



*Casos de Estudio Aplicados al Sector
Seguros y Financiero en Colombia*

Maestría de Analítica y Gerencia de Datos





Matemática de vida

El objetivo de esta clase es introducir a los estudiantes en los conceptos fundamentales de matemática financiera, con énfasis en el valor del dinero en el tiempo, fórmulas de capitalización, descuento, amortización y cálculo de cuotas de préstamos.



Valor del Dinero en el Tiempo (VDT)

••••

Concepto: El dinero disponible hoy tiene más valor que la misma cantidad en el futuro debido a su potencial de ganancia (intereses).

Fórmula para Valor Futuro y Valor Presente:

$$VF = VP(1 + i)^n$$

$$VP = \frac{VF}{(1 + i)^n}$$

Donde:

- VF: Valor Futuro
- VP: Valor presente
- i: tasa de interes
- n: numero de periodos

Tenga en cuenta que: La tasa de interés debe ser nominal y debe estar en la misma periodicidad que n.



Capitalización

Interés Simple:

$$VF = VP(1 + i)$$

Se usa cuando el interés se calcula solo sobre el capital inicial.

Interés Compuesto:

$$VF = VP(1 + i)^n$$

donde:

n: periodo de tiempo



La **capitalización** es el proceso mediante el cual el **dinero aumenta de valor** con el **tiempo** gracias a los **intereses**.

La capitalización **simple** aplica interés solo sobre el capital inicial, mientras que la **compuesta** también lo hace sobre los intereses acumulados.

El **crecimiento de la inversión** depende del **tipo de interés** y del **método de capitalización**.

Conversión de Tasas de Interés

Tasa Nominal (TN):

Se refiere a las tasas de interes que se capitalizan más de una vez al año.

Ejemplo: Una tasa nominal anual del 12% con capitalización mensual implica que se capitaliza cada mes.

Tasa Efectiva (TE):

Es la tasa que refleja el rendimiento real o el costo total de un préstamo/inversión en un periodo determinado, después de considerar la capitalización. Esta tasa se usa cuando la capitalización y el periodo coinciden.

Ejemplo: tasa anual con capitalización anual

Fórmulas de conversión

Conversión de Tasa Nominal a Efectiva:

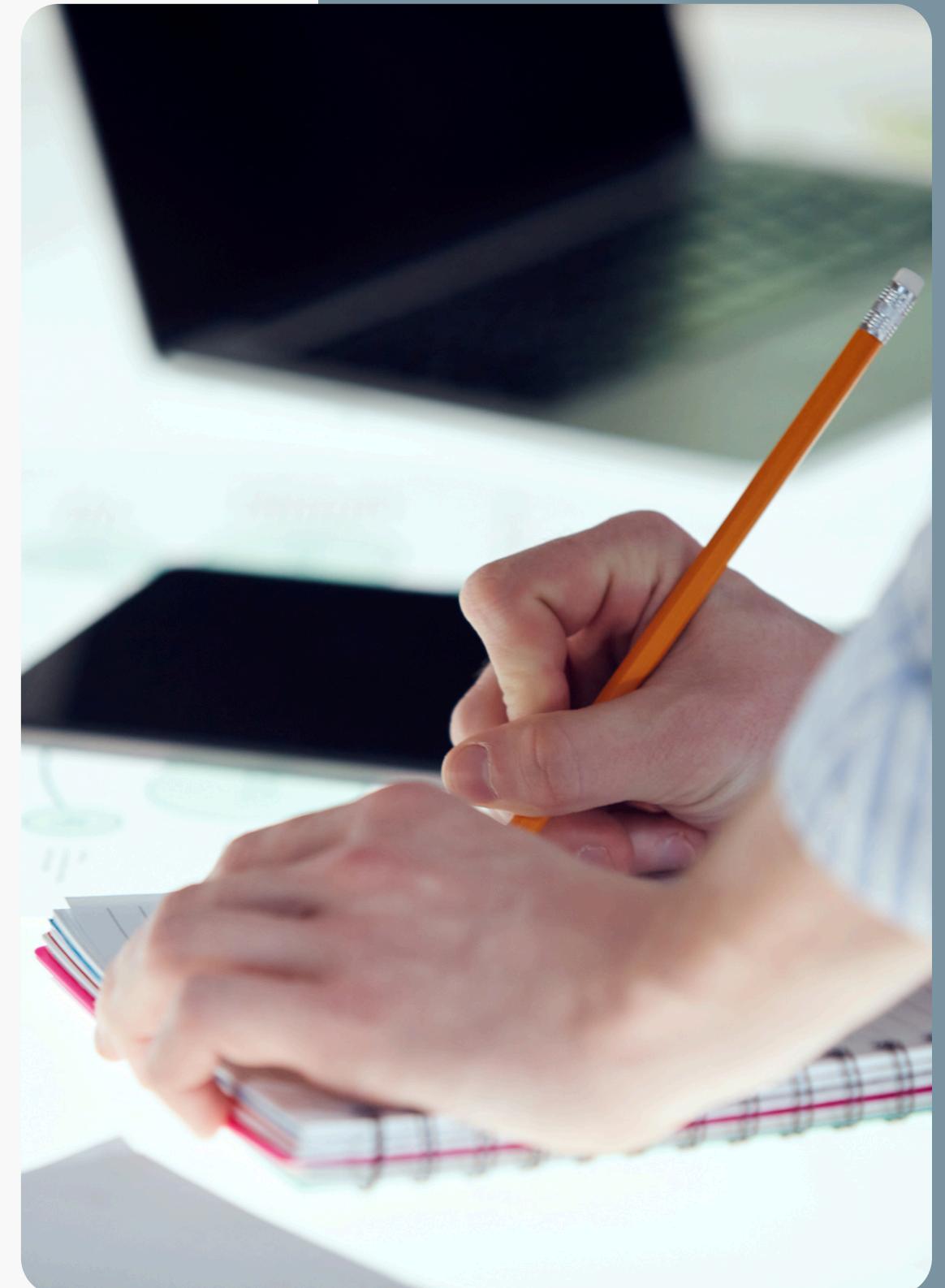
$$TE = \left(1 + \frac{TNA}{m}\right)^m - 1$$

Donde:

