# Análisis de Circuitos [TB066]

## 1 Circuitos de DC

### 1.1 Leyes básicas

Corriente

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{1}$$

Ley de Ohm

$$v = i \cdot R \tag{2}$$

Potencia

$$p = \frac{dw}{dt} = v \cdot i = i^2 R \tag{3}$$

Conductancia

$$G = \frac{1}{R} = \frac{i}{v} \tag{4}$$

Divisor resistivo

Si en dos resistores en serie circula la misma corriente:

$$v_{R_2} = v_S \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{5}$$

Divisor de corriente

Si en dos resistores en paralelo cae la misma tensión:

$$i_{R_2} = i_S \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{6}$$

Teorema de máxima transferencia de potencia

Se disipa la máxima potencia sobre la carga cuando:

$$R_L = R_{Th} \tag{7}$$

### 1.2 Leyes de Kirchoff

Ley de corriente de Kirchhoff (KCL)

$$\sum_{entr} i = \sum_{sal} i \tag{8}$$

Ley de tensión de Kirchhoff (KVL)

$$\sum_{malla} v = 0 \tag{9}$$

## 2 Régimen transitorio

### 2.1 Capacitores

Carga de un capacitor

$$q = \int_{t_0}^{t} i(\tau) d\tau \tag{10}$$

Energía almacenada en un capacitor

$$w_C = \frac{1}{2} C\, v^2 \tag{11}$$

Capacitores en serie

$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \tag{12}$$

Capacitores en paralelo

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \tag{13}$$

Relación *v*-*i* en forma diferencial

$$i_C(t) = C \cdot v_C'(t) \tag{14}$$

Relación *v*-*i* en forma integral

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt \tag{15}$$

Tiempo característico en un capacitor

$$\tau = R \cdot C \tag{16}$$

Carga de un capacitor

- El tiempo de carga es $t = 5\tau$
- Capacitor descargado $\rightarrow$ cortocircuito
- Capacitor cargado $\rightarrow$ circuito abierto
- El capacitor no permite saltos de tensión

### 2.2 Inductores

Energía almacenada en un inductor

$$w_L = \frac{1}{2} L\, i^2 \tag{17}$$

Inductores en serie

$$L_{eq} = L_1 + L_2 \tag{18}$$

Inductores en paralelo

$$L_{eq} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} \tag{19}$$

Relación *v*-*i* en forma diferencial

$$v_L(t) = L\, i'_L(t) \tag{20}$$

Relación *v*-*i* en forma integral

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int v_L(t)dt \tag{21}$$

Tiempo característico en un inductor

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{22}$$

Carga de un inductor

- El tiempo de carga es $t = 5\tau$
- Inductor descargado $\rightarrow$ circuito abierto
- Inductor cargado $\rightarrow$ cortocircuito
- El inductor no permite saltos de corriente

## 2.3 Circuitos de primer orden

Función de Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{23}$$

Función delta de Dirac continua

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases} \tag{24}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = 1 \tag{25}$$

Relación entre las funciones de Heaviside y Dirac

$$\frac{du}{dt} = \delta(t) \quad \rightarrow \quad \int \delta(t)dt = u(t) \tag{26}$$

Respuesta completa de tensión

$$v(t) = \Big[v(0) - v(\infty)\Big]e^{\frac{-t}{\tau}} + v(\infty) \tag{27}$$

Respuesta completa de corriente

$$i(t) = \Big[i(0) - i(\infty)\Big]e^{\frac{-t}{\tau}} + i(\infty) \tag{28}$$

Ecuación diferencial de primer orden

ED expresada en forma canónica:

$$y' + \alpha y' = f(t) \tag{29}$$

## 2.4 Circuitos de segundo orden

Ecuación diferencial de segundo orden

ED expresada en forma canónica:

$$y'' + 2\alpha y' + \omega_0^2 y = f(t) \tag{30}$$

Polinomio característico

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \tag{31}$$

Solución particular

Para hallar la solución particular $k$:

$$y = k: \quad k' = \frac{dy}{dt} \tag{32}$$

y se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$k'' + 2\alpha k' + \omega_0^2 k = f(t) \tag{33}$$

