



(86.04) ANÁLISIS DE CIRCUITOS

TRABAJO PRÁCTICO: Síntesis de Filtros

Curso: 2

27 de Noviembre de 2024

Berni, Franco 110007 fberni@fi.uba.ar

Resumen—Este trabajo presenta un análisis detallado del diseño práctico de un filtro. Se estudia una función de transferencia dada a través de sus singularidades y se calculan respuestas analíticas al impulso, escalón y sinusoides. Se diseña un circuito que implemente la transferencia, haciendo uso de filtros inversores y de ganancia infinita concatenados. Se realizan simulaciones y mediciones del circuito real para validar el diseño teórico. Se analizan las diferencias obtenidas y sus causas.

I. ANÁLISIS DE TRANSFERENCIA

I-A. Polos y Ceros

La transferencia a analizar es

$$H(s) = 2 \frac{(s/60)(s/700 + 1)}{(s/60 + 1)(s^2/2000^2 + s/3000 + 1)}.$$

La misma presenta dos ceros simples en

$$z_1 = 0 \quad \text{y} \quad z_2 = -700,$$

un polo simple en $p_1 = -60$ y un par de polos complejos conjugados

$$p_{2,3} = 2000(-1/3 \pm j2\sqrt{2}/3).$$

La ganancia del filtro es $K = 2$.

Para el par de complejos conjugados se puede reexpresar

$$\frac{s^2}{2000^2} + \frac{s}{3000} + 1 = \frac{s^2}{2000^2} + \frac{s}{\frac{3}{2}2000} + 1,$$

por lo que para el par de polos se tiene

$$w_0 = 2000 \quad \text{y} \quad Q = 3/2.$$

En la Figura 1 se muestra el diagrama de polos y ceros de la transferencia.

I-B. Respuesta al Impulso

Se denomina respuesta al impulso a la salida resultante de aplicar a la entrada la función δ de Dirac, es decir, un impulso.

La salida del filtro $v_o(t)$ cumple en el dominio complejo que $V_o(s) = H(s)V_i(s)$. Además, se tiene que $v_i(t) =$

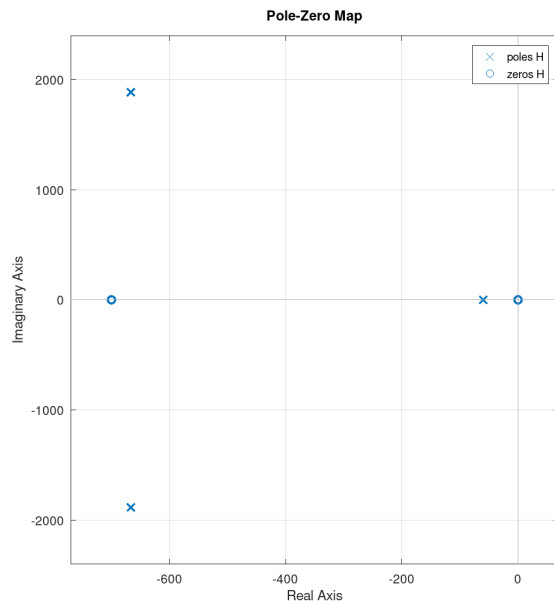
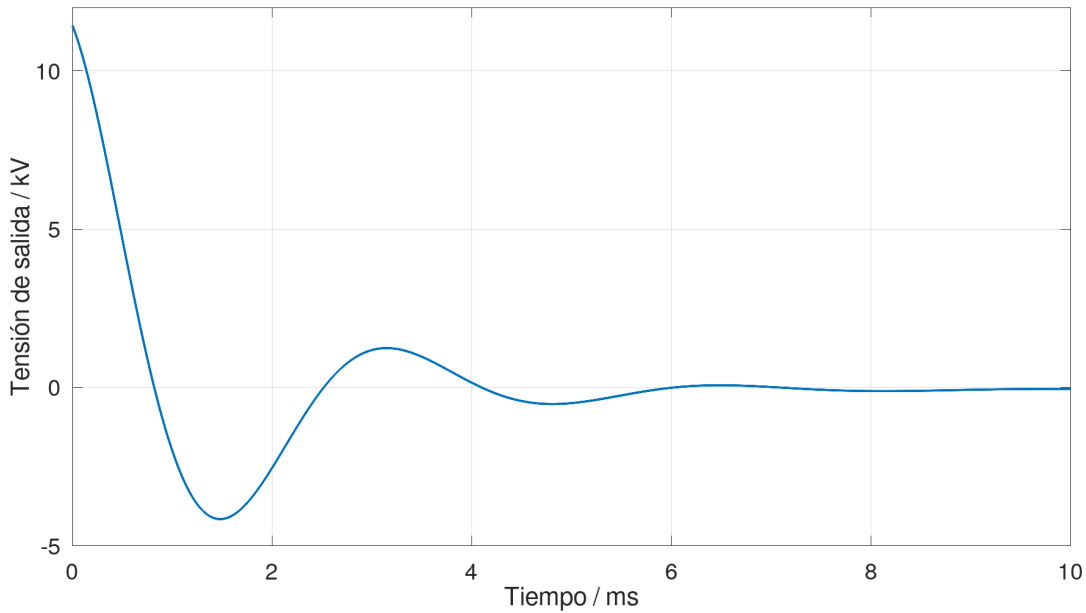


Figura 1. Diagrama de polos y ceros de la transferencia bajo análisis.

$\delta(t)$. Como la transformada de Laplace de la δ es 1, entonces $V_o(s) = H(s)$. Se puede hallar la salida en función del tiempo antitransformando $H(s)$, hallando la respuesta al impulso $h(t)$.

Primero se reexpresa $H(s)$ para poder hallar su expansión en fracciones simples

$$\begin{aligned} H(s) &= 2 \frac{(s/60)(s/700 + 1)}{(s/60 + 1)(s^2/2000^2 + s/3000 + 1)} \\ &= \frac{80k}{7} \frac{s(s + 700)}{(s + 60)(s^2 + 4000s/3 + 2000^2)} \\ &= \frac{80k}{7} \frac{s(s + 700)}{(s + 60)(s - p_2)(s - p_3)} \\ &= \frac{A_0}{s + 60} + \frac{B_0}{s - p_2} + \frac{B_0^*}{s - p_3} \end{aligned}$$

Figura 2. Respuesta al impulso de la transferencia H obtenida analíticamente.

Se puede hallar los coeficientes A_0 y B_0 por el método de los residuos.

$$\begin{aligned} A_0 &= \lim_{s \rightarrow -60} H(s)(s + 60) \\ &= \lim_{s \rightarrow -60} \frac{80k}{7} \frac{s(s + 700)}{(s - p_2)(s - p_3)} \\ &= \frac{80k}{7} \frac{-60(-60 + 700)}{(-60 - p_2)(-60 - p_3)} \\ &\approx -111,85 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_0 &= \lim_{s \rightarrow p_2} H(s)(s - p_2) \\ &= \lim_{s \rightarrow p_2} \frac{80k}{7} \frac{s(s + 700)}{(s + 60)(s - p_3)} \\ &= \lim_{s \rightarrow p_2} \frac{80k}{7} \frac{p_2(p_2 + 700)}{(p_2 + 60)(p_2 - p_3)} \\ &\approx 5770,2 + j62,819 \end{aligned}$$

Ahora, sabiendo que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s - \alpha} \right] (t) = K \exp(\alpha t) u(t)$$

y que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s - (-\alpha + j\omega_d)} + \frac{K^*}{s - (-\alpha - j\omega_d)} \right] (t) \\ = 2|K| \exp(\alpha t) \cos(\omega_d t + \arg(K)) u(t) \end{aligned}$$

se puede hallar la respuesta al impulso:

$$\begin{aligned} h(t) &= A_0 \exp(-60t) u(t) \\ &\quad + 2|B_0| \exp \left(-\frac{2000}{3} t \right) \\ &\quad \cos \left(\frac{4000\sqrt{2}}{3} t + \arg(B_0) \right) u(t) \\ &\approx -111,85 e^{-60t} u(t) \\ &\quad + 11541 e^{-666,67t} \cos(1885,6t + 0,6237^\circ) u(t) \end{aligned}$$

Esta respuesta al impulso tiene como constante de tiempo dominante $\tau = 16,67$ ms y la frecuencia de la oscilación es de $1885,6 \text{ rad s}^{-1}$. La respuesta al impulso obtenida se muestra en la Figura 2.

I-C. Respuesta al Escalón

La respuesta al escalón es la salida del filtro resultante de aplicar como entrada la función $u(t)$ de Heavyside. Dado que su transformada de Laplace es $U(s) = 1/s$, se puede hallar la transformada de la respuesta al escalón como $V_o(s) = H(s)/s$. Luego, encontrando su expansión en fracciones simples de manera similar al caso anterior se puede hallar la respuesta al escalón en el dominio del tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} H(s) &= \frac{80k}{7} \frac{(s + 700)}{(s + 60)(s - p_2)(s - p_3)} \\ &= \frac{A_1}{s + 60} + \frac{B_1}{s - p_2} + \frac{B_1^*}{s - p_3} \end{aligned}$$

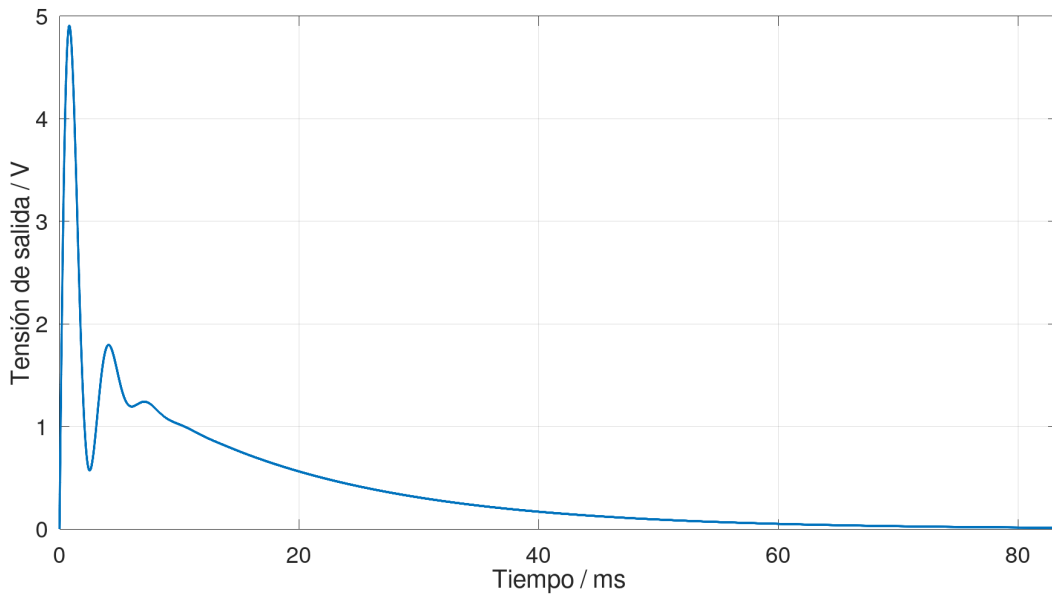


Figura 3. Respuesta al escalón de la transferencia H obtenida analíticamente.

Se calculan los coeficientes por el método de los residuos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{s \rightarrow -60} \frac{1}{s} H(s)(s + 60) \\ &= \lim_{s \rightarrow -60} \frac{80k}{7} \frac{(s + 700)}{(s - p_2)(s - p_3)} \\ &= \frac{80k}{7} \frac{(-60 + 700)}{(-60 - p_2)(-60 - p_3)} \\ &\approx -1,8642 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \lim_{s \rightarrow p_2} \frac{1}{s} H(s)(s - p_2) \\ &= \lim_{s \rightarrow p_2} \frac{80k}{7} \frac{(s + 700)}{(s + 60)(s - p_3)} \\ &= \lim_{s \rightarrow p_2} \frac{80k}{7} \frac{(p_2 + 700)}{(p_2 + 60)(p_2 - p_3)} \\ &\approx -0,93209 - j2,7306 \end{aligned}$$

Se puede entonces obtener la respuesta al escalón anti-transformando el resultando:

$$\begin{aligned} v_o(t) &= A_1 \exp(-60t)u(t) \\ &\quad + 2|B_1| \exp\left(-\frac{2000}{3}t\right) \\ &\quad \cos\left(\frac{4000\sqrt{2}}{3}t + \arg(B_1)\right) u(t) \\ &\approx -1,8642e^{-60t}u(t) \\ &\quad -5,7706e^{-666,67t} \cos(1885,6t + 71,15^\circ)u(t) \end{aligned}$$

Esta respuesta al escalón tiene como constante de tiempo dominante $\tau = 16,67$ ms y la frecuencia de la oscilación es de $1885,6 \text{ rad s}^{-1}$. La respuesta al escalón obtenida se muestra en la Figura 3.

