ejercicios de resueltos y hechos por mi.

• Puede que algún/os ejercicio/s tengas errores de cuentas / procedimiento!

Scanned with CamScanner

$x^3+x^2+x+d=0$

HOJA N°

FECHA

dado el sistema $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$

(a) demostrar que $\rho(T_G) = 0{,}5$. Siendo T_G la matriz del método de Gauss-Siedel asociado al sistema.

(b) Realizar 3 it. del método del Método de Gauss Siedel estimar el error relativo cometido entre 2 it. consecutivos

Para realizar la matriz $\rightarrow T_G = (D-L)^{-1} \cdot U$

$$A \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow T_G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5-\lambda & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} (0{,}5-\lambda) & 0{,}5 \\ 0 & (0{,}5-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda(-(0{,}5-\lambda)(0{,}5-\lambda))$$

$$-\lambda(0{,}25 - 0{,}5\lambda - 0{,}5\lambda + \lambda^2)$$

$$-\lambda(0{,}25 - 1\lambda + \lambda^2)$$

$$-\lambda^3 - 0{,}25\lambda + \lambda^2$$

$$-\lambda^3 + \lambda^2 - 0{,}25\lambda$$

$\hookrightarrow \rho(T_G) = \{0{,}5, 0\}$

$\hookrightarrow \max(\rho(T_G)) = 0{,}5.$

(b) Para realizar 3 iteraciones

$$(D-L)^{-1} \cdot b = C_G$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ -1{,}5 \end{bmatrix}$$

el sistema nos queda $x^k = (T_G x^{(k-1)} + C_G)$ $\rightarrow (D-L)^{-1} b$

$$\begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} x^{(k-1)} + \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ -1{,}5 \end{bmatrix}$$

$it=1$ $x^0 = [0\ 0\ 0] \rightarrow x^1 = [-0{,}5\ \ 2{,}5\ \ -1{,}5]$

$it=2$ $\rightarrow [-2\ \ 0{,}5\ \ -0{,}75] + [-0{,}5\ \ 2{,}5\ \ -1{,}5] = [-1{,}5\ \ -2\ \ 0{,}75]$

$it=3 \rightarrow [0{,}875\ \ 1{,}875\ \ -1{,}125]$

NOTA

Scanned with CamScanner

$$\frac{\|x^k - x^{k-1}\|}{\|x^{(k)}\|_\infty} < 10^{-3}$$

$$\frac{\|x^1 - x^0\|}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\left\|\begin{pmatrix} -0{,}3 \\ 2{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}\right\|}{2{,}5} = 1{,}1832$$

$$\frac{\|x^2 - x^1\|}{\|x^2\|_\infty} = \frac{\left\|\begin{pmatrix} -1 \\ -4{,}5 \\ 2{,}25 \end{pmatrix}\right\|}{0{,}75} = 6{,}8394$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

Un modelo para la difusión de una enfermedad en una población está dado por el sist.

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -aSI \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = aSI - bI \end{cases}$$

donde a y b son constantes positivas

en este caso, $S(t)$ representa la población susceptible e $I(t)$ la población infectada después de t años. La constante a es una medida de la rapidez de transmisión de la enfermedad de una persona infectada a la población susceptible. La constante b representa la razón con la que sana la población infectada, es decir, sale de la población infectada

a) Suponga que para cierta enfermedad $a = 0{,}003$ y $b = 0{,}5$. Las condiciones iniciales son: una persona está infectada y 700 personas son susceptibles

$$\begin{cases} S' = -aSI = f_1 \\ I' = aSI - bI = f_2 \\ S(0) = 700 \\ I(0) = 1 \end{cases}$$

Usar el método de Euler

$$\begin{pmatrix} S_{n+1} \\ I_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_n \\ I_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f_1(S_n, I_n) \\ f_2(S_n, I_n) \end{pmatrix}$$

dos iteraciones → ver en 10 días. $h = 5$.

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 \\ I_0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -0{,}003 \cdot S_0 I_0 \\ 0{,}003 S_0 I_0 - 0{,}5 I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 700 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -0{,}003 \cdot 700 \cdot 1 \\ 0{,}003 \cdot 700 - 0{,}5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 689{,}5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_2(10) \\ I_2(10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 689{,}5 \\ 9 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -0{,}003 \cdot 689{,}5 \cdot 9 \\ 0{,}003 \cdot 689{,}5 \cdot 9 - 0{,}5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 596{,}4175 \\ 70{,}5825 \end{pmatrix}$$

(la cantidad de personas infectadas son de aproximadamente 71 personas!)

Scanned with CamScanner

Una partícula se mueve a lo largo del eje x con una aceleración q en cualquier tiempo $t \geq 0$ se escribe como: $a(t) = 8-4t+t^2$. Se sabe que la partícula se encuentra en $x=1$ en $t=0$ y al cabo de dos segundos se encuentra $x=7$.

hallar la posición de la partícula en los instantes $t=0{,}5$ seg., $t=1$ y $t=1{,}5$ seg usando dif. finitas

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{d^2t} = 8-4t-t^2 \\ x(0)=1 \\ x(2)=7 \end{cases}$$

$x(0{,}5)$, $x(1)$, $x(1{,}5)$?

$h = 0{,}5$

$$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(y)y = f(x)}$$

$\rightarrow y'' = 8-4t-t^2$

$P(x)=0$, $Q(x)=0$, $f(t) = 8-4t+t^2$

i	0	1	2	3	4
t	0	0,5	1	1,5	2

entonces

$$\rightarrow \underbrace{\left(1+\frac{h}{2}P_i\right)}_{1} y_{i+1} + \underbrace{\left(-2+hQ_i\right)}_{-2} y_i + \underbrace{\left(1-\frac{h}{2}P_i\right)}_{1} y_{i-1} = h^2 f_i$$

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2 f_i$$

$$\begin{cases} 1 \quad y_2 - 2y_i + \overset{1}{y_0} = (0{,}5)^2 \cdot (8-4(0{,}5)+(0{,}5)^2) = 1{,}5625 \\ 2 \quad y_3 - 2y_2 + y_1 = (0{,}5)^2(8-4\cdot 1+1^2) = 1{,}25 \\ 3 \quad \underset{7}{y_4} - 2y_3 + y_2 = (0{,}5)^2(8-4\cdot(1{,}5)+(1{,}5)^2) = 1{,}0625 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \rightarrow y_1 &= \frac{1}{2}(y_2 + y_0 - 1{,}5625) \\ \rightarrow y_3 &= \frac{1}{2}(y_4 + y_2 - 1{,}0625) \end{aligned}\right\} \text{realizamos el sist.}$$

$$\boxed{y_2 = 2y_1 - y_0 + 1{,}5625}$$

$$y_3 = \frac{1}{2}\left(\overset{7}{y_4} + (2y_1 - \overset{1}{y_0} + 1{,}5625) - 1{,}0625\right)$$

$$y_3 = \frac{1}{2}\left(7 + 2y_1 - 1 + 1{,}5625 - 1{,}0625\right)$$

$$y_3 = \frac{1}{2}\left(\overset{6{,}5}{\cancel{}} + 2y_1\right)$$

$$\boxed{y_3 = 3{,}25 + y_1}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_2 = 1{,}4375 \\ y_1 = 0{,}4375 \\ y_3 = 3{,}6875 \end{cases}$$

NOTA

Scanned with CamScanner

HOJA N°

FECHA

$y_1 + 3,25$

$\cancel{y_0 + 4y_1 + 2y_0 - 2 \cdot 3,5625 + y_0 + 3,25 = 1,25}$

$\cancel{5y_1 + 3,25 + 2 - 3,125 + y_1 = 1,25}$

$\cancel{6y_1 = 1,25 - 3,25 - 2 + 3,125}$

dada la ecuación real $2\cos(2x) + 4x - k = 0$

a) determinar el valor de k (con 4 cifras decimales) para que tenga una única raíz triple en el intermedio $[0,1]$

b) Para el valor de k, hallado en a), calcular la raíz con una cifra decimal exacta, utilizando por el método de Newton modificado para raíces múltiples. Semilla $x_0 = 0,7$

- $f'(x)$ y $f''(x)$ se tienen que anular en ese x.

$f'(x) = -4\,\text{sen}(2x) + 4$ } las dos se anulan en $\pi/4$

$f''(x) = -8\cos(2x)$ } $\frac{\pi}{4} \approx 0,7853981634$

Busco k para que $f(\pi/4) = 0$

$2\cos\left(2\frac{\pi}{4}\right) + 4\frac{\pi}{4} - k = 0 \rightarrow \boxed{k = \pi}$ → redondeo 3,1416

b) Semilla opera N modificado

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n) f''(x_n)}$$

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f''(x_n)$	x_{n+1}
0,7	$-1,6657 \cdot 10^{-4}$	0,058281	-1,3597	0,78636
0,78636	$-7,34484 \cdot 10^{-6}$	$7,4003 \cdot 10^{-6}$	0,015389	0,78684

NOTA

Scanned with CamScanner

Se desea aproximar la función $f(x) = 3^x - 1$. mediante un trazador cúbico natural de la forma

$$S(x) = \begin{cases} S_0 = a_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3 & x_0 \le x \le x_1 \\ S_1 = a_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3 & x_1 \le x \le x_2 \end{cases}$$

Tomar $(x_0, x_1, x_2) = (0, 1, 3)$. det. los coeficientes y calcular $S(2{,}5)$

$f(x_0) = S(x_0) = \boxed{a_0 = 0}$

$f(x_1) = S(x_1) = \boxed{a_1 = 2}$

$S_0'(x) = b_0 + 2c_0(x-x_0) + 3d_0(x-x_0)^2$

$S_1'(x) = b_1 + 2c_1(x-x_1) + 3d_1(x-x_1)^2$

$S_0''(x) = 2c_0 + 6d_0(x-x_0)$

$S_1''(x) = 2c_1 + 6d_1(x-x_1)$

- $S_0(x_1) = S_1(x_1) \rightarrow$ ~~[illegible]~~

$b_0 + c_0 + d_0 = a_1 = 2 \rightarrow b_0 = 2 - \frac{1}{3}c_1$

- $S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \rightarrow b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1 \longrightarrow b_1 = 2 - \frac{1}{3}c_1 + c_1$

$\downarrow$

$b_1 = 2 + \frac{2}{3}c_1$

- $S_0''(x_1) = S_1''(x_1) \rightarrow 2c_0 + 6d_0 = 2c_1 \rightarrow d_0 = \frac{1}{3}c_1$

- $S_0''(x_0) = 0 \rightarrow 2c_0 = 0 \rightarrow c_0 = 0$

- $S_1''(x_2) = 0 \rightarrow 2c_1 + 12d_1 = 0 \rightarrow d_1 = -\frac{1}{6}c_1$

$f(x_2) = S_1(x_2) = 26 = 2 + 2(2 + \frac{2}{3}c_1) + 4c_1 - 8(-\frac{1}{6}c_1)$

$\hookrightarrow \boxed{c_1 = 5}$

$\boxed{b_0 = 1/3}$

$\boxed{b_1 = 16/3}$

$\boxed{d_0 = 5/3}$

$\boxed{d_1 = -5/6}$

luego

$S(2{,}5) \approx 2 + \frac{16}{3}(2{,}5-1)^2 - \frac{5}{6}(2{,}5-1)^3$

$\approx 11{,}18$

$\updownarrow$ comi

$f(2{,}5) = 14{,}588$

NOTA

HOJA N°

FECHA

(a) demostrar la sig. afirmación:

"Sea $g \in C^{n+1}[a,b]$, tiene cero de multiplicidad m en $p \in [a,b]$, existe un método de convergencia cuadrática para hallar esta raíz, como raíz simple de una solución adecuada".

(b) Usar 4 iteraciones del método demostrado en (a) para hallar la raíz múltiple de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$. Trabajar al menos con 4 decimales y redondeo. Tomar como semilla $x_0 = 0,9$.

Para hallar una raíz de multiplicidad $m, m \geq 2$, se puede utilizar el método de NR modificado. NR normal no se puede usar ya que si hay multiplicidad entonces $f'(p) = 0$ y no se puede realizar la cuenta "$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$".

NR modificado utilizamos la segunda derivada, ~~después~~ ma si la función $g(x) = \frac{f(x) \cdot f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)}$ cumple con las condiciones necesarias de continuidad, la convergencia se mantendrá cuadrática sin importar la multiplicidad de la raíz de f.

el método modificado es: $\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$

entonces:

$$f(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x) \cdot f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)}$$

(b) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = f(x)$ $\quad x_0 = 0,9$ $\quad f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$

$f''(x) = 6x - 10$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - f(x_n) f''(x_n)}$$

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f''(x_n)$	x_{n+1}
0,9	-0,021	0,43	-4,6	1,0023
1,0023	$-1,0568 \cdot 10^{-3}$	$-9,1841 \cdot 10^{-3}$	-3,9862	1,0046
1,0046	$-4,2222 \cdot 10^{-5}$	-0,018336	-3,9724	1,00001
1,0001	$-2,30 \cdot 10^{-10}$	$-3,99994 \cdot 10^{-5}$	-3,49994	0,99999

} se aproxima

$r = 1 \pm 0,00001$

NOTA

Scanned with CamScanner

HOJA N°

FECHA

Se sabe que la tasa de crecimiento de una determinada población de bacterias existentes. Se realiza un cultivo en un laboratorio, introduciendo 2.5 millones de bacterias en un recipiente. Se observa que la población se triplica cada hora. Completar tabla, calcular la aproximación de la población a los 3.5 horas, usando cuadrados mínimos.

t	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00
$\rho(t).10^6$	2,5	7,5	22,5	67,5	202,5

~~Como y~~ voy a utilizar el modelo → $y = a + bx$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 7,5 \\ 22,5 \\ 67,5 \\ 202,5 \end{bmatrix}$$

$$A^T A \hat{x} = A^T b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,5 \\ 7,5 \\ 22,5 \\ 67,5 \\ 202,5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 302,5 \\ 1065 \end{bmatrix}$$

↳ $a = -31,5$, $b = 46$ → $y = -31,5 + 46x$

↳ valores sin redondear (la calculadora maneja esos valores)

$y(3,5) \approx -31,5 + 46 \cdot 3,5$

$y(3,5) \approx 129,5$

↳ tiene concordancia con la tabla.

NOTA

HOJA N°

FECHA

Se sabe que la tasa de crecimiento de una determinada población de bacterias existentes. Se realiza un cultivo en un laboratorio, introduciendo 2.5 millones de bacterias en un recipiente. Se observa que la población se triplica cada hora. Completar tabla, calcular la aproximación de la población a las 3.5 horas, usando cuadrados mínimos.

t	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00
$P(t).10^6$	2,5	7,5	22,5	67,5	202,5

~~como y~~ voy a utilizar el modelo → $y = a + bx$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 7,5 \\ 22,5 \\ 67,5 \\ 202,5 \end{bmatrix}$$

$$A^T A \hat{x} = A^T b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,5 \\ 7,5 \\ 22,5 \\ 67,5 \\ 202,5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 302,5 \\ 1065 \end{bmatrix}$$

↳ $a = -31,5$, $b = 46$ → $y = -31,5 + 46x$

↳ valores sin redondear (la calculadora me dio esos valores)

$y(3,5) \approx -31,5 + 46 \cdot 3,5$

$\boxed{y(3,5) \approx 129,5}$

↳ tiene concordancia con la tabla.

NOTA

Sea $\vec{f}(x, x-y^2)$. Calcular la circulación de $\vec{f}$ en sentido (+) a lo largo de la curva descripta por: $0 \le y \le 1$, $x = y^2$.
Usar Simpson 1/3 con $N=8$. Indicar el error ó correcto.

indicamos la curva $y=t$

$\hookrightarrow 0 \le y \le 1,\ x = y^2 \rightarrow \gamma(t) = (t^2, t) \quad t \in [0,1]$

$$I = \int_0^1 (t^2, \underbrace{t^2 - t^2}_{0})(2t, 1)\,dt = \int_0^1 \underbrace{2t^3}_{f(t)}\,dt \qquad h = \frac{1-0}{8} = 0{,}125$$

Con Simpson 1/3

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}=3} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N+2}{2}} f(x_{2k})\right]$$

$$\approx \frac{0{,}125}{3}\left[f(0) + f(1) + 4\big(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7)\big) + 2\big(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6)\big)\right]$$

$f(x_0) = f(0) = 0$

$f(x_1) = f(0{,}125) = 0{,}00391$

$f(x_2) = f(0{,}25) = 0{,}03125$

$f(x_3) = f(0{,}375) = 0{,}10547$

$f(x_4) = f(0{,}5) = 0{,}25000$

$f(x_5) = 0{,}48828 \quad x_5 = 0{,}625$

$f(x_6) = f(0{,}75) = 0{,}84375$

$f(x_7) = f(0{,}875) = 1{,}33984$

$f(x_8) = f(1) = 2$

$$\frac{0{,}125}{3} \cdot \left[0 + 2 + 4\big(0{,}00391 + 0{,}10547 + 0{,}48828 + 1{,}33984\big) + 2\big(0{,}03125 + 0{,}25 + 0{,}84375\big)\right]$$

$$\frac{0{,}125}{3}\left[2 + 4(1{,}9375) + 2(1{,}125)\right] = \boxed{0{,}5} \quad \underline{\text{RTA}}$$

$$\int_0^1 2t^3\,dt = \frac{t^4}{2}\Big|_0^1 = 0{,}5$$

$\frac{2t^4}{4}$

Verificación

(b) el valor es exacto ya que el polinomio es de grado 3 y la cuarta derivada es cero. (verificación con la cuenta hecha previamente).

NOTA

HOJA N°

FECHA

La ley de enfriamiento de Newton está caracterizada por la ec dif. $\frac{dT(t)}{dt} = -K(T-T_a)$, donde T es la temperatura del objeto, T_a es la temperatura del ambiente y K es la constante de proporcionalidad.

Esta ecuación es usada en criminalística para determinar la hora de muerte, en el instante $t=0$ se descubre el cuerpo. En ese instante, se toma su temperatura $T_0 = 29,5°C$, dos horas después es de $T_2 = 23,5°C$, lo que permite determinar la constante $K = 0,49926$, mientras q la T° del ambiente es $T_a = 20°C$

(a) Usar los datos anteriores y plantear PVI.

