ENSIMAG 2ème année
Modélisation Géométrique **2024/25**

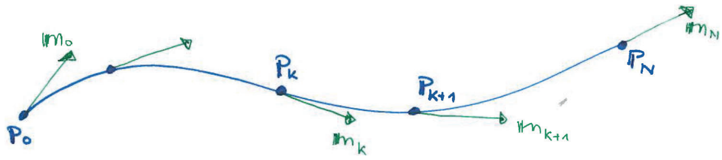
Splines Hermite

mini-Projet noté

Nous avons défini les polynômes d'interpolation Hermite en cours par

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}_0 H_0(t) + \boldsymbol{P}_1 H_1(t) + \boldsymbol{m}_0 H_2(t) + \boldsymbol{m}_1 H_3(t), \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

où $\boldsymbol{P}(t)$ est l'unique polynôme cubique interpolant les points $\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1 \in \mathbb{R}^2$ et les tangentes (dérivées) $\boldsymbol{m}_0$ et $\boldsymbol{m}_1 \in \mathbb{R}^2$ aux paramètres 0 et 1, et H_i, $i = 0,1,2,3$ étant les polynômes d'Hermite cubiques.



Les **Splines Hermite cubiques** sont des courbes C^1 polynomiales de degré 3 par morceaux interpolant $N+1$ points $\boldsymbol{P}_k$ de $\mathbb{R}^2$ et tangentes $\boldsymbol{m}_k$, $k = 0, \ldots, N$ aux paramètres respectifs $u_0, \ldots, u_N$. Ils sont définis par $\boldsymbol{P} \colon [u_0, u_N] \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}\,|_{[u_k,u_{k+1}]}(u) = & \boldsymbol{P}_k H_0(t) + \boldsymbol{P}_{k+1} H_1(t) \\ & + (u_{k+1} - u_k)\boldsymbol{m}_k H_2(t) + (u_{k+1} - u_k)\boldsymbol{m}_{k+1} H_3(t),\ u \in [u_k, u_{k+1}] \end{aligned} \tag{2}$$

avec $t = \frac{u-u_k}{u_{k+1}-u_k} \in [0,1]$, $k = 0, \ldots, N-1$ On note t *paramètre local* et u *paramètre global.*

Ces courbes splines sont typiquement utilisées pour l'interpolation de points $(\boldsymbol{P}_k, u_k)$ par une courbe *lisse*. Les tangentes $\boldsymbol{m}_k$ ne sont généralement pas données et doivent être estimées à partir des données en entrée. La formule (1) peut être appliquée à chaque intervalle $[u_k, u_{k+1}]$ séparément. La courbe spline résultante sera continue et aura des dérivées continues (C^1-spline).

Problème à résoudre: **Partie 1:** Soient $N+1$ points de $\mathbb{R}^2$ donnés et leur paramètre associé, $(\boldsymbol{P}_k, u_k), k = 0, \ldots, N$. On cherche une courbe spline Hermite cubique $\boldsymbol{P}$ interpolant les points $\boldsymbol{P}_k$ aux paramètres u_k. On visualisera la "qualité" de la courbe.
Partie 2: Ensuite, on comparera les Hermite splines avec d'autres méthodes d'interpolation, notemment l'interpolation polynomiale et interpolation par splines cubiques C^2.
Remarque: vous êtes libre de choisir Scilab, Python, C++ ou toute autre logiciel ou langage pour réaliser ce projet.

Travail demandé (en binôme):
- Pour réussir ce projet (avec une note 10/20) il faut finir la partie 1
- et rendre un rapport écrit (dactylographié ou à la main)
- Rendu du projet au plus tard le **lundi 2 décembre 2024**
- Dépot sur Teide (code et rapport) dans un fichier *votre-nom.zip* au plus tard le 29/11/21
- faire une démo (5-8minutes) lors des soutenances organisés le 2 déecembre 2024.

Partie 1:

0. Montrer que la courbe en (2) interpole les points $\boldsymbol{P}_k$ et les tangentes $\boldsymbol{m}_k$, $k = 0, \ldots, N$.

1. On choisira une paramétrisation équidistante: $u_k = k$ pour $k = 0, \ldots, N$.
Ecrivez la spline Hermite (2) sous forme Bézier, où

$$\boldsymbol{P}|_{[u_k, u_{k+1}]}(u) = \boldsymbol{x}_k(t) = \sum_{i=0}^{3} \boldsymbol{b}_{3k+i} B_i^3(t), \quad u \in [u_k, u_{k+1}]$$

avec $t = \frac{u - u_k}{u_{k+1} - u_k} \in [0,1], k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$.