- TN A: Tasa nominal anual
- m: numero de periodos de capitalizacion en un año

Conversión de Tasa Efectiva a Nominal:

$$TNA = m \cdot \left((1 + TE)^{\frac{1}{m}} - 1\right)$$



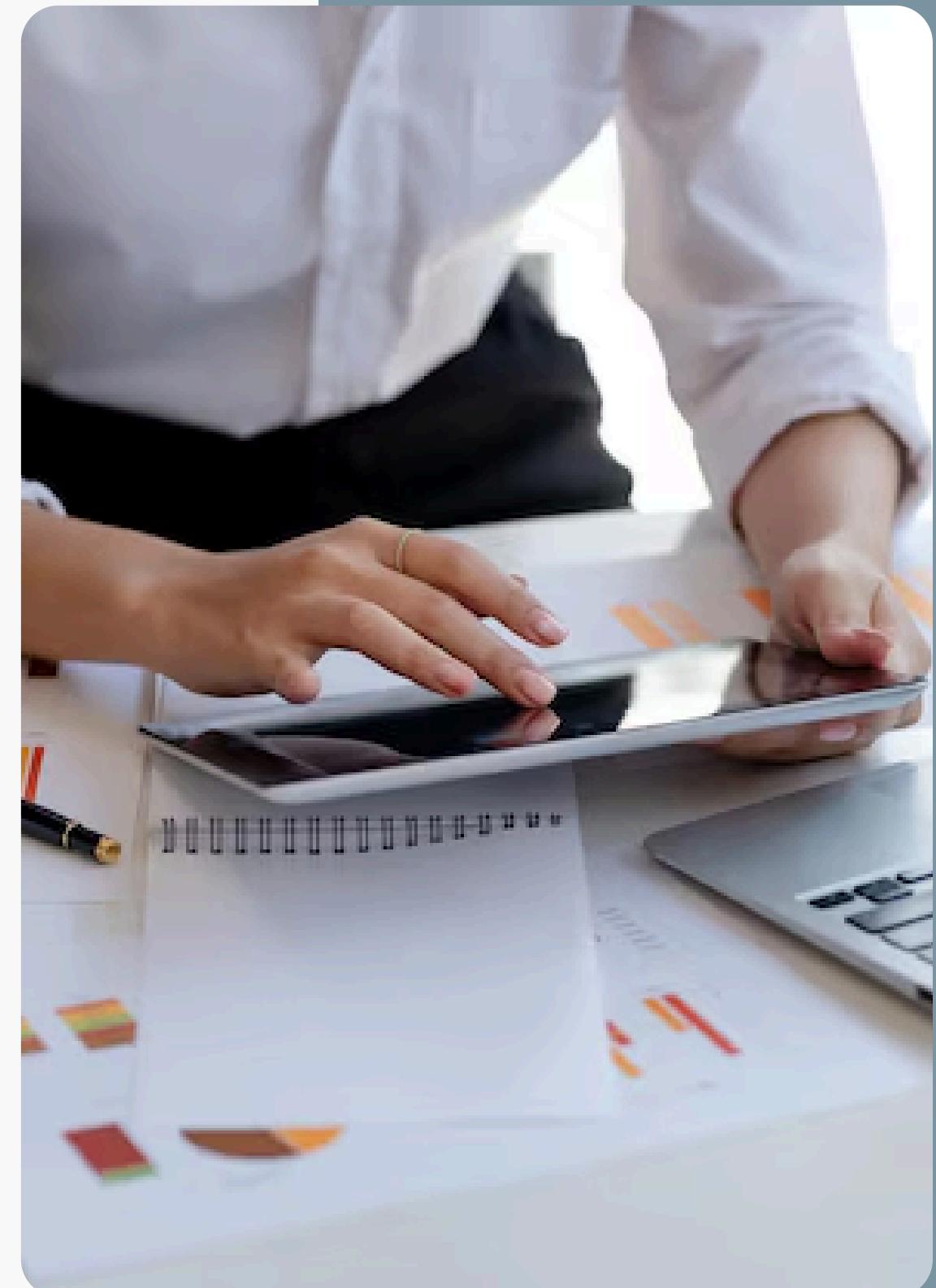
Fórmulas de conversión

Conversión entre tasas efectivas:

$$TE_{nuevo} = (1 + TE_{antiguo})^{\frac{TE_{antiguo}}{TE_{nuevo}}} - 1$$

Donde:

- TE nuevo: La tasa efectiva el periodo nuevo
- TE antiguo: La tasa efectiva conocida (anual, mensual, etc...)
- t antiguo: La duracion del periodo original en el que esta expresada la tasa conocida (por ejemplo, 12 si es mensual, 1 si es anual)
- t nuevo: La duracion del nuevo periodo en el que se quiere convertir la tasa (por ejemplo, 12 para mensual, 4 para trimestral)



Ejercicios



- Convertir una tasa nominal anual del 34% con capitalización mensual, a su efectiva anual equivalente.
- Calcular la tasa efectiva anual partiendo de una tasa del 36% nominal con capitalización trimestral.
- Calcular la tasa nominal mensual a partir de una tasa efectiva anual del 41.16%.
- Calcular la tasa efectiva anual, si la tasa efectiva semestral es del 12%
- Calcular la tasa semestral, si la tasa efectiva anual es del 12%.

Actividad práctica



Calcular el valor futuro de un monto invertido con interés simple y compuesto para comparar resultados

Cuota de un préstamo

Fórmula para calcular la cuota de un préstamo:

$$Cuota = \frac{P * i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Donde:

