Padrón: .....

1. Una compuerta vertical rectangular de 2m de ancho y 3m de alto está completamente sumergida en el agua, con su parte superior a 1m bajo la superficie. Calcular la Fuerza total debido a la Presión Hidrostática sobre un lado de la compuerta usando el método de *Romberg*. Sabiendo que: la densidad del agua es $\rho = 1000k/m^3$, la gravedad $g = 9,81m/s^2$, ancho de la compuerta $w = 2m$. La presión en un punto de profundidad z es $P(z) = \rho g z$ y el diferencial de fuerza $dF = P(z)wdz$. (Dado que z es la altura, se mueve entre 1 y 4). (Ayuda: $R_{i,1} = \frac{1}{2}[R_{i-1,1} + h_{i-1}\sum_{k=1}^{2^{i-2}} f(a + \frac{2k-1}{2}h_{i-1}]$, $R_{i,j} = \frac{4^{j-1}R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1}-1}$)

2. La ley de enfriamiento / calentamiento de Newton establece que: La razón de cambio respecto del tiempo t de la temperatura $T(t)$ de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre T y la temperatura T_a del medio ambiente.

   a) Plantear el problema anterior como un problema de valores iniciales cuando el tiempo t se mueve entre 0 y 2. El tiempo está medido en minutos.

   b) Un bloque de aluminio sale de un horno de tratamiento térmico a $200°C$ y se deja enfriar al aire en un taller donde la temperatura del ambiente es de $25°C$, la constante de proporcionalidad en este caso es $-0.07min^{-1}$. Usar el método de Runge-Kutta del punto medio para calcular la temperatura del bloque al transcurrir $1min$. Hallar h para hacer dos iteraciones del método.

3. Una pared plana de espesor $L = 0.02m$ genera calor uniformemente a razón de $q = 1.510^6 \frac{W}{m^3}$. La conductividad térmica es $k = 15$. Las dos superficies de la pared se mantienen a temperatura constante $T_s = 25°C$.

   a) La ecuación que caracteriza a este proceso es: $\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q}{k} = 0$. Plantear el problema de valores en la frontera.

   b) Aplicar el método de diferencias finitas para estimar la temperatura en los cuatro nodos intermedios. Utilizar dos decimales y redondeo.

4. Un ingeniero ambiental estudia el crecimiento de una colonia de bacterias en un medio controlado. La población se mide cada hora, y está dada en millones.

   a) Proponer un modelo que ajuste por cuadrados mínimos los siguientes datos experimentales:

$t(h)$	0	1	2	3	4
$P(t)10^6$	1	1.65	2.72	4.48	7.39

   b) Estimar la población para $t = 3.5$ horas. (Usar tres decimales y redondeo).

5. Un sistema masa-resorte amortiguado sin fuerza externa está caracterizado por la siguiente ecuación diferencial: $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$ Cuyas condiciones iniciales son: posición en $t = 0$, 1, mientras que la velocidad en $t = 0$ es nula.

   a) Plantear el problema de valores iniciales.

   b) Determinar $x(0, 2s)$. Usando dos iteraciones del método de *Runge Kutta del punto medio*.

Escaneado con CamScanner

② a) Planteo el PVI

$$\begin{cases} T'(t) = k\,(T(t) - T_a) \\ T(t_0) = T_0 \\ 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

b) DATOS:

$T(0) = 200$; $T_a = 25$; $k = -0{,}07$

- Planteo el PVI

$$\begin{cases} T'(t) = -0{,}07\,(T(t) - 25) = 1{,}75 - 0{,}07\,T(t) = f(t,T) = f(T) \\ T(0) = 200 = T_0 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- Calculo el paso h:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{2} = 0{,}5$$

$\Rightarrow t_0 = 0$; $t_1 = 0{,}5$; $t_2 = 1$

- Aplico 2 iteraciones del método Runge Kutta del punto medio con:

$$T_{i+1} = T_i + h \cdot k_2$$

con:

$k_1 = f(T_i)$

$k_2 = f(T_i + \frac{h}{2} k_1)$

Iteración 1:

$k_1 = f(T_0) = f(200) = -12,25$

$k_2 = f(T_0 + \frac{h}{2} k_1) = f(196,9375) = -12,035625$

$T_1 = T_0 + h k_2 = 200 + 0,5(-12,035625) = 193,98219 \approx T(0,5)$

Iteración 2:

