26-02-2025

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Análisis Numérico I (75.12, 95.04, 95.13)

Integrador

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

Apellido: [redacted] .....

Padrón: .....

1. La ecuación diferencial para un cable flexible de 50 metros de largo, que está fijo en sus dos extremos es: $y''(x) = -w(x)/T$, $y(0) = y(50) = 0$ donde x se mide en metros, $y(x)$ es el desplazamiento del cable medido desde el nivel de sus dos extremos (con sentido positivo hacia abajo), T es la componente horizontal de la tensión $(5000kg)$ y $w(x)$ es la distribución de carga, dada por: $w(x) = 20[1 + e^{\frac{x}{25}}]\frac{kg}{m}$. Determinar la deflexión del cable. Utilizar 5 intervalos en la retícula.

2. La ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ tiene dos raíces reales y distintas en: $x = 3$ y $x = -1$. Indicar cuáles de las siguientes formulaciones de iteración de punto fijo son admisibles para aproximar la raíz $x = 3$. Con la opción elegida hacer tres iteraciones para obtener la aproximación. Tomar como semilla $x_0 = 2.5$.

   a) $x = \frac{x^2-3}{2}$

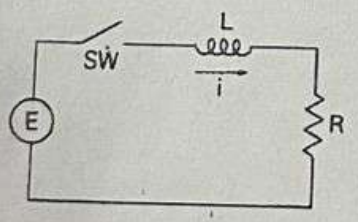
   b) $x = \sqrt{2x+3}$

3. Calcular la longitud del arco parabólico $y^2 = 4x$ cuando $1 \leq x \leq 2$ .Utilizar el método de *Simpson* $\frac{1}{3}$, tomar una partición de 10 intervalos. $(L = \int_a^b ||\vec{\sigma}'(t)||dt)$.

4. En la siguiente figura se muestra un circuito, el cual tiene una autoinductancia de $L = 100$ henrys, una resistencia de $R = 2$ ohms y una fuente de voltaje de 10 voltios. Si el circuito se cierra en el instante $t = 0$, la corriente $i(t)$ cambia según la ecuación:
$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E$, $i(0) = 0$.

   a) Determinar la corriente i en $t = 1$. Usar 4 iteraciones del método *Runge Kutta del punto medio.*

   b) Evaluar el error, comparando la solución numérica con la solución analítica, dada por: $i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$.



5. Un cuerpo de 8 lb de peso cae partiendo del reposo desde una gran altura. Conforme cae, actúa sobre él la resistencia del aire a la que supondremos (en libras) numéricamente igual a $2v$, siendo v la velocidad (en pies por segundo). Hallar la velocidad y la distancia recorrida al cabo de 1 segundo. Usar dos iteraciones del método *Runge Kutta del punto medio.*Si elegimos el eje x positivo como vertical y hacia abajo, a lo largo de la trayectoria del cuerpo B, el origen en el punto en que el cuerpo inicia su caída. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son:

   a) F_1, su peso, 8lb, actuando hacia abajo y, por tanto positiva.

   b) F_2, la resistencia del aire numéricamente igual a $2v$, actuando hacia arriba y por lo tanto negativa y con valor de $-2v$.

La segunda ley de *Newton* $F = ma$ se transforma en $m = \frac{dv}{dt} = F_1 + F_2$. Tomando $g = 32$ y utilizando $m = \frac{w}{g} = 0.25$, y puesto que el cuerpo se encontraba inicialmente en reposo se obtiene:
$0.25\frac{dv}{dt} = 8 - 2v$

26/02/2025
2C 4ta FECHA

(1) Exactamente igual al ej. (4) de la segunda fecha.

