

Método de la Bisección

Mateo Cumbal

2024-10-30

Tabla de Contenidos

1	Ejercicio 1	1
2	Ejercicio 4	4
3	Ejercicio Aplicado 1	8
4	Ejercicio Aplicado 2	9
5	Ejercicio Teórico 1	9

1 Ejercicio 1

Use el método de bisección para encontrar soluciones precisas dentro de 10^{-2} para $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ en cada intervalo.

Para empezar, se dibuja la gráfica de la función requerida para de este modo tener una mejor visualización del ejercicio y la bisección a realizar.

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

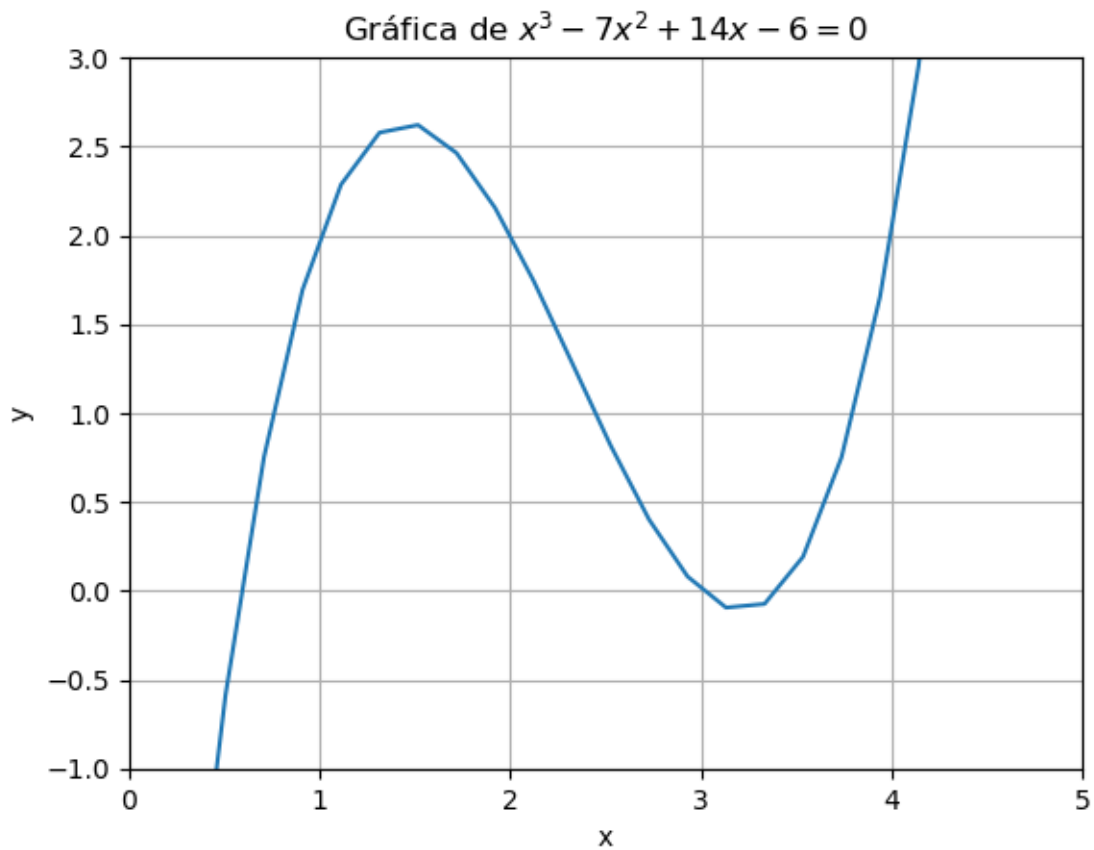
def equation(x:float)->float:
    return (x**3 - 7*x**2 + 14*x - 6)

x = np.linspace(-10, 10, 100)

y = equation(x)
```

```
plt.plot(x, y)

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Gráfica de $ x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$')
ax = plt.gca()
ax.set_ylim([-1, 3])
ax.set_xlim([0, 5])
plt.grid(True)
plt.show()
```



El método de la bisección es aplicado mediante la función definida en Python a continuación:

```
from typing import Callable
def sign(x: float) -> int:
    if x > 0:
```

```

        return 1
    elif x < 0:
        return -1
    else:
        return 0

def bisection(
    a: float, b: float, *, equation: Callable[[float], float], tol: float, N: int
) -> tuple[float, float, float, int] | None:
    i = 1

    assert a < b, "a not lower than b, the interval is not valid."
    assert (
        equation(a) * equation(b) < 0
    ), "The function does not change sign over the interval."

    Fa = equation(a)
    p = a
    for i in range(N):
        p = a + (b - a) / 2
        FP = equation(p)
        if FP == 0 or (b - a) / 2 < tol:
            return p, a, b, i

        if sign(Fa) * sign(FP) > 0:
            a = p
            Fa = FP
        else:
            b = p
    return p, a, b, i

```

a. $[0, 1]$

```

a = 0
b = 1
tol = 10**(-2)

result= bisection(a = a, b=b,equation=equation,tol = tol, N = 20)
print(f"Usando el intervalo [{a}, {b}], en la iteración #{result[3]} \nse encontró que la ra

```

Usando el intervalo $[0, 1]$, en la iteración #6

se encontró que la raíz de $f(x)$, con una precisión de $1e-02$, es aproximadamente 0.5859375

b. $[1, 3.2]$

```
a = 1
b = 3.2
tol = 10**(-2)

result= bisection(a = a, b=b,equation=equation,tol = tol, N = 20)
print(f"Usando el intervalo [{a}, {b}], en la iteración #{result[3]} \nse encontró que la ra
```

Usando el intervalo $[1, 3.2]$, en la iteración #7 se encontró que la raíz de $f(x)$, con una precisión de $1e-02$, es aproximadamente 3.0023437500000005

c. $[3.2, 4]$

```
a = 3.2
b = 4
tol = 10**(-2)

result= bisection(a = a, b=b,equation=equation,tol = tol, N = 20)
print(f"Usando el intervalo [{a}, {b}], en la iteración #{result[3]} \nse encontró que la ra
```

Usando el intervalo $[3.2, 4]$, en la iteración #6 se encontró que la raíz de $f(x)$, con una precisión de $1e-02$, es aproximadamente 3.41875

2 Ejercicio 4

a. Dibuje las gráficas para $y = x^2 - 1$ y $y = e^{1-x^2}$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def equation1(x:float)->float:
    return ((x**2) - 1)
```

```

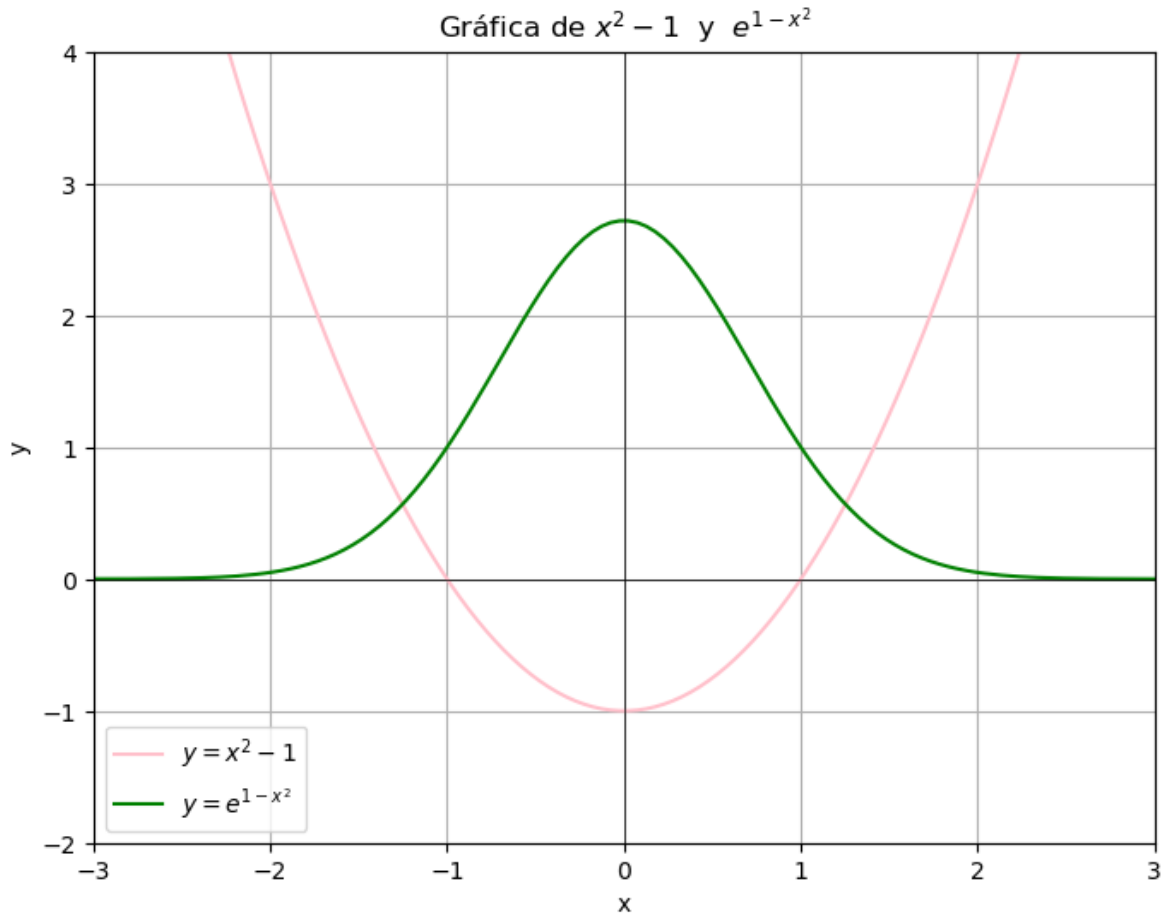
def equation2(x:float)->float:
    return np.exp(1-x**2)

x = np.linspace(-5, 5, 200)
y1 = equation1(x)
y2 = equation2(x)
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(x, y1, label=r'$y = x^{\{2\}} - 1$', color='pink')
plt.plot(x, y2, label=r'$y = e^{\{1-x^{\{2\}}\}}$', color='green')

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Gráfica de $x^{\{2\}}-1$ y $e^{\{1-x^{\{2\}}\}}$')
plt.axhline(0, color='black',linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black',linewidth=0.5)
ax = plt.gca()
ax.set_ylim([-2, 4])
ax.set_xlim([-3, 3])

plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

```



b. Use el método de bisección para encontrar una aproximación dentro de 10^{-3} para un valor de $[-2, 0]$ con $x^2 - 1 = e^{1-x^2}$

Para visualizar mejor el problema, se proporciona la gráfica correspondiente a la función.

```
def eq(x):
    return ((x**2) - 1)-(np.exp(1-x**2))

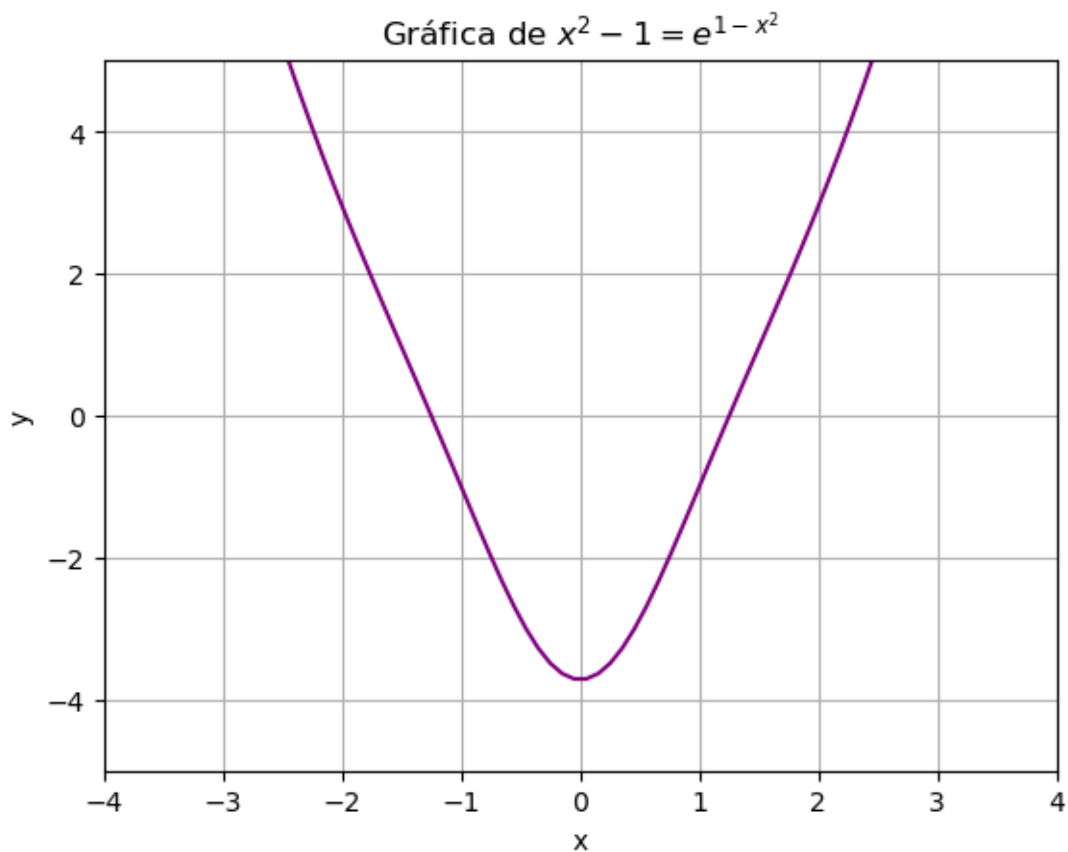
x = np.linspace(-5, 5, 100)

y = eq(x)

plt.plot(x, y, label = '$x^{\{2\}} - 1 = e^{\{1-x^{\{2\}}\}}$', color = 'purple')

plt.xlabel('x')
```

```
plt.ylabel('y')
plt.title('Gráfica de  $x^2 - 1 = e^{1-x^2}$ ')
ax = plt.gca()
ax.set_ylim([-5, 5])
ax.set_xlim([-4, 4])
plt.grid(True)
plt.show()
```



```
a = -2
b = 0
tol = 10**(-3)

result= bisection(a = a, b=b,equation=eq,tol = tol, N = 20)
print(f"Usando el intervalo [{a}, {b}], en la iteración #{result[3]} \nse encontró que la ra.
```

