No exprese ningún cálculo en forma fraccionaria. El examen se aprueba con dos ejercicios correctamente resueltos en su totalidad y un ejercicio planteado. Salvo indicación contraria, use al menos 5 cifras significativas (preferible usar memorias de la calculadora)

Apellido, nombre(s): TEIRS, IZAKI

1. Halle la primera raíz positiva de la ecuación $x = 2cos(x)$, a través del método de punto fijo.
   - Encuentre explícitamente un intervalo de interés.
   - Estudie las propiedades de convergencia del método propuesto.
   - Encuentre el cero buscado con una diferencia entre dos iteraciones sucesivas de $1 \cdot 10^{-7}$.
   - Represente la respuesta final respetando la convención del curso $x = \bar{x} \pm \Delta x$

2. De una función desconocida se obtuvieron los siguiente valores.

x	0.5	1.0	1.5	2.0	4.0
y	7.105	7.030	6.575	6.070	0.880

   (a) Plantee el modelo que crea correspondiente (que mejor ajuste los datos).
   (b) Plantee el sistema $A^T Ax = A^T b$.
   (c) Resolver utilizando la estrategia de descomposición[1] y expresar el modelo planteado con los valores hallados.
   (d) Estime el valor de la función en 1.8.

3. Estime a través de un polinomio de interpolación de orden mínimo 3, los valores con su cota de error correspondiente de $f(1,01)$ y $f(1,28)$ a partir de la siguiente tabla:

x	$1,00$	$1,05$	$1,10$	$1,15$	$1,20$	$1,25$	$1,30$
$f(x)$	$1,00000$	$1,02470$	$1,04881$	$1,07238$	$1,09544$	$1,11803$	$1,14017$

INTERPOL USO P/ERROR. INTERPOL

[1] puede ser tanto LU o Cholesky, sin pivoteo parcial

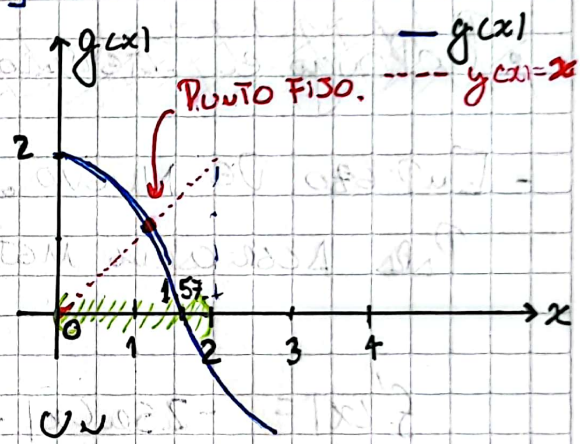
INAKI TEIRA
108803

1) $x = 2\cos(x)$

Busco raíz de $f(x) = 2\cos(x) - x$ por pto. fijo.

Luego, propongo la función $[g(x) = 2\cos(x).]$
Debo buscar un intervalo, I, que contenga el punto fijo y donde $g(x)$ sea admisible. Es decir:

$$\begin{cases} g(x) \in \mathcal{C}[I] \rightarrow 2\cos(x) \in \mathcal{C}[\mathbb{R}] \\ g(x) \in I \ \forall x \in I \ \text{(i)} \\ |g'(x)| < 1 \ \forall x \in I \ \text{(ii)} \end{cases}$$



- Del gráfico queda demostrado que un intervalo de interés posible es $I = (0,2)$.

Luego, verifico admisibilidad entre $(0,2)$:

(i) $0 < x < 2 \rightarrow \overbrace{\cos(0)}^{1} > \cos(x) > \underbrace{\cos(2)}_{-0,416\ldots}$ ← $\cos(x)$ es decrec. en $[0,2]$

$\rightarrow \underbrace{2 > 2\cos(x) > -0,833}$

↳ No verifica. → ya que $\cos(2) \notin I$.

