



# Péndulo Doble con Fricción tipo Stokes

## Universidad Distrital Francisco José de Caldas

### Proyecto Curricular de Física

Mateo Maldonado  
20221107070

29 de octubre de 2025

## Introducción

El péndulo doble es un sistema mecánico clásico que consiste en dos masas unidas de manera secuencial mediante varillas rígidas. Su dinámica es altamente no lineal, y pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden producir trayectorias radicalmente distintas; esta sensibilidad es una de las firmas del comportamiento caótico.

En este trabajo se introduce además la presencia de **fricción tipo Stokes**, es decir, una fuerza disipativa proporcional a la velocidad de cada masa. La inclusión de disipación modifica la estructura hamiltoniana pura del sistema, pues el flujo ya no conserva energía. Sin embargo, es posible formular las ecuaciones de movimiento mediante la función de disipación de Rayleigh e integrar numéricamente el sistema mediante el método **Euler simpléctico**, el cual mantiene la estructura geométrica del espacio de fases en la medida de lo posible, incluso con disipación débil.

El estudio numérico de este sistema permite observar la transición entre un régimen caótico con energía prácticamente constante y uno donde la disipación atenúa progresivamente las oscilaciones, llevando al sistema hacia configuraciones más ordenadas conforme aumenta el coeficiente de fricción.

## Descripción del modelo

Para la simulación se implementó una clase **Pendulo** en C++, que encapsula los parámetros físicos, las variables dinámicas y el método de integración. La estructura general de la clase contiene:

- **Parámetros del sistema:** masas  $m_1, m_2$ , longitudes de las varillas  $l_1, l_2$ , y coeficientes de fricción  $b_1, b_2$ , donde cada coeficiente está relacionado con el medio por

$$b_i = 6\pi\eta r_i, \quad i = 1, 2.$$

- **Variables dinámicas:**

$$\theta_1, \theta_2 \quad (\text{ángulos}), \quad P_1, P_2 \quad (\text{momentos conjugados}).$$

En la parte pública, la clase incluye dos funciones principales:

- **inicie():** establece las condiciones iniciales del sistema,

$$\theta_1(0), \theta_2(0), P_1(0) = 0, P_2(0) = 0.$$

- **muevase():** implementa el método de integración **Euler simpléctico**, actualizando primero los momentos ( $P_1, P_2$ ) mediante las ecuaciones de Hamilton con disipación y luego los ángulos ( $\theta_1, \theta_2$ ).

## 1. Deducción de las ecuaciones de movimiento

Para deducir las ecuaciones del péndulo doble con fricción tipo Stokes es más adecuado usar la formulación Lagrangiana o Hamiltoniana. La aplicación directa de la segunda ley de Newton resulta demasiado compleja debido al carácter no lineal y acoplado del sistema.

El problema inicial es que la formulación de la mecánica lagrangiana parte de

$$L = T - V,$$

y no admite términos disipativos, pues se basa en la conservación de la energía. Para incluir disipación se introduce la **función de disipación de Rayleigh**, que modifica las ecuaciones de Euler–Lagrange de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\theta}_i} = 0.$$

### 1.1. Lagrangiano del sistema

El lagrangiano del péndulo doble es:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \left[ -(m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 - m_2gl_2 \cos \theta_2 \right]. \quad (1)$$

### 1.2. Función de disipación de Rayleigh

La función de disipación se escribe como:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\beta_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2 v_2^2,$$

donde para fricción tipo Stokes:

$$\beta_i = 6\pi\eta r, \quad i = 1, 2.$$

Las velocidades tangenciales de las masas son:

$$v_1^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2, \\ v_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{1}{2}\beta l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\beta \left( l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) \\ &= \beta l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\beta l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \beta l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (2)$$

### 1.3. Ecuaciones de movimiento

Aplicando las ecuaciones de Euler–Lagrange modificadas, se obtienen las ecuaciones de movimiento para  $\theta_1$  y  $\theta_2$ :

$$(m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 + 2\beta l_1^2 \dot{\theta}_1 + \beta l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0, \quad (3)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 gl_2 \sin \theta_2 + \beta l_2^2 \dot{\theta}_2 + \beta l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0. \quad (4)$$

