3. GYAKORLAT

Lineáris egyenletrendszer (LER) megoldása Gauss-eliminációval, mátrix determinánsának és inverzének kiszámítása

1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Oldjuk meg az $A\underline{x} = \underline{b}$ LER-t

(a) GE-vel sor- és oszlopcsere nélkül;

(b) részleges főelemkiválasztással GE-vel.

(c) Mennyi az A determinánsa?

(d) Számítsuk ki az A mátrix inverzét GE-vel!

2. Oldjuk meg Gauss-eliminációval mindkét LER-t!

$$\begin{array}{lcl|l} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 3 & 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 & = & 5 & 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 8 & 8 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 & = & 2 & 0 \end{array}$$

3. Számítsuk ki az A mátrix determinánsát és inverzét Gauss-eliminációval!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg a következő mátrix inverzét Gauss-eliminációval!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Adott a lineáris egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $0 < \varepsilon << 1$.

(a) Oldjuk meg a LER-t GE-vel sorcsere nélkül.

(b) Legyen $\varepsilon = 10^{-17}$, oldjuk meg a LER-t GE-vel sorcsere nélkül úgy, hogy 16 értékes jeggyel számolunk.

(c) Oldjuk meg a LER-t részleges főelemkiválasztású Gauss eliminációval.

6. Oldjuk meg az $A\underline{x} = \underline{b}$ LER-t Gauss-eliminációval, ahol az A olyan $n \times n$-es szalagmátrix, melyben a főátlóban 1-ek, a főátló alatti második átlóban (-1)-ek vannak.

MEGOLDÁS

1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Oldjuk meg az $A\underline{x} = \underline{b}$ LER-t

(a) GE-vel sor- és oszlopcsere nélkül!

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{S_2 - 2S_1 \to S_2 \\ S_3 - S_1 \to S_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \end{array}\right] \underset{S_3 - 2S_2 \to S_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

1. megoldás: visszahelyettesítéssel

$$4x_3 = 4 \quad \to \quad x_3 = 1,$$

$$2x_2 + x_3 = 2x_2 + 1 = -1 \quad \to \quad x_2 = -1,$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2x_1 - 1 + 3 = 1 \quad \to \quad x_1 = -\frac{1}{2}.$$

2. megoldás: Folytatjuk az eliminációt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{4}S_3 \to S_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{S_2 - S_3 \to S_2 \\ S_1 - 3S_3 \to S_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\frac{1}{2}S_2 \to S_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{S_1 - S_2 \to S_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{2}S_1 \to S_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A megoldás: $x_1 = -1/2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

(b) részleges főelemkiválasztású GE-vel

Megoldás: Az első oszlop legnagyobb abszolútértékű eleme 4, ezért felcseréljük az első és második sort:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 3 & 11/2 & 5/2 \end{array}\right]$$

A második oszlopban $\max\{3, |-1|\} = 3$, ezért felcseréljük a 2. és 3. sort:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 3 & 11/2 & 5/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 11/2 & 5/2 \\ 0 & -1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 11/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8/6 & 8/6 \end{array}\right]$$

és visszahelyettesítéssel megkapjuk a megoldást.

(c) Mennyi az A determinánsa?

Megoldás:

> Háromszögalakú mátrix determinánsa a főátlójában levő elemeinek szorzata.
>
> Az elemi sorműveletek hatása a determinánsra:
>
> i. sorcsere esetén a determináns (-1)-gyel szorzódik;
>
> ii. ha egy sort nemnulla számmal szorzunk, a determináns értéke ennek a számnak a reciprokával szorzódik;
>
> iii. ha sorhoz hozzáadjuk másik sor teszőleges számszorosát, a determináns értéke nem változik.

Az (a) részben, amikor elértük a felsőháromszög alakot, a diagonális elemek szorzata adja a mátrix determinánsát (csak a iii. elemi sorműveletet végeztük):

$$|A| = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16.$$

(d) Számítsuk ki az A mátrix inverzét GE-vel!