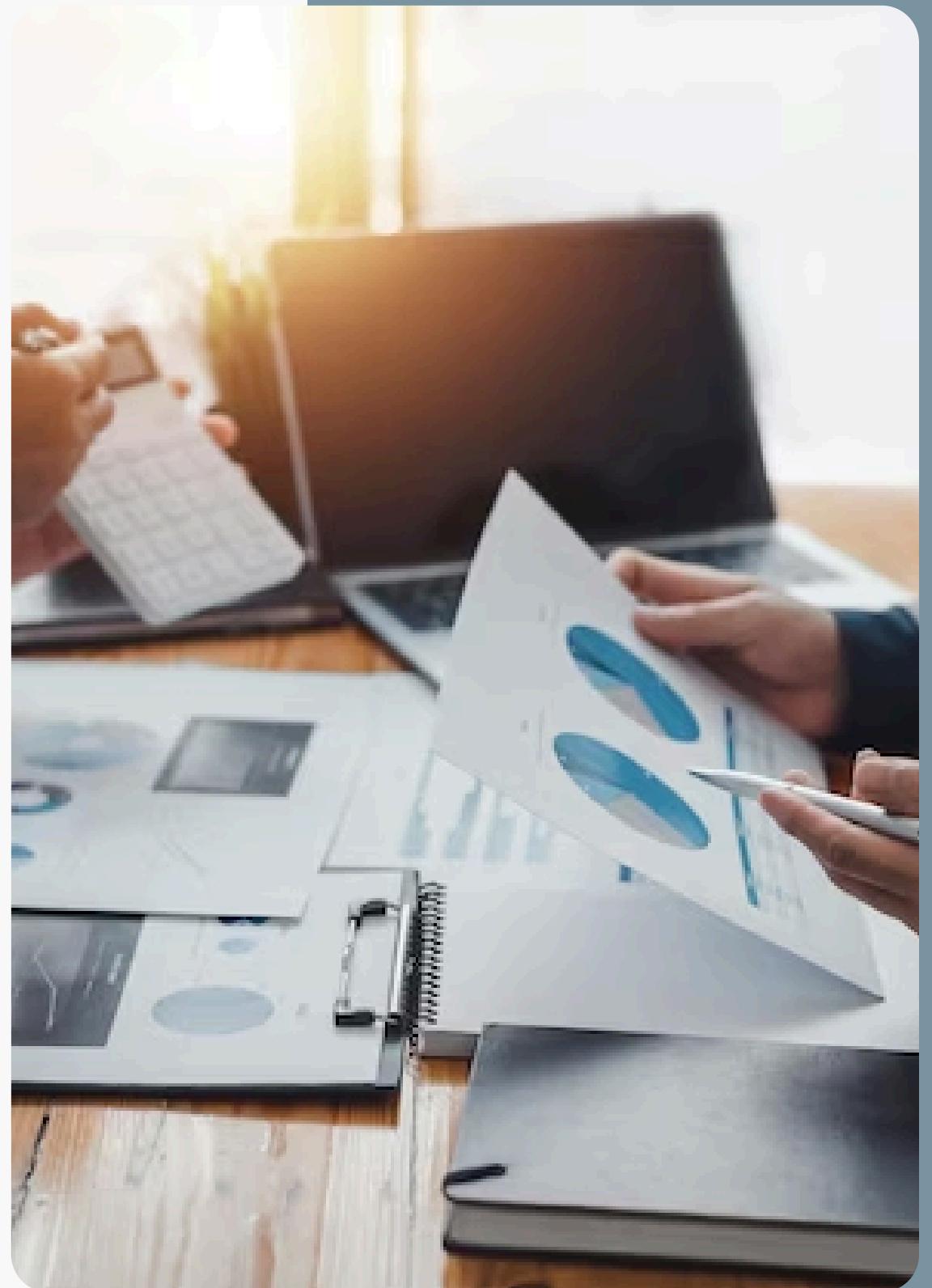
- P: es el monto del préstamo
- i: es la tasa de interés mensual pactada
- n: son los meses de plazo pactado



Ejercicio Préstamo hipotecario

Se desea financiar un inmueble que tiene un valor comercial de 300.000.000 de pesos. Se sabe que para un crédito hipotecario el valor máximo de préstamo es del 70% del valor total del inmueble y que la tasa de interés es del 13% efectivo anual. Calcule el valor de la cuota de pago del crédito teniendo en cuenta el monto máximo de financiación y que este se financió con un plazo de 20 años.

Con base en las funciones anteriormente desarrolladas en Python, realice la tabla de amortización en Python.



Matemática actuarial básica

La **biometría** se refiere al estudio de los **eventos biológicos** relacionados con **la vida y la muerte** de las personas, como la mortalidad, la supervivencia y la morbilidad. Se usa para analizar y modelar las probabilidades de eventos biológicos que impactan en contratos de seguros de vida, pensiones, y productos relacionados con la salud.

- **Tasas de mortalidad:** La probabilidad de que una persona fallezca a una cierta edad.
- **Supervivencia:** La probabilidad de que una persona viva hasta una cierta edad o más.
- **Morbilidad:** La probabilidad de que una persona sufra de enfermedades o discapacidades a lo largo de su vida.

¿Qué es una tabla de mortalidad?

Una **tabla de mortalidad** es una herramienta estadística utilizada para **describir las probabilidades de muerte y supervivencia** de una población a **diferentes edades**.

Componentes típicos de una tabla de mortalidad:

- Edad (x): Indica la edad específica de la persona o grupo al que se refiere la tabla.
- Número de personas vivas (l_x): Representa el número de personas que sobreviven hasta la edad x de una cohorte inicial.
- Probabilidad de fallecimiento (q_x): Indica la probabilidad de que una persona de edad x fallezca antes de alcanzar la edad $x+1$
- Número de fallecimientos (d_x): Indica el número de personas que fallecen entre las edades x y $x+1$, calculado como $d_x = l_x \times q_x$ o $d_x = l_x - l_{x+1}$.

¿Qué es una tabla de mortalidad?

Componentes típicos de una tabla de mortalidad:

- Tasa de supervivencia (p_x): Indica la probabilidad de que una persona de edad x sobreviva hasta la edad $x+1$, calculada como $p_x = 1 - q_x p_{x+1} = 1 - q_x$.
- Expectativa de vida (e_x): Indica la cantidad de años que, en promedio, se espera que una persona de edad x viva.