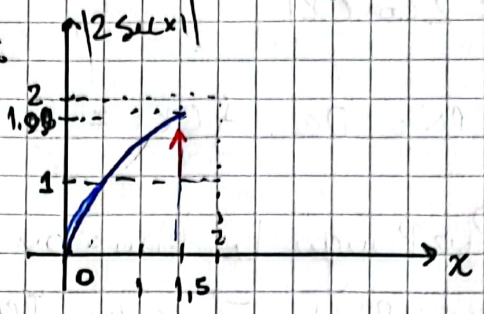
- Entonces propongo un nuevo intervalo $I = (0, 1,5)$

(i) $0 < x < 2 \rightarrow \overbrace{\cos(0)}^{1} > \cos(x) > \overbrace{\cos(1,5)}^{0,07074}$

$\rightarrow [2 > \underbrace{2\cos(x)}_{g(x)} > 0,1415] \rightarrow g(x) \in I \ \forall x \in I.$ //

(ii) $|g'(x)| = |-2\,\mathrm{Sen}(x)| = |2\,\mathrm{Sen}(x)| < 1$?

El gráfico de $|2\,\mathrm{Sen}(x)|$ es:



Luego no verifica $|g'(x)| < 1$.

~~Propongo el iterado 1:~~

- Empiezo de nuevo. Busco $g(x) = x - \psi(x) \cdot f(x)$.

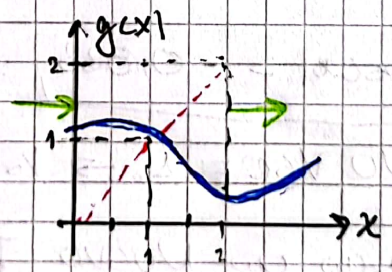
Para acercarme mejor, propongo $\psi(x) = \dfrac{1}{f'(1)}$.

$$f'(x) = -2\,\mathrm{Sen}(x) - 1 \longrightarrow \psi(x) = -\frac{1}{\mathrm{Sen}(1)+1} = -0{,}54304$$

Luego $g(x) = x + 0{,}54304\,(2\cos(x) - x)$

$$\longrightarrow \boxed{g(x) = 1{,}08608\cos(x) + 0{,}45696\,x}$$

Cuyo gráfico es:



Del gráfico, notar que $g(x) \in [0,2]$ $\forall x \in [0,2]$ y que la función "ingresa" y "egresa" por los costados del cuadrado $[0,2] \times [0,2]$.

Luego $\longrightarrow$ $|g'(x)| < 1$ $\forall x \in [0,2]$.

- De esta forma queda demostrado que $g(x)$ es admisible en $[0,2]$. Luego:

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

arbitrario

Busco $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-7}$.

[Como fue estudiado, el método de punto fijo converge linealmente a la solución]

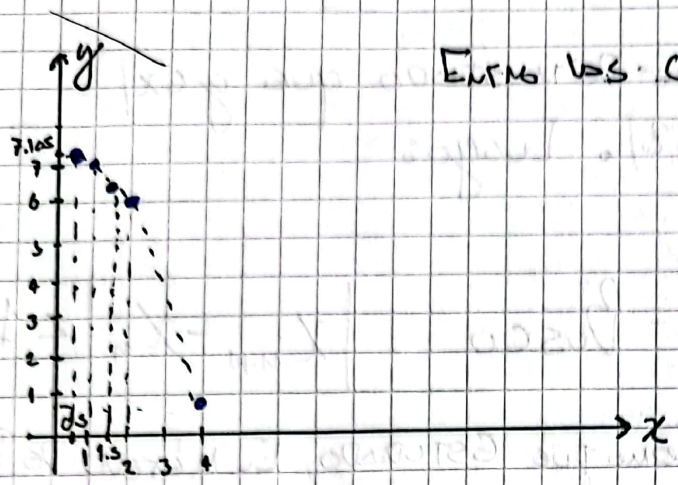
$x_1 = g(1) = 1,04377152836$
$x_2 = g(x_1) = 1,02322106843$
$x_3 = g(x_2) = 1,0330044863$
$x_4 = g(x_3) = 1,02837619875$
$x_5 = g(x_4) = 1,03057241481$
$x_6 = g(x_5) = 1,02953175751$
$x_7 = g(x_6) = 1,03002520012$
$x_8 = g(x_7) = 1,0297913027$
$x_9 = g(x_8) = 1,0299021897 2$
$x_{10} = g(x_9) = 1,02984962377$
$x_{11} = g(x_{10}) = 1,0298745435$
$x_{12} = g(x_{11}) = 1,02986627301$
$x_{13} = g(x_{12}) = 1,02986833038$
$x_{14} = g(x_{13}) = 1,02986567551$
$x_{15} = g(x_{14}) = 1,02986693408$
$x_{16} = g(x_{15}) = 1,02986633744$
$x_{17} = g(x_{16}) = 1,02986682029$
$x_{18} = g(x_{17}) = 1,02986654862$
$x_{19} = g(x_{18}) = 1,02986654976$
$x_{20} = g(x_{19}) = 1,02986651963$