I-D. Respuesta al Sinusoide

La respuesta al senoide es la salida resultante del filtro al aplicar en su entrada una señal senoidal. Se eligió para calcular la respuesta a una senoidal de amplitud 1 V y frecuencia angular de 2000 rad s^{-1} :

$$v_i(t) = \sin(2000t),$$

cuya transformada de Laplace es

$$V_i(s) = 2000/(s^2 + 2000^2).$$

En forma análoga a las respuestas anteriores, se puede calcular la transformada de la respuesta como $V_o(s) = V_i(s)H(s)$, para luego hallar la respuesta en el dominio temporal por medio de una antitransformación.

Reexpresando $V_o(s) = V_i(s)H(s)$:

$$\begin{aligned} V_i(s)H(s) &= \frac{160M s(s + 700)}{7(s + 60)(s - p_2)(s - p_3)(s - w)(s - w^*)} \\ &= \frac{A_2}{s + 60} + \frac{B_2}{s - p_2} + \frac{B_2^*}{s - p_3} \\ &\quad + \frac{C_2}{s - w} + \frac{C_2^*}{s - w^*} \end{aligned}$$

donde $w = j2000$.

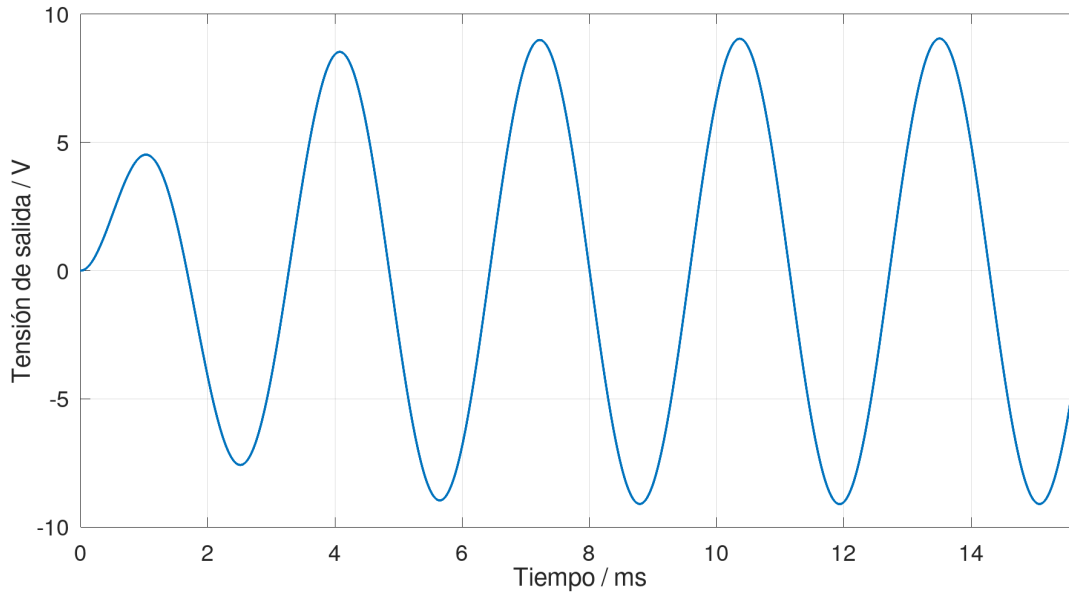


Figura 4. Respuesta al senoide de 2000 rad s^{-1} de la transferencia H obtenida analíticamente.

Se calculan los coeficientes por el método de los residuos: puesta al senoide:

$$\begin{aligned} A_2 &= \lim_{s \rightarrow -60} V_i(s)H(s)(s+60) \\ &= \lim_{s \rightarrow -60} \frac{160M s(s+700)}{7(s-p_2)(s-p_3)(s-w)(s-w^*)} \\ &= \frac{160M (-60)(-60+700)}{7(-60-p_2)(-60-p_3)(-60-w)(-60-w^*)} \\ &\approx -0,055875 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \lim_{s \rightarrow p_2} V_i(s)H(s)(s-p_2) \\ &= \lim_{s \rightarrow p_2} \frac{160M s(s+700)}{7(s+60)(s-p_3)(s-w)(s-w^*)} \\ &= \frac{160M p_2(p_2+700)}{7(p_2+60)(p_2-p_3)(p_2-w)(p_2-w^*)} \\ &\approx 1,3981 + j4,0959 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \lim_{s \rightarrow w} V_i(s)H(s)(s-w) \\ &= \lim_{s \rightarrow w} \frac{160M s(s+700)}{7(s+60)(s-p_2)(s-p_3)(s-w^*)} \\ &= \frac{160M w(w+700)}{7(w+60)(w-p_2)(w-p_3)(w-w^*)} \\ &\approx -1,3702 - j4,3268 \end{aligned}$$

Antitransformando el resultado, se tiene la siguiente res-

$$\begin{aligned} v_o(t) &= A_2 \exp(-60t)u(t) \\ &\quad + 2|B_2| \exp\left(-\frac{2000}{3}t\right) \cos\left(\frac{4000\sqrt{2}}{3}t + \arg(B_2)\right) u(t) \\ &\quad + 2|C_2| \cos(2000t + \arg(C_2)) u(t) \\ &\approx -0,055875 e^{-60t} u(t) \\ &\quad + 8,6555 e^{-666,67t} \cos(1885,6t + 71,15^\circ) u(t) \\ &\quad - 9,0771 \cos(2000t + 72,43^\circ) u(t) \end{aligned}$$

La respuesta presenta un transitorio cuya constante de tiempo dominante es 16,67 ms, tras el cual la respuesta es una senoide desfasada y amplificada hasta un valor pico de 9,0771 V. En la Figura 4 se grafica la respuesta al senoide obtenida.

II. DISEÑO DEL FILTRO

Para el diseño del filtro, se decidió factorizar la transferencia H de la siguiente manera:

$$H(s) = \underbrace{\frac{-s/60}{s^2/2000^2 + s/3000 + 1}}_{H_1(s)} \underbrace{(-2) \frac{s/700 + 1}{s/60 + 1}}_{H_2(s)},$$

de tal manera que H_1 cuenta con un cero en $s = 0$ y un par de polos complejos conjugados, pudiendo ser implementada a con un filtro pasa banda tipo ganancia infinita; la H_2 resultante se implementa con un operacional conectado en configuración inversor. Dado que la conexión

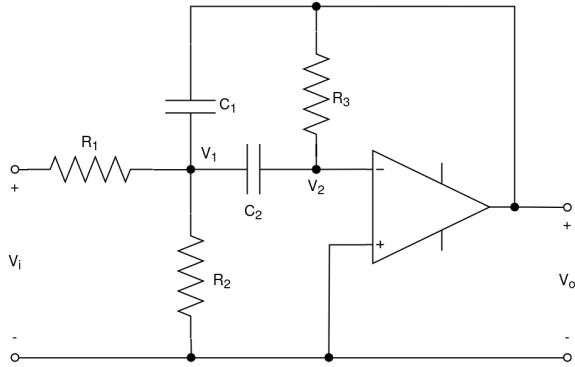


Figura 5. Esquemático del filtro pasabanda de ganancia infinita.

en serie de dos filtros resulta en una transferencia total que es el producto de las individuales, el circuito final será la concatenación de H_1 y H_2 .

II-A. Filtro Pasabanda de Ganancia Infinita

Para la implementación de la transferencia H_1 se utiliza un filtro pasabanda de ganancia infinita, cuyo esquemático se muestra en la Figura 5.

Para obtener la transferencia de este filtro, notar que $V_2 = 0$ pues su tensión es igual a la tensión de la entrada no inversora del operacional. Planteando el nodo V_2 , se tiene

$$0 = \underbrace{V_2}_{=0} \left(\frac{1}{R_3} + sC_2 \right) - V_1(sC_2) - V_o \left(\frac{1}{R_3} \right),$$

y despejando V_1 queda

$$V_1 = -V_o \left(\frac{1}{sR_3C_2} \right). \quad (1)$$

Planteando el nodo V_1 se tiene

$$0 = V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + s(C_1 + C_2) \right) - V_i \left(\frac{1}{R_1} \right) - V_o(sC_1) - \underbrace{V_2}_{=0}(sC_2).$$

Reemplazando la Ecuación (1) en la expresión, se obtiene

$$0 = -V_o \left(\frac{1}{sR_3C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{C_1 + C_2}{R_3C_2} + sC_1 \right) - V_i \left(\frac{1}{R_1} \right)$$

Tabla I
VALORES DE COMPONENTES DEL FILTRO PASABANDA

Componente	Exacto	Estandarizado	Diferencia /%
C_1	10 nF	10 nF	0,0
C_2	220 nF	220 nF	0,0
R_1	1,5 kΩ	1,5 kΩ	0,0
R_2	42,86 kΩ	43 kΩ	0,3
R_3	78,41 kΩ	75 kΩ	4,3

Multiplicando por s/C_1 y despejando V_o/V_i se obtiene la transferencia del filtro

$$0 = -V_o \left(\frac{1}{R_3C_1C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + s \frac{C_1 + C_2}{R_3C_1C_2} + s^2 \right) - V_i \left(\frac{s}{R_1C_1} \right)$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{-s/(R_1C_1)}{s^2 + s(1/C_1 + 1/C_2)/R_3 + \frac{1/R_1 + 1/R_2}{R_3C_1C_2}} \quad (2)$$

Dado que se quiere obtener un filtro con transferencia

$$H_1(s) = \frac{-s/60}{s^2/2000^2 + s/3000 + 1} = \frac{-s/(3/200k)}{s^2 + 4000s/3 + 4M},$$

comparando con la expresión de la Ecuación (2) se obtienen las siguientes relaciones

$$R_1C_1 = \frac{3}{200k}$$

$$\frac{1}{R_3} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{4000}{3}$$

$$\frac{1}{R_3C_1C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 4M$$

Eligiendo los valores comerciales $C_1 = 10$ nF y $C_2 = 220$ nF, se despejan los demás valores, los cuales se muestran en la Tabla I. Dado que los valores de resistores obtenidos no son comerciales, se eligieron los componentes estandarizados E24 más cercanos. La diferencia relativa para cada componente se muestra en la misma tabla.

Con los valores estandarizados elegidos, la transferencia H_1 realmente obtenida es

$$H_1(s) = \frac{-s/(15\mu)}{s^2 + 1393,9s + 4,1813M} = -0,9566 \frac{s/60}{s^2/2044,8^2 + s/(1,467 \cdot 2044,8) + 1}$$

El par de polos complejos conjugados ahora tiene $w_0 = 2044,8$ y $Q = 1,467$, una diferencia relativa de 2,2% en ambos casos respecto de los valores deseados de $w_0 = 2000$ y $Q = 1,5$. La ganancia del filtro es de

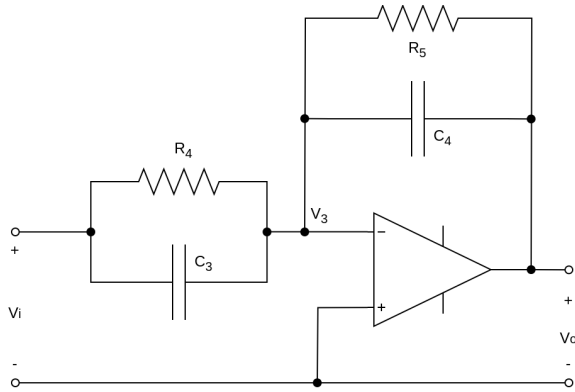


Figura 6. Esquemático del filtro inversor.

$K = -0,9566$, una diferencia de 4,3 % respecto de la ganancia unitaria deseada.

II-B. Filtro Inversor

Para la implementación de la transferencia H_2 se utilizó un amplificador operacional conectado en forma de inversor, según se muestra en la Figura 6.

Se puede obtener la transferencia del circuito planteando el nodo V_3 . Primero notar que $V_3 = 0$ pues su tensión es igual a la tensión de la entrada no inversora. Entonces, queda

$$0 = \underbrace{V_3}_{=0} \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + s(C_3 + C_4) \right) - V_i \left(\frac{1}{R_4} + sC_3 \right) - V_o \left(\frac{1}{R_5} + sC_4 \right),$$

Multiplicando por $R_4 R_5$ y despejando V_o/V_i se tiene

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_5}{R_4} \frac{1 + sC_3 R_4}{1 + sC_4 R_5}. \quad (3)$$

Dado que se desea una transferencia

$$H_2(s) = -2 \frac{1 + s/700}{1 + s/60},$$

comparando con la Ecuación (3) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{R_5}{R_4} &= 2 \\ C_3 R_4 &= \frac{1}{700} \\ C_4 R_5 &= \frac{1}{60} \end{aligned}$$

Eligiendo el valor comercial $C_4 = 220$ nF, se despejan los demás valores, los cuales se muestran en la Tabla II. Nuevamente, se eligieron los valores E24 más cercanos para los resistores, y E12 para el capacitor restante. Las diferencias relativas se muestran en la tabla.

