



Universidad de Buenos Aires

FACULTAD DE INGENIERIA

ANALISIS DE CIRCUITOS

Camila Sol Monforte

Padrón: 107193

1ro cuatrimestre 2024

Índice general

I Unidad 1-Circuitos de DC	7
1. Introducción	9
1.1. Leyes basicas	9
1.1.1. Ley de Ohm	9
1.1.2. Leyes de Kirchhoff	10
2. Metodos de analisis	11
2.1. Metodo de nodos	11
2.2. Metodo de mallas	11
2.3. Divisor de tensión	12
2.4. Divisor de corriente	13
3. Teoremas de circuitos	15
3.1. Superposición	15
3.2. Transformación de fuentes	15
3.3. Teorema de Thevenin	15
3.4. Teorema de Norton	16
3.5. Teorema de máxima transferencia de potencia	16
4. Amplificador Operacional	17
4.1. Amplificador operacional ideal	17
4.2. Configuraciones	18
4.2.1. Amplificador inversor	18
4.2.2. Amplificador no inversor	18
4.2.3. Amplificador Sumador	19
4.2.4. Amplificador Diferencial	20
4.2.5. Amplificador integrador	21
4.2.6. Amplificador derivador	21
4.2.7. Amplificador en cascada	21
II Unidad 2	23
5. Capacitores e inductores	25
5.1. Capacitores	25
5.2. Inductores	27
5.3. Aplicaciones	28
5.3.1. Integrados	29
5.3.2. Diferenciador	29
5.3.3. Computadora analógica	30

6. Circuitos de primer orden	31
6.1. Circuito RC sin fuente	31
6.2. Circuito RL sin fuente	33
6.3. Funciones de singularidad	34
6.3.1. Escalón unitario	34
6.3.2. Función impulso unitario	35
6.3.3. Función de rampa unitaria	35
6.3.4. Relación de las func.singulares	36
6.4. Respuesta escalón de un circuito RC	36
6.5. Respuesta escalón de un circuito RL	36
6.6. Circuitos de primer orden con amplificadores operacionales	37
7. Circuitos de segundo orden	39
7.1. Soluciones particulares	39
7.2. Soluciones homogéneas	39
7.2.1. Caso sobreamortiguado	39
7.2.2. Caso críticamente amortiguado	40
7.2.3. Caso subamortiguado	40
III Unidad 3-Circuitos de AC	43
8. Régimen senoidal permanente	45
8.1. Señal senoidal	45
8.2. Fasores	46
8.2.1. Relación entre fasores y senoides	46
8.3. Impedancias	46
9. Potencia en circuitos AC	51
9.1. Potencia instantánea y media	51
9.2. Teorema de máxima transferencia de potencia (TMTP)	51
9.3. Valor eficaz o RMS	52
9.3.1. Potencia compleja	52
10.Circuitos Trifásicos	55
10.1. Tensiones trifásicas balanceadas	55
10.2. Conexión estrella-estrella balanceada	57
10.3. Conexión estrella-delta balanceada	58
10.4. Conexión delta-delta balanceada	59
10.5. Conexión delta-estrella balanceada	59
10.6. Potencia en un sistema balanceado	60
11.Circuitos acoplados magnéticamente	61
11.1. Autoinductancia	61
11.2. Inductancia mutua	61
11.2.1. Acoplamiento	62
11.2.2. Convención del punto	63
11.2.3. Bobinas en serie	64
11.2.4. Transformación de bobinas	64
11.3. Transformadores lineales	64
11.4. Transformador ideal	65

IV Unidad 4	67
12. Diagramas de Bode	69
12.1. Función de transferencia	69
12.2. Diagramas de Bode	70
12.2.1. Ganancia K	70
12.2.2. Polo/cero en el origen	70
12.2.3. Polo/cero simple	71
12.2.4. Polo cuadrático/cero	71
13. Respuesta en frecuencia	75
13.1. Resonancia en serie	75
13.1.1. Ancho de banda	76
13.1.2. Factor de calidad Q	76
13.1.3. Selectividad	76
13.1.4. Resumen	77
13.2. Filtros pasivos	77
13.2.1. Características	77
13.2.2. Filtro pasabajas	77
13.2.3. Filtro pasaaltas	78
13.2.4. Filtro pasabanda	78
13.2.5. Filtro rechazabanda	79
13.3. Filtros activos	79
13.3.1. Características	79
13.3.2. Filtro pasabajas	80
13.3.3. Filtro pasaaltas	81
13.3.4. Filtro pasabanda	82
13.3.5. Filtro rechazabanda (o Notch)	83
13.4. Escalamiento	84
13.4.1. Escalamiento de magnitud	84
13.4.2. Escalamiento de frecuencia	85
13.4.3. Escalamiento de magnitud y de frecuencia	85
V Unidad 5- Laplace	87
14. Introducción a la transformada de Laplace	89
14.1. Propiedades	89
14.1.1. Linealidad	89
14.1.2. Escalamiento	89
14.1.3. Desplazamiento en el tiempo	90
14.1.4. Desplazamiento en frecuencia	90
14.1.5. Diferenciación en el tiempo	90
14.1.6. Integración en el tiempo	90
14.1.7. Diferenciación en frecuencia	90
14.1.8. Valores inicial y final	90
14.2. Transformada inversa de Laplace	91
15. Aplicaciones de la transformada de Laplace	93

VI Temas complementarios	95
16.Cuadripolos	97
Anexo	99
Decibeles	99

Parte I

Unidad 1-Circuitos de DC

Capítulo 1

Introducción

Definiciones

- **Circuito electrico:** Es una interconexión de elementos electricos.
- **Carga:** Es una propiedad eléctrica de las particulas atómiicas de las que se compone la materia.
[C]
- **Corriente electrica:** Es la velocidad de cambio de la carga respecto al tiempo.
 - $i = \frac{dq}{dt}$
 - Ampere [A] = Coulomb[C]/Segundo[S]
- **Tensión:** Es la energía requerida para mover una carga unitaria a través de un elemento
 - $v_{ab} = \frac{dw}{dq}$
 - Volt [V] = Joule[J]/Coulomb [C] = Newton[N] Metro[M]/Coulomb[C]
- **Potencia:** Es la variación respecto del tiempo de gasto o absorcion de energía [W].
 $p = \frac{dw}{dt} = v \cdot i$
- **Energia:** Capacidad para realizar trabajo [J].
- **Rama:** Representa un solo elemento, como una fuente de tensión o un resistor.
- **Nodo:** Es el punto de conexión entre dos o más ramas.
- **Lazo:** Es cualquier trayectoria cerrada en un circuito
- **Malla:** Es un lazo que no contiene lazos.

1.1. Leyes basicas

1.1.1. Ley de Ohm

Establece que la tensión v a lo largo de un resistor es directamente proporcional a la corriente i que fluye a través del resistor.

$$\begin{aligned}
 v &= i \cdot R & \textbf{Ley de Ohm} \\
 R &= \frac{v}{i} & \textbf{Resistencia} [\Omega] \\
 G &= \frac{i}{v} & \textbf{Conductancia} [\text{S}]
 \end{aligned}$$

La **resistencia** denota la capacidad de un elemento para resistirse al flujo de la corriente eléctrica. La **conductancia** es la capacidad de un elemento para conducir corriente eléctrica.

1.1.2. Leyes de Kirchhoff

Ley de corriente de Kirchhoff (KCL)

Establece que la suma algebraica de las corrientes que entran a un nodo es de cero.

$$\sum_{n=1}^N i_n = 0$$

Ley de tensión de Kirchhoff (KVL)

Establece que la suma algebraica de todas las tensiones alrededor de una trayectoria cerrada es cero.

$$\sum_{m=1}^M v_m = 0$$

Capítulo 2

Metodos de analisis

2.1. Metodo de nodos

Interesa hallar las tensiones del nodo. Pasos:

1. Elegir nodo de referencia
2. Escribir ecuaciones de cada uno de los $(n - 1)$ nodos restantes
3. Resolver el sistema de ecuaciones

2.2. Metodo de mallas

Interesa hallar las corrientes de malla. Pasos:

1. Definir las corrientes de malla.
2. Escribir ecuaciones de cada una de las n mallas
3. Resolver el sistema de ecuaciones

Cantidad	Unidad básica	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Carga	coulomb	C

Figura 2.1: Las seis unidades básicas del SI

Multiplicador	Prefijo	Símbolo
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hecto	h
10	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

Figura 2.2: Prefijos del SI

2.3. Divisor de tensión

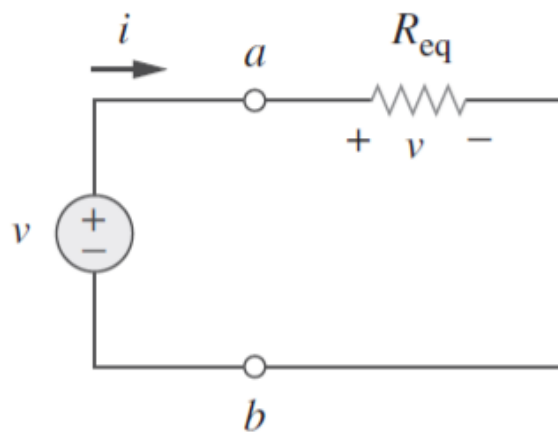


Figura 2.3: Circuito basico DC

Teniendo en cuenta el circuito [2.3](#), para determinar la tensión a lo largo de cada resistor, hago uso de las ec. siguientes:

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v$$

mismo procedimiento para hallar v_2 .

Generalizando; la tensión en la fuente v se divide entre los resistores en proporción directa a sus resistencias, a mejor resistencia, mayor caída de tensión.

Principio de división de tensión

Si un divisor de tensión tiene N resistores (R_1, R_2, \dots, R_N) en serie con la tensión en la fuente v , el n -ésimo resistor (R_n) tendrá una caída de tensión de:

$$v_n = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} v \quad (2.1)$$

2.4. Divisor de corriente

Capítulo 3

Teoremas de circuitos

3.1. Superposición

El principio de superposición establece que la tensión entre los extremos (o la corriente a través) de un elemento en un circuito lineal es la suma algebraica de las tensiones (o corrientes) a través de ese elemento debido a que cada fuente independiente actúa sola.

Pasos para aplicar el principio de superposición:

- Apague todas las fuentes independientes, excepto una. Determine la salida (tensión o corriente) debida a esa fuente activa.
- Repita el paso 1 en cada una de las demás fuentes independientes.
- Halle la contribución total sumando algebraicamente todas las contribuciones debidas a las fuentes independientes.

3.2. Transformación de fuentes

Una transformación de fuentes es el proceso de reemplazar una fuente de tensión v_s en serie con un resistor R por una fuente de corriente i_s en paralelo con un resistor R o viceversa.

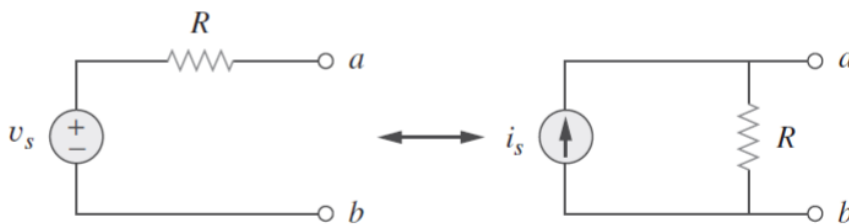


Figura 3.1: Circuitos equivalentes de transformación de fuentes

La transformación de fuente requiere que $v_s = i_s R$.

3.3. Teorema de Thevenin

El teorema de Thevenin establece que un circuito lineal de dos terminales puede reemplazarse por un circuito equivalente que consta de una fuente de tensión V_{Th} en serie con un resistor R_{Th} , donde V_{Th} es la tensión de circuito abierto en las terminales y R_{Th} es la entrada o resistencia equivalente en las terminales cuando las fuentes independientes se apagan.

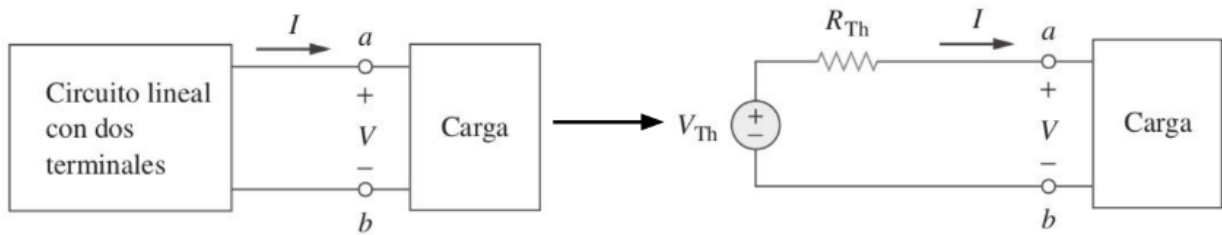


Figura 3.2: Circuito equivalente de Thevenin

- Si la red no tiene fuentes dependientes, se apagan todas las fuentes independientes.
- Si la red tiene fuentes dependientes, se apagan todas las fuentes independientes. Como en el caso de la superposición, las fuentes dependientes no se desactivan, porque son controladas por las variables del circuito. Se aplica una fuente de tensión v_o en las terminales a y b y se determina la corriente resultante i_o .

3.4. Teorema de Norton

El teorema de Norton establece que un circuito lineal de dos terminales puede reemplazarse por un circuito equivalente que consta de una fuente de corriente I_N en paralelo con un resistor R_N , donde I_N es la corriente de cortocircuito a través de las terminales y R_N es la resistencia de entrada o resistencia equivalente en las terminales cuando las fuentes independientes están desactivadas.



Figura 3.3: Circuito equivalente de Norton

3.5. Teorema de máxima transferencia de potencia

La máxima potencia se transfiere a la carga cuando la resistencia de la carga es igual a la resistencia de Thevenin vista desde la carga ($R_L = R_{Th}$).

Capítulo 4

Amplificador Operacional

Un amplificador operacional es un elemento de circuitos activo diseñado para realizar operaciones matemáticas de suma, resta, multiplicación, división, diferenciación e integración.

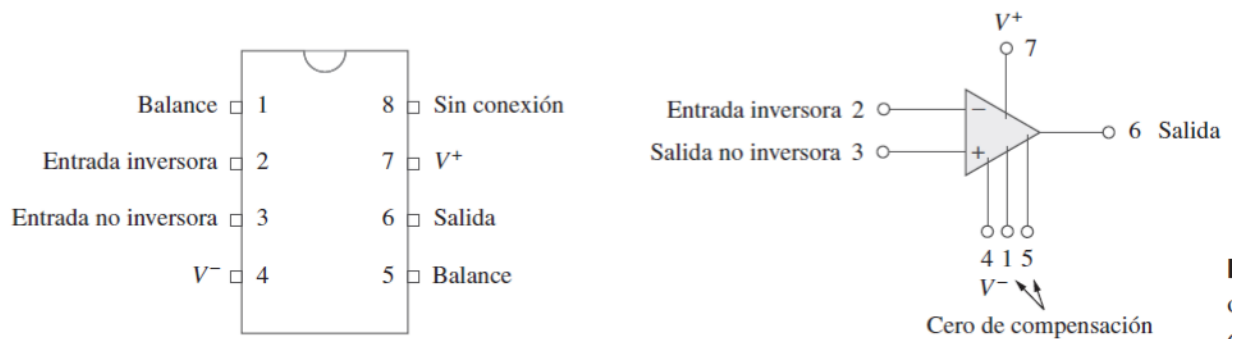


Figura 4.1: Amplificador operacional común

La salida v_o está dada por $v_o = A v_d = A(v_2 - v_1)$, donde A se llama **ganancia en tensión de lazo abierto**, porque es la ganancia del amplificador operacional sin retroalimentación externa de la salida a la entrada. v_1 es la tensión entre la terminal inversora y tierra, y v_2 la tensión entre terminal no inversora y tierra.

Una **retroalimentación negativa** se obtiene cuando la salida se retroalimenta a la terminal inversora del amplificador operacional. Cuando hay una vía de retroalimentación de la salida a la entrada, la proporción entre la tensión de salida y la tensión de entrada se llama **ganancia de lazo cerrado**.

El amplificador operacional puede funcionar en tres modos, dependiendo de la tensión de entrada diferencial v_d :

- Saturación positiva $v_o = V_{CC}$
- Región lineal $-V_{CC} \leq v_o = A v_d \leq V_{CC}$
- Saturación negativa $v_o = -V_{CC}$

4.1. Amplificador operacional ideal

Para facilitar la comprensión de los circuitos de amplificadores operacionales, se supondrá que son amplificadores operacionales ideales.