## 2. Euler-Simplectico

Para hacer uso del metodo de integraci3n Euler simplectico que hace uso de la formulaci3n Hamiltoniana, obtendremos las ecuaciones de movimiento apartir de las ecuaciones de Hamilton, pero a1nadiendo el termino de disipaci3n de Rayleigh; que se ven de la forma:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Sea el Hamiltoniano del sistema pendulo doble con fricci3n tipo stokes:

$$H = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 + m_2 l_1 l_2 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right) \left(\frac{d\theta_2}{dt}\right) \cos(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 - m_2 gl_2 \cos \theta_2$$

Reformularemos esto, y escribiremos la energia cinetica de la forma:

$$T = \frac{1}{2m} p^2$$

Recordamos la energia cinetica de nuestro sistema:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 + m_2 l_1 l_2 \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right) \left(\frac{d\theta_2}{dt}\right) \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\theta}, \quad p$$

Creamos una matriz de inercia  $M(\theta_i)$

$$\mathbf{M}(\theta) = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}$$

siendo sus componentes:

$$a = (m_1 + m_2)l_1^2$$

$$b = m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$c = m_2 l_2^2$$

$$\mathbf{M}(\theta) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

el determinante esta matriz y su inversa son:

$$\det(\mathbf{M}) = ac - b^2$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & c \end{pmatrix}$$

Recordar que

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Entonces la energia cinetica la podemos escribir de la forma:

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}$$

$$T = \frac{1}{2 \det(M)} (c P_1^2 - 2b P_1 P_2 + a P_2^2)$$

Ahora haciendo uso de las ecuaciones de Hamilton con el termino de disipación de Rayleigh

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Las posiciones quedan:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \frac{cP_1 - bP_2}{\det(M)} \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{aP_2 - bP_1}{\det(M)}\end{aligned}$$

Para la segunda ecuación de Hamilton, que contiene el termino de disipación de Rayleigh, se hacen las derivadas pertinentes, ya que la posición esta explicita al igual que la velocidad en el hamiltoniano y la velocidad en  $\mathcal{R}$

$$\dot{P}_1 = -(m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 - \left[ (b_1 + b_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + b_2 l_1 l_2 \cos \Delta \dot{\theta}_2 \right],$$

$$\dot{P}_2 = -m_2 gl_2 \sin \theta_2 - \left[ b_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + b_2 l_1 l_2 \cos \Delta \dot{\theta}_1 \right].$$

Recordar que la velocidad la podemos expresar en terminos del momento, de tal forma

$$\Theta = M^{-1}P$$

Entonces usando euler-simpletico queda de la forma **Integrador de Euler simpléctico (paso  $h$ )**:

$$\begin{aligned}P_1^{n+1} &= P_1^n + h \dot{P}_1(\theta^n, P^n), \\ P_2^{n+1} &= P_2^n + h \dot{P}_2(\theta^n, P^n), \\ \theta_1^{n+1} &= \theta_1^n + h \dot{\theta}_1(\theta^n, P^{n+1}), \\ \theta_2^{n+1} &= \theta_2^n + h \dot{\theta}_2(\theta^n, P^{n+1})\end{aligned}$$

### 3. Metodos de caracterización

#### Cálculo del exponente de Lyapunov

El exponente de Lyapunov cuantifica la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales. Para estimarlo numéricamente se simulan dos péndulos con condiciones iniciales casi idénticas, separados por una pequeña desviación inicial  $\epsilon$  en alguno de los ángulos:

$$\delta(0) = |\theta_1 - \theta'_1|.$$

A medida que evoluciona el sistema, se mide:

$$\delta(t) = |\theta_1(t) - \theta'_1(t)|.$$

El exponente de Lyapunov se obtiene del ajuste:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\delta(t)}{\delta(0)} \right).$$

Un valor  $\lambda > 0$  indica comportamiento caótico, mientras que  $\lambda < 0$  señala convergencia hacia un estado estable.

## Secciones de Poincaré

Una sección de Poincaré permite visualizar la estructura del espacio de fases reduciendo la dinámica continua a puntos discretos. En este sistema, una sección común consiste en registrar los valores de  $(\theta_1, P_1)$  cada vez que  $\theta_2 = 0$  y  $\dot{\theta}_2 > 0$ .

Un patrón **cerrado y suave** en la sección indica movimiento cuasiperiódico u ordenado, mientras que un patrón **irregular y disperso** revela caos.