Tabla II
VALORES DE COMPONENTES DEL FILTRO INVERSOR

Componente	Exacto	Estandarizado	Diferencia /%
C_3	37,71 nF	39 nF	3,4
C_4	220 nF	220 nF	0,0
R_4	37,88 kΩ	39 kΩ	3,0
R_5	75,76 kΩ	75 kΩ	1,0

Con estos valores estándar, la transferencia que se obtiene es

$$H_2(s) = -1,9231 \frac{1 + s/657,46}{1 + s/60,606}.$$

Por lo que las frecuencias del polo y el cero obtenidos difieren en 1,0 % y 6,1 %, respectivamente, de las deseadas. La ganancia obtenida de $-1,9231$ difiere del objetivo de -2 en 3,8 %.

II-C. Concatenación de Filtros

Una vez obtenidos los circuitos individuales cuyas transferencias son H_1 y H_2 , se puede obtener H por medio de la conexión en cascada de ambos filtros. La impedancia de entrada del circuito con respuesta H_1 a bajas frecuencias es de 44,5 kΩ, por estar en serie los resistores R_1 y R_2 , y debido a que los capacitores se comportan como circuitos abiertos en continua. Para altas frecuencias, la impedancia de C_2 se hace muy baja, por lo que a la entrada de esta etapa se tiene una impedancia de 1,5 kΩ—el valor de R_1 . Dado que la impedancia de salida de la etapa con transferencia H_2 es muy baja respecto de los 1,5 kΩ que la cargan al hacer la conexión en cascada, no habrá efecto de carga apreciable. Por lo tanto, la transferencia del circuito multietapa será $H(s) = H_1(s)H_2(s)$, tal como se desea.

El circuito entonces queda como se muestra en la Figura 7. La transferencia obtenida con los valores estándar es

$$H(s) = \frac{1,8396 (s/60)(s/657,46 + 1)}{(s/60,606 + 1)(s^2/2044,8^2 + s/3000 + 1)}$$

Comparando con la transferencia original, el cero simple en $s = -700$ se movió a $s = -657,46$, lo que representa un error del 6,1 %. El polo simple en $s = -60$ se desplazó hasta $s = -60,606$, representando una variación de solo el 1,0 %. El w_0 del polo complejo conjugado se movió un 2,2 % desde 2000 rad s⁻¹ hasta 2044,8 rad s⁻¹. El Q disminuyó hasta 1.467 desde 1.5, un cambio del 2,2 %. La ganancia de la transferencia también disminuyó, desde 2 hasta 1.8396, representando el mayor cambio porcentual del 8,2 %. Se observa entonces que la transferencia normalizada no presenta diferencias excesivas respecto de la transferencia original.

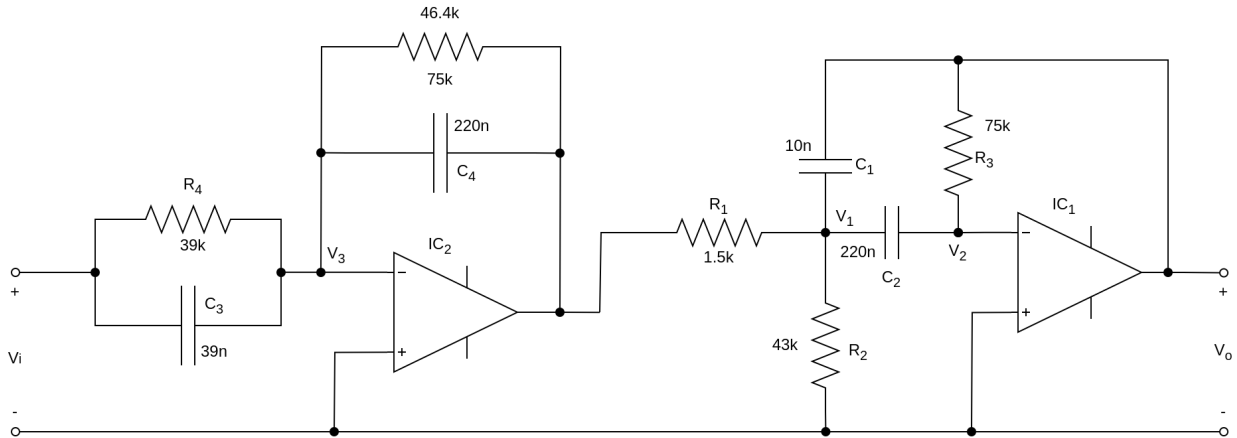


Figura 7. Esquema del filtro multietapa.

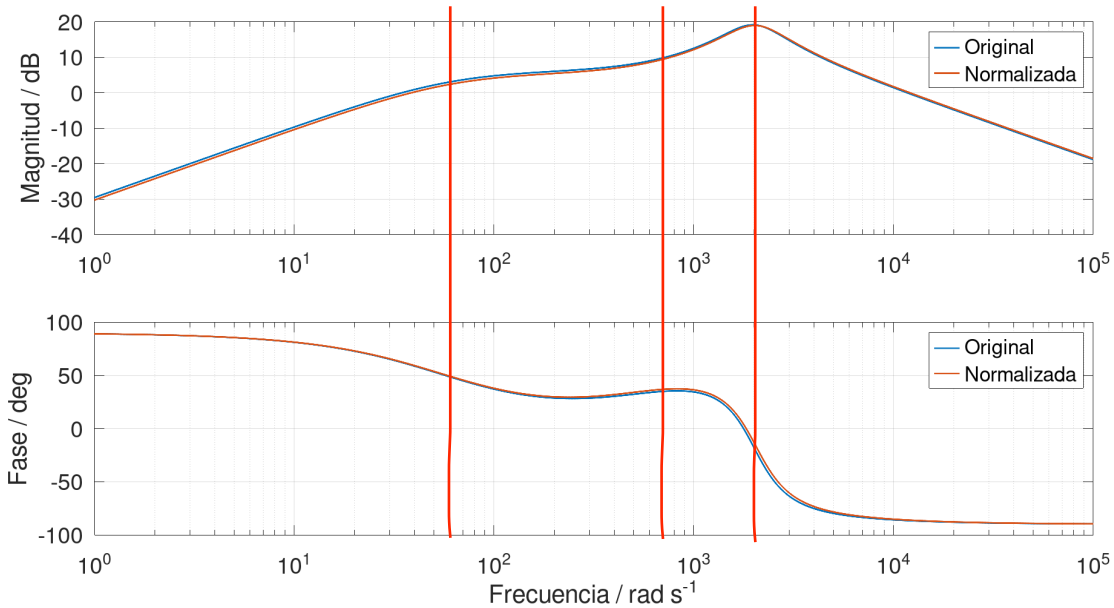


Figura 8. Diagrama de Bode de módulo y fase de la transferencia original y normalizada.

III. SIMULACIONES

III-A. Simulaciones Numéricas

Utilizando el software Octave se realizaron diferentes simulaciones para la transferencia original y la de valores normalizados. Los resultados se presentan a continuación.

En la Figura 8 se muestra el diagrama de Bode de módulo y fase de ambas transferencias. Se observa un crecimiento inicial de la magnitud hasta aproximadamente $\omega = 100$, donde el mismo se aplana. Nuevamente se observa un crecimiento, y un pico en $\omega = 2000$, seguido de un decrecimiento asintótico de -20 dB por década hacia frecuencias infinitas. La transferencia se comporta casi

como un filtro pasabanda. La fase comienza en un retraso de 90° a frecuencia nula, decayendo primero lentamente y luego de manera abrupta en el pico de $\omega = 2000$. Hacia frecuencias infinitas tiene a un desfase de -90° .

Se observa que tanto el módulo como la fase de las transferencias coinciden en la forma, pero la normalizada presenta un módulo ligeramente menor así como un desfase más grande. A modo de ejemplo, en $\omega = 10$ la transferencia original tiene una ganancia de $-9,66$ dB, mientras que la normalizada es $0,72$ dB más chica, es decir, de $-10,38$ dB.

La Figura 9 muestra la respuesta al escalón de ambas

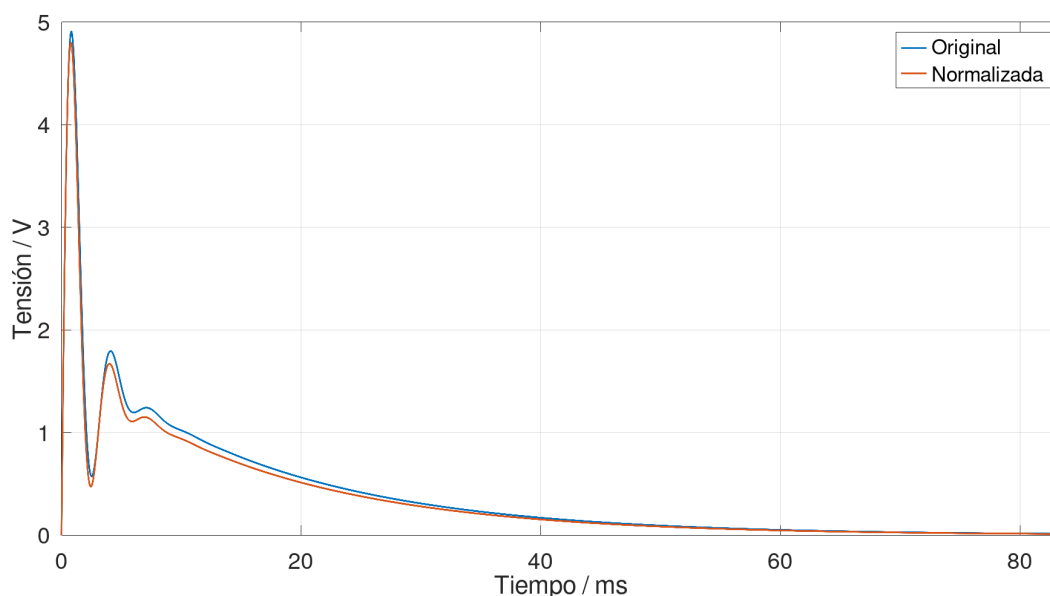


Figura 9. Respuesta al escalón de la transferencia original y normalizada.

transferencias. Al filtrarse las frecuencias altas, se observa que la respuesta comienza en cero en el instante inicial, para luego formar tres picos de amplitudes sucesivamente menores. Como también se filtran las frecuencias bajas, la respuesta para tiempo infinito es de 0 V. Recordamos que la respuesta al escalón tiene $\tau = 16,67$ ms, y efectivamente el gráfico muestra que se alcanza el valor final de 0 V en $5\tau = 83,33$ ms.

Se observa la misma forma general para ambas respuestas. La transferencia normalizada, sin embargo, presenta picos ligeramente más bajos que los de la original, debido a su menor ganancia. En concreto, el segundo pico que se observa es 123 mV más bajo en la transferencia de valores estandarizados. Esto se traduce en un error del 6,9 %.

En la Figura 10 se observa la respuesta al impulso de las transferencias. La respuesta presenta un salto al inicio, comenzando alrededor de los 11 kV. Luego presenta unas oscilaciones subamortiguadas hasta que el transitorio—y la señal completa—se extingue completamente.

Nuevamente, presentan formas similares y la respuesta de la normalizada es en este caso más grande que la original. Para el instante inicial, la respuesta al impulso de la H original vale 11,43 kV, mientras que la normalizada es 3,4 % más alta, comenzando en 11,82 kV.

La Figura 11 muestra la respuesta al senoide de frecuencia 60 rad s^{-1} . Se observa un transitorio inicial que dura unos 80 ms como es de esperar dado el τ dominante. Sigue un régimen permanente, que consiste de una señal senoidal

de igual frecuencia a la aplicada, pero que está amplificada aproximadamente 3 dB. Además, presenta un desfase de 15 ms, lo que a esta frecuencia corresponde a 50° . Ambos valores se corresponden con el diagrama de bode de la Figura 8. Entre la respuesta de la transferencia original y de la normalizada solo se encuentra una diferencia en la amplitud, siendo la segunda menor en un 7,5 % debido a la menor ganancia.

