5-6. GYAKORLAT

Reguláris mátrix QR felbontása

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok **QR-felbontását Gram-Schmidt-ortogonalizációval**:

$$\textbf{a)} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{b)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{c)} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{d)} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

2. További feladatok a QR-felbontás gyakorlására Gram-Schmidt-ortogonalizációval: Bozsik József – Krebsz Anna: Numerikus módszerek példatár 30 – 31. oldal 52–60. feladatok.

3. Adjuk meg azt a $\mathbf{v}$ egységvektort, melyre $H(\mathbf{v})\mathbf{a} = \mathbf{b}$, ha

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Householder-transzformációval hozzuk az $\mathbf{a} = [-1, 1, -1, 1]^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra! Végezzük el a transzformációt a Householder-mátrix elemeinek kiszámítása nélkül a $\mathbf{b} = [2, 1, 1, 0]^T$ vektoron!

5. Householder-transzformációval hozzuk felső háromszögalakra az alábbi lineáris egyenletrendszert, majd ezt visszahelyettesítéssel oldjuk meg! A transzformációt a Householder-mátrix elemeinek kiszámítása nélkül végezzük el! A LER-t a kibővített mátrixával adjuk meg:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & | & 0 \\ 3 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

6. Oldjuk meg Householder-transzformációval a lineáris egyenletrendszert, melynek kibővített mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 0 & | & 2 \\ 1 & 0 & 3 & | & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Oldjuk meg Householder-transzformációval a lineáris egyenletrendszert, melynek kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

8. További feladatok a Householder-transzformáció gyakorlására: Bozsik József – Krebsz Anna: Numerikus módszerek példatár 31-33. oldal 61-75. feladatok.

MEGOLDÁS

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok QR-felbontását Gram-Schmidt-ortogonalizációval:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

A módszer: A reguláris $A_{n\times n}$ mátrix oszlopvektorai lineárisan függetlenek. A Gram-Schmidt-ortogonalizácóval előállítunk egy ortonormált bázist, ezek a vektorok alkotják a Q mátrix oszlopvektorait.

Az R felső háromszögmátrix főátlójában a Gram-Schmidt-eljárással konstruált ortogonális vektorok hossza ($\|\cdot\|_2$), míg a diagonális felett az előállítás során fellépő együtthatók szerepelnek.

A módszer lépései:

$\mathbf{s_1} := \mathbf{a_1}, \qquad \boxed{r_{1,1}} = \|\mathbf{s_1}\|_2, \qquad \boxed{\mathbf{q_1}} = \frac{1}{r_{1,1}}\mathbf{s_1};$

$\mathbf{s_2} = \mathbf{a_2} - r_{1,2}\,\mathbf{q_1}$, ahol $\boxed{r_{1,2}} = \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_2} \rangle$ ($\mathbf{s_2} \perp \mathbf{q_1}$ miatt),

$\boxed{r_{2,2}} = \|\mathbf{s_2}\|_2, \qquad \boxed{\mathbf{q_2}} = \frac{1}{r_{2,2}}\mathbf{s_2};$

$\vdots$

$\mathbf{s_k} = \mathbf{a_k} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{j,k}\,\mathbf{q_j}$, ahol $\boxed{r_{j,k}} = \langle \mathbf{q_j}, \mathbf{a_k} \rangle$
($\mathbf{s_k} \perp \mathbf{q_j}$, $j = 1, \ldots, k-1$ miatt)

$\boxed{r_{k,k}} = \|\mathbf{s_k}\|_2, \qquad \boxed{\mathbf{q_k}} = \frac{1}{r_{k,k}}\mathbf{s_k}$ (k=3,...,n).