(b) Usar el método de Runge Kutta del punto medio para determinar aproximadamente la hora de muerte. Se sabe que la temperatura del cuerpo era el valor normal: $T_c = 36°C$. Usar $h=0,2$ ó $h=-0,2$, de acuerdo a la T° que establezca como semilla ($h=0,2$ ó $h=-0,2$ equivale a dos horas)

• ley de enfriamiento de Newton $\longrightarrow T' = -K(T-T_a)$

- en $T=0$ se descubre un cuerpo

(a) $\begin{cases} T' = -0,49926(T-20°C) \\ T(0) = 29,5°C \\ T(2) = 23,5°C \end{cases}$

(b) Para $T(t) = 36°C \rightarrow$ en coherencia a medida que va pasando el tiempo el cuerpo esta cada vez más frío

$\hookrightarrow$ usamos $\boxed{h=-0,2}$

RK del punto medio

$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot K_2 \\ y(0) = 29,5°C \end{cases} \rightarrow$ $K_1 = f(t_i, y_i) = +0,49926(y_i - 20)$

$K_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h \cdot K_1}{2})$

$\hookrightarrow +0,49926(y_i + \frac{hK_1}{2} - 20)$

NOTA

Scanned with CamScanner

$\boxed{t = -2}$

$\hookrightarrow y_1 = y_0 + hk_2$, $k_1 = (-0{,}49926)(29{,}5°C - 20°C)$

$k_1 = -4{,}74297$

$k_2 = (-0{,}49926)\left(29{,}5 - \frac{0{,}2(-4{,}74297)}{2} - 20\right)$

$y_1 = 29{,}5 - 0{,}2 \cdot 4{,}5 \ldots =$

$y_1 = 30{,}496$

$\boxed{t = -4}$

$k_1 = (-0{,}49926)(30{,}496°C - 20°C)$

$\hookrightarrow y_2 = y_1 + hk_2$

$k_1 = -5{,}2402$

$y_2 = 30{,}496 + 0{,}2 \cdot 5{,}501855$

$k_2 = (-0{,}49926)\left(30{,}496 + \frac{(-0{,}2)\cdot(-5{,}2402)}{2} - 20°C\right)$

$y_2 = 31{,}596371$

$k_2 = -5{,}501855$

$\boxed{t = -6}$

$y_3 = y_2 + hk_2$

$k_1 = (-0{,}4926)(31{,}596371 - 20)$

$y_3 = 32{,}7951$

$k_1 = -5{,}712372355$

$k_2 = (-0{,}4926)\left(31{,}596371 - \frac{0{,}2 \times -5{,}712372355}{2} - 20\right)$

$k_2 = -5{,}993763817$

$\boxed{t = -8}$

$y_4 = y_3 + hk_2$

$k_1 = (-0{,}4926)(32{,}7951 - 20)$

$k_1 = -6{,}30286628$

$y_4 = 34{,}1178$

$k_2 = (-0{,}4926)\left(32{,}7951 - \frac{0{,}2 \times -6{,}30286628}{2} - 20\right)$

$k_2 = -6{,}613345452$

$\boxed{t = -10}$

$y_5 = y_4 + hk_2$

$k_1 = (-0{,}4926)(34{,}1178 - 20)$

$k_1 = -6{,}984428 28$

$\boxed{y_5 = 35{,}57720068}$

$k_2 = (-0{,}4926)\left(34{,}1178 - \frac{0{,}2 \times k_1}{2} - 20\right)$

$k_2 = -7{,}297003417$

$\boxed{t = -12}$

$y_6 = y_5 + hk_2$

$k_1 = (-0{,}4926)(35{,}57720068 - 20)$

$k_2 = (-0{,}4926)\left(35{,}57720068 - \frac{0{,}2 \times k_1}{2} - 20\right)$

$\boxed{y_6 = 37{,}18746413}$

$k_2 = -8{,}051317244$

Podemos afirmar que la hora de muerte está entre 10 y 12 horas antes de que se encontrara el cuerpo.

Scanned with CamScanner

HOJA N°

FECHA

El balance de calor en estado estacionario se representa como:

$\frac{d^2T}{dt} + 0{,}01(T_e - T) = 0$, para una barra de longitud L. Sabiendo que $T_e = 20°C$

a) Desarrolle el método de diferencias finitas para un problema de valores de la frontera.

b) Sabiendo que la barra tiene longitud de 10 m con $T(0) = 40°C$ y $T(L) = 200°C$. Usar lo desarrollado en a) para evaluar el calor en los puntos intermedios de la barra con $N = 8$.

a) $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \rightarrow$ diferencias finitas

$$\begin{cases} T'' + 0{,}01T = -0{,}01T_e \\ T(0) = 40°C \\ T(10) = 200°C \end{cases}$$

$P(x) = 0$, $Q(x) = 0{,}01$, $f(x) = 0{,}01\,T_e$

$h = \frac{10-0}{8} = 1{,}25 = h \rightarrow \frac{10}{1{,}25} = 8 \rightarrow$ 8 ecuaciones

entonces $\rightarrow (1 + \underbrace{P(x)}_{=0})y_{i+1} + (\underbrace{-2 + h^2 Q(x)}_{=-2{,}0156})y_i + (1 - \underbrace{\tfrac{h}{2}P_i}_{=0})y_{i-1} = h^2(-0{,}01 \cdot 20°C)$

$y_{i+1} - 2{,}0156y_i + y_{i-1} = -0{,}03125$

$y_2 - 2{,}0156y_1 + y_0 = -0{,}03125 \rightarrow y_2 - 2{,}0156y_1 = -40{,}03125$

$y_3 - 2{,}0156y_2 + y_1 = -0{,}03125$

$y_4 - 2{,}0156y_3 + y_2 = -0{,}03125$

$y_5 - 2{,}0156y_4 + y_3 = -0{,}03125$

$y_6 - 2{,}0156y_5 + y_4 = -0{,}03125$

$y_7 - 2{,}0156y_6 + y_5 = -0{,}03125$

$y_8 - 2{,}0156y_7 + y_6 = -0{,}03125 \rightarrow -2{,}0156y_7 + y_6 = -200{,}03125$

$$\begin{bmatrix} -2{,}0156 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2{,}0156 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2{,}0156 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2{,}0156 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2{,}0156 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2{,}0156 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2{,}0156 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40{,}03125 \\ -0{,}03125 \\ -0{,}03125 \\ -0{,}03125 \\ -0{,}03125 \\ -0{,}03125 \\ -200{,}03125 \end{bmatrix}$$

NOTA

$$X = \begin{bmatrix} y_1 = 55,172 \\ y_2 = 71,173 \\ y_3 = 88,254 \\ y_4 = 106,680 \\ y_5 = 126,739 \\ y_6 = 148,744 \\ y_7 = 173,038 \end{bmatrix}$$

RTA

de manera diferente...

Por dif. centradas: $y''_i \cong \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$

reemplazo en la ecuación

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{4} + k(T_a - T_i) = 0$$

$$0,25\,T_{i+1} - 0,51\,T_i + 0,25\,T_{i-1} = -0,2 \qquad i = 1,2,3,4$$

reemplazo con todos los i validos y armo mi sistema

$$\begin{cases} 0,25\,T_2 - 0,51\,T_1 = -10,2 \\ 0,25\,T_3 - 0,51\,T_2 + 0,25\,T_1 = 0,2 \\ 0,25\,T_4 - 0,51\,T_3 + 0,25\,T_2 = -0,2 \\ -0,51 + 0,25\,T_3 = -50,2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -0,51 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0,25 & -0,51 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & -0,51 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,25 & -0,51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10,2 \\ -0,2 \\ -0,2 \\ -50,2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65,94 \\ 93,78 \\ 124,54 \\ 159,48 \end{bmatrix}$$

RTA

(más corto)

NOTA

CORRECCIÓN DEL FINAL 8-03-2023

HOJA N°

FECHA

① Dado el sist. lineal $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$

Ⓐ hallar el $\rho(T_{GS})$. Siendo T_{GS} la matriz del método de Gauss Siedel asociado al sistema. Justificar la convergencia.

ⓑ Realizar dos iteraciones del método de Gauss-diesel utilizar al menos

Ⓐ $\rho(T_{GS})$ se trata del autovector (valor) de mayor módulo

→ Escribo el sistema matricialmente como $Ax = b$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}}_{b}$$

Reescribo la matriz como $A = D - L - U$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}}_{L} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

opero matricialmente → $x = \underbrace{(D-L)^{-1}U}_{T(G_S)} x + \underbrace{(D-L)^{-1}b}_{c(G_S)}$

↳ método de Gauss Deisel.

Calculo la matriz $(D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}06 & 0{,}28 \\ 0 & 0{,}048 & -0{,}074 \end{pmatrix}$

ahora calculo los autovalores

$$\det(T_{GS} - I\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -0{,}3 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}06-\lambda & 0{,}28 \\ 0 & 0{,}048 & -0{,}074-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} -0{,}06-\lambda & 0{,}28 \\ 0{,}48 & -0{,}074-\lambda \end{vmatrix}$$

$(-\lambda)[(-0{,}06-\lambda)(-0{,}074-\lambda) - (0{,}28 \cdot 0{,}48) =$

↳ $\sigma(T_g) = \{0; 0{,}4337; 0{,}2997\}$

$\boxed{\rho(T_{GS}) = 0{,}4337}$ radio espectral

NOTA

Scanned with CamScanner

el método va a converger xq el sist. está dispuesto en diagonal dominante y además ~~$\rho(T_{GS}) = 0,43371$~~. $\rho(T_{GS})$

(b) $T_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & -0,3 & -0,1 \\ 0 & -0,06 & 0,28 \\ 0 & 0,048 & -0,074 \end{bmatrix}$ $\quad C_{BS} = \begin{bmatrix} 1,4 \\ 0,78 \\ 1,026 \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow (D-L)^{-1} b$

Iteración 1

$x^{(2)} = T_{GS} x^{(0)} + C_{GS} \longrightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,4 \\ 0,78 \\ 1,026 \end{bmatrix}$

IT. 2

$x^{(1)} = T_{GS} x^{(1)} + C_{GS} \longrightarrow x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,06340 \\ 1,02048 \\ 0,98752 \end{bmatrix} \longrightarrow$ RTA

$$\varepsilon = \frac{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty}{|x^{(2)}|_\infty} = \frac{|1,0634 - 1,026|}{|1,0634|} = 0,03517$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

(2) Suponga q un lago de volumen $V = 10 km^3$ tiene contaminantes A y B disueltos uniformemente en cantidades iniciales de 1 y 7 toneladas respectivamente. Agua contaminada con una concentración $1 \frac{ton}{km^3}$ de A ingresa a una tasa constante de $6 km^3/año$. Además, ingresaron directamente 1 ton/año, del contaminante A y 2 ton/año del contaminante B. Suponer que el agua perfectamente mezclada sale del lago a una tasa de $6 km^3/año$. El sistema de ec. dif. que caracteriza a este problema se puede escribir como

$$\begin{cases} A'(t) = 6 - 0{,}6\, A(t) \\ B'(t) = 2 - 0{,}6\, B(t) \end{cases}$$

Indicar las condiciones iniciales y aproximar la cantidad de contaminante A y B presentes al cabo de 0,5 seg.

Usar 5 it. del método de Euler. Indicar si las cantidades de contaminantes son iguales transcurrido ese tiempo.

- sistema de ecuaciones del problema.

$$\begin{cases} A'(t) = 6 - 0{,}6\, A(t) \\ B'(t) = 2 - 0{,}6\, B(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} f_A(t_i, A_i) = 6 - 0{,}6\, A_i \\ f_B(t_i, B_i) = 2 - 0{,}6\, B_i \end{array}$$

las condiciones iniciales se indican al comienzo del inciso.

↳ $A(0) = 1$, $B(0) = 7$

el tiempo pedido $t = 0{,}5 \rightarrow h = \frac{0{,}5 - 0}{5 \text{ it.}} = 0{,}1$

defino Euler

$$\begin{bmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f(t_i, A_i) \\ f(t_i, B_i) \end{bmatrix}$$

$t_0 = 0$ $t_2 = 0{,}2$ $t_4 = 0{,}4$
$t_1 = 0{,}1$ $t_3 = 0{,}3$ $t_5 = 0{,}5$

NOTA

Scanned with CamScanner

IT. 1

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_A(t_0, A_0) \\ f_B(t_0, B_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} + 0{,}1 \begin{bmatrix} 6 - 0{,}6 \cdot A_0 \\ 2 - 0{,}6 \cdot B_0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}54 \\ 6{,}78 \end{bmatrix}$$

IT. 2

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_A(t_1, A_1) \\ f_B(t_1, B_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}54 \\ 6{,}78 \end{bmatrix} + 0{,}1 \begin{bmatrix} 6 - 0{,}6 A_1 \\ 2 - 0{,}6 \cdot B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}0476 \\ 6{,}5732 \end{bmatrix}$$

IT 3.

$$\begin{bmatrix} A_3 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_A(t_2, A_2) \\ f_B(t_2, B_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}0476 \\ 6{,}5732 \end{bmatrix} + 0{,}1 \begin{bmatrix} 6 - 0{,}6 \cdot A_2 \\ 2 - 0{,}6 \cdot B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5247 \\ 6{,}3788 \end{bmatrix}$$

IT 4.

$$\begin{bmatrix} A_4 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 \\ B_3 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_A(t_3, A_3) \\ f_B(t_3, B_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5247 \\ 6{,}3788 \end{bmatrix} + 0{,}1 \begin{bmatrix} 6 - 0{,}6 A_3 \\ 2 - 0{,}6 B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}9732 \\ 6{,}1960 \end{bmatrix}$$

IT. 5

$$\begin{bmatrix} A_5 \\ B_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_4 \\ B_4 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} f_A(t_4, A_4) \\ f_B(t_4, B_4) \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} A_5 \\ B_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}394863798 \\ 6{,}024314749 \end{bmatrix}}$$

- Las cantidades de contaminantes variaron en medio año
  - (A) → Aproximadamente se tripliqué su concentración
  - (B) → Su concentración se redujo

NOTA

③ Dada la sig. tabla correspondiente a valores de la posición de un móvil el valor aproximado de la velocidad en $t=1$ usando el método de extrapolación de Richardson $\left(R^{(k)}(h) = \frac{4^k R^{(k-1)}(h/2) - R^{(k-1)}(h)}{4^k - 1}\right.$
$\left.R^{(0)}(h) = R(h)\right)$

t	0,0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
x(t)	1	1,0645	1,2840	1,7551	2,7183	4,7707	9,4877	21,3809	54,5982

La extrapolación de Richardson

$$\begin{array}{l} R(h) \\ R(h/2) \\ R(h/4) \end{array} \begin{array}{l} \nearrow R'(h) \\ \searrow R'(h/2) \end{array} \nearrow R^2(h)$$

Para calcular $R(h)$
$\hookrightarrow R(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

• Primero calculo $R(h)$, $R(h/2)$, $R(h/4)$ donde $h=1$ y $t=$ es el valor de la derivada a aproximar $\rightarrow t=1$

$$R(1) = \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} = \frac{x(2) - x(0)}{2h} = \boxed{26,7991}$$

$$R(0,5) = \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} = \frac{x(1,5) - x(0,5)}{1} = \boxed{8,2037}$$

$$R(0,25) = \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} = \frac{x(1,25) - x(0,75)}{0,5} = \boxed{6,0312}$$

ahora calculo $R'(h)$ $R'(h/2)$

$$R'(1) = \frac{4R(h/2) - R(h)}{4-1} = \frac{4R(0,5) - R(1)}{4-1} = \boxed{2,0053}$$

$$R'(1/2) = \frac{4R(0,25) - R(0,5)}{4-1} = \boxed{5,3070333}$$

ahora $R^2(h) \simeq f'(1)$

$$R^2(1) = \frac{4^2 R'(h/2) - R'(h)}{4^2 - 1} = \frac{16 R'(0,5) - R'(1)}{16-1} = \boxed{5,52715}$$

$$\boxed{f'(1) \approx 5,52715}$$

NOTA

Scanned with CamScanner

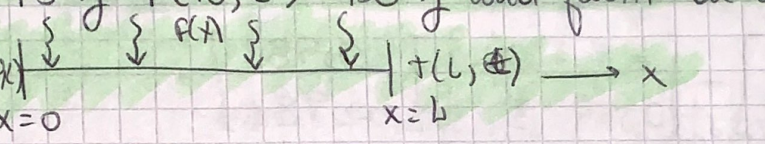
HOJA N°

FECHA

(5) La sig. figura muestra un sist. q puede modelarse mediante la forma unidimensional de la ec. de Poisson:

$\frac{d^2t}{dx} = -f(x)$ donde $f(x)$ es una función q define una fuente de calor a lo largo de la barra, y donde los extremos de la barra se mantienen a T° fijas $T(0,t) = T_1$ y $T(L,t) = T_2$

Resuelva el problema de valores de frontera para una barra de 10 cm con las sig. condiciones de frontera $T(0,t) = 75$ y $T(10,t) = 150$ y una fuente de calor uniforme $f(x) = 10$



Sistema que se modela como $\rightarrow \frac{d^2T}{dx} = -f(x) \rightarrow \begin{cases} T'' = -10 \\ T(0) = 75,\ T(10) = 150 \end{cases}$

• Utilizo el método de dif. finitas

$$\begin{cases} T'' + P(x)T' + Q(x)T = F(x) \\ T(0) = \alpha,\ T(10) = 150 \end{cases} \qquad \begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \\ f(x) = -10 \end{cases}$$

Utilizo $N = 5 \rightarrow h = \frac{b-0}{5} = \frac{10-0}{5} = 2 \rightarrow \boxed{h=2}$

La fórmula es:

$$\left(1 + \frac{h}{2}P_i\right)T_{i+1} + \left(-2 + h^2 Q_i\right)T_i + \left(1 - \frac{h}{2}P_i\right)T_{i-1} = h^2 f_i$$

$$\begin{cases} T_2 - 2T_1 + T_0 = -40 \\ T_3 - 2T_2 + T_1 = -40 \\ T_4 - 2T_3 + T_2 = -40 \\ T_5 - 2T_4 + T_3 = -40 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_2 - 2T_1 + 75 = -40 \\ T_3 - 2T_2 + T_1 = -40 \\ T_4 - 2T_3 + T_2 = -40 \\ 150 - 2T_4 + T_3 = -40 \end{cases}$$

$-2T_1 + T_2$

$T_1 - 2T_2 + T_3$

$T_2 - 2T_3 + T_4$

$T_3 - 2T_4$

$\rightarrow$

$T(0) = 75$

$T(2) \cong T_1 = 170$

$T(4) = T_2 = 225$

$T(6) = T_3 = 240$

$T(8) = T_4 = 215$

$T(10) = T_5 = 150$

NOTA

Scanned with CamScanner

FINAL 05-7-2023

(a) [redacted] $Ax = b$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}01 \\ 0{,}99 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = (-0{,}01$

Se obtiene con aritmetica de 3 dígitos una aprox. $\tilde{x} = (0{,}981 \ -0{,}981)^t$. Estimar el nº de condición de la matriz.

