



# Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Sistemas de control II

Tarea 4 - Profesor Laboret

Nombre	DNI
Diaz Mateo	41.265.543

Docentes    Laboret Sergio

Córdoba, República Argentina  
14 de junio de 2024

# Índice

<b>1. Introduccion</b>	<b>2</b>
<b>2. Consignas</b>	<b>3</b>
<b>3. Modelo del sistema</b>	<b>5</b>
3.1. Controlador por Asignación de polos (Ackerman) . . . . .	6
3.2. Simulaciones . . . . .	6
3.2.1. Sistema masa=2 . . . . .	6
3.2.2. Sistema masa=1.8 . . . . .	9
3.2.3. Sistema masa=2.2 . . . . .	11
<b>4. Conclusión</b>	<b>13</b>

## 1. Introduccion

En el siguiente informe se desarrolla la resolución de la cuarta tarea propuesta por el profesor Sergio Laboret en la cátedra de Sistemas de Control II. Se detallan procedimientos y se adjuntan códigos utilizados para la resolución. El trabajo además se encuentra en un repositorio de Github personal donde se adjuntan todos los códigos en sus diversos formatos

## 2. Consignas

Se dispondrá para cada alumno una tabla con valores de masa (m), longitud (l), coeficiente de rozamiento (b), constante gravitatoria g (10) y ángulo de referencia en grados (°) de un péndulo simple con la ecuación:

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) = T$$

Se desea que el péndulo se estabilice en el ángulo  $\delta$  dado. Tomando como estados, entrada y salida respectivamente (nótese que se ha desplazado el punto de equilibrio al origen tomando el error como salida)

$$x_1 = \theta - \delta = e$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$u = T$$

$$y = e$$

- Hallar el sistema dinámico en VE  $\dot{x} = f(x, u)$   $y = h(x)$
- Hallar el torque estático necesario para  $u_f$  para que el sistema tenga como punto de equilibrio el origen, es decir  $f(0, u_f) = 0$ .
- Linealizar el sistema mediante la Jacobiana:

$$\dot{x} = Ax + B u \quad y = Cx$$

En el punto:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_f \end{bmatrix}$$

- Hallar los autovalores de A y determinar estabilidad por el metodo indirecto de Lyapunov
- Comparar los resultados obtenidos con los de la linealización por matlab y simulink
- Se desea diseñar para el pendulo linealizado en el punto de operacion dado un controlador con accion integral como se muestra

$$u = k_1(\theta - \delta) + k_2\dot{\theta} + k_3\sigma\dot{\sigma} = \theta - \sigma$$

Que no es otra cosa que un PID en la forma PI+D , ya que el torque vale

$$T = k_1 e + k_3 \int_0^t e(\tau) d\tau + k_2 \dot{e}$$

Donde el error se definió en el sentido tradicional como  $e = \delta - \theta$

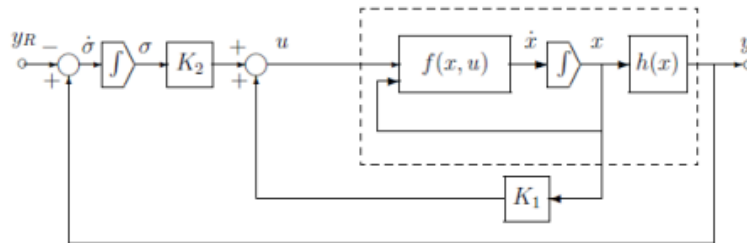


Figura 1: PI+D

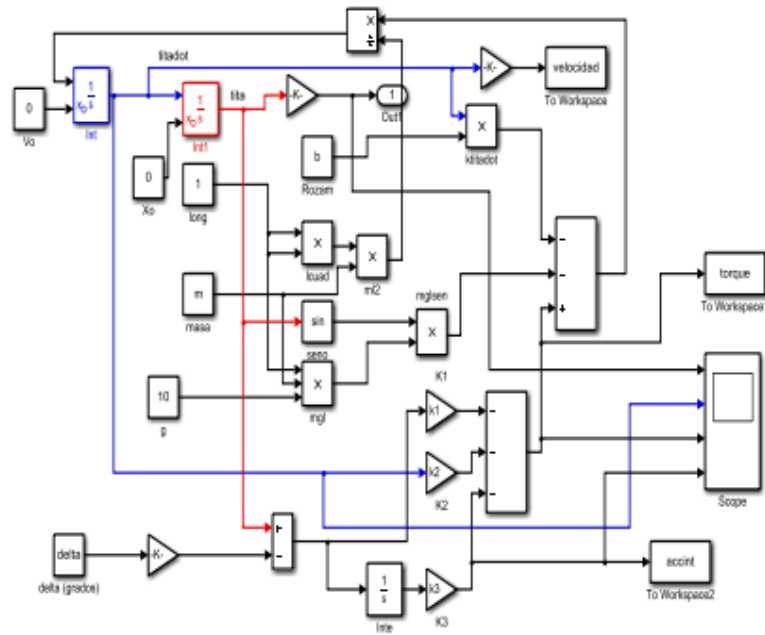
- Encontrar matrices sistema ampliado
- Verificar autovalores, estabilidad y controlabilidad del nuevo par