Nézzük a példánkat:

$$A = [\mathbf{a_1} \quad \mathbf{a_2}] = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q_1} & \mathbf{q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{r_{11}} = \|\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

$$\boxed{\mathbf{q_1}} = \frac{1}{r_{11}}\mathbf{a_1} = \frac{1}{5}\mathbf{a_1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{r_{12}} = \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_2} \rangle = \frac{1}{5} \cdot \Big((-2) \cdot 4 + 1 \cdot 3 \Big) = -\frac{5}{5} = -1$$

$$\mathbf{s_2} = \mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -10+4 \\ 5+3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{r_{22}} = \|\mathbf{s_2}\|_2 = \left\| \frac{2}{5} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|_2 = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \frac{2}{5} \cdot 5 = 2$$

$$\boxed{\mathbf{q_2}} = \frac{1}{r_{22}} \mathbf{s_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Tehát a Q és R mátrixok a következők:

$$Q = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Egyszerű számolással ellenőrizhetjük, hogy $A = QR$, ahol Q ortogonális mátrix, azaz $Q^{-1} = Q^T$, és R felső háromszögmátrix.

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$\boxed{r_{1,1}} = \|\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{4+1} = \sqrt{5},$

$$\boxed{\mathbf{q_1}} = \frac{1}{r_{11}} \mathbf{a_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{1,2}} = \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2-1) = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\mathbf{s_2} = \mathbf{a_2} - r_{1,2}\,\mathbf{q_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{2,2}} = \|\mathbf{s_2}\|_2 = \frac{3}{5}\sqrt{1+4} = \frac{3}{\sqrt{5}},$$

$$\boxed{\mathbf{q_2}} = \frac{1}{r_{2,2}}\mathbf{s_2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3}{5}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{1,3}} = \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(0+0+0) = 0,$$

$$\boxed{r_{2,3}} = \langle \mathbf{q_2}, \mathbf{a_3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(0+0+0) = 0,$$

$$\mathbf{s_3} = \mathbf{a_3} - r_{1,3}\,\mathbf{q_1} - r_{2,3}\,\mathbf{q_2} = \mathbf{a_3} = \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{3,3}} = \|\mathbf{s_3}\|_2 = 2,$$

$$\boxed{\mathbf{q_3}} = \frac{1}{r_{3,3}}\mathbf{s_3} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Végül $A = QR$, ahol

$$Q = \begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0\\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix}\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0\\ 0 & 3/\sqrt{5} & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\boxed{r_{1,1}} = \|\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{16+9} = 5,$$

$$\boxed{\mathbf{q_1}} = \frac{1}{5}\mathbf{a_1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4\\-3\\0\end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{1,2}} = \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_2}\rangle = \frac{1}{5}(8-3) = 1,$$

$$\mathbf{s_2} = \mathbf{a_2} - r_{1,2}\,\mathbf{q_1} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4\\-3\\0\end{bmatrix} = \frac{2}{5}\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{2,2}} = \|\mathbf{s_2}\|_2 = 2,$$

$$\boxed{\mathbf{q_2}} = \frac{1}{r_{2,2}}\mathbf{v_2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{1,3}} = \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_3}\rangle = \frac{1}{5}(0+0+0) = 0,$$

$$\boxed{r_{2,3}} = \langle \mathbf{q_2}, \mathbf{a_3}\rangle = \frac{1}{5}(0+0+0) = 0,$$

$$\mathbf{s_3} = \mathbf{a_3} - r_{1,3}\,\mathbf{q_1} - r_{2,3}\,\mathbf{q_2} = \mathbf{a_3} = \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{3,3}} = \|\mathbf{s_3}\|_2 = 2,$$

$$\boxed{\mathbf{q_3}} = \frac{1}{r_{3,3}}\mathbf{s_3} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Végül $A = QR$, ahol

$$Q = \begin{bmatrix}4/5 & 3/5 & 0\\ -3/5 & 4/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & 3 & 0\\ -3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix}5 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