Edad (x)	Personas vivas (l_x)	Probabilidad de muerte (q_x)	Personas que fallecen (d_x)	Probabilidad de supervivencia (p_x)
60	100,000	0.010	1,000	0.990
61	99,000	0.012	1,188	0.988
62	97,812	0.013	1,271	0.987
63	96,541	0.014	1,351	0.986
64	95,190	0.015	1,427	0.985

Función de Supervivencia $S(x)$

Fórmula de supervivencia:

La Función de Supervivencia se denota como $S(x)$ y representa la probabilidad de que una persona sobreviva mas alla de la edad x . Se define asi:

$$S(x) = 1 - F(x)$$

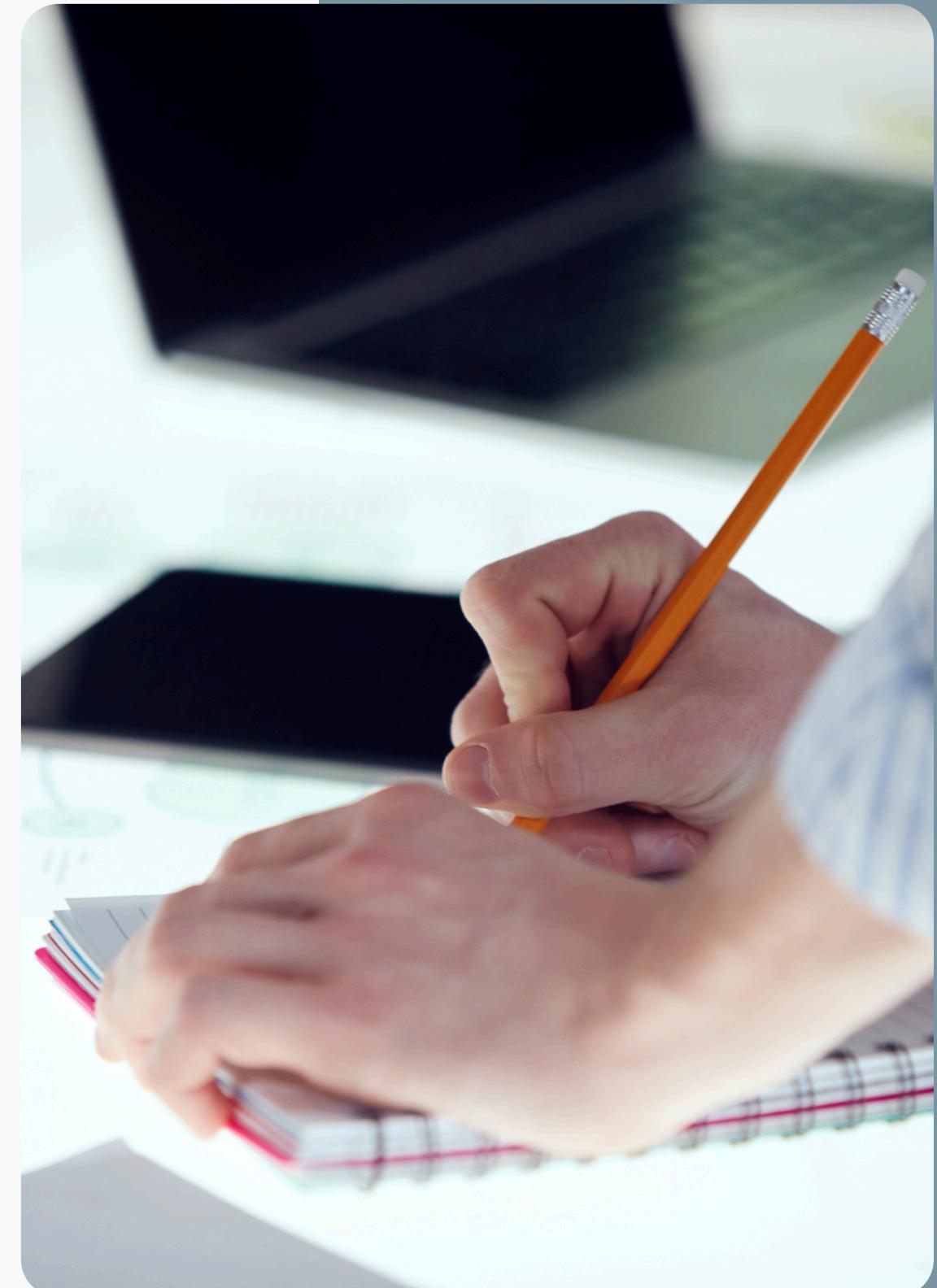
Donde:

- $S(x)$ es la probabilidad de supervivencia a la edad x
- $F(x)$ es la probabilidad de fallecimiento antes de la edad x

Ejemplo:

Si la probabilidad de que una persona muera antes de los 65 años es del 20%, es decir, $F(65) = 0.2$ entonces la probabilidad de que sobreviva hasta los 65 años es de $S(65) = 1 - 0.2 = 0.8$.

Esto significa que el 80% de las personas de esa edad seguiran vivas a los 65 años