- Diseñar por asignación de polos un controlador con la orden acker() de Matlab

$$u = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sigma \end{bmatrix}$$

Para ubicar un polo triple en  $p$  (dato), lo cual daría una respuesta sin sobrepaso (si el sistema fuera lineal y no tuviera ceros de lazo cerrado) y el tiempo 2% sería  $t_{ss} = 7,5 / -p$

- Simular el péndulo con PID como se muestra en la figura partiendo del origen con velocidad nula y referencia  $\delta$  (dato).
- Dibujar la salida, el plano de fases, el torque total y la acción integral, comparar con el valor de  $u_f$  calculado antes y verificar sobrepaso y tiempo de establecimiento real vs el calculado.
- En todos los casos ajustar las escalas para una visualización correcta.



Esquema simulación péndulo con PID

Figura 2: Esquema PID

- Analizar la robustez variando la masa del péndulo en más y menos 10%, analizar los nuevos valores de sobrepaso, tiempo de establecimiento y acción de control final, elaborar una tabla con los resultados para los distintos valores de masa.

### 3. Modelo del sistema

Partiendo de la EDO que modela al péndulo simple:

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) = T$$

Y con las variables definidas, se obtiene lo siguiente:

$$x_1 = \theta - \delta = e \Rightarrow \theta = x_1 + \delta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$y = e = x_1$$

Entonces,

$$x_1 = \dot{\theta} = x_2$$

$$\frac{1}{ml^2}T - \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} - \frac{g}{l}\sin(\theta) = \frac{1}{ml^2}u - \frac{b}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1 + \delta)$$

El torque maximo sera:

$$u = T - T_f \Rightarrow u + T_f \Rightarrow T_f = mgl\sin(\delta)$$

Planteando la Jacobiana como se pide

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(\delta) & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Valuando con los datos obtenemos:

$$T_f = mgl\sin(\delta) = 2 * 10 * 1 * \sin(180) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0,2 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Con los codigos de matlab podemos corroborar estos calculos y ver que se obtienen os mismos valores.

```
%Tarea 4 - Pendulo
%Datos - Diaz Mateo

%Parametros
m= 2;
b= 0.4;
l= 1;
G= 10;
delta= 180;

%Verificacion variables estado
[A,B,C,D]=linmod('pendulo_mod_tarea',delta*pi/180)
```

Para comprobar estabilidad haciendo uso del método indirecto de Lyapunov, se obtienen los autovaleores de la matriz A.

```
%verificacion autovalores
eig(A)
```

Obteniendo así:

$$\lambda_1 = 3,0639; \lambda_2 = -3,2639$$

Verificamos que el sistema es inestable ya que tenemos un autovalor con parte real positiva. Lo siguiente es corroborar la controlabilidad de nuestro sistema.

```
%verificacion controlabilidad
rank(ctrb(A,B))
```

Obteniendo así que el sistema es controlable ya que el rango de las matrices coincide con el orden del sistema.

El paso siguiente es ampliar las matrices para incluir un integrador en nuestro controlador obteniendo lo siguiente:

```
%Ampliar matrices
Aa = [[A;C] zeros(3,1)]
Ba = [B;0]
eig(Aa)
rank(ctrb(Aa,Ba))
```

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 10 & -0,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Corroboramos el rango de la matriz y nuevamente definimos que es controlable ya que coincide con el orden del sistema

### 3.1. Controlador por Asignación de polos (Ackerman)

Con las matrices ampliadas diseñaremos el siguiente controlador por asignación de polos mediante la fórmula de Ackerman. La consigna nos pide un polo triple en -3.

```
%Diseño asignacion polos
p= -3
K=acker(Aa,Ba,[p p p])
k1=K(1)
k2=K(2)
k3=K(3)
eig(Aa-Ba*K) % polos lazo cerrado
tscal=7.5/(-p) % tiempo de respuesta calculado
```

Obtenemos entonces:

$$K = [74 \quad 17,6 \quad 54]$$

Con dicho controlador procederemos a hacer las simulaciones del sistema. Serán 3 casos, donde en uno se utilizará la masa dada de dato y en los otros dos variaremos  $\pm 10$  esa masa.