## 2.5 Solución homogéneas según el caso

Caso sobre-amortiguado ($\alpha > \omega_0$)

$$y(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \tag{34}$$

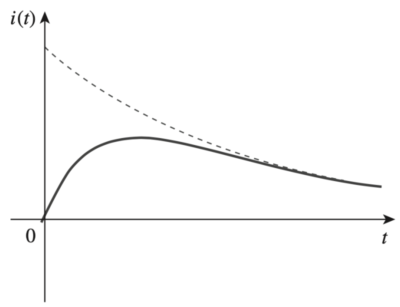


Figure 1: respuesta sobreamortiguada

Caso críticamente amortiguado ($\alpha = \omega_0$)

$$y(t) = (A + Bt)\, e^{-\alpha t} \tag{35}$$

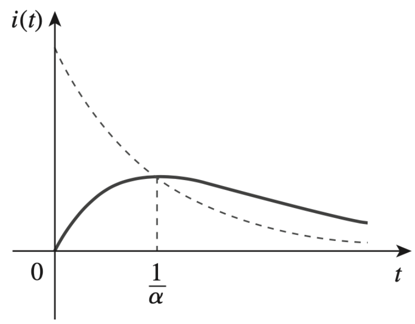


Figure 2: respuesta críticamente amortiguada

Caso sub-amortiguado ($\alpha < \omega_0$)

En este caso las raíces son complejas y se expresan como:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} : \quad s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$y(t) = \left[ A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t) \right] e^{-\alpha t} \tag{36}$$

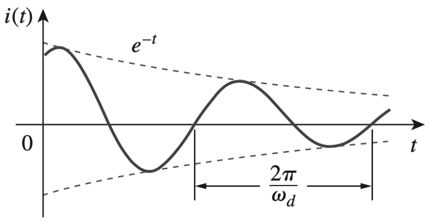


Figure 3: respuesta subamortiguada

# 3 Circuitos de AC

Forma de valores instantáneos

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \tag{37}$$

Frecuencias

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{38}$$

- $\omega$: frecuencia angular $[1/s]$
- $f$: frecuencia cíclica $[Hz]$
- $T$: período $[s]$

Relación para sumar seno y coseno

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = C\cos(\omega t - \phi) \tag{39}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \phi = tg^{-1}\frac{B}{A}$$

Representación en dominio fasorial

La tensión en un elemento se puede escribir como:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \longleftrightarrow \mathbf{V} = V_m \, e^{j\phi} \tag{40}$$

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \longleftrightarrow \mathbf{V} = V_m \, e^{j(\phi - \frac{\pi}{2})} \tag{41}$$

Reactancias

Medida de la resistencia al paso de la corriente alterna

- Reactancia resistiva: $\chi_R = R$
- Reactancia inductiva: $\chi_L = \omega L$
- Reactancia capacitiva: $\chi_C = \frac{1}{\omega C}$

Impedancia

Medida de la resistencia total del circuito

$$\mathbf{Z} = R + j(\chi_L - \chi_C) \tag{42}$$

- Impedancia resistiva: $\mathbf{Z}_R = R$
- Impedancia inductiva: $\mathbf{Z}_L = j\omega L$
- Impedancia capacitiva: $\mathbf{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$

Fase de una impedancia

$$\phi_z = tg^{-1}\left[\frac{\mathbb{I}m(Z)}{\mathbb{R}e(Z)}\right] \tag{43}$$

Magnitud en función de su impedancia

- Resistencia: $R = \mathbf{Z}_R$
- Inductancia: $L = \frac{\mathbb{I}m(\mathbf{Z}_L)}{\omega}$
- Capacidad: $C = \frac{1}{\omega|\mathbb{I}m(\mathbf{Z}_C)|}$

Impedancias en parelelo

$$Z_{eq} = \left[\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots \frac{1}{Z_N}\right]^{-1} \tag{44}$$

Admitancia

Facilidad de la corriente para circular

$$\mathbf{Y} = G + jB = \frac{1}{\mathbf{Z}} \tag{45}$$

Ley de Ohm compleja

$$\mathbf{V} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z} \tag{46}$$

Valor eficaz o rms *(root-mean-square)*

A partir de una señal $x(t)$ dada en su forma senoidal:

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi_x)$$

Se define su valor rms como:

$$X_{rms} = \frac{X_m}{\sqrt{2}} \tag{47}$$

## 3.1 Análisis de potencia

Potencia instantánea

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \tag{48}$$

Potencia promedio

Análisis en el dominio del tiempo:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt \tag{49}$$

Análisis en el dominio de la frecuencia

Análisis con fasores:

$$P = \frac{1}{2}\mathbb{R}e[\mathbf{V}\bar{\mathbf{I}}] \;=\; \frac{1}{2}\,V_m\,I_m\,\cos\left(\phi_v - \phi_i\right) \tag{50}$$

Análisis con valores rms:

$$P = V_{rms}\,I_{rms}\,\cos\left(\phi_v - \phi_i\right) \tag{51}$$

Potencia activa

$$P = S\cos\left(\phi_v - \phi_i\right) = S\cos\left(\phi_z\right) \tag{52}$$

Potencia reactiva

$$Q = S\sin\left(\phi_v - \phi_i\right) = S\cos\left(\phi_z\right) \tag{53}$$

Potencia aparente

$$S = V_{rms}\,I_{rms} = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{54}$$

Factor de potencia

Factor de potencia sobre una impedancia $Z$:

$$fp = \frac{P}{S} = \cos\left(\phi_v - \phi_i\right) = \cos\left(\phi_z\right) \tag{55}$$

Potencia compleja

Definida a partir de los fasores:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{V}\bar{\mathbf{I}} \tag{56}$$

En término de los fasores con sus valores rms:

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{rms}\,\bar{\mathbf{I}}_{rms} \tag{57}$$

En término de la impedancia de carga con sus valores rms:

$$\mathbf{S} = I_{rms}^2\mathbf{Z} = \frac{V_{rms}^2}{\mathbf{Z}^*} \tag{58}$$

Relación entre potencias

$$\mathbf{S} = P + jQ \tag{59}$$

donde $P$ y $Q$ se definen como:

$$P = \mathbb{R}e(\mathbf{S})\ ,\ \ Q = \mathbb{I}m(\mathbf{S}) \quad \rightarrow \quad \tan\left(\phi_z\right) = \frac{Q}{P}$$

Carácter de una carga

- Carácter resistivo:

$$\phi_z = 0 \qquad Q_z = 0 \tag{60}$$

- Carácter capacitivo:

$$\phi_z < 0 \qquad Q_z < 0 \tag{61}$$

- Carácter inductivo:

$$\phi_z > 0 \qquad Q_z > 0 \tag{62}$$

# *Anexo de Potencias

Unidades de potencias

- Potencia activa $P$: $[W]$
- Potencia reactiva $Q$: $[VAR]$
- Potencia aparente $S$: $[VA]$

Balance de potencias complejas

La potencia entregada las fuentes tiene que se igual a la potencia disipada en todo los elementos del circuito

$$S_E = S_F \tag{63}$$

Corrección del factor de potencia

Se puede obtener un factor de potencia $fp = \cos\left(\phi_2\right)$ instalando un capacitor de capacidad $C$ en paralelo

$$C = \frac{\Delta Q}{\omega V_{rms}^2} = \frac{P(\,\tan\phi_1 - \tan\phi_2\,)}{\omega V_{rms}^2} \tag{64}$$

Siendo $\Delta Q$ la variación para hallar el $\phi$ deseado:

Máxima transferencia de potencia promedio

Se disipa la máxima potencia sobre la carga cuando:

$$Z_L = \bar{Z}_{Th} \tag{65}$$

Frecuencia de resonancia

Es la frecuencia angular $\omega$ que permite que se cumpla:

$$\mathbb{I}m\{Z_{eq}\} = 0 \quad \rightarrow \quad \chi_L = \chi_C \tag{66}$$

## 3.2 Circuitos acoplados magnéticamente

Inductancia mutua

Expresada en el dominio temporal:

$$M = N_1\frac{d\phi_{21}}{di_2} = N_2\frac{d\phi_{12}}{di_1} \tag{67}$$

Expresada en el dominio frecuencial:

$$\mathbf{Z}_M = j\omega M \tag{68}$$

Tensión mutua

Expresada en el dominio temporal:

$$v_{12} = M\frac{di_2}{dt} \tag{69}$$

Expresada en el dominio frecuencial:

$$V_{12} = \mathbf{Z}_M I_2 = j\omega M I_2 \tag{70}$$

Energía almacenada

$$w = w_1 + w_2 = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2 \tag{71}$$

