 y_i \end{cases}$$

Reemplazo:

$$\begin{cases} 5 a_0 + 10 a_1 + 30 a_2 = 439{,}8229 \\ 10 a_0 + 30 a_1 + 100 a_2 = 1382{,}3006 \\ 30 a_0 + 100 a_1 + 354 a_2 = 4737{,}5212 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_0 = 0{,}0000 \qquad a_1 = 25{,}1327 \qquad a_2 = 6{,}2832$

$\Rightarrow y = 25{,}1327 x + 6{,}2832 x^2$

$\therefore \boxed{y(3{,}5) = A(3{,}5) = 164{,}9337}$

19/07/25
2C 3ra FECHA

(3) x Simpson (1/3) estimar en el intervalo [1,2] con una partición de 10 intervalos la función:

$$s(t) = \frac{t^3 e^t}{(t^2+1)^2} = f(t)$$

•) Calcula los valores para realizar la estimación, con 5 decimales y redondeo

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$$

i	t	s(t)
0	1	0,67957
1	1,1	0,81869
2	1,2	0,96365
3	1,3	1,11406
4	1,4	1,27003
5	1,5	1,43202
6	1,6	1,60078
7	1,7	1,77725
8	1,8	1,96253
9	1,9	2,157894
10	2	2,36450

$$\Rightarrow \int_1^2 s(t)\,dt \cong \frac{h}{3}\left[f(1)+f(2)+4\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} f(t_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(t_{2k})\right]$$

$$= \frac{0{,}1}{3}\left[f(1)+f(2)+4\sum_{k=0}^{4} f(t_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{4} f(t_{2k})\right]$$

$$= 0{,}03333\left[0{,}67957 + 2{,}36450 + 4\cdot 7{,}29986 + 2\cdot 5{,}79699\right]$$

$$= 1{,}46112$$

$$\therefore \boxed{\int_1^2 s(t)\,dt \cong 1{,}46112}$$

4) Tengo q':

$L = 10m \qquad h = 0{,}01 \qquad T_a = 20$

$T(0) = 40 \quad \wedge \quad T(10) = 200$

Aprox. la temp. cada dos metros mediante dif. finitos
Reemplazo en la ec. con los datos dados:

$$T'' + 0{,}01(20 - T) = 0$$
$$T'' + 0{,}2 - 0{,}01T = 0$$
$$T'' - 0{,}01T = -0{,}2$$

$$\begin{cases} T'' - 0{,}01T = -0{,}2 \\ T(0) = 40 = T_0 \\ T(10) = 200 = T_5 \end{cases} \quad \text{PVF}$$

$$\wedge \underbrace{h = \frac{b-a}{n} = 2}_{\text{PASO}} \Rightarrow 2 = \frac{10-0}{n} \rightarrow n = 5$$

x Dif. finitos

$$T_i'' = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2}$$

Reemplazo en la ec.

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{2^2} - 0{,}01\,T_i = -0{,}2$$

$$T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} - 0{,}04\,T_i = -0{,}8$$

$$T_{i+1} - 2{,}04\,T_i + T_{i-1} = -0{,}8 \rightarrow \text{ec. para trabajar.}$$

Planteo la ec. con $i = 1, 2, 3, 4$

$i=1 \quad T_2 - 2{,}04\,T_1 + \overset{=40}{T_0} = -0{,}8$

$i=2 \quad T_3 - 2{,}04\,T_2 + T_1 = -0{,}8$

$i=3 \quad T_4 - 2{,}04\,T_3 + T_2 = -0{,}8$

$i=4 \quad \underbrace{T_5}_{=200} - 2{,}04\,T_4 + T_3 = -0{,}8$

$\rightarrow$

19/02/25
2C 3ra FECHA

Reemplazo por los valores conocidos y resuelvo, con 5 decimales y redondeo

$$\begin{cases} \text{I} \quad T_2 - 2{,}04\,T_1 = -40{,}8 \\ \text{II} \quad T_3 - 2{,}04\,T_2 + T_1 = -0{,}8 \\ \text{III} \quad T_4 - 2{,}04\,T_3 + T_2 = -0{,}8 \\ \text{IV} \quad -2{,}04\,T_4 + T_3 = -200{,}8 \end{cases}$$