(b) Obtener una mejor aprox. haciendo un paso de ref. iterativo

(a) dado una matriz A se llama nº de condición

$\hookrightarrow K(A) = \|A\|\|A\|^{-1}$

su aproximación

el vector residual $\rightarrow r = b - A\tilde{x}$

$$r = \begin{bmatrix} -0{,}01 \\ -0{,}01 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1{,}01 \\ 0{,}99 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}981 \\ -0{,}981 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}01 \\ -0{,}01 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}97181 \\ 1{,}952 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1{,}96181 \\ 1{,}942 \end{bmatrix} = r}$$

Como $Ay = r \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1{,}01 \\ 0{,}99 & 1 \end{bmatrix} \bar{y} = r \qquad \bar{y} = \begin{bmatrix} 3{,}9 \\ -1{,}919 \end{bmatrix}$

$$K(A) \approx 10^3 \frac{|\tilde{y}|_\infty}{|\tilde{x}|_\infty} = \frac{10^3 (3{,}9)}{(0{,}981)} = 3975{,}535188$$

esto significa que la matriz A está mal condicionada porque es significamente mayor a 1

(b)

$$x^{(2)} = \tilde{x}^{(1)} + \tilde{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}981 \\ -0{,}981 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3{,}9 \\ -1{,}919 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}881 \\ -2{,}9 \end{bmatrix}$$

NOTA

Scanned with CamScanner

Se sabe que $H(x) = 4 - 3(x+1) - 2(x+1)^2 - 1{,}5(x+1)^2(x-1) - 0{,}5(x+1)^2(x-1)^2$ es el Pol. de interpolación de Hermite de cierta función "f", basado en datos $f(-1), f'(-1), f(1), f'(1)$ y $f''(1)$

Sin evaluar $H(x)$ ni sus derivadas en -1 y 1, det. los d.f. indicados en la tabla y los valores de $f(-1), f'(-1), f(1), f'(1)$ y $f''(1)$

$$
\begin{array}{lllll}
-1 - 4 & & & & \\
-1 - f[-1] = 4 & 3 & & & \\
1 - f[1] = 2 & f[-1,1] = -2 & -2 & & \\
1 - f[1] = 2 & f[1,1] = 1 & f[-1,1,1] = 1 & -1{,}5 & \\
1 - f[1] = 2 & f[1,1] = 1 & f[1,1,1] = 2 & f[-1,1,1,1] = -0{,}5 & 0{,}5
\end{array}
$$

Si $f[-1] = 4 \rightarrow \boxed{f(-1) = 4}$

↳ Como "-1" se repite una vez la diferencia divide entre los dos primeros es la derivada de la función en -1.

$f[-1,-1] = \boxed{f'(-1) = 3}$

- $\dfrac{f[-1,1] - 3}{1 - -1} = -2 \rightarrow f[-1,1] = -1$

- $\dfrac{f[-1,1,1] + 2}{1 - -1} = -1{,}5 \rightarrow f[-1,1,1] = 1$

- $\dfrac{f[1] - \overset{=4}{f[-1]}}{1 - -1} = -1 \longrightarrow \boxed{f[1] = 2}$

- $\dfrac{f[1,1] - \overset{=-1}{f[-1,1]}}{-1 + -1} = \overset{=1}{f[-1,1,1]} \longrightarrow \boxed{f[1,1] = 1} = \boxed{f'(1) = 1}$

- $\dfrac{f[-1,1,1,1] + 1{,}5}{\underbrace{1 - -1}_{2}} = 0{,}5 \rightarrow \boxed{f[-1,1,1,1] = -0{,}5}$

- $\dfrac{f[1,1,1] - \overset{=1}{f[-1,1,1]}}{1 - -1} = -1{,}5 \longrightarrow \boxed{f[1,1,1] = f''(1) = 2}$

HOJA Nº

FECHA

(2) (A) Indicar las condiciones que debe cumplir un trazador cúbico para que sea una spline cúbica natural y interpole a una función $f \in C^1[a,b]$ en los nodos $a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b$

(b) La relación agua-cemento que se debe poner a la mezcla para hacer hormigón nos proporciona la resistencia final y se le requiere. Se tienen los sig. datos:

x = agua-cemento (%)	40	45	50
y = resistencia (kg/cm²)	390	340	290

Obtener la spline cúbica del tipo

$$S(x) = \begin{cases} a_0(x-x_0)^3 + b_0(x-x_0)^2 + c_0(x-x_0) + d_0 & x \in [x_0; x_1] \\ a_1(x-x_1)^3 + b_1(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1) & x \in [x_1; x_2] \end{cases}$$

Para estimar la resistencia cuando el cemento es 49.

(a) Para que $S(x)$ sea una spline cúbica NAT. debe:

- Coincidir ~~con~~ su valor en los nodos con la función
  - $\hookrightarrow S(x_j) = f(x_j) \quad \forall j \in \{0, 1, \cdots, n\}$
- Debe ser continua tanto S como sus derivadas primera y segunda:
  - $\hookrightarrow S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$
  - $\hookrightarrow S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1}) \quad \forall j \in \{0, 1, \cdots, n\}$
  - $\hookrightarrow S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1})$
- Por ser frontera natural $\rightarrow S''(x_0) = S''(x_n) = 0$

(b) Tenemos: $x_0 = 40$, $x_1 = 45$, $x_2 = 50$

- De la primera condición
  - $\hookrightarrow S_0(40) = d_0 \longrightarrow \boxed{d_0 = 390}$
  - $\hookrightarrow S_1(45) = d_1 \longrightarrow \boxed{d_1 = 340}$

Calculo S' y S''

$$S' = \begin{cases} 3a_0(x-x_0)^2 + 2b_0(x-x_0) + c_0 & x \in [x_0, x_1] \\ 3a_1(x-x_1)^2 + 2b_1(x-x_1) + c_1 & x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

$$S'' = \begin{cases} 6a_0(x-x_0) + 2b_0 & x \in [x_0, x_1] \\ 6a_1(x-x_1) + 2b_1 & x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

NOTA

Scanned with CamScanner

de la condición de Spline Nat.

$S_1''(50)=0$, $\longrightarrow 6a_1(50-45)+2b_1=0$

$S_0''(40)=0$ $\quad \Rightarrow \boxed{b_1=-15a_1}$

de las condiciones de continuidad

- $a_0(5)^3+b_0(5)^3+c_0 5+340=340$

$125a_0+25b_0+5c_0=-50$

- $75a_0+10b_0+c_0=c_1$
- $30a_0+2b_0=2b_1 \rightarrow 12b_0=0 \rightarrow \boxed{b_0=0}$

ya tenía $\rightarrow 125a_0+5c_0=-50$

$75a_0+c_0=c_1$

$30a_0=2b_1$

de la condición de f $S_1(50)=280$ tengo

$125a_1+25b_1+5c_1=-50$

Tengo 5 ecu. con 5 incógnitas.

$$\begin{cases} 15a_1+b_1=0 \rightarrow \boxed{b_1=-15a_1} \\ 125a_0+5c_0=-50 \\ 75a_0+c_0-c_1=0 \rightarrow \boxed{c_1=75a_0+c_0} \\ 30a_0-2b_1=0 \\ 125a_1+25b_1+5c_1=-50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 125a_0+5c_0=-50 \\ 30a_0-2b_1=0 \\ 125a_1-375a_1+375a_0+5c_0=-50 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$

$125a_0+5c_0=-50$

$30a_0-30a_1=0 \rightarrow$

$375a_0-250a_1+5c_0=-50$

$$\begin{cases} 125a_0+5c_0=-50 \\ 30a_0-30a_1=0 \\ 375a_0-250a_1+5c_0=-50 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 125 & 0 & 5 \\ 30 & -30 & 0 \\ 375 & -250 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ c_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -50 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix} \rightarrow$$

NOTA

Scanned with CamScanner

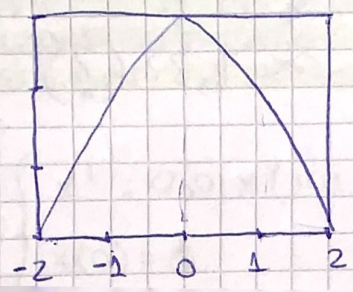
HOJA Nº

FECHA

el recinto de la figura adjunta, que se encuentra inmerso en una cuadrícula está limitado x una recta y una curva de la q se conoce q se trata de un pol. de 4º grado

(a) Calcular el area exacta del recinto sin det. el pol. f le limita, usando el método de integración numérica adecuado. Justificar.

(b) Det. el polinomio q le limita usando Newton y comprobar q el area calculada coincide



x	-2	-1	0	1	2
f(x)	0	2	3	2	0

Scanned with CamScanner

HOJA N°

FECHA

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	0	2	3	2	0

Romberg

$$h_i = \frac{b-a}{2^{i-1}} \qquad R_{11} = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

$$R_{i,1} = \frac{1}{2}\left[R_{i-1,1} + h_{i-1}\sum_{k=1}^{2^{i-2}} f(a+(2k-1)h_i)\right]$$

$$R_{i,j} = \frac{4^{j-1}R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1}-1}$$

$$R_{11} = \frac{2+2}{2}[0+0] = \boxed{0} \qquad R_{21} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + h_1\sum_{k=1}^{1} f(a+(2k-1)h_2)\right]$$

$$h_1 = \frac{2+2}{2^0} = 4 \qquad h_2 = \frac{2+2}{2^1} = 2 \qquad R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[0 + 4\underbrace{f(-2+(2\cdot 1-1)2)}_{f(0)}\right] = \frac{1}{2}[4\cdot 3] = \boxed{6}$$

$$\boxed{R_{21} = 6}$$

$$R_{31} = \frac{1}{2}\left[R_{21} + h_2\sum_{k=1}^{2} f(a+(2k-1)h_3)\right] \qquad h_3 = \frac{2+2}{2^2} = 1$$

$$\frac{1}{2}\left[6 + 2\left(f(-1) + \underbrace{f(-2+(2\cdot 2-1)1)}_{f(1)}\right)\right] = \frac{1}{2}[6+2(2+2)] = \boxed{7}$$

$$R_{22} = \frac{4R_{21} - R_{1,1}}{4-1} = \frac{4\cdot 6 - 0}{3} = \boxed{8}$$

$$R_{32} = \frac{4R_{3,1} - R_{2,1}}{4-1} = \frac{4\cdot 7 - 6}{3} = \boxed{7{,}33}$$

$$R_{33} = \frac{4^2 R_{3,2} - R_{2,2}}{4^2-1} = \frac{16(7{,}33) - 8}{16-1} = \boxed{7{,}29} \checkmark$$

(b) Polinomio de Newton

	f(x)	DD1				
$x_0 = -2$	0	2				
$x_1 = -1$	2	1	-0,5			
$x_2 = 0$	3	-1	-1	-0,16666		
$x_3 = 1$	2	-2	-0,5	0,16666	0,8333	
$x_4 = 2$	0					

$$P_N = 2(x+2) - 0{,}5(x+2)(x+1) - 0{,}16666(x+2)(x+1)x + 0{,}8333(x+2)(x+1)x(x-1)$$

↳ si integro → $\boxed{7{,}29}$ ✓

Scanned with CamScanner

HOJA N°

FECHA

Al tiempo $t=0$, se introduce una innovación tecnológica en una comunidad q tiene una población n habitantes. La ec. diferencial q caracteriza el fenómeno es: $\frac{dx}{dt} = kx(t)(n+1-x(t))$. El tiempo está medido en meses. $x(t=0)=1$

(A) Plantear el problema de valores iniciales sabiendo que la población tiene 100 habitantes y k es 0,01.

(B) Aplicar 3 it. del Runge Kutta del pto medio para estimar la cantidad de personas $x(t)$ q adoptaron la innovación tecnológica al cabo de 9 meses.

(a)
$$\begin{cases} x' = 0{,}01x(101-x) = f(t_0, x_0) \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad \boxed{h = \frac{9}{3} = \boxed{3=h}}$$

(b) Runge Kutta del punto medio

$K_1 = f(t_0, x_0)$ $\quad K_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}k_1)$

$x = y_{i+1} = y_i + hk_2$

Iteración 1

$k_1 = 0{,}01(1)(100) = 10$

$k_2 = 0{,}01(x_0 + \frac{h}{2}k_1)\cdot(101 - x_0) = 0{,}01(1 + \frac{3}{2}\cdot 10)(101-1) = 16$

$y_1 = y_0 + hk_2 = 1 + 3.16 = 49$

Iteración 2

$k_1 = 0{,}01x_1(101-x_1) = 0{,}01(49)\cdot(101-49) = 25{,}48$

$k_2 = 0{,}01(x_1 + \frac{h}{2}k_1)(101 - x_1 - \frac{h}{2}k_1) = 0{,}01(49 + \frac{3}{2}\cdot 25{,}48)(101 - 49 - \frac{3}{2}\,25{,}48) =$

$k_2 = 12{,}018916$

$y_2 = y_1 + hk_2 = 49 + 3.12{,}018916 = 85{,}056748$

Iteración 3

$k_1 = 0{,}01x_2(101-x_2) = 0{,}01\cdot 85{,}056748(101 - 85{,}056748) = 13{,}56081168$

$k_2 = 0{,}01(x_2 + \frac{h}{2}k_1)(101 - x_2 - \frac{h}{2}k_1) = -4{,}635366182$

NOTA $y_3 = y_2 + hk_2 = 71{,}15064945 \rightsquigarrow$ aprox 71 Personas.

Scanned with CamScanner

aproximar mediante el método de Simpson $\frac{1}{3}$ el trabajo q realiza ~~el trabajo~~ la fuerza $\bar{F}(x,y,z)=(x^2,y,z)$ para mover una partícula q se desplaza sobre la curva $\gamma(t)=(\cos(t),\operatorname{sen}(t),t)$ con $t\in$

$\left(W=\int_a^b \bar{F}(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\right)$. Tomar $\pi=3$ y $N=6$.

$F=(x^2,y,z)$ $\quad \gamma(t)=(\cos(t),\operatorname{sen}(t),t)$ $\quad [0,\pi]$

$\gamma'(t)=(-\operatorname{sen}(t),\cos(t),1)$

$h=\frac{3}{6}=0{,}5$

$$W=\int_0^{\pi}(\cos^2(t),\operatorname{sen}(t),t)(-\operatorname{sen}(t),\cos(t),1)\,dt=$$

$$\int_0^{\pi}(-\cos^2(t)\operatorname{sen}(t)+\operatorname{sen}(t)\cos(t)+t)\,dt=\int_0^{\pi=3}\underbrace{\operatorname{sen}(t)(-\cos^2(t)+\cos(t))+t}_{f(t)}\,dt$$

mi fórmula de Simpson $\frac{1}{3}$

$$W=\frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}}f(x_{k+1})+2\sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}}f(x_{2k})\right]$$

$$W=0{,}166\left[f(0)+f(3)+4\sum_{k=0}^{2}f(x_{2k+1})+2\sum_{k=1}^{2}f(x_{2k})\right]$$

$$=0{,}166\left[f(0)+f(3)+4\left(f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)\right)+2\left(f(x_2)+f(x_4)\right)\right]$$

$f(x_0=0)=0$ $\quad f(x_3=1{,}5)=1{,}552326989$ $\quad f(x_6=3)=3{,}104456837$

$f(x_1=0{,}5)=0{,}517452$ $\quad f(x_4=2)=2{,}069735227$

$f(x_2=1)=1{,}0348968$ $\quad f(x_5=2{,}5)=2{,}587114266$

$$W=0{,}166[3{,}104456837+18{,}627573 02+6{,}209264054)$$

$$\boxed{W=4{,}66}$$

NOTA

Scanned with CamScanner

el sistema de ecuaciones dif. para la corrientes $i_1(t)$, $i_2(t)$, en la red eléctrica q se muestra. es:

$$\begin{cases} \dfrac{di_1(t)}{dt} = \dfrac{-R_1+R_2}{L_2}(i_1(t)) + \dfrac{R_2}{L_2} i_2(t) + \dfrac{E(t)}{L_2} \\ \dfrac{di_2(t)}{dt} = \dfrac{R_1}{L_1} i_1(t) - \dfrac{R_2}{L_2} i_2(t) \end{cases}$$

utilizar 3 it. de Euler para estimar la intensidad de la corriente en $i_1(0,3)$ $i_2(0,3)$. Sabiendo $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $L_1 = 1h$, $L_2 = 1h$, $E(t) = 100sen(t)$ W.

$i_1(0) = i_2(0) = 0$.

nuestro sistema es

$$\begin{cases} I_1' = -\dfrac{R_1+R_2}{L_2} I_1 + \dfrac{R_2}{L_2} I_2 + \dfrac{E}{L_2} = -5I_1 + 3I_2 + 100sen(t) \\ I_2' = \dfrac{R_1}{L_1} I_1 - \dfrac{R_2}{L_2} I_2 = 8I_1 - 3I_2 \end{cases}$$

mi PVI

$$\begin{cases} I_1' = -5I_1 + 3I_2 + 100sen(t) \\ I_2' = 8I_1 - 3I_2 \\ I_1(t=0) = 0 \\ I_2(t=0) = 0 \end{cases}$$

el método de Euler queda

$$\begin{pmatrix} I_{1_{i+1}} \\ I_{2_{i+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{1_i} \\ I_{2_i} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f_{I_1}(I_{1_i}, I_{2_i}, t_i) \\ f_{I_2}(I_{1_i}, I_{2_i}, t_i) \end{pmatrix}, \quad h = \frac{0,3}{3} = \boxed{0,1 = h}$$

IT. 1

$$\begin{pmatrix} I_{1_1} \\ I_{2_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{1_0} \\ I_{2_0} \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} -5\cdot 0 + 3\cdot 0 + 100sen(0,1) \\ 8\cdot 0 - 3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,017453 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_{1_1} \\ I_{2_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,017453 \\ 0 \end{pmatrix}$$

IT2

$$\begin{pmatrix} I_{1_2} \\ I_{2_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,017453 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} -5\cdot 0,017453 + 100sen(0,2) \\ 8\cdot 0,017453 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,04363301415 \\ 0,0139624 \end{pmatrix}$$

IT 3

$$\begin{pmatrix} I_{1_3} \\ I_{2_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,04363301415 \\ 0,0139624 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} -5\cdot(0,04363301415) + 3(0,0139624) + 100sen(0,3) \\ 8\cdot(0,04363301415) - 3(0,0139624) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3473185124 \\ 0,3071769132 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,07836486538 \\ 0,04468009132 \end{pmatrix}}$$ RTA

2 (A) Aproximar mediante el método de Simpson $\frac{1}{3}$ la masa de alambre cuya densidad de masa $\delta(x,y,z)$ es proporcional a la distancia de un punto del alambre al plano xy. El alambre tiene la forma curva $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

$$\left(M = \int_a^b \delta(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\, dt\|\right) \qquad \delta = K|z|$$

$$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1) \rightarrow \delta(\gamma(t)) = K.t$$

$$\|\gamma'(t)\| = \|(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1)\| = \sqrt{\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) + 1} = \boxed{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{2\pi} K.t.\sqrt{2}\, dt \rightarrow K\sqrt{2} \int_0^{2\pi = 6} t\, dt = \qquad h = \frac{6}{12} = 0{,}5$$

$$\frac{M}{K\sqrt{2}} = \int_0^6 t\, dt = \frac{h}{0{,}3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k})\right]$$

$$1{,}66666\left[f(0) + f(6) + 4\sum_{k=0}^{5} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{5} f(x_{2k})\right]$$

$$1{,}66666\left[f(0) + f(6) + 4\left(\overset{0}{f(x_1)} + \overset{1}{f(x_3)} + \overset{2}{f(x_5)} + \overset{3}{f(x_7)} + \overset{4}{f(x_9)}\right) + 2\left(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8) + f(x_{10})\right)\right.$$

$f(x_{11})$

$f(0) = 0$ $\quad f(x_4 = 2) = 2$ $\quad f(x_8 = 4) = 4$

$f(x_1 = 0{,}5) = 0{,}5$ $\quad f(x_5 = 2{,}5) = 2{,}5$ $\quad f(x_9 = 4{,}5) = 4{,}8$ $\quad f(x_{12} = 6) = 6$

$f(x_2 = 1) = 1$ $\quad f(x_6 = 3) = 3$ $\quad f(x_{10} = 5) = 5$

$f(x_3 = 1{,}5) = 1{,}5$ $\quad f(x_7 = 3{,}5) = 3{,}5$ $\quad f(x_{11} = 5{,}5) = 5{,}5$

Scanned with CamScanner

$1,66666\left(0+6+4(0,5+1,5+2,5+3,5+4,5+5,5)+2(1+2+3+4+5)\right)=18$

$M = K\sqrt{2}\cdot 18 = \boxed{25,45584412\cdot K = M}$ ✓

(b) El resultado de la integral es exacto ya que la cuarta derivada de interpolación es cero

$\hookrightarrow e = \frac{b-a}{180} f^{IV}(\xi) \rightarrow f^{IV} = 0 \rightarrow$ todo de cero

entonces

$\boxed{e=0}$ ✓

(3) Hallar una aproximación de la solución en el primer cuadrante del sistema f figura a continuación $\begin{cases} x^2+2y^2=4 \\ xy=1 \end{cases}$ utilizar 3 iteraciones de Newton para sist. no lineales ✓

semilla $(x_0, y_0)^t = (1,9, 0,6)^t$

Método de Newton $\rightarrow \begin{cases} Jf(x,y)\,x^i = -f(x,y) \\ y_{i+1} = y^i + x^i \end{cases}$

saco el jacobiano

$Jf = \begin{bmatrix} 2x & 4y \\ y & x \end{bmatrix} \quad -f(x,y) = \begin{cases} -x^2-2y^2+4 \\ -xy+1 \end{cases}$

1ero IT.