Probabilidad de supervivencia

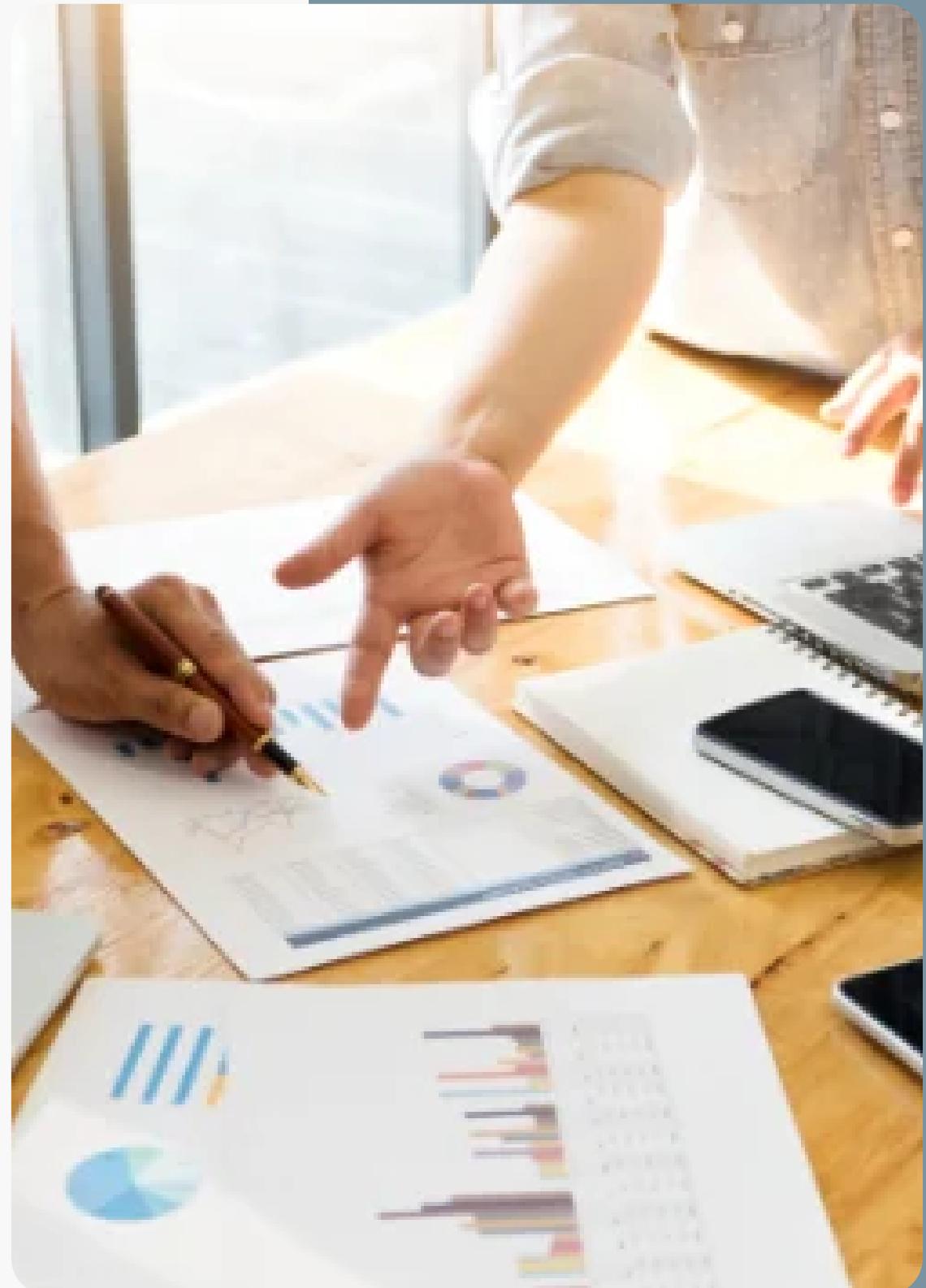
Probabilidad de supervivencia

La probabilidad de supervivencia p_x mide la probabilidad de que una persona de edad x sobreviva un año más, es decir, hasta la edad $x + 1$

p_x = Probabilidad de que una persona de edad x esté viva al llegar a la edad $x + 1$.

Ejemplo:

Si $p_{60} = 0.98$ significa que hay un 98% de probabilidad de que una persona de 60 años viva hasta los 61 años.



Probabilidad de fallecimiento

Probabilidad de fallecimiento

La probabilidad de fallecimiento q_x mide la probabilidad de que una persona de edad x fallezca antes de alcanzar la edad $x + 1$

q_x = Probabilidad de que una persona de edad x fallezca antes de llegar a la edad $x + 1$.

Ejemplo:

Si $q_{60} = 0.02$ significa que hay un 2% de probabilidad de que una persona de 60 años fallezca antes cumplir 61 años.

- Si queremos calcular la probabilidad de que una persona de 60 años viva hasta los 62 años, $S(62)$, usamos la relación siguiente:

$$S(62) = S(60) \cdot p_{60} \cdot p_{61}$$



Ejercicios de práctica



Ejercicio 1:

En una tabla de mortalidad simplificada, se da la siguiente información para una persona de 50 años:

- $q_{50} = 0.015$ (es decir, hay una probabilidad del 1.5% de que la persona de 50 años fallezca antes de cumplir 51)

Preguntas:

- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de 50 años sobreviva hasta los 51 años?
- ¿Cuál es la probabilidad de que fallezca antes de los 51 años?

Ejercicios de práctica



Ejercicio 2: Probabilidades de varios

Sabemos que, para una persona de 65 años, las probabilidades son las siguientes:

- $p_{65} = 0.96$ (es decir, hay una probabilidad del 96% de que la persona de 65 años sobreviva hasta los 66)

Preguntas:

- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de 65 años fallezca antes de los 66 años?
- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de 65 años sobreviva hasta los 67 años?

Ejercicios de práctica



Ejercicio 3: Uso de tablas de mortalidad

Una tabla de mortalidad simplificada proporciona los siguientes valores:

Edad (x)	p_x	q_x
70	0.95	0.05
71	0.92	0.08
72	0.90	0.10

Preguntas:

- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de 70 años sobreviva hasta los 72 años?
- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de 70 años fallezca antes de cumplir los 72 años?

Ejercicios de práctica



Ejercicio 4: Relación entre p_x y q_x

Suponga que, para una persona de 60 años, la probabilidad de supervivencia hasta los 61 años es $p_{60} = 0.97$

Preguntas:

- Calcule la probabilidad de fallecimiento antes de cumplir 61 años, es decir, q_{60}
- Si sabemos que la probabilidad de fallecimiento entre los 61 y 62 años es $q_{61} = 0.035$ ¿Cuál es la probabilidad de que la persona sobreviva hasta los 62 años?

Ejercicios de práctica



Ejercicio 5: Interpretacion de resultados

Un actuario analiza los siguientes datos para una persona de 55 años:

$$q_{55} = 0.02, p_{55} = 0.98$$

$$q_{56} = 0.025, p_{56} = 0.975$$

Preguntas:

- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de 55 años sobreviva hasta los 57 años?
- ¿Cuál es la probabilidad de que fallezca antes de cumplir los 75 años?



Matemática de pensiones

El objetivo de esta clase es introducir a los estudiantes en los conceptos fundamentales de la matemática de pensiones y entender el funcionamiento de las rentas vitalicias, los ingresos mínimos requeridos y entender los riesgos asociados a este.



Sistema de Pensiones el Colombia



El 16 de Julio de 2024 se aprobó la ultima reforma al sistema pensional en Colombia por medio de la Ley 2381 de 2024. Los puntos mas importantes de la reforma son los que siguen a continuación:

Integración

Colpensiones (entidad pública) y las administradoras de pensiones del régimen de ahorro individual (entidades privadas) van a trabajar juntas

Descuento de pensión

Se deberán cotizar los primeros 2.3 SMLV en Colpensiones y el restante en una administradora de pensiones seleccionada por el usuario



Liquidación

Si eres acogido por el nuevo sistema Colpensiones será la entidad que paga tu pensión

Requisitos

Los requisitos para obtener la pensión se mantienen en 1.300 semanas cotizadas y 57 años (mujeres) o 62 años (hombres)

Proyección

Se espera una disminución gradual de las semanas requeridas para la pensión de las mujeres hasta llegar a 1.000 semanas en 2036



Clasificación segun edad y semanas cotizadas

Régimen de Transición:

Personas que NO les aplica la nueva ley.