(d)

$$A = \begin{bmatrix}2 & 5 & 4\\ 6 & 8 & 0\\ 3 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\boxed{r_{1,1}} = \|\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{4+36+9} = 7,$$

$$\boxed{\mathbf{q_1}} = \frac{1}{7}\mathbf{a_1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}2\\6\\3\end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{1,2}} = \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_2}\rangle = \frac{1}{7}(10+48-9) = 7,$$

$$\mathbf{s_2} = \mathbf{a_2} - r_{1,2}\,\mathbf{q_1} = \begin{bmatrix}5\\8\\-3\end{bmatrix} - \frac{7}{7}\begin{bmatrix}2\\6\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\\-6\end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{2,2}} = \|\mathbf{s_2}\|_2 = 7,$$

$$\boxed{\mathbf{q_2}} = \frac{1}{r_{2,2}}\mathbf{s_2} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{1,3}} = \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_3} \rangle = 2,$$

$$\boxed{r_{2,3}} = \langle \mathbf{q_2}, \mathbf{a_3} \rangle = 0,$$

$$\mathbf{s_3} = \mathbf{a_3} - r_{1,3}\,\mathbf{q_1} - r_{2,3}\,\mathbf{q_2} = \frac{4}{7}\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{3,3}} = \|\mathbf{s_3}\|_2 = 4,$$

$$\boxed{\mathbf{q_3}} = \frac{1}{r_{3,3}}\mathbf{s_3} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Végül $A = QR$, ahol

$$Q = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Másik megoldás:

Az reguláris A mátrix oszlopaiból nem ortonormált, hanem ortogonális bázis készítünk a Gram-Schmidt-módszerrel. Ezek a vektorok lesznek a $\overline{Q}$ mátrix oszlopai. Az $\overline{R}$ mátrix diagonális elemeit 1-nek választjuk, a főátló feletti elemeit az ortogonalizáció során fellépő együtthatók adják.

Végül úgy kapjuk meg a Q és R mátrixot, hogy a $\overline{Q}$ oszlopait osztjuk a 2-es normájukkal, az $\overline{R}$ mátrix sorait pedig szorozzuk ugyanezekkel az értékekkel.

$$\overline{\mathbf{q}}_\mathbf{1} = \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{q}}_\mathbf{2} = \mathbf{a_2} - \overline{r}_{1,2}\,\overline{\mathbf{q}}_\mathbf{1} \quad \Longrightarrow \quad 0 = \langle \overline{\mathbf{q}}_\mathbf{1}, \overline{\mathbf{q}}_\mathbf{2} \rangle = \langle \overline{\mathbf{q}}_\mathbf{1}, \mathbf{a_2} \rangle \;-\; \overline{r}_{1,2}\,\langle \overline{\mathbf{q}}_\mathbf{1}, \overline{\mathbf{q}}_\mathbf{1} \rangle \quad \Longrightarrow$$

$$\overline{r}_{1,2} = \frac{\langle \overline{\mathbf{q}}_\mathbf{1}, \mathbf{a_2} \rangle}{\langle \overline{\mathbf{q}}_\mathbf{1}, \overline{\mathbf{q}}_\mathbf{1} \rangle} = \frac{49}{49} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathbf{q}}_\mathbf{2} = \mathbf{a_2} - \overline{\mathbf{q}}_\mathbf{1} = \mathbf{a_2} - \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 5-2 \\ 8-6 \\ -3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\overline{r}_{1,3} = \frac{\langle \overline{\mathbf{q}}_\mathbf{1}, \mathbf{a_3} \rangle}{\langle \overline{\mathbf{q}}_\mathbf{1}, \overline{\mathbf{q}}_\mathbf{1} \rangle} = \frac{14}{49} = \frac{2}{7}, \qquad \overline{r}_{2,3} = \frac{\langle \overline{\mathbf{q}}_\mathbf{2}, \mathbf{a_3} \rangle}{\langle \overline{\mathbf{q}}_\mathbf{2}, \overline{\mathbf{q}}_\mathbf{2} \rangle} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\overline{\mathbf{q}}_3 = \mathbf{a}_3 - \overline{r}_{1,3}\,\overline{\mathbf{q}}_1 - \overline{r}_{2,3}\,\overline{\mathbf{q}}_2 = \begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix} - \frac{2}{7}\begin{bmatrix}2\\6\\3\end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}28-4\\0-12\\14-6\end{bmatrix} = \frac{4}{7}\begin{bmatrix}6\\-3\\2\end{bmatrix}$$