$\begin{bmatrix} 2x_0 & 4y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_0^2-2y_0^2+4 \\ -x_0y_0+1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5034602076 \\ -0,0577854678 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,9 \\ 0,6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,5034602076 \\ -0,0577854678 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,396539792 \\ 0,5422145329 \end{bmatrix}$

2do IT

$\begin{bmatrix} 2x_1 & 4y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^2-2y_1^2+4 \\ -x_1y_1+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5559418429 \\ -0,0420066209 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,952481635 \\ 0,500207912 \end{bmatrix}$ ✓

Scanned with CamScanner

(4) El pot. electroestático u, entre dos esferas concéntricas de radio r=1 y r=4 se det, a partir del sig. problema de valores de frontera $\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{2du(r)}{r\,d(r)} = 0$ $u(1)=50$ $u(4)=100$. Hallar el pot. en los nodos intermedios con n=6, usando el método de diferencias finitas.

$$\begin{cases} U'' + \frac{2}{r}U' = 0 \\ U(1)=50 \\ U(4)=100 \end{cases}$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = -f(x)$$

$$\left(1+\frac{h}{2}P(x)\right)y_{i+1} + \left(-2+h^2Q(x)\right)y_i + \left(1-\frac{h}{2}P(x)\right)y_{i-1} = -h^2 f_i$$

$h = \frac{4-1}{6} = 0{,}5$

$P(x) = \frac{2}{r}$, $Q=0$, $f(x)=0$

$\cancel{\left(1+0{,}25\frac{2}{r}\right)y_2 + (-2)y_1 + \left(1-0{,}25\cdot\frac{2}{r}\right)y_0 = 0}$

$\cancel{\left(1+0{,}25\cdot\frac{2}{r}\right)y_3 + (-2)y_2 + \left(1-0{,}25\frac{2}{r}\right)y}$

$r_0=1$, $r_1=1{,}5$, $r_2=2$, $r_3=2{,}5$

$r_4=3$, $r_5=3{,}5$

$$\left(1+0{,}25\frac{2}{r_2}\right)y_2 - 2y_1 + \left(1-0{,}25\cdot\frac{2}{r_0}\right)y_0 = 0$$

$$\left(1+0{,}25\frac{2}{r_3}\right)y_3 - 2y_2 + \left(1-0{,}25\cdot\frac{2}{r_1}\right)y_1 = 0$$

$$\left(1+0{,}25\frac{2}{r_4}\right)y_4 - 2y_3 + \left(1-0{,}25\frac{2}{r_2}\right)y_2 = 0$$

$$\left(1+0{,}25\frac{2}{r_5}\right)y_5 - 2y_4 + \left(1-0{,}25\frac{2}{r_3}\right)y_3 = 0$$

$$\left(1+0{,}25\frac{2}{r_6}\right)y_6 - 2y_5 + \left(1-0{,}25\frac{2}{r_4}\right)y_4 = 0$$

$$1{,}25y_2 - 2y_1 + 0{,}5\overset{=50}{y_0} = 0$$

$$1{,}2y_3 - 2y_2 + 0{,}666y_1 = 0$$

$$1{,}1666y_4 - 2y_3 + 0{,}75y_2 = 0$$

$$1{,}1428y_5 - 2y_4 + 0{,}8y_3 = 0$$

$$1{,}125\underset{=100}{y_6} - 2y_5 + 0{,}8333y_4 = 0$$

Scanned with CamScanner

$$\boxed{y_1 = 12{,}5 + 0{,}625 y_2}$$

$$y_1 = \frac{-25 - 1{,}25 y_2}{-2}$$

$$1{,}25 y_2 - 2y_1 + 25 = 0$$
$$1{,}2 y_3 - 2y_2 + 0{,}666 y_1 = 0$$
$$1{,}1666 y_4 - 2y_3 + 0{,}75 y_2 = 0$$
$$1{,}1428 y_5 - 2y_4 + 0{,}8 y_3 = 0$$
$$112{,}5 - 2y_5 + 0{,}833 y_4 = 0$$

$$\begin{cases} 1{,}25 y_2 - 2y_1 = -25 \\ 1{,}2 y_3 - 2y_2 + 0{,}666 y_1 = 0 \\ 1{,}1666 y_4 - 2y_3 + 0{,}75 y_2 = 0 \\ 1{,}1428 y_5 - 2y_4 + 0{,}8 y_3 = 0 \\ -2y_5 + 0{,}833 y_4 = -112{,}5 \end{cases}$$

$$y_5 = \frac{-112{,}5 - 0{,}833 y_4}{-2}$$

$$\boxed{y_5 = 56{,}25 + 0{,}4165 y_4}$$

$$1{,}2 y_3 - 2y_2 + 8{,}325 + 0{,}41625 y_2 = 0$$
$$1{,}1666 y_4 - 2y_3 + 0{,}75 y_2 = 0$$
$$64{,}2825 + 0{,}475962 y_4 - 2y_4 + 0{,}8 y_3 = 0$$

$$-1{,}58375 y_2 + 1{,}2 y_3 = -8{,}325$$
$$0{,}75 y_2 - 2y_3 + 1{,}1666 y_4 = 0$$
$$0{,}8 y_3 - 1{,}5240238 = 64{,}2825$$

$$\begin{bmatrix} -1{,}58375 & 1{,}2 & 0 \\ 0{,}75 & -2 & 1{,}1666 \\ 0 & 0{,}8 & -1{,}5240238 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8{,}325 \\ 0 \\ -64{,}2825 \end{bmatrix}$$

$y_2 = 54{,}4061111$ $\quad y_3 = 64{,}86723205$ $\quad y_4 = 76{,}22996809$

$y_1 = 12{,}5 + 0{,}625(54{,}4061111) = 46{,}23178888$

$y_5 = 56{,}25 + 0{,}4165 \cdot (76{,}22996809) = 87{,}99978171$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 46{,}23178888 \\ y_2 &= 54{,}4061111 \\ y_3 &= 64{,}86723205 \\ y_4 &= 76{,}22996809 \\ y_5 &= 87{,}99978171 \end{aligned}}$$

RTA

HOJA Nº

FECHA

método de combate. Un modelo matemático sencillo para el combate de un ejército convencional contra la guerrilla está dado por el sistema (1) donde x_1 y x_2 son la fuerza de la guerrilla y las tropas convencionales, respectivamente; y 0,1 y 1 son los coeficientes de eficacia en combate.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -0{,}1\, x_1 x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 \end{cases} \quad (1)$$

(a) Plantear el problema de valores iniciales sabiendo $x_1(0) = 10$ y $x_2(0) = 15$.

(b) Aplicar 2 it. de Runge Kutta del punto medio con $h = 0{,}1$. ¿Quién va ganando el conflicto, las tropas convencionales o la guerrilla?

(b)

$$\begin{pmatrix} x_{1\,n+1} \\ x_{2\,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$m_1 = f(x_{1n}, x_{2n})$

$k_1 = g(x_{1n}, x_{2n})$

$m_2 = f\left(x_{1n} + \frac{h m_1}{2}, x_{2n} + \frac{h k_1}{2}\right)$

$k_2 = g\left(x_{1n} + \frac{h k_1}{2}, x_{2n} + \frac{h k_1}{2}\right)$

1 it

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$m_1 = -15 \quad k_1 = 10 \quad m_2 = -14{,}3375 \quad k_2 = 9{,}25$

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} -14{,}3375 \\ 9{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}56625 \\ 15{,}925 \end{pmatrix}$$

2T.

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$m_1 = -13{,}6418 \quad k_1 = 8{,}56625 \quad m_2 = -12{,}8933 \quad k_2 = 7{,}8842$

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}56625 \\ 15{,}925 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} -12{,}8933 \\ 7{,}8842 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}27692 \\ 16{,}71342 \end{pmatrix}$$

(b) las tropas convencionales van ganando

NOTA

Scanned with CamScanner

(a)
$$\begin{cases} x_1' = -0{,}1\, x_1 x_2 = f(x_1, x_2) \\ x_2' = x_1 = g(x_1, x_2) \\ x_1(0) = 10 \\ x_2(0) = 15 \end{cases}$$

NOTA

Scanned with CamScanner

Una pequeña barra de metal, cuyas T° inicial es de 20°C, se deja caer en un tanque con agua hirviendo. Se sabe que su T° aumentó 2°C en un seg.

La ecuación diferencial que caracteriza la ley de enfriamiento es:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T - T_m) \quad k = -0{,}02531$$

(a) Plantear el problema como PVI

(b) Aplicar el método de Runge Kutta del punto medio para estimar el tiempo que tarda la barra en alcanzar 23,5°C. $h = 0{,}5$ seg.

$T° = 20°C$, $T_1 = 22°C$ $t_1 = 1$ s $T_m = 100°C$.

a - $y = T$

$$\begin{cases} y' = f(t, y) = -0{,}02531\,(y - 100°C) \\ y(0) = 20°C \end{cases}$$

b - método de Runge-Kutta del punto medio

$$\begin{cases} k_{1_i} = f(t_i, y_i), \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1 \frac{h}{2}\right) \\ y_{i+1} = y_i + h k_2 \qquad t_i = t_{i-1} + h \end{cases}$$

i	t_i	y_i	k_{1_i}	k_{2_i}
0	0	20	2,0248	2,0120
1	0,5	21,006	1,9993	1,9864
2	1	21,9993	1,9742	1,9617
3	1,5	22,9802	1,9494	1,9370
4	2	23,9487		

• la T° supera los 23,5° entre $t = 1{,}5$ s y $t = 2$ s.

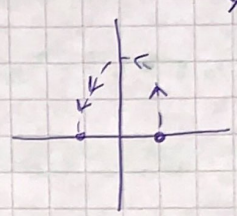
Scanned with CamScanner

3. hallar una aproximación de trabajo que realiza la fuerza $\bar{F}(x,y) = (3y^2+2, 16x)$ al mover una partícula desde $(1,0)$ hasta $(-1,0)$, sig. la mitad superior de una elipse $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$.

Usar Simpson 1/3 y aproximar $\pi = 3$ con $N = 12$. Indicar el error cometido.

$$x^2 + \frac{y^2}{(3)^2} = 1$$

$F(x,y) = (3y^2+2, 16x)$ $P_a = (1,0)$ $P_b = (-1,0)$



$C(t) = (\cos(t), 3\,\text{sen}(t))$, $0 < t < \pi$

$C'(t) = (-\text{sen}(t), 3\cos(t))$

$$W = \int_a^b F(C(t)) \cdot C'(t)\,dt = \int_0^{\pi} (3 \cdot 3^2 + 2, 16\cos(t))(-\text{sen}(t), 3\cos(t))\,dt$$

$$W = \int_0^{\pi} (-27\,\text{sen}^3(t) - 2\,\text{sen}(t) + 48\cos^2(t))\,dt.$$

Tomamos $\pi = 3$, $N = 12$.

regla Simpson 1/3 $\longrightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k})\right)$

$h = \frac{b-a}{N} = \frac{3-0}{12} = 0{,}25$ $\cdot$ $\frac{N-2}{2} = \frac{10}{2} = 5$ $\cdot$ $\frac{0{,}25}{3} = 0{,}08$

$$W \cong 0{,}08\left(f(0) + f(3) + 4\sum_{k=0}^{5} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{5} f(x_{2k})\right)$$

$$W \cong 0{,}08\left(f(0) + f(3) + 4\left(f(\overset{0{,}25}{x_1}) + f(\overset{0{,}5}{x_3}) + f(\overset{0{,}75}{x_5}) + f(x_7) + f(x_9) + f(x_{11})\right) + 2\left(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8) + f(x_{10})\right)\right)$$

$$W \cong 0{,}08\left(48 + 47{,}76 + 4(47{,}99 + 47{,}97 + 47{,}93 + 47{,}84 + 47{,}85 + 47{,}79) + 2(47{,}98 + 47{,}95 + 47{,}91 + 47{,}87 + 47{,}82)\right)$$

$$W \cong 0{,}08\,(48 + 47 + 4 \cdot 287{,}42 + 2 \cdot 238{,}53) \cong \boxed{137{,}90 \cong W}$$

calculo del error

$$\frac{b-a}{180} h^4 |f^{IV}(\xi)| \leftarrow$$

$\hookrightarrow \frac{3}{180}(0{,}25)^4 = 6{,}51 \times 10^{-5}$ $\nearrow$ al ser trigonométricas $(-1, 1)$

$\hookrightarrow$ ibe e dar esto aprox.

Scanned with CamScanner

Se sabe que la suma de dos números es 7 y el producto es 12. Plantear un sist. para estimar dichos números. Resolver el sistema usando dos iteraciones del método de Newton para sist. no lineales tomando como semilla $x^0 = (3{,}9,\ 2{,}9)^t$. Trabajar con 2 decimales y redondeo.

método de Newton

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 3{,}9 \\ 2{,}9 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} JF(x^{(k-1)}) \cdot y^{(k-1)} = -F(x^{(k-1)}) \\ x^{(k)} = x^{(k-1)} + y^{(k-1)} \end{cases}$$

$$JF = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{bmatrix} \qquad F(x,y) = \begin{bmatrix} x + y - 7 \\ xy - 12 \end{bmatrix}$$

$k = 0$ $\quad J(x^{(0)})\, y^{(0)} = -F(x^0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2{,}9 & 3{,}9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0{,}2 \\ -0{,}69 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0{,}2 \\ 2{,}9 & 3{,}9 & 0{,}69 \end{array}\right] \Rightarrow y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}09 \\ 0{,}11 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3{,}99 \\ 3{,}01 \end{bmatrix}$$

$k = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3{,}01 & 3{,}99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.9 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3{,}01 & 3{,}99 & -9.9 \cdot 10^{-3} \end{array}\right] \rightarrow y^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ -0{,}01 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 3{,}99 \\ 3{,}01 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ -0{,}01 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow$$ el resultado obtenido en la segunda iteración satisface ambas condiciones.

Scanned with CamScanner

dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x' = -y + 3z \\ y' = -2x + y + 3z \\ z' = -2x - y + 5z \end{cases}$. Sabiendo que $x(0) = 1$ $y(0) = 1$ y $z(0) = 1$, aplicar dos iteraciones del método de euler para estimar $x(0,2)$, $y(0,2)$ y $z(0,2)$

datos

$$\begin{cases} x' = -y + 3z \\ y' = -2x + y + 3z \\ z' = -2x - y + 5z \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{0,2 - 0}{2} = \boxed{0,1 = h}$$

el método de euler

$\hookrightarrow y_{i+1} = y_i + hf(h_i y_i)$, $y' = f(h_i y_i)$

aplicando el sistema

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} -y_i + 3z_i \\ -2x_i + y_i + 3z_i \\ -2x_i - y_i + 5z_i \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{matrix}$$

$i = 0$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} -y_0 + 3z_0 \\ -2x_0 + y_0 + 3z_0 \\ -2x_0 - y_0 + 5z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} -1 + 3 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 1 + 3 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 - 1 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix}$$

$i = 1$:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} -y_1 + 3z_1 \\ -2x_1 + y_1 + 3z_1 \\ -2x_1 - y_1 + 5z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} -1,2 + 1,2 \cdot 3 \\ -2 \cdot 1,2 + 1,2 + 3 \cdot 1,2 \\ -2 \cdot 1,2 - 1,2 + 5 \cdot 1,2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1,44 \\ 1,44 \\ 1,44 \end{pmatrix}}$$

RTA

Scanned with CamScanner

7 (o)

hallar una aproximación de la solución real para la intersección entre la circunferencia $x^2-2x+y^2=0$ y la hipérbola $xy=1$. Utilizar tres iteraciones del método Newton para sistemas no lineales. Usar como semilla $x^{(0)}=(1{,}9\ 0{,}4)^T$ trabajar con al menos 3 decimales y redondeo

(b) graficar ambas curvas y la solución obtenida

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \rightarrow \text{circunsferencia} \\ xy-1=0 \rightarrow \text{hipérbola} \end{cases} \qquad x^{(0)}=(1{,}9\ ;\ 0{,}4)^t$$

método de Newton $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} J_F(x^{k-1})\cdot \bar{y}^{(k-1)} = -F(x^{k-1}) \\ x^k = x^{k-1}+y^{k-1} \end{array} \right\}$

• defino $\bar{F}=(x^2-2x+y^2,\ xy-1)$

Su jacobiana es:

$$J_f=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-2 & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

nuestra fórmula quedaría

$$\begin{pmatrix} 2x-2 & 2y \\ y & x \end{pmatrix}_{x^{(k-1)}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} x^2-2x+y^2 \\ xy-1 \end{pmatrix}$$