(2) Tengo
$f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$ con las raíces: $x=3 \wedge x=-1$

Quiero aproximar la raíz $x=3$, ~~[illegible]~~ indicar cuál de las sig. formulaciones de iteración de punto fijo son admisibles para ella. Con la elegida hacer tres iteraciones para obtener la aprox.
Semilla: $x_0 = 2,5$

a) $x = \frac{x^2-3}{2}$ b) $x = \sqrt{2x+3}$

•) Propongo el intervalo $[1,5 ; 3,5]$; verifico si son admisibles, es decir verifico si $\exists$ punto fijo al ver si mapea sobre sí misma.

a) $1,5 \leq x \leq 3,5$
$2,25 \leq x^2 \leq 12,25$
$-0,75 \leq x^2-3 \leq 9,25$
$-0,375 \leq \frac{x^2-3}{2} \leq 4,625$
NO CUMPLE

b) $1,5 \leq x \leq 3,5$
$3 \leq 2x \leq 7$
$6 \leq 2x+3 \leq 10$
$2,44949 \leq \sqrt{2x+3} \leq 3,16228$
$[2,44949 ; 3,16228] \subseteq [1,5 ; 3,5]$
$\Rightarrow \exists$ punto fijo en el intervalo

$\Rightarrow$ Uso (b): $g(x) = \sqrt{2x+3}$
Planteo punto fijo

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt{2x_n+3} \\ x_0 = 2,5 \end{cases}$$

x_n	$g(x_n)$
2,5	2,82843
2,82843	2,99225
2,99069	2,99356

$\therefore \boxed{x_3 = 2,99356}$

DISCLAIMER: NO SE SI CON ESA JUSTIFICACIÓN ALCANZABA Ó PEDÍA ALGO MÁS.

26/02/2025
2C 4ta FECHA

③ Calcular longitud de $y^2 = 4x$, $1 \leq x \leq 2$. Utilizando Simpson($\frac{1}{3}$) y una partición de 10 intervalos
AYUDA: $L = \int_a^b \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt$

• Parametrizo respecto a t:
$x = t \Rightarrow y^2 = 4t \rightarrow y = \sqrt{4t} = 2\sqrt{t}$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2\sqrt{t} \end{cases} ; \; 1 \leq t \leq 2$$

$\vec{\sigma}(t) = (t, 2\sqrt{t})$
$\vec{\sigma}'(t) = (1, \frac{1}{\sqrt{t}})$

C.A.
$(2\sqrt{t})' = (2t^{\frac{1}{2}})'$
$= \frac{2}{2} t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$

$\|\vec{\sigma}'(t)\| = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{\sqrt{t}})^2}$
$= \sqrt{1 + \frac{1}{t}} = f(t)$

× Simpson($\frac{1}{3}$)

$$L = \int_a^b f(t)\,dt \cong \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} f(t_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(t_{2k})\right]$$

$\Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$

Calculo valores a usar; uso 5 decimales y redondeo:

t	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
f(t)	1,41421	1,38170	1,35401	1,33012	1,30931	1,29099	1,27475	1,26025	1,24722	1,23544	1,22474
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$$\Rightarrow \frac{0{,}1}{3}\left[f(1) + f(2) + 4\underbrace{\sum_{k=0}^{4} f(t_{2k+1})}_{\text{SUMO IMPARES}} + 2\underbrace{\sum_{k=1}^{4} f(t_{2k})}_{\text{SUMO PARES}}\right]$$

$$= 0{,}03333\left[1{,}41421 + 1{,}22474 + 4 \cdot 6{,}4985 + 2 \cdot 5{,}18529\right] = 1{,}29999$$

$$\therefore \boxed{\int_1^2 \|\vec{\sigma}'(t)\|\,dt \cong 1{,}29999}$$

Esto está "mal"

Si se grafica la función Y^2=4X, se nota q en el intervalo 1<=X<=2 "hay dos curvas", con lo hecho solo se calculó la longitud de la "curva de arriba" o del lado positivo de la Y, así q al resultado final habría que multiplicarlo por 2 para tener en cuenta ambas curvas.

Entonces rta: 2,59998

(4) Tengo q':

$L = 100 \qquad R = 2 \qquad E = 10$

Reemplazo en la ec.:

$$100\, i'(t) + 2\, i(t) = 10 \quad , \quad i(0) = 0$$
$$i'(t) = 0{,}1 - 0{,}02\, i(t)$$

a) Quiero $i(t=1)$ usando 4 iteraciones de RK del punto medio

Planteo PVI

$$\begin{cases} 0{,}1 - 0{,}02\, i = i' = f(t, i) \\ i(0) = 0 = i_0 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

