NÉV: **NEPTUN:** **GYAKORLATVEZETŐ:**

ELTE IK Diszkrét matematika II, 2022. ősz A feladatsor

1. zárthelyi dolgozat

Minden megoldást indoklással kell alátámasztani. Az előadáson és a gyakorlaton elhangzott állításokra szabad hivatkozni azok pontos megfogalmazása után, másra nem. Saját magad ellenőrzésére legfeljebb kétsoros kijelzőjű, nem programozható számológép használható, de minden részletszámításnak, ahogy órán tanultuk, szerepelnie kell a beadott lapokon. Más segédeszköz nem használható. Minden feladat megoldása 8 pontot ér. Egy lapra több feladat megoldása is írható. Felhasználható idő: 105 perc.

1. a) Legyen $a = 16$, $b = 3$. Határozzuk meg a következő értékekeket: $a + b \bmod 13$; $b - a \bmod 13$; $ab \bmod 13$; $a^b \bmod 13$.
b) Legyen n egy pozitív egész szám. Igaz-e, hogy $n(n^4 - 1)$ mindig osztható 30-cal? Ha nem, adjunk ellenpéldát. Ha igen, bizonyítsuk.

2. A *bővített* euklideszi algoritmus segítségével határozzuk meg az alábbi (a, b) számpár legnagyobb közös osztóját, illetve olyan x és y egészeket, melyekkel a legnagyobb közös osztó $ax + by$ alakban írható. Adjuk meg a legkisebb közös többszöröst is.
a) $a = 150$, $b = 51$;
b) $a = 58$, $b = 105$.

3. Adjuk meg az alábbi lineáris kongruenciák megoldását. Használhatjuk a korábban kapott eredményeket.
a) $51x \equiv 6 \pmod{150}$
b) $58x \equiv 4 \pmod{105}$
c) Lappföldön rénszarvasszánhúzó-versenyt tartanak. Múlt télen kizárólag kétféle fogat indulhatott: olyan, melyet pontosan 11, vagy olyan, melyet pontosan 7 rénszarvas húzott. Mindkét fajta szán indult a versenyen, és összesen 240 rénszarvas volt a helyszínen. Hány fogat volt külön-külön a két fajtából?

4. Keressük meg az alábbi kongruenciák *közös* megoldásait a kínai maradéktétel segítségével:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{2} \\ 5x &\equiv 2 \pmod{3} \\ 2x &\equiv 3 \pmod{7} \end{aligned}$$

5. Az Euler-Fermat tétel segítségével számítsuk ki az alábbiakat:

$$\begin{aligned} 99^{42} &\mod 100 \\ 43^{81} &\mod 41 \\ 2023^{2022^{2022}} &\mod 10 \end{aligned}$$