1-2. GYAKORLAT

Algoritmus stabilitása

Definíció:

A *numerikus algoritmus* aritmetikai és logikai műveletek véges sorozata.

Definíció:

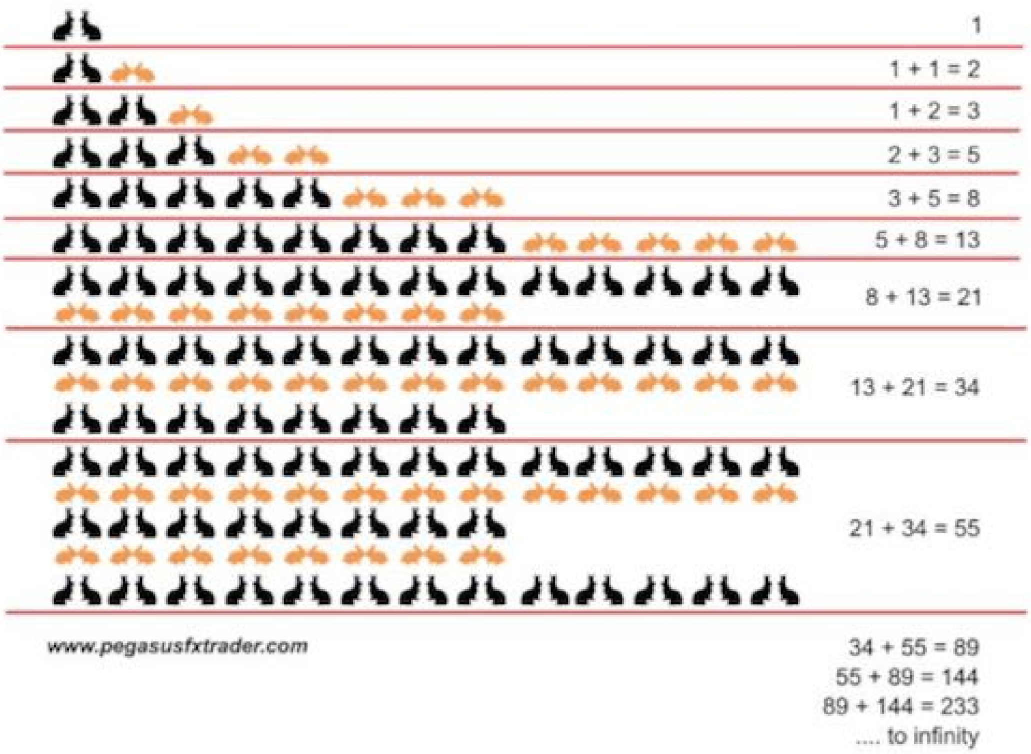
A numerikus algoritmus *stabil*, ha létezik olyan $C > 0$ konstans, hogy a kétféle B_1, B_2 bemenő adatból kapott K_1, K_2 kimenő adatokra

$$\|K_1 - K_2\| \leq C \cdot \|B_1 - B_2\|.$$

Példa

A Fibonacci sorozat rekurziója instabil. Lásd gyakorlaton.

Fibonacci nyulai (Fibonacci "Könyv az abakuszról" c. műve, 1202.)



A Fibonacci-sorozat

$$\boxed{f_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0,1 \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & \text{ha } n \geq 2 \end{cases}}$$

Tegyük fel, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0 &= 1 \\ \tilde{f}_1 &= 1 - \varepsilon \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \Delta_0 &= f_0 - \tilde{f}_0 = 0, \\ \Delta_1 &= f_1 - \tilde{f}_1 = \varepsilon \end{aligned}$$

Ekkor az abszolút hibára

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= 0, \ \ \Delta_1 = \varepsilon \\ \Delta_n &= \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2}, \ \ (n \geq 2) \end{aligned}$$

adódik.

Ennek a másodrendű lineáris differenciaegyenletnek Δ_n megoldását λ^n alakban keressük:

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ekkor

$$\Delta_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

ahol a c_1 és c_2 paramétereket a kezdeti értékekből számítjuk ki:

$$\left. \begin{array}{ll} n = 0: & 0 = c_1 + c_2 \\ n = 1: & \varepsilon = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}.$$