Innen

$$\overline{Q} = \begin{bmatrix}2 & 3 & \frac{4}{7}\cdot 6\\ 6 & 2 & \frac{4}{7}\cdot(-3)\\ 3 & -6 & \frac{4}{7}\cdot 2\end{bmatrix}, \qquad \overline{R} = \begin{bmatrix}1 & 1 & \frac{2}{7}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Végül

$$\|\overline{\mathbf{q}}_1\|_2 = \sqrt{4+36+9} = 7, \quad \|\overline{\mathbf{q}}_2\|_2 = 7, \quad \|\overline{\mathbf{q}}_3\|_2 = \frac{4}{7}\cdot 7 = 4$$

miatt

$$Q = \begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7}\\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7}\end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix}7 & 7 & 2\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

2. További feladatok a QR-felbontás gyakorlására Gram-Schmidt-ortogonalizációval: Bozsik József – Krebsz Anna: Numerikus módszerek példatár 30 – 31. oldal 52–60. feladatok.

Householder-transzformáció

$$\boxed{\text{Ha } \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad \text{és} \quad \|\mathbf{a}\|_2 = \|\mathbf{b}\|_2 \neq 0, \quad \text{akkor} \quad \mathbf{v} = \pm\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|_2} \quad \text{esetén} \quad H(\mathbf{v})\mathbf{a} = \mathbf{b},}$$

ahol $\boxed{H(\mathbf{v}) = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T}$ a Householder-transzformáció mátrixa,

továbbá

$$\boxed{H(\mathbf{v})\mathbf{c} = \mathbf{c} - 2\Big(\mathbf{v}^T\mathbf{c}\Big)\mathbf{v}, \quad \text{ha} \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n}$$

(Megjegyzés: nincs szükségünk a $H(\mathbf{v})$ mátrixra, hogy kiszámítsuk $H(\mathbf{v})\mathbf{c}$-t, a $\mathbf{c}$ vektor képét a transzformációnál.)

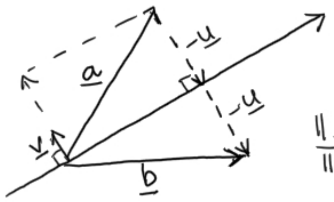
A Householder-transzformáció geometriai interpretációja:

https://www.youtube.com/watch?v=6TIVIw4B5VA

https://www.youtube.com/watch?v=wmjUHak9yHU

https://www.youtube.com/watch?v=iMrgPGCWZ_o

$\underline{a}$ tükörképe $\underline{b}$, $\underline{v}$ "joystick" $\|\underline{v}\|_2 = 1$



$\underline{b} = ?$ $\quad \underline{b} = \underline{a} - 2\underline{u}$, $\underline{u} \parallel \underline{v}$

$$\frac{\|\underline{u}\|_2}{\|\underline{a}\|_2} = \cos\varphi \implies \|\underline{u}\|_2 = \|\underline{a}\|_2 \cos\varphi =$$

$$= \|\underline{a}\|_2 \underbrace{\|\underline{v}\|_2}_{1} \cos\varphi = \langle \underline{a}, \underline{v} \rangle = \underline{v}^T \underline{a}$$

$$\underline{b} = \underline{a} - 2(\underbrace{\underline{v}^T\underline{a}}_{\in \mathbb{R}})\underline{v} = \underline{a} - 2\underline{v}(\underline{v}^T\underline{a}) = \underline{a} - 2(\underline{v}\,\underline{v}^T)\underline{a} =$$

$$= (\underbrace{I - 2(\underline{v}\,\underline{v}^T)}_{H(\underline{v}) \text{ Housholder mátrix}})\underline{a} = H(\underline{v})\underline{a}$$

$\underline{v} = ?$ $\quad \underline{v} = \pm \dfrac{\underline{a} - \underline{b}}{\|\underline{a} - \underline{b}\|_2}$

3. Adjuk meg azt a $\mathbf{v}$ egységvektort, melyre $H(\mathbf{v})\mathbf{a} = \mathbf{b}$, ha

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ahol $H(\mathbf{v})$ a Householder mátrix.