- Ganancia infinita de lazo abierto $A \approx \infty$

- Resistencia de entrada infinita $R_i \approx \infty$
- Resistencia de salida cero $R_o \approx 0$

Características importantes:

1. Las corrientes por las dos terminales de entrada son de cero $i_1 = 0, i_2 = 0$

Esto se debe a la resistencia de entrada infinita. Una resistencia infinita entre las terminales de entrada implica que ahí existe un circuito abierto y que no puede entrar corriente en el amplificador operacional

2. $v_1 = v_2$

4.2. Configuraciones

4.2.1. Amplificador inversor

Un amplificador inversor invierte la polaridad de la señal de entrada mientras la amplifica.

- La entrada no inversora se conecta a tierra, v_i se conecta a la entrada inversora a través de R_1 y el resistor de retroalimentación R_f se conecta entre la entrada inversora y la salida.
- Con ganancia negativa

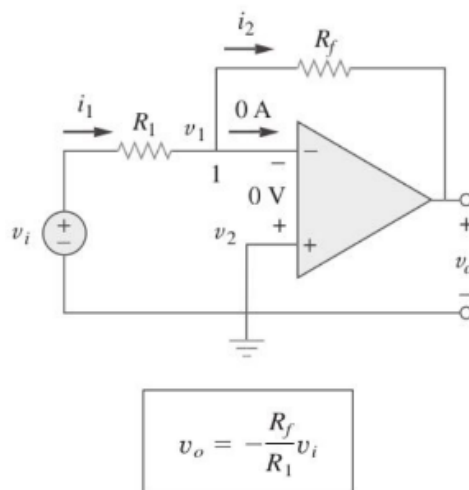
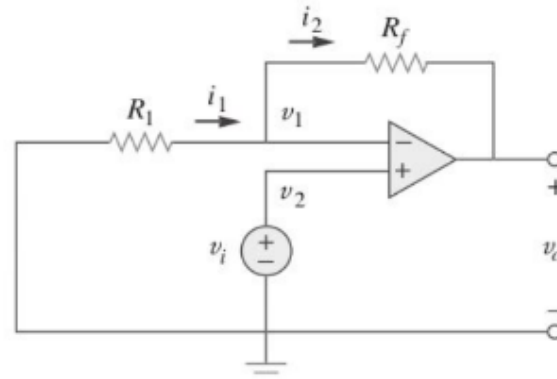


Figura 4.2: Amplificador inversor

4.2.2. Amplificador no inversor

Un amplificador no inversor es un circuito de amplificador operacional diseñado para suministrar una ganancia en tensión positiva

- Con ganancia positiva
- La tensión de entrada v_i se aplica directamente a la terminal de entrada no inversora, y el resistor R_1 se conecta entre la tierra y la terminal inversora.
- Si $R_f = 0$ y $R_1 = \infty$, el circuito se convierte en un *seguidor de tensión* (o *amplificador de ganancia unitaria*).



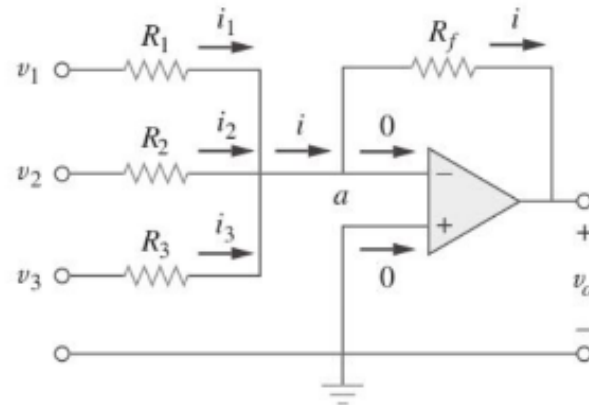
$$v_o = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) v_i$$

Figura 4.3: Circuito de amplificador no inversor

- $v_o = v_1$
- Impedancia de entrada muy alta, es útil como amplificador de etapa intermedia (o buffer) para aislar un circuito de otro.
- Minimiza la interacción entre las dos etapas y elimina la carga interetapas.

4.2.3. Amplificador Sumador

Un amplificador sumador es un circuito del amplificador operacional que combina varias entradas y produce una salida que es la suma ponderada de las entradas.

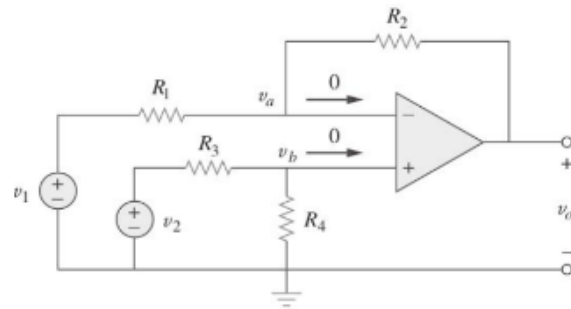


$$v_o = -\left(\frac{R_f}{R_1}v_1 + \frac{R_f}{R_2}v_2 + \frac{R_f}{R_3}v_3\right)$$

Figura 4.4: Circuito amplificador de sumador

4.2.4. Amplificador Diferencial

Un amplificador de diferencia es un dispositivo que amplifica la diferencia entre dos entradas pero rechaza toda señal común a las dos entradas.



$$v_o = \frac{R_2(1 + R_1/R_2)}{R_1(1 + R_3/R_4)} v_2 - \frac{R_2}{R_1} v_1 \quad v_o = \frac{R_2}{R_1} (v_2 - v_1)$$

Figura 4.5: Circuito amplificador diferencial

4.2.5. Amplificador integrador

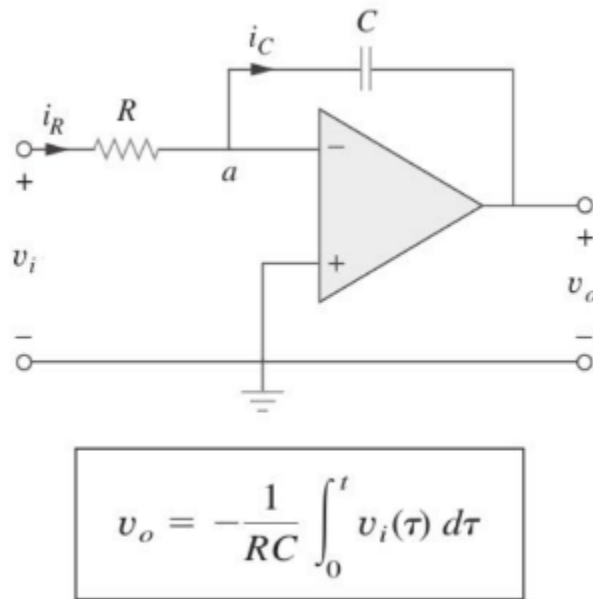


Figura 4.6: Circuito amplificador integrador

4.2.6. Amplificador derivador

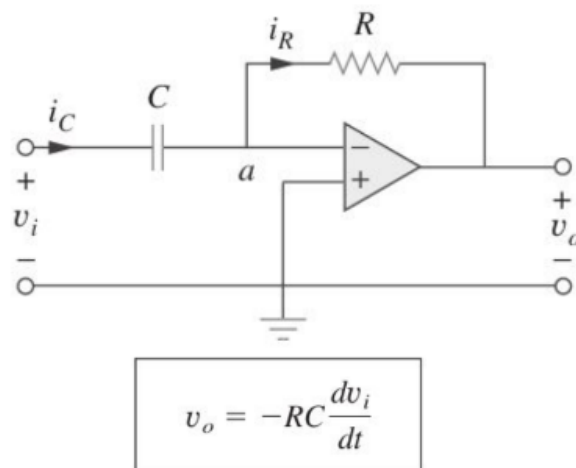


Figura 4.7: Circuito amplificador derivador

4.2.7. Amplificador en cascada

Una conexión en cascada es un arreglo de dos o más circuitos de amplificadores operacionales dispuestos uno tras otro, de manera que la salida de uno es la entrada del siguiente.

- A cada circuito de la cadena se le llama una etapa; la señal de entrada original se incrementa con la ganancia de la etapa individual.

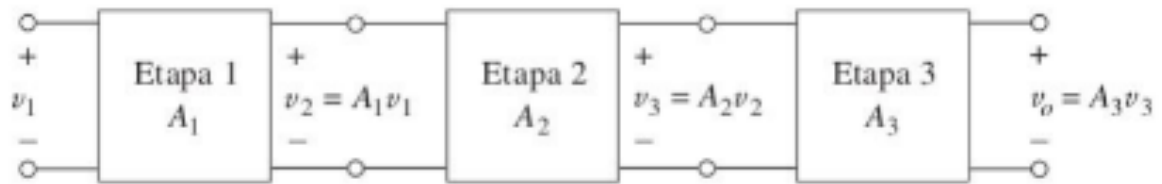


Figura 4.8: Circuito amplificador en cascada

- Dado que la salida de una etapa es la entrada de la siguiente, la ganancia total de la conexión en cascada es el producto de las ganancias de los circuitos de amplificadores operacionales individuales

Parte II

Unidad 2

Capítulo 5

Capacitores e inductores

5.1. Capacitores

Un capacitor es un elemento pasivo diseñado para almacenar energía en su campo eléctrico. Está compuesto por dos placas conductoras separadas por un aislante (o dieléctrico).

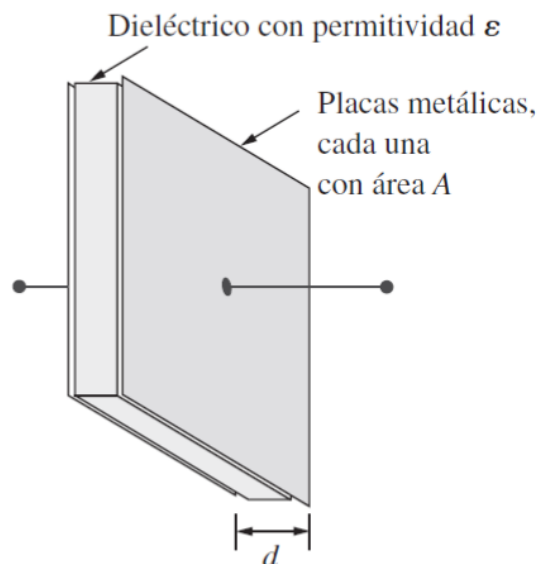


Figura 5.1: Capacitor usual

El monto de carga almacenada, representado por q , es directamente proporcional a la tensión aplicada v de modo que:

$$q = C \cdot v \quad (5.1)$$

donde C es la *capacitancia* del capacitor.

- 1 farad = 1 coulomb/volt

- **Capacitancia:**

- La cual es la razón entre la carga en una placa de un capacitor y la diferencia de tensión entre las dos placas, medida en farads (F).
- Depende de las dimensiones físicas del capacitor.
- Si se trata de un capacitor de placas paralelas:

$$c = \frac{\epsilon A}{d} \quad (5.2)$$

donde A es el área superficial de cada placa, d la distancia entre las placas y ϵ la permitividad del material dieléctrico entre las placas.

• **Factores del valor de C :**

- **El área superficial de las placas:** cuanto más grande el área, mayor capacitancia.
- **El espaciamiento entre las placas:** a menor espaciamiento, mayor capacitancia.
- **La permitividad del material:** a mayor permitividad, mayor capacitancia.

- Relación corriente-tensión:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt} \quad (5.3)$$

- Relación tensión-corriente:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_o}^t i(\tau) d\tau + v(t_o) \quad (5.4)$$

El capacitor tiene memoria

- Potencia instantanea suministrada al capacitor:

$$p = v i = C v \frac{dv}{dt} \quad (5.5)$$

- Energía almacenada en el capacitor:

$$w = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = C \int_{-\infty}^t v \frac{dv}{d\tau} d\tau = C \int_{-\infty}^t v dv = \frac{1}{2} C v^2 \Big|_{t=-\infty}^t \quad (5.6)$$

$$= \frac{1}{2} C v^2 = \frac{q^2}{2C} \quad (5.7)$$

- Capacitor en serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \frac{1}{C_N} \quad (5.8)$$

- Capacitor en paralelo:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots C_N \quad (5.9)$$

■ **Propiedades del capacitor:**

- Cuando la tensión entre los extremos de un capacitor no cambia con el tiempo, es decir, cuando la tensión es de cd), la corriente que circula a través del capacitor es de cero.
- La tensión en el capacitor debe ser continua. O sea, La tensión en un capacitor no puede cambiar abruptamente.
- A frecuencias bajas se comporta como un circuito abierto
- A frecuencias altas se comporta como un circuito cerrado
- El capacitor ideal no disipa energía. Toma potencia del circuito cuando almacena energía en su campo y devuelve la energía previamente almacenada cuando suministra potencia al circuito.
- Un capacitor real no ideal tiene un modelo en paralelo con una resistencia de fuga. La resistencia de fuga puede ser de hasta 100 M y despreciarse en la mayoría de las aplicaciones prácticas.

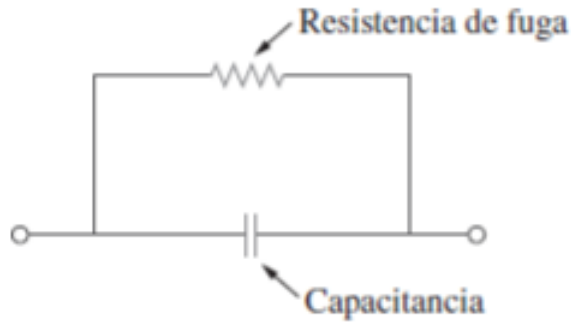


Figura 5.2: Modelo circuital de un capacitor no ideal

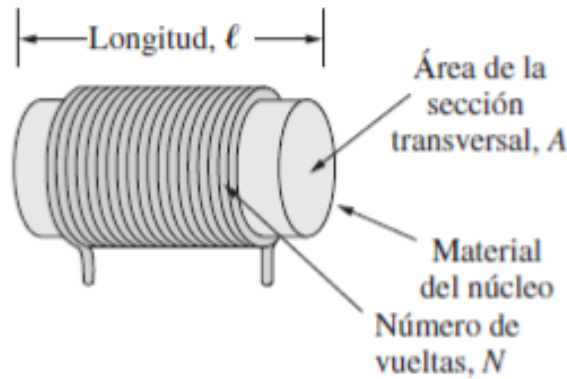


Figura 5.3: Forma habitual de un inductor

5.2. Inductores

Un inductor es un elemento pasivo diseñado para almacenar energía en su campo magnético. Consta de una bobina de alambre conductor.

Si se permite que pase corriente por un inductor, se descubre que la tensión en el inductor es directamente proporcional a la derivada de la corriente con respecto al tiempo.

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (5.10)$$

donde L es la *inductancia* del inductor.

- **Inductancia:** es la propiedad por la cual un inductor presenta oposición al cambio de la corriente que fluye por él, medida en henrys (H).

- L de la bobina:

$$L = \frac{N^2 \mu A}{l} \quad (5.11)$$

donde N es el número de vueltas, l la longitud, A el área de la sección transversal y μ la permeabilidad del núcleo.

- Relación corriente-tensión:

$$i = \frac{1}{L} \int_{t_o}^t v(\tau) d\tau + i(t_o) \quad (5.12)$$

- Potencia suministrada:

$$p = v i = \left(L \frac{di}{dt} \right) i \quad (5.13)$$

- Energía almacenada:

$$w = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t (L \frac{di}{d\tau}) i d\tau = L \int_{-\infty}^t i di = \frac{1}{2} L i^2(t) - \frac{1}{2} L i^2(-\infty) = \frac{1}{2} L i^2 \quad (5.14)$$

- Inductores en serie:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N \quad (5.15)$$

- Inductores en paralelo:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N} \quad (5.16)$$

- **Propiedades:**

- Para frecuencias bajas se comporta como un circuito cerrado
- Para frecuencias altas se comporta como un circuito abierto
- La tensión en un inductor es de cero cuando la corriente es cte.
- Oposición al cambio en la corriente que fluye por él. O sea no puede cambiar su corriente instantáneamente.
- El inductor ideal no disipa energía. La energía almacenada en él puede recuperarse en un momento posterior. El inductor toma potencia del circuito al almacenar la energía y suministra potencia al circuito al devolver la energía previamente.
- El inductor práctico no ideal: tiene una resistencia, que se llama *resistencia de devanado* R_w , y aparece en serie con la inductancia del inductor. La presencia de R_w convierte a éste tanto en un dispositivo de almacenamiento de energía como en un dispositivo de disipación de energía. Puesto que usualmente R_w es muy reducida, se le ignora en la mayoría de los casos. El inductor no ideal también tiene una *capacitancia de devanado* C_w , debida al acoplamiento capacitivo entre las bobinas conductoras. C_w es muy reducida y puede ignorarse en la mayoría de los casos, excepto en altas frecuencias.