Si al 1 de enero de 2025 tiene:

- Mujeres: ≥ 750 semanas cotizadas
- Hombres: ≥ 900 semanas cotizadas

Oportunidad de Traslado:

Estas personas pueden elegir si quedarse en su Administradora de pensiones actual o si desea cambiarse a Colpensiones.

Si al 16 de Julio de 2024 tenía:

- Mujeres: ≥ 750 semanas cotizadas y ≥ 47 años
- Hombres: ≥ 900 semanas cotizadas y ≥ 52 años

Nueva Ley:

Personas que les aplica la nueva ley a partir del 15 de Julio de 2025.

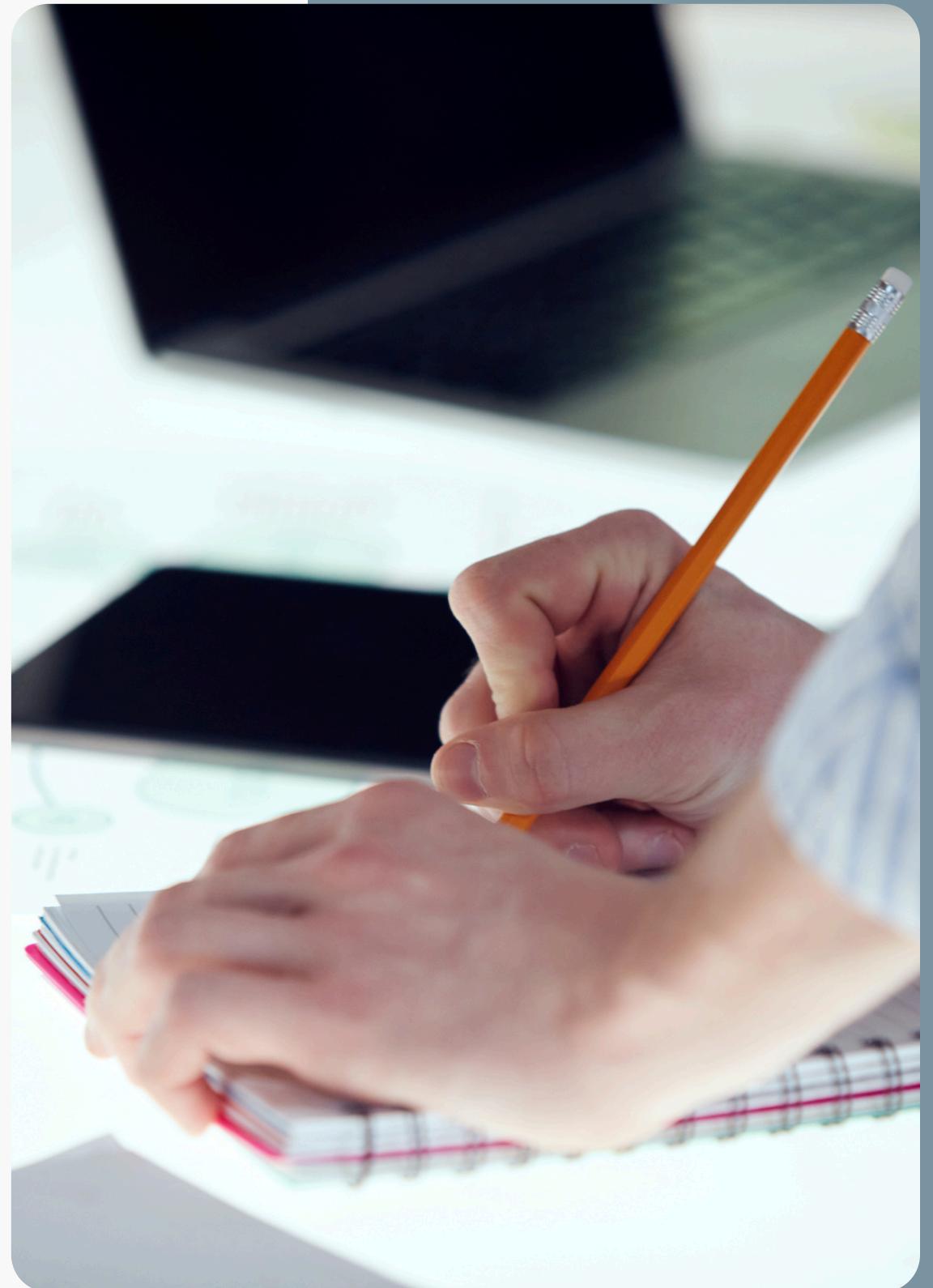
Si al 1 de enero de 2025 tiene:

- Mujeres: < 750 semanas cotizadas
- Hombres: < 900 semanas cotizadas

Probabilidad de pensión

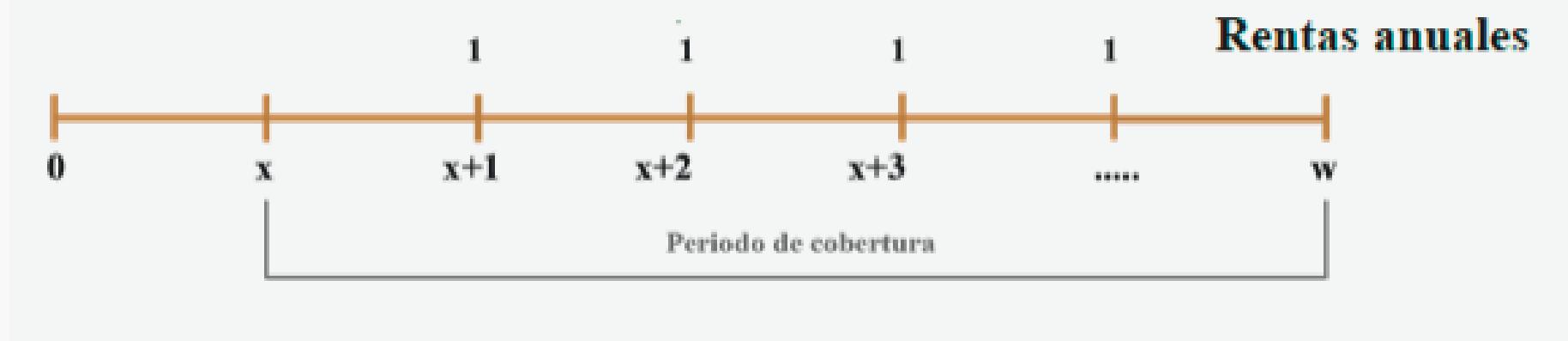
La probabilidad de obtener una renta vitalicia que garantice un ingreso durante la etapa de vejez es un tema clave de la seguridad social en Colombia y todo el mundo