La Figura 12 muestra la respuesta al senoide de frecuencia 700 rad s^{-1} . Nuevamente hay un transitorio inicial seguido de un régimen permanente, que consiste de una señal senoidal de igual frecuencia a la aplicada, pero que está amplificada aproximadamente 9,5 dB. Además, presenta un desfase de $800 \mu\text{s}$, lo que a esta frecuencia corresponde a 30° . Ambos valores se corresponden con el diagrama de bode de la Figura 8. Entre la respuesta de la transferencia original y de la normalizada solo se encuentra una diferencia en la amplitud, siendo la segunda menor en un 4,5 % debido a la menor ganancia.

La Figura 13 muestra la respuesta al senoide de frecuencia 2000 rad s^{-1} . Nuevamente hay un transitorio inicial seguido de un régimen permanente, que consiste de una señal senoidal de igual frecuencia a la aplicada, pero que está amplificada aproximadamente 19 dB. Además, presenta un desfase de $135 \mu\text{s}$, lo que a esta frecuencia corresponde a -15° (observar que ahora es un adelantamiento en lugar de un retraso). Ambos valores se corresponden con el diagrama de bode de la Figura 8. Entre la respuesta de la transferencia original y de la normalizada solo se encuentra

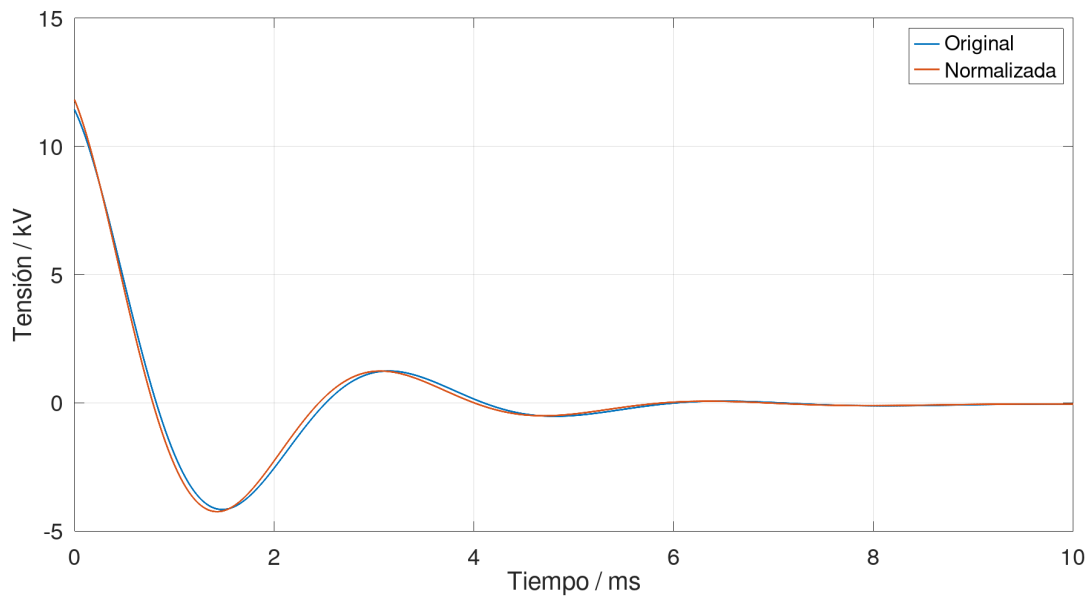


Figura 10. Respuesta al impulso de la transferencia original y normalizada.

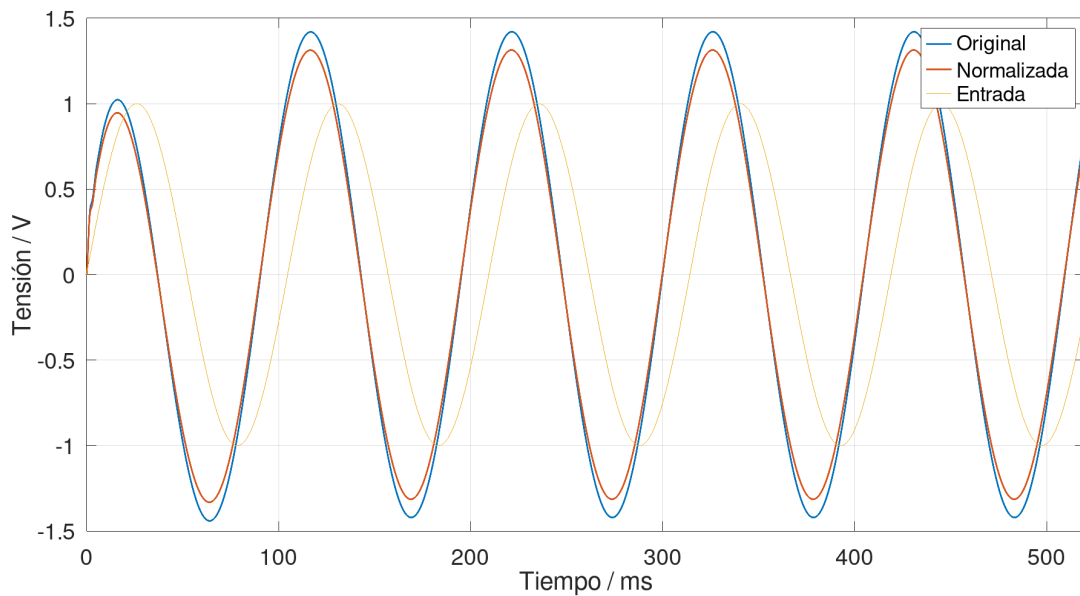


Figura 11. Respuesta al senoide de frecuencia angular 60 rad s^{-1} de la transferencia original y normalizada.

una diferencia en la amplitud, siendo la segunda menor en un 2,2 % debido a la menor ganancia.

Las Figuras 14, 15 y 16 muestran las respuestas a señales cuadradas de frecuencias 60 rad s^{-1} , 700 rad s^{-1} y 2000 rad s^{-1} . Para la frecuencia más baja, se observa una sucesión de respuestas al escalón debido al gran período de la señal comparado con el tiempo característico τ . Entre

cada pulso de la cuadrada, hay suficiente tiempo para que se complete la mayor parte del transitorio y se llegue al régimen permanente.

Para la frecuencia media, se observa poco más de un período de oscilación entre cada salto de la señal cuadrada, debido a que la entrada presenta cambios cada 4,5 ms—la mitad del período—mientras que las oscilaciones resultan-

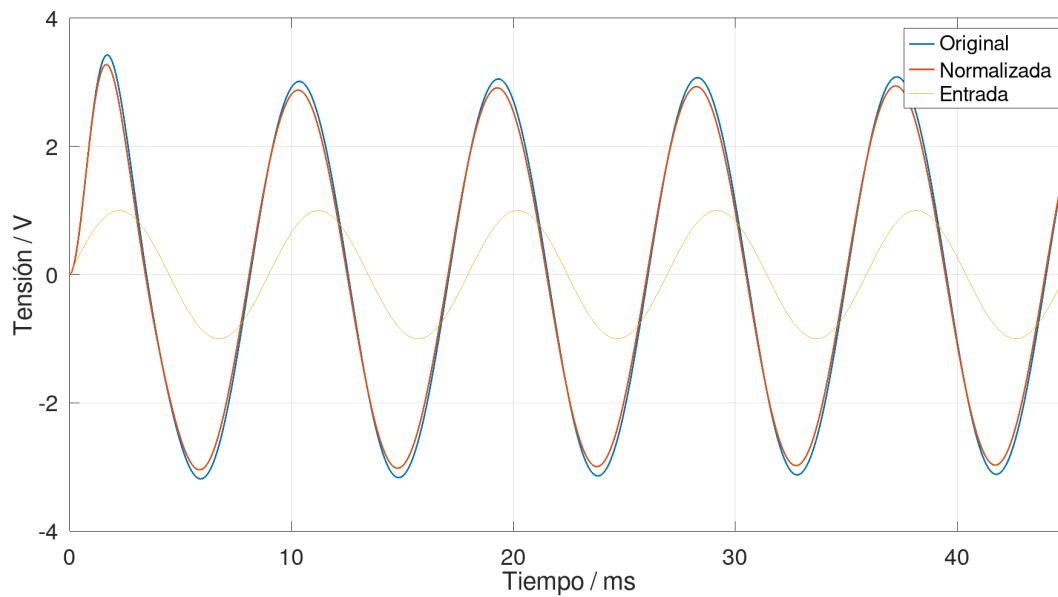


Figura 12. Respuesta al senoide de frecuencia angular 700 rad s^{-1} de la transferencia original y normalizada.

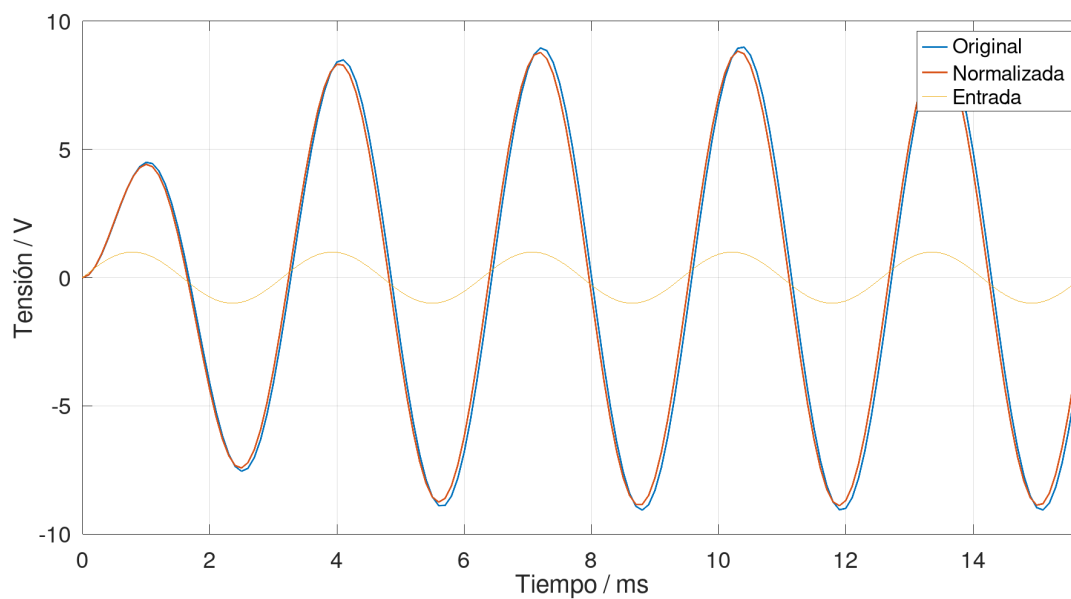


Figura 13. Respuesta al senoide de frecuencia angular 2000 rad s^{-1} de la transferencia original y normalizada.

tes tienen período $3,3 \text{ ms}$ (1885 rad s^{-1}).

Para la frecuencia de 2000 rad s^{-1} se observa que la salida se asemeja a una señal senoidal, pero ligeramente recortada al final de cada semiciclo. Debido a las características del filtro, solo la frecuencia fundamental de la señal cuadrada (los 2000 rad s^{-1}) y los dos primeros armónicos impares (6000 rad s^{-1} y $10\,000 \text{ rad s}^{-1}$) pasan

a la salida con una amplitud considerable. Los armónicos de frecuencias superiores se ven atenuados en mayor medida, haciendo que la salida pierda la forma rectangular de la entrada.

En cuanto a las diferencias entre la transferencia original y la normalizada, nuevamente se observa la misma forma, teniendo la segunda una amplitud menor. Este error ronda

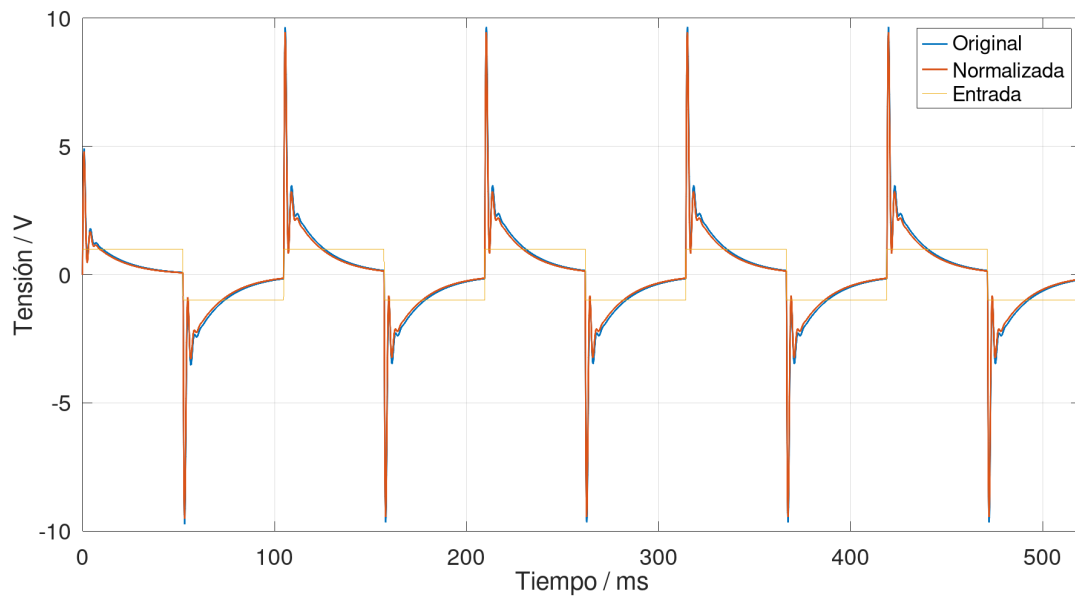


Figura 14. Respuesta a la cuadrada de frecuencia angular 60 rad s^{-1} de la transferencia original y normalizada.