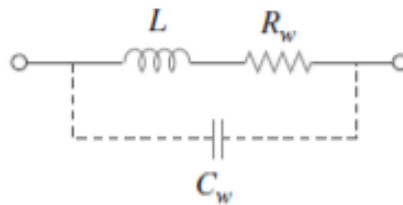


Figura 5.4: Modelo de circuitos de un inductor práctico.

5.3. Aplicaciones

Propiedades de capacitores e inductores:

- La capacidad para almacenar energía los hace útiles como fuentes temporales de tensión o corriente. Pueden usarse para generar una elevada cantidad de corriente o tensión por un breve periodo.
- Los capacitores se oponen a cambios abruptos de tensión, mientras que los inductores se oponen a cambios abruptos de corriente.

Esta propiedad hace que los inductores sean útiles para la supresión de chispas o arcos y para la conversión de una tensión intermitente de cd en una tensión de cd relativamente uniforme.

- Los capacitores e inductores son sensibles a la frecuencia. Esta propiedad los hace útiles para la discriminación de frecuencia

5.3.1. Integrados

Un integrador es un circuito de amplificador operacional cuya salida es proporcional a la integral de la señal de entrada.

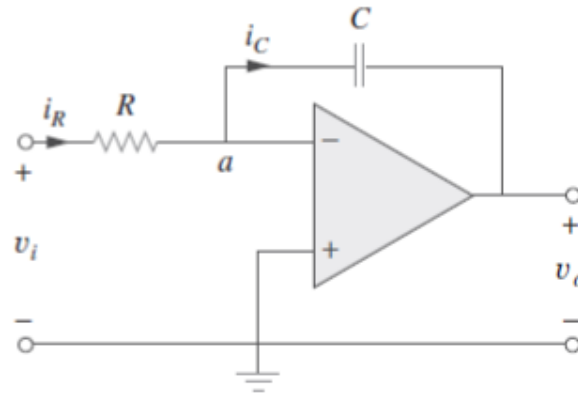


Figura 5.5: Integrado

- Tensión de salida:

$$v_o = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_i(\tau) d\tau \quad (5.17)$$

- En la práctica, el integrador de amplificador operacional requiere un resistor de retroalimentación para reducir la ganancia de cd e impedir la saturación

5.3.2. Diferenciador

Un diferenciador es un circuito de amplificador operacional cuya salida es proporcional a la velocidad de cambio de la señal de entrada

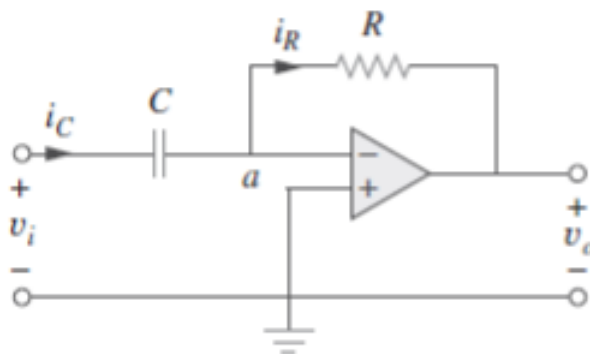


Figura 5.6: Diferenciador con amplificador operacional

- Tensión de salida:

$$v_o = -RC \frac{dv_i}{dt} \quad (5.18)$$

- Electronicamente inestables porque magnifican cualquier ruido eléctrico en ellos.

5.3.3. Computadora analógica

Las computadoras analógicas pueden programarse para resolver modelos matemáticos de sistemas mecánicos o eléctricos. Estos modelos suelen expresarse en términos de ecuaciones diferenciales. Resolver ecuaciones diferenciales simples con el uso de una computadora analógica requiere la disposición en cascada de tres tipos de circuitos con amplificador operacional: circuito integrador, amplificadores sumadores y amplificadores inversores/no inversores para escalamiento negativo/positivo

Capítulo 6

Circuitos de primer orden

Un circuito de primer orden se caracteriza por una ecuación diferencial de primer orden.

6.1. Circuito RC sin fuente

Un circuito RC sin fuente ocurre cuando su fuente de cd se desconecta súbitamente. La energía ya almacenada en el capacitor se libera hacia los resistores.

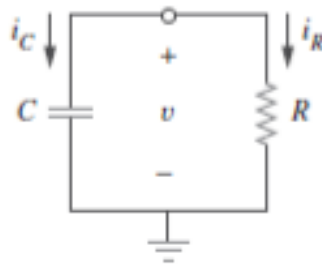


Figura 6.1: Circuito RC sin fuente

La respuesta en tensión del circuito RC es una caída exponencial de la tensión inicial.

$$v(t) = V_o e^{\frac{-t}{RC}}$$

Como la respuesta se debe a la energía inicial almacenada y a las características físicas del circuito y no a una fuente externa de tensión o de corriente, se le llama *respuesta natural del circuito*.

La respuesta natural de un circuito se refiere al comportamiento (en términos de tensiones y corrientes) del circuito, sin fuentes externas de excitación.

Si tomo como constante de tiempo a τ , el cual es el tiempo requerido para que la respuesta disminuya en un factor de $1/e$, o 36.8 % de su valor inicial.

$$\tau = RC \tag{6.1}$$

$$v(t) = V_o e^{\frac{-t}{\tau}} \tag{6.2}$$

cuanto menor sea la constante de tiempo, más rápidamente disminuirá la tensión; es decir, la respuesta será más rápida.

- Potencia disipada en el resistor:

$$p(t) = v i_R = \frac{V_o^2}{R} e^{\frac{-2t}{\tau}} \tag{6.3}$$

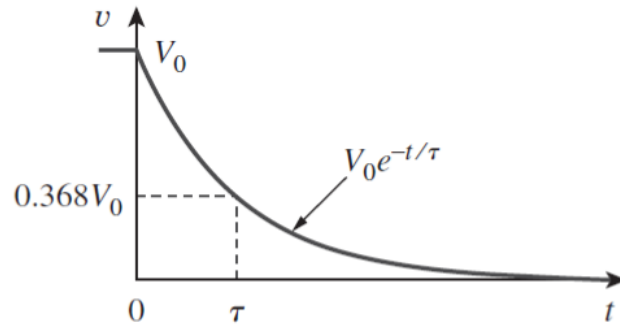


Figura 6.2: La respuesta en tensión del circuito RC

- La energía absorbida por el resistor:

$$w_R(t) = \int_0^t p(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2} C V_o^2 (1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}) \quad (6.4)$$

La clave para trabajar con un circuito RC sin fuente es hallar:

1. La tensión inicial $v(0) = V_o$ a lo largo del capacitor
2. La constante de tiempo τ

6.2. Circuito RL sin fuente

La respuesta natural del circuito RL es una caída exponencial de la corriente inicial.

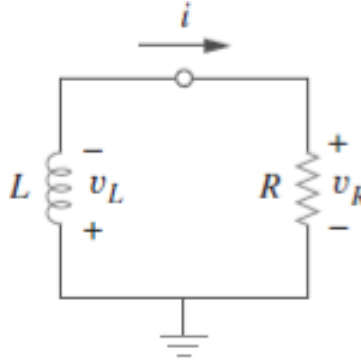


Figura 6.3: Circuito RL sin fuente

La respuesta de la corriente:

$$i(t) = I_o e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{L}{R} \quad (6.5)$$

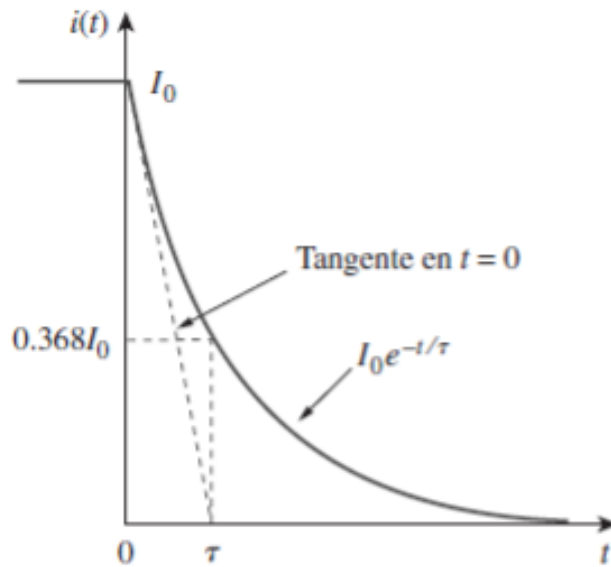


Figura 6.4: Respuesta de corriente al circuito RL

A menor constante de tiempo τ de un circuito, más rápida será la velocidad de caída de la respuesta.

- La tensión a lo largo del resistor:

$$v_R(t) = i R = I_o R e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6.6)$$

- Potencia disipada en el resistor:

$$p = v_R i = I_o^2 R e^{-\frac{2t}{\tau}} \quad (6.7)$$

- La energía absorbida por el resistor:

$$w_R(t) = \frac{1}{2} L I_o^2 (1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}) \quad (6.8)$$

La clave para trabajar con un circuito RL sin fuente es hallar:

1. La corriente inicial $i(0) = I_o$ a través del inductor.
2. La constante de tiempo τ del circuito

6.3. Funciones de singularidad

Las funciones de singularidad sirven como aproximaciones aceptables de las señales de conmutación que aparecen en circuitos con operaciones de conmutación. Son discontinuas o tienen derivadas discontinuas.

6.3.1. Escalón unitario

La función de escalón unitario $u(t)$ es de 0 para valores negativos de t y de 1 para valores positivos de t .

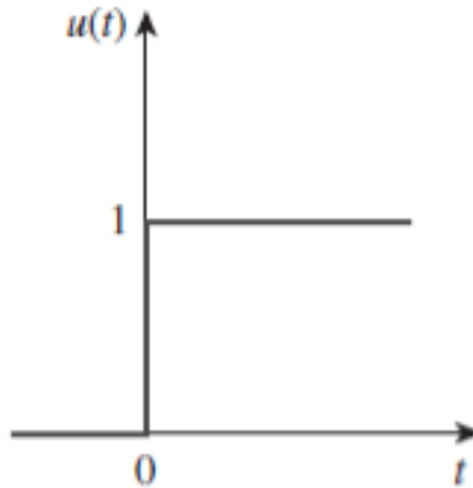


Figura 6.5: Función escalón unitario

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

Se usa la función escalón para representar un cambio abrupto de tensión o corriente.

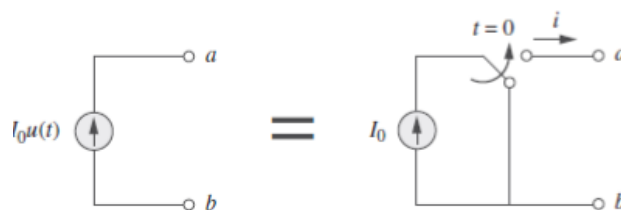


Figura 6.6: Fuente de corriente y su circuito equivalente

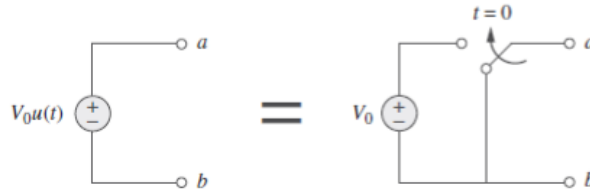


Figura 6.7: Fuente de tensión y su circuito equivalente

6.3.2. Función impulso unitario

La derivada de la función escalón $u(t)$ es la función impulso unitario $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t) = \begin{cases} 0 & e.o.c \\ \text{Indefinida}, & t = 0 \end{cases}$$

La función impulso unitario es cero siempre, excepto en $t = 0$, donde está indefinida.

Propiedad de muestreo/filtrado

Cuando una función se integra con la función impulso, se obtiene el valor de la función en el punto en el que ocurre el impulso.

$$\int_a^b f(t) \delta(t - t_o) dt = f(t_o) \quad (6.10)$$

6.3.3. Función de rampa unitaria

La integración de la función escalón unitario $u(t)$ da por resultado la función de rampa unitaria $r(t)$.

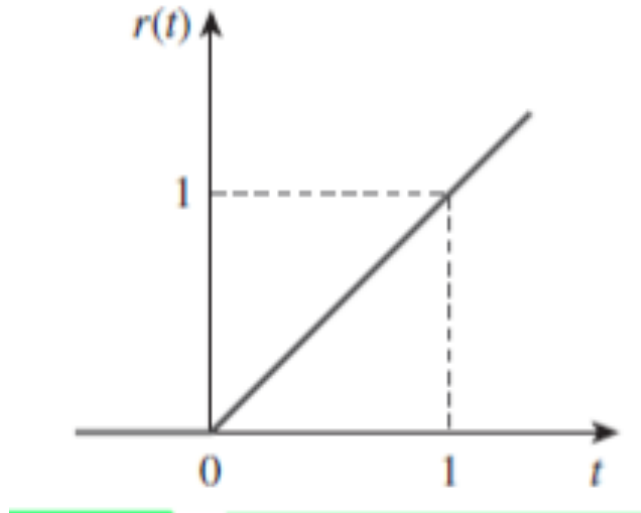


Figura 6.8: Función de rampa unitaria

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

Una rampa es una función que cambia a una velocidad constante.

6.3.4. Relación de las func.singulares

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (6.12)$$

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda \quad (6.13)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda \quad (6.14)$$

6.4. Respuesta escalón de un circuito RC

Cuando la fuente de cd de un circuito RC se aplica de repente, la fuente de tensión o de corriente puede modelarse como una función escalón, y la respuesta se conoce como respuesta escalón.

La respuesta escalón de un circuito es su comportamiento cuando la excitación es la función de escalón, la cual puede ser una fuente de tensión o de corriente.

La respuesta completa del circuito RC a una subita aplicación de una fuente de tensión cd, suponiendo que el capacitor está inicialmente cargado:

$$v(t) = \begin{cases} V_o, & t < 0 \\ V_s + (V_o - V_s)e^{\frac{-t}{\tau}}, & t > 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

La respuesta completa se puede separar en :

$$v = v_t + v_{ss} \quad (6.16)$$

La respuesta transitoria v_t es temporal, es la porción de la respuesta completa que decrece a cero conforme el tiempo tiende a infinito. Esta se extinguirá con el tiempo.

La respuesta en estado estable v_{ss} es la porción de la respuesta completa que permanece después de que la respuesta transitoria se ha extinguido.

$$v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{\frac{-t}{\tau}} \quad (6.17)$$

Para hallar la respuesta escalón de un circuito RC se requieren tres datos:

1. La tension inicial del capacitor $v(0)$.
2. La tensión final del capacitor $v(\infty)$
3. La constante de tiempo τ

6.5. Respuesta escalón de un circuito RL

Sea la respuesta la suma de la respuesta transitoria y la respuesta en estado estable,

$$i = i_t + i_{ss} \quad (6.18)$$

La respuesta transitoria es siempre un decaimiento exponencial:

$$i_t = A e^{\frac{-t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{L}{R} \quad (6.19)$$

La respuesta transitoria se extingue en esencia después de cinco contantes de tiempo. En este momento,

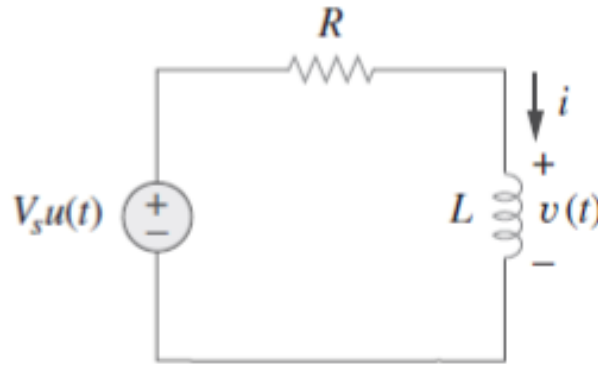


Figura 6.9: Circuito RL con entrada de escalón de tensión

el inductor se convierte en un cortocircuito, y la tensión entre sus terminales es de cero. La tensión de fuente V_s entera aparece a través de R . Así, la respuesta en estado estable es:

$$i_{ss} = \frac{V_s}{R} \quad (6.20)$$

lo cual resulta en la respuesta:

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + (I_o - \frac{V_s}{R})e^{\frac{-t}{\tau}} \quad (6.21)$$

la respuesta completa del circuito RL:

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{\frac{-t}{\tau}} \quad (6.22)$$

Para hallar la respuesta escalón de un circuito RL se requieren tres datos:

1. La corriente inicial del inductor $i(0)$ en $t = 0$
2. La corriente final del inductor $i(\infty)$
3. La constante de tiempo τ

6.6. Circuitos de primer orden con amplificadores operacionales

Capítulo 7

Circuitos de segundo orden

Condición necesaria pero no suficiente para ser un circuito de 2do orden: tener al menos dos elementos que almacenan energía.