- Si una persona cuenta con el ahorro suficiente para pensionarse, quiere decir que cuenta con la **reserva actuarial** necesaria para cubrir todos los pagos de su renta vitalicia.
- La reserva actuarial se calcula con la **suma de los valores presentes esperados de los pagos posibles**.
- En el cálculo de la reserva actuarial intervienen varios factores tales como: la inflación, la edad, el monto del pago, la tasa de interés y la probabilidad de vivir de cada individuo



Rentas vitalicias

Es el contrato por el cual la aseguradora a cambio de **recibir los recursos acumulados** en la cuenta individual se obliga a pagar periódicamente una **pensión durante la vida del pensionado.**



Ejercicio práctico



Suponga que un hombre de 30 años debe aportar el 16% (12% lo asume el empleador y el 4% la persona) de su salario de \$ 7.000.000 al Sistema General de Pensiones, para obtener una renta vitalicia mensual dentro de 32 años. A la fecha esta persona no posee un ahorro.

- Asumiendo una tasa de interés real anual es del 4%. Calcule el ahorro total del hombre cuando cumpla los 62 años.
- Calcule la renta vitalicia luego de la jubilacion a partir del ahorro.



Riesgo de longevidad

El objetivo de esta clase es introducir a los estudiantes en el análisis que conlleva el riesgo de longevidad a las entidades administradoras de pensiones, aseguradoras y en general a los todos Estados, entendiendo esto como una problemática global importante que afecta directamente la economía de cada país.



Riesgo de longevidad

• • • •

El riesgo de longevidad, es el riesgo asociado a que el **valor actual actuarial** de las prestaciones a favor de una persona sea **inferior** al valor actual **necesario** para pagar sus prestaciones.

- ¿Cuánto aumentará la esperanza de vida del ser humano en el futuro?
- ¿Cuánto tiempo estará recibiendo una persona jubilada una pensión?

En los últimos 60 años la longevidad ha aumentado en todos los países del mundo

• • • •

Riesgo de longevidad



En los contratos tradicionales, el **asegurador corre el riesgo** de que las proyecciones de la mortalidad puedan **resultar incorrectas** y de que los asegurados terminen viviendo más de lo esperado.

Hoy en día existen diversos instrumentos para gestionar los riesgos de longevidad como:

- Bonos de longevidad
- Bonos de mortalidad
- Swaps de longevidad
- Contratos q-forward

El riesgo se puede diversificar utilizando mecanismos de agrupación guiados por la **Ley de los grandes números**.

Desde 1990 varios países de la OCDE han cambiado sus sistemas de pensiones para **asegurar la viabilidad a largo plazo**.



Esperanza de vida en Colombia

ESPERANZA DE VIDA AL NACER POR SEXO. COLOMBIA. 1985-2020.

	1985-1990	1990-1995	1995-2000	2000-2005	2005-2010	2010-2015	2015-2020
TOTAL	67,99	69,25	70,90	72,56	74,00	75,22	76,15
MUJERES	71,52	73,37	74,95	76,31	77,51	78,54	79,39
HOMBRES	64,65	65,34	67,07	69,00	70,67	72,07	73,08

Fuente: DANE- Estimaciones conciliación censal 1985-2005 y Proyecciones 2005-2020

PROBABILIDADES DE MORIR POR SEXO Y EDAD. COLOMBIA. 2010-2015.

Edades	2010-2015	
	Hombres	Mujeres
0	0,021	0,013
1-4	0,004	0,004
5 a 9	0,002	0,001
10 a 14	0,002	0,001
15 a 19	0,007	0,002
20 a 24	0,012	0,003
25 a 29	0,012	0,003
30 a 34	0,012	0,004
35 a 39	0,013	0,005
40 a 44	0,015	0,008
45 a 49	0,020	0,012
50 a 54	0,030	0,018
55 a 59	0,045	0,027
60 a 64	0,070	0,043
65 a 69	0,111	0,069
70 a 74	0,170	0,113
75 a 79	0,264	0,182
80 y más	1,000	1,000

Fuente: DANE- Estimaciones conciliación censal 1985-2005 y Proyecciones 2005-2020