## 4. Condiciones de la simulación

Las condiciones iniciales para el sistema son:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{6},$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0.$$

Los parámetros de masa y longitud del péndulo son:

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad l_1 = 1, \quad l_2 = 1.$$

Durante la simulación se variará el parámetro de disipación  $\beta$  para analizar su efecto en la dinámica del sistema.

## 5. Resultados

Para condiciones iniciales de:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \pi/2, & \theta_2 &= \pi/2, \\ \beta_1 &= \beta_2 = 0,1, & m_1 &= m_2 = 1.\end{aligned}$$

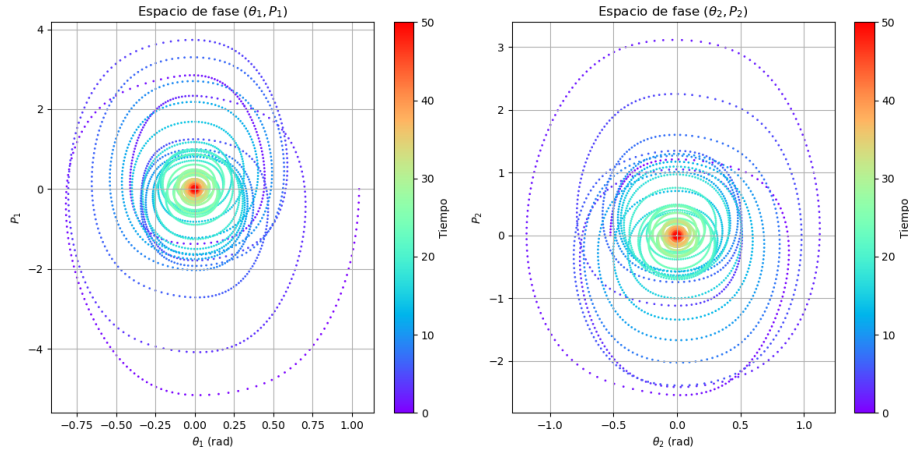


Figura 1: Espacio de fase del péndulo doble con fricción tipo Stokes.

Con una pequeña variación en las condiciones iniciales  $\epsilon = 0,01$ , se obtiene el exponente de Lyapunov:

## 6. Conclusiones

- Modelar el péndulo doble lo más cercano a la realidad posible permite un control del caos en la solución del sistema.
- La fricción, en este caso, actúa como un parámetro que controla el comportamiento caótico del sistema.
- El método de integración permite observar el comportamiento de la energía en un sistema abierto.



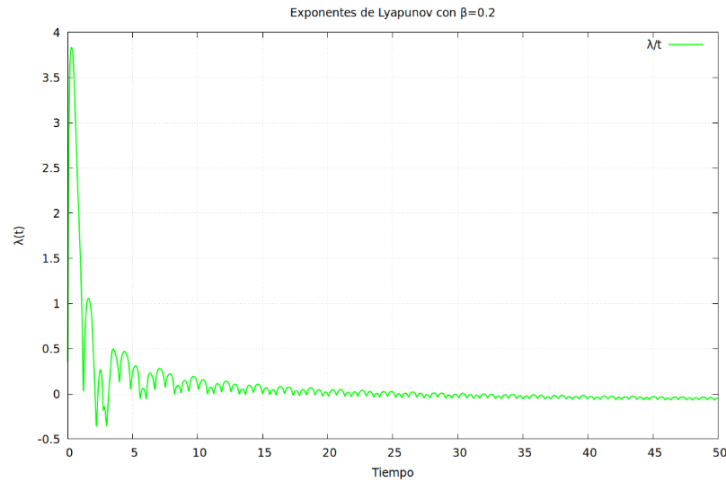


Figura 2: Cálculo del exponente de Lyapunov para el péndulo doble.

## 7. Bibliografía

### Referencias

- [1] “El péndulo doble”. *Física: SC EHU*. Disponible en: [https://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/pendulo\\_doble/pendulo\\_doble.htm](https://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/pendulo_doble/pendulo_doble.htm) (Consultado el 16 de julio de 2025).
- [2] “10.4: Rayleigh’s Dissipation Function”. *Variational Principles in Classical Mechanics*, Physics LibreTexts. Disponible en: [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical\\_Mechanics/Variational\\_Principles](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Variational_Principles) (Consultado el 20 de septiembre de 2025).
- [3] E. Hairer, C. Lubich y G. Wanner. *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer, 2.<sup>a</sup> edición, 2006. ISBN: 978-3-540-30666-8.