$k_1 = f(T_1) = f(193,98219) = -11,8287533$

$k_2 = f(T_1 + \frac{h}{2} k_1) = f(191,0250017) = -11,62175012$

$T_2 = T_1 + h k_2 = 193,98219 + 0,5(-11,62175012) = 188,17131$

$\boxed{\therefore \text{ La temperatura del bloque al transcurrir 1 minuto es de } 188,17131\ C^\circ}$

③ DATOS

$q = 1,5 \times 10^6$; $k = 15$; $T_5 = 25$

$T''_{(x)} + \frac{q}{k} = 0$

a) Planteo el PVF

$$\begin{cases} T''_{(x)} = -100.000 \\ T(0) = 25 = T_0 \\ T(0,02) = 25 = T_5 \\ 0 \leq x \leq 0,02m \end{cases}$$

b) Encuentro el paso h para estimar la temperatura en los 4 nodos intermedios $\Rightarrow m = 5$

$\therefore h = \frac{b-a}{m} = \frac{0,02 - 0}{5} = 0,004$

$\therefore x_0 = 0$; $x_1 = 0,004$; $x_2 = 0,008$; $x_3 = 0,012$; $x_4 = 0,016$; $x_5 = 0,02$

- El metodo de Diferencias Finitas planteo lo siguiente

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

- Reemplazo el valor de $T''_{(x)}$ que obtuve en lugar de y''_i y el h

$$-100.000 = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(0,004)^2}$$

$\Rightarrow -1,6 = T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}$

- Trabajo con esta ecuación y la planteo para $i = 1, 2, 3, 4$

Papel de fibra de caña de azúcar.

Escaneado con CamScanner

$i=1 \rightarrow T_2 - 2T_1 + T_0 = -1,6$

$i=2 \rightarrow T_3 - 2T_2 + T_1 = -1,6$

$i=3 \rightarrow T_4 - 2T_3 + T_2 = -1,6$

$i=4 \rightarrow T_5 - 2T_4 + T_3 = -1,6$

- Reemplazo $T_0 = 25$ y $T_5 = 25$ y planteo un sistema de ec.

$$\begin{cases} T_2 - 2T_1 = -26,6 \\ T_3 - 2T_2 + T_1 = -1,6 \\ T_4 - 2T_3 + T_2 = -1,6 \\ T_3 - 2T_4 = -26,6 \end{cases}$$

- Resolviendo el sistema obtenemos:

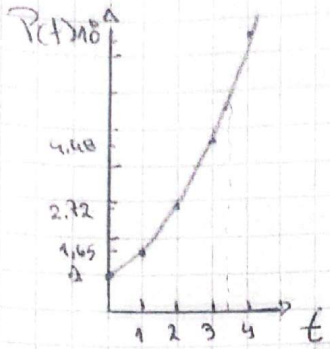
$$\begin{cases} T_1 = 28,20 \\ T_2 = 29,80 \\ T_3 = 29,80 \\ T_4 = 28,20 \end{cases}$$

$\therefore$ Los temperaturas en los 4 nodos intermedios $x_1 = 0,004$; $x_2 = 0,008$ $x_3 = 0,012$ y $x_4 = 0,016$ son.

$T_1 = 28,20\ C^\circ$; $T_2 = 29,80\ C^\circ$; $T_3 = 29,80\ C^\circ$; $T_4 = 29,80\ C^\circ$

Escaneado con CamScanner

④ a) Grafico los puntos dados para proponer un modelo.



- Estos datos tienen un claro comportamiento exponencial por lo tanto utilizaremos el modelo exponencial:

$$y = a e^{bx}$$

b) Para estimar la población para $t = 3,5$ horas, primero linealizamos el modelo:

$$y = a e^{bx} \Rightarrow \ln(y) = \ln(a) + bx$$

- Utilizando el sistema linealizado, lo planteamos para todos los puntos dados.

todos estos numeros son en realidad ellos mismos multiplicados por 10^6

$$\begin{cases} \ln(a) + b(0) = \ln(1) \\ \ln(a) + b(1) = \ln(1,65) \\ \ln(a) + b(2) = \ln(2,72) \\ \ln(a) + b(3) = \ln(4,48) \\ \ln(a) + b(4) = \ln(7,39) \end{cases}$$