Végül

$$\Delta_n = \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

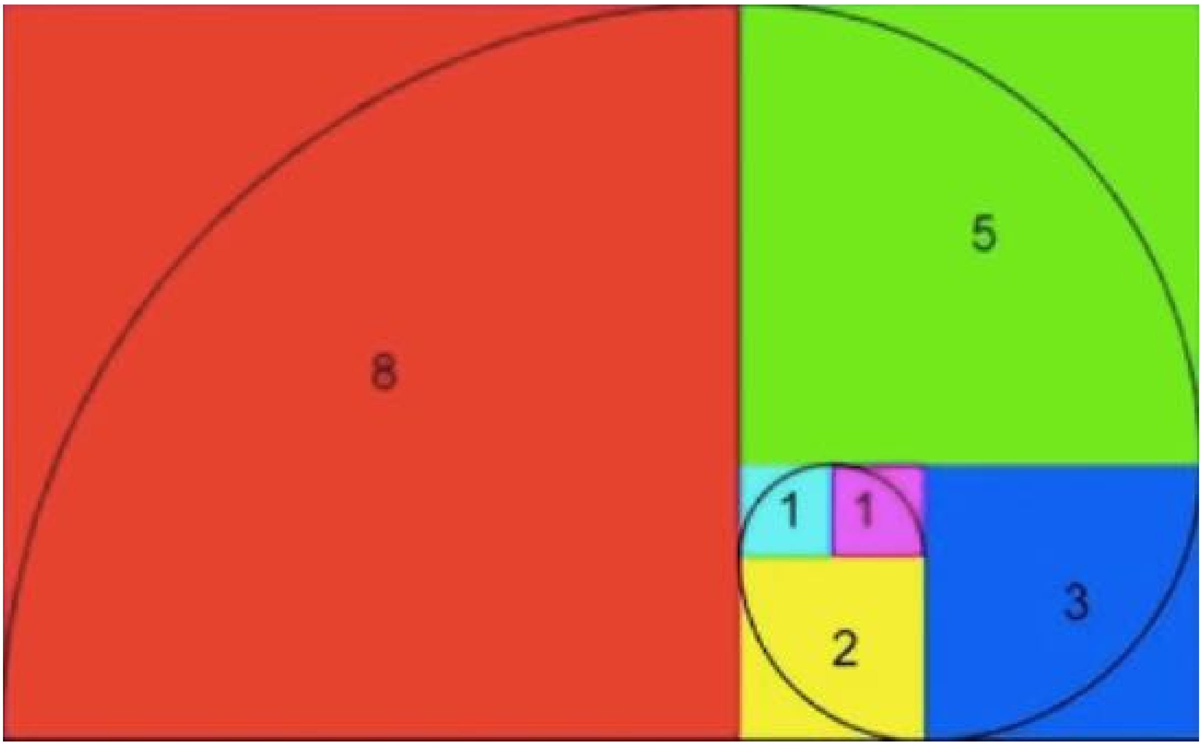
és

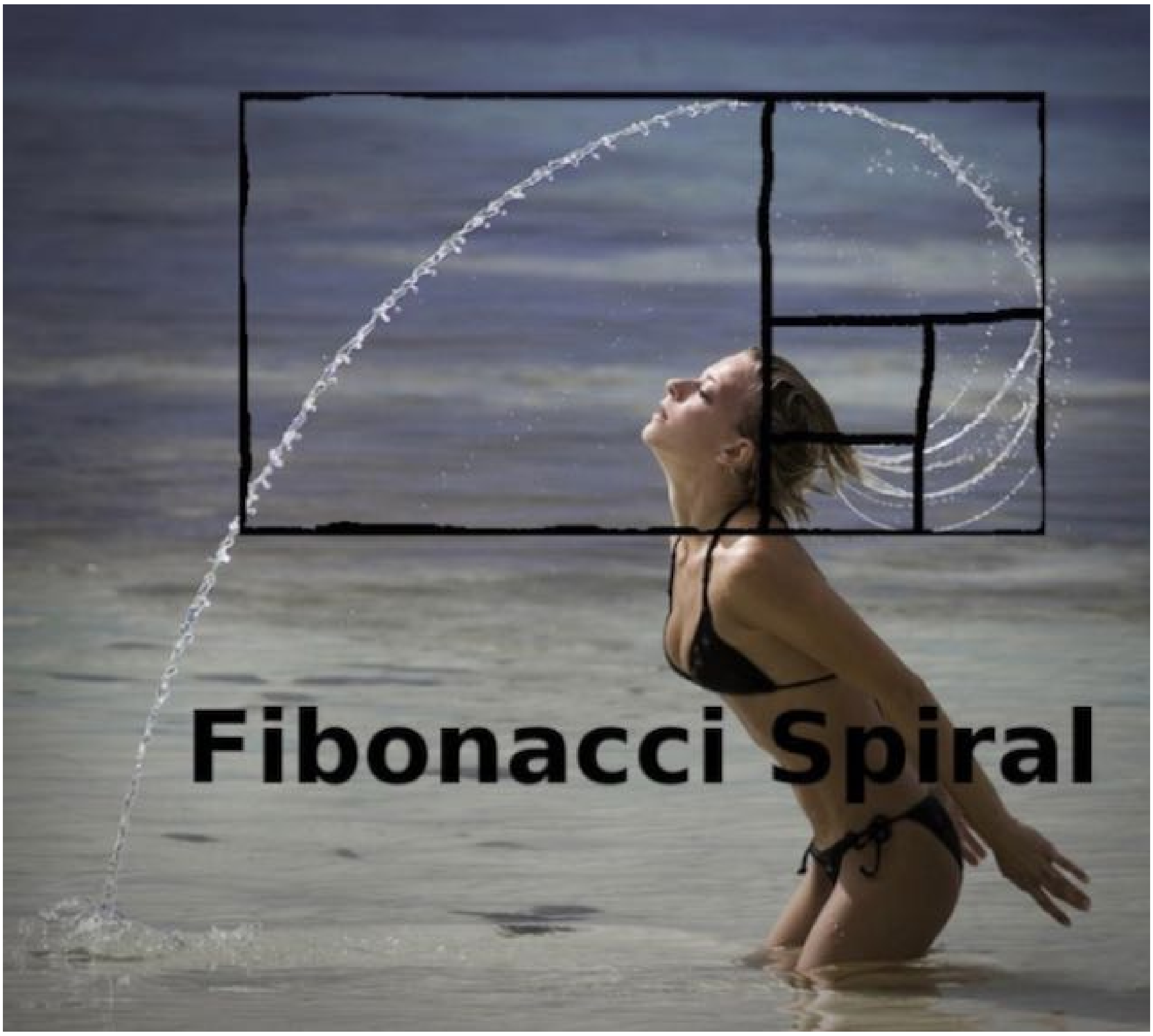
$$\lim_{n \to \infty} \Delta_n = \infty,$$