### 3.2. Simulaciones

#### 3.2.1. Sistema masa=2

Podemos apreciar el valor del tiempo de establecimiento que habíamos calculado

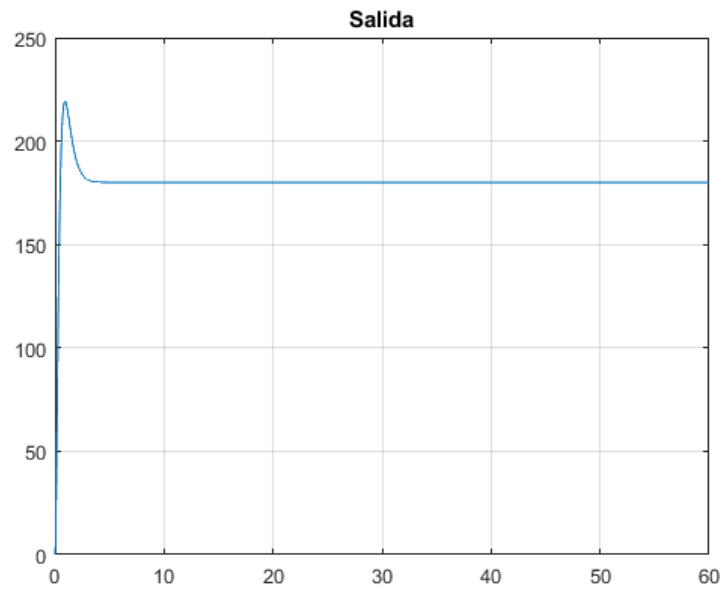


Figura 3: Salida masa nominal

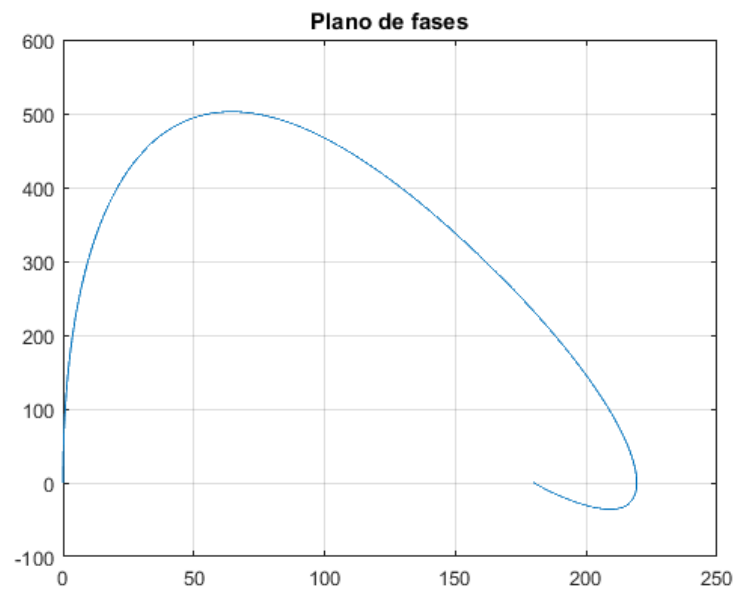


Figura 4: Plano de Fase masa nominal

Respecto al torque, vemos el valor máximo, corroborandolo con el calculo realizado previamente



