Facultad de Ingeniería | Universidad de Buenos Aires
1º Cuatrimestre | 2025

75.12 | Análisis Numérico I
95.10 | Modelación Numérica
95.13 | Métodos Matemáticos y Numéricos

Trabajo Práctico 2
Modelación del decaimiento de la altura de ola luego del rompimiento

Grupo Nº	**05**
Mendoza Coronado, Carla	**107011**
Aguilera, Mateo	**111392**
Abatangelo, Valentina	**110117**

Fecha	**Correcciones**	**Docente**

Fecha	**Calificación Final**	**Docente**

ÍNDICE

1. Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo abordar la resolución numérica de una ecuación diferencial que modela el decaimiento de la altura de una ola tras su rompimiento. Para ello, se emplea un modelo matemático propuesto por Dally, Dean y Dalrymple en 1985, el cual permite calcular la evolución de la altura de ola a partir del flujo energético de la corriente estable y la profundidad del agua en reposo, bajo la suposición de un fondo marino horizontal y constante a lo largo del trayecto de propagación.

La ecuación diferencial resultante será resuelta mediante tres métodos numéricos clásicos para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias: el método de Euler, el método predictor-corrector de segundo orden y el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). A través de estas técnicas se analizará la evolución del flujo energético, y en consecuencia, la variación de la altura de la ola conforme ésta se aproxima a la costa.

El análisis incluirá la representación gráfica de los resultados obtenidos, una comparación con la solución analítica propuesta por los autores del modelo, la estimación del error de truncamiento asociado a cada método y la identificación de posibles umbrales de inestabilidad numérica. Estos aspectos permitirán evaluar de manera integral la precisión, estabilidad y eficiencia computacional de cada uno de los esquemas considerados.

2. Metodología

A) *Modelo Matemático*

Se utiliza un modelo propuesto en 1985 por Dally, Dean y Dalrymple, el cual describe cómo se disipa la energía de la ola en función de la diferencia entre el flujo energético real y un flujo energético "estable" que representa el estado hacia el cual tiende el sistema.

Este modelo resulta útil porque permite representar de manera realista cómo la energía de la ola se va perdiendo gradualmente luego del rompimiento, y cómo eso se traduce en una disminución progresiva de su altura. Una de las principales suposiciones del modelo es que el fondo marino es horizontal y permanece constante en todo el trayecto, lo cual simplifica el análisis sin perder de vista el comportamiento general del fenómeno.

Este modelo propone calcular la variación de la altura de ola al interior de la zona de rompimiento a partir de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dECg}{dx} = -\frac{K}{h^*} \cdot (ECg - ECg_s)$$

donde:

$$ECg = H^2 \cdot (h^*)^{1/2}$$

Es el flujo energético promediado temporalmente e integrado a la profundidad.

Y donde:

$$ECg_s = \Gamma^2 \cdot (h^*)^{5/2}$$

Es el flujo energético de la ola estable que la ola rompiente trata de alcanzar.

Los otros datos son:

- H es la altura de la ola.
- Γ es un parámetro empírico.
- ***K*** es un coeficiente adimensional de decaimiento.
- **h *** es la profundidad del agua quieta.

La ecuación diferencial que surge de este modelo no tiene una solución explícita sencilla, por lo que se recurre a métodos numéricos para obtener una aproximación.

En este trabajo se aplican tres técnicas numéricas comunes para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias: el método de Euler, el esquema predictor-corrector de segundo orden y el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). Cada uno de estos métodos permite estimar cómo varía la altura de la ola en función de la distancia recorrida desde el punto de rompimiento.

B) Métodos Numéricos

1) Método de Euler

Es un método numérico de orden 1, donde el error se reduce linealmente. Se basa en la aproximación de la derivada usando la definición de límite. Para una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{du}{dt} = f(u,t)$$

con condición inicial $u(t_o) = u_o$

La idea es aproximar la derivada usando diferencias finitas hacia adelante:

$$\frac{du}{dt} \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{k}$$

siendo k el tamaño del paso.

Sustituyendo en la ecuación diferencial y despejando u_{n+1}:

$$u_{n+1} = u_n + k\, f\,(u_n, t_n)$$

2) Esquema Predictor-Corrector de orden 2

Es un método de orden 2, más preciso que el de Euler:

$$u_{n+1/2} = u_n + k/2\, f\,(u_n, t_n)$$

$$u_{n+1} = u_n + k\, f\,(u_{n+1/2}, t_{n+1/2})$$

Se estima la pendiente en el medio del intervalo y se logra corregir la pendiente inicial con una predicción a la mitad del paso.

