1. feladatsor: Számelmélet

Euklideszi és bővített euklideszi algoritmus

1. Az euklideszi algoritmussal számítsuk ki az alábbi számpárok legnagyobb közös osztóját, és adjuk meh a legkisebb közös többszörösüket is.

a) $a = 86, b = 31;$	b) $a = 139, b = 102;$	c) $a = 255, b = 111;$	d)$a = 332, b = 88;$
e $a = 675, b = 471;$	f) $a = 432, b = 300;$	g) $a = 756, b = 333;$	h)$a = 504, b = 150;$
i) $a = 420, b = 154;$	j) $a = 1080, b = 285;$	k) $a = 2016, b = 880;$	l)$a = 30, b = 22;$
m) $a = 430, b = 300;$	n) $a = 2355, b = 450;$	o) $a = 300, b = 132;$	p)$a = 518, b = 154;$

2. Az előző feladatban szereplő a, b számpárok esetén írjuk fel a legnagyobb közös osztót $ax+by = (a, b)$ alakban!

Euklideszi és bővített euklideszi algoritmus

3. Oldjuk meg az alábbi diofantikus egyenleteket:

a) $172x + 62y = 38$ b) $82x322y = 34;$ c) $450x + 86y = 100;$ d) $125x + 45y = -20$

4. Pajkos százlábúak futkároznak a ládában. Az egyik fajtának 14 lába van, a másiknak 20. Összesen 232 lábat számoltunk meg. Hány százlábú van a ládában?

5. A boltban a vásárlás során 600 forint a visszajáró. Hányféleképpen kaphatjuk meg a visszajárót, ha a pénztárgépben csak 20 és 50 forintosok vannak?

6. Egy szőlősgazda 3 fajta bort állított elő: 1 liter ára az elsőből 36 Ft, a másodikból 24 Ft, a harmadikból 16 Ft. E három fajta bor segítségével 360 liter olyan keveréket szeretne készíteni, amelynek literje 20 forintba kerül. Hány litert kell ehhez az egyes fajtákból összekevernie, feltéve, hogy mindegyikből egész számú litert szeretne felhasználni?

További feladatok

7. Bizonyítsuk be, hogy minden természetes számokból álló m, n számpárhoz van olyan $ax+by = c$ diofantikus egyenlet (ahol $a, b, c, \in \mathbb{Z}$ adottak), amelynek csak $x = m, y = n$ a természetes számok körében az egyetlen megoldása.

8. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számhoz van olyan $ax+by = c$ diofantikus egyenlet (ahol $a, b, c, \in \mathbb{Z}$ adottak), amelynek pontosan n megoldása van a természetes számokból álló párok körében.

9. Tetszőleges n pozitív egész és $a_1, a_2, ...a_n$ egészek esetén definiálhatjuk az $a_1, a_2, ..., a_n$ számok legnagyobb közös osztóját a következőképpen: Az $a_1, a_2, ..., a_n$ számok legnagyobb közös osztójának nevezünk egy d számot, ha:

- $\forall 1 \le i \le n : d \mid a_i$ és
- $\forall e \in \mathbb{Z} : (\forall 1 \le i \le n : e \mid a_i) \Rightarrow e \mid d.$

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n pozitív egész és $a_1, ..., a_n$ egészek esetén létezik az $a_1, a_2, ..., a_n$ számoknak legnagyobb közös osztója.

10. Adjuk meg az alábbi, háromismeretlenes lineáris diofantikus egyenletek összes (egész) megoldásást. Indokoljuk is válaszunkat.

a) $12x - 30y + 24z = 18$

b) $22x + 11y - 110z = 32$