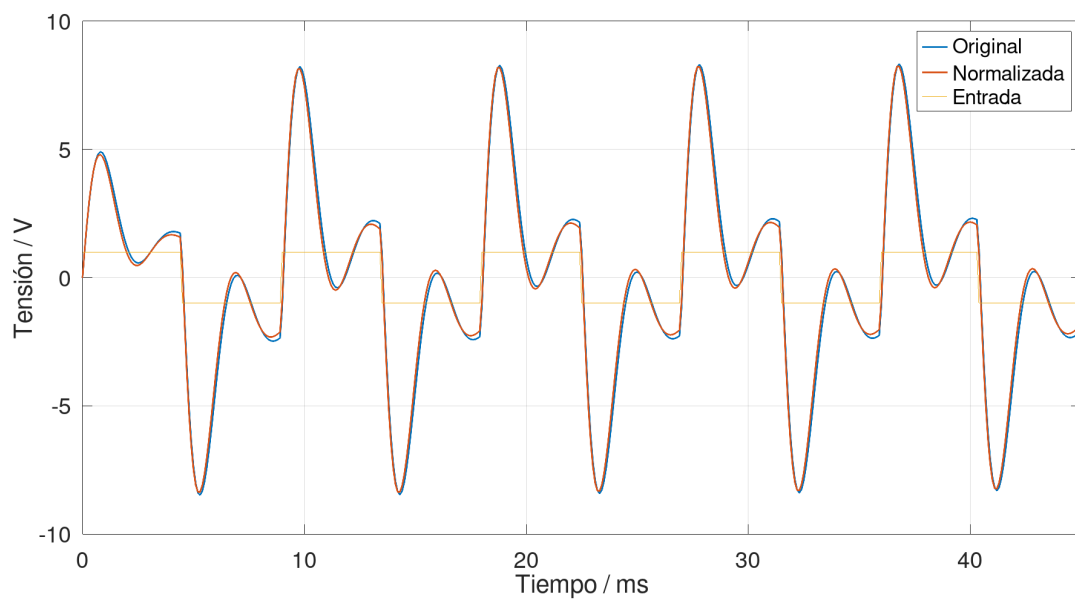


Figura 15. Respuesta a la cuadrada de frecuencia angular 700 rad s^{-1} de la transferencia original y normalizada.

el 10 %.

III-B. Simulaciones Circuitales

Utilizando el software *LTspice* se simuló el circuito que implementa la transferencia normalizada, utilizando como modelo de amplificador operacional el TL081. El esquemático de simulación se muestra en la Figura 17.

La Figura 18 muestra el diagrama de Bode de módulo y fase simulado con Spice, y se lo compara con el de la transferencia normalizada obtenido de Octave. Se observa que las respuestas son casi exactamente iguales. Apenas hay una desviación visible entre la simulación del circuito y la transferencia normalizada para las frecuencias más altas. En concreto, el módulo del circuito simulado para una frecuencia de 100 krad s^{-1} es de $-18,41 \text{ dB}$,

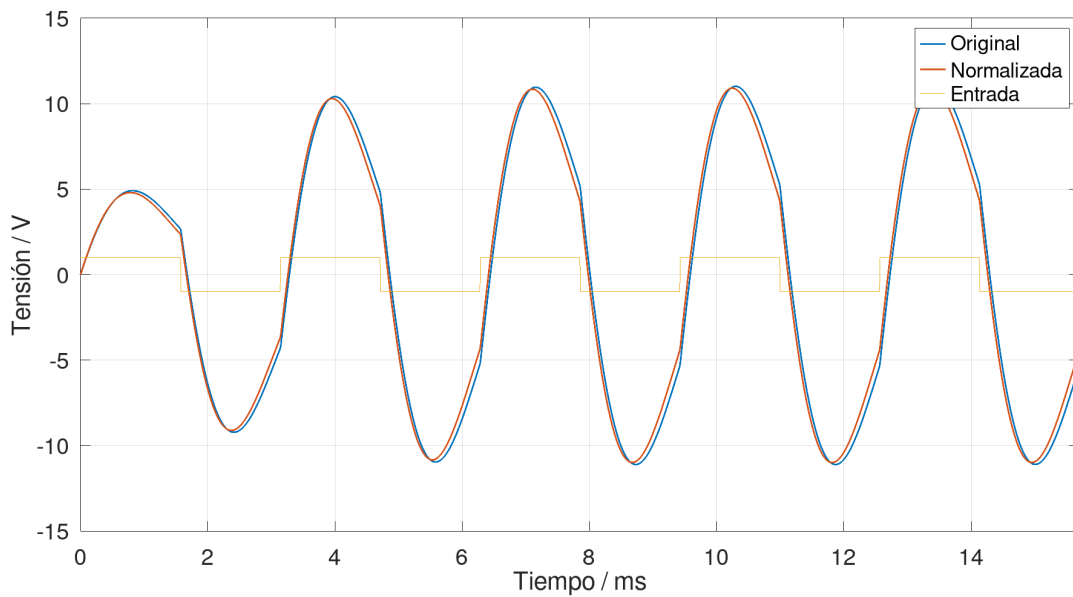


Figura 16. Respuesta a la cuadrada de frecuencia angular 2 krad s^{-1} de la transferencia original y normalizada.

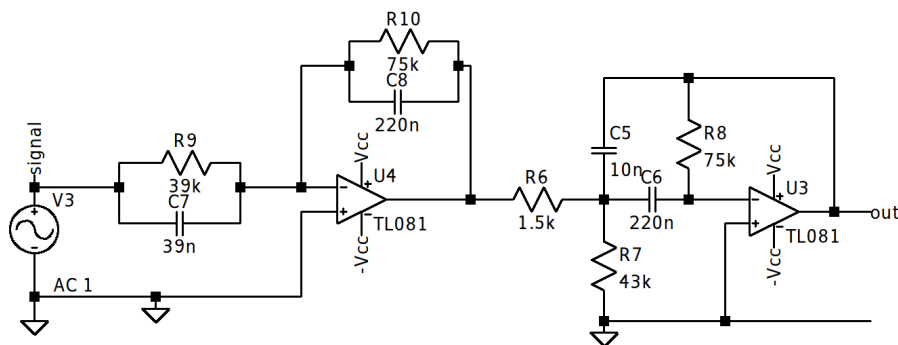


Figura 17. Esquemático de simulación de *LTspice*.

una diferencia del 0,8 % respecto del $-18,55 \text{ dB}$ de la transferencia normalizada. Esto refleja el comportamiento no ideal del amplificador operacional TL081, sobre todo para frecuencias más elevadas.

La Figura 19 muestra la respuesta al escalón simulada con Spice, junto con la obtenida anteriormente con Octave para la transferencia normalizada. Nuevamente se observa el mismo comportamiento entre ambas, presentándose algunas pequeñas discrepancias en los picos del comienzo del transitorio. En este caso, las diferencias son aún menores, del orden de las 200 ppm entre ambas respuestas.

Las Figuras 20, 21 y 22 muestran las respuestas del circuito simulado a entradas senoidales de frecuencias 60 rad s^{-1} , 700 rad s^{-1} y 2000 rad s^{-1} , junto con las respuestas esperadas para la transferencia normalizada. Las respuestas para las tres frecuencias son similares entre

el circuito y la transferencia normalizada. Las diferencias no superan el 0,1 %, y son menores para las más bajas frecuencias.

Las Figuras 23, 24 y 25 muestran las respuestas del circuito simulado a entradas de señales cuadradas de frecuencias 60 rad s^{-1} , 700 rad s^{-1} y 2000 rad s^{-1} , junto con las respuestas esperadas para la transferencia normalizada. Las respuestas para las tres frecuencias son similares entre el circuito y la transferencia normalizada. Se presentan diferencias de amplitud, como en los casos anteriores, donde el circuito simulado presenta picos más elevados entre un 0,6 % (para bajas frecuencias) y un 1,1 % (para frecuencias altas), sobre todo justo después de los flancos ascendentes y descendentes de la onda cuadrada.

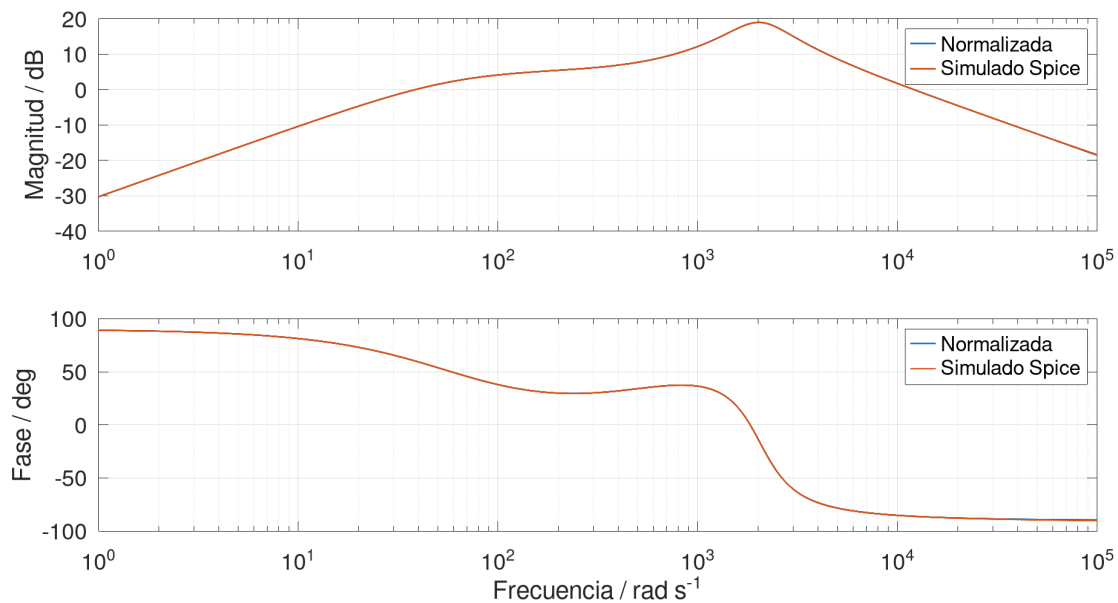


Figura 18. Diagrama de Bode de módulo y fase de la transferencia normalizada y simulada en Spice.

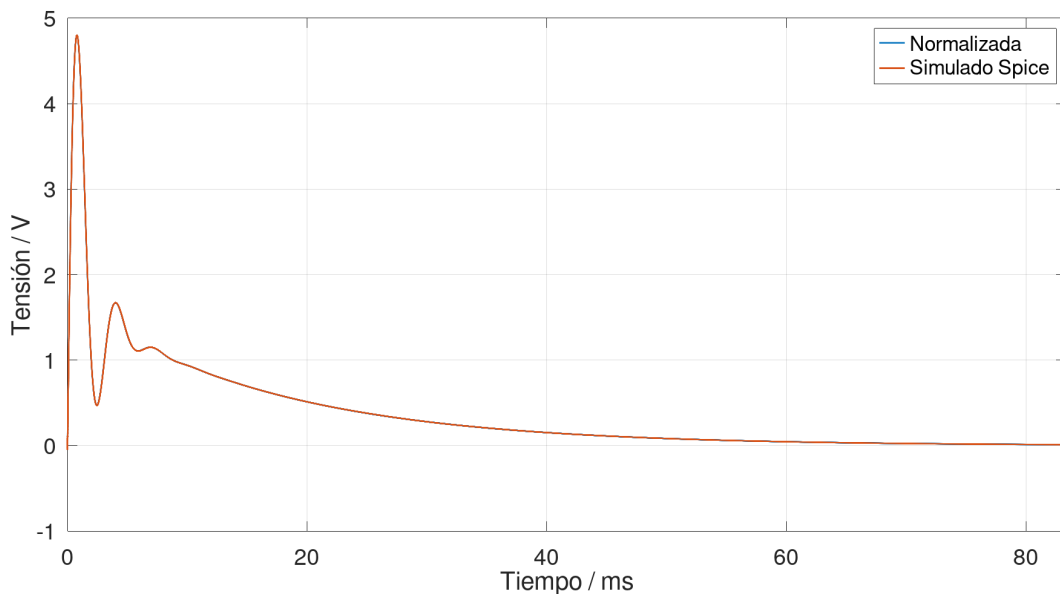


Figura 19. Respuesta al escalón de la transferencia normalizada y simulada en Spice.

