1. feladatsor: Számelmélet

Maradékos osztás, osztási maradék

1. Az alábbi példákban osszuk el maradékosan a-t b-vel és határozzuk meg a hányadost és a maradékot:
(a) $a = 20$, $b = 6$ (b) $a = -71$, $b = 5$ (c) $a = 102$, $b = -7$
(d) $a = -68$, $b = -11$ (e) $a = 5$, $b = 12$ (f) $a = -104$, $b = 8$
(g) $a = -327$, $b = -42$ (h) $a = -3$, $b = 12$

2. (a) Legyenek a és b egészek, melyekre $a \mod 7 = 3$ és $b \mod 7 = 6$. Határozzuk meg a következőket, igazolva is állításunkat:

(i) $a + b \mod 7$ (ii) $a - b \mod 7$ (iii) $ab \mod 7$

(b) Legyenek a, b és $m \neq 0$ egészek. Bizonyítsuk be, hogy

(i) $a + b \mod m$ (ii) $a - b \mod m$ (iii) $ab \mod m$

meghatározható csupán ($a \mod m$) és ($b \mod m$) függvényeként (a és b pontos értékének ismerete nélkül is).

3. Határozzuk meg a következőket:
(a) $2019^3 \mod 6$ (b) $2019^{32} \mod 7$ (c) $2019^{288} \mod 7$
(d) 1017677^{838} utolsó számjegye (10-es számrendszerben)

Számrendszerek

4. Írjuk fel a következő, 10-es alapú számrendszerben megadott számokat (i) 2-es alapú (ii) 3-as alapú (iii) 5-ös alapú számrendszerben

a) 674 b) 1864 c) 376529

5. Végezzük el a megadott műveleteket az adott számrendszerben:
(a) $1001100_{(2)} + 10101101_{(2)}$ (b) $1001_{(2)} \cdot 1101_{(2)}$ (c) $1221_{(3)} \cdot 112_{(3)}$
(d) $1234_{(5)} + 4321_{(5)}$ (e) $1234_{(5)} \cdot 4321_{(5)}$ (f) $1236_{(7)} + 6321_{(7)}$
(g) $10011001_{(2)} : 101_{(2)}$ (h) $12011_{(3)} : 201_{(3)}$

Oszthatósággal kapcsolatos feladatok

Az alábbi, oszthatósággal kapcsolatos feladatoknál használhatjátok a középiskolában tanultakat is:

6. Bizonyítsuk be, hogy 6 osztója az $n(n + 1)(2n + 1)$-nek, ahol n egész szám.

7. Jelöljön m egész számot. Bizonyítsuk be, hogy $m^5 - m$ osztható 30-cal.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha a 4-gyel nem osztható páros szám, akkor $a(a^2 - 1)(a^2 - 4)$ osztható 960-nal.

9. Bizonyítsuk be, hogy három egymást következő egész szám köbének összege osztható

a) a középső szám 3-szorosával   b) 9-cel

10. Bizonyítsuk be, hogy ha a tizes számrendszerben ábrázolt bármelyik háromjegy természetes számot kétszer egymás mellé írjuk, akkor az így kapott hatjegyű szám osztható 7-tel, 11-gyel és 13-mal.

11. Lássuk be, hogy két páratlan szám négyzetének különbsége mindig osztható 8-cal.

12. Melyek igazak az alábbi állítások közül? Bizonyítsuk is állításunkat az oszthatóság definíciója, illetve ellenpélda segítségvel:

a) $c|a+b \Rightarrow c|a \wedge c|b$;   b) $c|a+b \wedge c|a \Rightarrow c|b$;   c) $c|a+b \wedge c|a-b \Rightarrow c|a \wedge c|b$;
d) $c|a \wedge d|a \Rightarrow cd|a$;   e) $c|ab \Rightarrow c|a \vee c|b$;   f) $c|a \wedge d|b \Rightarrow cd|ab$;
g) $c|2a+5b \wedge c|3a+7b \Rightarrow c|a \wedge c|b$

További feladatok

13. Tegyük fel, hogy az (a, b, c számjegyekbol álló) abc háromjegyu szám osztató 37-tel. Igazoljuk, hogy ekkor a bca szám is osztható 37-tel.

14. Bizonyítsuk be, hogy ha $5a+9b$ osztható 23-mal, akkor $3a+10b$ is osztható 23-mal.

15. Mely c egészekre lesz $(c^6-3) = (c^2+2)$ is egész szám?

16. Igazoljuk, hogy minden n természetes számra $133|11^{n+2}+12^{2n+1}$.

17. Létezik-e olyan szám, amelyben csak az 1 és 2 számjegyek fordulnak elo, és amely osztható 2^{1000}-nel?

18. Adjunk szabályt annak eldöntésére, hogy egy szám osztható-e az alábbiakkal és bizonyítsuk is be azt:

1. 7-tel;   2. 11-gyel   3. 13-mal;   4. 17-tel;   5. 19-cel.

19. A szultán 100 cellájában száz rab raboskodik. A szultán leküldi egymás után 100 emberét. A k-adik alkalommal leküldött ember minden k-adik cella zárján állít egyet, ha nyitva volt, bezárja, ha zárva volt, akkor kinyitja. Kezdetben minden cella zárva volt. Mely sorszámú cellák lesznek a végén nyitva?

20. Bizonyítsuk be, hogy öt egymást követo szám négyzetének összege sosem lesz négyzetszám.

21. Bebizonyítható, hogy tetszoleges $b < -1$ egész esetén bármely a egész felírható b alapú számrendszerben, azaz $a = \sum_{i=0}^{k} a_i b^i$ alakban, ahol $\forall 0 \leq i \leq k$-ra: $0 \leq a_i \leq |b|-1$. Írjuk fel az alábbi számokat -5 alapú számrendszerben: a) -121 b) 127 c) 2636