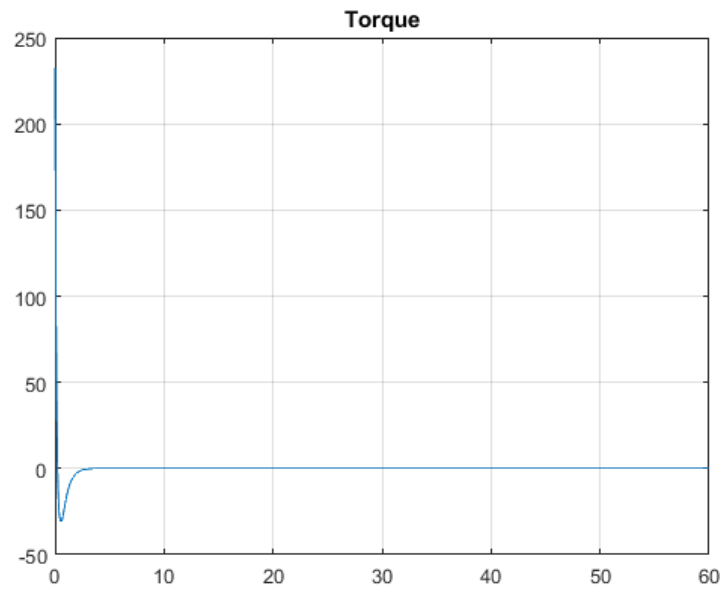


Figura 5: Torque masa nominal

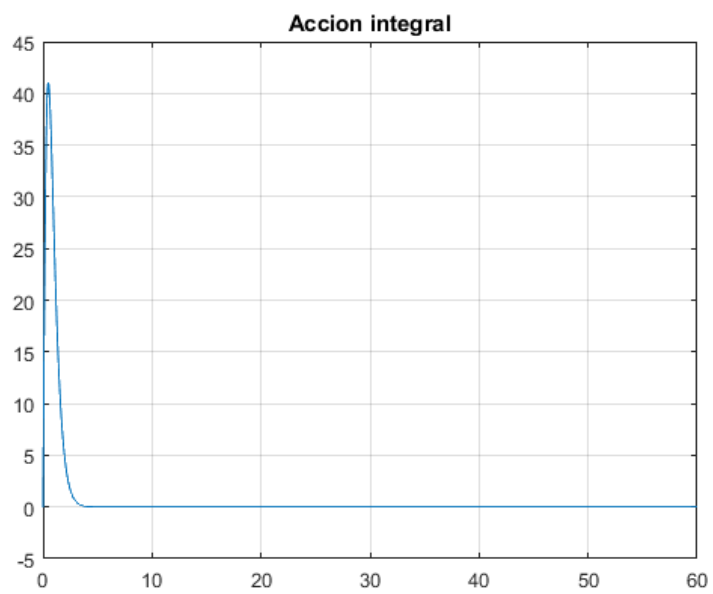


Figura 6: Accion integral masa nominal

### 3.2.2. Sistema masa=1.8

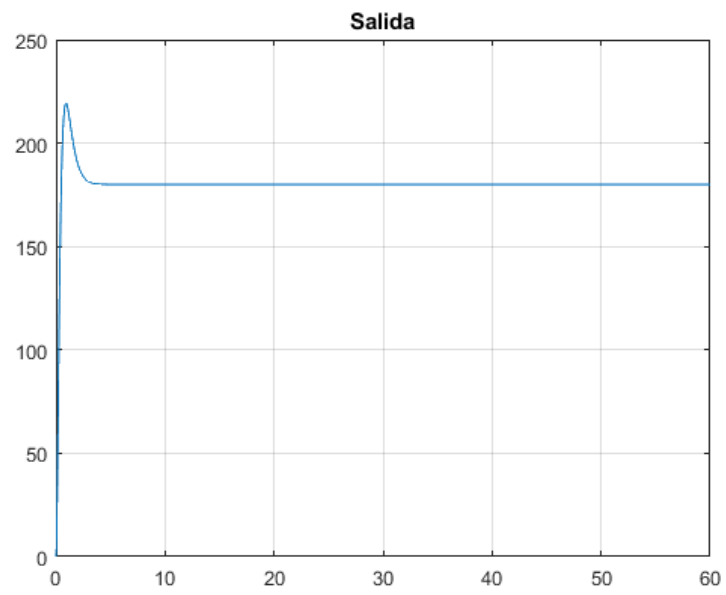


Figura 7: Salida masa disminuida

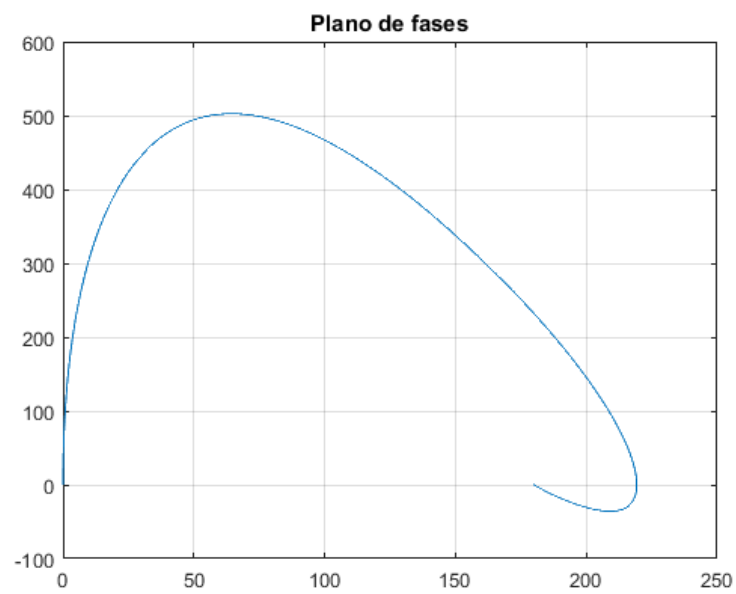


Figura 8: Plano de Fase masa disminuida

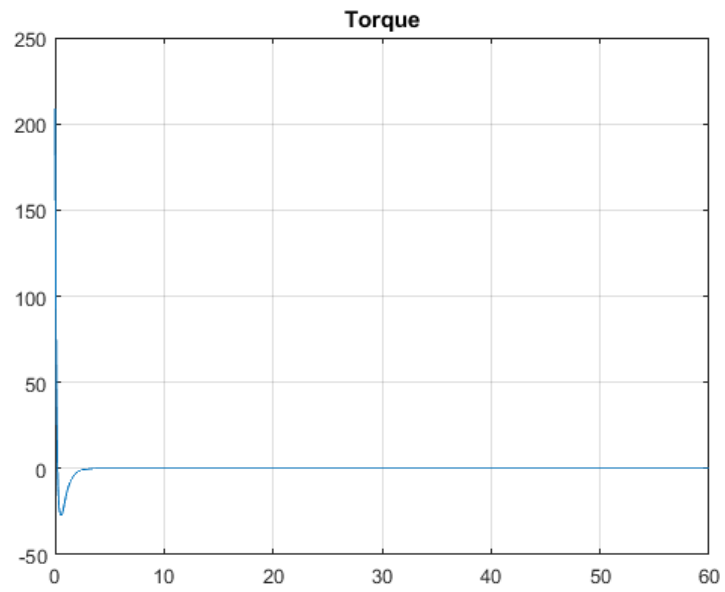