IV. IMPLEMENTACIÓN DEL CIRCUITO

El circuito armado corresponde al mostrado en la Figura 26. El armado se realizó utilizando protoboards debido a que se trataba de un circuito sencillo y pequeño. Se necesitó una única protoboard para el diseño. Este paso no trajo grandes complicaciones.

Debido a la falta de disponibilidad de resistores de $75\text{ k}\Omega$

al 1 %, se reemplazaron los mismos por resistores de $82\text{ k}\Omega$ al 1 % en paralelo con $1\text{ M}\Omega$ al 5 %. Esto resulta en una resistencia equivalente de $(75,8 \pm 0,7)\text{ k}\Omega$, una diferencia de, como mucho, el 2 % respecto de los $75\text{ k}\Omega$ deseados. El amplificador operacional usado es el TL082, una versión dual del clásico TL081.

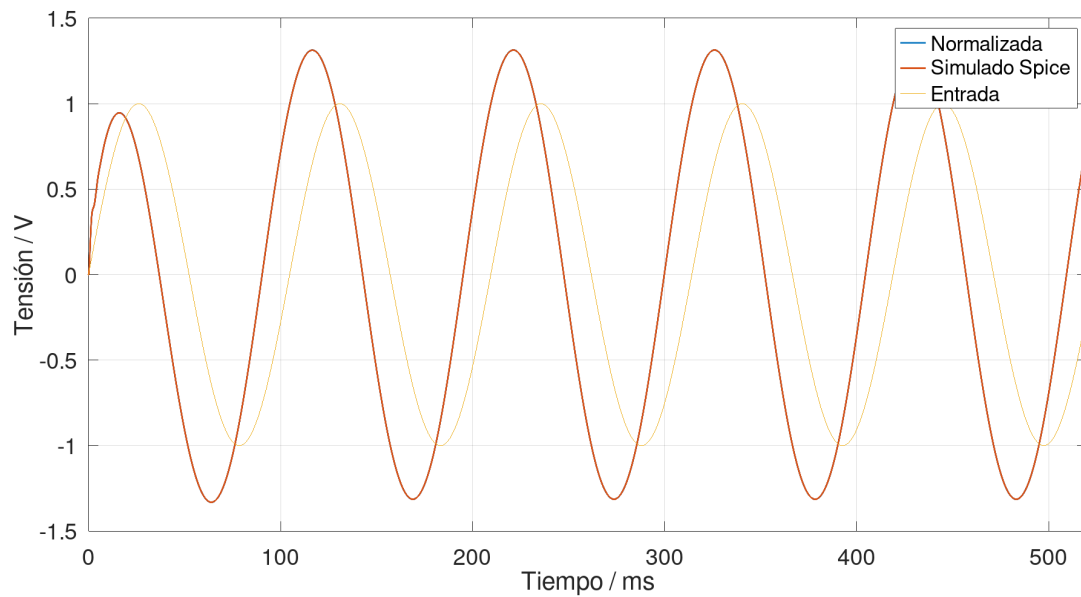


Figura 20. Respuesta al senoide de frecuencia angular 60 rad s^{-1} de la transferencia normalizada y simulada en Spice.

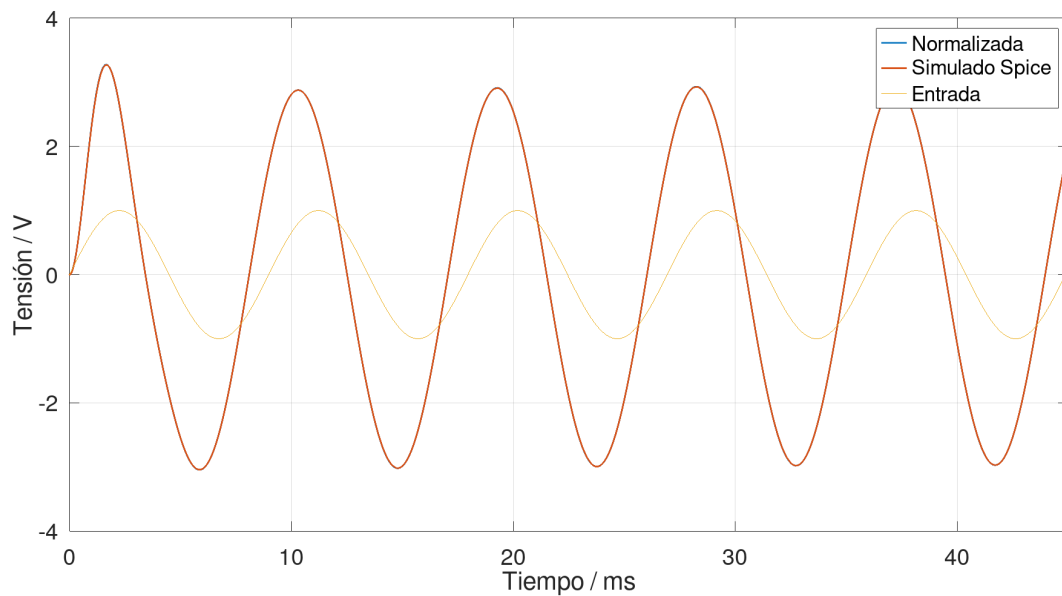


Figura 21. Respuesta al senoide de frecuencia angular 700 rad s^{-1} de la transferencia normalizada y simulada en Spice.

V. MEDICIÓN DEL CIRCUITO

Para la medición del circuito se alimentó el filtro con un *split rail* de $\pm 15 \text{ V}$ utilizando una fuente dual UNI-T modelo UTP3305-II. En su entrada se conectó un generador de funciones UNI-T modelo UTG1010A, y la salida fue medida con un osciloscopio UNI-T modelo UTD2102CEX+. El banco de medición utilizado se mues-

tra en la Figura 27.

Dado que el módulo de la transferencia da la ganancia a la salida para una senoidal pura de entrada, puede compararse la respuesta en frecuencia del circuito armado con la transferencia normalizada introduciendo señales sinusoidales de diferentes frecuencias y midiendo la amplitud de la salida. Usando el generador de funciones se

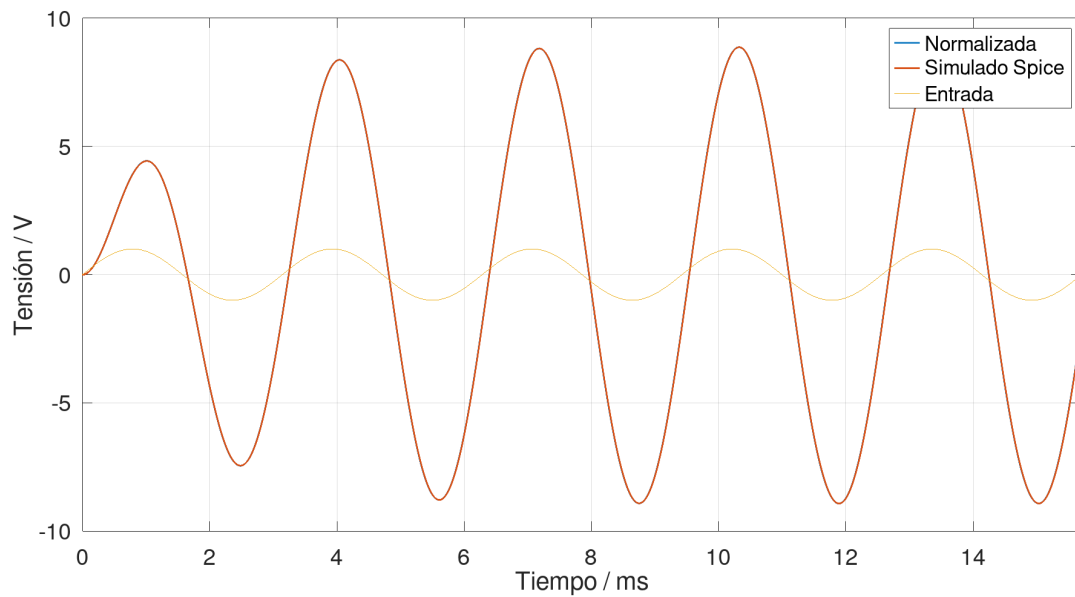


Figura 22. Respuesta al senoide de frecuencia angular 2 krad s^{-1} de la transferencia normalizada y simulada en Spice.

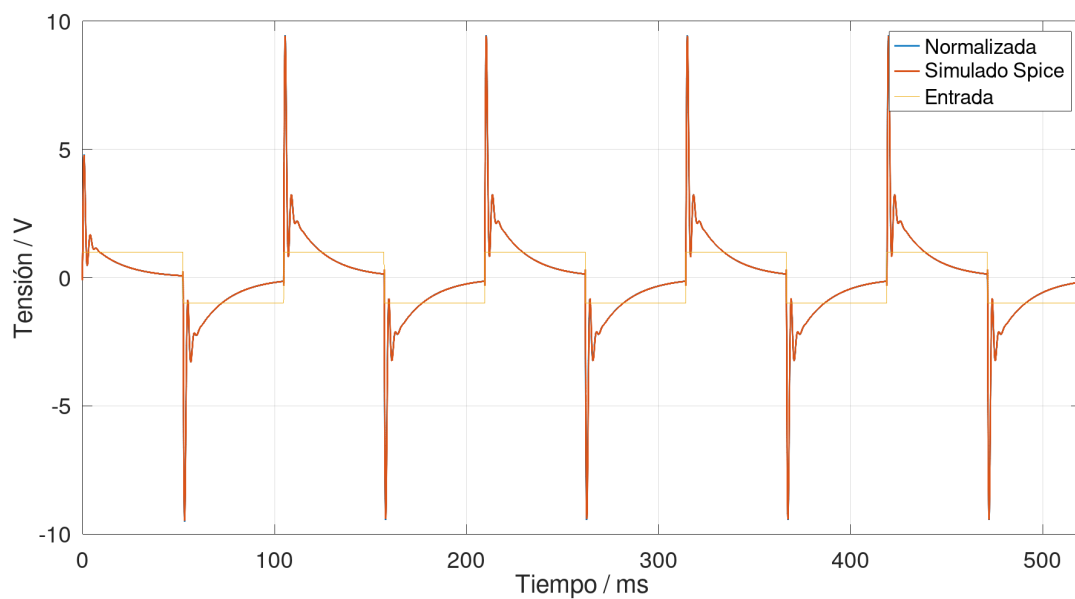


Figura 23. Respuesta a la cuadrada de frecuencia angular 60 rad s^{-1} de la transferencia normalizada y simulada en Spice.

generaron senoidales de 1 V pico a diferentes frecuencias. Se comparó con la amplitud esperada, según el módulo de la transferencia normalizada. Los datos obtenidos se muestran en la Tabla III.

En las Figuras 28 a 32 se muestran las capturas de pantalla del osciloscopio donde se midieron las salidas del circuito para entradas senoidales de frecuencias

10 rad s^{-1} , 100 rad s^{-1} , 1000 rad s^{-1} , $10\,000 \text{ rad s}^{-1}$ y $100\,000 \text{ rad s}^{-1}$, respectivamente. Las entradas utilizadas tenían una amplitud de 1 V.