(Azaz adjuk meg a $\mathbf{v}$ joystick-kel reprezentált tükrözést, melynél az $\mathbf{a}$ tükörképe a $\mathbf{b}$.)

Megoldás:

Mivel $\|\mathbf{a}\|_2 = \|\mathbf{b}\|_2$, alkalmazhatjuk a Householder-transzformációra vonatkozó tételt:

$$\mathbf{v} = \pm\frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_2} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ugyanis

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}.$$

Ellenőrzés:

$$H(\mathbf{v})\mathbf{a} = (I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{a} = \mathbf{a} - 2\mathbf{v}\left(\mathbf{v}^T\mathbf{a}\right) = \mathbf{a} - 2\left(\mathbf{v}^T\mathbf{a}\right)\mathbf{v}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 3\right) \cdot \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Householder-transzformációval hozzuk az $\mathbf{a} = [-1, 1, -1, 1]^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra! Végezzük el a transzformációt a Householder-mátrix elemeinek kiszámítása nélkül a $\mathbf{c} = [2, 1, 1, 0]^T$ vektoron!

Megoldás:

A Householder-transzformációra vonatkozó tételt szeretnénk alkalmazni:
Most $\mathbf{b} = \pm\|\mathbf{a}\|_2 \cdot \mathbf{e_1}$, úgy választjuk meg az előjelet, hogy a $\mathbf{v}$ formulájában szereplő osztásnál nagyobb nevezővel számoljunk (stabilitás!). Ezért legyen $\mathbf{b} = k\mathbf{e_1}$, ahol

$$k = -\mathrm{sign}(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\| = -\mathrm{sign}(-1)\sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = 2$$

Továbbá

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}-k\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}-2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\Longrightarrow \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|_2=\|\mathbf{a}-k\mathbf{e}_1\|_2=2\sqrt{3},$$

végül

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{a}-k\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a}-k\mathbf{e}_1\|}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-3\\1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

Alkalmazzuk a transzformációt a $\mathbf{c}=[2,1,1,0]^T$ vektorra:

$$H(\mathbf{v})\mathbf{c}=(I-2\mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{c}=\mathbf{c}-2\mathbf{v}(\mathbf{v}^T\mathbf{c})=\mathbf{c}-2(\mathbf{v}^T\mathbf{c})\mathbf{v}=$$

$$=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix}-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-3\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\cdot(-6)\cdot\begin{bmatrix}-3\\1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\1\end{bmatrix}.$$

5. Householder-transzformációval hozzuk felső háromszögalakra az alábbi lineáris egyenletrendszert, majd visszahelyettesítéssel oldjuk meg! A transzformációt a Householder-mátrix elemeinek kiszámítása nélkül végezzük el! A LER-t a kibővített mátrixával adjuk meg:

$$\begin{bmatrix}4 & -2 & | & 0\\3 & 1 & | & 5\end{bmatrix}$$

Megoldás:

Első lépésben az A mátrix első oszlopát Householder-transzformációval $k\cdot\mathbf{e_1}$ alakra hozzuk. A numerikusan stabil számolás érdekében jó előjelet választunk k-nak, hogy a $\|\mathbf{a}-k\mathbf{e_1}\|_2$ a lehető legnagyobb legyen.

$$k=-\mathrm{sgn}(a_1)\,\|\mathbf{a}\|_2=-\mathrm{sgn}(4)\cdot\sqrt{4^2+3^2}=-5$$

Kiszámoljuk a $\mathbf{v}$ vektort.

$$\mathbf{a} - k \cdot \mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \qquad \|\mathbf{a} - k\mathbf{e_1}\|_2 = 3\sqrt{10}, \tag{1}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} - k\mathbf{e_1}}{\|\mathbf{a} - k\mathbf{e_1}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A mátrix első oszlopára nem kell alkalmaznunk a transzformációt, mert a konstrukció garantálja az eredményt, ugyanis

$$\mathbf{H}(\mathbf{v})\,\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Alkalmazzuk a transzformációt a második oszlopra:

$$\mathbf{H}(\mathbf{v})\,\mathbf{a_2} = \left(\mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{a_2} = \mathbf{a_2} - 2\mathbf{v}\left(\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{a_2}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-5) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Alkalmazzuk a transzformációt az $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ LER jobb oldali vektorára:

$$\mathbf{H}(\mathbf{v})\,\mathbf{c} = \left(\mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{c} = \mathbf{c} - 2\mathbf{v}\left(\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{c}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Egy Householder-transzformációs lépés után a lineáris egyenletrendszer felső háromszögalakú lett