K=1

$$\begin{pmatrix} 2\cdot(1{,}9)-2 & 2\cdot(0{,}4) \\ 0{,}4 & 1{,}9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1{,}9^2-2\cdot 1{,}9+0{,}4^2 \\ 1{,}9\cdot 0{,}4-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 1{,}9 \end{pmatrix}\bar{y}=-\begin{pmatrix} -0{,}03 \\ -0{,}24 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{y}=\begin{pmatrix} -4{,}355\times 10^{-2} \\ 0{,}1355 \end{pmatrix}$$

$$x^1=x^0+y^0=(1{,}9\ 0{,}4)^T+(-4{,}355\times 10^{-2}\ 0{,}1355)=\begin{pmatrix} 1{,}8565 \\ 0{,}5355 \end{pmatrix}$$

K=2

$$\begin{pmatrix} 2\cdot(1{,}8565)-2 & 2\cdot(0{,}5355) \\ 0{,}5355 & 1{,}8565 \end{pmatrix}\bar{y}=-\begin{pmatrix} 0{,}0204 \\ -0{,}0058 \end{pmatrix} \rightarrow y^1=\begin{pmatrix} -1{,}691\times 10^{-2} \\ 8{,}002\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$x^2=x^1+y^1=(1{,}8565,\ 0{,}5355)+(-1{,}691\times 10^{-2}\ 8{,}002\times 10^{-3})=\begin{pmatrix} 1{,}8396 \\ 0{,}5435 \end{pmatrix}=x^2$$

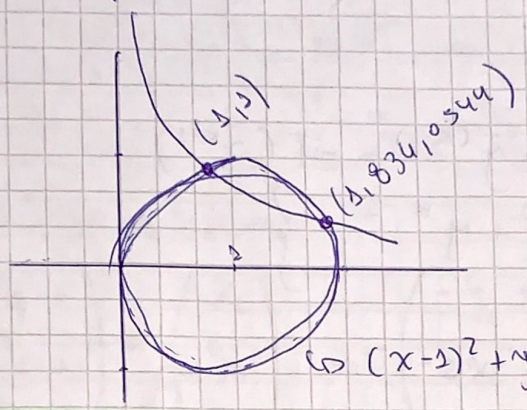
Scanned with CamScanner

$\underline{k=3:}$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 1{,}8396-2 & 2\cdot 0{,}5435 \\ 0{,}5435 & 1{,}8396 \end{pmatrix} \bar{y} = -\begin{pmatrix} 1{,}8396^2-2\cdot 1{,}8396+0{,}5435^2 \\ 1{,}8396\cdot 0{,}5435-2 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0{,}0003 \\ -0{,}0001 \end{pmatrix}$$

$$y^2 = \begin{pmatrix} -2{,}644\times 10^{-4} \\ 1{,}324\times 10^{-4} \end{pmatrix} \qquad x^3 = x^2+y^2 = \begin{pmatrix} 1{,}8396 \\ 0{,}5435 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2{,}644\times 10^{-4} \\ 1{,}324\times 10^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}839 \\ 0{,}544 \end{pmatrix}$$



$\hookrightarrow (x-1)^2+y^2=1$

en 1601 el astrónomo alemán Kepler formuló su tercera ley del mov. planetario $T=Cx^{\alpha}$ donde x es la distancia al sol medida en millones de kilómetros, T es el periodo orbital medido en años, C es una constante, al igual que α.

las parejas de datos (x,T) observados para los primeros 4 planetas, Mercurio, Venus, la Tierra y Marte: $(58,88)$, $(108,225)$, $(150,365)$ y $(228,687)$. Obtener el coeficiente C y la constante α, usando cuadrados mínimos y graficar la curva junto con los puntos q representan los datos

$T=Cx^{\alpha}$ $\qquad x$ = dist. al sol en millones de km.

T = Periodo orbital $\qquad C$ = cte $\qquad \alpha$ = cte.

x	58	108	150	228
T	88	225	365	687

$T=Cx^{\alpha}$ es una función potencial. Para usar cuadrados mínimos voy a linealizarla:

$\ln T = \ln C + \alpha \ln(x)$

$$\begin{bmatrix} \ln(T_1) \\ \ln(T_2) \\ \ln(T_3) \\ \ln(T_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(x_1) & 1 \\ \ln(x_2) & 1 \\ \ln(x_3) & 1 \\ \ln(x_4) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \ln C \end{bmatrix}$$

$$b \quad = \quad A \quad x$$

Para CM:

$\hookrightarrow A^TA\hat{x} = A^tb$

Calculo $A^T A$:

$$\begin{pmatrix} \ln x_1 & \ln x_2 & \ln x_3 & \ln x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln x_1 & 1 \\ \ln x_2 & 1 \\ \ln x_3 & 1 \\ \ln x_4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{4} (\ln x_i)^2 & \sum_{k=1}^{4} (\ln x_i) \\ \sum_{k=1}^{4} (\ln x_i) & \sum_{k=1}^{4} 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 92,994 & 19,182 \\ 19,182 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculo $A^t b$

$$\begin{pmatrix} \ln x_1 & \ln x_2 & \ln x_3 & \ln x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln T_1 \\ \ln T_2 \\ \ln T_3 \\ \ln T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108,567 \\ 22,326 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^t A \hat{x} = A^t b$$

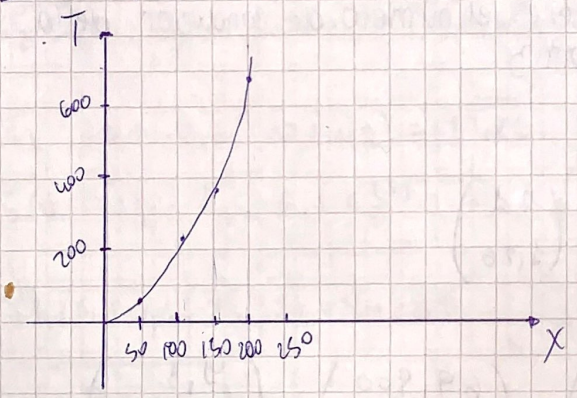
$$\begin{pmatrix} 92,994 & 19,182 \\ 19,182 & 4 \end{pmatrix} \hat{x} = \begin{pmatrix} 108,567 \\ 22,326 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} 1,492637965551 \\ -1,5764453636 \end{pmatrix}$$

entonces:

$\alpha = 1,492637965551 \approx 1,493$

$\ln(c) = -1,5764453636 \rightarrow C = 0,206708567623 \cong 0,207.$

$\Rightarrow T = 0,207 \times^{1,493}$



(a) Suponer que $\bar{x}$ es una aproximación a la solución del sistema $Ax = b$, que A es una matriz no singular y que r es el vector residual de $\bar{x}$. Demostrar que:

$$\|x - \bar{x}\| \leq \|r\| \|A^{-1}\|$$

$$\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|} \quad , b \neq 0 \text{ y } r \neq 0$$

(b) Dado el sist.: $\begin{cases} 39x_1 + 16x_2 = 71 \\ 0{,}68x_1 + 0{,}29x_2 = 1{,}26 \end{cases}$. Tomar como aproximación $\bar{x} = (0{,}98 \ 1{,}98)^t$ y aritmética de tres dígitos, para estimar el nº de condición de la matriz A. Realizar un paso de refinamiento iterativo para mejorar la aproximación.

$r = b - A\tilde{x}$

$\downarrow b = Ax$

$r = Ax - A\tilde{x}$

$r = A(x - \tilde{x})$

$\downarrow$ si A no es singular $\rightarrow \exists A^{-1}$

$A^{-1}r = A^{-1}A(x - \bar{x}) \rightarrow A^{-1}r = (x - \tilde{x}) \longrightarrow \|A^{-1}r\| = \|x - \bar{x}\|$

$$\boxed{\|A^{-1}\| \|r\| \geq \|x - \bar{x}\|}$$

$\bullet\ Ax = b \longrightarrow \|Ax\| = \|b\| \longrightarrow \|A\| \|x\| \geq \|b\| \xrightarrow[\|x\| \neq 0]{b \neq 0} \frac{1}{\|b\|} \geq \frac{1}{\|A\| \|x\|}$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{\|A^{-1}\| \|r\|}{\|b\|} \geq \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|A\| \|x\|} \longrightarrow \boxed{\|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|} \geq \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \quad (2)}$$

(b) $\frac{\|\tilde{y}\|}{\|\bar{x}\|} \cdot 10^t \cong \|A^{-1}\| \|A\| = k(A) \rightarrow$ que es el número de condición de la matriz

$$\begin{cases} A\tilde{y} = r \\ r = b - A\bar{x} \end{cases} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 0{,}98 \\ 1{,}98 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 39 & 16 \\ 0{,}68 & 0{,}29 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 71 \\ 1{,}26 \end{pmatrix}$$

$\bar{r} = b - A\tilde{x}$

$$\bullet \begin{pmatrix} 71 \\ 1{,}26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 39 & 16 \\ 0{,}68 & 0{,}29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}98 \\ 1{,}98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \\ 1{,}26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 69{,}900 \\ 1{,}2406 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}1 \\ 0{,}0194 \end{pmatrix}$$

$A\tilde{y} = \bar{r} \longrightarrow \bar{y} = (0{,}02 \ 0{,}02)$

$\|\tilde{y}\|_\infty = 0{,}02$

$\|\tilde{x}\|_\infty = 1{,}98$ $\Rightarrow$ aritmética de 3 dígitos : $t = 3$

$\frac{\|\tilde{y}\|}{\|\tilde{x}\|} \cdot 10^3 = \frac{0{,}02}{1{,}98} \cdot 10^3 = 10{,}101 >> 1 \rightarrow$ no está bien condicionada.

Scanned with CamScanner

Paso de refinamiento:

$$\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + \tilde{y}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,98 \\ 1,98 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,02 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1,0 \\ 2,0 \end{pmatrix} = \tilde{x}^{(1)}}$$

La ley de radiación de Stefan establece que la ~~[illegible]~~ razón de cambio en la T° de un cuerpo a $T(t)$ grados en un medio a $M(t)$ grados es proporcional a $M^4 - T^4$. Sea $K = 4\cdot10^{-4}$ la constante de proporcionalidad.

Suponer la temperatura del medio constante, es decir $M(t) = 70°F$.

(a) Si $T(0) = 100°F$, plantear el problema como PVI para $0 < t < 2$.

(b) Usar el método Runge Kutta del punto medio para aproximar la T° en el instante $t = 0,2$ $h = 0,1$

(a) $$\begin{cases} T' = (M^4 - T^4)\,K \\ T(0) = 100°F \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2$$

(b) Runge Kutta del punto medio $\rightarrow$ $y_{i+1} = y_i + h K_2$

$$K_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2},\ T_i + \frac{h}{2} K_1\right)$$

$$K_1 = f(t_i, T_i)$$

$T_1(t = 0,1) = T(0) + 0,1\, K_2^0$

$K_1^0 = (M^4 - T(0)^4)\cdot 4\cdot10^{-4} = -28,68$

$K_2^0 = f\left(0 + \frac{0,1}{2},\ 100 + \frac{0,1}{2}(-28,68)\right) = f(0,05,\ 98,52) = -27,42$

$T_1 = 100 + 0,1(-27,42) = 97,26$

$T_2(t = 0,2) = t_1 + 0,1\, K_2^{(1)}$

$K_1^{(1)} = f(t_1, T_1) = (M^4 - 97,26^4)\cdot 4\cdot10^{-4} = -25,58$

$t_2 = 97,26 + 0,1(-23,77) = 94,88$

$K_2^{(1)} = f\left(t_1 + \frac{h}{2},\ T_1 + \frac{h}{2} K_1\right) = f(0,15,\ 95,98) = (M^4 - 95,98^4)\cdot 4\cdot10^{-4} = -23,77$

$$\boxed{t(0,2) = 94,88}$$

Scanned with CamScanner

En el estudio de un circuito eléctrico consistente en una resistencia, un condensador, un inductor y una fuerza electromotriz obtenemos un problema de valores iniciales de la forma:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dE(t)}{dt}$$

, donde L es la inductancia en henrios, R es la resistencia en ohms, C es la capacidad en faradios, $E(t)$ es la fuerza electromotriz en voltios, e I es la corriente en amperios. Determinar la corriente en el instante $t=0{,}3\,s$, si la corriente inicialmente es nula lo mismo que su derivada.

Sabiendo que: $L=1H$, $R=1\Omega$, $C=0{,}5F$ y $E(t)=t^2$. Usar el método de euler para aproximar el valor pedido, calcular h para realizar 3 iteraciones

$$L\frac{d^2I}{d^2t} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dE(t)}{dt} \quad , \quad \frac{dE(t)}{dt} = 2t$$

$$\begin{cases} LI'' + RI' + \frac{I}{C} = 2t \\ I(0)=0 \\ I'(0)=0 \end{cases}$$

hago un cambio de variables

$$I'' = U' = \frac{2t - \frac{I}{C} - RU}{L} \qquad \boxed{\begin{matrix} I'' = U' \\ I' = U \end{matrix}}$$

Planteo nuevamente el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} U' = \dfrac{2t - \frac{I}{0{,}5F} - 1\Omega U}{1H} \\ I' = U \\ U(0)=0 \\ I(0)=0 \end{cases}$$

y resuelvo con euler

$$\begin{pmatrix} U_{i+1} \\ I_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_i \\ I_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(U,I) \\ U_i \end{pmatrix}$$

con $f(U, I(t)) = U'$

quiero llegar a $t=0{,}3$ desde 0 con 3 it $\longrightarrow \frac{0{,}3-0}{3} = \boxed{0{,}1 = h}$

$$\begin{pmatrix} U_1(t=0{,}1) \\ I_1(t=0{,}1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ I_0 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} \frac{2\cdot 0 - \frac{I_0}{0{,}5} - 1U_0}{1} \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} \frac{2\cdot 0 - \frac{0}{0{,}5} - 1\cdot 0}{1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_1(t=0{,}1) \\ I_1(t=0{,}1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t = t_0 + h =$$

$$\begin{pmatrix} U_2(t=0{,}2) \\ I_2(t=0{,}2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} \frac{2\cdot 0{,}1 - \overset{=0}{I_1}/0{,}5F - 1\Omega \overset{=0}{U_1}}{1H} \\ U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}02 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NOTA

Scanned with CamScanner

$$\begin{pmatrix} U_3(t=0{,}3) \\ I_3(t=0{,}3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}02 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} \dfrac{2\cdot 0{,}2 - \overset{=0}{I_2} - 1\Omega U_2}{1H} \\ \underset{=0{,}02}{U_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}058 \\ 2\cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

con tres decimales

$\hookrightarrow \boxed{I(t=0{,}3) = 0{,}002}$

determinar la intersección entre la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ y la hipérbola $xy = \frac{1}{2}$ en el primer cuadrante tomando como valor inicial el vector $(1{,}96\ 0{,}26)^t$. Utilizar 2 iteraciones del método de newton para sistemas no lineales. Usar al menos 4 decimales y redondear.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ xy = 1/2 \end{cases}$$

el método de Newton

$$\begin{cases} Jf(x,y)\, y = -F(x,y) \\ x^{i+1} = x^i + y^i \end{cases}$$

$$F(x,y) = \left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1,\ xy - 1/2\right)$$

$$Jf(xy) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} & 2y \\ y & x \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1{,}96 \\ 0{,}26 \end{pmatrix}$$

$$Jf(\bar{x}_0)\, \bar{y}_0 = -f(\bar{x}_0)$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}52 \\ 0{,}26 & 1{,}94 \end{pmatrix} \bar{y}_0 = -\begin{pmatrix} 8{,}5\cdot 10^{-3} \\ 4{,}4\cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \longrightarrow \bar{y}_0 = \begin{pmatrix} -8{,}1312\cdot 10^{-3} \\ -1{,}1783\cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1{,}94 \\ 0{,}26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8{,}1312\cdot 10^{-3} \\ -1{,}1783\cdot 10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}9319 \\ 0{,}2588 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 0{,}9660 & 0{,}5176 \\ 0{,}2588 & 1{,}9319 \end{pmatrix} \bar{y}_1 = -\begin{pmatrix} 3{,}6848\cdot 10^{-5} \\ -2{,}4280\cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \longrightarrow \bar{y}_1 = \begin{pmatrix} -4{,}8344\cdot 10^{-5} \\ 1{,}9044\cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1{,}9319 \\ 0{,}2588 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4{,}8344\cdot 10^{-5} \\ 1{,}9044\cdot 10^{-5} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1{,}9319 \\ 0{,}2588 \end{pmatrix}}_{\text{RTA}}$$

Scanned with CamScanner

Si la velocidad del un fluido está descrita por $V(x,y,z) = (y^2, zx, z)$ determinar, usando la regla de los trapecios compuesta por $N=6$ la circulación a lo largo de la curva C. Sabiendo que C es la circunferencia unitaria con centro en el origen de coordenadas, en el plano $z=0$. Usar $\pi \approx 3$.