$$\underbrace{|x_{20} - x_{19}|}_{= 0,00000003013} < 10^{-7}$$

Luego, finalmente:

$$\boxed{x = 1,0298665 \pm 0,0000004}$$

2) Primero realizo un gráfico aproximado:



Entre las opciones tengo:

i) $y = a e^{bx}$

ii) $y = a x^b$

iii) $y = \frac{ax}{b+x}$

iv) $y = a + bx + cx^2$ $c<0$

a) Luego, teniendo en cuenta el gráfico, planteo el modelo cuadrático, es decir: $[y = a + bx + cx^2]$

b) El sistema $A^t \cdot A x = A^t \cdot b$ es:

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & (0.5)^2 \\ 1 & 1.0 & (1.0)^2 \\ 1 & 1.5 & (1.5)^2 \\ 1 & 2.0 & (2.0)^2 \\ 1 & 4.0 & (4.0)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.25 \\ 1 & 1.0 & 1.0 \\ 1 & 1.5 & 2.25 \\ 1 & 2.0 & 4.0 \\ 1 & 4.0 & 16.0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 7.105 \\ 7.030 \\ 6.575 \\ 6.070 \\ 0.880 \end{pmatrix}$$

Luego $A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 8,5 & 23,5 \\ 8,5 & 22,25 & 75,375 \\ 23,5 & 75,375 & 278,125 \end{pmatrix}$

$$A^t \cdot b = \begin{pmatrix} 27,66 \\ 32,8175 \\ 61,96 \end{pmatrix}$$

Iñaki Teira
108803

c) Busco resolver $A^t \cdot A\, x = A^t \cdot b$. Por descompo LU. Notar que $A^t \cdot A$ es simétrica, luego es posible también utilizar Cholosky.

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 8{,}5 & 23{,}5 \\ 8{,}5 & 22{,}25 & 75{,}375 \\ 23{,}5 & 75{,}375 & 278{,}125 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix}}^{L} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}}^{U}$$

1°: $f_2' \leftarrow f_2 - m_{21} \cdot f_1$; $m_{21} = \frac{8{,}5}{5} = 1{,}7$

$\rightarrow f_2' = (0 \quad 7{,}8 \quad 35{,}425)$

$f_3' \leftarrow f_3 - m_{31} \cdot f_1$; $m_{31} = \frac{23{,}5}{5} = 4{,}7$

$\rightarrow f_3' = (0 \quad 35{,}425 \quad 167{,}675)$

2°: $f_3'' \leftarrow f_3' - m_{32} \cdot f_2'$; $m_{32} = \frac{35{,}425}{7{,}8} = 4{,}54167.$

$\rightarrow f_3'' = (0 \quad 0 \quad 6{,}78646)$

Luego

$$* \left[U = \begin{pmatrix} 5 & 8{,}5 & 23{,}5 \\ 0 & 7{,}8 & 35{,}425 \\ 0 & 0 & 6{,}78646 \end{pmatrix} ; \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1{,}7 & 1 & 0 \\ 4{,}7 & 4{,}54167 & 1 \end{pmatrix} \right] *$$

-Luego tengo: $L \circ U x = A^t \circ b$

$$\begin{cases} L \circ y = A^t \circ b & (i) \\ U \circ x = y & (ii) \end{cases}$$

Cambio de variable.

