4. GYAKORLAT

Az A mátrix LU, LDU, LDL^T és Cholesky-felbontása

1.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 2 & 10 & 9 & 5 \\ 6 & 9 & 14 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Állítsuk elő az $A = LU$ felbontást, ahol L alsó háromszögmátrix főátlójában 1-ek vannak és U felső háromszögmátrix,

(a) L_i alsó háromszögmátrixok segítségével ($i = 1, 2, 3$);

(b) Gauss-eliminációval (tömörített alakkal);

(c) közvetlenül, azaz mátrixszorzás segítségével.

(d) Adjuk meg az A mátrix determinánsának az értékét!

2. Hány darab LU felbontása van az alábbi mátrixoknak?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & 12 & 14 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & 16 & 14 \end{bmatrix}.$$

3. LDU-felbontás LU-felbontás segítségével.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel az A mátrixot $A = LDU$ alakban, ahol L alsó-, U felső háromszögmátrix, mindkettő főátlójában 1-ek állnak, D pedig diagonális mátrix!

4. Szimmetrikus mátrix LDU felbontása LDL^T alakú.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel az A mátrixot $A = LDL^T$ alakban!

5. Cholesky-felbontás szimmetrikus mátrixra: $A = LL^T$, ahol L alsó háromszögmátrix.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel az A mátrixot $A = LL^T$ alakban!

6. Adjuk meg a szimmetrikus

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 12 & 4 \\ -4 & 5 & -13 & -1 \\ 12 & -13 & 38 & 8 \\ 4 & -1 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

(a) LU-felbontását;

(b) LDL^T-felbontását;

(c) Cholesky-felbontását!

7. Adjuk meg a szimmetrikus A mátrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cholesky-felbontását!

8. További lehetőség gyakorlásra: Bozsik József – Krebsz Anna: Numerikus módszerek példatár 26-29. oldal 19-46. feladatok.

MEGOLDÁS

1.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 2 & 10 & 9 & 5 \\ 6 & 9 & 14 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Állítsuk elő az $A = LU$ felbontást, ahol L alsó háromszögmátrix főátlójában 1-ek vannak és U felső háromszögmátrix:

Megoldás:

(a) L_i alsó háromszögmátrixok segítségével ($i = 1, 2, 3$):

Az $L_i \quad (i = 1, 2, 3)$ alsó háromszögmátrixot a következőképpen definiáljuk: induljunk ki az egységmátrixból és az i-edik oszlopban a diagonális elem alatti elemek legyenek rendre

$$-\frac{a_{2,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}}, \quad -\frac{a_{3,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}}, \quad -\frac{a_{4,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}}; \qquad -\frac{a_{3,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}}, \quad -\frac{a_{4,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}}; \qquad -\frac{a_{4,3}^{(2)}}{a_{3,3}^{(2)}},$$

ahol $A^{(k)}$ a Gauss-elimináció k-adik lépésénél kapott mátrix ($k = 0, 1, 2$).

A Gauss-elimináció lépései:

$$A = A^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 2 & 10 & 9 & 5 \\ 6 & 9 & 14 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow A^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Ekkor

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az L_i-vel való balról szorzás ugyanazt eredményezi, mint a Gauss-elimináció i-edik lépése:

$$L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 2 & 10 & 9 & 5 \\ 6 & 9 & 14 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix} = A^{(1)}$$

$$L_2(L_1 A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = A^{(2)}$$

$$L_3(L_2(L_1 A)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{(3)}$$

Az L_i mátrixok inverzei is alsó háromszögmátrixok, melyek olyan alakúak, mint az L_i mátrixok, csak az i-edik oszlopukban a diagonális alatt az L_i mátrix megfelelő elemének a negatívja áll. Az L_i^{-1} mátrixok szorzata is alsó háromszögmátrix, melynek főátlójában 1-ek állnak.

Láttuk, hogy

$$L_3(L_2(L_1 A)) = (L_3 L_2 L_1)A = A^{(3)} = U,$$

és

$$(L_3L_2L_1)^{-1} = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1},$$

végül azt kapjuk, hogy $A = LU$, ahol

$$L = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

és

$$U = (L_3L_2L_1)A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az eredményt a két mátrix összeszorzásával ellenőrizhetjük.

