Tema 1 a)

•) Dacă x este un semnal de energie finită, atunci TF este definită aproape peste tot:

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} x[n] e^{-j\omega n}, \forall \omega \in \mathbb{R}$$

unde N este un nr. arbitrar fixat.

•) Semnalul care studiem este: $X[n] = e^{j\omega_0 n}$, $\forall n \in \overline{0, N-1}$

•) Folosind relația de TF avem:

$$X_N(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \cdot n(\omega_0 - \omega)}$$

$$= \frac{1 - e^{jN(\omega_0 - \omega)}}{1 - e^{j(\omega_0 - \omega)}} = \frac{e^{jN(\omega_0 - \omega)} - 1}{e^{j(\omega_0 - \omega)} - 1}$$

$$= \frac{e^{j\frac{N}{2}(\omega_0 - \omega)} \cdot \left(e^{j\frac{N}{2}(\omega_0 - \omega)} - e^{-j\frac{N}{2}(\omega_0 - \omega)}\right)}{e^{\frac{j(\omega_0 - \omega)}{2}} \cdot \left(e^{\frac{j(\omega_0 - \omega)}{2}} - e^{-\frac{j(\omega_0 - \omega)}{2}}\right)}$$

=> Din formula Euler: $\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$ obținem:

$$\Rightarrow X_N(\omega) = \frac{e^{j\frac{N}{2}(\omega_0 - \omega)} \cdot 2j \cdot \sin(\omega_0 - \omega)\frac{N}{2}}{e^{j(\omega_0 - \omega)} \cdot 2j \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right)} =$$

$$= \frac{e^{j\frac{N}{2}(\omega_0-\omega)} \cdot \sin(\omega_0-\omega)\frac{N}{2}}{e^{j\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}\right)} \cdot \sin\frac{(\omega_0-\omega)}{2}}$$

$\Rightarrow$ Rezultă în expresie din punctul e.

$$X_N(\omega) = \frac{e^{-j(\omega-\omega_0)\frac{N}{2}} \quad \sin\frac{(\omega-\omega_0)N}{2}}{e^{-j(\omega-\omega_0)} \quad \sin\frac{(\omega-\omega_0)}{2}}, \forall \omega \in R$$