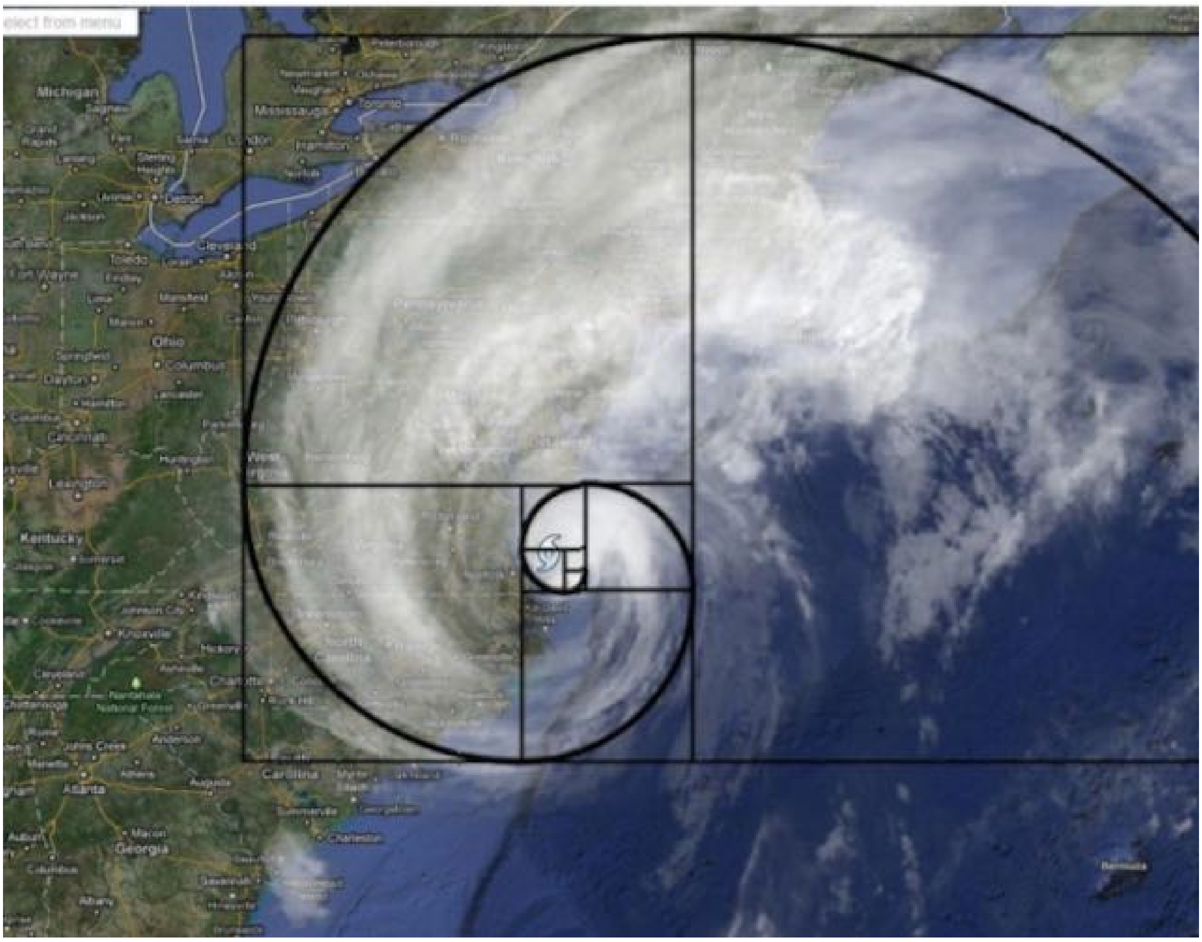
ugyanis

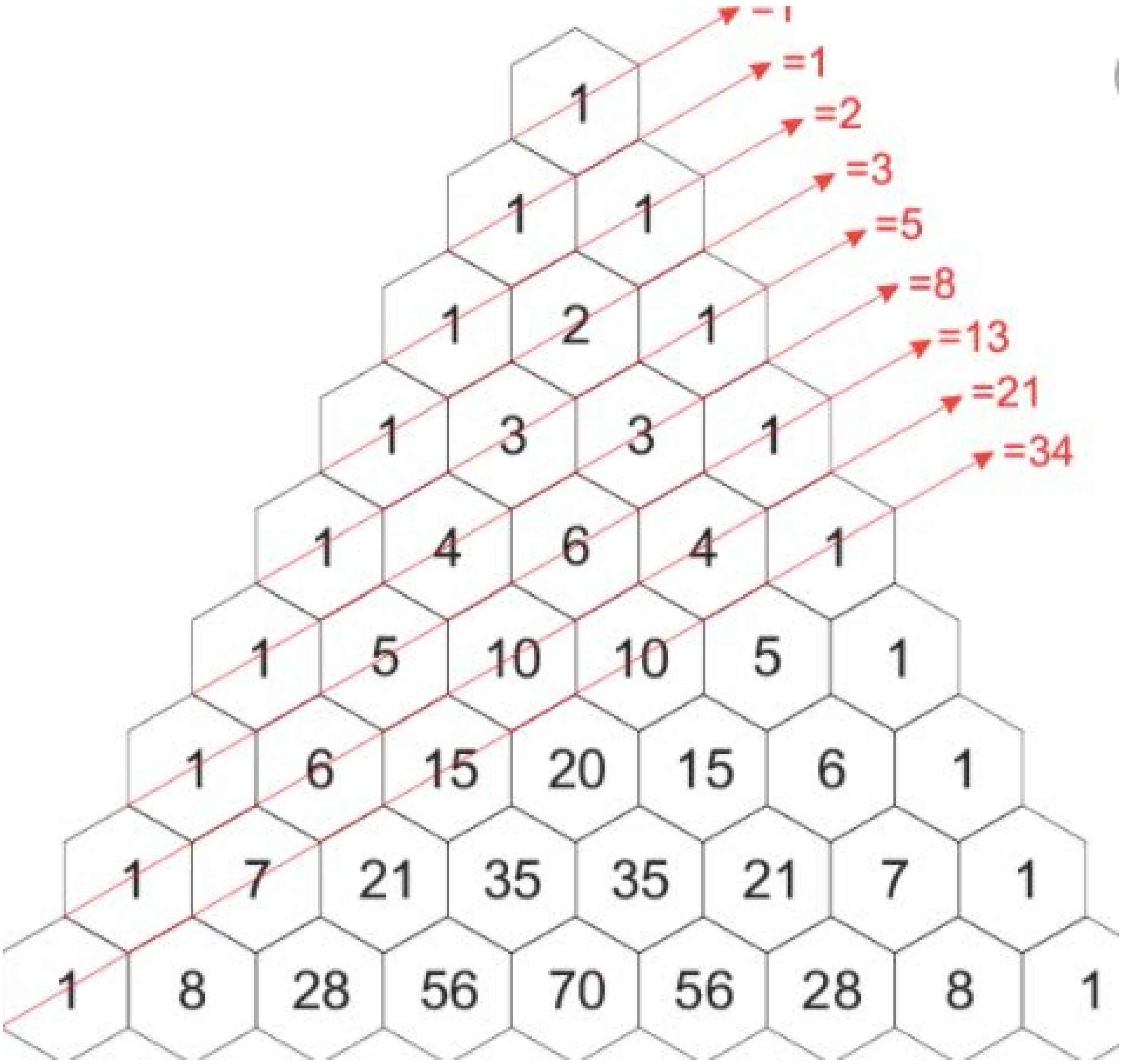
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618, \quad \text{és} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618.$$

A Fibonacci sorozat előfordulásai






Michigan
Detroit
Cleveland
Toledo
Fort Wayne
Ohio
Columbus
Dayton
Cincinnati
Lexington
Kentucky
Knoxville
Atlanta
Georgia
Toronto


=1
=2
=3
=5
=8
=13
=21
=34
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

FELADATOK

I. Gépi számok halmaza, műveletek a gépi számok halmazában.

1. Az $M = M(3, -2, 2)$ gépi számok halmazában írjuk fel M elemeit, adjuk meg az $|M|$, ε_0, M_∞, ε_1 értékeket.

2. Keressük meg a 10,85-nek megfeleltetett gépi számot, a $fl(10,85)$-t $M(5, -4, 4)$ halmazban!

3. Közelítsük az $x = \frac{1}{6}$-ot az $M(6, -5, 5)$-ben!
Induljunk ki a következő közelítő értékekből:

$$\textbf{(a)}\ \frac{1}{6} \approx 0,16\,; \qquad \textbf{(b)}\ \frac{1}{6} \approx 0,166\,; \qquad \textbf{(c)}\ \frac{1}{6} \approx 0,167\,.$$

Vajon mi lesz $fl(\frac{1}{6})$ az $M(6, -5, 5)$-ben?

4. Jelölje $\oplus$ a gépi aritmetikában az összeadást. Adjunk példát a az $M = M(5, -4, 4)$ halmazban az alábbiakra:

(a) $a \oplus b = a$, de $b \neq 0$,

(b) az asszociativitás nem teljesül.

5. Az $M = M(5, -6, 6)$ gépi számok halmazában

(a) adjuk meg az 1 és 8 gépi számot,

(b) adjuk meg a 0,12-nek megfeleltetett gépi számot.

(c) végezzük el az $(1 + 8) + fl(0, 12)$ gépi összeadást.

(d) adjuk meg a gépi számábrázolásból származó abszolút hibakorlátot $fl(0, 12)$-re és az eredményre!

6. Az $M = M(5, -3, 3)$ gépi számok halmazában

(a) adjuk meg a $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$-nak megfeleltetett gépi számokat.