$V = (y^2, zx, z)$ $\quad \gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 0)$

$$\int_a^b V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \rightarrow \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2(t), 0, 0)(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0)\,dt =$$

$$\int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^3(t)\,dt$$

Si $a=0$, $b=6$, $N=6$ $\rightarrow \frac{6-0}{6} = \boxed{1 = h}$

trapecios compuesta

$$\int_a^b -\operatorname{sen}^3(t)\,dt = \frac{h}{2}\left[-\operatorname{sen}^3(0) - \operatorname{sen}^3(6) + 2\sum_{j=1}^{5} (-\operatorname{sen}(x_j))\right]$$

$\rightarrow$ la sumatoria

$$\rightarrow \sum_{j=1}^{5} (-\operatorname{sen}^3(x_j)) = -\operatorname{sen}^3(1) - \operatorname{sen}^3(2) - \operatorname{sen}^3(3) - \operatorname{sen}^3(4) - \operatorname{sen}^3(5) =$$

$$= -0{,}60 - 0{,}75 - 2{,}81 \cdot 10^{-3} + 0{,}43 + 0{,}88 = -0{,}035$$

$$= 0{,}5\left[0 + 0{,}02 - 0{,}035 \cdot 2\right] = \boxed{-0{,}025}$$

trapecios compuestos

$$\rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\right]$$

NOTA

Scanned with CamScanner

Se sabe que la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta\right) = 0$, es un modelo del movimiento de un péndulo simple de longitud L. Sabiendo que: $g = 9.8\,\frac{m}{s^2}$ y $L = 2m$. Aplicar el método de Euler en el intervalo $[0,2]$ para aprox. $\theta(0,3)$ sabiendo $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) = 1$ y $h = 0,1$.

$$\begin{cases} \theta'' + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta\right) = 0 \\ \theta(0) = 0 \\ \theta'(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \theta'' = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta\right) = f(t, \theta, \theta') \\ \theta(0) = 0 \\ \theta'(0) = 1 \end{cases}$$

Se realiza el cambio de variables $\longrightarrow \theta' = u$

$$\begin{cases} \theta' = u = f(t, u) \\ u' = f(t, \theta, \theta') \\ \theta(0) = 0 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Se resuelve con euler

$$\begin{pmatrix} \theta_{i+1} \\ u_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_i \\ u_i \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} f(t_i, u_i) \\ f(t_i, \theta_i, \theta'_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_i \\ u_i \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} u_i \\ -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta_i\right) \end{pmatrix}$$

1

$$t = 0,1 \rightarrow \begin{pmatrix} \theta_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ u_0 \end{pmatrix} + 0,1\begin{pmatrix} u_0 \\ -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta_0\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0,1\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 0\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$t = 0,2 \quad \begin{pmatrix} \theta_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0,1\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}(-0,1)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 \\ -0,999328318 \end{pmatrix}$$

$$t = 0,3 \quad \begin{pmatrix} \theta_3 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 \\ -0,999328318 \end{pmatrix} + 0,1\begin{pmatrix} -0,999328318 \\ -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(-0,2)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,299993285 \\ -0,997984956 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\theta(t=3) = -0,299993281}$$

Scanned with CamScanner

HOJA N° 7

FECHA

Se sabe que la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta\right) = 0$, es un modelo del movimiento de un péndulo simple de longitud L. Sabiendo que: $g = 9.8\frac{m}{s^2}$ y $L = 2m$. Aplicar el método de Euler en el intervalo $[0,2]$ para aprox. $\theta(0,3)$ sabiendo $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) = 1$ y $h = 0,1$.

$$\begin{cases} \theta'' + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta\right) = 0 \\ \theta(0) = 0 \\ \theta'(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \theta'' = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta\right) = f(t,\theta,\theta') \\ \theta(0) = 0 \\ \theta'(0) = 1 \end{cases}$$

Se realiza el cambio de variables $\longrightarrow \theta' = \mu$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \theta' = \mu = f(t,\mu) \\ \mu' = f(t,\theta,\theta') \\ \theta(0) = 0 \\ \mu(0) = 1 \end{cases}$$

Se resuelve con euler

$$\begin{pmatrix} \theta_{i+1} \\ \mu_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_i \\ \mu_i \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} f(t_i,\mu_i) \\ f(t_i,\theta_i,\theta_i') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_i \\ \mu_i \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} \mu_i \\ -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta_i\right) \end{pmatrix}$$

1

$$t = 0,1 \rightarrow \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix} + 0,1\begin{pmatrix} \mu_0 \\ -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta_0\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0,1\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 0\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$t = 0,2 \quad \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0,1\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}(-0,1)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 \\ -0,999328318 \end{pmatrix}$$

$$t = 0,3 \quad \begin{pmatrix} \theta_3 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 \\ -0,999328318 \end{pmatrix} + 0,1\begin{pmatrix} -0,999328318 \\ -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(-0,2)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,299993285 \\ -0,997984956 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\theta(t=3) = -0,299993281}$$

NOTA

Scanned with CamScanner

(A) el censo de una población $P(t)$ de microtus arvalis, ratón de campo, se re[illegible] en lo siguiente tabla:

t(meses)	0	2	6	10	12
P(t)	2	5	20	109	300

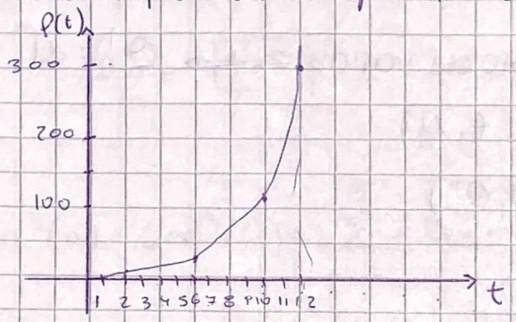
Plantear un modelo que refleje el crecimiento poblacional

(b) estimar la población para $t=9$ y $t=13$, usando cuadrados mínimos. Indicar si se debe alertar a la comunidad sobre una epidemia.

· los crecimientos poblacionales de animales puede presentar varias evoluciones. Por lo general, bajo condiciones favorables y para periodos de tiempo no muy largos esta evolución presenta un comportamiento exponencial.
De acuerdo a los datos exhibidos en la tabla, se observa q la evolución, hasta 12 meses presenta cierto carácter ~~rápido~~ exponencial

Por lo tanto, la evolución de la población se aproxima según

$\bar{P}(t) = a e^{bx}$



(b) Procedemos a resolver $P(t) = a e^{bx}$

$\ln(\bar{P}) = \ln(a) + bx$

t	P(t)	ln(P)
0	2	0,693147 18
2	5	1,609437912
6	20	2,995732274
10	109	4,691348882
12	300	5,703782475

$y_1 = \overbrace{a_0 + a_1 x_1}^{A}$

$y_2 = a_0 + a_1 x_2$

$y_3 = a_0 + a_1 x_3$

$y_4 = a_0 + a_1 x_4$

$y_5 = a_0 + a_1 x_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 6 \\ 1 & 10 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

NOTA

Scanned with CamScanner

$$(A^T A)x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 6 \\ 1 & 10 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 30 \\ 30 & 284 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}693147118 \\ 1{,}609437912 \\ 2{,}995732274 \\ 4{,}691347882 \\ 5{,}703782475 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15{,}69344772 \\ 136{,}552138 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 30 \\ 30 & 284 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15{,}69344772 \\ 136{,}552138 \end{pmatrix}$$

↳ resuelvo → $a_1 = 0{,}407610112$

↳ $a_0 = 0{,}69302887$

$a_0 = \ln(a) \longrightarrow a = 1{,}999763393$

$a_1 = b$

$$\boxed{\bar{P}(t) = 1{,}9976633\,P3\,e^{0{,}407610112\,x}}$$

$\bar{P}(9) = 78{,}37616616$ → a los 9 meses se estiman 78 ratones

$\bar{P}(13) = 400{,}1983608$ → a los 13 meses se estiman 400 ratones

Predecir fuera del rango, por encima de las 12 meses puede llegar a ser riesgoso si se estima P por un t muy lejos de los datos.
Pero $t = 13$ no se aparta mucho de $t = 12$.

P(13 meses) = 400 un valor elevado pero un lapso de tiempo el crecimiento de un poco más de un año. Si las condiciones se mantienen (espacio, recursos, etc) el modelo exponencial precede cada vez más individuos. Por lo tanto, si se puede considerar un riesgo, y sí se debería abortar.

NOTA

Según la ley de enfriamiento de Newton, la velocidad a la que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia de T° entre la sustancia y el aire. Sabemos que la T° del aire es de 30°C y la sustancia se ha enfriado desde 100°C a 70°C en 15 minutos. Esto indica que la constante de proporcionalidad para esta sustancia es $K = -0{,}0373$

(a) Plantear el problema anterior como un PVI.

(b) Estimar el tiempo necesario para que la sustancia alcance una temperatura menor a 95°C, usar el método de Runge Kutta del punto medio $h=0{,}8$.

$T_A = 30°C$, T = temperatura de la sustancia

$$\begin{cases} T' = K(T-T_A) = f(t,T) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} T' = -0{,}0373\,(T-30°C) \rightarrow T' = K(T-T_e) \\ T(0) = 100 \end{cases}$$

$$\frac{dT}{dt} = K(T-T_e)$$

$$\int_{100}^{70} \frac{dT}{(T-T_e)} = \int_0^{15m} K\,dt$$

$$\ln(T-T_e)\Big|_{100}^{70} = Kt\Big|_0^{15m}$$

$$\ln(70-30) - \ln(100-30) = K15$$

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{70-30}{100-30}\right) = K15 \\ -0{,}0373 = K \end{cases}$$

(b) $T_{i+1} = T_i + h(a_1 k_1 + a_2 k_2)$ } pto. medio $a_2 = 1$, $a_1 = 0$

$$\boxed{T_{i+1} = T_i + h \cdot k_2}$$

$k_1 = f(t_i, T_i) = -0{,}0373\,(T_i - 30)$

$k_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, T_i + \frac{hk_1}{2}\right) = -0{,}0373\left[\left(T_i + \frac{hk_1}{2}\right) - 30\right]$

NOTA

11/XII 1,98

i	t	T_i	K_1	K_2	T_{i+1}
0	0	100	-2,611	-2,5866524	98,70667379
1	0,5	98,706675	-2,562758	-2,538861205	97,43724319
2	1	97,437243	-2,515407 17	-2,49195298	96,1912667
3	1,5	96,1912667	-2,468934248	-2,445911436	94,96831098
4	2	94,96831098			

La sustancia alcanza en $t = 2$ min $T = 94,96833109 8\,°C$.
Es decir, tarda un poco menos que 2 minutos para alcanzar una T° de 95 °C

---

dada la siguiente tabla, calcular el valor aproximado de la derivada en $x=1$ usando el método de la extrapolación de Richardson

$$R^{(K)}(h) = \frac{4^K R^{(K-1)}(h/2) - R^{(K-1)}(h)}{4^K - 1}, \quad R^{(0)}(h) = R(h)$$

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,50	1,75	2,00
f(x)	1	1,2840	1,6487	2,1170	2,7183	3,4903	4,4817	5,7546	7,3891

Si mi $x=1$

Calculo $R(h)$, $R(h/2)$, $R(h/4)$

$$R(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{\overset{4,3891}{f(2)} - \overset{1,0000}{f(0)}}{2} = 3,19455$$

$$R(h/2) = \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{1} = f(1,5) - f(0,5) = 2,833$$

$$R(h/4) = \frac{f(x+h/4) - f(x-h/4)}{1 \cdot 0,5} = \frac{f(1,25) - f(0,75)}{0,5} = 2,7466$$

ahora calculo $R^{(1)}(h)$, $R^{1}(h/2)$

$$R^1(h) = \frac{4 \cdot 2,833 - 3,19455}{4-1} = 2,7125$$

$$R^1(h/2) = \frac{4 \cdot 2,7466 - 2,833}{3} = 2,7178$$

$R^2(h)$

$$R^2(h) = \frac{4^2 \cdot 2,7178 - 2,7182}{4^2 - 1} =$$

$$R^2(h) = 2,7182$$

$$\boxed{f'(1) \cong 2,7182}$$

NOTA

Scanned with CamScanner

el balance de calor en estado estacionario se representa como: $\frac{d^2T}{d^2x} + 0{,}01\,(T_a - T) = 0$
para una barra de long. L. Sabiendo $T_a = 20$, $L = 10m$ y $T(0) = 40$ y $T(L) = 200$.
evaluar la T° en los puntos intermedios de la barra con diferencias finitos con $N=5$

$$\begin{cases} T'' - 0{,}01\,T = -0{,}1\,T_a \\ T(0) = 40 \\ T(L) = 200 \end{cases} \qquad \begin{cases} T'' + P(x)\cdot T' + Q(x)\,T = f(x) \\ T(0) = 40 \\ T(L) = 200 \end{cases}$$

con $P(x) = 0$, $Q(x) = -0{,}01$, $f(x) = -0{,}01\,T_a$

y tenemos $h = \frac{L}{N} = \frac{L}{5} = 2m$

entonces nos queda el sistema de ecuaciones del método de diferencias finitas como

$$T_{n+1} + \left(-2 + \frac{L^2}{25}\cdot(-0{,}01)\right) T_n + T_{n-1} = \frac{L^2}{25}\,(-0{,}01)\,T_a$$

como $T_0 = 40$ y $T_5 = 200$

$T_2 - (2{,}04)\,T_1 + 40 = -0{,}8$ (1)

$T_3 - (2{,}04)\,T_2 + T_1 = -0{,}8$ (2)

$T_4 - (2{,}04)\,T_3 + T_2 = -0{,}8$ (3)

$200 - (2{,}04)\,T_4 + T_3 = -0{,}8$ (4)

Por (1) $\rightarrow T_2 = 2{,}04\,T_1 - 40{,}08$

reemplazo en (3) y (2) $\rightarrow T_3 - 3{,}1616\,T_1 = -82{,}5632$ (5)

$\rightarrow T_4 - 2{,}04\,T_3 + 2{,}04\,T_1 - 40{,}08 = -0{,}8$ (6)

entonces con (4), (5) y (6) me queda un sist. de 3x3 para T_1, T_3 y T_4

$$\begin{cases} -2{,}04\,T_4 + T_3 = -200{,}8 \\ T_3 - 3{,}1616\,T_1 = -82{,}5632 \\ T_4 - 2{,}04\,T_3 + 2{,}04\,T_1 = 40 \end{cases} \xrightarrow{\text{me queda}} \boxed{\begin{aligned} T_1 &= 65{,}1739 \\ T_3 &= 123{,}4905 \\ T_4 &= 138{,}9659 \\ T_2 &= 92{,}8748 \end{aligned}}$$

RTA

NOTA

Scanned with CamScanner

Determinar el punto de abscisa y ordenada positivas que resuelve el sistema $\begin{cases} 6x^2-10y^2=14 \\ -6x^2+33y^2=9 \end{cases}$

tomando como valor inicial el vector $(1{,}8\ \ 0{,}9)^t$ utilizando dos iter del método de Newton para sistemas no lineales. Trabajar al menos con dos decimales y redondeo. graficar

$f_1(x,y) = 6x^2-10y^2-14$

$f_2(x,y) = -6x^2+33y^2-9$

Newton $\left(\begin{cases} J\bar{F}(x)\cdot y = -\bar{F}(x) \\ \bar{F}(x) = \begin{pmatrix} f(x,z) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \end{cases} \right)$ ∴

$$J\bar{F}(x) = \begin{bmatrix} f_1'x & f_1'y \\ f_2'x & f_2'y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x & -20y \\ -12x & 66y \end{bmatrix}$$

∴ $\bar{F}(x) = \begin{pmatrix} 6x^2-10y^2-14 \\ -6x^2+30y^2-9 \end{pmatrix}$

1° iteración

$$\begin{pmatrix} 21{,}6 & -18 \\ -21{,}6 & 59{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2{,}68 \\ -1{,}71 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{c_1 = 0{,}211} \\ \boxed{c_2 = 0{,}106} \end{array} \right\} y^0 = \begin{bmatrix} 0{,}211 \\ 0{,}106 \end{bmatrix}$$

$$x^1 = x^0 + y^0 = \begin{bmatrix} 1{,}8 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}211 \\ 0{,}106 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2{,}011 \\ 1{,}006 \end{bmatrix} = x_1}$$

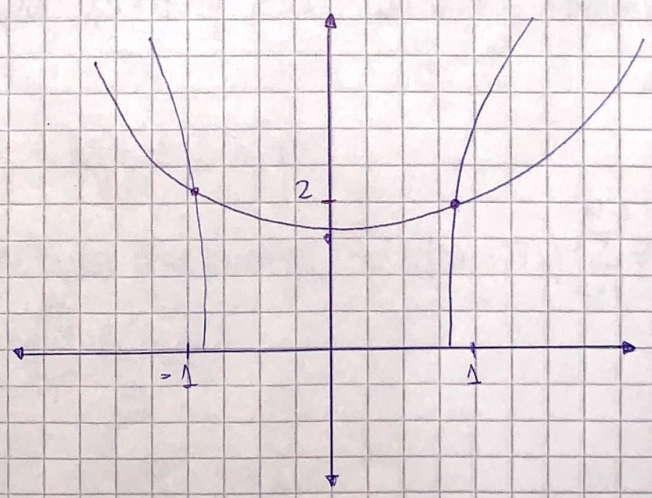
2do iteración

$$\begin{pmatrix} 24{,}132 & -20{,}17 \\ -24{,}132 & 66{,}396 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}145 \\ -0{,}132 \end{pmatrix} \left\} \begin{array}{l} c_1 = -0{,}01 \\ c_2 = 0{,}006 \end{array} \right.$$

$$x^{(2)} = x^1 + y^1 = \begin{pmatrix} 2{,}011 \\ 1{,}006 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}011 \\ -0{,}006 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$x = \sqrt{\frac{14}{6} + \frac{10}{6}y^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{33}{6}y^2 - \frac{9}{6}}$$



NOTA

Scanned with CamScanner

HOJA N° 11

FECHA

(A) Determinar los valores de N y h que se requieren para aproximar el valor de la integral: $\int_{0,5}^{1} \cos(\sqrt{x})\,dx$ con un error menor a 10^{-2}. el error para los trapecios es $|E_T| = \frac{h^2(b-a)}{12}|f''(\psi)|$ con ψ entre (a,b)

(B) Aproximar el valor de la integral del pto. a) con $N=4$ ¿el error es menor que 10^{-2}?

determinar los valores N y h

$$\int_{0,5}^{1} \cos(\sqrt{x})\,dx \Big\} f(x) \quad \text{necesito que } |E_T| < 10^{-2}$$

$$10^{-2} > \frac{h^2(b-a)}{12}|f''(\psi)| \quad \text{con } \psi \in [a,b]$$

$$h < \sqrt{\frac{10^{-2} \cdot 12}{(b-a)|f''\psi|}} \quad \text{siempre } (h>0)$$

$$f(x) = \cos(\sqrt{x})\,dx \longrightarrow f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \longrightarrow f''(x) = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos(\sqrt{x})}{4\sqrt[3]{x^2}}$$

evaluaré $f''(\psi)$ en ptos. intermedios de $[0,5 ; 1]$ para verificar su comportamiento

$f''(0,5) \approx 0,07924$ $\quad f''(0,8) \approx 0,07607$ $\quad f''(0,9) \approx 0,07607$

$f''(0,6) \approx 0,07843$ $\quad f''(0,7) \approx 0,07764$ $\quad f''(1) \approx 0,04525$

tomo como $f''(\psi) \rightarrow |f''(\psi)| < 0,08 \ \forall \psi \in [0,5 , 1]$

$$h < \sqrt{\frac{10^{-2} \cdot 12}{(0,5)(0,08)}} \approx 1,73205$$

$$0,5 = \frac{1-0,5}{N} = \boxed{N = \frac{0,5}{0,5} = 1}$$

$\rightarrow h < 1,73205$ para $|E_T| < 10^{-2}$

Para el problema, tomo $0,5 = h$ y $N = 1$. Con estos valores es seguro que $|E_T| < 10^{-2}$

(b) $N=4$ $\quad h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0,5}{4} = 0,125$

la regla de los trapecios compuesta: $\frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + \left(\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)\right)\cdot 2\right]$

$$\frac{0,125}{2}\left[f(0,5) + f(1) + \left(\sum_{k=1}^{3} f(x_k)\right)\cdot 2\right]$$

NOTA

$f(a) = f(0,5) = 0,7602$ $\qquad$ $f(x_2) = f(0,75) = 0,6479$

$f(b) = f(1) = 0,5403$

$f(x_1) = f(0,625) = 0,7034$ $\qquad$ $f(x_3) = f(0,875) = 0,5935$

$$\sum_{k=1}^{3} (x_k) = 1,9448 \longrightarrow \frac{0,125}{2}\left[0,7602 + 0,5403 + 2 \cdot 1,9448\right]$$

$$\boxed{\int_{0,5}^{1} \cos(\sqrt{x})\,dx \cong 0,3244}$$

esto es menor que 10^{-2}, pues en (a) se calculó que para cometer un error menor a 10^{-2} el h se debe cumplir $h < 1,73205$.
en este desarrollo, se utilizó un $h = 0,125$. (es mucho menor a $1,73205$)

Por lo tanto, hay más precisión y el error efectivamente es menor a 10^{-2}

Una partícula P se mueve a lo largo del eje x de manera que su aceleración en cualquier instante $t \geq 0$ está dada por: $a(t) = 8 - 4t + t^2$. Sabiendo que la partícula está localizada en $x = 1$ cuando $t = 0$ y en $x = 7$ cuando $x = 2$

(A) Plantear el problema en valores de frontera

(B) Resolver (a) usando diferencias finitas con $N = 4$

(A) defino $u''(t)$ tal $\longrightarrow u''(t) = a(t) = 8 - 4t + t^2$

y los datos iniciales $\longrightarrow u(t=0) = 1$ $\qquad$ $u(t)$ es la posición de la partícula en cada instante t.