Megoldás:

> **Mátrix inverzének kiszámítása:**
> az $[\,A \,|\, I\,]$ szimultán LER-t $[\,I \,|\, A^{-1}\,]$ alakra hozzuk GE-vel.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \sim \\ S_2 - 2S_1 \to S_2 \\ S_3 - S_1 \to S_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \sim \\ S_3 - 2S_2 \to S_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{\frac{1}{4}S_3 \to S_3 \\ S_2 - S_3 \to S_2 \\ S_1 - 3S_3 \to S_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{11}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{\frac{1}{2}S_2 \to S_2 \\ S_1 - S_2 \to S_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \underset{\frac{1}{2}S_1 \to S_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{16} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Végül

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{16} \\ -\frac{11}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Ellenőrizzük az eredményt! ($A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$)

2. Oldjuk meg Gauss-eliminációval mindkét LER-t!

$$\begin{array}{lcl|l} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 3 & 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 & = & 5 & 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 8 & 8 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 & = & 2 & 0 \end{array}$$

Megoldás:

A feladatban két lineáris egyenletrendszerünk van, azonos alapmátrixszal, ezért a Gauss-eliminációt együttesen végezzük.

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

A negyedik sorból látszik, hogy a második lineáris egyenletrendszernek nincs megoldśa, ui. a bal oldalon csupa 0 áll, míg a jobb oldalon -2.

Az első egyenletrendszer megoldásához folytatjuk az eliminációt.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/5 & -3/5 & -1/5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7/5 & 2/5 & 14/5 \\ 0 & 1 & -3/5 & -3/5 & -1/5 \end{array}\right],$$

végül a megoldás

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/5 - 7/5r - 2/5s \\ -1/5 + 3/5r + 3/5s \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/5 \\ -1/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad + \quad r \cdot \begin{bmatrix} -7/5 \\ 3/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad + \quad s \cdot \begin{bmatrix} -2/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Számítsuk ki az A mátrix determinánsát és inverzét Gauss-eliminációval!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Az $[\,A\,|\,I\,]$ szimultán LER-t $[\,I\,|\,A^{-1}\,]$ alakra hozzuk GE-vel.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

innen az A mátrix inverze

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

és determinánsa $|A| = (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$ (az előjel negatív, mert egy sorcserét hajtottunk végre.).

4. Határozzuk meg a következő mátrix inverzét Gauss-eliminációval!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az inverz mátrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5. Adott a lineáris egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $0 < \varepsilon << 1$.

(a) Oldjuk meg a LER-t GE-vel sorcsere nélkül.

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 2 \\ 0 & 1-\frac{1}{\varepsilon} & 1-\frac{2}{\varepsilon} \end{array}\right],$$

innen visszahelyettesítéssel

$$x_2 = \frac{1-\frac{2}{\varepsilon}}{1-\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon-2}{\varepsilon-1} \approx 2, \qquad x_1 = \frac{2-\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon-1}}{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon-2-\varepsilon+2}{\varepsilon(\varepsilon-1)} = \frac{1}{\varepsilon-1} \approx -1.$$

(b) Legyen $\varepsilon = 10^{-17}$, oldjuk meg a LER-t GE-vel sorcsere nélkül úgy, hogy 16 értékes jeggyel számolunk.

Megoldás:

Most $\frac{1}{\varepsilon} = 10^{17}$ és $1-\frac{1}{\varepsilon} \approx -\frac{1}{\varepsilon}$, $1-\frac{2}{\varepsilon} \approx -\frac{2}{\varepsilon}$, és ekkor

$$\left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & -\frac{2}{\varepsilon} \end{array}\right],$$

melynek megoldása $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$.

(c) Oldjuk meg a LER-t részleges főelemkiválasztású Gauss eliminációval.

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\varepsilon & 2-\varepsilon \end{array}\right] \underset{\text{kerekítés után}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

és a megoldás $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

6. Oldjuk meg az $A\underline{x} = \underline{b}$ LER-t Gauss-eliminációval, ahol az A olyan $n \times n$-es szalagmátrix, melyben a főátlóban 1-ek, a főátló alatti második átlóban (-1)-ek vannak és $\underline{b} = \underline{e}_1$.

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Longrightarrow \\ S_3 + S_1 \to S_3, \\ S_4 + S_2 \to S_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Látható, hogy az első két változó eliminálásával az eredeti egyeletrendszerhez hasonló, $(n-2) \times (n-2)$-es mátrixú lineáris egyenletrendszert kapunk, és $x_1 = 1$ és $x_2 = 0$. Az eliminációt folytatva kapjuk, hogy páros n esetén a megoldás $(1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)$, páratlan n esetén pedig $(1, 0, 1, 0, \dots, 1)$.