Como puede observarse, las diferencias entre el circuito armado y la transferencia normalizada son menores al 20 % en todos los puntos medidos. En algunas frecuencias, los errores son mucho más pequeños. En el pico de

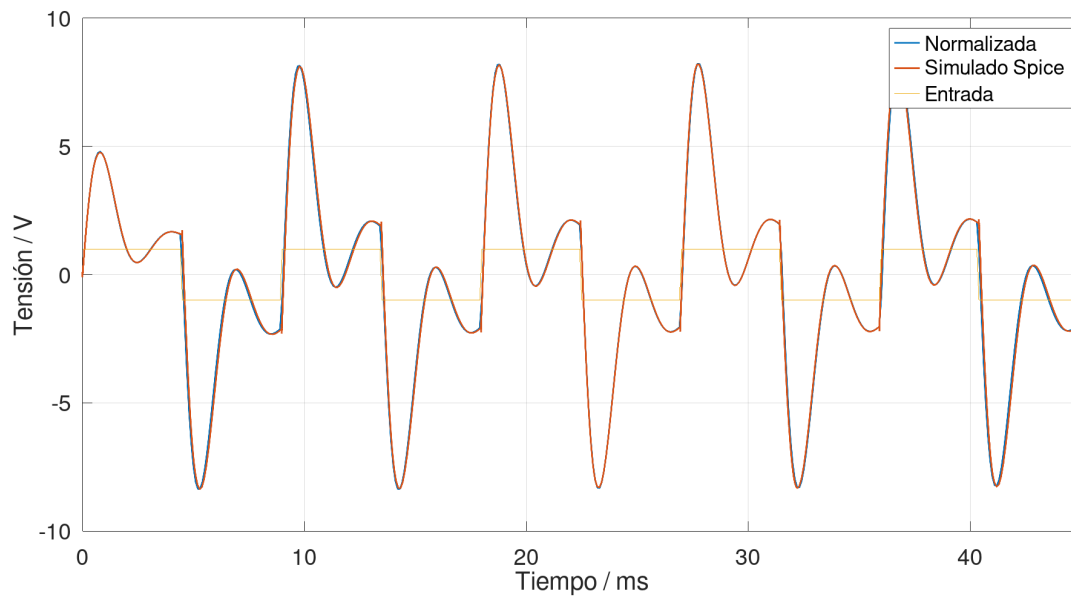


Figura 24. Respuesta a la cuadrada de frecuencia angular 700 rad s^{-1} de la transferencia normalizada y simulada en Spice.

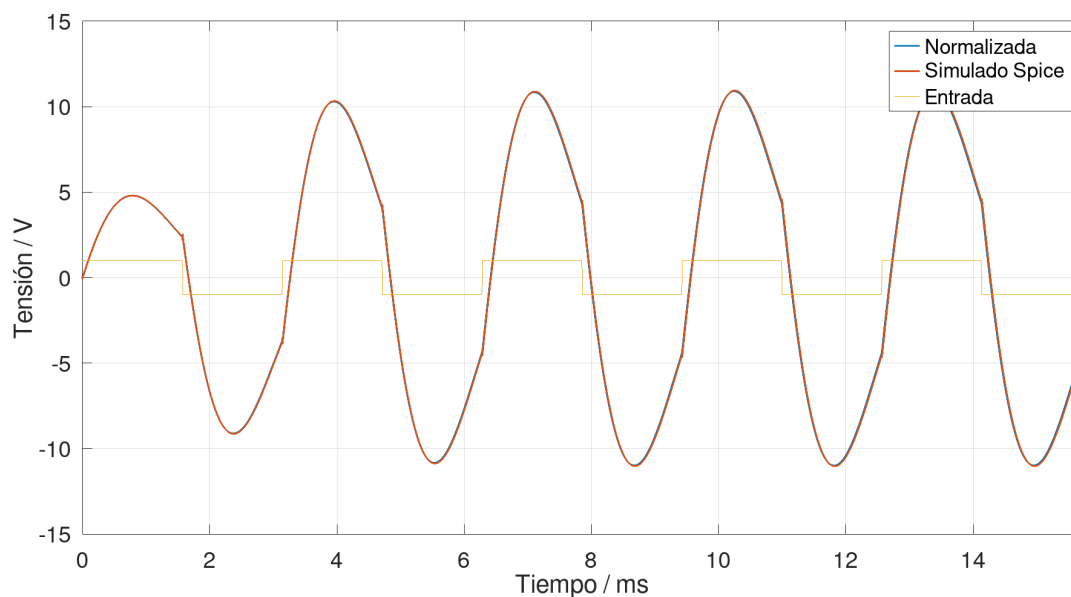


Figura 25. Respuesta a la cuadrada de frecuencia angular 2 rad s^{-1} de la transferencia normalizada y simulada en Spice.

la transferencia, 2000 rad s^{-1} , el error es despreciable, de solo el 0,1 %. También se observa que los errores más grandes se producen para las frecuencias extremas, tanto la más baja medida como la más alta. Entre los motivos de las diferencias se encuentran las diferencias entre el valor nominal y el real de los componentes, especialmente en los capacitores puesto que los mismos presentan una tolerancia mayor, de $\pm 10 \%$. Otro motivo es

el comportamiento no ideal del amplificador operacional usado.

En la Figura 33 se muestra la respuesta temporal a la senoidal de 60 rad s^{-1} del circuito real, comparada con la respuesta producida por la transferencia normalizada. Se observa, tal como se vio en la Tabla III, que el módulo de la respuesta del circuito es mayor, teniendo un pico

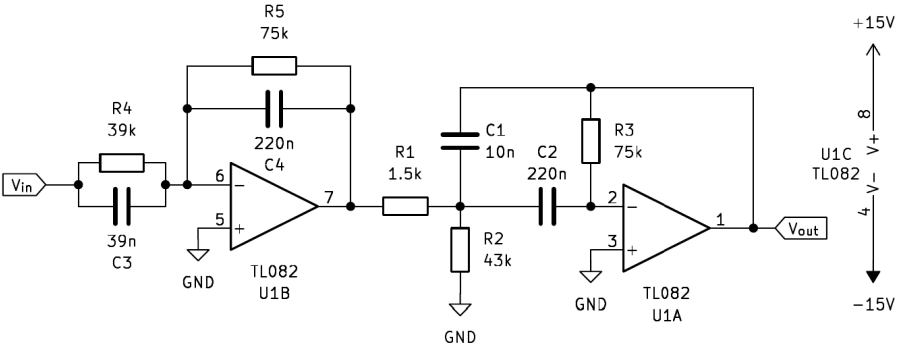


Figura 26. Esquema del circuito armado.

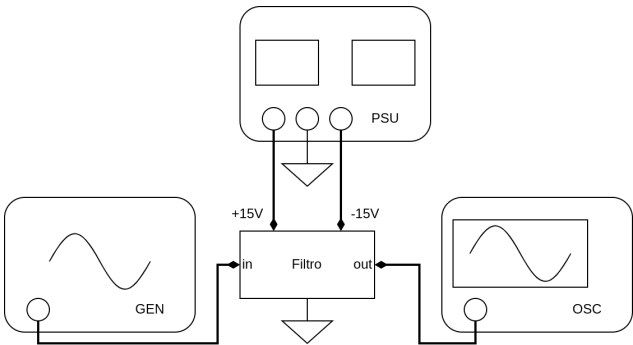


Figura 27. Banco de medición del circuito armado.

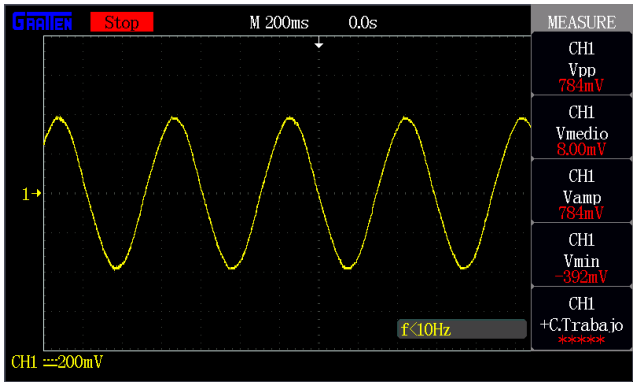


Figura 28. Captura de la salida del circuito para una entrada senoidal de 10 rad s⁻¹.

Tabla III
AMPLITUD DE SALIDA PARA ENTRADAS SENOIDALES

$\omega/\text{rad s}^{-1}$	Amp. real /V	Amp. teórica/V	Error /%
10,8	0,392	0,327	19,9
60,0	1,38	1,30	6,1
99,4	1,55	1,60	3,1
700	3,28	2,96	10,6
964	4,52	3,94	14,9
2000	9,00	8,91	0,1
9660	1,35	1,27	6,0
99 400	0,142	0,120	18,8

de 1,4 V en lugar de los 1,3 V esperados. El desfase coincide con el esperado.

En la Figura 34 se muestra la respuesta temporal a la senoidal de 700 rad s⁻¹ del circuito real, comparada con la respuesta producida por la transferencia normalizada. Se observa, tal como se vio en la Tabla III, que el módulo de la respuesta del circuito es mayor, teniendo un pico de 3,3 V en lugar de los 2,9 V esperados. Nuevamente, el desfase coincide con el esperado.

La Figura 35 muestra la respuesta a una señal cuadrada de 60 rad s⁻¹ del circuito real, y se la compara con la

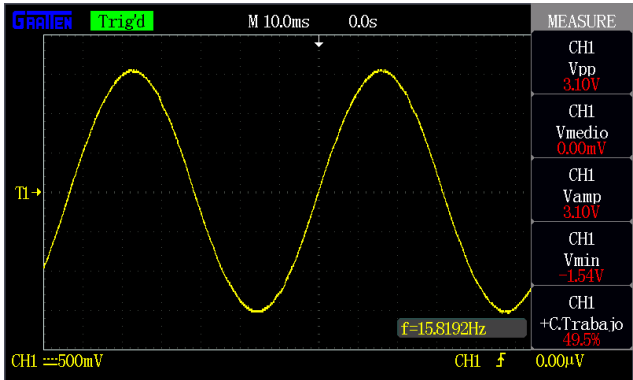


Figura 29. Captura de la salida del circuito para una entrada senoidal de 100 rad s⁻¹.

respuesta de la transferencia normalizada. Se observa que la forma general de las respuestas coincide. Los saltos positivos de la salida real son menores a lo simulado en la transferencia normalizada, mientras que los saltos negativos son más grandes. Las discrepancias probablemente se deban a la baja resolución de los datos extraídos del osciloscopio. Apenas llega a notarse la presencia dos picos en cada medio período de la salida.

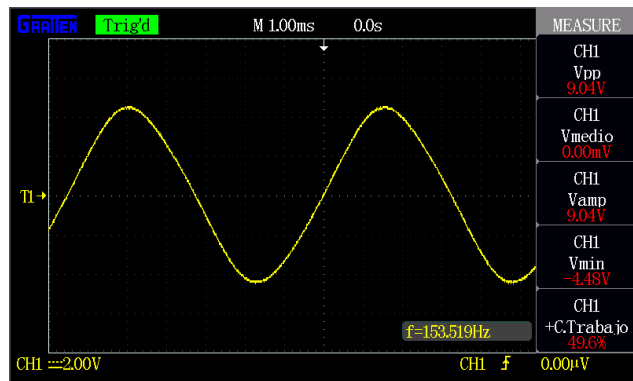


Figura 30. Captura de la salida del circuito para una entrada senoidal de 1 krad s^{-1} .

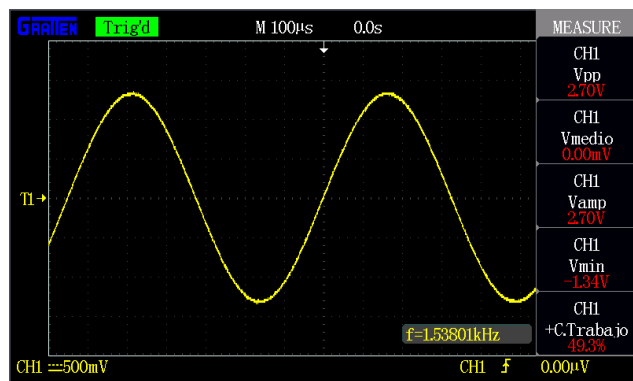


Figura 31. Captura de la salida del circuito para una entrada senoidal de 10 krad s^{-1} .

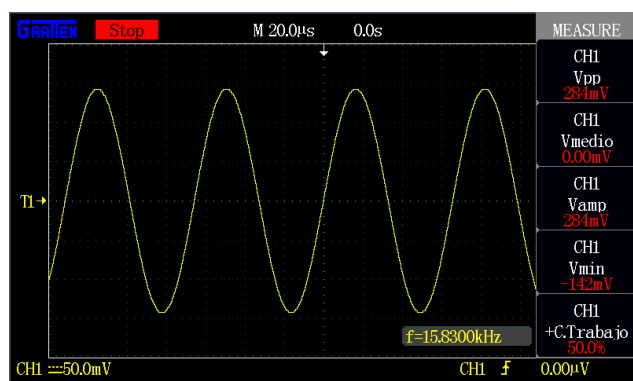


Figura 32. Captura de la salida del circuito para una entrada senoidal de 100 krad s^{-1} .

La Figura 36 muestra la respuesta a una señal cuadrada de 700 rad s^{-1} del circuito real, comparada con la respuesta de la transferencia normalizada. Se observa que ambas señales son similares, pero la salida del circuito real es mayor en magnitud en un 20 % debido a la mayor ganancia.