(b) Gauss-eliminációval (tömörített alakkal):

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 2 & 10 & 9 & 5 \\ 6 & 9 & 14 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ S_2 - \frac{1}{2}S_1 \to S_2 \\ S_3 - \frac{3}{2}S_1 \to S_3 \\ S_4 + \frac{1}{2}S_1 \to S_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & 6 & -2 \\ \hline \frac{1}{2} & 9 & 6 & 6 \\ \frac{3}{2} & 6 & 5 & 5 \\ -\frac{1}{2} & 6 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ S_3 - \frac{2}{3}S_2 \to S_3 \\ S_4 - \frac{2}{3}S_2 \to S_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{c|c|cc} 4 & 2 & 6 & -2 \\ \hline \frac{1}{2} & 9 & 6 & 6 \\ \cline{2-4} \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ S_4 - 1 \cdot S_3 \to S_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{c|c|c|c} 4 & 2 & 6 & -2 \\ \hline \frac{1}{2} & 9 & 6 & 6 \\ \cline{2-4} \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & 1 & 1 \\ \cline{3-4} -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Innen kapjuk, hogy

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) mátrixszorzás segítségével:

$$L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \ell_1 & 1 & 0 & 0 \\ \ell_2 & \ell_3 & 1 & 0 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 2 & 10 & 9 & 5 \\ 6 & 9 & 14 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

A szorzást soronként végezve megkaphatjuk az ismeretlen ℓ_j és u_i értékeket. Az L mátrix második sorát kombinálva az U mátrix oszlopaival

$4\ell_1 = 2 \Longrightarrow \ell_1 = \frac{1}{2}$

$2\ell_1 + u_1 = 10 \Longrightarrow u_1 = 9,$

$6\ell_1 + u_2 = 9 \Longrightarrow u_2 = 6$

$-2\ell_1 + u_3 = 5 \Longrightarrow u_3 = 6$, azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \ell_2 & \ell_3 & 1 & 0 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 2 & 10 & 9 & 5 \\ 6 & 9 & 14 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Az L mátrix harmadik sorát kombinálva az U mátrix oszlopaival

$4\ell_2 = 6 \Longrightarrow \ell_2 = \frac{3}{2}$

$2\ell_2 + 9\ell_3 = 9 \Longrightarrow 2 \cdot \frac{3}{2} + 9\ell_3 = 9 \Longrightarrow \ell_3 = \frac{2}{3},$

$6\ell_2 + 6\ell_3 + u_4 = 14 \Longrightarrow 6 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{2}{3} + u_4 = 14 \Longrightarrow u_4 = 1,$

$-2\ell_2 + 6\ell_3 + u_5 = 2 \Longrightarrow -2 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{2}{3} + u_5 = 2 \Longrightarrow u_5 = 1$ tehát

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 2 & 10 & 9 & 5 \\ 6 & 9 & 14 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Végül az L mátrix negyedik sorát kombináljuk az U mátrix oszlopaival, és megkapjuk a hiányzó értékeket:

$$\ell_4 = -\frac{1}{2}, \quad \ell_5 = \frac{2}{3}, \quad \ell_6 = 1, \quad u_6 = 1.$$

(d) Az A mátrix determinánsa

$$\det(A) = \det(LU) = \det(U)\det(L) = 1 \cdot 36 = 36.$$

2. Hány darab LU felbontása van az alábbi mátrixoknak?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & 12 & 14 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel az A mátrix főminoraira $D_1 = 1 \neq 0$, $D_2 = 3 - 2 = 1 \neq 0$, a GE alkalmazható sor- és oszlopcsere nélkül. Továbbá $\det(A) = D_3 = 6 \neq 0$ miatt A-nak egyetlen LU felbontása létezik.

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

Mivel $D_2 = 16 - 16 = 0$, a GE nem alkalmazható. Az LU felbontás felirásához próbálkozzunk a "közvetlen" kiszámítással! Hamar eljutunk a követlező alakhoz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & \ell_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

A következő lépésben, a $4 \cdot 4 + 0 \cdot \ell_3 = 12$ egyenletből látszik, hogy nincs megoldás, azaz nem létezik az B mátrixnak LU felbontása.