2. Faites un dessin pour deux polygones de contrôle consécutifs, $\boldsymbol{x}_k$ et $\boldsymbol{x}_{k+1}$, en y ajoutant les points de contrôle avec leur indice respectif et les données pour les paramètres u_k, u_{k+1}, et u_{k+2}.

3. En pratique les tangentes $\boldsymbol{m}_k$ ne sont pas données en entrée. Il faut les estimer raisonnablement. Une solution possible sont les:

Cardinal splines:

$$\boldsymbol{m}_k = (1-c)\frac{\boldsymbol{P}_{k+1} - \boldsymbol{P}_{k-1}}{u_{k+1} - u_{k-1}}, \quad k = 1, \ldots, N-1, \quad c \in [0,1]$$

où c est un *paramètre de tension*. Pour $c = 1$ les tangentes sont nulles, pour $c = 0$ on retrouve des courbes splines connues sous le nom **Catmull-Rom**.

Comme c'est le cas pour toute estimation de dérivée par différences finies, la formule ne s'applique pas aux extrémités. A vous de faire un choix raisonnable ici pour définir m_0 et m_N. Justifier votre choix.

4. Implémenter les splines Hermite en Matlab, Scilab, ou autre langage, et permettre à l'utilisateur d'interagir. Des pistes possibles sont:
- entrer les points $\boldsymbol{P}_k$ à la souris
- choix de $\boldsymbol{m}_0$ et $\boldsymbol{m}_N$ de facon automatique ou par l'utilisateur avec la souris
- choix du paramètre c
- visualisation d'une seule courbe (et au choix les polygones de contrôle)
- ....autres.... a vous de voir ce qui pourrait être interessant.

Attention à une visualisation lisible (choix des couleurs, type et épaisseur des traits, ...)

4.1 Que constatez-vous quand vous faites varier le paramètre c ?

4.2 Comment jugez-vous la qualité du résultat obtenu avec les Cardinal splines? Voici quelques pistes de réflexion: Est-ce que la courbe est lisse? ou a t'elle des ondulations non désirées? préserve t'elle la forme décrite par les points à interpoler, p.ex. un polygone convexe en entrée résulte-t'il en une spline convexe en sortie?

4.3 **En option:** Le choix des tangentes $\boldsymbol{m}_k$ semble déterminant pour la forme de la spline? Est-ce que d'autres choix de $\boldsymbol{m}_k$ sont possibles? si oui implémentez..

5. Visualisez la fonction de courbure, soit par un
- plot du graphe de courbure: $\kappa(u)$, $\kappa : [u_0, u_N] \to \mathbb{R}$ soit par un
- plot de la courbe et sa courbe focale $\boldsymbol{f}(u) = \boldsymbol{P}(u) + \alpha\kappa(u) \cdot \boldsymbol{n}(u)$,
  où $\alpha \in \mathbb{R}$ (à bien choisir) et $\boldsymbol{n}$ le vecteur normal (unitaire).

5.1 Qu'observez-vous? A votre avis, pourquoi un plot de courbures est-il considéré comme un indicateur de qualité d'une courbe?

5.2 Votre nouveau choix des tangentes $\boldsymbol{m}_k$ en 4.3, améliore-t'il la qualité de la spline?

6. Utilisez votre programme pour créer un dessin d'un objet de votre choix.

Partie 2:

7a. Implémentez l'interpolation Lagrange (p.ex. algorithme Aitken-Neville).

7b. **En option (bonus):** Implémentez les splines cubiques C^2 (paramétrisation équidistante) et comparez avec les splines Hermite et polynôme de Lagrange. On peut aussi comparer leurs graphe de courbure.

8. Permettre la superposition des 2 ou 3 courbes d'interpolation pour le même ensemble de points à l'entrée à la demande.

9. Comparez les méthodes d'interpolation que vous avz implémenté. Vos observations? Vos commentaires?

Votre rapport doit contenir

- description mathématique du problème à résoudre et de sa solution, de faoçn pédagogique
- les réponses aux questions 0 à 6 (7-9)
- vos résultats obtenus (un grand nombre d'illustrations et d'exemples !!) avec explications et légendes.
- vos comparaisons, vos observations, vos remarques éventuelles, etc.