La Figura 37 muestra la respuesta al escalón del cir-

cuito armado, y la comparación con la respuesta de la transferencia normalizada. Se observa una forma similar entre ambas. El primer pico tiene una amplitud 12,5 % mayor, mientras que el segundo pico se presenta como una oscilación de menor amplitud. El tercer pico no se observa en el circuito real, posiblemente debido a la baja resolución de los datos tomados del osciloscopio. La parte final de la respuesta presenta tensiones superiores a las esperadas, pero con la misma forma de decaimiento exponencial.

VI. CONCLUSIONES

El análisis detallado de la transferencia y la correcta factorización de la misma permitieron diseñar un filtro que implementa con bajo error la transferencia objetivo. A través de mediciones y simulaciones numéricas se pudieron medir las discrepancias y conjeturar sus causas. Se subraya la importancia de la utilización de componentes con tolerancias bajas para conseguir un diseño preciso.

Se destaca la utilidad de la concatenación de filtros para la realización del circuito. Esto permite implementar complejas transferencias a partir de un conjunto reducido de filtros sencillos cuyas transferencias facilitan el proceso de elección de componentes estandarizados.

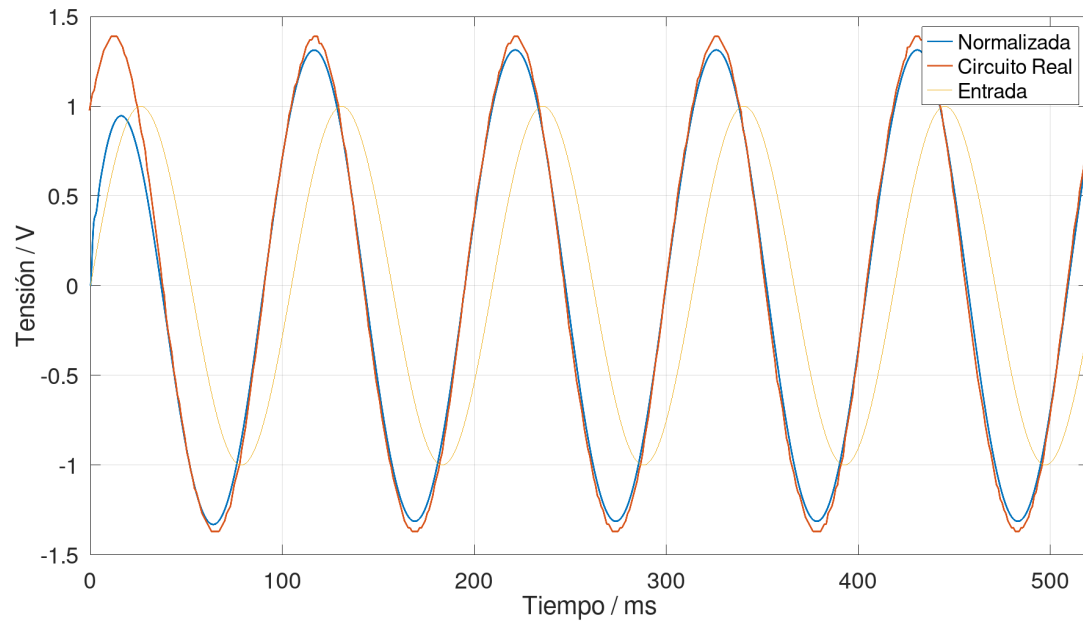


Figura 33. Respuesta al senoide de frecuencia angular 60 rad s^{-1} de la transferencia normalizada y el circuito real.

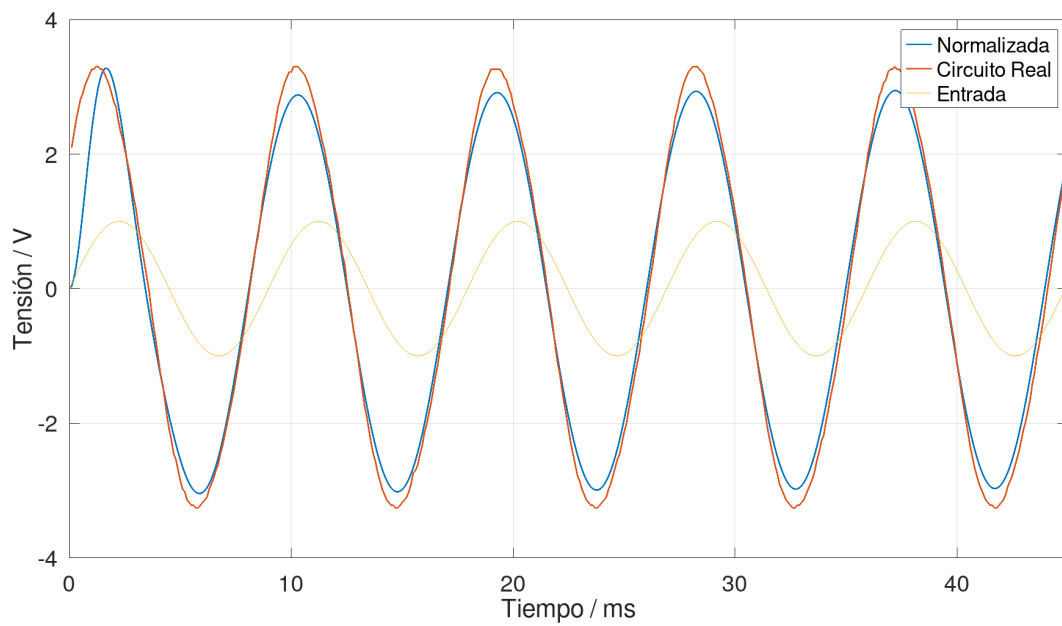


Figura 34. Respuesta al senoide de frecuencia angular 700 rad s^{-1} de la transferencia normalizada y el circuito real.

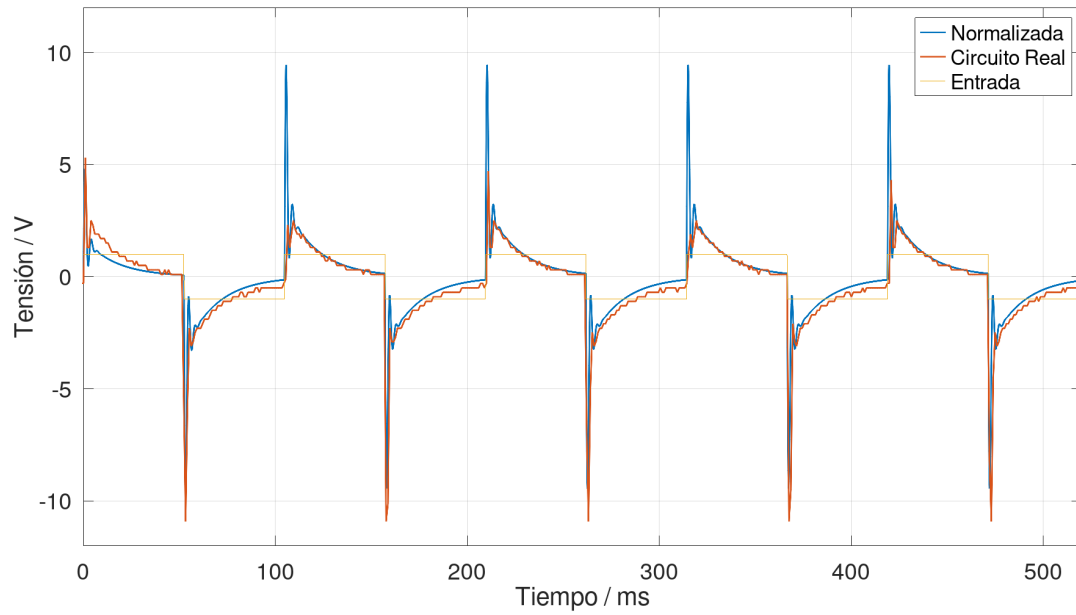


Figura 35. Respuesta a la señal cuadrada de frecuencia angular 60 rad s^{-1} de la transferencia normalizada y el circuito real.

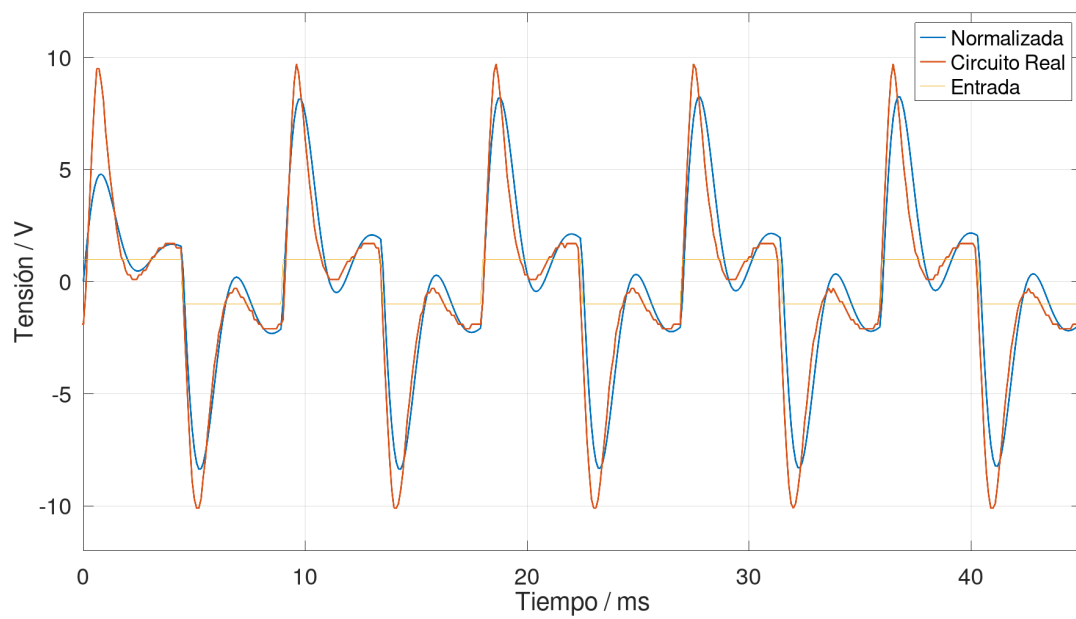


Figura 36. Respuesta a la señal cuadrada de frecuencia angular 700 rad s^{-1} de la transferencia normalizada y el circuito real.

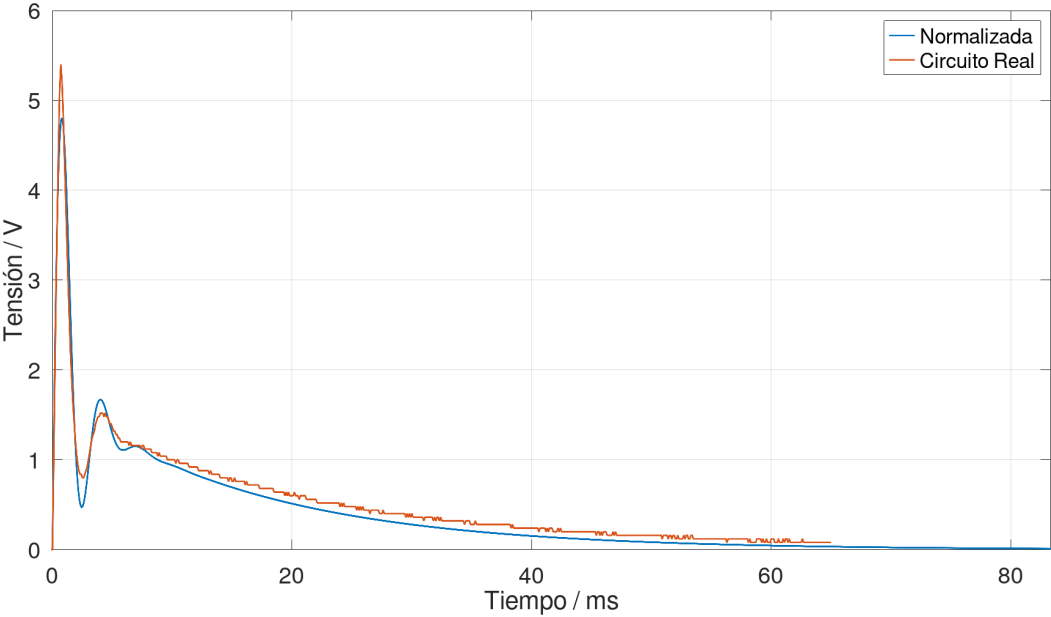


Figura 37. Respuesta al escalón de la transferencia normalizada y el circuito real.