$$y'' + 2\alpha y' + w_0^2 y = f(t) \quad (7.1)$$

Los pasos para resolver ejercicios de segundo orden son:

1. Determinar la ecuación diferencial del circuito de segundo orden
2. Encontrar las condiciones iniciales de las tensiones y corrientes, así como sus derivadas.
3. Proponer la solución homogénea y particular de manera genérica
4. Encontrar las constantes de las soluciones utilizando las condiciones iniciales
5. Encontrar la solución final sumando las soluciones homogéneas y particular

7.1. Soluciones particulares

- **Constante:** si $f(t) = K_0$. Propongo: $y_P(t) = K$, siendo K cte.
- **Trigonométrica:** si $f(t) = A \sin(2\pi ft - \theta_A) + B \cos(2\pi ft - \theta_B)$. Propongo: $y_P(t) = C \sin(2\pi ft - \theta_C)$
- **Exponencial:** si $f(t) = A e^{Bt}$. Propongo: $y_P(t) = C e^{Bt}$

7.2. Soluciones homogéneas

Polinomio característico:

$$s^2 + 2\alpha s + w_0^2 = 0 \quad (7.2)$$

Cuyas soluciones :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - w_0^2}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - w_0^2}$$

7.2.1. Caso sobreamortiguado

Cuando $\alpha > w_0$. Propongo:

$$y_H(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

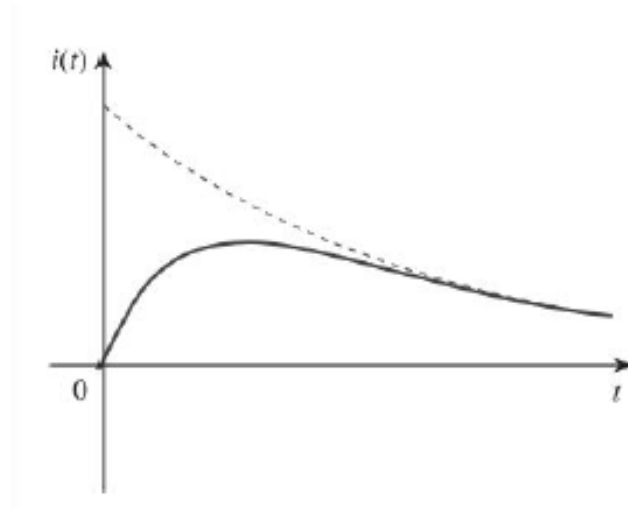


Figura 7.1: Gráfico del caso sobreamortiguado

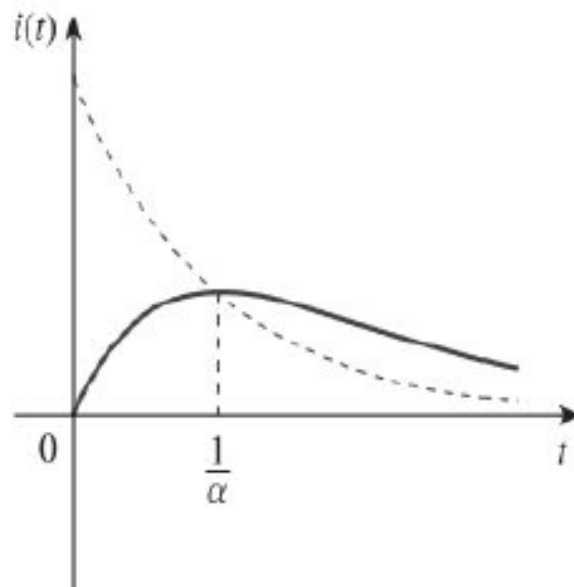


Figura 7.2: Gráfico del caso críticamente amortiguado

7.2.2. Caso críticamente amortiguado

Cuando $\alpha = w_0$. Propongo:

$$y_H(t) = (A_2 + A_1 t) e^{-\alpha t}$$

7.2.3. Caso subamortiguado

Cuando $\alpha < w_0$. Propongo:

$$y_H(t) = e^{-\alpha t} [B_1 \cos(w_d t) + B_2 \sin(w_d t)]$$

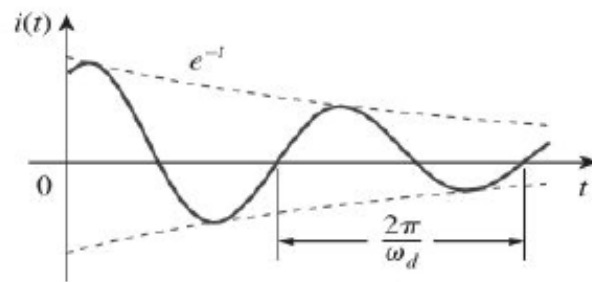


Figura 7.3: Gráfico del caso subamortiguado

Parte III

Unidad 3-Circuitos de AC

Capítulo 8

Régimen senoidal permanente

8.1. Señal senoidal

Una senoide es una señal que tiene la forma de la función seno o coseno.

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \phi)$$

- V_m = amplitud
- ω = frecuencia angular en radianes/s
- $(\omega t + \phi)$ = el argumento de la senoide
- ϕ = fase.
- Su periodo : $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Una función periodica es aquella que satisface $f(t) = f(t + nT)$ para cualquier t y para cualquier n entero.

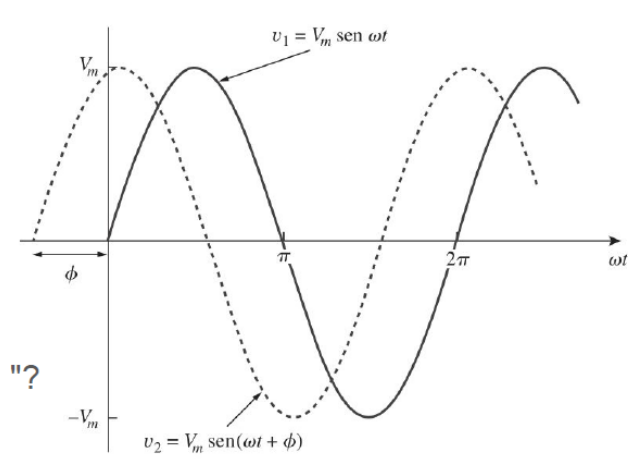


Figura 8.1: Dos senoides con diferentes fases

- $A \cos(\omega t) + B \text{sen}(\omega t) = C \cos(\omega t - \theta)$
- $C = \sqrt{A^2 + B^2}$
- $\theta = \tan^{-1} \frac{B}{A}$

Formas de representar a un número complejo	
Forma rectangular	$z = x + jy$
Forma polar	$z = \angle \phi$
Forma exponencial	$z = re^{j\phi}$
Variables	
Amplitud	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Angulo	$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$
Parte real	$x = r \cos \phi$
Parte imaginaria	$y = r \sen \phi$
Operaciones y propiedades	
Suma	$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
Resta	$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
Multiplicación	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \angle (\phi_1 + \phi_2)$
División	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\phi_1 - \phi_2)$
Inverso	$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \angle (-\phi)$
Raíz cuadrada	$\sqrt{z} = \sqrt{r} \angle (\frac{\phi}{2})$
Conjugado complejo	$z^* = x - jy = r \angle (-\phi) = r e^{-j\phi}$

8.2. Fasores

Un fasor es un número complejo que representa la amplitud y la fase de una senoide.

8.2.1. Relación entre fasores y senoides

- *Representación en el dominio temporal:*

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}(V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(V e^{j\omega t})$$

- *Representación en el dominio fasorial:*

$$V = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi$$

- *Relación diferencial:*

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &\iff j\omega V \\ \int v dt &\iff \frac{V}{j\omega} \end{aligned}$$

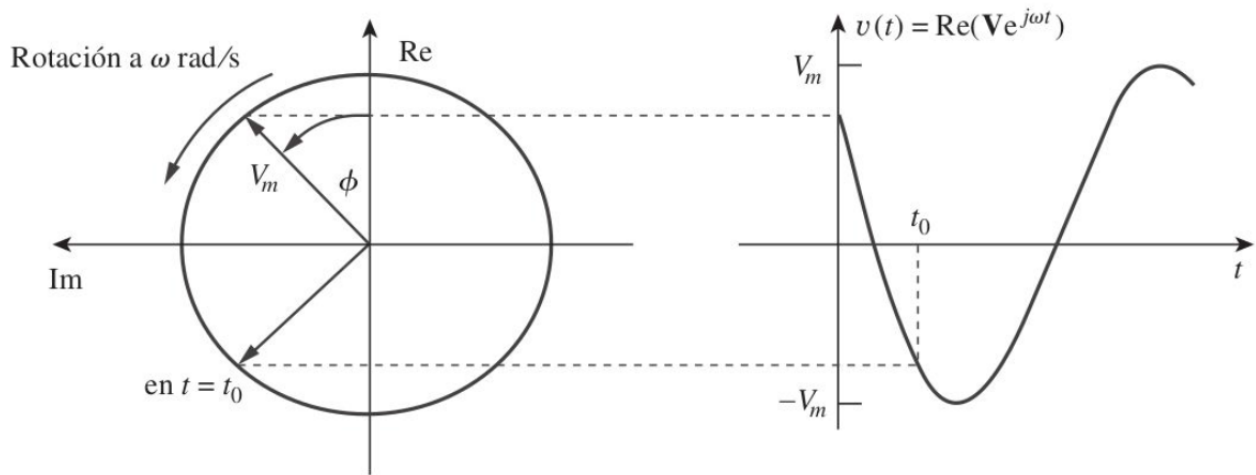
8.3. Impedancias

La **impedancia** Z de un circuito es la razón entre la tensión fasorial V y la corriente fasorial I , medida en ohms ω .

$$Z = R + jX = |Z| \angle \theta$$

Siendo sus variables:

- **Reactancia:** $X = |Z| \sen \theta$

Figura 8.2: Representación de $V e^{j\omega t}$

- $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$
- $\theta = \tan^{-1} \frac{X}{R}$
- $R = |Z| \cos \theta$

La **admitancia** \mathbf{Y} es el inverso de la impedancia, medido en siemens S

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{V}, \quad Y = G + iB$$

Siendo G la *susceptancia*.

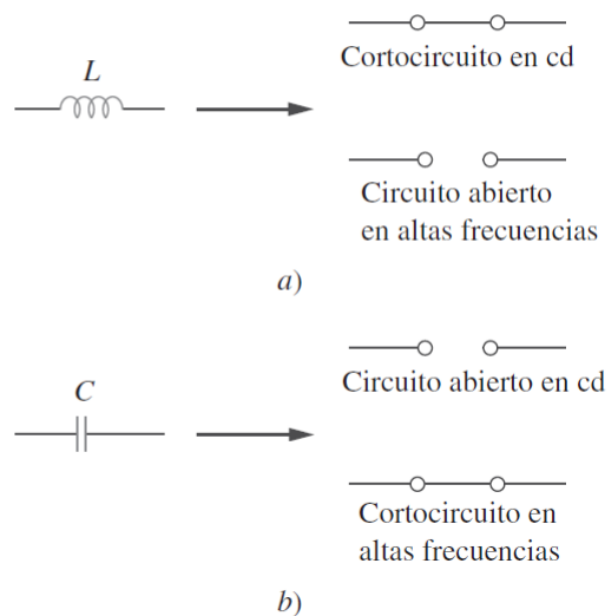


Figura 8.3: Circuitos equivalentes en cd y en altas frecuencias

Resistencia

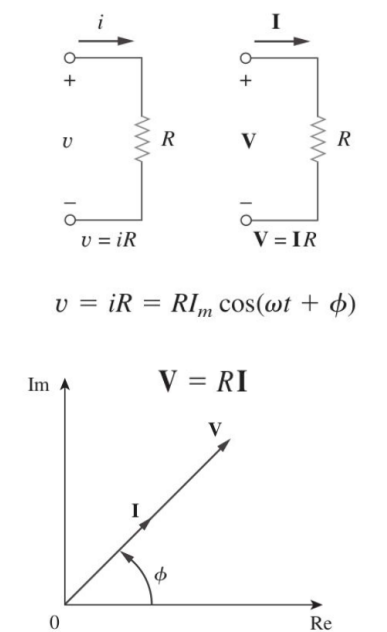


Figura 8.4: Relaciones de tensión-corriente de un resistor en dominio de frecuencia y de tiempo y su diagrama fasorial.

Inductancia

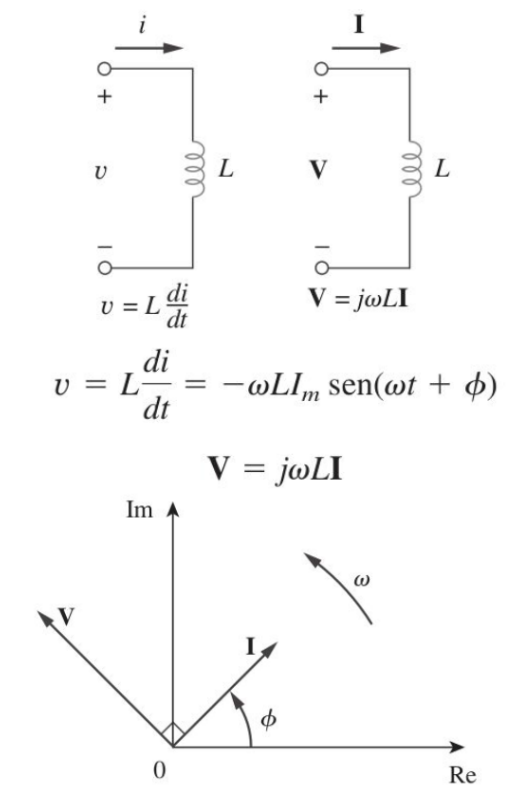


Figura 8.5: Relaciones de tensión-corriente de un inductor en el dominio temporal y frecuencial, y su diagrama fasorial

Capacitancia

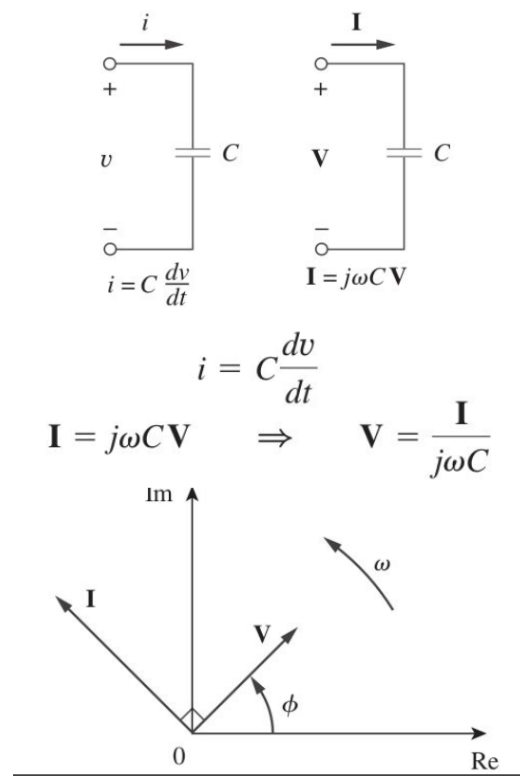


Figura 8.6: Relaciones de tensión-corriente de un capacitor en el dominio temporal y frecuencial, y su diagrama fasorial

Capítulo 9

Potencia en circuitos AC

9.1. Potencia instantanea y media

La **potencia instantanea** (W) es la potencia en cualquier instante.

$$p(t) = v(t) i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) = \quad (9.1)$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) \quad (9.2)$$

La **potencia promedio** (W), es el promedio de la potencia instantanea a lo largo de un periodo.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[VI^*] = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (9.3)$$

- Si $\theta_v = \theta_i$
 1. Circuito puramente resistivo
 2. La potencia es máxima
 3. $P = \frac{1}{2} V_m I_m = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} |I|^2 R$
- Si $\theta_v - \theta_i = \pm 90$
 1. Circuito puramente reactivo
 2. La potencia es nula

9.2. Teorema de máxima transferencia de potencia (TMTP)

El objetivo es ajustar los parámetros de la carga R_L y X_L de manera que P sea máxima.

$$Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$$

$$Z_L = R_L + jX_L$$

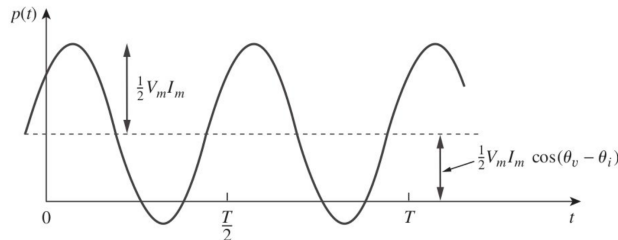


Figura 9.1: Entrada de potencia instantanea $p(t)$ a un circuito

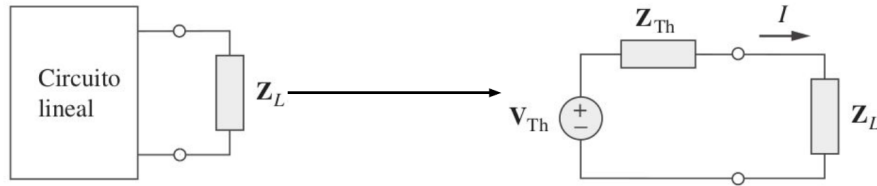


Figura 9.2: Determinación de la transferencia de potencia máxima promedio

1. Hallar Z_L de manera que la potencia media sobre la carga sea máxima

$$Z_L = R_L + jX_L = R_{th} - jX_{th} = Z_{th}^*$$

2. Para la máxima transferencia de potencia promedio, la impedancia de carga Z_L debe ser igual al conjugado de la impedancia compleja de Thevenin Z_{th}
3. La potencia máxima obtenida:

$$P_{m\acute{a}x} = \frac{|V_{th}|^2}{8 R_{th}}$$

9.3. Valor eficaz o RMS

El valor eficaz de una corriente periodica es la corriente de cd que suministra la misma potencia promedio a una resistencia que la corriente periodica.