(b) végezzük el az $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ gépi összeadást.

(c) adjuk meg a gépi számábrázolásból származó abszolút és relatív hibakorlátot az eredményre!

II. Műveletek hibája

1. (a) Adjuk meg a $\sqrt{3} \approx 1,73$ (2 tizedesjegyre kerekítve) közelítés abszolút és relatív hibakorlátját.

(b) Adjuk meg a $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \approx 1,73 \cdot 1,73$ közelítés abszolút és relatív hibakorlátját.

(c) Adjuk meg az $\pi \approx 3,14$ közelítés abszolút és relatív hibakorlátját.

(d) Adjuk meg az $\frac{1}{\pi} \approx \frac{1}{3,14}$ közelítés abszolút és relatív hibakorlátját.

2. Végezzük el 10-es számrendszerben $t = 6$ hoszúságú mantisszával az alábbi műveleteket:

$$\sqrt{2021} - \sqrt{2020}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2021} + \sqrt{2020}}$$

Indokolja meg, hogy melyik képlet ad pontosabb képletet!

3. Adjunk algoritmust az

$$x^2 - 2px - q = 0, \qquad (p, q > 0)$$

egyenlet megoldására!

Mi a helyzet, ha $p >> q$? (A másodfokú egyenlet megoldóképletében egymáshoz közeli számokat kell kivonnunk, ezért válasszunk más algoritmust a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján.) Példa:

$$x^2 - \sqrt{2}(10^5 - 10^{-5})x - 2 = 0$$

4. A relatív hiba kéféleképpen definiálható:

$$\frac{\Delta a}{A} \qquad \text{és} \qquad \frac{\Delta a}{a}.$$

Mekkora az eltérés a kettő között?

5. Az $M = M(6, -10, 10)$ gépi számok halmazában adott

$$x_1 = [100000 \,|\, 0], \quad x_2 = [111111 \,|\, -1].$$

Végezzük el az $x_1 \ominus x_2$ gépi kivonást és vizsgáljuk meg a fellépő relatív hibakorlátot!

6. **Függvényérték hibája.** Az $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ függvény helyettesítési értékét számoljuk az $x = 2$ közelítő értékkel. Mekkora a függvényérték $\Delta_{f(x)}$ abszolút hibakorlátja, ha $\Delta_x = 0,1$?

MEGOLDÁS

I. Gépi számok halmaza, műveletek a gépi számok halmazában.

1. Az $M = M(3, -2, 2)$ gépi számok halmazában írjuk fel M elemeit, adjuk meg az $|M|$, ε_0, M_∞, ε_1 értékeket.

Megoldás:

A k karakterisztika értékei: $-2, -1, 0, 1, 2$.

A $k = 0$ karakterisztikájú pozitív elemek

$$[100\,|\,0] = \frac{4}{8}, \;\; [101\,|\,0] = \frac{5}{8}, \;\; [110\,|\,0] = \frac{6}{8}, \;\; [111\,|\,0] = \frac{7}{8}$$

Tehát

$$M = \Big\{0, \pm\frac{4}{8}, \pm\frac{5}{8}, \pm\frac{6}{8}, \pm\frac{7}{8},\;\; \pm\frac{4}{4}, \pm\frac{5}{4}, \pm\frac{6}{4}, \pm\frac{7}{4},\;\; \pm\frac{4}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{6}{2}, \pm\frac{7}{2},$$
$$\pm\frac{4}{16}, \pm\frac{5}{16}, \pm\frac{6}{16}, \pm\frac{7}{16},\;\; \pm\frac{4}{32}, \pm\frac{5}{32}, \pm\frac{6}{32}, \pm\frac{7}{32}\Big\}$$

Az M halmaz elemszáma $\;|M| = 2 \cdot 2^2 \cdot 5 + 1 = 41$,

az M halmaz legkisebb pozitív eleme $\;\varepsilon_0 = [100\,|-2] = \frac{1}{8}$,

az M halmaz legnagyobb eleme $\;M_\infty = [111\,|\,2] = \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) 2^2 = \left(1 - \frac{1}{8}\right) 2^2 = \frac{7}{2}$,

az M-ben az 1 után következő gépi szám és 1 különbsége

$$\varepsilon_1 = [101\,|\,1] - [100\,|\,1] = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

2. Keressük meg a 10,85-nek megfeleltetett gépi számot, a $fl(10,85)$-t az $M(5, -4, 4)$ halmazban!

Megoldás: Először átírjuk a számot 2-es számrendszerbe, külön számoljuk az egészrészt és a törtrészt.

$$\begin{array}{c|c} 10 & (:\mathbf{2}) \\ \hline 5 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \;\Big\Uparrow\quad 10 = 1010_{(2)} \quad \text{és} \quad \begin{array}{c|c} (*\mathbf{2}) & 85 \\ \hline 1 & 70 \\ 1 & 40 \\ 0 & 80 \\ 1 & 60 \\ 1 & 20 \\ 0 & 40 \\ 0 & 80 \end{array} \;\Big\Downarrow\quad 0,85 \approx 0.11011_{(2)}$$