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & | & -3 \\ 0 & 2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Visszahelyettesítéssel megkapjuk a megoldást:

$$2x_2 = 4 \to x_2 = 2,$$
$$-5x_1 + x_2 = -3 \to -5x_1 = -5 \to x_1 = 1.$$

6. Oldjuk meg Householder-transzformációval a lineáris egyenletrendszert, melynek kibővített mátrixa
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 0 & | & 2 \\ 1 & 0 & 3 & | & 4 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

Első lépésben a kibővített mátrix első oszlopát Householder-transzformációval $\mathbf{b_1} = k_1 \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozzuk. A numerikusan stabil számolás érdekében legyen $k_1 = -\|\mathbf{a_1}\|_2 = -\sqrt{2}$. Ekkor

$$\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{a_1}\|_2 = \|\mathbf{b_1}\|_2.$$

Kiszámoljuk a $\mathbf{v_1}$ vektort:

$$\mathbf{v_1} = \frac{\mathbf{a_1} - \mathbf{b_1}}{\|\mathbf{a_1} - \mathbf{b_1}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Most alkalmazzuk a $H(\mathbf{v_1})$ Householder-transzformációt a LER kibővített mátrixára, melyet oszloponkénti szorzással hajtunk végre.

A mátrix első oszlopára a konstrukció automatikusan adja az eredményt:

$$H(\mathbf{v_1})\mathbf{a_1} = \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrix második oszlopára:

$$\mathbf{H}\left(\mathbf{v_1}\right)\mathbf{a_2} = \left(\mathbf{I} - 2\mathbf{v_1}\mathbf{v_1^T}\right)\mathbf{a_2} = \mathbf{a_2} - 2\left(\mathbf{v_1^T}\mathbf{a_2}\right)\mathbf{v_1} = \mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{v_1^T}\mathbf{a_2} = 0$.

A mátrix harmadik oszlopára:

$$\mathbf{H}\left(\mathbf{v_1}\right)\mathbf{a_3} = \left(\mathbf{I} - 2\mathbf{v_1}\mathbf{v_1^T}\right)\mathbf{a_3} = \mathbf{a_3} - 2\left(\mathbf{v_1^T}\mathbf{a_3}\right)\mathbf{v_1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{4 + \sqrt{2}}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{4 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} - (3-\sqrt{2})\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1+2\sqrt{2}\\0\\3-\sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\sqrt{2}\\0\\\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

Végül, a mátrix negyedik oszlopára, azaz a LER jobb oldali vektorára alkalmazva:

$$\mathbf{H}(\mathbf{v_1})\,\mathbf{c} = \left(\mathbf{I} - 2\mathbf{v_1}\mathbf{v_1^T}\right)\mathbf{c} = \mathbf{c} - 2\left(\mathbf{v_1^T}\mathbf{c}\right)\mathbf{v_1} =$$

$$= \begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix} - 2\cdot\frac{6+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\sqrt{2}\\2\\\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

Láthatjuk, hogy a $H_1 = H(\mathbf{v_1})$ transzformáció egyszeri végrehajtásával az $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ egyenletrendszer felső háromszögalakú lett

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} & -3\sqrt{2}\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{array}\right].$$

Visszahelyettesítéssel kapjuk a LER megoldását: $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$.

MEGJEGYZÉS Mivel a Householder-transzformáció mátrixa ortogonális mátrix, láthatjuk, hogy az A mátrixnak egy QR felbontását kaptuk az eljárás során, ahol a

$$Q = H_1 \qquad \text{és} \qquad R = H_1 A$$

mátrixokkal

$$QR = H_1(H_1A) = (H_1H_1)A = A,$$

ugyanis $(H_1)^2 = I$ (vektor tükörképének tükörképe az eredeti vektor!).