Valores eficaces:

1. *Corriente eficaz:*

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

2. *Tensión eficaz:*

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt}$$

3. Para el caso de señales senoidales:

■

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

■

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

9.3.1. Potencia compleja

Potencia compleja sobre una carga Z como se ve en la figura [9.3](#):

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{I}^* \quad [\text{VA}]$$

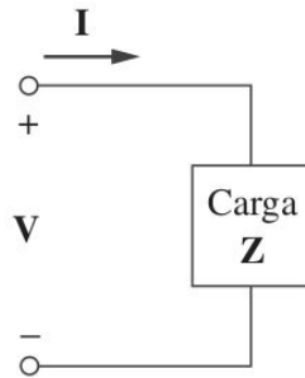


Figura 9.3: Fasores de tensión y corriente asociados con una carga

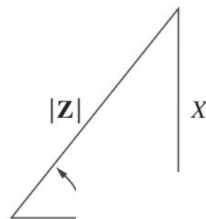
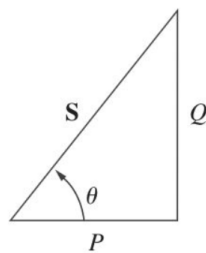
■ **Potencia promedio P [W]:**

$$P = \text{Re}(\mathbf{S}) = I_{rms}^2 R$$

■ **Potencia reactiva Q [VAR],** es una medida del intercambio de energía entre la fuente y la parte reactiva de la carga:

$$Q = \text{Im}(\mathbf{S}) = I_{rms}^2 X$$

Triangulo de potencia



- Potencia compleja: $\mathbf{S} = P + jQ = V_{rms} (I_{rms})^*$
- Potencia aparente: $S = |\mathbf{S}| = |V_{rms}| |I_{rms}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$
- Potencia real: $P = \text{Re}(\mathbf{S}) = S \cos(\theta_v - \theta_i)$
- Potencia reactiva: $Q = \text{Im}(\mathbf{S}) = S \sin(\theta_v - \theta_i)$
- Factor de potencia: $\frac{P}{S} = \cos(\theta_v - \theta_i)$

El proceso de incrementar el factor de potencia sin alterar la tensión o corriente de la carga original se conoce como **corrección del factor de potencia**.

Figura 9. de potencia

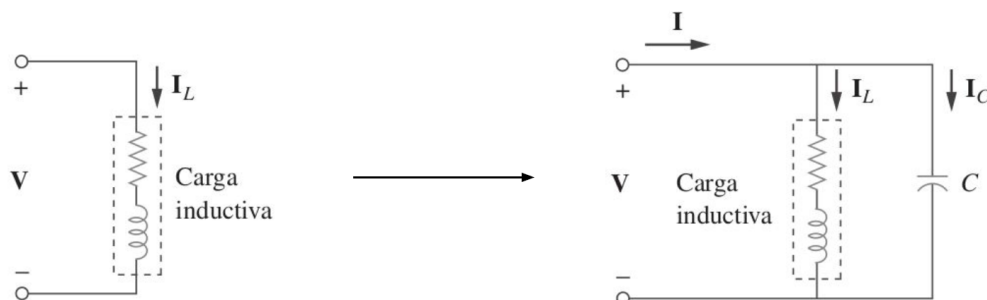


Figura 9.5: Corrección del factor de potencia, con carga inductiva original y con carga inductiva con factor de potencia mejorado

El termino adelantado o retraso se refiere a la corriente frente a la tensión.

1. $Q = 0$ en cargas resistivas (fp unitario)

2. $Q < 0$ en cargas capacitivas (fp adelantado)
3. $Q > 0$ en cargas inductivas (fp atrasado)

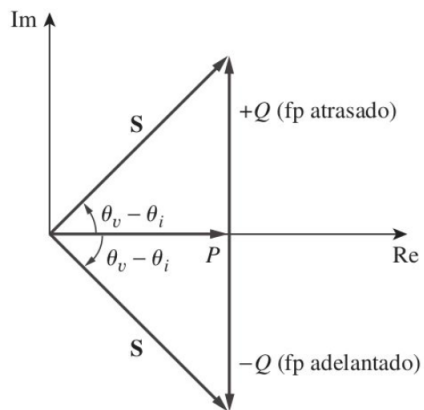


Figura 9.6: Triangulo de potencia

Capítulo 10

Circuitos Trifásicos

Un **sistema trifásico** se produce con un generador que consta de tres fuentes con la misma amplitud y frecuencia, pero desfasadas 120° entre sí.

Las tensiones trifásicas se producen a menudo con un generador trifásico de ca.

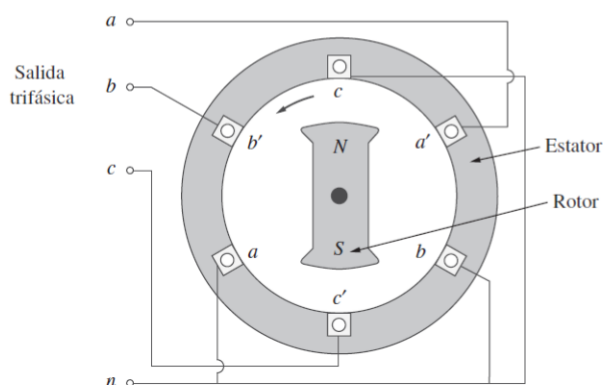


Figura 10.1: Generador trifasico

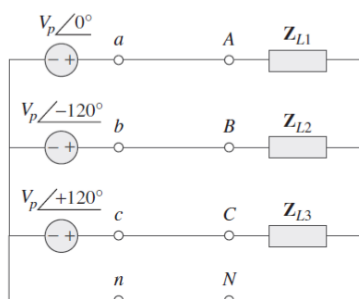


Figura 10.2: Sistema trifásico de cuatro conductores

10.1. Tensiones trifasicas balanceadas

Las tensiones V_{an} , V_{bn} , y V_{cn} se encuentran entre las líneas a, b y c y la línea neutra n. Estas tensiones se llaman *tensiones de fase*.

Las tensiones de fase balanceadas son de igual magnitud y están desfasadas 120° entre

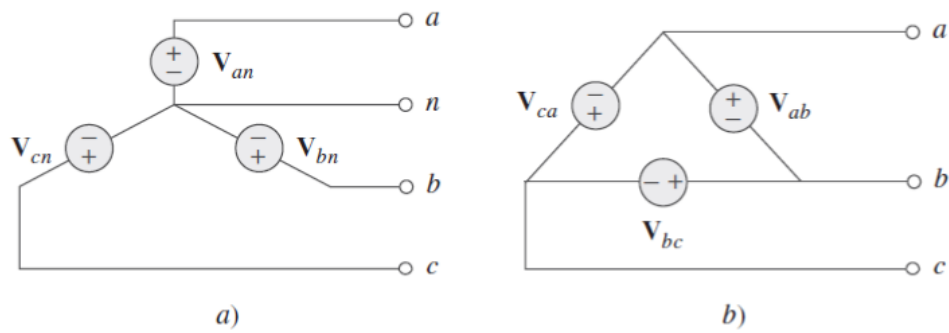


Figura 10.3: Fuentes trifasicas de tensión: a) conectadas en Y, b) conectadas en Δ

sí.

$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0$$

$$|V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}|$$

Hay dos combinaciones posibles, siendo V_P el valor eficaz o rms de las tensiones de fase:

- V_{an} se adelanta a V_{bn} , la que a su vez se adelanta a V_{cn}

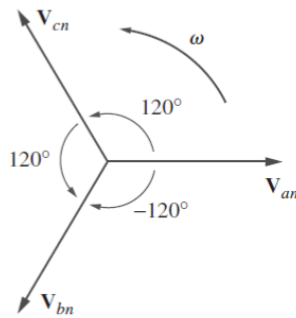


Figura 10.4: Secuencia de fase: abc o sec. negativa

1. $V_{an} = V_P \angle 0$
2. $V_{bn} = V_P \angle -120$
3. $V_{cn} = V_P \angle -240 = V_P \angle +120$

- V_{an} se adelanta a V_{cn} , la que a su vez se adelanta a V_{bn} .

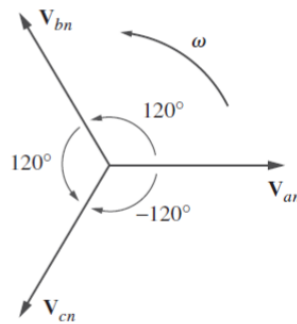


Figura 10.5: Secuencia de fase: acb o secuencia negativa

1. $V_{an} = V_P \angle 0$
2. $V_{cn} = V_P \angle -120$
3. $V_{bn} = V_P \angle -240 = V_P \angle +120$

Las secuencias de fases es el orden temporal en que las tensiones pasan por sus respectivos valores máximos.

- Una carga trifásica puede conectarse en estrella o en delta, dependiendo de la aplicación final.
 - **Conectada en estrella:** $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_Y$, donde Z_Y es la impedancia de carga por fase.

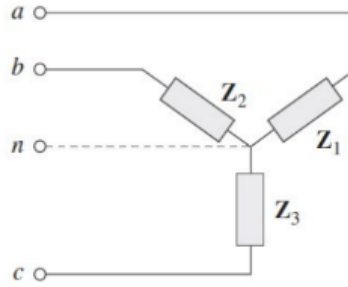


Figura 10.6: Conexión en Y (estrella)

- **Conectada en delta:** $Z_a = Z_b = Z_c Z_\Delta$, donde Δ es la impedancia de carga por fase.

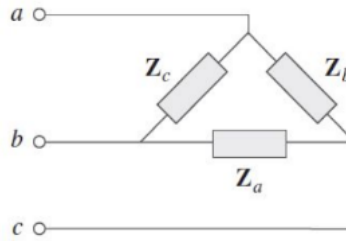


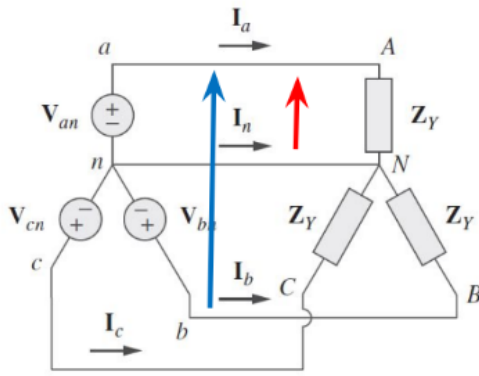
Figura 10.7: Conexión en Δ

- Una carga balanceada es aquella en que las impedancias de las fases son iguales en magnitud y en fase.

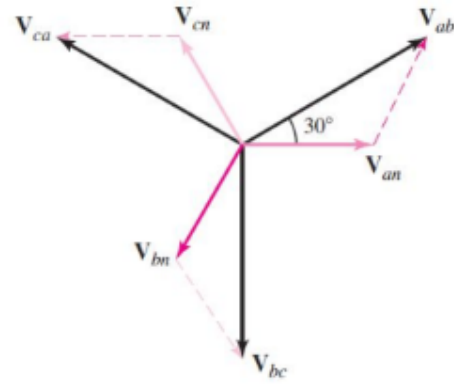
10.2. Conexión estrella-estrella balanceada

*Un **sistema Y-Y balanceado** es un sistema trifásico con fuente balanceada conectada en Y y carga balanceada conectada en Y*

- Tensiones de fase:
 - $V_{an} = V_P \angle 0$
 - $V_{bn} = V_P \angle -120$
 - $V_{cn} = V_P \angle +120$
- Tensiones de línea:
 - $V_{ab} = V_{an} + V_{nb} = V_{an} - V_{bn} = \sqrt{3} V_P \angle 30$



(a) Sistema Y-Y balanceado



(b) Diagrama fasorial

Figura 10.8: Sistema Y-Y balanceado, en rojo la tensión de fase V_P , y en azul la tensión de línea V_L

- $V_{bc} = \sqrt{3} V_P \angle -90$
- $V_{ca} = \sqrt{3} V_P \angle -210$
- La magnitud de las tensiones de línea V_L es $\sqrt{3}$ veces la magnitud de las tensiones de fase V_P :
 $V_L = \sqrt{3} V_P$

Relación de la corriente de fase y la corriente de línea:

$$I_L = I_P$$

10.3. Conexión estrella-delta balanceada

Un **sistema Y- Δ balanceado** consta de una fuente balanceada conectada en Y que alimenta a una carga balanceada conectada en Δ

- Tensiones de fase:
 - $V_{an} = V_P \angle 0$
 - $V_{bn} = V_P \angle -120$
 - $V_{cn} = V_P \angle +120$
- Tensiones de línea:
 - $V_{ab} = \sqrt{3} V_P \angle 30 = V_{AB}$
 - $V_{bc} = \sqrt{3} V_P \angle -90 = V_{BC}$
 - $V_{ca} = \sqrt{3} V_P \angle -150 = V_{CA}$
- Corrientes de fase:
 - $I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_{\Delta}}$
 - $I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_{\Delta}}$
 - $I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_{\Delta}}$
 - $I_p = |I_{AB}| = |I_{BC}| = |I_{CA}|$
- Corriente de línea:

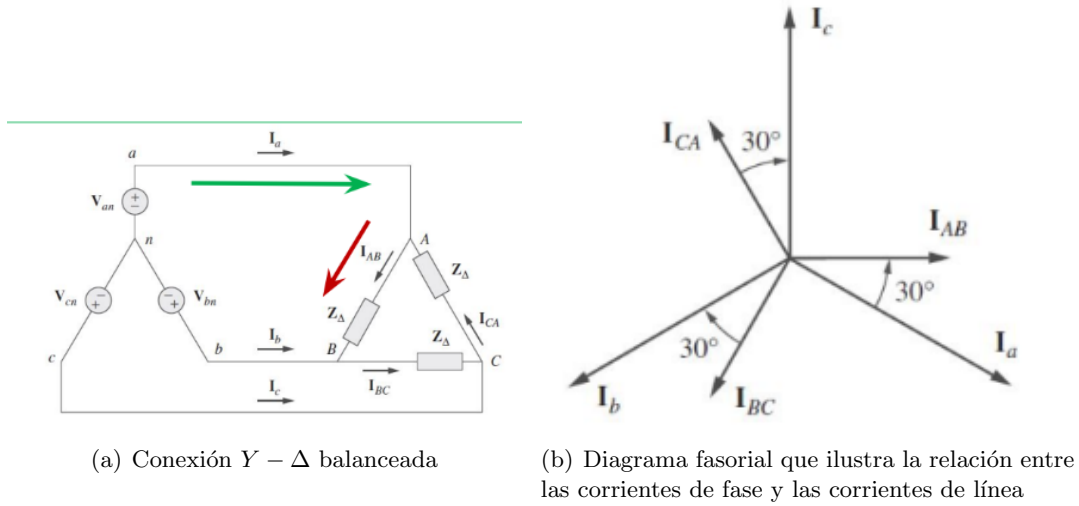


Figura 10.9: Sistema $Y-\Delta$ balanceado, en verde la corriente de línea I_L , y en bordo la corriente de fase I_p

- $I_L = \sqrt{3} I_p$
- $I_L = |I_a| = |I_b| = |I_c|$

10.4. Conexión delta-delta balanceada

Un **sistema $\Delta - \Delta$ balanceado** es aquel en el que tanto la fuente balanceada como la carga balanceada están conectadas en Δ

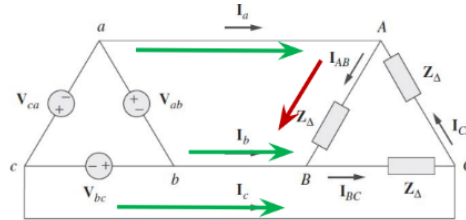


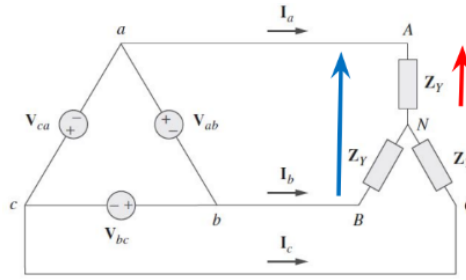
Figura 10.10: Conexión $\Delta - \Delta$ balanceada

Las tensiones y corrientes son iguales que las de [10.3](#)

10.5. Conexión delta-estrella balanceada

Un **sistema $\Delta - Y$ balanceado** consta de una fuente balanceada conectada en Δ que alimenta a una carga balanceada conectada en Y

Las tensiones de línea y fase son iguales a las vistas en [10.2](#)

Figura 10.11: Conexión $\Delta - Y$ balanceada

Conexión	Tensiones/corrientes de fase	Tensiones/corrientes de línea
Y-Y	$V_{an} = V_p / 0^\circ$ $V_{bn} = V_p / -120^\circ$ $V_{cn} = V_p / +120^\circ$ Misma corriente de línea	$V_{ab} = \sqrt{3} V_p / 30^\circ$ $V_{bc} = V_{ab} / -120^\circ$ $V_{ca} = V_{ab} / +120^\circ$ $I_a = V_{an} / Z_Y$ $I_b = I_a / -120^\circ$ $I_c = I_a / +120^\circ$
Y- Δ	$V_{an} = V_p / 0^\circ$ $V_{bn} = V_p / -120^\circ$ $V_{cn} = V_p / +120^\circ$ $I_{AB} = V_{AB} / Z_\Delta$ $I_{BC} = V_{BC} / Z_\Delta$ $I_{CA} = V_{CA} / Z_\Delta$	$V_{ab} = V_{AB} = \sqrt{3} V_p / 30^\circ$ $V_{bc} = V_{BC} = V_{ab} / -120^\circ$ $V_{ca} = V_{CA} = V_{ab} / +120^\circ$ $I_a = I_{AB} \sqrt{3} / -30^\circ$ $I_b = I_a / -120^\circ$ $I_c = I_a / +120^\circ$
Δ - Δ	$V_{ab} = V_p / 0^\circ$ $V_{bc} = V_p / -120^\circ$ $V_{ca} = V_p / +120^\circ$ $I_{AB} = V_{ab} / Z_\Delta$ $I_{BC} = V_{bc} / Z_\Delta$ $I_{CA} = V_{ca} / Z_\Delta$	Mismo voltaje de fase $I_a = I_{AB} \sqrt{3} / -30^\circ$ $I_b = I_a / -120^\circ$ $I_c = I_a / +120^\circ$
Δ -Y	$V_{ab} = V_p / 0^\circ$ $V_{bc} = V_p / -120^\circ$ $V_{ca} = V_p / +120^\circ$ Misma corriente de línea	Mismo voltaje de fase $I_a = \frac{V_p / -30^\circ}{\sqrt{3} Z_Y}$ $I_b = I_a / -120^\circ$ $I_c = I_a / +120^\circ$

Figura 10.12: Resumen de tensiones/corrientes de fase y de línea de sistemas trifásicos balanceados

10.6. Potencia en un sistema balanceado

- Potencia instantánea: $p = 3 V_p I_p \cos \theta$
- Potencia promedio: $P_p = V_p I_p \cos \theta$
- Potencia reactiva por fase : $Q_p = V_p I_p \sin \theta$
- Potencia aparente por fase: $S_p = V_p I_p$
- Potencia compleja por fase: $\mathbf{S}_p = S_p + j Q_p = \mathbf{V}_p \mathbf{I}_p^*$

Capítulo 11

Circuitos acoplados magnéticamente

Cuando dos mallas con o sin contacto entre ellas se afectan mutuamente por medio del campo magnético generado por una de ellas, se dice que están acopladas magnéticamente.

11.1. Autoinductancia

Relaciona la tensión inducida en una bobina por una corriente variable en el tiempo en la misma.

$$L = N \frac{d\phi}{di} \quad (11.1)$$

La energía almacenada en un inductor:

$$w = \frac{1}{2} L i^2$$

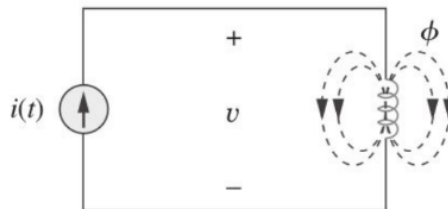


Figura 11.1: Flujo magnetico producido por una sola bobina con N vueltas

11.2. Inductancia mutua

Cuando dos inductores (o bobinas) están en proximidad estrecha entre sí, el flujo magnetico causado por la corriente en una bobina se relaciona con la otra, lo que produce tensión en esta última.

La inductancia mutua es la capacidad de un inductor de inducir una tensión en un inductor cercano.

$$M_{21} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} \quad (11.2)$$

La tensión mutua de circuito abierto para la bobina 2:

$$v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

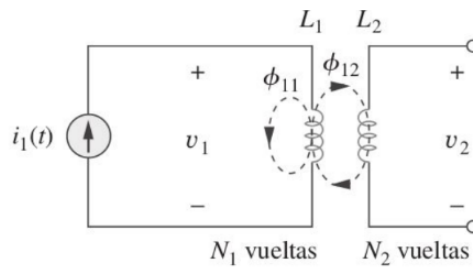


Figura 11.2: Inductancia mutua M_{21} de la bobina 2 respecto a la bobina 1

Solo existe acoplamiento mutuo cuando los inductores o bobinas están en estrecha proximidad y los circuitos se excitan mediante fuentes variables en el tiempo.

Por cuestiones relacionadas a la conservación de la energía $M_{12} = M_{21}$.

La energía almacenada de un inductor acoplado magnéticamente:

$$w = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$$

11.2.1. Acoplamiento

Con $M = k \sqrt{L_1 L_2}$. El coeficiente de acoplamiento es la fracción del flujo total que emana de una bobina que se enlaza con la otra bobina.

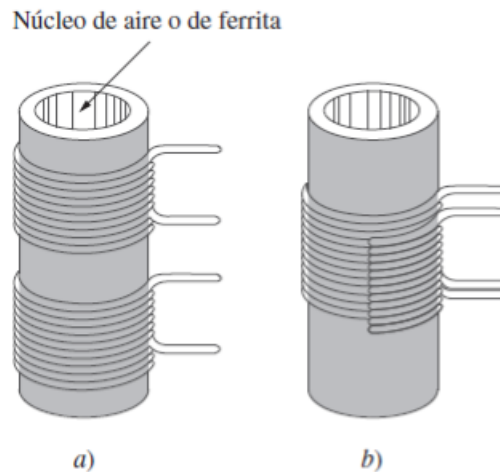


Figura 11.3: a) acoplamiento delgado, b) acoplamiento estrecho

- $k = 1$, se tiene un acoplamiento de 100% , las bobinas están perfectamente acopladas
- $k \neq 0.5$, las bobinas estan acopladas holgadamente
- $k \neq 0.5$, las bobinas están acopladas estrechamente

11.2.2. Convención del punto

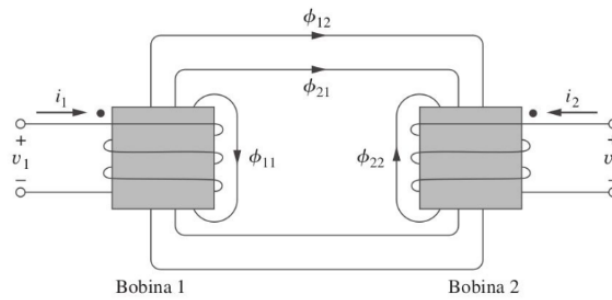


Figura 11.4: Convención del punto

- Si una corriente entra a la terminal marcada de la bobina, la polaridad de referencia para la tensión mutua en la segunda bobina es positiva en la terminal con la marca de la segunda bobina.
- Si una corriente sale de la terminal marcada de una bobina, la polaridad de referencia de la tensión mutua en la segunda bobina es negativa en la terminal con la marca de la segunda bobina.

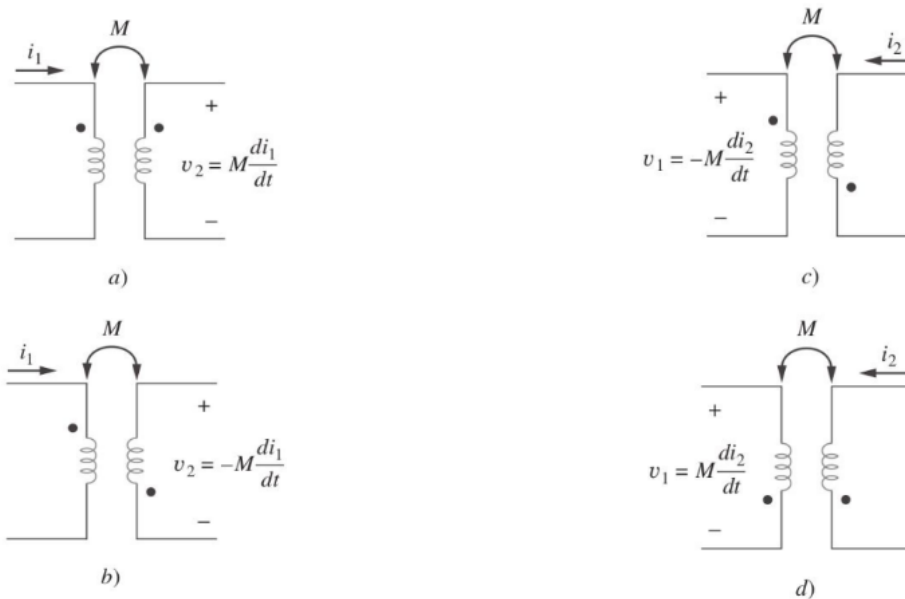


Figura 11.5: Ejemplos que ilustran como aplicar la convención del punto

11.2.3. Bobinas en serie

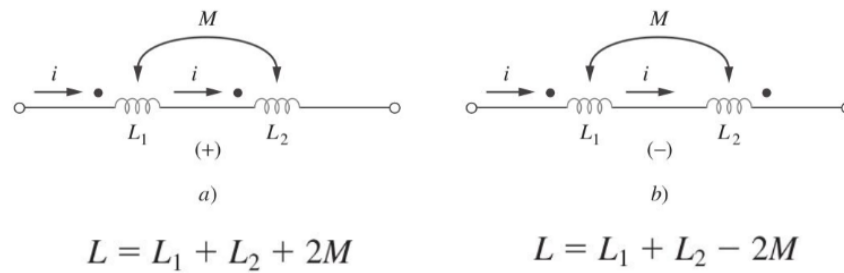


Figura 11.6: a) Conexión en serie aditiva, b) Conexión en serie opositiva

11.2.4. Transformación de bobinas

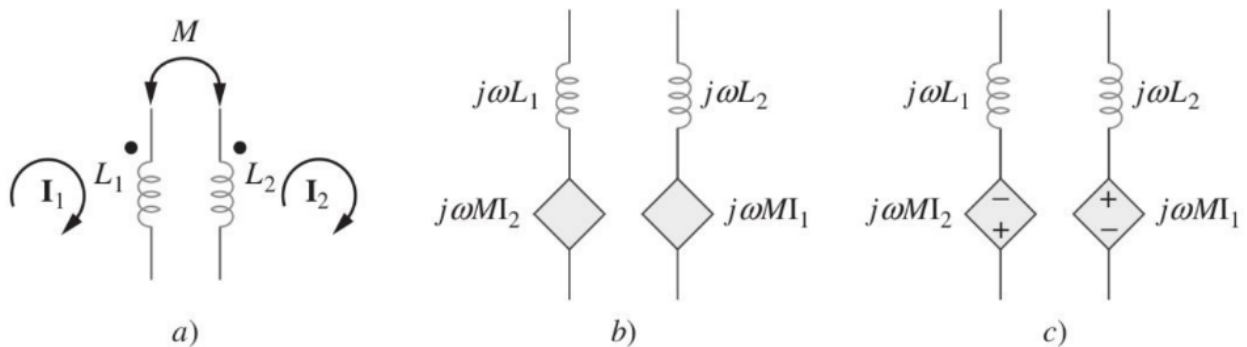


Figura 11.7: Enter Caption

11.3. Transformadores lineales

Un transformador es un dispositivo de cuatro terminales que comprende dos (o más) bobinas magnéticamente acopladas.

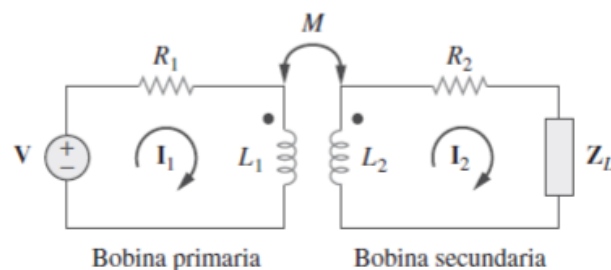


Figura 11.8: Transformador lineal

Se dice que el transformador es lineal si las bobinas están devanadas en un material lineal magnéticamente, en el que la permeabilidad magnética es constante.

11.4. Transformador ideal

Un transformador ideal es aquel con acoplamiento perfecto.

- $V_2 = n V_1$
- Las bobinas tienen reactancias muy grandes
- El coeficiente de acoplamiento es igual a la unidad
- Las bobinas primaria y secundaria no tienen pérdidas ($R_1 = 0 = R_2$)
- $\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$

Capítulo 12

Diagramas de Bode

Si la amplitud de la fuente senoidal permanece constante y se varía la frecuencia, se obtiene la respuesta en frecuencia del circuito.

La respuesta en frecuencia de un circuito es la variación de su comportamiento al cambiar la frecuencia de la señal

12.1. Función de transferencia

La función de transferencia $\mathbf{H}(\omega)$ de un circuito es la razón dependiente en frecuencia de un fasor de salida $\mathbf{Y}(\omega)$ a un fasor de entrada $\mathbf{X}(\omega)$

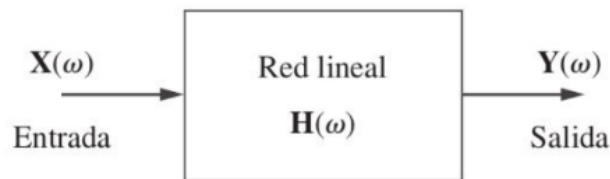


Figura 12.1: Representación con un diagrama de bloques de una red lineal

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{Y}(\omega)}{\mathbf{X}(\omega)} = H(\omega)\angle\phi = H e^{j\phi} \quad (12.1)$$

Cuatro posibles funciones de transferencia:

▪

$$\mathbf{H}(\omega) = \text{Ganancia de tensión} = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)}$$

▪

$$\mathbf{H}(\omega) = \text{Ganancia de corriente} = \frac{\mathbf{I}_o(\omega)}{\mathbf{I}_i(\omega)}$$

▪

$$\mathbf{H}(\omega) = \text{Transferencia de impedancia} = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{I}_i(\omega)}$$

■

$$\mathbf{H}(\omega) = \text{Transferencia de admitancia} = \frac{\mathbf{I}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)}$$

$\mathbf{H}(\omega)$ puede expresarse en términos de sus polinomios de la siguiente manera:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{N}(\omega)}{\mathbf{D}(\omega)} \quad (12.2)$$

Un **cero**, es la raíz de $\mathbf{N}(\omega)$, que también puede considerarse como el cero de $H(s)$. Un **polo**, es la raíz del polinomio del denominador $\mathbf{D}(\omega)$, es un valor para el cual $H(s)$ tiende a infinito.

12.2. Diagramas de Bode

Los diagramas de Bode son gráficas semilogarítmicas de la magnitud (en decibels) y de la fase (en grados) de una función de transferencia en función de la frecuencia.

De 12.1 aplico \ln y utilizando propiedades vistas en 16, hallo que la parte real de $\ln \mathbf{H}$ es una función de magnitud y su parte imaginaria es la fase. En un diagrama de magnitud de Bode, la ganancia se gráfica en dB , en función de la frecuencia.

$$H_{dB} = 20 \log_{10} H$$

$\mathbf{H}(\omega)$ puede incluir 7 factores diferentes que pueden aparecer en diversas combinaciones en una función de transferencia, que al elaborar el diagrama de Bode se grafica cada factor por separado y luego se combinan gráficamente.

