Racionális törtfv.-yek integrálása

Elemi törtek és integrálások

① $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx \quad (n\in\mathbb{N}^+)$

$a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ b\neq 0$ „típus"

i) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+5}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int\frac{(3x+5)'}{3x+5}\,dx = \qquad x\in\left(-5/3,\infty\right)$

$(3x+5)'=3$

$\displaystyle = \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\ln|3x+5|+C}\ = \frac{1}{3}\cdot\ln(3x+5)+C \quad \mathbb{R}$

ii) $\displaystyle\int \frac{1}{(7x-11)^{81}}\,dx = \frac{1}{7}\int (7x-11)'\cdot(7x-11)^{-81}\,dx$

$\left(x<\frac{11}{7}\right)$

$\displaystyle = \frac{1}{7}\,\frac{(7x-11)^{-80}}{-80}+C = -\frac{1}{560}\cdot\frac{1}{(7x-11)^{80}}+C \quad \mathbb{R}$

$\boxed{② \text{ Típus}}$ $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$ ← nincs valós gyöke

$A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$;
$\boxed{a \neq 0}$ és $\boxed{D = b^2 - 4ac < 0}$

Pl. $\displaystyle\int \frac{x+3}{\underbrace{x^2+4x+5}_{U}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+6}{x^2+4x+5}\,dx =$

$D = 16-20 < 0$ $\quad (x^2+4x+5)' = 2x+4$

$x \in I := \mathbb{R}$;

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\cdot \ln(\underbrace{x^2+4x+5}_{+}) + J(x)$

ahol $\displaystyle J(x) = \int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx =$

Cél: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx$

arctg-re
vezetendő rész

$\displaystyle = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx = \frac{\operatorname{arctg}(x+2)}{1} + C$

Tehát: $\underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot \ln(x^2+4x+5) + \operatorname{arctg}(x+2) + C}}$ $(C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$

$$\int \frac{3x-2}{\underbrace{x^2+x+1}} \, dx = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2 \cdot x - \frac{2}{3} \cdot 2}{x^2+x+1} \, dx = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2x+1-1-\frac{4}{3}}{x^2+x+1} \, dx =$$

$D = 1-4 < 0$

$(x^2+x+1) = 2x+1$

$$= \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} \, dx + \frac{3}{2}\left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \int \frac{1}{x^2+x+1} \, dx = \frac{3}{2} \cdot \ln\left|\overbrace{x^2+x+1}^{+}\right| -$$

$\frac{7}{2} \cdot J(x)$, ahol

$$Jx = \int \frac{1}{x^2+x+1} \, dx = \int \frac{1}{\frac{3}{4} \cdot \left[1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]} = \frac{4}{3} \cdot \int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} \, dx =$$

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \left[1 + \frac{4}{3} \cdot \left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \left[1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{2/\sqrt{3}} + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2} \cdot \ln(x^2+x+1) - \frac{7}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C}}$$

③ Típus: $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$

$A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$; $2 \leq n \in \mathbb{N}$

Megj: Nem részletezzük

④ Parciális törtekre bontás

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+8}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{2}}{x-2}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x-4}\,dx =$

$D = 36-32 > 0$

$\boxed{x \in (2,4)}$

$$= \frac{1}{(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} \quad \Big| \; A, B \in \mathbb{R} = ?$$

$$\Big| \; (x-2)(x-4)$$

$$1 = A(x-4) + B(x-2)$$

Behelyettesítés $\Rightarrow$ $x=4 \Rightarrow 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

$x = 2 \Rightarrow -2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{(x-2)'}{x-2}\,dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{(x-4)'}{(x-4)}\,dx = -\frac{1}{2} \cdot \ln|x-2| + \frac{1}{2} \ln|x-4| + C =$$

$2 < x < 4$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \ln(x-2) + \frac{1}{2} \ln(4-x) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln\frac{4-x}{x-2} + C \in \mathbb{R}$$

3/ $\int \frac{3x-5}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{3x-5}{(x+1)^2}\,dx$

$D=0$

ahol: $\frac{3x-5}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \quad \Big| \cdot (x+1)^2$

$\Rightarrow 3x-5 = A(x+1)+B$

$3x-5 = (A)x + (A+B)$

Mindkét oldal x-nek polinomja, ezért a megfelelő fokszámú tagok együtthatói egyenlő kell legyenek.
(egyenlő együtthatók módszere)

x^1 együ.: $A=3$

x^0 együ.: $A+B=-5 \Rightarrow$

$B=-8$

$= \int \left(\frac{3}{x+1} - \frac{8}{(x+1)^2} \right) dx = 3\int \frac{1}{x+1}\,dx - 8\cdot\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx =$

$= 3\cdot\int \frac{(x+1)'}{x+1}\,dx - 8\cdot\int (x+1)'\cdot(x+1)^{-2}\,dx =$

$= 3\cdot \ln|x+1| - 8\cdot\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C =$

$= 3\cdot \ln(x+1) + 8\cdot\frac{1}{x+1} + C \in R$