Coeficiente de acoplamiento

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} : \quad 0 \leq k \leq 1 \tag{72}$$

siendo $k$ el coeficiente de acoplamiento

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \tag{73}$$

# 4 Régimen transformado

Funcion de transferencia

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k\frac{(1 + s/\omega_{z1})(1 + s/\omega_{z2})...}{(1 + s/\omega_{p1})(1 + s/\omega_{p2})...} \tag{74}$$

se define al conjunto de ”ceros” como:

$$\{\ \forall\ s \in \mathbb{C} : N(s) = 0\ \} = z_1, z_2, \dots$$

se define al conjunto de ”polos” como:

$$\{\ \forall\ s \in \mathbb{C} : D(s) = 0\ \} = p_1, p_2, \dots$$

*El orden del circuito es igual al grado del polinomio en el denominador $D(s)$

Respuesta en frecuencia

$$H(s)\Big|_{j\omega} = H(j\omega) \tag{75}$$

Funcion de transferencia en forma cuadrática

Se obtiene la frecuencia $\omega_0$ de una singularidad como

$$s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2 \tag{76}$$

el valor de $Q$ define el tipo de singularidad

$$\text{si } Q = \begin{cases} < 1/2 & \mathbb{R}e\ \&\ \neq \\ = 1/2 & \mathbb{R}e\ \&\ = \\ > 1/2 & \mathbb{C} \text{ conjugados} \end{cases} \tag{77}$$

Ganancia en decibeles

Definición para potencia:

$$G_{dB} = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} \tag{78}$$

Definición para tensión y corriente:

$$G_{dB} = 20\log_{10}\frac{V_2}{V_1} \tag{79}$$

Conversión de escala de decibeles a lineal

$$n = 10^{dB/20}$$

# 5 Transformada de Laplace

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[\, f(t)\,] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt \tag{80}$$

siendo $s$ una variable compleja dada por:

$$s = \sigma + j\omega$$

con $\sigma$ la parte transitoria y $j\omega$ la estacionaria

Antitransformada de Laplace

Método de residuos

$$\lim_{x \to p} H(s)(s - p) \tag{81}$$

Pares antitransformados útiles

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha}{(s-p)}\right] = \alpha \cdot e^{pt}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}\right] = e^{\alpha t}\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega}e^{\alpha t}\sin(\omega t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}\right] = \frac{c}{\omega}e^{\alpha t}\sin(\omega t)$$

Impedancias operacionales

Suponiendo condiciones iniciales nulas

- Impedancia resistiva: $\mathbf{Z}_R(s) = R$
- Impedancia inductiva: $\mathbf{Z}_L(s) = sL$
- Impedancia capacitiva: $\mathbf{Z}_C(s) = 1/sC$
- Impedancia del tanque RC: $\mathbf{Z}_T(s) = R/(1 + sRC)$

### 5.0.1 Diagramas de Bode

Ganancia

$$G = 20\log|H(j\omega)| \tag{82}$$

Fase

$$F = tan^{-1}\left(\frac{\mathbb{I}m[H(j\omega)]}{\mathbb{R}e[H(j\omega)]}\right) \tag{83}$$

*propiedad importante para calcular argumentos:

$$Arg[(j\omega)^n] = n \cdot Arg(j\omega) = \frac{n\pi}{2}$$

Cálculo de una frecuencia particular

Dada una frecuencia $\omega_0$ separada por una pendiente $m$:

$$\omega_p = \omega_0 \cdot 2^{|H(j\omega|/m}$$

Diagrama de Bode real v asintótico

- Singularidad de primer orden: $3dB \quad // \quad 7^\circ$
- Singularidad de segundo orden : $(20\log Q)dB$