15. Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP)

Las ecuaciones en derivadas parciales aparecen en la modelización de fenómenos físicos que dependen de múltiples variables independientes, como el tiempo y el espacio. En general, representan sistemas dinámicos distribuidos, y su resolución requiere tanto condiciones iniciales como condiciones en la frontera.

En Análisis Numérico, las EDP se resuelven principalmente mediante el método de **diferencias finitas**, reemplazando derivadas por aproximaciones discretas. La dificultad real, sin embargo, suele radicar en establecer correctamente las **condiciones de frontera e iniciales**, que reflejan el comportamiento físico del sistema y las propiedades del material involucrado.

15.1 Definición y clasificación

Una ecuación en derivadas parciales (EDP) relaciona una función desconocida de varias variables con sus derivadas parciales. Su forma general es:

$$f\left(x, y, \dots, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \dots\right) = 0, \quad \text{donde } U = U(x, y).$$

Las EDP de segundo orden en dos variables se suelen expresar como:

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + F = 0,$$

donde A, B, C, F pueden depender de x e y.

Según el discriminante $B^2 - 4AC$, se clasifican en:

1. Elptica: si $B^2 - 4AC < 0$ (Ej.: Ecuación de Laplace, Poisson).
2. Parabólica: si $B^2 - 4AC = 0$ (Ej.: Ecuación del calor).
3. Hiperbólica: si $B^2 - 4AC > 0$ (Ej.: Ecuación de ondas).

15.2 Ejemplos físicos

Ecuación de ondas 1D

Modela el desplazamiento vertical $u(x, t)$ de una cuerda vibrante sometida a una fuerza externa $F(x, t)$. La ecuación es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t), \quad x \in [0, L],\ t \in \mathbb{R}.$$

El parámetro c^2 representa la velocidad de propagación de la onda en el material.

Ecuación del calor 1D

Describe la evolución de la temperatura $u(x, t)$ en una barra con fuentes o sumideros internos representados por $F(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t), \quad x \in (0, L),\ t > 0.$$

El coeficiente k^2 depende de la conductividad térmica, densidad y calor específico del material.

Versiones multidimensionales

El **Laplaciano** de una función $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se define como:

$$\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u).$$

En particular: