Eliminación Guassiana

Mateo Cumbal

2025-01-08

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import init_printing
init_printing()
```

CONJUNTO DE EJERCICIOS

Ejercicio 1

Para cada uno de los siguientes sistemas lineales, obtenga, de ser posible, una solución con métodos gráficos. Explique los resultados desde un punto de vista geométrico.

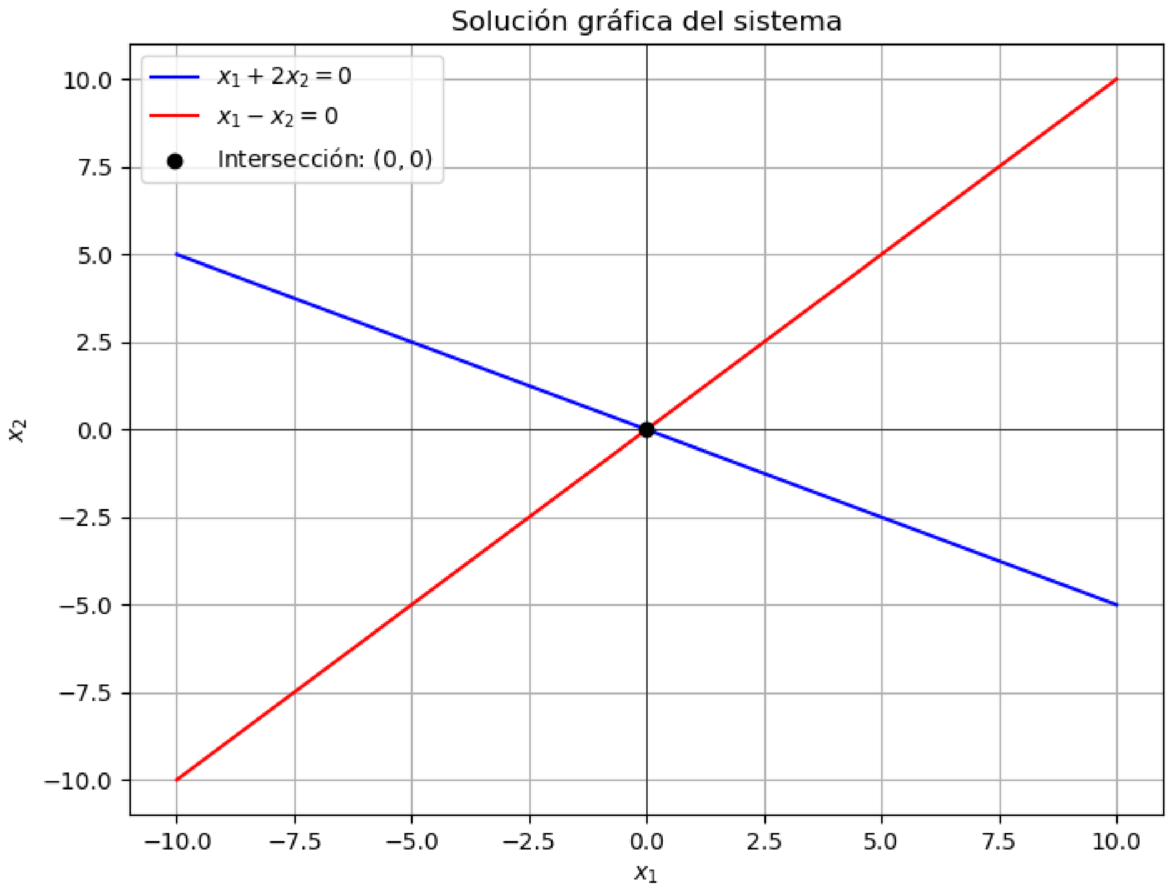
a.

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

```python
x1 = np.linspace(-10, 10, 400)

x2_1 = -x1 / 2
x2_2 = x1

plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(x1, x2_1, label=r"$x_1 + 2x_2 = 0$", color="blue")
plt.plot(x1, x2_2, label=r"$x_1 - x_2 = 0$", color="red")
```

```
sol_a = (0, 0)
plt.scatter(*sol_a, color="black", label="Intersección: $(0, 0)$", zorder=5)

# Configuración de la gráfica
plt.axhline(0, color="black", linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color="black", linewidth=0.5)
plt.title("Solución gráfica del sistema")
plt.xlabel("$x_1$")
plt.ylabel("$x_2$")
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

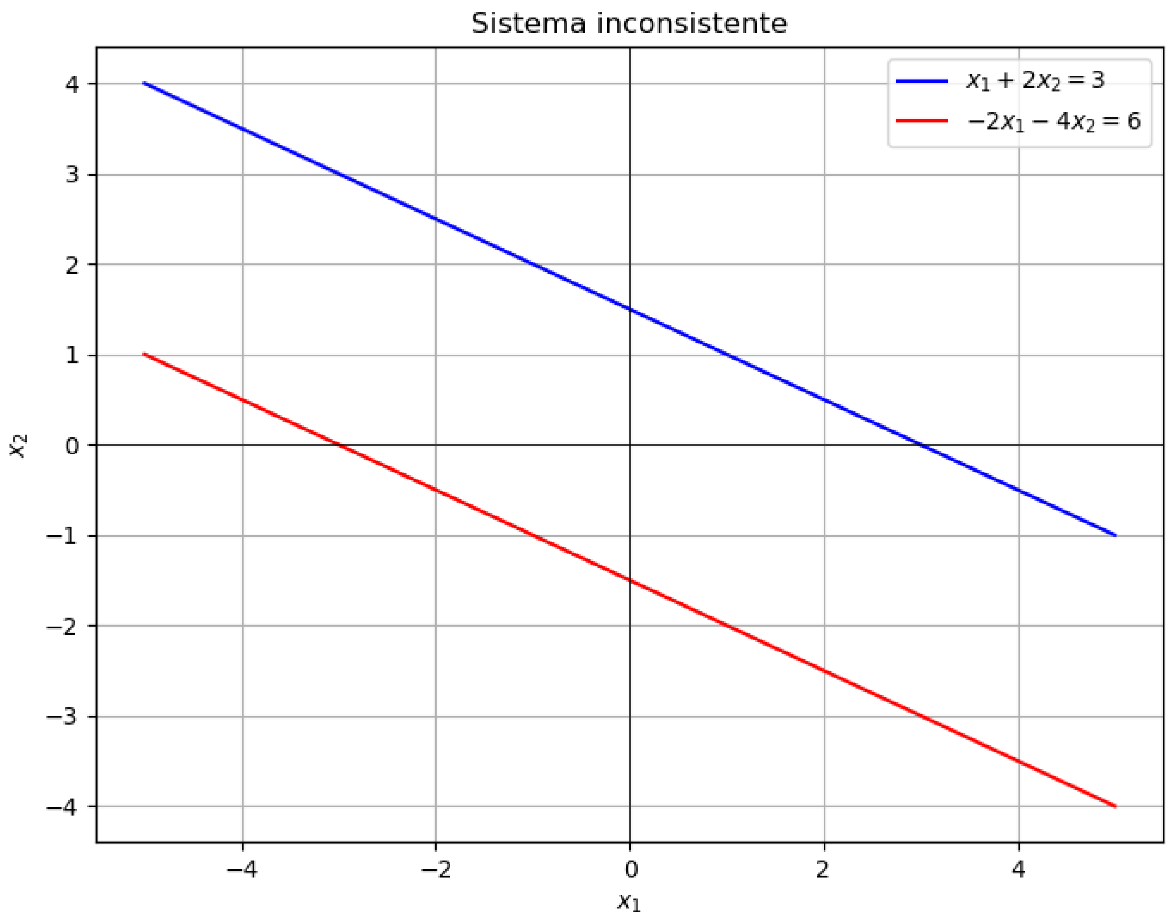


b.

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$-2x_1 - 4x_2 = 6$$

```python
x1 = np.linspace(-5, 5, 400)

x2_1 = (3 - x1) / 2
x2_2 = - (6 + 2 * x1) / 4

plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(x1, x2_1, label=r"$x_1 + 2x_2 = 3$", color="blue")
plt.plot(x1, x2_2, label=r"$-2x_1 - 4x_2 = 6$", color="red")

# No intersección: sistema inconsistente
plt.title("Sistema inconsistente")
plt.axhline(0, color="black", linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color="black", linewidth=0.5)
plt.xlabel("$x_1$")
plt.ylabel("$x_2$")
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```



No hay intersección porque las líneas son paralelas. El sistema es **inconsistente**.

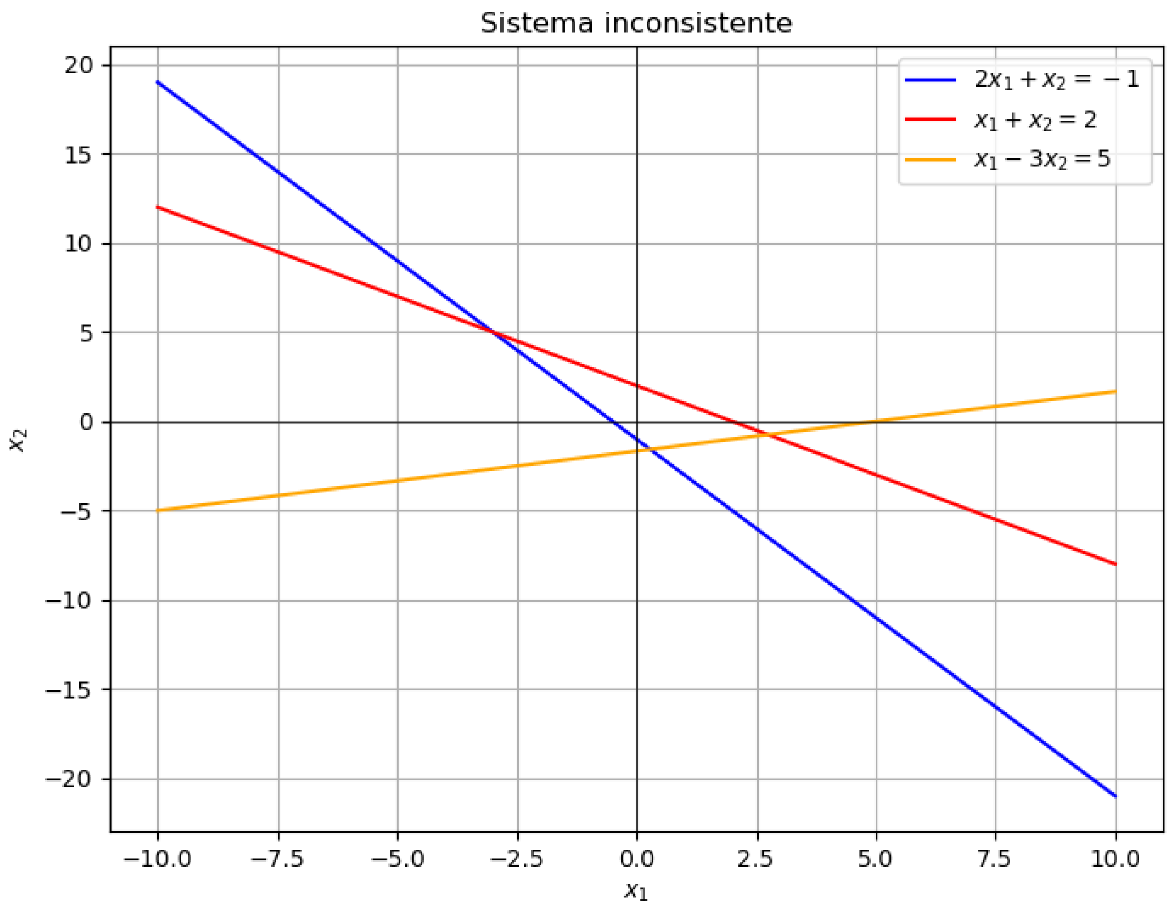
c.

$$2x_1 + x_2 = -1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 - 3x_2 = 5$$

```python
x1 = np.linspace(-10, 10, 400)

x2_1 = -1 - 2 * x1
x2_2 = 2 - x1
x2_3 = - (5 - x1) / 3

plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(x1, x2_1, label=r"$2x_1 + x_2 = -1$", color="blue")
plt.plot(x1, x2_2, label=r"$x_1 + x_2 = 2$", color="red")
plt.plot(x1, x2_3, label=r"$x_1 - 3x_2 = 5$", color="orange")

plt.title("Sistema inconsistente")
plt.axhline(0, color="black", linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color="black", linewidth=0.5)
plt.xlabel("$x_1$")
plt.ylabel("$x_2$")
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```



El sistema es **inconsistente**: no existe un punto en el que las tres funciones itersecan, por lo que no hay solución.

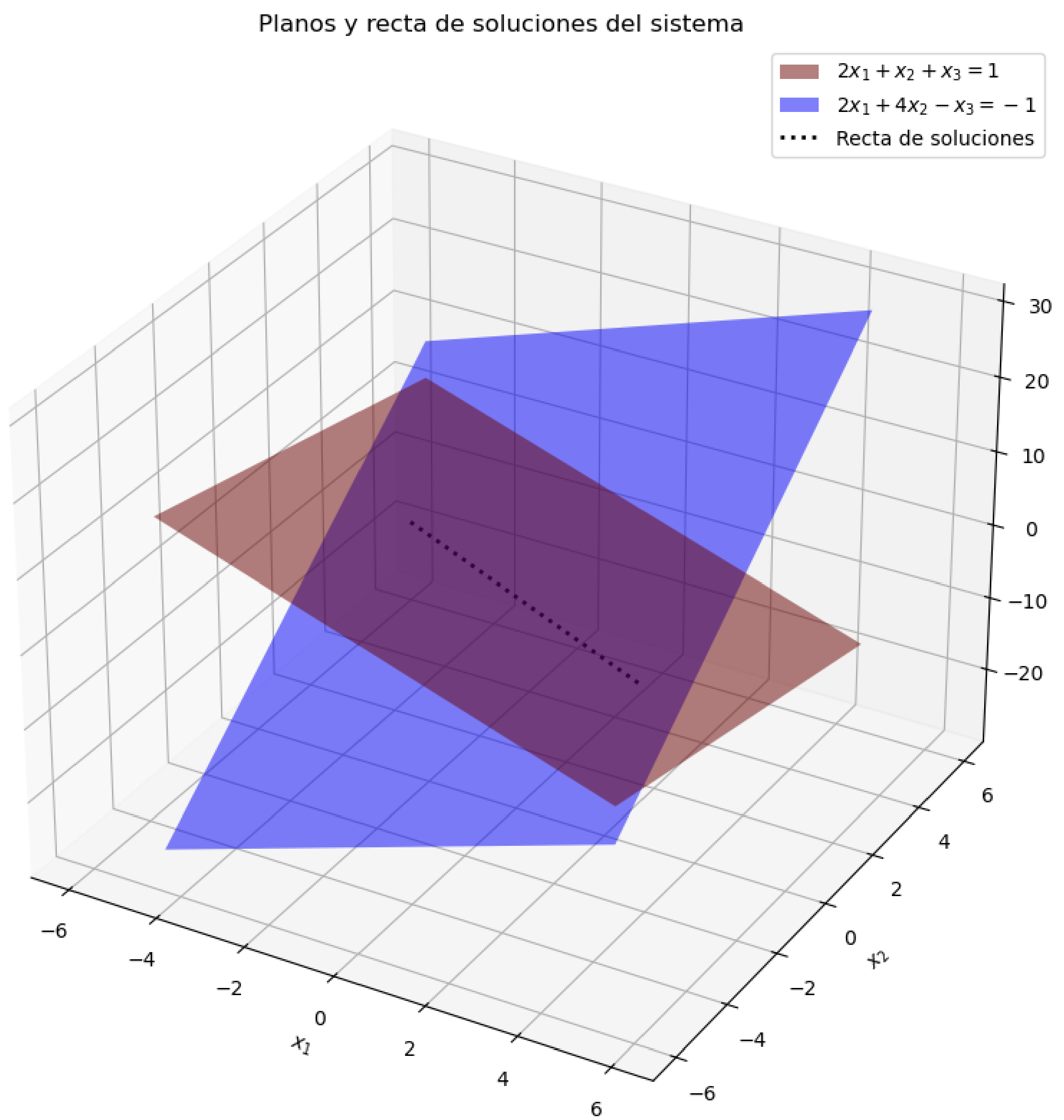
d.

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 + 4x_2 = 0$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Crear la malla para los planos
x1 = np.linspace(-5, 5, 100)
x2 = np.linspace(-5, 5, 100)
```

```
X1, X2 = np.meshgrid(x1, x2)

# Definir los planos
X3_1 = 1 - 2 * X1 - X2
X3_2 = 2 * X1 + 4 * X2 + 1

# Resolver el sistema para obtener la recta de soluciones
# Usando x2 como parámetro libre, obtenemos las relaciones entre las variables
t = np.linspace(-6, 6, 100)  # Parámetro libre para la recta
x1_line = t
x2_line = -t
x3_line = 3 * t - 1

# Crear una figura en 3D
fig = plt.figure(figsize=(10, 10))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

# Graficar los planos
ax.plot_surface(X1, X2, X3_1, alpha=0.5, rstride=100, cstride=100, color='red', label="$2x_1
ax.plot_surface(X1, X2, X3_2, alpha=0.5, rstride=100, cstride=100, color='blue', label="$2x_

# Graficar la recta de soluciones
ax.plot(x1_line, x2_line, x3_line, color='black', linewidth=2, linestyle=':', label='Recta de

# Ajustar etiquetas
ax.set_xlabel('$x_1$')
ax.set_ylabel('$x_2$')
ax.set_zlabel('$x_3$')
ax.set_title("Planos y recta de soluciones del sistema")
ax.legend()

# Mostrar la gráfica
plt.show()
```



Ejercicio 2

Utilice la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los siguientes sistemas lineales. No reordene las ecuaciones. (La solución exacta para cada sistema es $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$)

```python
def eliminacion_gaussiana_no_cambio_fila(A):
    if not isinstance(A, np.ndarray):
        A = np.array(A)
    A = np.round(A, 2)
    assert A.shape[0] == A.shape[1] - 1, "La matriz A debe ser de tama\u00f1o n-by-(n+1)."
    n = A.shape[0]

    print("Estado inicial de la matriz:")
    print(A)

    for i in range(0, n - 1):
        if A[i, i] == 0:
            raise ValueError("El pivote es cero, no se permite cambiar filas en este caso.")

        for j in range(i + 1, n):
            m = round(A[j, i] / A[i, i], 2)
            A[j, i:] = np.round(A[j, i:] - m * A[i, i:], 2)

        print(f"Estado de la matriz tras la eliminaci\u00f3n en la columna {i}:")
        print(A)

    if A[n - 1, n - 1] == 0:
        raise ValueError("No existe soluci\u00f3n \u00fanica.")

    solucion = np.zeros(n)
    solucion[n - 1] = round(A[n - 1, n] / A[n - 1, n - 1], 2)

    for i in range(n - 2, -1, -1):
        suma = 0
        for j in range(i + 1, n):
            suma += A[i, j] * solucion[j]
        solucion[i] = round((A[i, n] - suma) / A[i, i], 2)

    return solucion
```

a.

$$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$$

$$\frac{5}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 11$$

```python
A = np.array([
    [ -1,   4,   1,  8],
    [5/3, 2/3, 2/3,  1],
    [ 2,    1,   4, 11]
])

solucion = eliminacion_gaussiana_no_cambio_fila(A)
print("\nSolución del sistema:")
print(solucion)
```

```
Estado inicial de la matriz:
[[-1.    4.    1.    8.  ]
 [ 1.67  0.67  0.67  1.  ]
 [ 2.    1.    4.   11.  ]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 0:
[[-1.    4.    1.    8.  ]
 [ 0.    7.35  2.34 14.36]
 [ 0.    9.    6.   27.  ]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 1:
[[-1.    4.    1.    8.  ]
 [ 0.    7.35  2.34 14.36]
 [ 0.    0.03  3.15  9.48]]

Solución del sistema:
[-0.99  1.    3.01]
```

b.

$$4x_1 + 2x_2 - x_3 = -5$$

$$\frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -1$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9$$

```
B = np.array([
    [  4,   2,   -1, -5],
    [1/9, 1/9, -1/3, -1],
    [  1,   4,    2,  9]
])

solucion = eliminacion_gaussiana_no_cambio_fila(B)
print("\nSolución del sistema:")
print(solucion)
```

```
Estado inicial de la matriz:
[[ 4.    2.   -1.   -5.  ]
 [ 0.11  0.11 -0.33 -1.  ]
 [ 1.    4.    2.    9.  ]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 0:
[[ 4.000e+00  2.000e+00 -1.000e+00 -5.000e+00]
 [-1.000e-02  5.000e-02 -3.000e-01 -8.500e-01]
 [ 0.000e+00  3.500e+00  2.250e+00  1.025e+01]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 1:
[[ 4.000e+00  2.000e+00 -1.000e+00 -5.000e+00]
 [-1.000e-02  5.000e-02 -3.000e-01 -8.500e-01]
 [ 0.000e+00  0.000e+00  2.325e+01  6.975e+01]]

Solución del sistema:
[-1.  1.  3.]
```

Ejercicio 3

Utilice el algoritmo de eliminación gaussiana para resolver, de ser posible, los siguientes sistemas lineales, y determine si se necesitan intercambios de fila.

```
def eliminacion_gaussiana(A):
    if not isinstance(A, np.ndarray):
        A = np.array(A)
    assert A.shape[0] == A.shape[1] - 1, "La matriz A debe ser de tamaño n-by-(n+1)."
    n = A.shape[0]

    print("Estado inicial de la matriz:")
    print(A)

    for i in range(0, n - 1):
```

```
    p = None
    for pi in range(i, n):
        if A[pi, i] == 0:
            continue

        if p is None:
            p = pi
            continue

        if abs(A[pi, i]) < abs(A[p, i]):
            p = pi

    if p is None:
        raise ValueError("No existe solución única.")

    if p != i:
        print(f"Intercambiando filas {i} y {p}")
        _aux = A[i, :].copy()
        A[i, :] = A[p, :].copy()
        A[p, :] = _aux
        print(f"Estado de la matriz tras el intercambio:")
        print(A)

    for j in range(i + 1, n):
        m = A[j, i] / A[i, i]
        A[j, i:] = A[j, i:] - m * A[i, i:]

    print(f"Estado de la matriz tras la eliminación en la columna {i}:")
    print(A)

if A[n - 1, n - 1] == 0:
    raise ValueError("No existe solución única.")

solucion = np.zeros(n)
solucion[n - 1] = A[n - 1, n] / A[n - 1, n - 1]

for i in range(n - 2, -1, -1):
    suma = 0
    for j in range(i + 1, n):
        suma += A[i, j] * solucion[j]
    solucion[i] = (A[i, n] - suma) / A[i, i]
```

```python
    return solucion
```

a.

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$

$$3x_1 - 3x_2 + x_3 = -1$$

$$x_1 + x_2 \ = 3$$

```python
A = np.array([
    [1, -1, 3,  2],
    [3, -3, 1, -1],
    [1,  1, 0,  3]
])

solucion = eliminacion_gaussiana(A)
print("\nSolución del sistema:")
print(solucion)
```

```
Estado inicial de la matriz:
[[ 1 -1  3  2]
 [ 3 -3  1 -1]
 [ 1  1  0  3]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 0:
[[ 1 -1  3  2]
 [ 0  0 -8 -7]
 [ 0  2 -3  1]]
Intercambiando filas 1 y 2
Estado de la matriz tras el intercambio:
[[ 1 -1  3  2]
 [ 0  2 -3  1]
 [ 0  0 -8 -7]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 1:
[[ 1 -1  3  2]
 [ 0  2 -3  1]
 [ 0  0 -8 -7]]

Solución del sistema:
[1.1875 1.8125 0.875 ]
```

Dado que el elemento A_{11} es cero en la matriz $A^{(1)}$, se realiza un intercambio de filas entre 1 y 2 para obtener $A^{(1')}$ y seguir con el algoritmo.

b.

$$2x_1 - 1.5x_2 + 3x_3 = 1$$

$$-x_1 + 2x_3 = 3$$

$$4x_1 - 4.5x_2 + 5x_3 \ = 1$$

```
B = np.array([
    [ 2, -1.5, 3, 1],
    [-1,    0, 2, 3],
    [ 4, -4.5, 5, 1]
])

solucion = eliminacion_gaussiana(B)
print("\nSolución del sistema:")
print(solucion)
```

```
Estado inicial de la matriz:
[[ 2.  -1.5  3.   1. ]
 [-1.   0.   2.   3. ]
 [ 4.  -4.5  5.   1. ]]
Intercambiando filas 0 y 1
Estado de la matriz tras el intercambio:
[[-1.   0.   2.   3. ]
 [ 2.  -1.5  3.   1. ]
 [ 4.  -4.5  5.   1. ]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 0:
[[-1.   0.   2.   3. ]
 [ 0.  -1.5  7.   7. ]
 [ 0.  -4.5 13.  13. ]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 1:
[[-1.   0.   2.   3. ]
 [ 0.  -1.5  7.   7. ]
 [ 0.   0.  -8.  -8. ]]

Solución del sistema:
```

```
[-1. -0.  1.]
```

Dado que el elemento A_{11} es cero en la matriz inicial $A^{(0)}$, se realiza un intercambio de filas entre 0 y 1 para obtener $A^{(0')}$ y seguir con el algoritmo.

c.

$$2x_1 = 3$$

$$x_1 + 1.5x_2 = 4.5$$

$$-3x_2 + 0.5x_3 \ = -6.6$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0.8$$

```python
C = np.array([
    [2,   0,   0,  0,    3],
    [1, 1.5,   0,  0,  4.5],
    [0,  -3, 0.5,  0, -6.6],
    [2,  -2,   1,  1,  0.8]
])

solucion = eliminacion_gaussiana(C)
print("\nSolución del sistema:")
print(solucion)
```

```
Estado inicial de la matriz:
[[ 2.   0.   0.   0.   3. ]
 [ 1.   1.5  0.   0.   4.5]
 [ 0.  -3.   0.5  0.  -6.6]
 [ 2.  -2.   1.   1.   0.8]]
Intercambiando filas 0 y 1
Estado de la matriz tras el intercambio:
[[ 1.   1.5  0.   0.   4.5]
 [ 2.   0.   0.   0.   3. ]
 [ 0.  -3.   0.5  0.  -6.6]
 [ 2.  -2.   1.   1.   0.8]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 0:
[[ 1.   1.5  0.   0.   4.5]
```

```
 [ 0.  -3.   0.   0.  -6. ]
 [ 0.  -3.   0.5  0.  -6.6]
 [ 0.  -5.   1.   1.  -8.2]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 1:
[[ 1.   1.5  0.   0.   4.5]
 [ 0.  -3.   0.   0.  -6. ]
 [ 0.   0.   0.5  0.  -0.6]
 [ 0.   0.   1.   1.   1.8]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 2:
[[ 1.   1.5  0.   0.   4.5]
 [ 0.  -3.   0.   0.  -6. ]
 [ 0.   0.   0.5  0.  -0.6]
 [ 0.   0.   0.   1.   3. ]]

Solución del sistema:
[ 1.5  2.  -1.2  3. ]
```

En este caso, el intercambio de fila NO es extrictamente necesario, solo se lo realiza para encontrar el mejor pivote.

d.

$$2x_1 = 3$$

$$x_1 + 1.5x_2 = 4.5$$

$$-3x_2 + 0.5x_3 \ = -6.6$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0.8$$

```
D = np.array([
    [1,   1,   0,  1,    2],
    [2, 1,   -1,  1,  1],
    [4,  -1, -2,  2, 0],
    [3,  -1,   -1,  2,  -3]
])
try:
    solucion = eliminacion_gaussiana(D)
    print("\nSolución del sistema:")
```

```python
    print(solucion)
except ValueError as e:
    print('\nERROR:', e)
```

```
Estado inicial de la matriz:
[[ 1  1  0  1  2]
 [ 2  1 -1  1  1]
 [ 4 -1 -2  2  0]
 [ 3 -1 -1  2 -3]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 0:
[[ 1  1  0  1  2]
 [ 0 -1 -1 -1 -3]
 [ 0 -5 -2 -2 -8]
 [ 0 -4 -1 -1 -9]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 1:
[[ 1  1  0  1  2]
 [ 0 -1 -1 -1 -3]
 [ 0  0  3  3  7]
 [ 0  0  3  3  3]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 2:
[[ 1  1  0  1  2]
 [ 0 -1 -1 -1 -3]
 [ 0  0  3  3  7]
 [ 0  0  0  0 -4]]

ERROR: No existe solución única.
```

Para este caso, el sistema es **inconsistente**.

Ejercicio 4

Use el algoritmo de eliminación gaussiana y la aritmética computacional de precisión de 32 bits para resolver los siguientes sistemas lineales.

Solamente se expecifica el tipo de datos que tiene la matriz, en este caso, es *float32*.

a.

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 9$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{5}x_3 = 8$$

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$

```
A = np.array([
    [1/4, 1/5, 1/6, 9],
    [1/3, 1/4, 1/5, 8],
    [1/2,   1,   2, 8],
], dtype='float32')

solucion = eliminacion_gaussiana(A)
print("\nSolución del sistema:")
print(solucion)
```

```
Estado inicial de la matriz:
[[0.25       0.2        0.16666667 9.        ]
 [0.33333334 0.25       0.2        8.        ]
 [0.5        1.         2.         8.        ]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 0:
[[  0.25         0.2          0.16666667   9.        ]
 [  0.          -0.01666668  -0.02222224  -4.        ]
 [  0.           0.6          1.6666666  -10.        ]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 1:
[[ 2.5000000e-01  2.0000000e-01  1.6666667e-01  9.0000000e+00]
 [ 0.0000000e+00 -1.6666681e-02 -2.2222236e-02 -4.0000000e+00]
 [ 0.0000000e+00 -5.9604645e-08  8.6666673e-01 -1.5399989e+02]]

Solución del sistema:
[-227.07666725  476.92263902 -177.69216919]
```

b.

$$3.333x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 = 15913$$

$$2.222x_1 + 16.71x_2 + 9.612x_3 = 28.544$$

$$1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 = 8.4254$$

```python
B = np.array([
    [3.333, 15920, 10.333, 15913],
    [2.222, 16.71, 9.612, 28.544],
    [1.5611, 5.1791, 1.6852, 8.4254],
], dtype='float32')

solucion = eliminacion_gaussiana(B)
print("\nSolución del sistema:")
print(solucion)
```

```
Estado inicial de la matriz:
[[3.3330e+00 1.5920e+04 1.0333e+01 1.5913e+04]
 [2.2220e+00 1.6710e+01 9.6120e+00 2.8544e+01]
 [1.5611e+00 5.1791e+00 1.6852e+00 8.4254e+00]]
Intercambiando filas 0 y 2
Estado de la matriz tras el intercambio:
[[1.5611e+00 5.1791e+00 1.6852e+00 8.4254e+00]
 [2.2220e+00 1.6710e+01 9.6120e+00 2.8544e+01]
 [3.3330e+00 1.5920e+04 1.0333e+01 1.5913e+04]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 0:
[[1.5611000e+00 5.1791000e+00 1.6852000e+00 8.4253998e+00]
 [0.0000000e+00 9.3383007e+00 7.2133622e+00 1.6551662e+01]
 [0.0000000e+00 1.5908942e+04 6.7350426e+00 1.5895012e+04]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 1:
[[ 1.5611000e+00  5.1791000e+00  1.6852000e+00  8.4253998e+00]
 [ 0.0000000e+00  9.3383007e+00  7.2133622e+00  1.6551662e+01]
 [ 0.0000000e+00  0.0000000e+00 -1.2282113e+04 -1.2302777e+04]]

Solución del sistema:
[1.00249532 0.99870038 1.0016824 ]
```

c.

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{6}x_4 = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{7}x_4 = \frac{1}{9}$$

```python
C = np.array([
    [1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/6],
    [1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/7],
    [1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/8],
    [1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/9],
], dtype='float32')

solucion = eliminacion_gaussiana(C)
print("\nSolución del sistema:")
print(solucion)
```

```
Estado inicial de la matriz:
[[1.         0.5        0.33333334 0.25       0.16666667]
 [0.5        0.33333334 0.25       0.2        0.14285715]
 [0.33333334 0.25       0.2        0.16666667 0.125     ]
 [0.25       0.2        0.16666667 0.14285715 0.11111111]]
Intercambiando filas 0 y 3
Estado de la matriz tras el intercambio:
[[0.25       0.2        0.16666667 0.14285715 0.11111111]
 [0.5        0.33333334 0.25       0.2        0.14285715]
 [0.33333334 0.25       0.2        0.16666667 0.125     ]
 [1.         0.5        0.33333334 0.25       0.16666667]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 0:
[[ 0.25        0.2         0.16666667  0.14285715  0.11111111]
 [ 0.         -0.06666666 -0.08333334 -0.0857143  -0.07936507]
 [ 0.         -0.01666668 -0.02222224 -0.02380954 -0.02314815]
 [ 0.         -0.3        -0.33333334 -0.3214286  -0.2777778 ]]
Intercambiando filas 1 y 2
Estado de la matriz tras el intercambio:
[[ 0.25        0.2         0.16666667  0.14285715  0.11111111]
 [ 0.         -0.01666668 -0.02222224 -0.02380954 -0.02314815]
 [ 0.         -0.06666666 -0.08333334 -0.0857143  -0.07936507]
 [ 0.         -0.3        -0.33333334 -0.3214286  -0.2777778 ]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 1:
[[ 2.5000000e-01  2.0000000e-01  1.6666667e-01  1.4285715e-01
   1.1111111e-01]
 [ 0.0000000e+00 -1.6666681e-02 -2.2222236e-02 -2.3809537e-02
  -2.3148149e-02]
 [ 0.0000000e+00  0.0000000e+00  5.5555180e-03  9.5237717e-03
```

```
   1.3227440e-02]
 [ 0.0000000e+00  2.9802322e-08  6.6666603e-02  1.0714275e-01
   1.3888860e-01]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 2:
[[ 2.5000000e-01  2.0000000e-01  1.6666667e-01  1.4285715e-01
   1.1111111e-01]
 [ 0.0000000e+00 -1.6666681e-02 -2.2222236e-02 -2.3809537e-02
  -2.3148149e-02]
 [ 0.0000000e+00  0.0000000e+00  5.5555180e-03  9.5237717e-03
   1.3227440e-02]
 [ 0.0000000e+00  2.9802322e-08  0.0000000e+00 -7.1431771e-03
  -1.9841611e-02]]

Solución del sistema:
[-0.03174083  0.5951854  -2.3808313   2.77770114]
```

d.

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 7$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2$$

$$-2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -5$$

$$3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_5 = 6$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -3$$

```python
D = np.array([
    [2, 1, -1, 1, -3, 7],
    [1, 0, 2, -1, 1, 2],
    [0, -2, -1, 1, -1, -5],
    [3, 1, -4, 0, 5, 6],
    [1, -1, -1, -1, 1, -3],
], dtype='float32')

solucion = eliminacion_gaussiana(D)
print("\nSolución del sistema:")
print(solucion)
```

```
Estado inicial de la matriz:
[[ 2.  1. -1.  1. -3.  7.]
 [ 1.  0.  2. -1.  1.  2.]
 [ 0. -2. -1.  1. -1. -5.]
 [ 3.  1. -4.  0.  5.  6.]
 [ 1. -1. -1. -1.  1. -3.]]
Intercambiando filas 0 y 1
Estado de la matriz tras el intercambio:
[[ 1.  0.  2. -1.  1.  2.]
 [ 2.  1. -1.  1. -3.  7.]
 [ 0. -2. -1.  1. -1. -5.]
 [ 3.  1. -4.  0.  5.  6.]
 [ 1. -1. -1. -1.  1. -3.]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 0:
[[  1.   0.   2.  -1.   1.   2.]
 [  0.   1.  -5.   3.  -5.   3.]
 [  0.  -2.  -1.   1.  -1.  -5.]
 [  0.   1. -10.   3.   2.   0.]
 [  0.  -1.  -3.   0.   0.  -5.]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 1:
[[  1.   0.   2.  -1.   1.   2.]
 [  0.   1.  -5.   3.  -5.   3.]
 [  0.   0. -11.   7. -11.   1.]
 [  0.   0.  -5.   0.   7.  -3.]
 [  0.   0.  -8.   3.  -5.  -2.]]
Intercambiando filas 2 y 3
Estado de la matriz tras el intercambio:
[[  1.   0.   2.  -1.   1.   2.]
 [  0.   1.  -5.   3.  -5.   3.]
 [  0.   0.  -5.   0.   7.  -3.]
 [  0.   0. -11.   7. -11.   1.]
 [  0.   0.  -8.   3.  -5.  -2.]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 2:
[[  1.           0.           2.          -1.           1.           2.       ]
 [  0.           1.          -5.           3.          -5.           3.       ]
 [  0.           0.          -5.           0.           7.          -3.       ]
 [  0.           0.           0.           7.         -26.400002     7.6000004]
 [  0.           0.           0.           3.         -16.2          2.8000002]]
Intercambiando filas 3 y 4
Estado de la matriz tras el intercambio:
[[  1.           0.           2.          -1.           1.           2.       ]
 [  0.           1.          -5.           3.          -5.           3.       ]
 [  0.           0.          -5.           0.           7.          -3.       ]
```

```
 [ 0.         0.         0.         3.       -16.2        2.8000002]
 [ 0.         0.         0.         7.       -26.400002   7.6000004]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 3:
[[ 1.         0.         2.        -1.         1.         2.       ]
 [ 0.         1.        -5.         3.        -5.         3.       ]
 [ 0.         0.        -5.         0.         7.        -3.       ]
 [ 0.         0.         0.         3.       -16.2        2.8000002]
 [ 0.         0.         0.         0.        11.399998   1.0666666]]

Solución del sistema:
[1.88304105 2.80701722 0.73099417 1.43859666 0.09356727]
```

Ejercicio 5

Dado el sistema lineal:

$$x_1 - x_2 + \alpha x_3 = -2$$

$$-x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 = 3$$

$$\alpha x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ -1 & 2 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F1 + F2 \longrightarrow F2$$

$$-\alpha \cdot F1 + F3 \longrightarrow F3$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha + 1 & -\alpha^2 + 1 & 2\alpha + 2 \end{bmatrix}$$

$$-(\alpha + 1) \cdot F2 + F3 \longrightarrow F3$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha^2+1 & \alpha+1 \end{bmatrix}$$

$Si: - ^2 + 1 = 0 $

$$\alpha = -1 \quad \textbf{ó} \quad \alpha = 1$$

$Si: + 1 = 0 $

$$\alpha = -1$$

a. Encientre el valor(es) de α para los que el sistema no tiene soluciones.

Si $\alpha = 1 \Rightarrow rang(A) = 2 \neq rang(A|b) = 3$ lo que hace al sistema **incosistente**.

b. Encuentre el valo(es) de α para los que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Si $\alpha = -1 \Rightarrow rang(A) = 2 = rang(A|b) = 2 \neq n = 3$ lo que hace al sistema **cosistente de infinitas soluciones**.

c. Suponga que existe una única solución para una a determinada, encuentre la solución.

Se cumple cuando $rang(A) = rang(A|b) = n$. En este caso, sucederá para:

$\alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

EJERCICIOS APLICADOS

Ejercicio 6

Suponga que en un sistema biológico existen n especies de animales y m fuentes de alimento. Si x_j representa la población de las j-ésimas especies, para cada $j = 1, \cdots, n$; b_i representa el suministro diario disponible del i-ésimo alimento y a_{ij} representa la cantidad del i-ésimo alimento.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

representa un equilibrio donde existe un suministro diario de alimento para cumplir con precisión con el promedio diario de consumo de cada especie.

a. Si

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = (x_j) = [1000, 500, 350, 400], \quad \textbf{y} \quad b = (b_i) = [3500, 2700, 900].$$

¿Existe suficiente alimento para satisfacer el consumo promedio diario?

Para responder la pregunta, se debe asegurar que el resultado de la multiplicación de las matrices A y x tenga como resultado valores menores o iguales a los de la matriz b. Esto significa que el suministro diario excede o es igual al alimento que se requiere.

```python
import numpy as np
A = np.array([
    [1, 2, 0, 3],
    [1, 0, 2, 2],
    [0, 0, 1, 1]
])
x = np.array([1000, 500, 350, 400])
b = np.array([3500, 2700, 900])

#B = np.dot(A, x)
B = A @ x

print('Ax =', B)
```

```
Ax = [3200 2500  750]
```

A partir del resultado, podemos comparar las matrices. Dadas las matrices $b = [b_{ij}]$ y $B = [B_{ij}]$, se puede asegurar que:

$$b_{ij} \geq B_{ij}, \, \forall i, j$$

Por lo que SÍ existe suficiente alimento para satisfacer el consumo promedio diario.

```
print('b\tB')
for bi, Bi in zip(b, B):
    print(f'{bi}   {Bi}')
```

```
b   B
3500   3200
2700   2500
900   750
```

```
for bi, Bi in zip(b, B):
    print(f"b = {bi}, Ax = {Bi}")
```

```
b = 3500, Ax = 3200
b = 2700, Ax = 2500
b = 900, Ax = 750
```

b. ¿Cuál es el número máximo de animales de cada especie que se podría agregar de forma individual al sistema con el suministro de alimento que cumpla con el consumo?

```
def aumento_maximo_especie(A, b, B):
    filas = A.shape[0]
    columnas = A.shape[1]
    sobrantes = b - B
    maximos = np.zeros((filas, columnas))

    print('Numero máximo de especies a añadir:')
    for j in range(columnas):
        for i in range(filas):
            if A[i, j] != 0:
                maximos[i, j] = sobrantes[i]/A[i, j]
            else:
                maximos[i, j] = 10000
        print(f'- Especie {j+1}: {min(maximos[:, j])}')
```

```
aumento_maximo_especie(A, b, B)
```

```
Numero máximo de especies a añadir:
- Especie 1: 200.0
- Especie 2: 150.0
- Especie 3: 100.0
- Especie 4: 100.0
```

c. Si la especie 1 se extingue, ¿qué cantidad de incremento individual de las especies restantes se podría soportar?

```python
import numpy as np
Ac = np.array([
    [2, 0, 3],
    [0, 2, 2],
    [0, 1, 1]
])
x = np.array([500, 350, 400])
b = np.array([3500, 2700, 900])

#B = np.dot(A, x)
B = Ac @ x

print('Ax =', B)
```

```
Ax = [2200 1500  750]
```

```python
aumento_maximo_especie(Ac, b, B)
```

```
Numero máximo de especies a añadir:
- Especie 1: 650.0
- Especie 2: 150.0
- Especie 3: 150.0
```

d. Si la especie 2 se extingue, ¿qué cantidad de incremento individual de las especies restantes se podría soportar?

```python
import numpy as np
Ad = np.array([
    [0, 3],
    [2, 2],
    [1, 1]
```

```python
])
x = np.array([350, 400])
b = np.array([3500, 2700, 900])

#B = np.dot(A, x)
B = Ad @ x

print('Ax =', B)
```

```
Ax = [1200 1500  750]
```

```python
aumento_maximo_especie(Ad, b, B)
```

```
Numero máximo de especies a añadir:
- Especie 1: 150.0
- Especie 2: 150.0
```

```python
import numpy as np
A = np.array([
    [1, 0, 3],
    [1, 2, 2],
    [0, 1, 1]
])
x = np.array([1000, 350, 400])
b = np.array([3500, 2700, 900])

#B = np.dot(A, x)
B = A @ x

print('Ax =', B)
```

```
Ax = [2200 2500  750]
```

```python
aumento_maximo_especie(A, b, B)
```

```
Numero máximo de especies a añadir:
- Especie 1: 200.0
- Especie 2: 100.0
- Especie 3: 100.0
```

EJERCICIOS TEÓRICOS

Ejercicio 7

Repita el ejercicio 4 con el método Gauss-Jordan.

```
def gauss_jordan(A):
    if not isinstance(A, np.ndarray):
        A = np.array(A)
    assert A.shape[0] == A.shape[1] - 1, "La matriz A debe ser de tamaño n-by-(n+1)."
    n = A.shape[0]

    print("Estado inicial de la matriz:")
    print(A)

    for i in range(0, n):
        # Encontrar el pivote
        p = None
        for pi in range(i, n):
            if A[pi, i] == 0:
                continue

            if p is None:
                p = pi
                continue

            if abs(A[pi, i]) < abs(A[p, i]):
                p = pi

        if p is None:
            raise ValueError("No existe solución única.")

        # Intercambiar filas si es necesario
        if p != i:
            print(f"Intercambiando filas {i} y {p}")
            _aux = A[i, :].copy()
            A[i, :] = A[p, :].copy()
            A[p, :] = _aux
            print(f"Estado de la matriz tras el intercambio:")
            print(A)

        # Normalizar la fila del pivote
```

```
        A[i, :] = A[i, :] / A[i, i]

        # Eliminar todas las entradas en la columna del pivote (hacia arriba y hacia abajo)
        for j in range(n):
            if j != i:
                m = A[j, i]
                A[j, :] = A[j, :] - m * A[i, :]

        print(f"Estado de la matriz tras la eliminación en la columna {i}:")
        print(A)

    solucion = A[:, -1]
    return solucion
```

a.

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 9$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{5}x_3 = 8$$

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$

```
A = np.array([
    [1/4, 1/5, 1/6, 9],
    [1/3, 1/4, 1/5, 8],
    [1/2,   1,   2, 8],
], dtype='float32')

solucion = gauss_jordan(A)
print("\nSolución del sistema:")
print(solucion)
```

```
Estado inicial de la matriz:
[[0.25       0.2        0.16666667 9.        ]
 [0.33333334 0.25       0.2        8.        ]
 [0.5        1.         2.         8.        ]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 0:
[[ 1.0000000e+00  8.0000001e-01  6.6666669e-01  3.6000000e+01]
```

```
 [ 0.0000000e+00 -1.6666681e-02 -2.2222236e-02 -4.0000000e+00]
 [ 0.0000000e+00  6.0000002e-01  1.6666666e+00 -1.0000000e+01]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 1:
[[   1.           0.          -0.3999998 -155.99985  ]
 [  -0.           1.           1.333333   239.9998   ]
 [   0.           0.           0.8666668 -153.9999   ]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 2:
[[   1.         0.         0.      -227.07668]
 [  -0.         1.         0.       476.9226 ]
 [   0.         0.         1.      -177.69215]]

Solución del sistema:
[-227.07668  476.9226  -177.69215]
```

b.

$$3.333x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 = 15913$$

$$2.222x_1 + 16.71x_2 + 9.612x_3 = 28.544$$

$$1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 = 8.4254$$

```python
B = np.array([
    [3.333, 15920, 10.333, 15913],
    [2.222, 16.71, 9.612, 28.544],
    [1.5611, 5.1791, 1.6852, 8.4254],
], dtype='float32')

solucion = gauss_jordan(B)
print("\nSolución del sistema:")
print(solucion)
```

```
Estado inicial de la matriz:
[[3.3330e+00 1.5920e+04 1.0333e+01 1.5913e+04]
 [2.2220e+00 1.6710e+01 9.6120e+00 2.8544e+01]
 [1.5611e+00 5.1791e+00 1.6852e+00 8.4254e+00]]
Intercambiando filas 0 y 2
Estado de la matriz tras el intercambio:
[[1.5611e+00 5.1791e+00 1.6852e+00 8.4254e+00]
```

```
 [2.2220e+00 1.6710e+01 9.6120e+00 2.8544e+01]
 [3.3330e+00 1.5920e+04 1.0333e+01 1.5913e+04]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 0:
[[1.0000000e+00 3.3175967e+00 1.0794952e+00 5.3970919e+00]
 [0.0000000e+00 9.3382998e+00 7.2133622e+00 1.6551662e+01]
 [0.0000000e+00 1.5908942e+04 6.7350426e+00 1.5895012e+04]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 1:
[[ 1.0000000e+00  0.0000000e+00 -1.4831798e+00 -4.8318005e-01]
 [ 0.0000000e+00  1.0000000e+00  7.7244920e-01  1.7724493e+00]
 [ 0.0000000e+00  0.0000000e+00 -1.2282114e+04 -1.2302781e+04]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 2:
[[ 1.         0.         0.         1.0024954]
 [ 0.         1.         0.         0.9987003]
 [-0.        -0.         1.         1.0016826]]