Usando el intervalo $[-2, 0]$, en la iteración #10

se encontró que la raíz de $f(x)$, con una precisión de $1e-03$, es aproximadamente -1.2509765625

3 Ejercicio Aplicado 1

Un abrevadero de longitud L tiene una sección transversal en forma de semicírculo con radio r . (Consulte la figura adjunta.) Cuando se llena con agua hasta una distancia h a partir de la parte superior, el volumen V de agua es:

$$V = L \left(0.5\pi r^2 - r^2 \arcsin\left(\frac{h}{r}\right) - h\sqrt{r^2 - h^2} \right)$$

Suponga que $L = 10$, $r = 1$ y $V = 12.4$. Encuentre la profundidad del agua en el abrevadero dentro de 0.01 cm

Datos del Ejercicio:

- Tolerancia: 0.01cm
- Intervalo: $[h_{\min}, h_{\max}]$, es decir: $[0, 1]$

```
import math

L = 10
r = 1
V_dado = 12.4
tol = 0.01

def f_h(h):
    V_calculado = L * (0.5 * math.pi * r**2 - r**2 * math.asin(h / r) - h * math.sqrt(r**2 - h**2))
    return V_calculado - V_dado

result = bisection(a=0, b=r, equation=f_h, tol=tol, N=20)
print(f"Usando el intervalo [{a}, {b}], en la iteración #{result[3]} \nse encontró que la raíz de f(x) es aproximadamente {result[0]}")
```

Usando el intervalo $[-2, 0]$, en la iteración #6 se encontró que la raíz de $f(x)$, con una precisión de $1e-02$, es aproximadamente 0.1640625

4 Ejercicio Aplicado 2

Un objeto que cae verticalmente a través del aire está sujeto a una resistencia viscosa, así como a la fuerza de gravedad. Suponga que un objeto con masa m cae desde una altura s_0 y que la altura del objeto después de t segundos es

$$s(t) = s_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right),$$

donde $(g = 9.81, \text{m/s}^2)$ y (k) representa el coeficiente de la resistencia del aire en (Ns/m) . Suponga $(s_0 = 300, \text{m})$, $(m = 0.25 \text{ kg})$ y $(k = 0.1, \text{Ns/m})$. Encuentre, dentro de (0.01 segundos) , el tiempo que tarda un cuarto de kg en golpear el piso.

```
s0 = 300
m = 0.25
k = 0.1
g = 9.81
tol = 0.01

def f_t(t):
    s_t = s0 - (m * g / k) * t + (m**2 * g / k**2) * (1 - math.exp(-k * t / m))
    return s_t

result = bisection(a=0, b=s0, equation=f_t, tol=tol, N=20)

print(f"Con el intervalo [0, {s0}], en la iteración #{result[3]} \nse encontró que la raíz de f(t) es aproximadamente {result[0]} seg.")
```

Con el intervalo $[0, 300]$, en la iteración #14 se encontró que la raíz de $f(t)$, con una precisión de $1e-02$, es aproximadamente 14.7308349609375 seg.

5 Ejercicio Teórico 1

Use el teorema 2.1. para encontrar una cota para el número de iteraciones necesarias para lograr una aproximación con precisión de 10^{-4} para la solución de $x^3 - x - 1 = 0$ que se encuentra dentro del intervalo $[1, 2]$. Encuentre una aproximación para la raíz con este grado de precisión.

```
a = 1
b = 2
tol = 10**(-4)
def equation3(x):
```

```
    return (x**(3)-x-1)

result = bisection(a=a,b=b,equation=equation3,tol=tol,N=20)

print(f"Después de {result[3] + 1} iteraciones, \nla solución aproximada con una precisión d
```

Después de 14 iteraciones,
la solución aproximada con una precisión de 1e-04 es: 1.32476806640625