× RK del punto medio

$$k_1 = f(t_n, i_n) \qquad k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2} ; i_n + \frac{h}{2} k_1\right)$$

$$i_{n+1} = i_n + h\, k_2$$

Quiero 4 iteraciones $\Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0{,}25$

$\Rightarrow$ Tengo q': $t_0 = 0$; $t_1 = t_0 + h = 0{,}25$; $t_2 = 0{,}5$; $t_3 = 0{,}75$ y $t_4 = 1$

Iteración 1:

$k_1 = 0{,}1 - 0{,}02 \cdot 0 = 0{,}1 \qquad k_2 = 0{,}1 - 0{,}02 \cdot \left(0 + \frac{0{,}25}{2} \cdot 0{,}1\right)$
$= 0{,}1 - 0{,}02 \cdot 0{,}0125 = 0{,}09975$

$i_1 = i_0 + h\, k_2 = 0 + 0{,}25 \cdot 0{,}09975 = \underbrace{0{,}02494} \cong i(0{,}25)$

Iteración 2:

$k_1 = 0{,}1 - 0{,}02 \cdot 0{,}02494 \qquad k_2 = 0{,}1 - 0{,}02 \cdot (0{,}02494 + 0{,}125 \cdot 0{,}09950)$
$= 0{,}09950 \qquad = 0{,}1 - 0{,}02 \cdot 0{,}03738 = 0{,}09925$

$i_2 = i_1 + h\, k_2 = 0{,}02494 + 0{,}25 \cdot 0{,}09925 = \underbrace{0{,}04975} \cong i(0{,}5)$

$\rightarrow$

26/02/2025
2C 4ta FECHA

Iteración 3

$k_1 = 0{,}1 - 0{,}02 \cdot 0{,}04975 = 0{,}09901$

$k_2 = 0{,}1 - 0{,}02 \cdot (0{,}04975 + 0{,}125 \cdot 0{,}09901) = 0{,}09876$

$i_3 = i_2 + h k_2 = 0{,}04975 + 0{,}25 \cdot 0{,}09876 = \underline{0{,}07444} \cong i(0{,}75)$

Iteración 4

$k_1 = 0{,}1 - 0{,}02 \cdot 0{,}07444 = 0{,}09851$

$k_2 = 0{,}1 - 0{,}02 \cdot (0{,}07444 + 0{,}125 \cdot 0{,}09851) = 0{,}09826$

$i_4 = i_3 + h k_2 = 0{,}07444 + 0{,}25 \cdot 0{,}09826 = \underline{0{,}09901} \cong i(1)$

$\therefore \boxed{i(t=1) \cong 0{,}09901}$

b) Evaluar el error bajo la función:

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) = \frac{10}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{100}}\right) =$$

$$= 5\left(1 - e^{-0{,}02t}\right)$$

$\Rightarrow i(1) = 0{,}09900663347 = B$

y por el punto anterior $i(1) \cong 0{,}09901 = A$

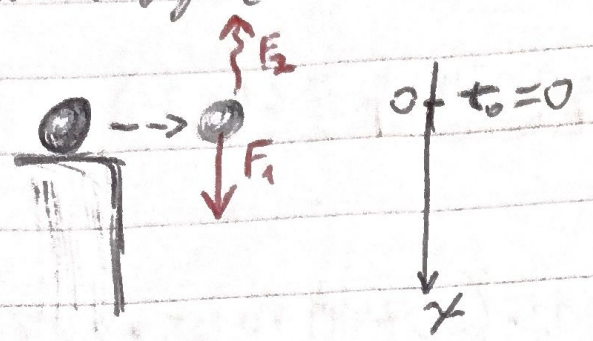
$\Rightarrow |A - B| = 0{,}0000033663338$

$\therefore$ Hay un error cometido por la sol. numérica de $\pm 0{,}000004$ habiendo utilizado cinco cifras significativas y redondeo para dicha solución.