12.2.1. Ganancia K

Para la ganancia K, la magnitud es constante de $20 \log_{10} K$ y la fase es 0° .

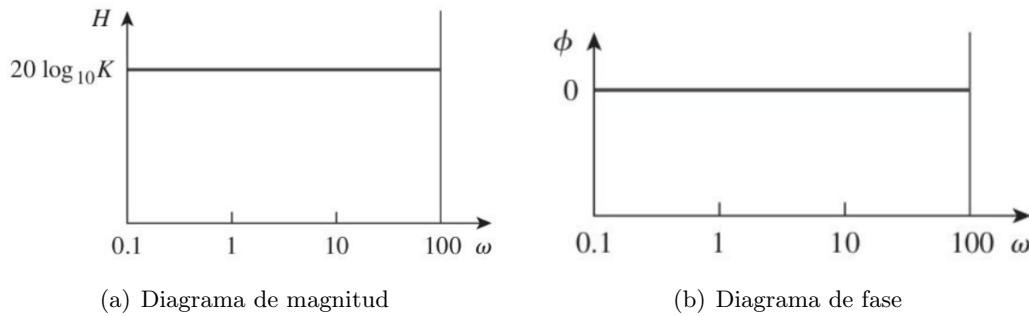
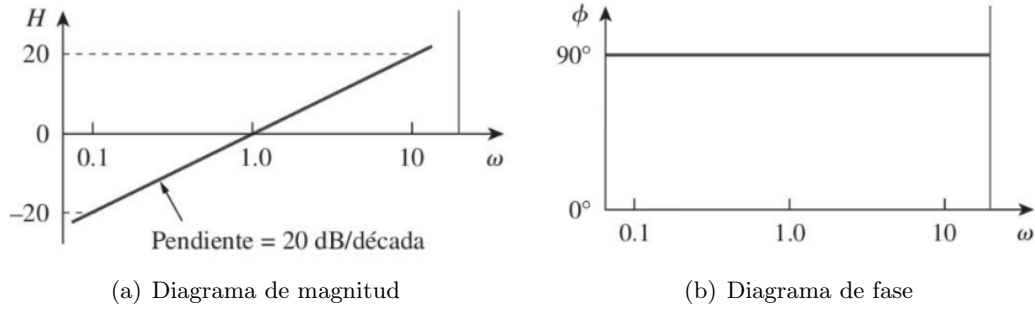


Figura 12.2: Diagrama de Bode para la ganancia K

Si **K es negativa**, la magnitud sigue siendo de $20 \log_{10} |K|$ pero la fase corresponde a ± 180

12.2.2. Polo/cero en el origen

- Para el cero $(j\omega)$ en el origen, la magnitud es de $20 \log_{10} \omega$ y la fase es 90°
- Para el polo $(j\omega)^{-1}$, son similares salvo que, la pendiente del diagrama de magnitud es de -20dB/década , mientras que la fase es -90°
- $(j\omega)^N$, siendo N un entero, el diagrama tendrá una pendiente de $20N \text{ dB/década}$, con una fase de $90N$ grados

Figura 12.3: Diagrama de Bode para un cero (jw) en el origen

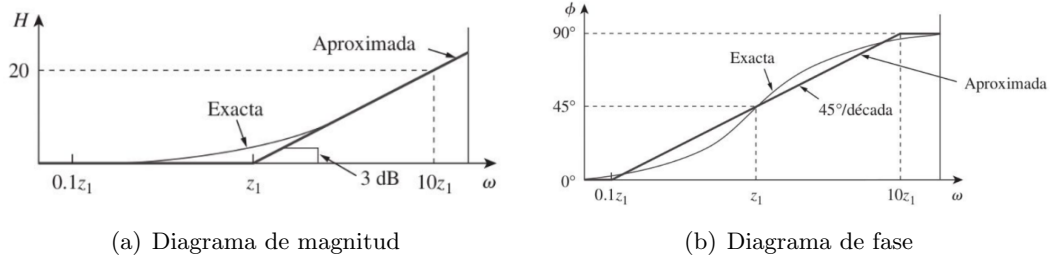
12.2.3. Polo/cero simple

Para un cero simple ($1 + \frac{jw}{z_1}$), la magnitud es de $20 \log_{10} |1 + \frac{jw}{z_1}|$ y la fase equivale a $\tan^{-1} \frac{w}{z_1}$.

La frecuencia $w = z_1$, donde las dos líneas asíntotas se intersectan, recibe el nombre de *frecuencia de esquina/quiebre*.

- $20 \log_{10} 1 = 0$ conforme $w \rightarrow 0$
- $20 \log_{10} \frac{w}{z_1}$ conforme $w \rightarrow \infty$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{w}{z_1} = \begin{cases} 0^\circ & \text{si } w = 0 \\ 45^\circ & \text{si } w = z_1 \\ 90^\circ & \text{si } w \rightarrow \infty \end{cases}$$

Figura 12.4: Diagrama de Bode del cero ($1 + \frac{jw}{z_1}$)

El diagrama para el polo $\frac{1}{1 + \frac{jw}{z_1}}$ es similar salvo que la frecuencia de esquina está en $w = p_1$, la magnitud tiene una pendiente de -20 dB/década, y la fase tiene una pendiente de -45° por década.

12.2.4. Polo cuadrático/cero

La magnitud del polo cuadrático:

$$\frac{1}{2} [1 + j2\zeta_2 \frac{w}{w_n} + (\frac{jw}{w_n})^2]$$

es

$$\begin{aligned}
 & -20 \log_{10} \left| 1 + j2\zeta_2 \frac{w}{w_n} + \left(\frac{jw}{w_n} \right)^2 \right| \\
 & H_{dB} \rightarrow 0 \quad \text{conforme } w \rightarrow 0 \\
 & H_{dB} \rightarrow -40 \log_{10} \frac{w}{w_n} \quad \text{conforme } w \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

y la fase es:

$$\phi = -\tan^{-1} \left(2\zeta_2 \frac{\frac{w}{w_n}}{1 - \frac{w^2}{w_n^2}} \right) = \begin{cases} 0^\circ & \text{si } w = 0 \\ -90^\circ & \text{si } w = w_n \\ -180^\circ & \text{si } w \rightarrow \infty \end{cases}$$

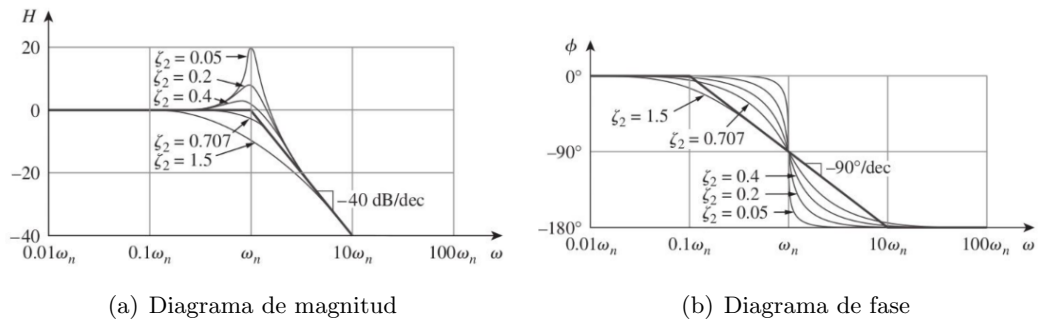


Figura 12.5: Diagrama de Bode del polo cuadrático

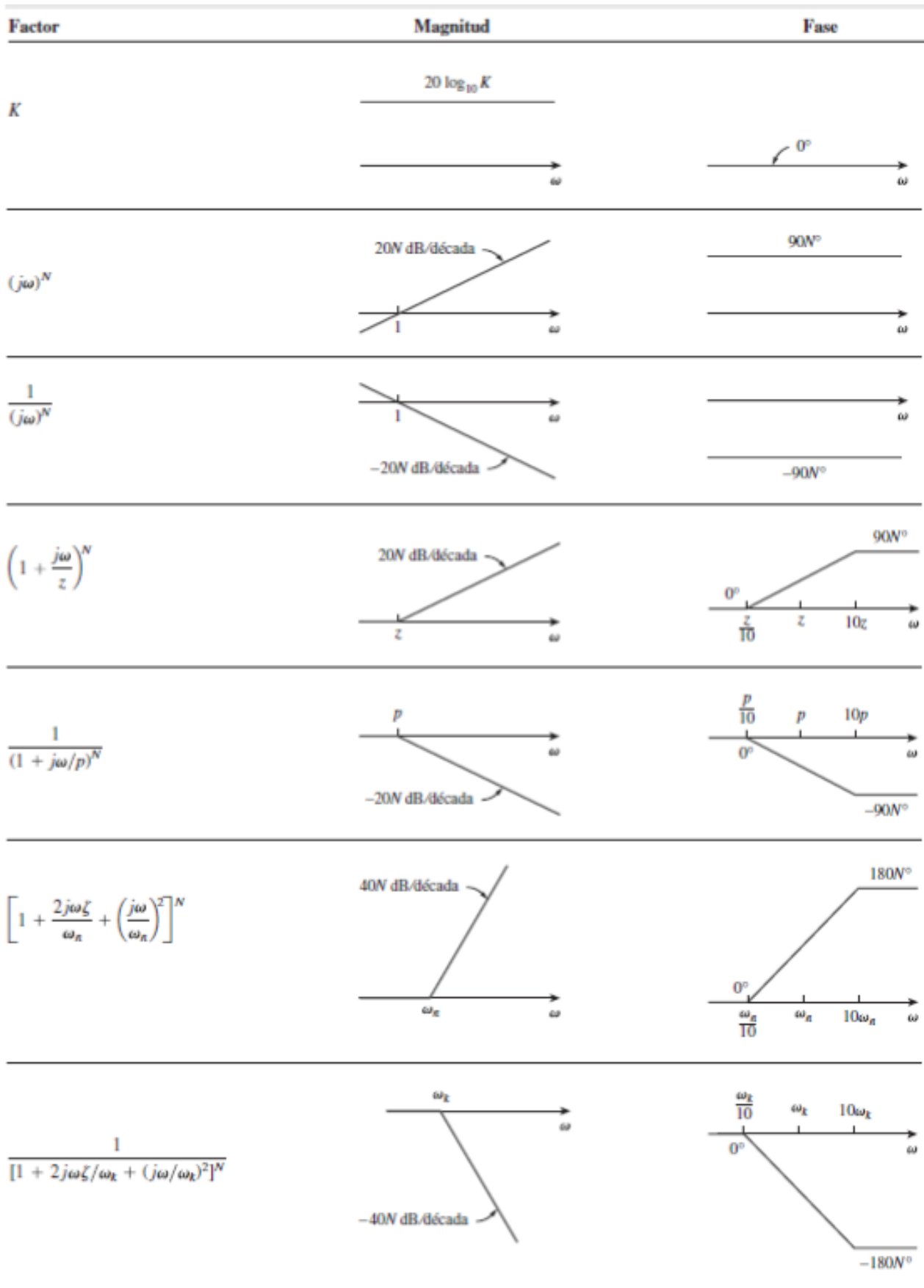


Figura 12.6: Resumen de los diagramas de magnitud y de fase de línea recta de Bode.

Respuesta en frecuencia

La resonancia se produce cuando la parte imaginaria de la función de transferencia es cero:

- La impedancia es puramente resistiva, por lo que $\mathbf{Z} = R$
- La tensión \mathbf{V}_s y la corriente \mathbf{I} se encuentran en fase, de modo que el factor de potencia unitario.
- La magnitud de la función de transferencia $\mathbf{H}(w) = \mathbf{Z}(w)$ es mínima
- La tensión a través de la bobina (inductor) y del capacitor pueden ser mucho mayores que la tensión de la fuente.



13.1.1. Ancho de banda

El ancho de la curva de respuesta depende del *ancho de banda* B , que se define como la diferencia entre las dos frecuencias de media potencia:

$$B = w_2 - w_1$$

13.1.2. Factor de calidad Q

Lo "puntiagudo" de la resonancia en un circuito resonante se mide cuantitativamente por medio del factor de calidad Q .

En la resonancia, la energía reactiva en el circuito oscila entre la bobina y el capacitor. El factor de calidad relaciona la energía máxima o pico almacenada con la energía que se disipa en el circuito por ciclo de oscilación.

$$Q = 2\pi \frac{\text{Pico de la energía almacenada en el circuito}}{\text{Disipación de la energía por el circuito en un periodo de resonancia}} = \frac{w_0 L}{R} = \frac{1}{w_0 C R}$$

La relación entre el ancho de banda B y el factor de calidad Q :

$$B = \frac{R}{L} = \frac{w_0}{Q}$$

El factor de calidad de un circuito resonante es la razón entre la frecuencia resonante y su ancho de banda.

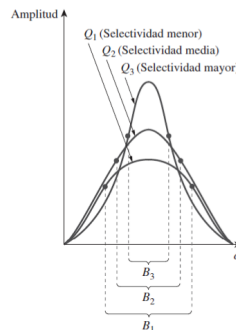


Figura 13.2: Cuanto más alta la Q del circuito, tanto más pequeño el ancho de banda

13.1.3. Selectividad

La selectividad de un circuito RLC es la capacidad del mismo para responder a cierta frecuencia y discriminar a todas las demás. Si la banda de frecuencia que se va a seleccionar o a rechazar es estrecha, el factor de calidad del circuito resonante debe ser alto. Si la banda de frecuencias es amplia, el factor de calidad debe ser bajo.

Se afirma que será un circuito de alta Q cuando su factor de calidad sea igual o mayor que 10.

Para circuitos de alta Q ($Q \geq 10$), las frecuencias de media potencia son, para todo fin práctico, simétricas con respecto a la frecuencia resonante y es posible aproximarlas como:

$$w_1 \approx w_0 - \frac{B}{2}, \quad w_2 \approx w_0 + \frac{B}{2}$$

Característica	Circuito en serie	Circuito en paralelo
Frecuencia resonante, ω_0	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$
Factor de calidad, Q	$\frac{\omega_0 L}{R}$ o $\frac{1}{\omega_0 RC}$	$\frac{R}{\omega_0 L}$ o $\omega_0 RC$
Ancho de banda, B	$\frac{\omega_0}{Q}$	$\frac{\omega_0}{Q}$
Frecuencias de media potencia, ω_1, ω_2	$\omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$	$\omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$
Para $Q \geq 10, \omega_1, \omega_2$	$\omega_0 \pm \frac{B}{2}$	$\omega_0 \pm \frac{B}{2}$

Figura 13.3: Resumen de las características de los circuitos RLC resonantes

13.1.4. Resumen

13.2. Filtros pasivos

Un filtro es un circuito que se diseña para dejar pasar señales con frecuencias deseadas y rechazar o atenuar otras.

La ganancia máxima de un filtro pasivo es la unidad. Para generar una ganancia mayor que la unidad, es necesario usar un filtro activo.

- Un filtro es **pasivo** si solo contiene elementos pasivos R, L y C
- Un filtro es **activo** si los componentes son además de pasivos, transistores, amplificadores etc.

La frecuencia de corte es aquella para la cual la función de transferencia **H** disminuye en magnitud hasta el 70.71 % de su valor máximo.

También se la considera como la frecuencia a la cual la potencia disipada en un circuito es la mitad de su valor máximo.