$u(t=2) = 7$

$$\begin{array}{l} P \\ V \\ C \end{array} \begin{cases} u''(t) - t^2 + 4t - 8 = 0 \\ u(0) = 1 \\ u(2) = 7 \end{cases}$$

(b) usando diferencias finitas, u'' se aproxima por:

$$u'' \approx \frac{y_{i-1} + y_{i+1} - 2y_i}{h^2} \qquad h = \frac{b-a}{N} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2} = \boxed{0,5 = h}$$

$i =$	0	1	2	3	4
$t_i =$	0	0,5	1	1,5	2

mi ecuación queda

$$\left\{ \frac{y_{i-1} + y_{i+1} + 2y_i}{h^2} - t^2 + 4t - 8 = 0 \right.$$

NOTA

1,88

$$\frac{1}{h^2}y_{i-1}+\frac{1}{h^2}y_{i+1}+\frac{2}{h^2}y_i-t_i^2-4t_i-8=0 \qquad i=1,2,3$$

$$\begin{cases} i=1: & \frac{1}{h^2}\cdot y_0-\frac{2}{h^2}y_1+\frac{1}{h^2}y_2-(0{,}5)^2+4\cdot(0{,}5)-8=0 \\ i=2: & \frac{1}{h^2}\cdot y_1-\frac{2}{h^2}\cdot y_2+\frac{1}{h^2}\cdot y_3-(1)^2+4\cdot(1)-8=0 \\ i=3: & \frac{1}{h^2}\cdot y_2-\frac{2}{h^2}\cdot y_3+\frac{1}{h^2}\cdot y_4-(1{,}5)^2+4\cdot(1{,}5)-8=0 \end{cases}$$

armo un sistema matricial usando $h=0{,}5$, $y_0=1$, $y_4=7$.

$$\begin{cases} \frac{-2}{0{,}5^2}\cdot y_1+\frac{1}{0{,}5}\cdot y_2=(0{,}5)^2-4\cdot(0{,}5)+8-\frac{1}{0{,}5^2}(1)=2{,}25 \\ \frac{1}{0{,}5^2}\cdot y_1-\frac{2}{0{,}5^2}\cdot y_2-\frac{1}{0{,}5^2}\cdot y_3=(1)^2+4\cdot(1)+8=5 \\ \frac{1}{0{,}5^2}y_2-\frac{2}{0{,}5^2}y_3=(1{,}5)^2-4\cdot(1{,}5)+8-\frac{1}{0{,}5^2}\cdot(7)=-23{,}75 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 4 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2{,}25 \\ 5 \\ -23{,}75 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}4375 \\ 1{,}4375 \\ 3{,}6875 \end{bmatrix}}$$

$$\cancel{y''+\left(1+\frac{h}{2}p(x)\right)y'}$$

$$\left(1+\frac{h}{2}p(x)\right)y_{i+1}+\left(-2+h^2q(x)\right)y_i+\left(1-\frac{h}{2}p(x)\right)y_{i-1}=h^2f(x)$$

NOTA

Usar el método de euler con $h=0,1$ para determinar una aproximación de la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y''(t)+4y'(t)+3y(t)=0 \\ y(0)=0,5 \\ y'(0)=-0,5 \end{cases} \qquad t=0,3$$

- reacomodo el sistema

$$\begin{cases} y''(t)=-4y'(t)-3y(t) \\ y(0)=0,5 \\ y'(0)=-0,5 \end{cases}$$

- hago un cambio de variables $u=y'$ $\quad u'=y''$

$$\begin{cases} u'=-4u-3y \\ y(0)=0,5 \\ u(0)=-0,5 \end{cases}$$

- aplico el método de euler

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h(u_n) \\ u_{n+1}=u_n+h(-4u_n-3y_n) \\ y(0)=0,5 \quad u(0)=-0,5 \end{cases}$$

$i=$	0	1	2
$t_i=$	0,1	0,2	0,3

$i=0,\ t=0,1$

$y_1=y_0+h(u_0)$

$y_1=0,5+0,1(-0,5)=\boxed{0,45}$

$u_1=u_0+h(-4u_0-3y_0)=-0,5+0,1(-4(-0,5)-3(0,5))=\boxed{-0,45}$

$i=1,\ t=0,2$

$y_2=y_1+h(u_1)=0,45+0,1\cdot(-0,45)=0,405$

$u_2=u_1+h(-4u_1-3y_1)=-0,45+0,1(-4(-0,45)-3\cdot(0,45))=-0,405$

$i=2,\ t_2=0,3$

$y_3=0,405+0,1[-0,405]=\boxed{0,3645}$

$\boxed{y(0,3)=0,3645}$ RTA

NOTA

Scanned with CamScanner

Considerar la barra delgada de longitud L que se mueve en el plano $x-y$, como se ilustra en la figura.

Se resuelve con la sig. ecu. diferencial de segundo orden: $\theta'' - \frac{g}{L}\theta(t) = 0$ Sabiendo que $g: 9{,}81\, m/s^2$, $L = 0{,}5\, m$, $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) = 0{,}25 \frac{rad}{s}$. hallar el ángulo y la velocidad angular en $t = 0{,}2$ seg. utilizando dos it. del método de Range-Kutta del punto medio.

$$\begin{cases} \theta'' - \frac{g}{L}\theta = 0 \\ \theta(0) = 0 \\ \theta'(0) = 0{,}25 \frac{rad}{s} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \theta'' = -\frac{g}{L}\theta = f(t, \theta, \theta') \\ \theta(0) = 0 \\ \theta'(0) = 0{,}25 \frac{rad}{s} \end{cases}$$

realizo un cambio de variables

$$\begin{cases} \theta' = u = f(t, u) \\ u' = f(t, \theta, \theta') \\ \theta(0) = 0 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

lo resolvemos con Range Kutta del punto medio

$m_1 = u_n \qquad K_1 = f(t, \theta, \theta')$

$m_2 = U_n + \frac{1}{2}hK_1 \qquad K_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hm_1, U_n + \frac{1}{2}hK_1)$

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ U_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ U_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} m_2 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{uso } (h = 0{,}1)}$

$\boxed{x = t}$

empezamos a iterar

$m_1 = u_0 = 0{,}25 \qquad K_1 = -\frac{g}{L}\theta_0 = -\frac{9{,}8}{0{,}5} \cdot (0) = 0$

$m_2 = U_0 + \frac{1}{2}hK_1 = 0{,}25 + \frac{1}{2}(0{,}1) \cdot 0 = 0{,}25$

$K_2 = f(x_0 + \frac{1}{2}0{,}1, y_0 + \frac{1}{2}0{,}1 \cdot (0{,}25), U_0 + \frac{1}{2}(0{,}1) \cdot \overset{0}{\overset{\shortparallel}{0}})$

$K_2 = f(0 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1), \frac{1}{2}(0{,}1) \cdot (0{,}25), 0{,}25)$

$K_2 = f(0{,}05, 0{,}0125, 0{,}25) = -\frac{g}{L} \cdot 0{,}0125 = -0{,}245$

NOTA

$$\begin{pmatrix} \theta(0,1) \\ u(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ u_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,25 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,245 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,025 \\ 0,2255 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta(0,2) \\ u(0,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ u_1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$m_1 = u_1 = 0,2255$ $\qquad k_1 = -\frac{g}{L}\theta_1 = -\frac{9,8}{0,5} \cdot 0,025 = -0,49$

$m_2 = u_1 + \frac{1}{2} h k_1 = 0,2255 + \frac{1}{2}(0,1)(-0,49) = -5,524 \times 10^{-3}$

$k_2 = f(t_1 + \frac{1}{2}0,1,\ \theta_1 + \frac{1}{2}0,1 m_1,\ u_1 + \frac{1}{2} h k_1)$

$k_2 = f(0,1 + \frac{1}{2}0,1,\ 0,025 + \frac{1}{2}0,1 \cdot (0,2255),\ 0,2255 + \frac{1}{2}(0,1) \cdot -0,49)$

$k_2 = f(0,15,\ 0,036275,\ 0,201) = -\frac{g}{L}\, 0,036275 = -\frac{9,8}{L}\, 0,036275 =$

$k_2 = -0,71099$

$$\begin{pmatrix} \theta(0,2) \\ u(0,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ u_1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,025 \\ 0,2255 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} -5,524 \times 10^{-3} \\ -0,71099 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,024 \\ 0,154 \end{pmatrix}$$

el ángulo pedido es 0,024. y la velocidad angular 0,154 $\frac{rad}{s}$.

NOTA

dadas las rectas

$$\begin{cases} r_1: x_1 + 1{,}01x_2 = -0{,}01 \\ r_2: 0{,}99x_1 + x_2 = -0{,}01 \end{cases}$$

con aritmética de 5 dígitos se obtiene la aproximación de la solución $\tilde{x} = (0{,}981, -0{,}981)$

(a) estimar el nº de condición de la matriz A, e indicar si la matriz está bien condicionada

(b) obtener una mejor aproximación de la solución haciendo un paso de refinamiento iterativo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1{,}01 \\ 0{,}99 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}01 \\ -0{,}01 \end{pmatrix} \qquad \tilde{x} = (0{,}981, -0{,}981)^T \to \|x\| = 1{,}3873$$

(a) $A\hat{x} + r = b \to r = b - A\hat{x} = \begin{pmatrix} -0{,}01 \\ -0{,}01 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1{,}01 \\ 0{,}99 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}981 \\ -0{,}981 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}9\times10^{-4} \\ -1{,}9\times10^{-4} \end{pmatrix}$

$A\tilde{y} = r$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1{,}01 \\ 0{,}99 & 1 \end{pmatrix}\tilde{y} = \begin{pmatrix} -1{,}9\times10^{-4} \\ -1{,}9\times10^{-4} \end{pmatrix} \to \tilde{y} = \begin{pmatrix} 0{,}019 \\ -0{,}019 \end{pmatrix} \to \|y\| = 0{,}02681$$

$$K(A) = 10^t \cdot \|\tilde{y}\| / \|\tilde{x}\| = 10^5 \cdot \frac{0{,}02687}{1{,}3873} = 1937$$

↳ mucho mayor a 1

(b) $\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + \tilde{y}_1 = (0{,}981 - 0{,}981)^T + (0{,}019 \; -0{,}019) =$ ↳ está mal condicionado

$$\boxed{\hat{x}_2 = (1 \quad -1)^T}$$

NOTA

1) $\begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ xy=1 \end{cases}$ $\qquad \bar{x}^{(0)} = (1{,}9 \;\; 0{,}4)^T$

$$J = \begin{vmatrix} 2x-2 & 2y \\ y & x \end{vmatrix}$$

Para N. sistemas No lineales

$$\begin{cases} \bar{x}^{(i)} = \bar{x}^{(i-1)} + \bar{y}^{(i-1)} \\ J\bar{F}(\bar{x}^{(i)})\, \bar{y}^{(i)} = -\bar{F}(x_i) \end{cases}$$

IT: 1

$$J(F(x^0)) = \begin{bmatrix} 2{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 1{,}9 \end{bmatrix} \qquad F(x_0) = \begin{bmatrix} 0{,}03 \\ 0{,}24 \end{bmatrix}$$

$$y^{(0)} = \begin{bmatrix} -0{,}027 \\ 0{,}132 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1{,}9 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}027 \\ 0{,}132 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}873 \\ 0{,}532 \end{bmatrix}$$

IT 2

$$\begin{bmatrix} 2{,}746 & 1{,}064 \\ 0{,}532 & 1{,}873 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}045 \\ 3{,}5 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -0{,}019 \\ 7{,}3 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1{,}873 \\ 0{,}532 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}019 \\ 7{,}3 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}854 \\ 0{,}539 \end{bmatrix}$$

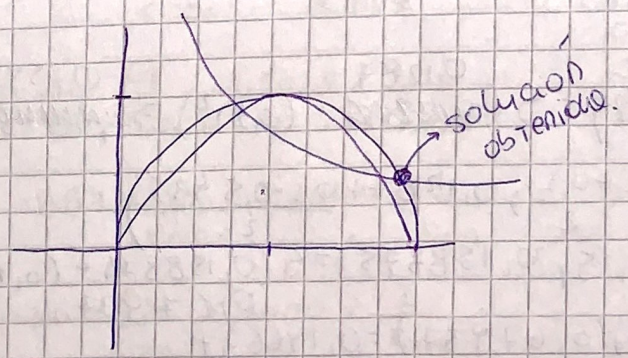
IT 3

$$\begin{bmatrix} 2{,}708 & 1{,}078 \\ 0{,}539 & 1{,}854 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}020 \\ 7 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -8{,}52 \cdot 10^{-3} \\ 2{,}85 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1{,}854 \\ 0{,}539 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8{,}52 \cdot 10^{-3} \\ 2{,}86 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}845 \\ 0{,}542 \end{bmatrix}$$

la solución del sist. es $\approx [1{,}845 \;,\; 0{,}542]^T$

b) $(x-1)^2 + y^2 = 1 \qquad xy = 1 \rightarrow y = \frac{1}{x}$



NOTA

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - 5(y_1 - T^2) = f(T, y) \\ y_1(0) = 0{,}08 \end{cases}$$

$h = \dfrac{0{,}3}{3} = 0{,}1$ (se pide llegar en 3 iteraciones)

RK del punto medio $\rightarrow$ $y_{i+1} = y_i + h k_2$

$k_1 = f(t_i, y_i)$

$k_2 = f(t_i + h/2,\ y_i + h k_1/2)$

iT: 1

$y_1 = y_0 + 0{,}1\, k_2$

$k_1 = 5 \cdot (0{,}08) =$

hornbeck en 1975 propuso la siguiente ec dif. ordinaria no lineal

$\dfrac{dP(t)}{dt} = 5(P(t) - t^2)$. Si la condición inicial es $P(0) = 0{,}08$, hallar el valor $P(0{,}3)$, usando 3 iteraciones de Runge Kutta del punto medio

$$\begin{cases} P' = 5(P - t^2) = f(t, P) \\ P(0) = 0{,}08 \end{cases} \qquad h = \frac{0{,}3}{3} = 0{,}1$$

RK punto medio $\rightarrow$ $\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h k_2 \\ k_1 = f(t_i, y_i) \\ k_2 = f(t_i + h/2,\ y_i + h k_1/2) \end{cases}$

iT: 1

$k_1 = f(t_0, y_0) = f(0, 0{,}08) = 5(0{,}08 - 0) = 0{,}4$

$k_2 = f\left(t_0 + 0{,}05,\ y_0 + \frac{(0{,}1) \cdot 0{,}4}{2}\right) = f(0{,}05,\ 0{,}1) = 5(0{,}1 - (0{,}05)^2) = 0{,}4875$

$y_1 = y_0 + h k_2 = 0{,}08 + 0{,}1 \cdot 0{,}4875 = 0{,}1287$

iT: 2

$k_1 = f(t_1, y_1) = f(0{,}1,\ 0{,}1287) = 5(0{,}1287 - (0{,}1)^2) = 0{,}5935$

$k_2 = f\left(t_1 + h/2,\ y_1 + \frac{h k_1}{2}\right) = f\left(0{,}1 + \frac{0{,}1}{2},\ 0{,}1287 + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}5935}{2}\right)$

$= f(0{,}15,\ 0{,}158375) = 5(0{,}158374 - (0{,}15^2)) = 0{,}67937$

$y_2 = y_1 + h k_2 = 0{,}1287 + (0{,}1)(0{,}67937) = 0{,}196637$

NOTA

$(k_2) \quad (0{,}3375)$

ir3:

$y_3 = y_2 + hk_2$

$k_1 = f(t_2, y_2) = f(0,2\ ,\ 0,196637) = 5(P - t^2) = 0,783185$ (0,196637 ~ 0,2²)

$k_2 = f\left(t_2 + \frac{h}{2},\ y_2 + \frac{hk_1}{2}\right) = f\left(0,2 + 0,05,\ 0.196637 + \frac{(0,1)(0.783185)}{2}\right) =$

$f(0,25, 0,23579) = 5(0,23579 - 0,25^2) = 0,86645$

$y_3 = y_2 + hk_2 = 0.196637 + (0,1)(0.86645) = 0,2832$

$\boxed{P(0,3) \cong 0,2832}$

Un investigador obtiene los datos siguientes, de un experimento para determinar el crecimiento de bacterias K(c) donde c es la concentración de oxígeno

c (mg/L)	0,5	0,8	1,5	2,5	4
K(c)	1,1	2,4	5,3	7,6	8,9

Se sabe que ductos datos pueden modelarse mediante la función $K(c) = \frac{K_{max} c^2}{c_s + c^2}$, donde $K_{máx}$ y c_s son parámetros. Usar cuadrados mínimos para aproximar

- Para usar cuadrados mínimos, primero debo linealizar

$$K = \frac{K_{max} c^2}{c^2 + c_s} \rightarrow \frac{1}{K} = \frac{c_s + c^2}{K_{max} c^2} \rightarrow \frac{1}{K} = \frac{c_s^2}{K_{max} c^2} + \frac{1}{K_{max}}$$

ahora reescribo mi sist. pero de la fórmula anterior encontrada

$$\begin{cases} 0,9091 = \frac{1}{K} = \frac{c_s}{K_{max}} \cdot 4 + \frac{1}{K_{max}} \\ 0,4167 = \frac{1}{K} = \frac{c_s}{K_{max}} \cdot 1,5625 + \frac{1}{K_{max}} \\ 0,1887 = \frac{c_s}{K_{max}} \cdot 0,4444 + \frac{1}{K_{max}} \\ 0,1316 = \frac{c_s}{K_{max}} \cdot 0,1600 + \frac{1}{K_{max}} \\ 0,1124 = \frac{c_s}{K_{max}} \cdot 0,0625 + \frac{1}{K_{max}} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1,5625 & 1 \\ 0,4444 & 1 \\ 0,1600 & 1 \\ 0,0625 & 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} c_s/K_m \\ 1/K_m \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0,9091 \\ 0,4167 \\ 0,1887 \\ 0,1316 \\ 0,1124 \end{bmatrix}$$

resuelvo $A^T A x = A^T b \rightarrow$

NOTA

$$\begin{bmatrix} 18,6684 & 6,2294 \\ 6,2294 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_s/K_{max} \\ 1/K_{max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,3994 \\ 1,7585 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \frac{C_s}{K_{max}} = 0,2024$$

$$\frac{1}{K_m} = 0,0994 \rightarrow K_m = 10,0604$$

$$C_s = 2,0362$$

$$\rightarrow K(c) = \frac{10,0604c^2}{2,0362 + c^2}$$

Como está contenido entre mis nodos aproximo $K(3)$ bastante bien. Con los datos de K_m y C_s obtenidos por cuadrados mínimos tendré que:

$$K(3) = 8,2042$$

la tasa de crecimiento será de aproximadamente 8,2042 para esa concentración de oxígeno.