Solución del sistema:
[1.0024954 0.9987003 1.0016826]
```

c.

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{6}x_4 = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{7}x_4 = \frac{1}{9}$$

```
C = np.array([
    [1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/6],
    [1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/7],
    [1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/8],
    [1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/9],
], dtype='float32')

solucion = gauss_jordan(C)
print("\nSolución del sistema:")
print(solucion)
```

```
Estado inicial de la matriz:
[[1.         0.5        0.33333334 0.25       0.16666667]
 [0.5        0.33333334 0.25       0.2        0.14285715]
 [0.33333334 0.25       0.2        0.16666667 0.125     ]
 [0.25       0.2        0.16666667 0.14285715 0.11111111]]
Intercambiando filas 0 y 3
Estado de la matriz tras el intercambio:
[[0.25       0.2        0.16666667 0.14285715 0.11111111]
 [0.5        0.33333334 0.25       0.2        0.14285715]
 [0.33333334 0.25       0.2        0.16666667 0.125     ]
 [1.         0.5        0.33333334 0.25       0.16666667]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 0:
[[ 1.          0.8         0.6666667   0.5714286   0.44444445]
 [ 0.         -0.06666666 -0.08333334 -0.0857143  -0.07936507]
 [ 0.         -0.01666668 -0.02222224 -0.02380954 -0.02314815]
 [ 0.         -0.3        -0.33333334 -0.3214286  -0.2777778 ]]
Intercambiando filas 1 y 2
Estado de la matriz tras el intercambio:
[[ 1.          0.8         0.6666667   0.5714286   0.44444445]
 [ 0.         -0.01666668 -0.02222224 -0.02380954 -0.02314815]
 [ 0.         -0.06666666 -0.08333334 -0.0857143  -0.07936507]
 [ 0.         -0.3        -0.33333334 -0.3214286  -0.2777778 ]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 1:
[[ 1.          0.         -0.3999998  -0.57142836 -0.6666658 ]
 [-0.          1.          1.333333    1.4285711   1.3888878 ]
 [ 0.          0.          0.00555552  0.00952377  0.01322744]
 [ 0.          0.          0.06666657  0.10714275  0.13888857]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 2:
[[ 1.          0.          0.          0.1142875   0.28571594]
 [-0.          1.          0.         -0.857149   -1.7857188 ]
 [ 0.          0.          1.          1.7142905   2.3809555 ]
 [ 0.          0.          0.         -0.00714312 -0.01984157]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 3:
[[ 1.          0.          0.          0.         -0.03174219]
 [-0.          1.          0.          0.          0.5951971 ]
 [ 0.          0.          1.          0.         -2.3808553 ]
 [-0.         -0.         -0.          1.          2.7777152 ]]

Solución del sistema:
[-0.03174219  0.5951971  -2.3808553   2.7777152 ]
```

d.

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 7$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2$$

$$-2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -5$$

$$3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_5 = 6$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -3$$

```python
D = np.array([
    [2, 1, -1, 1, -3, 7],
    [1, 0, 2, -1, 1, 2],
    [0, -2, -1, 1, -1, -5],
    [3, 1, -4, 0, 5, 6],
    [1, -1, -1, -1, 1, -3],
], dtype='float32')

solucion = gauss_jordan(D)
print("\nSolución del sistema:")
print(solucion)
```

```
Estado inicial de la matriz:
[[ 2.  1. -1.  1. -3.  7.]
 [ 1.  0.  2. -1.  1.  2.]
 [ 0. -2. -1.  1. -1. -5.]
 [ 3.  1. -4.  0.  5.  6.]
 [ 1. -1. -1. -1.  1. -3.]]
Intercambiando filas 0 y 1
Estado de la matriz tras el intercambio:
[[ 1.  0.  2. -1.  1.  2.]
 [ 2.  1. -1.  1. -3.  7.]
 [ 0. -2. -1.  1. -1. -5.]
 [ 3.  1. -4.  0.  5.  6.]
 [ 1. -1. -1. -1.  1. -3.]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 0:
[[  1.    0.    2.   -1.    1.    2.]
```

```
 [  0.   1.  -5.   3.  -5.   3.]
 [  0.  -2.  -1.   1.  -1.  -5.]
 [  0.   1. -10.   3.   2.   0.]
 [  0.  -1.  -3.   0.   0.  -5.]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 1:
[[  1.   0.   2.  -1.   1.   2.]
 [  0.   1.  -5.   3.  -5.   3.]
 [  0.   0. -11.   7. -11.   1.]
 [  0.   0.  -5.   0.   7.  -3.]
 [  0.   0.  -8.   3.  -5.  -2.]]
Intercambiando filas 2 y 3
Estado de la matriz tras el intercambio:
[[  1.   0.   2.  -1.   1.   2.]
 [  0.   1.  -5.   3.  -5.   3.]
 [  0.   0.  -5.   0.   7.  -3.]
 [  0.   0. -11.   7. -11.   1.]
 [  0.   0.  -8.   3.  -5.  -2.]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 2:
[[  1.           0.           0.          -1.           3.8
    0.79999995]
 [  0.           1.           0.           3.         -12.
    6.        ]
 [ -0.          -0.           1.          -0.          -1.4
    0.6       ]
 [  0.           0.           0.           7.         -26.4
    7.6000004 ]
 [  0.           0.           0.           3.         -16.2
    2.8000002 ]]
Intercambiando filas 3 y 4
Estado de la matriz tras el intercambio:
[[  1.           0.           0.          -1.           3.8
    0.79999995]
 [  0.           1.           0.           3.         -12.
    6.        ]
 [ -0.          -0.           1.          -0.          -1.4
    0.6       ]
 [  0.           0.           0.           3.         -16.2
    2.8000002 ]
 [  0.           0.           0.           7.         -26.4
    7.6000004 ]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 3:
[[ 1.         0.         0.         0.        -1.6000001  1.7333333]
 [ 0.         1.         0.         0.         4.200001   3.1999998]
```

```
 [ 0.         0.         1.         0.        -1.4        0.6       ]
 [ 0.         0.         0.         1.        -5.4        0.9333334]
 [ 0.         0.         0.         0.        11.4        1.0666666]]
Estado de la matriz tras la eliminación en la columna 4:
[[1.         0.         0.         0.         0.         1.8830409 ]
 [0.         1.         0.         0.         0.         2.8070173 ]
 [0.         0.         1.         0.         0.         0.73099416]
 [0.         0.         0.         1.         0.         1.4385965 ]
 [0.         0.         0.         0.         1.         0.09356725]]

Solución del sistema:
[1.8830409  2.8070173  0.73099416 1.4385965  0.09356725]
```