7. Oldjuk meg Householder-transzformációval a lineáris egyenletrendszert, melynek kibővített mátrixa
$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 3 & | & 3 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

Első lépésben kibővített mátrix első oszlopát Householder-transzformációval $\mathbf{b_1} = k_1 \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozzuk. A stabil számolás érdekében legyen $k_1 = -\|\mathbf{a_1}\|_2 = -4$. Ekkor

$$\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{a_1}\|_2 = \|\mathbf{b_1}\|_2.$$

Kiszámoljuk a $\mathbf{v_1}$ vektort:

$$\mathbf{v_1} = \frac{\mathbf{a_1} - \mathbf{b_1}}{\|\mathbf{a_1} - \mathbf{b_1}\|_2} = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e_1}.$$

Most a $H(\mathbf{v_1})$ Householder-transzformációt alkalmazzuk a lineáris egyenletrendszerre, azaz a kibővített mátrixára (oszloponként)!

A mátrix első oszlopára a konstrukció automatikusan adja az eredményt:

$$H(\mathbf{v_1})\mathbf{a_1} = \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrix második oszlopára:

$$\mathbf{H}\left(\mathbf{v_1}\right)\mathbf{a_2} = \left(\mathbf{I} - 2\mathbf{v_1}\mathbf{v_1^T}\right)\mathbf{a_2} = \mathbf{a_2} - 2\left(\mathbf{v_1^T}\mathbf{a_2}\right)\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

A mátrix harmadik oszlopára:

$$\mathbf{H}\left(\mathbf{v_1}\right)\mathbf{a_3} = \left(\mathbf{I} - 2\mathbf{v_1}\mathbf{v_1^T}\right)\mathbf{a_3} = \mathbf{a_3} - 2\left(\mathbf{v_1^T}\mathbf{a_3}\right)\mathbf{v_1} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot (-2) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Végül, alkalmazzuk a transzformációt a mátrix negyedik oszlopára, a LER jobb oldali vektorára:

$$\mathbf{H}\left(\mathbf{v_1}\right)\mathbf{c} = \left(\mathbf{I} - 2\mathbf{v_1}\mathbf{v_1^T}\right)\mathbf{c} = \mathbf{c} - 2\left(\mathbf{v_1^T}\mathbf{c}\right)\mathbf{v_1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A $H_1 = H(\mathbf{v_1})$ transzformáció egyszeri végrehajtásával az $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ LER a következő alakú lett:

$$\left[\begin{array}{r|rr|r} -4 & -1 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Alkalmazzuk ismét a Householder-transzformációt a

$$[\tilde{A} \mid \tilde{\mathbf{c}}] = \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

feladatra. Ekkor

$$\tilde{\mathbf{a}}_\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$H(\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2})\tilde{\mathbf{a}}_\mathbf{2} = \left(I - 2\,\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2}\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2}^T\right)\tilde{\mathbf{a}}_\mathbf{2} = \tilde{\mathbf{a}}_\mathbf{2} - 2\left(\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2}^T\tilde{\mathbf{a}}_\mathbf{2}\right)\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\frac{2+3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (1-2\sqrt{2})\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3-\sqrt{2} \\ -1+2\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$H(\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2})\tilde{\mathbf{a}}_\mathbf{2} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} = H(\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2})\tilde{\mathbf{c}}.$$

A $H(\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2})$ transzformáció hatása

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 3 \\ -1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & | & -\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & | & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Összefoglalva

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 & | & -2 \\ 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & | & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & | & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

A LER megoldását visszahelyettesítéssel kapjuk meg: $x_3 = 1$, $x_2 = 0$, $x_1 = 1$.

A Householder-transzformáció kétszeri alkalmazásával az A mátrix QR felbontását kapjuk, ahol

$$Q = H_1 H_2 \qquad \text{és} \qquad R = H_2 H_1 A,$$

$$H_1 = H(\mathbf{v_1}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & H(\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix},$$

$$Q = H_1 H_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \qquad R = H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$