Tipo de filtro	$H(0)$	$H(\infty)$	$H(\omega_c)$ o $H(\omega_0)$
Pasabajas	1	0	$1/\sqrt{2}$
Pasaaltas	0	1	$1/\sqrt{2}$
Pasabanda	0	0	1
Rechazabanda	1	1	0

Figura 13.4: Resumen de las características de los filtros ideales

13.2.1. Características

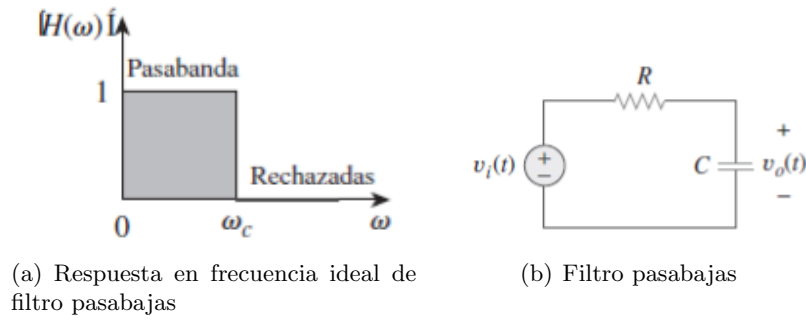
- No pueden generar una ganancia mayor a 1
- Es probable que requieran bobinas voluminosas y caras
- Se comportan de manera deficiente a frecuencias por debajo del intervalo de audiofrecuencias ($300 \text{ Hz} < f < 3000 \text{ Hz}$)

13.2.2. Filtro pasabajas

Un filtro pasabajas se diseña para dejar pasar únicamente las frecuencias de cd superiores a la frecuencia de corte ω_c

La función transferencia esta dada por:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega C}$$



La función de transferencia evaluada en la frecuencia de corte ω_c

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

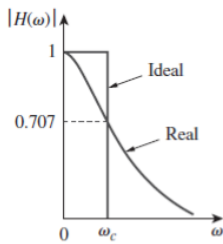
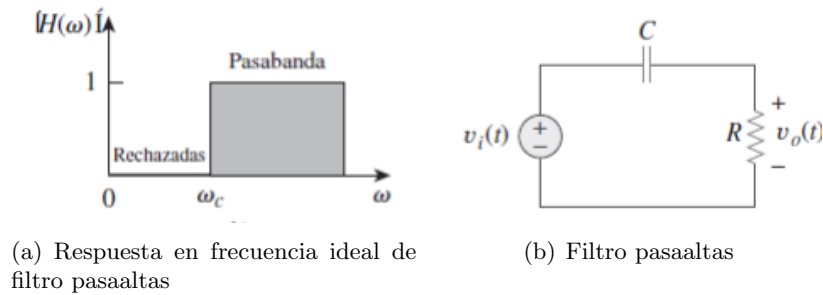


Figura 13.5: Respuesta en frecuencia ideal y real de un filtro pasabajas

13.2.3. Filtro pasaaltas

Un filtro pasaaltas se diseña para dejar pasar las frecuencias superiores a su frecuencia de corte ω_c



La función de transferencia :

$$H(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

13.2.4. Filtro pasabanda

Un filtro pasabanda se diseña para dejar pasar todas las frecuencias dentro de una banda de frecuencias

La función de transferencia:

$$H(\omega) = \frac{R}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

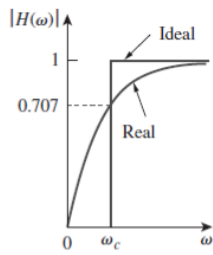
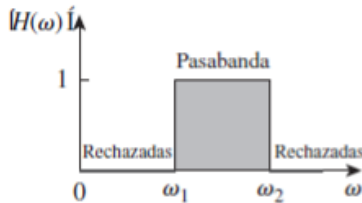
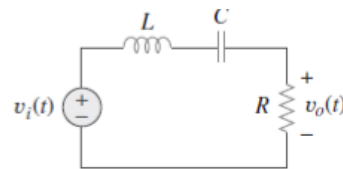


Figura 13.6: Respuesta en frecuencia ideal y real de un filtro pasaaltas



(a) Respuesta en frecuencia ideal de filtro pasabanda



(b) Filtro pasabanda

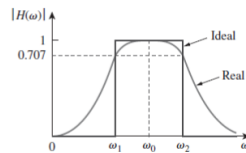
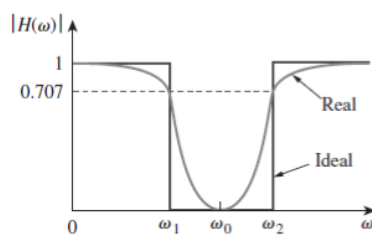


Figura 13.7: Respuesta en frecuencia ideal y real de un filtro pasabanda

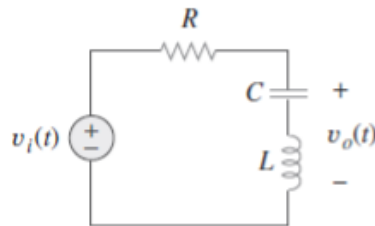
13.2.5. Filtro rechazabanda

Un filtro que evita el paso de una banda de frecuencias entre dos valores designados. Se diseña para detener o eliminar todas las frecuencias dentro de una banda de frecuencias. La función de transferencia:

$$H(\omega) = \frac{j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$



(a) Respuesta en frecuencia ideal de filtro rechazabanda



(b) Filtro rechazabanda

13.3. Filtros activos

13.3.1. Características:

- Pueden ser más pequeños y menos costosos

- Pueden proporcionar ganancia de amplificación además de brindar la misma respuesta en frecuencia que los filtros RLC
- Pueden combinarse con amplificadores de aislamiento para aislar cada etapa del filtro de los efectos de impedancia de la fuente y de la carga.
- Menos confiables y menos estables

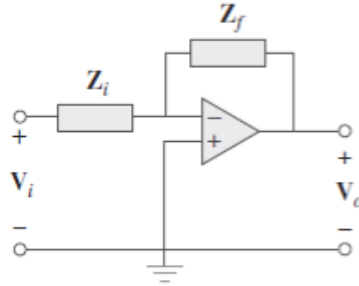


Figura 13.8: Filtro activo general de primer orden.

13.3.2. Filtro pasabajas

En este filtro no se dejan pasar frecuencias altas.

- $f \rightarrow 0, V_{OUT} \neq 0$
- $f \rightarrow \infty, V_{OUT} = 0$
- $gr(numerador) < gr(denominador)$
- Las raíces del denominador pueden ser cualquier valor excepto cero.

De primer orden

La función de transferencia:

$$\mathbf{H}(\omega) = -\frac{R_f}{R_i} \frac{1}{1 + j\omega C_f R_f}$$

$$\mathbf{H}(s) = A \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

Siendo A la ganancia del sistema y ω_c la frecuencia de corte.

La frecuencia de esquina:

$$\omega_c = \frac{1}{R_f C_f}$$

De segundo orden

Sin importar si es pasivo o activo, la función de transferencia:

$$H(s) = A \frac{\omega_o^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2}$$

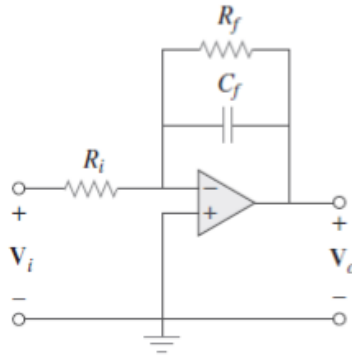


Figura 13.9: Filtro activo pasabajas de primer orden

La magnitud pico esta dada por:

$$|H(jw)| = A \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

- Una función de transferencia también puede ser negativa, que quiere decir que la fase se invierte en la salida, gráficamente se observa que la fase no inicia en cero grados sino en 180 grados. La magnitud no se ve afectada.

13.3.3. Filtro pasaaltas

Un filtro pasa altos como su nombre lo dice permite el paso de las frecuencias altas, y atenúa todas las bajas frecuencias a partir de una frecuencia de corte f_c .

- $f \rightarrow 0, V_{OUT} = 0$
- $f \rightarrow \infty, V_{OUT} \neq 0$
- $gr(numerador) \geq gr(denominador)$
- Una de las raíces del numerador debe ser cero

De primer orden

La función de transferencia:

$$\mathbf{H}(\omega) = -\frac{R_f}{R_i + \frac{1}{j\omega C_i}}$$

$$\mathbf{H}(s) = A \frac{s}{s + \omega_c}$$

La frecuencia de esquina:

$$\omega_c = \frac{1}{R_i C_i}$$

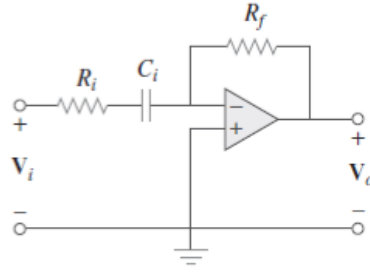


Figura 13.10: Filtro activo pasaaltas de primer orden.

De segundo orden

La función de transferencia de un filtro pasa bajos de segundo orden sin importar si es pasivo o activo:

$$H(s) = A \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2}$$

La magnitud pico esta dada por:

$$|H(jw)| = A \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

13.3.4. Filtro pasabanda

Un filtro pasa banda como su nombre lo dice permite el paso de una banda de frecuencias y atenúa todas las demás.

- $f \rightarrow 0, V_{OUT} = 0$
- $f \rightarrow \infty, V_{OUT} = 0$
- $1 \leq gr(numerador) < gr(denominador)$
- Una de las raices del numerador debe ser cero

La función de transferencia:

$$\mathbf{H}(\omega) = -\frac{R_f}{R_i} \frac{1}{1 + j\omega C_1 R} \frac{j\omega C_2 R}{1 + j\omega C_2 R}$$

$$H(s) = A \frac{s \frac{\omega_o}{Q}}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2}$$

- La frecuencia de esquina:

$$\omega_2 = \frac{1}{RC_1} \quad \text{Frecuencia de esquina superior}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{RC_2} \quad \text{Frecuencia de esquina inferior}$$

- Frecuencia central:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

- Ancho de banda:

$$B = \omega_2 - \omega_1$$

- Factor de calidad:

$$Q = \frac{\omega_0}{B}$$

- Ganancia pasabanda:

$$K = \frac{R_f}{R_i} \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}$$

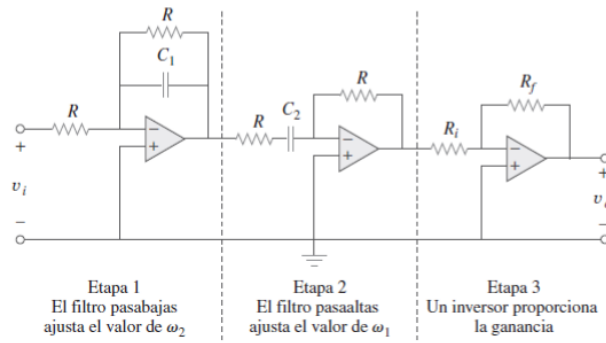


Figura 13.11: Filtro activo pasabanda.

13.3.5. Filtro rechazabanda (o Notch)

Un filtro rechazabanda se puede construir mediante la combinación en paralelo de un filtro pasabajas, un filtro pasaaltas y un amplificador sumador.

- $f \rightarrow 0, V_{OUT} = 0$
- $f \rightarrow \infty, V_{OUT} = 0$
- $1 \geq gr(numerador) \text{ } jgr(denominador)$
- Las raíces del numerador y denominador son complejas conjugadas.

La función de transferencia:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{R_f}{R_i} \frac{(1 + \frac{j2\omega}{\omega_1} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_1^2})}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_2})(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})}$$

$$H(s) = A \frac{s \frac{\omega_o}{Q} + \omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2}$$

Su ganancia:

$$K = \frac{R_f}{R_i}$$

Hay dos tipos:

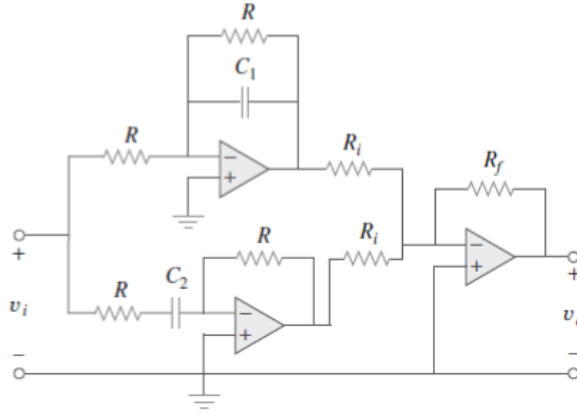


Figura 13.12: Filtro activo rechazabanda.

1.

$$\omega_z = \omega_o \quad \rightarrow \quad H(s) = A \frac{s \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q} s + \omega_o^2}$$

2.

$$\omega_z \neq \omega_o \quad \rightarrow \quad H(s) = A \frac{s \frac{\omega_o}{Q} + \omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q} s + \omega_o^2}$$

Un filtro rechaza banda tipo I tiene respuesta simétrica tomando como referencia o y un filtro rechaza banda tipo II tiene respuesta asimétrica tomando como referencia z.

13.4. Escalamiento

Al diseñar y analizar filtros y circuitos resonantes o en el análisis de circuitos en general, en ocasiones resulta conveniente trabajar con valores de elementos de 1Ω , $1H$ o $1F$, y después transformar los valores a valores reales mediante el escalamiento.

13.4.1. Escalamiento de magnitud

El escalamiento de magnitud es el proceso de incrementar todas las impedancias en una red por un factor y permanece invariable la respuesta en frecuencia.

Los nuevos valores de los elementos y de la frecuencia son:

$$\begin{aligned} R' &= K_m R \\ L' &= K_m L \\ C' &= \frac{C}{K_m} \\ \omega' &= \omega \end{aligned}$$

La frecuencia resonante, factor de calidad y ancho de banda no están afectados por el escalamiento de magnitud.

13.4.2. Escalamiento de frecuencia

El escalamiento de frecuencia es el proceso de correr la respuesta en frecuencia de una red por arriba o abajo del eje de frecuencia mientras se mantiene igual la impedancia.

Los nuevos valores de los elementos y de la frecuencia:

$$\begin{aligned}R' &= R \\L' &= \frac{L}{K_f} \\C' &= \frac{C}{K_f} \\\omega' &= K_f \omega\end{aligned}$$

La frecuencia resonante y el ancho de banda se multiplican por el factor K_m , mientras que el factor de calidad sigue igual.

13.4.3. Escalamiento de magnitud y de frecuencia

Si un circuito se escala en magnitud y en frecuencia al mismo tiempo, entonces:

$$\begin{aligned}R' &= K_m R \\L' &= \frac{K_m}{K_f} L \\C' &= \frac{1}{K_m K_f} C \\\omega' &= K_f \omega\end{aligned}$$

Parte V

Unidad 5- Laplace

Capítulo 14

Introducción a la transformada de Laplace

Dada una función $f(t)$, su transformada de Laplace, denotada por $F(s)$ o $\mathcal{L}[f(t)]$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{T.L de un lado}$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{T.L de dos lados}$$

Usamos 0^- como el límite inferior para incluir el origen y cualquier discontinuidad de $f(t)$ en $t = 0$.

La **transformada de Laplace** es una transformación integral de una función $f(t)$ del dominio temporal al dominio de la frecuencia complejo, lo que da por resultado $F(s)$

*En este curso siempre supondremos que la transformada de Laplace **EXISTE**.*

14.1. Propiedades

14.1.1. Linealidad

$$f_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s)$$

$$f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F_2(s)$$

$$a f_1(t) + b f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} a F_1(s) + b F_2(s)$$

14.1.2. Escalamiento

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

14.1.3. Desplazamiento en el tiempo

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$f(t - a)u(t - a) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as} F(s)$$

14.1.4. Desplazamiento en frecuencia

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$e^{-at} f(t) u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as} F(s + a)$$

14.1.5. Diferenciación en el tiempo

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$f'(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0^-)$$

14.1.6. Integración en el tiempo

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$\int_0^t f(x) dx \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} F(s)$$

14.1.7. Diferenciación en frecuencia

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$t f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{dF(s)}{ds}$$

14.1.8. Valores inicial y final

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) \quad \text{Teorema del valor inicial}$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) \quad \text{Teorema del valor final}$$

Para que el teorema del valor final sea válido, todos los polos de $F(s)$ deben localizarse en la mitad izquierda del plano s .

Propiedad	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
Linealidad	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$	$\delta(t)$	1
Escalamiento	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Desplazamiento en el tiempo	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$	t	$\frac{1}{s^2}$
Diferenciación en el tiempo	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
	$\frac{d^3f}{dt^3}$	$s^3F(s) - s^2f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
	$\frac{d^nf}{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}f'(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$	sen ωt	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Integración en el tiempo	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{1}{s}F(s)$	cos ωt	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
Diferenciación en frecuencia	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$	sen($\omega t + \theta$)	$\frac{s \cos \theta + \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
Integración en frecuencia	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)ds$	cos($\omega t + \theta$)	$\frac{s \sin \theta - \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
Periodicidad en el tiempo	$f(t) = f(t+nT)$	$\frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$	$e^{-at} \text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
Valor inicial	$f(0)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
Valor final	$f(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$		
Convolución	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$		

(a) Propiedades de la transformada de Laplace

(b) Pares de la transformada de Laplace

14.2. Transformada inversa de Laplace

Suponga que $F(s)$ tiene la forma general de:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Capítulo 15

Aplicaciones de la transformada de Laplace

Parte VI

Temas complementarios

Capítulo 16

Cuadripolos

Anexo

Decibeles

Propiedad de logaritmos

1.

$$\log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = \log(P_1) - \log(P_2)$$

2.

$$\log(P_1 P_2) = \log(P_1) + \log(P_2)$$

3.

$$\log(P^n) = n \log(P)$$

4.

$$\log(1) = 0$$

En los sistemas de comunicación, la ganancia se mide en *bels*. El *decibel* (dB) proporciona una unidad menor en magnitud.

$$G_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$$

Cuando $P_1 = P_2$, no hay cambio en la potencia y la ganancia es 0 *dB*. En general:

$$G_{dB} = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1}$$