Una cuerda vibra adoptando la forma $y - 3\,\text{sen}(\pi/4) = 0$ entre las absisas $x=0$ y $x=4$ en un instante t_0. Calcular aproximadamente la longitud de la cuerda, utilizando la regla del trapecio compuesta con $N=8$

$$y - 3\,\text{sen}\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \quad , \quad L(\varphi) = \int_a^b \|r'(t)\|\,dt$$

en este caso: $r(t) = \left(t, 3\,\text{sen}\left(\frac{t}{4}\right)\right)$

$$r'(t) = \left(1, 3\cos\left(\frac{t}{4}\right)\right) \rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{1 + 0,5625 \cdot \cos^2(0,25t)} = g(t)$$

entonces busco $\displaystyle\int_0^4 \left(\sqrt{1 + 0,5625\cos^2(0,25t)}\right) dt =$

por la regla de trapecios compuesto $\quad h = \frac{4-0}{8} = 0,5$

$$\int_0^4 g(t) \approx \frac{h}{2}\left(g(0) + g(4) + 2\sum_{k=1}^{N-1} g(x_k)\right) \qquad x_k = kh$$

$$\approx \frac{0,5}{2}\left(g(0) + g(4) + 2\sum_{k=1}^{7} g(x_k)\right) \quad i = 1,2,3,4,5,6,7$$

x_0 $g(0) = 1,2500$ $\quad$ x_5 $g(2,5) = 1,1704$

x_1 $g(0,5) = 1,2465$ $\quad$ x_6 $g(3) = 1,1407$

x_2 $g(1) = 1,2362$ $\quad$ x_7 $g(3,5) = 1,1096$

x_3 $g(1,5) = 1,2194$ $\quad$ x_8 $g(4) = 1,0790$

x_4 $g(2) = 1,1971$

$$\int_0^4 g(t)\,dt \cong 0,25\left[1,2500 + 1,0790 + 2\sum_{k=1}^{7} g(x_k)\right]$$

$$\approx 4,7422$$

entonces la longitud de la cuerda es de aproximadamente 4,7422.

NOTA

Scanned with CamScanner

HOJA Nº

FECHA 20

Calcular una aproximación de la región limitada por: $0 \leq y \leq -x^2+1$ y $-1 \leq x \leq 1$. Usar Simpson 1/3 con $N=8$

$$h = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

$$\int_{-1}^{1} -x^2+1 = \frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{K=0}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2K+1}) + 2\sum_{K=1}^{\frac{N-2}{2}=3} (x_{2K})\right]$$

$x_0(-1) = 0$

$x_1(-0{,}75) = 0{,}4375$

$x_2(-0{,}5) = 0{,}75$

$x_3(-0{,}25) = 0{,}9375$

$x_4(0) = 1$

$x_5(0{,}25) = 0{,}9375$

$x_6(0{,}5) = 0{,}75$

$x_7(0{,}75) = 0{,}4375$

$x_8(1) = 0$

$$= \frac{h}{3}\left[f(-1)+f(1)+4\left[f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7)\right]+2\left[f(x_2)+f(x_4)+f(x_6)\right]\right]$$

$$= 0{,}833\left[4\left[0{,}4375+0{,}9375+0{,}9375+0{,}4375\right]+2\left[0{,}75+1+0{,}75\right]\right]$$

$$0{,}833\left[11+5\right] = 1{,}33$$

, es exacto se aproxima la función por medio de un polinomio de interpolación de Lagrange de grado menor o igual a 2, y como mis funciones son de grado menor o igual a dos entonces no hay una aproximación como tal.

$|E_T| = f^{(IV)}(\xi) \Rightarrow$ y si realizamos la cuarta derivada es cero, por lo tanto no hay error total.

NOTA

Cuando una población $P(t)$ no puede crecer más de un cierto valor límite L, la gráfica de la función $P(t)$ es llamada curva logística de ecuación $P(t) = \frac{L}{1+Ce^{aT}}$. Ajustar por cuadrados mínimos los valores de c y a para $L = 3000$ con los datos de la sig. tabla

t	0	1	2	3	4
P(t)	200	400	650	850	950

(b) Estimar la población en $t = 3,2$

$P(t) = \frac{L}{1+Ce^{aT}}$ → Voy a linealizar → $1+Ce^{aT} = \frac{L}{P(t)}$

$\cancel{\frac{1}{P(t)} = \frac{1+Ce^{aT}}{L}} \rightarrow \cancel{\frac{1}{P(t)} = \frac{1}{L} + \frac{Ce^{aT}}{L}}$

$Ce^{aT} = \underbrace{\frac{L}{P(t)} - 1}_{y}$

es una función exponencial

$$\left[\ln\left(\frac{2000}{P(t)} - 1\right) = \ln(c) + at\right]$$

$\ln\left(\frac{2000}{200} - 1\right) = \ln(c) + a \cdot 0$

$\ln\left(\frac{2000}{400} - 1\right) = \ln(c) + a \cdot 1$

$\ln\left(\frac{2000}{650} - 1\right) = \ln(c) + a \cdot 2$

$\ln\left(\frac{2000}{850} - 1\right) = \ln(c) + a \cdot 3$

$\ln\left(\frac{2000}{950} - 1\right) = \ln(c) + a \cdot 4$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} \ln(c) \\ a \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2,197 \\ 1,386 \\ 0,731 \\ 0,302 \\ 0,100 \end{bmatrix}$$

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,197 \\ 1,386 \\ 0,302 \\ 0,100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,716 \\ 4,154 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln(c) \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,716 \\ 4,154 \end{bmatrix}$$

$5\ln(c) + 10a = 4,716$

$10\ln(c) + 30a = 4,154$

↳ $\ln(c) = 1,998$ → $c = 7,3846$

↳ $a = -0,5288$

Para mi ecuación

↳ $P(t) = \frac{2000}{1+7,374e^{-0,5288t}}$

$3,2$

↳

HOJA Nº

FECHA 21

Usar dos iteraciones del método de Newton, para sistemas no lineales, para obtener una solución. Usar semilla $(0,1\ 0,1)^T$, hallar el error iT. entre 2 iteraciones consecutivas.

$$\begin{cases} x - 3x^2y = 0 \\ y - x^3 = 0 \end{cases}$$

método de Newton

$$\begin{cases} JF(x,y)y^k = -F(x,y) \\ y^{k+1} = y^k + x^k \end{cases} \qquad x^0 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

$i = 0$

$$JF = \begin{bmatrix} 1 - 6xy & -3x^2 \\ -3x^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,94 & -0,03 \\ -0,03 & 1 \end{bmatrix} y^0 = \begin{bmatrix} -0,097 \\ -0,099 \end{bmatrix} \rightarrow y^0 = \begin{bmatrix} -0,1065 \\ -0,1022 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,1065 \\ -0,1022 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0065 \\ -0,0022 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0,1065 \\ -0,1022 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,0065 \\ -0,0022 \end{bmatrix}$$

$i = 1$

$$\begin{bmatrix} 0,9999 & -0,0001 \\ -0,0001 & 1 \end{bmatrix} y^1 = \begin{bmatrix} -0,0065 \\ -0,0022 \end{bmatrix} \rightarrow y_1 = \begin{bmatrix} 0,0065 \\ -2,2006 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\|x^2 - x^1\|}$$

NOTA

Considerar una masa de 10kg que está unida a una pared por medio de un resorte de constante $K = 10 N/m$. Si se alarga el resorte a una distancia de $0{,}02 m$ y se suelta a partir del reposo, determinar la posición y velocidad de la masa en el $t = 0{,}3 s$, usar 3 pasos de RK del punto medio

a) Calcula de P

$$m\frac{dx^2}{dt} + kx = 0$$

$$mx'' + kx = 0 \longrightarrow \text{Sistema: } \begin{cases} x'' = -\frac{kx}{m} = f(x,t) \\ x(0) = 0{,}02\ m \\ x'(0) = 0\ m/s \end{cases}$$

método de RK del punto medio:

$$\begin{cases} u = x' \\ u' = f(x,t) \end{cases} \qquad h = \frac{0{,}3 - 0}{3} = 0{,}1.$$

Cada paso: $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ u_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$

$k_1 = f(t_i, x_i)$

$k_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h m_1}{2})$

$m_1 = u_1$

$m_2 = u_n + \frac{h k_1}{2}$

$i = 0$

$k_1 = f(t_0, x_0) = \frac{-kx_0}{m} = \frac{-10 \cdot 0{,}02 m}{10} = -0{,}02 m$

$m_1 = u_0 = 0$

$m_2 = u_0 + \frac{h k_1}{2} = 0 + \frac{(0{,}1)\cdot(-0{,}02)}{2} = -0{,}001$

$k_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h m_1}{2}) = \frac{-k(x_0 + h m_1/2)}{m} = -(0{,}02 + \frac{(0{,}1)(0)}{2}) = -0{,}02$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}02 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} -0{,}001 \\ -0{,}02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}0199 \\ -0{,}002 \end{pmatrix}$$

$i = 1$

$k_1 = f(t_1, x_1) = \frac{-k x_1}{m} = -x_1 = 0{,}0199$

$m_1 = u_1 = -0{,}002$

$m_2 = u_1 + \frac{h k_1}{2} = -0{,}002 + \frac{(0{,}1)(0{,}0199)}{2} = -0{,}001$

$k_2 = f(t_1 + \frac{h}{2}, x_1 + \frac{h m_1}{2}) = \frac{-k(x_1 + h m_1/2)}{m} = -(x_1 + \frac{h m_1}{2}) =$

$= -(-0{,}0199 + \frac{0{,}1 \times -0{,}002}{2}) = 0{,}02$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}0199 \\ -0{,}002 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} -0{,}001 \\ 0{,}02 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}02 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$i = 2$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}02 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} 0{,}001 \\ 0{,}02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}0199 \\ 0{,}002 \end{pmatrix}$$

$k_1 = f(t_2, x_2) = 0{,}02 \quad k_2 = f(t_2 + \frac{h}{2}, x_2 + \frac{h m_1}{2}) = -(-0{,}02 + \frac{0{,}1 \cdot 0}{2}) \hookrightarrow 0{,}02$

$m_1 = u_2 = 0 \quad m_2 = u_2 + \frac{h k_1}{2} = 0{,}001$

NOTA

HOJA N° 22

FECHA

ⓐ Calcular el área cerrada bajo la curva del gráfico de $f(x) = e^{-x^2}$ cuando $x \in [-1, 1]$. Usar el método de Simpson 1/3 con $N = 8$. Trabajar con 3 decimales y redondeo.

ⓑ Indicar si el error cometido en la aproximación es menor que 10^{-2}.

$$f(x) = e^{-x^2} \quad x \in [-1,1] \rightarrow \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$$

realizamos la integral con el método de Simpson 1/3

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx \cong \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k})\right] \qquad h = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

$$\cong \frac{0{,}25}{3}\left[f(-1) + f(1) + 4\sum_{k=0}^{3}(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{3} f(x_{2k})\right]$$

$x_0 = f(-1) = 0{,}368$ $\quad x_4 = f(0) = 1$ $\quad x_7 = f(0{,}75) = 0{,}570$

$x_1 = f(-0{,}75) = 0{,}570$ $\quad x_5 = f(0{,}25) = 0{,}940$ $\quad x_8 = f(1) = 0{,}368$

$x_2 = f(-0{,}5) = 0{,}790$ $\quad x_6 = f(0{,}5) = 0{,}790$

$x_3 = f(-0{,}25) = 0{,}940$

$$\cong 0{,}083\left[0{,}368 + 0{,}368 + 4(0{,}570 + 0{,}940 + 0{,}940, 0{,}570) + 2(0{,}790 + 1 + 0{,}790)\right)$$

$$0{,}083\left[0{,}736 + 12{,}08 + 5{,}16\right] =$$

$$0{,}083 \cdot 17{,}976 = \boxed{1{,}492}$$

ⓑ Error Simpson 1/3

$\frac{b-a}{180} h^4 \cdot L$, L es una cota que podemos calcularla como derivada cuarta de la función

$$\frac{b-a}{180} \cdot h^4 = \frac{2}{180} \cdot 0{,}25^4 = 4{,}3403 \cdot 10^{-5} << 10^{-2}$$

↳ Sin importar cuál sea L de por sí es más chico que 10^{-2}

NOTA

hallar una aproximación del sistema no lineal

$$\begin{cases} 2x-3xy+2z^2=1 \\ x+7y+2yz=2 \\ 3x+xy+8z=3 \end{cases}$$

utilizar Newton

$x^0=(0{,}2664 \quad 0{,}3429 \quad 0{,}3238)$

$$F=\begin{bmatrix} 2x-3xy+2z^2-1 \\ x+7y+2yz-2 \\ 3x+xy+8z-3 \end{bmatrix} \qquad J=\begin{bmatrix} 2-3y & -3x & 4z \\ 1 & 7+2z & 2y \\ 3+y & x & 8 \end{bmatrix}$$

aplicamos Newton

$$\begin{cases} JF(x,y,z)\tilde{y}^k=-F(x,y,z) \\ x^{(k+1)}=x^k+y^k \end{cases}$$

iteración 1

$$\begin{bmatrix} 0{,}9713 & -0{,}8 & 1{,}2952 \\ 1 & 7{,}6476 & 0{,}6858 \\ 3{,}3429 & 0{,}2664 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0{,}53126141 \\ 1{,}88906204 \\ 0{,}48195143 \end{bmatrix}$$

$$y^{(0)}=\begin{bmatrix} -0{,}7956 \\ 0{,}3168 \\ 0{,}3821 \end{bmatrix} \qquad x^{(1)}=x^{(0)}+y^{(0)}=\begin{bmatrix} -0{,}5289 \\ 0{,}6597 \\ 0{,}7059 \end{bmatrix}$$

iteración 2

$$\begin{bmatrix} 0{,}0209 & 1{,}5867 & 2{,}8236 \\ 1 & 8{,}4118 & 1{,}3194 \\ 3{,}6597 & -0{,}528 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0{,}01446439 \\ 3{,}02036446 \\ 0{,}71158467 \end{bmatrix}$$

$$y^{(1)}=\begin{bmatrix} 0{,}6438 \\ 0{,}3115 \\ -0{,}1850 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)}=\begin{bmatrix} -0{,}5289 \\ 0{,}6597 \\ 0{,}7059 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0{,}6438 \\ 0{,}3115 \\ -0{,}1850 \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}1149 \\ 0{,}9612 \\ 0{,}5209 \end{bmatrix}}_{\text{RTA}}$$

Scanned with CamScanner

Los modelos depredador-presa, también conocidos como modelos Lotka-Volterra responden al sistema de ec. dif.

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = a\,x(t) - b\,x(t)\,y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -c\,y(t) + d\,x(t)\,y(t) \end{cases}$$

(a) Utilizar los valores constantes $a = 1{,}2$ $b = 0{,}6$, $c = 0{,}8$ y $d = 0{,}3$ y las condiciones iniciales $x(0) = 2$ e $y(0) = 1$ para plantear el sistema anterior como un PVI

(b) Usar 3 iteraciones del método de Euler para estimar $x(0{,}3)$ e $y(0{,}3)$

(a)
$$\begin{cases} x' = a\,x - b\,x\,y \\ y' = -c\,y + d\,x\,y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = 1{,}2\,x - 0{,}6\,x\,y = f(x,y) \\ y' = -0{,}8\,y + 0{,}3\,x\,y = g(x,y) \\ x(0) = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(b) Voy a utilizar el método de Euler con $h = \dfrac{0{,}3}{3} = \boxed{0{,}1}$

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(x_i, y_i) \\ g(x_i, y_i) \end{pmatrix}$$

$i = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} (1{,}2)\cdot 2 - 0{,}6(2)(1) \\ -0{,}8\cdot 1 + 0{,}3\cdot 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}12 \\ -0{,}02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}12 \\ 0{,}98 \end{pmatrix}$$

$i = 1$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}12 \\ 0{,}98 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} 1{,}2\cdot(2{,}12) - 0{,}6(2{,}12)(0{,}98) \\ -0{,}8(0{,}98) + 0{,}3(2{,}12)(0{,}98) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}12 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}129744 \\ -0{,}016072 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}99 \\ 0{,}96 \end{pmatrix}$$

$i = 2$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}99 \\ 0{,}96 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} 1{,}2(1{,}99) - 0{,}6(1{,}99)(0{,}96) \\ -0{,}8(0{,}96) + 0{,}3(1{,}99)(0{,}96) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}99 \\ 0{,}96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}124176 \\ -0{,}019488 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}11 \\ 0{,}94 \end{pmatrix}}_{\text{RTA}}$$

NOTA

Scanned with CamScanner

La siguiente tabla corresponde a la distancia recorrida por un móvil (e(t)), sobre una pista durante 65 seg. Completar la tabla con la velocidad del móvil en cada instante de tiempo usando diferencias centradas siempre que sea posible. Estimar la aceleración a los 30 seg.

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
e(t)	0	54	115	175	250	330	400	460	516	566	628	698	774	844

diferencias centradas

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} \qquad f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_i) + f(x_{i-2})}{4h^2}$$

velocidad $v = e(t)$ $\boxed{h=5}$

$$e'(5) = \frac{e(10) - e(0)}{10} = \frac{115 - 0}{10} = 11,5$$

$$e'(10) = \frac{e(15) - e(5)}{10} = \frac{175 - 54}{10} = 12,1$$

$$e'(15) = \frac{e(20) - e(10)}{10} = 13,5$$

$$e'(20) = \frac{e(25) - e(15)}{10} = 15,5$$

$$e'(25) = \frac{e(30) - e(20)}{10} = 15$$

$$e'(30) = \frac{e(35) - e(25)}{10} = 13$$

$$e'(35) = \frac{e(40) - e(30)}{10} = 11,6$$

$$e'(40) = \frac{e(45) - e(35)}{10} = 10,6$$

$$e'(45) = \frac{e(50) - e(40)}{10} = 11,2$$

$$e'(50) = \frac{e(55) - e(45)}{10} = 13,2$$

$$e'(55) = \frac{e(60) - e(50)}{10} = 14,6$$

$$e'(60) = \frac{e(65) - e(55)}{10} = 14,6$$

la aceleración en 30

$$e''(30) = \frac{516 - 2 \cdot 400 + 250}{\underset{100}{4 \cdot 2,5}} = -0,34$$

corroboro

$$e''(30) = \frac{\frac{516 - 400}{15} - \frac{400 - 250}{5}}{10} = \frac{11,6 - 15}{10} = -0,34$$

esta bien