(5) Tengo q':

$0{,}25\,v' = 8 - 2v$ con $\overset{\text{velocidad}}{v(0)=0}$ ∧ $\overset{\text{posición}}{x(0)=0}$ por enunciado

Con un dibujo (No es necesario):



Necesito $v(t=1)$ y $x(t=1)$ usando las iteraciones del método de RK del punto medio.
Entonces planteo la sig. ec.:

$$0{,}25\,x'' = 8 - 2x' \longrightarrow x'' = 32 - 8x'$$

Planteo el cambio de variables $x' = v$ y reemplazo

$$\begin{cases} x' = v \\ 32 - 8v = v' = f(t, x, v) \\ v(0) = 0 = v_0 \;\text{—}\; k \\ x(0) = 0 = x_0 \;\text{—}\; m \end{cases}$$

× RK del punto medio con 2 iteraciones ~~hay~~:

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{2} = 0{,}5 \Rightarrow t_0 = 0;\; t_1 = t_0 + h = 0{,}5$ y $t_2 = t_1 + h = 1$

<u>Iteración 1:</u>

$m_1 = v_0 = 0$ $\qquad$ $k_1 = 32 - 8\cdot 0 = 32$

$m_2 = 0 + \frac{0{,}5}{2}\cdot 32 = 8$ $\qquad$ $k_2 = 32 - 8\cdot 8 = -32$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5\begin{pmatrix} 8 \\ -32 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -16 \end{pmatrix}} \cong \begin{pmatrix} x(0{,}5) \\ v(0{,}5) \end{pmatrix}$$

→

26/02/2025
2C 4ta FECHA

Iteración 2:

$m_1 = -16$ $\qquad$ $K_1 = 32 - 8 \cdot (-16) = 160$

$m_2 = -16 + \frac{0,5}{2} \cdot 160 = 24$ $\qquad$ $K_2 = 32 - 8 \cdot (24) = -160$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} m_2 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 24 \\ -160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -96 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} x(1) \\ V(1) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boxed{x(1) \cong 16 \quad \wedge \quad V(1) \cong -96}$$

Ej. de la 2da FECHA

(4) PVF

DATOS

$L = 50\,m$ $\qquad y''(x) = -w(x)/T$

$y(0) = y(50) = 0$; $T = 5000$

$w(x) = 20\left[1 + e^{x/25}\right]$

Determinar la deflexión del cable con 5 intervalos

•)

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{50-0}{5} = 10 \leftarrow \text{PASO}$$

Reemplazo con los datos:

$$y'' = -\frac{20\left[1+e^{x/25}\right]}{5000} = -\frac{1+e^{x/25}}{250}$$

× Dif. Finitas

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$\begin{cases} y'' = -\dfrac{1+e^{x/25}}{250} \\ y(0) = 0 = y_0 \\ y(50) = 0 = y_5 \\ \underset{x_0}{0} \le x \le \underset{x_5}{50} \end{cases}$$

PVF

Reemplazo en la ec.:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{10^2} = -\frac{1+e^{x_i/25}}{250}$$

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = -\frac{2}{5}\left[1+e^{x_i/25}\right]$$

Trabajo con esta ultima ec.

→

18/12/2024
2C 2da FECHA

→ Plantear ec. con $i = 1,2,3,4$

NO USAR FRACCIONES, NO LE GUSTA A LA PROFE. POR LO MENOS EN ESTA PARTE.

$i=1 \quad y_2 - 2y_1 + \overbrace{y_0}^{=0} = -\frac{2}{5}\left[1+e^{x_1/25}\right]$

$i=2 \quad y_3 - 2y_2 + y_1 = -2/5\left[1+e^{x_2/25}\right]$

$i=3 \quad y_4 - 2y_3 + y_2 = -2/5\left[1+e^{x_3/25}\right]$

$i=4 \quad \underbrace{y_5}_{=0} - 2y_4 + y_3 = -2/5\left[1+e^{x_4/25}\right]$

Dado $x_1 = 10$; $x_2 = 20$; $x_3 = 30$, $x_4 = 40$

Plantear el sist. reemplazando los valores conocidos:

$$\begin{cases} y_2 - 2y_1 = -0{,}99673 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 = -1{,}29022 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 = -1{,}72805 \\ -2y_4 + y_3 = -2{,}38121 \end{cases}$$

Resolviendo el sist. tengo q':

$$\boxed{\begin{array}{ll} y_1 = 2{,}73899 & y_2 = 4{,}48123 \\ y_3 = 4{,}93326 & y_4 = 3{,}65724 \end{array}}$$