- Planteo este sistema en forma matricial: $A\tilde{x} = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(a) \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(1) \\ \ln(1,65) \\ \ln(2,72) \\ \ln(4,48) \\ \ln(7,39) \end{pmatrix}$$

Papel de fibra de caña de azúcar
Escaneado con CamScanner

- Resuelvo el sistema usando $A^T A \bar{x} = A^T b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(a) \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(1) \\ \ln(1,65) \\ \ln(2,72) \\ \ln(4,48) \\ \ln(7,39) \end{pmatrix}$$

Los valores están hechos con los ya indicados multiplicados por 10^6

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(a) \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74,079 \\ 153,157 \end{pmatrix}$$

- Esto derivo en el sistema:

$$\begin{cases} 5\ln(a) + 10b = 74,079 \\ 10\ln(a) + 30b = 153,157 \end{cases}$$

- Resolviendolo obtengo:

$$\begin{cases} \ln(a) = 13,816 \Rightarrow a = 1.000.489,562 \\ b = 0,4999 \rightarrow \text{redondeo } b = 0,5 \end{cases}$$

3

- La ecuación de aproximación que obtengo es:

$$y = 1.000.489,562 \cdot e^{0,5x}$$

- hallo $y(3,5)$

$$y(3,5) = 1.000.489,562 \cdot e^{0,5(3,5)} = 5.757.419,911$$

$$\boxed{\therefore \text{ La población en } t = 3,5 \text{ horas es de } 5\,757\,419.}$$

Escaneado con CamScanner

(5) DATOS:

a) $x''(t) + 2x'(t) + 5x = 0$; $x(0) = 1$; $x'(0) = 0$

- Planteo el PVI con el cambio de variable $v = x'$

$$\begin{cases} v(t) = x'(t) \\ v'(t) + 2v(t) + 5x(t) = 0 \\ x(0) = 1 = x_0 \\ v(0) = 0 = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(t) = x'(t) \\ v'(t) = -2v(t) - 5x(t) = f(x,t) \\ x(0) = 1 = x_0 \\ v(0) = 0 = v_0 \end{cases}$$

b) Para hallar $x(0,25)$, primero calculo el paso que debo usar en RK

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{0,2 - x_0}{\text{iteraciones}} = \frac{0,2-0}{2} = 0,1$$

$\Rightarrow t_0 = 0$; $t_1 = 0,1$; $t_2 = 0,2$

- Planteo el metodo Runge Kutta del punto medio donde:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} k_2 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

con: $f(t, x, v) = -2v(t) - 5x(t)$

donde:

$k_1 = v_i$; $m_1 = f(t_i ; x_i ; v_i)$

$k_2 = v_i + \frac{h}{2} m_1$; $m_2 = f(t_i + \frac{h}{2} ; x_i + \frac{h}{2} k_1 ; v_i + \frac{h}{2} m_1)$

- En la siguiente carilla realizo las 2 iteraciones:

Iteración 1

$k_1 = v_0 = 0$; $m_1 = f(t_0, x_0, v_0) = f(0, 1, 0) = -2(0) - 5(1) = -5$

$k_2 = v_0 + \frac{h}{2} m_1 = 0 + \frac{0,1}{2}(-5) = -0,25$

$m_2 = f(t_0 + \frac{h}{2} ; x_0 + \frac{h}{2} k_1 ; v_0 + \frac{h}{2} m_1) = -4,5$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} k_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} -0,25 \\ -4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,975 \\ -0,45 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x(0,1) \\ v(0,1) \end{pmatrix}$$

Iteración 2:

$k_1 = v_1 = -0,45$; $m_1 = f(t_1, x_1, v_1) = f(0,1, 0,975, -0,45) = -3,975$

$k_2 = v_1 + \frac{h}{2} m_1 = -0,45 + \frac{0,1}{2}(-3,975) = -0,64875$

$m_2 = f(t_1 + \frac{h}{2} ; x_1 + \frac{h}{2} k_1 ; v_1 + \frac{h}{2} m_1) = f(0,15 ; 0,9525 ; -0,64875) = -3,465$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} k_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,975 \\ -0,45 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} -0,64875 \\ -3,465 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,910125 \\ -0,7965 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\therefore \; x(0,25) \cong 0,91013}$$

Escaneado con CamScanner