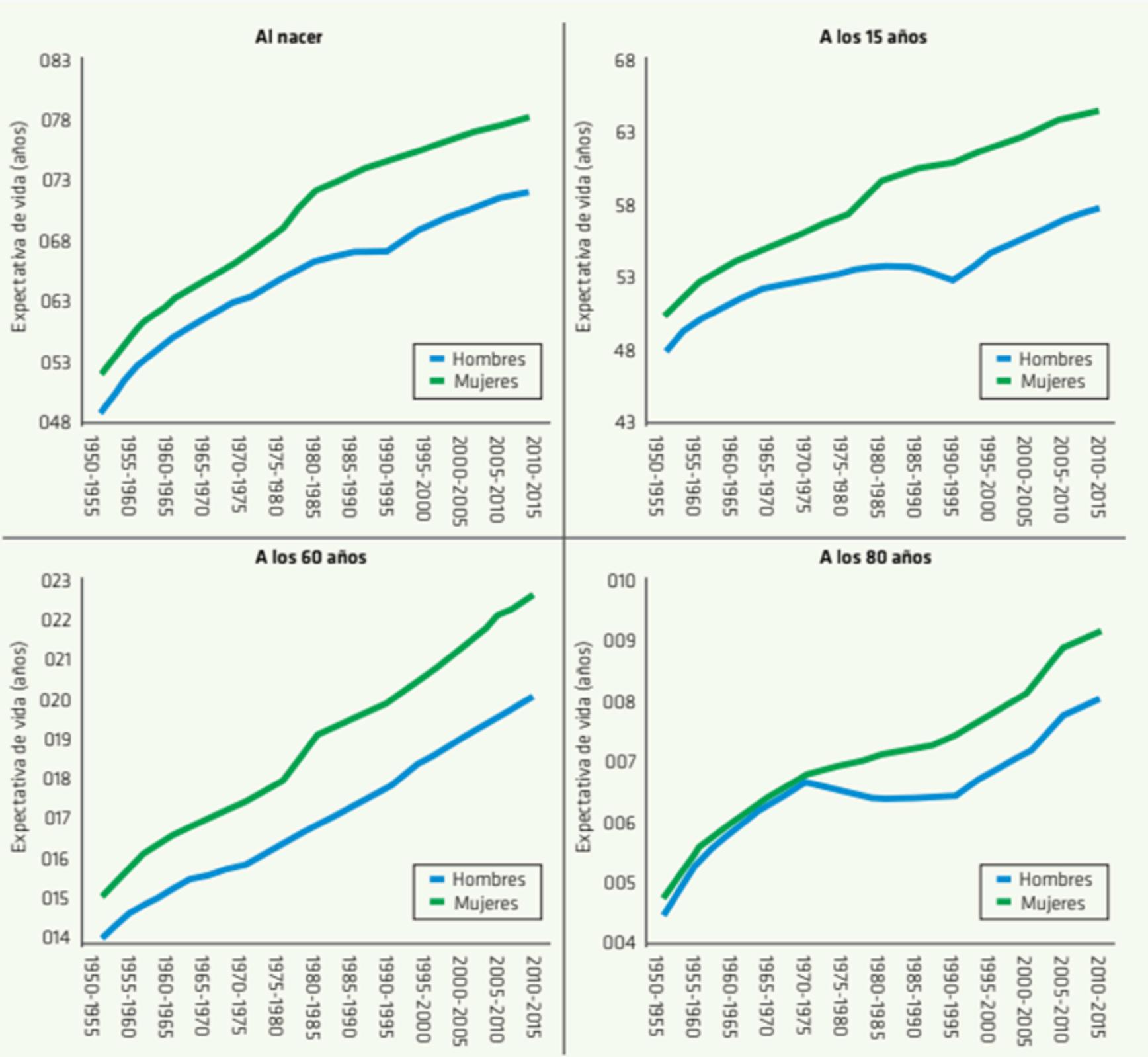
ÍNDICE DE ENVEJECIMIENTO. COLOMBIA. 1951-2020.

Censos	Población Total	0-14	15-59	60 y más	Índice de envejecimiento %
1951	11.228.509	4.778.255	5.874.664	575.590	12,05
1964	17.484.508	8.155.529	8.464.751	864.228	10,60
1973	19.735.286	8.708.624	10.028.115	998.547	11,47
1985	27.837.932	10.041.037	16.127.531	1.669.364	16,63
1993	33.109.840	11.412.172	19.403.026	2.294.642	20,11
2005	42.888.592	13.300.888	25.772.251	3.815.453	28,69
2010	45.508.205	13.010.925	28.023.833	4.473.447	34,38
2015	48.202.617	12.859.365	30.010.608	5.332.644	41,47
2020	50.912.429	12.928.525	31.548.005	6.435.899	49,78

Índice de envejecimiento = (Población de 60 años o más/ Población <15)*100

Fuente: Estimaciones Ministerio de Salud y Protección Social con base en DANE,
Población censada 1951-1993, Conciliación censal 1985-2005 y Proyecciones 2005-2020.

Expectativa de vida por sexo en diferentes edades



Fuente: División de población de las Naciones Unidas.

Conceptos básicos de seguros

Riesgo

Se refiere a la incertidumbre sobre la ocurrencia de un siniestro o de eventos que podrían producir una pérdida.

- El riesgo puro: son aquellas situaciones en que hay sólo dos posibles resultados. (Perdida o no perdida)
- Riesgo especulativo se refiere a los eventos en los que NO hay una posibilidad definida.

Seguro

Los seguros son contratos mediante los cuales, a cambio del cobro de una prima, la entidad aseguradora se compromete, en caso de siniestro, a indemnizar el daño producido o satisfacer un capital o renta.

Los seguros consisten en la transferencia y agrupación del riesgo.

Prima

Es el precio pactado por el seguro contratado.

Modelos de longevidad

Modelo de Lee-Carter:

Este modelo fue creado por Ronald D. Lee y por Lawrence R. Carter en 1992.

El modelo de Lee-Carter está formado por tres componentes:

- El primero sirve para capturar la evolución de la mortalidad en el tiempo
- El segundo intenta explicar la tendencia de la mortalidad
- El tercero es una medida del cambio de la fuerza de mortalidad en función de la edad

El modelo para caracterizar las tasas de mortalidad es el siguiente:

$$\mu_{x,t} = e^{\alpha_x + \beta_x * K_t + E_{x,t}}$$

Modelos de longevidad

Modelo de Cairns, Blake y Dowd (CBD):

El modelo CBD, fue desarrollado por los autores Cairns-Blake-Dowd en el año 2006.

El principal objetivo de dicho modelo es modelizar y predecir las tasas de fallecimiento de una población determinada.

$$\text{logit}(tq_x) = \ln\left(\frac{tq_x}{1 - tq_x}\right) = \beta_x^{(1)} * k_t^{(1)} + \beta_x^{(2)} * k_t^{(2)} = k_t^{(1)} + (x - \bar{x}) * k_t^{(2)} + \varepsilon_t$$

Proyecto



Se tiene una cartera de 1200 personas que fueron empleados del Banco de Colombia. Dentro de los beneficios de trabajar en dicha compañía, a cada uno de ellos se les asignó una renta vitalicia reversible, es decir, que, si el titular de la renta fallece, la renta se transfiere a su cónyuge.

- Realice la valoración para cada persona para obtener el importe total por compromiso de todas las rentas vitalicias que tiene con todos los asegurados.

Propuesta de Banco de Colombia: Cambiar la renta vitalicia por un monto establecido hoy.

- Cual es el porcentaje mínimo de tasa de aceptación para que el proyecto sea viable si Banco de Colombia quiere ahorrar al menos un 30% del valor total de la cartera.