(i):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1,7 & 1 & 0 \\ 4,7 & 4,54167 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27,66 \\ 32,8175 \\ 61,96 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ $y_1 = 27,66$

$y_2 = 32,8175 - 1,7 \circ 27,66 = -14,2045$

$y_3 = 61,96 - 4,7 \circ 27,66 + 4,54167 \circ 14,2045$
$= -3,52985$

$$\Rightarrow y = \begin{pmatrix} 27,66 \\ -14,2045 \\ -3,52985 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 5 & 8,5 & 23,5 \\ 0 & 7,8 & 35,425 \\ 0 & 0 & 6,78646 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27,66 \\ -14,2045 \\ -3,52985 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ $x_3 = -0,52013$

$$\cancel{x_2 = \frac{-14,2045 - 7,8 \circ (-0,52013)}{35,425} =}$$

$$x_2 = \frac{-14,2045 - 35,425 \circ (-0,52013)}{7,8} = 0,54117$$

$$x_1 = (27,66 - 8,5 \circ x_2 - 23,5 \circ x_3) \circ \frac{1}{5} = 7,05663$$

- Luego finalmente:

$$* \begin{bmatrix} a = 7,05663 \\ b = 0,54117 \\ c = -0,52013 \end{bmatrix} *$$

[Dados $y = a + bx + cx^2 = 7,05663 + 0,54117\,x - 0,52013\,x^2$]

- Notar que $c<0$ como se había predicho.

d) $f(1,8) \approx a + b \cdot 1,8 + c \cdot (1,8)^2 = \boxed{6,3455148}$

$x=1,5$ $x=2.0$

NOTAR QUE ESTE VALOR ESTÁ ENTRE $(6,575 ; 6,070)$ COMO CORRESPONDE.

3) Tengo 7 nudos y busco un $P(x)$ de grado 3. Y además debo poder estimar $f(1,01)$ y $f(1,28)$.

Dado que no conozco las derivadas, sólo puedo usar Pol. de Newton ó Lagrange. Elijo Newton por comodidad, además se pide cota de error, lo cual es posible con Newton. Dados los valores a estimar y el grado del $P(x)$ debo usar 4 nudos. Elijo:

x	1,00	1,05	1,25	1,30
$f(x)$	1,00	1,02470	1,11803	1,14017

Para estimar el error, agregaré el nudo al cálculo de las diferencias divididas.

x	1,10
$f(x)$	1,04881

SÓLO PARA ESTIMAR ERROR.

x	1° D.D.	2° D.D.	3° D.D.	4° D.D.	5° D.D.
1,00	1,00	0,494	-0,1094	0,046667	-4,253367
1,05	1,02470	0,46665	-0,0954	0,041333	
1,25	1,11803	0,4428	-0,093333		
1,30	1,14017	0,4568			
1,10	1,04881				

SÓLO PARA ESTIMAR ERROR.

AS: OBTENGO:

$$P_N(x) = 1{,}00 + 0{,}494 \cdot (x - 1.00) - 0{,}1094 \cdot (x-1) \cdot (x-1{,}05) + 0{,}046667 \cdot (x-1) \cdot (x-1{,}05) \cdot (x-1{,}25)$$

CON ERROR ESTIMADO

$$\mathcal{E}(x) = -4{,}253367 \cdot (x-1) \cdot (x-1{,}05) \cdot (x-1{,}25) \cdot (x-1{,}30)$$

- ESTIMO:

$$P_N(1{,}01) = 1{,}00498824003$$

$$\mathcal{E}(1{,}01) = 0{,}00001184$$

$$P_N(1{,}28) = 1{,}13136480064$$

$$\mathcal{E}(1{,}28) = 0{,}00016435$$

LUEGO:

$$* \left[\begin{array}{l} f(1{,}01) = 1{,}0049 \pm 0{,}0002 \\ f(1{,}28) = 1{,}1313 \pm 0{,}0002 \end{array} \right] *$$