Figura 9: Torque masa disminuida

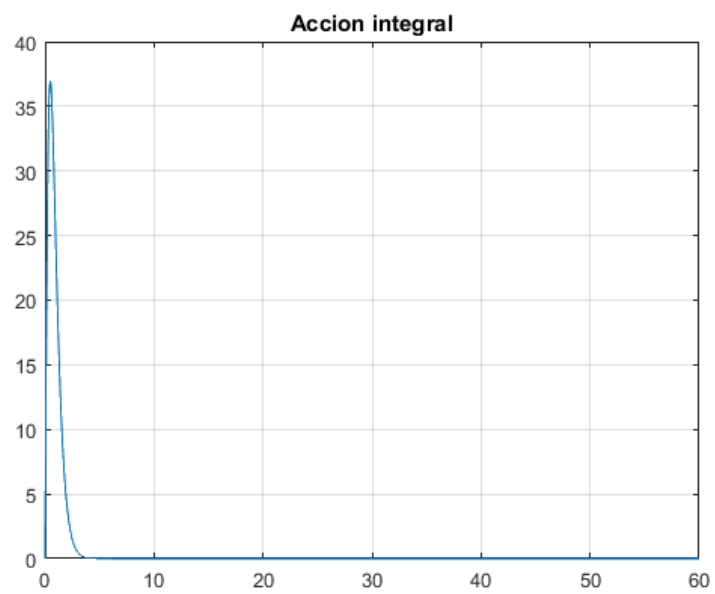


Figura 10: Accion integral masa disminuida

### 3.2.3. Sistema masa=2.2

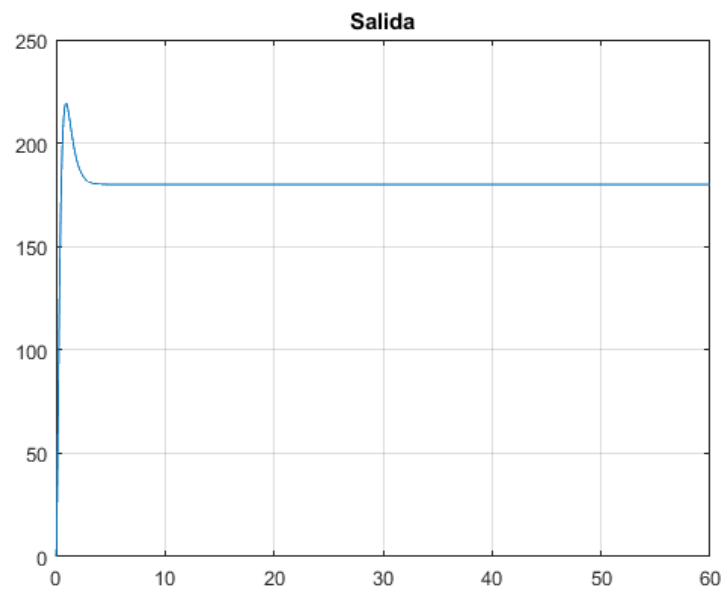


Figura 11: Salida masa aumentada

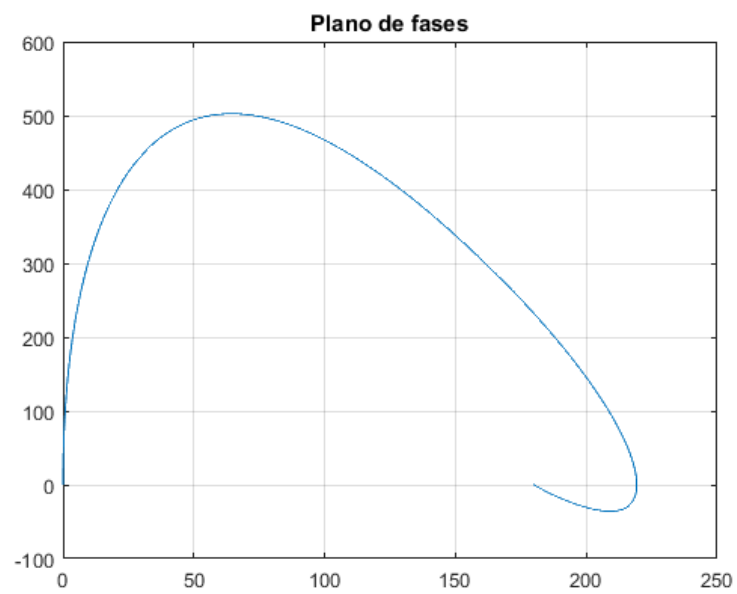


Figura 12: Plano de Fase masa aumentada

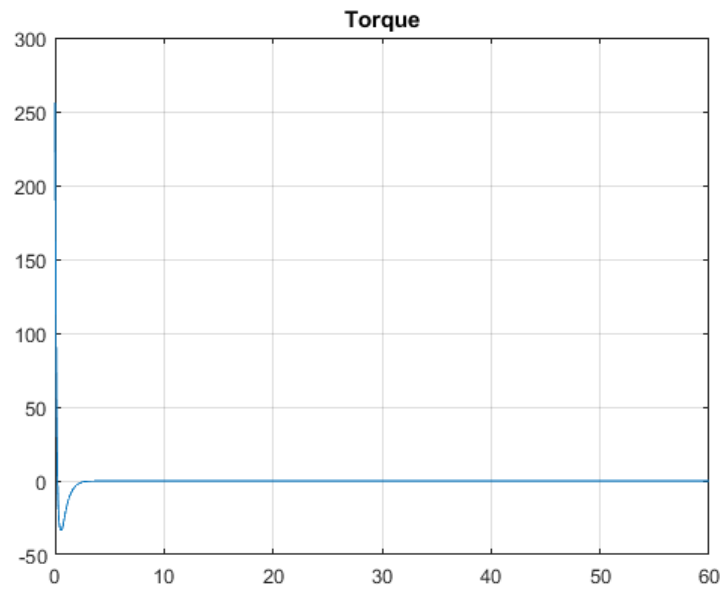


Figura 13: Torque masa aumentada

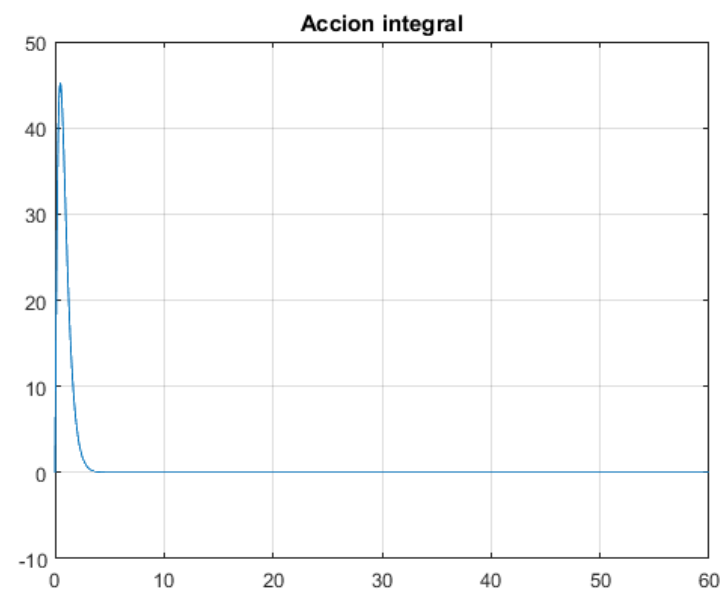


Figura 14: Acción integral masa aumentada

## 4. Conclusión

Adjuntaremos tabla donde se resumen los valores de interés solicitados para comparar las simulaciones y analizar la robustez del sistema bajo diferentes valores de masas.

Resultados	m=2	m=1.8	m=2.2
S	21.7	21.7	21.7
tss	2.5	2.5	2.5
yss	180	180	180
uf	0	0	0
If	0.1545e-3	0.69e-3	6.12e-6

Tabla 1: Resultados de la simulación para diferentes masas

- S=sobrepasamiento de la salida con respecto a la referencia (%).
- tss= tiempo de establecimiento del sistema.
- yss=salida del sistema al momento de establecerse.
- uf=torque final.
- If=accion integral final.

Podemos apreciar en la tabla los valores que se ven afectados son los de torque y acción integral. Comparamos las 3 gráficas de sistemas con las 3 situaciones de masa