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

A b) részben láttuk, hogy $D_2 = 0$ miatt a GE nem alkalmazható. A b) részben leírtakhoz hasonlóan eljutunk a $4 \cdot 4 + 0 \cdot \ell_3 = 16$ egyenlethez, melynek végtelen sok megoldása van ℓ_3-ra, továbbá $6 \cdot 4 - 10 \cdot \ell_3 + u_3 = 14$-ből $u_3 = 10(\ell_3 - 1)$.

A C mátrixnak végtelen sok LU felbontása van.

3. LDU-felbontás LU-felbontás segítségével

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel az A mátrixot $A = LDU$ alakban, ahol L alsó-, U felső háromszögmátrix, mindkettő főátlójában 1-ek állnak, D pedig diagonális mátrix.

Megoldás:

Először írjuk fel az LU felbontást a tömörített GE segíségével:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \implies \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 2 \\ \hline \color{red}{1} & 3 & -2 \\ \color{red}{1} & -1 & 2 \end{array}\right] \implies \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 2 \\ \hline \color{red}{1} & 3 & -2 \\ \cline{2-3} \color{red}{1} & \color{red}{-\frac{1}{3}} & \frac{4}{3} \end{array}\right]$$

ekkor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LDU$$

Láthatjuk, hogy a D mátrix elemeit az LU felbontás második szorzótényezőjének a diagonális elemei alkotják.

4. Szimmetrikus mátrix LDU felbontása LDL^T alakú.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel az A mátrixot $A = LDL^T$ alakban!

Megoldás:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \implies \left[\begin{array}{c|cc} 4 & -2 & 2 \\ \hline \color{red}{-1/2} & 4 & -2 \\ \color{red}{1/2} & -2 & 5 \end{array}\right] \implies \left[\begin{array}{c|c|c} 4 & -2 & 2 \\ \hline \color{red}{-1/2} & 4 & -2 \\ \cline{2-3} \color{red}{1/2} & \color{red}{-1/2} & 4 \end{array}\right]$$

alapján

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LDL^T.$$

5. Cholesky-felbontás szimmetrikus mátrixra: $A = LL^T$, ahol L alsó háromszögmátrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel az A mátrixot $A = LL^T$ alakban!

Megoldás:

(a) Az $A = LU$ felbontásból kiindulva kaptuk az $A = LDL^T$ felbontást. A Cholesky-felbontás alsó háromszögmátrixát az $L \cdot \sqrt{D}$ szorzat adja.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innen

$$L \cdot \sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

végül

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Mátrixszorzással közvetlenül is meghatározhatjuk az L mátrix elemeit (oszloponként):

$$\begin{bmatrix} \ell_1 & 0 & 0 \\ \ell_2 & \ell_4 & 0 \\ \ell_3 & \ell_5 & \ell_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & \ell_4 & \ell_5 \\ 0 & 0 & \ell_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Innen

$\ell_1^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \ell_1 = 2,$

$\ell_2\ell_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad \ell_2 = -1,$

$\ell_3\ell_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \ell_3 = 1,$

$\ell_2^2 + \ell_4^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad \ell_4 = 2,$

$\ell_2\ell_3 + \ell_4\ell_5 = -3 \quad \Rightarrow \quad \ell_5 = -1,$

$\ell_3^2 + \ell_5^2 + \ell_6^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad \ell_6 = 2,$

azaz

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Adjuk meg a szimmetrikus A mátrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 12 & 4 \\ -4 & 5 & -13 & -1 \\ 12 & -13 & 38 & 8 \\ 4 & -1 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

(a) LU-felbontását;

(b) LDL^T-felbontását;

(c) Cholesky-felbontását!

Megoldás:

(a) LU-felbontása

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -4 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) LDL^T-felbontása

$$A = LDL^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Cholesky-felbontása

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Adjuk meg a szimmetrikus A mátrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cholesky-felbontását!

Megoldás:

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$