I $T_1 = 20 + 0{,}49020\,T_2 \Rightarrow \boxed{T_1 = 65{,}97010}$

II $T_3 - 2{,}04\,T_2 + 20 + 0{,}49020\,T_2 = -0{,}8$

$-1{,}5498\,T_2 = -20{,}8 - T_3$

$\boxed{T_2 = 93{,}77825} \Leftarrow T_2 = 13{,}42109 + 0{,}64524\,T_3$

IV $T_4 = 98{,}43137 + 0{,}49020\,T_3 \Rightarrow \boxed{T_4 = 159{,}98010}$

III $98{,}43137 + 0{,}49020\,T_3 - 2{,}04\,T_3 + 13{,}42109 + 0{,}64524\,T_3 = -0{,}8$

$-0{,}90456\,T_3 = -112{,}65246$

$\boxed{T_3 = 124{,}53841}$

$\therefore$

$$\boxed{\begin{array}{ll} T_1 = 65{,}97010 & T_2 = 93{,}77825 \\ T_3 = 124{,}53841 & T_4 = 159{,}98010 \end{array}}$$

(5) Tengo q':

$\mu = 0{,}5 \qquad K = 100 \qquad B = 10$

Reemplazando en la ec.:

$$\begin{cases} 0{,}5\, y'' + 10\, y' + 100\, y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Quiero $y(t)$ para $0 < t < 0{,}05$ mediante 2 iteraciones de RK del pto medio

$$\Rightarrow h = \frac{0{,}05 - 0}{2} = 0{,}025$$

Planteo un cambio de variables $u(t) = y'(t)$ para resolver el PVI

$$0{,}5\, u' + 10\, u + 100\, y = 0 \rightarrow u' = -20u - 200y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(t) = y'(t) \\ -20u - 200y = u' \text{ — } f(t, y, u) \\ y(0) = 1 = y_0 \text{ — } m \\ u(0) = 0 = u_0 \text{ — } k \end{cases}$$

* RK del pto medio tengo q': $t_0 = 0$; $t_1 = t_0 + h = 0{,}025$; $t_2 = 0{,}05$

<u>Iteración 1:</u> Uso 5 decimales y redondeo

$m_1 = u_0 = 0 \qquad K_1 = -20 \cdot 0 - 200 \cdot 1 = -200$

$m_2 = 0 + \frac{0{,}025}{2} \cdot -200 = -2{,}5 \qquad K_2 = -20 \cdot (-2{,}5) - 200 \cdot \left(1 + \frac{0{,}025}{2} \cdot 0\right) = -150$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ u_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} m_2 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}025 \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9375 \\ -3{,}75 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} y(0{,}025) \\ u(0{,}025) \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$

19/02/2025
2C 3ra FECHA

Iteración 2

$m_1 = u_1 = -3{,}75$

$K_1 = -20 \cdot (-3{,}75) - 200 \cdot 0{,}9375$
$= -112{,}5$

$m_2 = -3{,}75 + \frac{0{,}025}{2} \cdot (-112{,}5)$
$= -5{,}15625$

$K_2 = -20 \cdot (-5{,}15625) - 200 \cdot \left(0{,}9375 + \frac{0{,}025}{2} \cdot m_1\right)$
$= -75$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} m_2 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9375 \\ -3{,}75 \end{pmatrix} + 0{,}025 \begin{pmatrix} -5{,}15625 \\ -75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}80859 \\ -5{,}625 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} y(0{,}05) \\ u(0{,}05) \end{pmatrix}$$

$\therefore \boxed{y(0{,}025) \cong 0{,}9375 \ \wedge \ y(0{,}05) \cong 0{,}80859}$