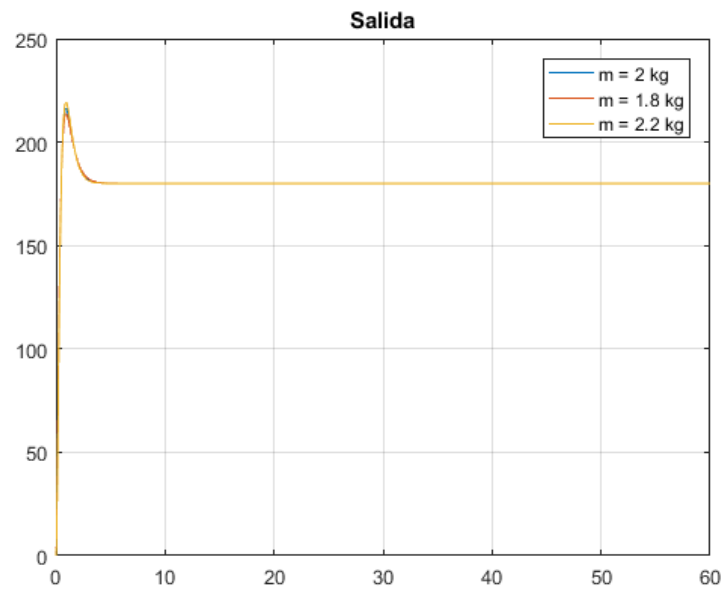


Figura 15: Salida Sisteema

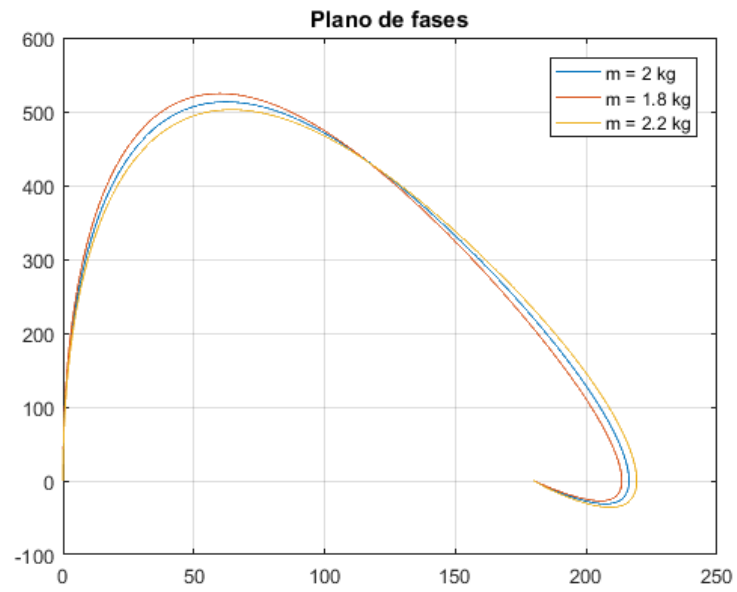


Figura 16: Plano de Fase

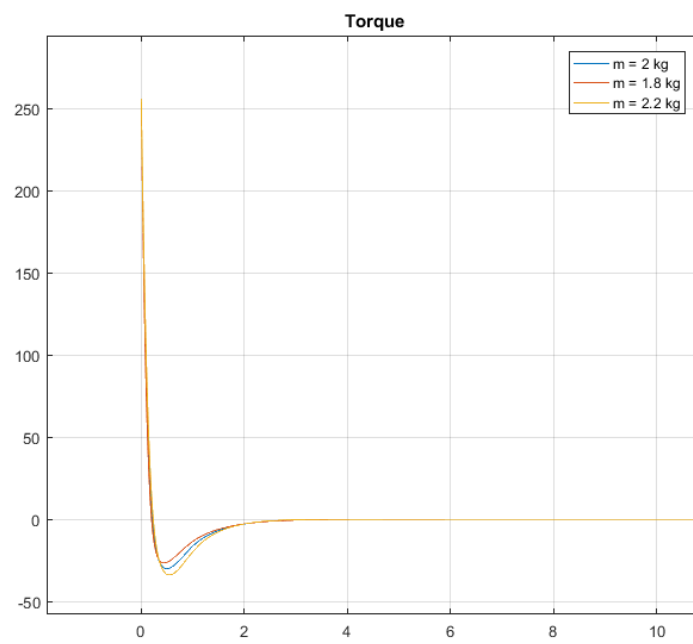


Figura 17: Torque

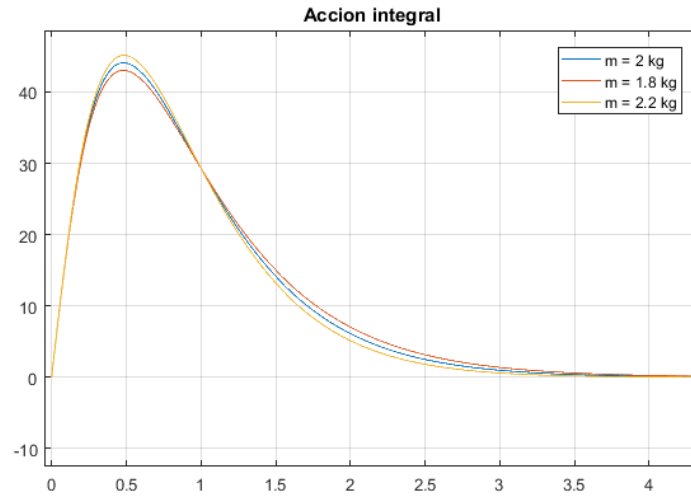


Figura 18: Acción integral

Puede apreciarse en las gráficas obtenidas de las diferentes simulaciones, que los planos de fase y las salidas del sistema no varían. Esto habla de la robustez del sistema, así como de la forma en que fue planteado el controlador. Para ello se usó la asignación de polos mediante la fórmula de Ackerman, con los mismos polos en cada una de las diferentes respuestas. Esto significará que los polos a lazo cerrado del sistema serán siempre los mismos, por lo que el transitorio en el establecimiento del sistema será único, aún para distintas variaciones de la masa. Finalmente, pudo obtenerse de forma analítica las diferentes representaciones en variables de estado para las matrices del sistema, así como las ampliadas, corroborando controlabilidad, y comprobando que los resultados calculados de forma manual son los mismos que se obtienen de la linealización que realiza el software.