Ócsci Mat

Analízis II.

1

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & ; x < 0 \\ e^x + b\sin(3x) & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$(a, b, c \in \mathbb{R})$

2 külapat nek. máshogy van

Gyakorlás

■ **Házi feladatok**

1. Határozza meg
$$f(x) := x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$
függvény monotonitási intervallumait, valamint a lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

2. Határozza meg
$$f(x) := \frac{e^x}{x} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$$
függvény monotonitási intervallumait, valamint a lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

3. Határozza meg az
$$f(x) := \frac{x}{x^2 + x + 1} \quad \big(x \in [-2, 0]\big)$$
függvény abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit!

1. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$

$f \in D(x)$

$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$

$f'(x) = 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 5x^2(x-3)(x-1)$

f függvény előjelet válthat az $x = 0$, $x = 3$ és $x = 1$ pontokban

x	$-\infty$		0		1		3		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$		↗		↗	10	↘	-26	↗	

$$f(x)=\frac{x}{x^2+x+1} \qquad x\in[-2;0]$$

Weierstrass tétel szerint létezik abszolút

$$\frac{x}{x^2+x+1} \qquad f(x) \text{ deriválható}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+x+1-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-x^2+1}{—\,\text{''}\,—}=$$

$$\frac{0\pm\sqrt{4}}{-2} \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases} \qquad \frac{-1(x-1)(x+1)}{—\,\text{''}\,—}$$

$x=1$ és $x=-1$ lehetséges lokális szé.

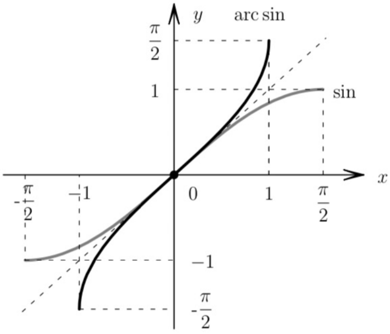
$f'(-1)$ $(-+)$ előjel váltása van, lokális minimum

$1\notin D_f$

$$f(-2)=-\frac{2}{3} \qquad f(-1)=-1 \qquad f(0)=0$$

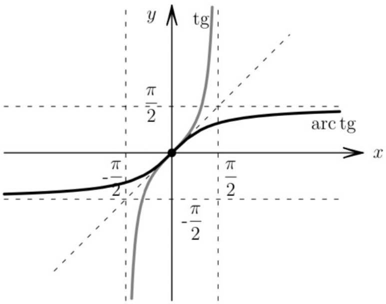
A arc sin *függvény*

- $\mathcal{D}_{\arcsin} = [-1, 1]$, $\mathcal{R}_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
- folytonos $[-1, 1]$-en,,
- deriválható $(-1, 1)$-en, és
$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1, 1)\big)$$
- $\uparrow$ $[-1, 1]$-en,
- szigorúan konkáv $[-1, 0]$-en,
szigorúan konvex $[0, 1]$-n,
- 0 inflexiós pont.



A arc tg *függvény*

- $\mathcal{D}_{\operatorname{arc\,tg}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{arc\,tg}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
- folytonos és deriválható $\mathbb{R}$-en, ill.
$$\operatorname{arc\,tg}' x = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$
- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konvex $(-\infty, 0]$-n,
szigorúan konkáv $[0, +\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = \pm\frac{\pi}{2}$ aszimptota a $(\pm\infty)$-ben.

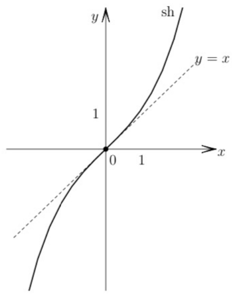


A sh *függvény*

- $\mathcal{D}_{\text{sh}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\text{sh}} = \mathbb{R}$,
- páratlan függvény,
- folytonos és deriválható $\mathbb{R}$-en, ill.

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x \quad (x \in \mathbb{R})$$

- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$-n, szigorúan konvex $[0, +\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont.