és összeadás után

$$10,85 \approx 1010.11011_{(2)} = 1010.1|1011_{(2)}$$

Innen látszik, hogy $M(5,-4,4)$-ben a keresett gépi számunk a következő két gépi szám között van:

az előző gépi szám

$$[10101\,|\,4] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}\right)2^4 = \frac{16+4+1}{32}\cdot 2^4 = \frac{21}{32}\cdot 2^4 = \frac{21}{2} = 10,5$$

a következő gépi szám

$$[10110\,|\,4] = \frac{21+1}{32}\cdot 2^4 = \frac{22}{2} = 11.$$

Mivel a 10, 85-höz közelebb van a 11 a 10,5-nél, a keresett szám

$$fl(10,85) = [10110\,|\,4]$$

és a hiba

$$|10,85 - fl(10,85)| = 0,15 \le \frac{1}{2}\cdot 2^4\cdot 2^{-5} = \frac{1}{4}.$$

3. Közelítsük az $x = \frac{1}{6}$-ot az $M(6,-5,5)$-ben!
Induljunk ki a következő közelítő értékekből:

$$\textbf{(a)}\ \frac{1}{6}\approx 0,16\,; \qquad \textbf{(b)}\ \frac{1}{6}\approx 0,166\,; \qquad \textbf{(c)}\ \frac{1}{6}\approx 0,167\,.$$

Vajon mi lesz $fl(\frac{1}{6})$ az $M(6,-5,5)$-ben?

Megoldás:

(∗**2**)	16
0	32
0	64
1	28
0	56
1	12
0	24
0	48
0	96
1	92
1	84

(∗**2**)	166
0	332
0	664
1	328
0	656
1	312
0	624
1	248
0	496
0	992
1	984

(∗**2**)	167
0	334
0	668
1	336
0	672
1	344
0	688
1	376
0	752
1	504
1	008

(a) $\frac{1}{6}\approx 0,16 = 0.00101000011_{(2)}$
Az előző gépi szám

$$[101000\,|\,-2] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)2^{-2} = \frac{5}{32} = \frac{40}{256} = 0,15625$$

A következő gépi szám

$$[101001 \,|\, -2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}\right) 2^{-2} = \frac{41}{256} = 0,160156$$

Mivel az utóbbi gépi szám van közelebb a 0,16-hoz, a keresett gépi szám

$$fl(0,16) = [101001 \,|\, -2] = \frac{41}{256}$$

Ez abból is látható, hogy a 0,16 szám 2-es számredszerbeli előállításában a következő számjegy, amit a gépi számunk hossza miatt nem vettünk figyelembe, az 1-es volt.

(b) $\frac{1}{6} \approx 0,166 = 0.00\textcolor{red}{101010}01_{(2)}$
Az előzőkhöz hasonlóan kapjuk, hogy

$$fl(0,166) = [101010 \,|\, -2] = \frac{42}{256}$$

(c) $\frac{1}{6} \approx 0,167 = 0.00\textcolor{red}{101010}11_{(2)}$
Az előzőkhöz hasonlóan kapjuk, hogy

$$fl(0,167) = [101011 \,|\, -2] = \frac{43}{256}$$

Látjuk, hogy 3 különböző gépi számot kaptunk az $\frac{1}{6}$ közelítő értékeire:

$$\frac{41}{256} < \frac{42}{256} < \frac{43}{256}$$

A $6 \cdot 256$ közös nevezővel felírva

$$\frac{246}{6 \cdot 256} < \frac{252}{6 \cdot 256} < \frac{256}{256} \cdot \textcolor{red}{\frac{1}{6}} < \frac{258}{6 \cdot 256}$$

látható, hogy

$$fl\left(\frac{1}{6}\right) = [101011 \,|\, -2] = \frac{43}{256}.$$

4. Jelölje $\oplus$ a gépi aritmetikában az összeadást. Adjunk példát a az $M = M(5, -4, 4)$ halmazban az alábbiakra:

(a) $a \oplus b = a$, de $b \neq 0$,

(b) az asszociativitás nem teljesül.

Megoldás:

Azonos karakterisztikájú gépi számok összeadása: összeadjuk a matisszákat, majd szükség esetén normalizálunk (kerekítéssel).
Különböző karakterisztikájú gépi számok karakterisztikáját a nagyobb karakterisztikához igazítjuk, összeadjuk a mantisszákat, majd normalizáljuk az eredményt.

(a) Legyen $a = [10011\,|\,4]$ és $b = [10010\,|\,-2]$. Ekkor $a \oplus b = a$, ugyanis b karakterisztikáját 4-esre alakítjuk és

$$b = 0.10010_{(2)} \cdot 2^{-2} = 0.00000010010_{(2)} \cdot 2^4$$

$$\begin{array}{cc} a: & 0.10011 \\ b: & 0.00000 \\ \hline + & 0.10011 \end{array}$$

és az összeg normalizálva $a \oplus b = [10011\,|\,4]$.

(b) $(a \oplus b) \oplus b = a$, de $a \oplus (b \oplus b) = [10100\,|\,4] \neq a$.
Ugyanis az előző rész alapján $(a \oplus b) \oplus b = a \oplus b = a$. Továbbá (-2)-es karakterisztikával a $b \oplus b$ mantisszája

$$\begin{array}{cc} b: & 0.10010 \\ b: & 0.10010 \\ \hline + & 1.00100 \end{array},$$

tehát $b \oplus b$ a 4-es karakterisztikával

$$b \oplus b = 1.0010 \cdot 2^{-2} = 0.000010010 \cdot 2^4 = [00001\,|\,4]$$

és az összeadás eredménye

$$\begin{array}{cc} a: & 0.10011 \\ b \oplus b: & 0.00001 \\ \hline + & 0.10100 \end{array}$$

a $[10100\,|\,4]$ gépi szám.

5. Az $M = M(5, -6, 6)$ gépi számok halmazában

(a) adjuk meg az 1 és 8 gépi számot.

Megoldás: $1 = [10000\,|1]$, $8 = [10000\,|4]$.

(b) adjuk meg a 0,12-nek megfeleltetett gépi számot.

Megoldás: $0,12 = 0.0001111010_{(2)}$, $fl(0,12) = [11111\,|-3] = 31/256$

(c) végezzük el az $(1 + 8) + fl(0,12)$ gépi összeadást.

Megoldás: $(1 + 8) + fl(0,12) = [10010\,|4] + [00000\,|4] = [10010\,|4] = 9$

(d) adjuk meg a gépi számábrázolásból származó abszolút hibakorlátot $fl(0,12)$-re és az eredményre!

Megoldás: $\Delta_{fl(0,12)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-5} \cdot 2^{-3} = 2^{-9}$, $\Delta_9 = \frac{1}{2} \cdot 2^{-5} \cdot 2^4 = 1/4$

6. Az $M = M(5, -3, 3)$ gépi számok halmazában

(a) adjuk meg a $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$-nak megfeleltetett gépi számokat.

Megoldás: $\sqrt{2} \approx 1,414$ és $\sqrt{3} \approx 1,732$ értékekkel dolgozunk.
$1,414 = 1.0110100_{(2)}$ és $1,732 = 1.1011101_{(2)}$
$fl(\sqrt{2}) = [10111\,|1]$ és $fl(\sqrt{3}) = [11100\,|1]$

(b) Végezzük el az $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ gépi összeadást.

Megoldás: Összeadás után kerekítünk, majd normálunk:

$$fl(\sqrt{2}) + fl(\sqrt{3}) = [11010\,|2] = \frac{13}{4} = 3,25$$

(c) Adjuk meg a gépi számábrázolásból származó abszolút és relatív hibakorlátot az eredményre!

Megoldás: $\Delta_{13/4} = \frac{1}{2} \cdot 2^k \cdot 2^{-t} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-5} \cdot 2^2 = 2^{-4}$, $\delta_{13/4} = 2^{-t} = 2^{-5}$.

II. Műveletek hibája

1. (a) Adjuk meg a $\sqrt{3} \approx 1,73$ (2 tizedesjegyre kerekítve) közelítés abszolút és relatív hibakorlátját.

Megoldás:

$$\Delta_{1,73} = 0,005, \qquad \frac{\Delta_{1,73}}{1,73} = \frac{0,005}{1,73} \leq 0,0029 = \delta_{1,73}.$$

(b) Adjuk meg a $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \approx 1,73 \cdot 1,73$ közelítés abszolút és relatív hibakorlátját.

Megoldás: $3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$,

$$2 \cdot 1,73 \cdot \Delta_{1,73} = 2 \cdot 1,73 \cdot 0,005 = 0,0173 < \boxed{0,02 =: \Delta_{1,73 \cdot 1,73}};$$

$$2 \cdot \delta_{1,73} = 0,0058 < \boxed{0,006 =: \delta_{1,73 \cdot 1,73}}.$$

(c) Adjuk meg az $\pi \approx 3,14$ közelítés abszolút és relatív hibakorlátját.

Megoldás: $\Delta_{3,14} = 0,005$ és $\delta_{3,14} = 0,0016.$

(d) Adjuk meg az $\frac{1}{\pi} \approx \frac{1}{3,14}$ közelítés abszolút és relatív hibakorlátját.

Megoldás:

$$\frac{1 \cdot \Delta_{3,14} + 0 \cdot 3,14}{3,14^2} \approx \frac{0,005}{3,14^2} < \boxed{0,00051 =: \Delta_{1/3,14}}$$

és

$$\delta_1 + \delta_{3,14} = \delta_{3,14} = \boxed{0,0016 =: \delta_{1/3.14}}.$$

2. Végezzük el 10-es számrendszerben $t = 6$ hoszúságú mantisszával az alábbi műveleteket:

$$\sqrt{2021} - \sqrt{2020}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2021} + \sqrt{2020}}$$

Indokolja meg, hogy melyik képlet ad pontosabb képletet!

Megoldás:

$$44,9555 \; - \; 44,9444 = 0,0111, \qquad \frac{1}{\sqrt{2021} + \sqrt{2020}} = 0,0111235$$

3. Adjunk algoritmust az

$$x^2 - 2px - q = 0, \qquad (p, q > 0)$$

egyenlet megoldására!

Megoldás: Kézenfekvőnek tűnik a jól ismert megoldóképlet alkalmazása:

$$x_1 = p + \sqrt{p^2 + q}, \qquad x_2 = p - \sqrt{p^2 + q}$$

Mi a helyzet, ha $p >> q$? (A másodfokú egyenlet megoldóképletében egymáshoz közeli számokat kell kivonnunk, ezért válasszunk más algoritmust a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján.)

Megoldás:

$$x_1 = p + \sqrt{p^2 + q}, \qquad x_2 = -\frac{q}{x_1}$$

Példa:

$$x^2 - \sqrt{2}(10^5 - 10^{-5})x - 2 = 0$$

A pontos megoldás:

$$x_1 = \sqrt{2} \cdot 10^5, \qquad x_2 = -\sqrt{2} \cdot 10^{-5}$$

Számoljuk ki a megoldást a kalkulátorunkon mindkét algoritmus szerint!

$$p = 70710,68, \qquad \sqrt{p^2 + q} = 70710,68,$$

A megoldóképlettel:

$$x_1 = p + \sqrt{p^2 + q} = 141421,36 \quad \text{és} \quad x_2 = 0.$$

A második algoritmussal, amikor az x_2-t a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján számoljuk:

$$x_1 = p + \sqrt{p^2 + q} = 141421,36 = 1,4142136 \cdot 10^5 \quad \text{és} \quad x_2 = -1,4142135 \cdot 10^{-5}.$$

4. A relatív hiba kétféleképpen definiálható: $\dfrac{\Delta a}{A}$ és $\dfrac{\Delta a}{a}$. Mekkora az eltérés a kettő között?

Megoldás:

$$\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta a}{A} = \frac{\Delta a(A - a)}{aA} = \frac{(\Delta a)^2}{aA} = \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{\Delta a}{A}$$

Ha pl. $\frac{\Delta a}{a} \approx \frac{\Delta a}{A} \approx 10^{-2}$ nagyságrendű, akkor az eltérés nagyságrendje 10^{-4}.

5. Az $M = M(6, -10, 10)$ gépi számok halmazában adott

$$x_1 = [100000\,|0], \quad x_2 = [111111\,|-1].$$

Végezzük el az $x_1 \ominus x_2$ gépi kivonást és vizsgáljuk meg a fellépő relatív hibakorlátot!

Megoldás:

$$x_1 = [100000\,|0] = \frac{1}{2}, \quad x_2 = [111111\,|-1] = \frac{63}{128}, \quad x_1 - x_2 = \frac{1}{128} = 2^{-7}$$

(a) A gépi kivonást kerekítéssel (rounding) végezzük:

$$x_1 \ominus x_2 = [100000\,|0] \ominus [111111\,|-1] = [100000\,|\,0] \ominus [100000\,|0] = 0,$$

és

$$\frac{(x_1 - x_2) - (x_1 \ominus x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} = 1 >> \frac{1}{128} = 2^{-7}.$$

(b) A gépi kivonást levágással (chopping) végezzük:

$$x_1 \ominus x_2 = [100000\,|0] \ominus [111111\,|-1] = [100000\,|\,0] \ominus [011111\,|0] = 2^{-6},$$

és

$$\left|\frac{(x_1 - x_2) - (x_1 \ominus x_2)}{x_1 - x_2}\right| = \left|\frac{2^{-7} - 2^{-6}}{2^{-7}}\right| = |1 - 2| = 1 >> \frac{1}{128} = 2^{-7}.$$

6. **Függvényérték hibája.** Az $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ függvény helyettesítési értékét számoljuk az $x = 2$ közelítő értékkel. Mekkora a függvényérték $\Delta_{f(x)}$ abszolút hibakorlátja, ha $\Delta_x = 0,1$?

Megoldás:

A Lagrange-tétellel

$$f(x) - f(2) = f'(\xi)(x - 2) \quad \Longrightarrow \quad |\Delta f(x)| = |f(x) - f(2)| = |f'(\xi)| \cdot |x - 2|$$

innen

$$|\Delta f(x)| \le \Delta_{f(x)} = M_1 \cdot \Delta_x,$$

ahol $\Delta_x = 0,1$ és $M_1 = \max\limits_{|x-2| \le 0,1} |f'(x)|$.

$$f'(x) = \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2} > 0,$$

$$f''(x) = \frac{2x(1 - x^2)^2 - (1 + x^2)2(1 - x^2)(-2x)}{(1 - x^2)^4} = \frac{2x(1 - x^2)^2 + 4x(1 - x^4)}{(1 - x^2)^4} =$$

$$= \frac{-2x^5 - 4x^3 + 6x}{(1 - x^2)^3} = \frac{-2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(1 - x^2)^3} > 0 \qquad (1,9 \le x \le 2,1),$$

ami azt jelenti, hogy a pozitív f' függvény szigorúan monoton nő az $[1,9\,;\,2,1]$ intervallumon és

$$M_1 = \max_{|x-2| \le 0,1} |f'(x)| = \max_{|x-2| \le 0,1} f'(x) = f'(2,1) = \frac{1 + 2,1^2}{(1 - 2,1^2)^2} = \frac{5,41}{11,6281} = 0,465252$$

és végül

$$M_1 \cdot \Delta_x = 0,0465252 < \boxed{0,05 =: \Delta_{f(x)}}.$$