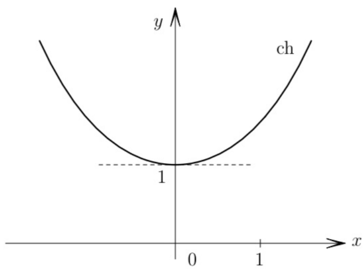


A ch *függvény*

- $\mathcal{D}_{\text{ch}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\text{ch}} = [1, +\infty)$,
- páros függvény,
- folytonos és deriválható $\mathbb{R}$-en, ill.

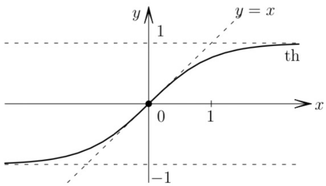
$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x \quad (x \in \mathbb{R})$$

- $\downarrow$ $(-\infty, 0)$-en, és $\uparrow$ $(0, +\infty)$-en,
- szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en,
- 0 abszolút minimumhely.



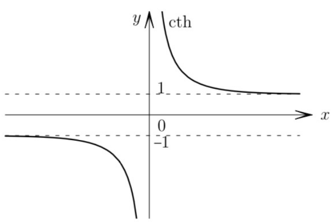
A th függvény

- $\mathcal{D}_{\text{th}} = \mathbb{R}, \ \mathcal{R}_{\text{th}} = (-1, 1)$,
- páratlan függvény,
- folytonos és deriválható $\mathbb{R}$-en, ill.
$$\text{th}' x = \frac{1}{\text{ch}^2 x} \quad (x \in \mathbb{R})$$
- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konvex $(-\infty, 0]$-n,
szigorúan konkáv $[0, +\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = \pm 1$ aszimptota $(\pm\infty)$-ben.



A cth függvény

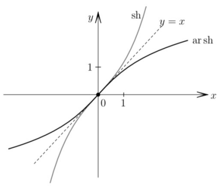
- $\mathcal{D}_{\text{cth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ \mathcal{R}_{\text{cth}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$,
- páratlan függvény,
- folytonos és deriválható $\mathbb{R}$-en, ill.
$$\text{cth}' x = -\frac{1}{\text{sh}^2 x} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$$
- $\downarrow$ $(-\infty, 0)$-en, és $\downarrow$ $(0, +\infty)$-en,,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$-n,
szigorúan konvex $[0, +\infty)$-en,
- $y = \pm 1$ aszimptota $(\pm\infty)$-ben.

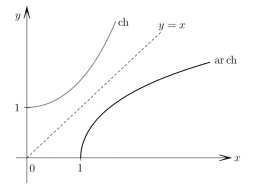


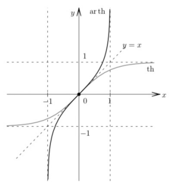
Az inverz függvény deriválási szabályából következik, hogy mindegyik areafüggvény az értelmezési tartományának minden belső pontjában deriválható, és

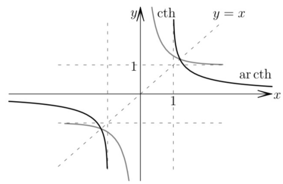
$$\operatorname{ar\,sh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \operatorname{ar\,ch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \big(x \in (1,+\infty)\big),$$
$$\operatorname{ar\,th}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad \big(x \in (-1,1)\big), \qquad \operatorname{ar\,cth}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad \big(|x| > 1\big).$$

Az areafüggvények alábbi ábrákon szemléltetett analitikus és geometriai tulajdonságai a korábbiakhoz hasonlóan állapíthatók meg.









A hiperbolikus függvényeket ki lehet fejezni az exp függvénnyel. Az exp függvény inverze az ln függvény, ezért nem meglepő, hogy az areafüggvényeket az ln segítségével is fel tudjuk írni.

2. Tétel. *A következő azonosságok teljesülnek:*

$$\operatorname{ar\,sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
$$\operatorname{ar\,ch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad (x \in [1,+\infty)),$$
$$\operatorname{ar\,th} x = \tfrac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad (x \in (-1,1)),$$
$$\operatorname{ar\,cth} x = \tfrac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad (|x| > 1).$$