3) Runge-Kutta 4

Es un método numérico muy preciso de orden 4 para resolver problemas de valor inicial de primer orden en la forma de: $y' = f(x, y)$ con la condición inicial: $y(x_o) = y_o$

Se encarga de proporcionar un valor aproximado de y en un punto dado y, en este caso, se deriva usando el polinomio de Taylor de grado 4. Lo que nos termina dejando esta ecuación:

$$u_{n+1} = u_n + 1/6 \, (q_1 + 2 \, q_2 + 2 \, q_3 + q_4)$$

donde:

$$q_1 = k \, f \, (u_n, t_n)$$

$$q_2 = k \, f \, (u_n + 1/2 \, q_1, t_{n+1/2})$$

$$q_3 = k \, f \, (u_n + 1/2 \, q_2, t_{n+1/2})$$

$$q_4 = k \, f \, (u_n + q_3, t_{n+1})$$

Como podemos observar en las ecuaciones de arriba, la llegada a la nueva solución, u_{n+1} , va a ser producto de la ponderación de 4 pendientes diferentes: la inicial (q1) y 3 estimadas, donde 2 están a la mitad del paso (q2 y q3) y una al final (q4).

Al ponderar 4 pendientes aumentamos su precisión a la vez que aumentamos la cantidad de cálculos necesarios.

3. **Resolución**

A) Implementación del modelo numérico

Adoptaremos los siguientes valores:

- Una altura de ola inicial H = 0.8m
- Una profundidad de agua quieta h* = 1m
- El coeficiente adimensional de decaimiento K = 0.2
- Γ = 0.35.

De acá, reemplazando en las ecuaciones ECg y ECgs, obtenemos que:

ECgs = 0.1225 (Constante)

ECg inicial = u_o = 0.64

Ahora vamos a usar 3 diferentes métodos:

1. Método de Euler

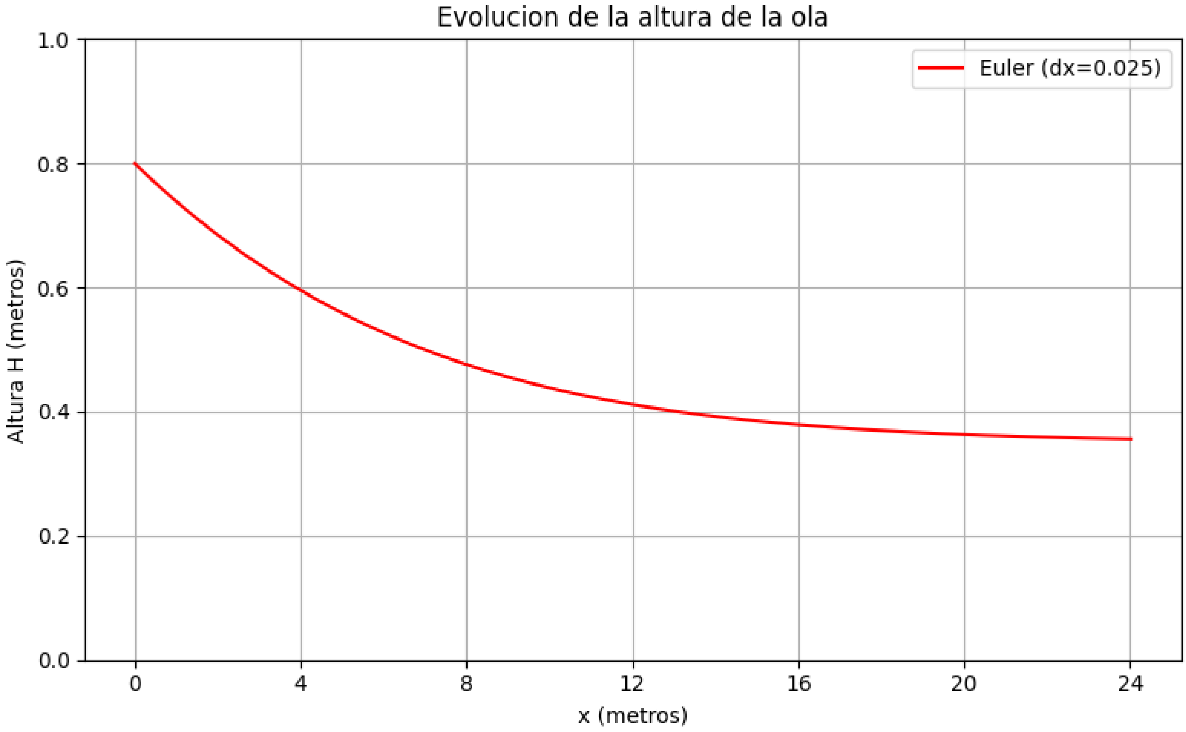
Comenzaremos a resolver la ecuación diferencial por este método, donde ECg será nuestro u, y llegaremos a un u experimental que será un ECg aproximado. La ecuación será:

$$u_{n+1} = u_n + dx \cdot (\frac{-0.2}{1} \cdot (u_n - 0.1225))$$

Nuestro primer u tal como mencionamos anteriormente será 0.64, y luego iremos resolviendo nuevamente la ecuación con nuestro u siguiente, y así sucesivamente. Un problema que podemos ver es que no tenemos el valor del paso de cálculo dx, y también nos falta decidir algún criterio para cortar el algoritmo.

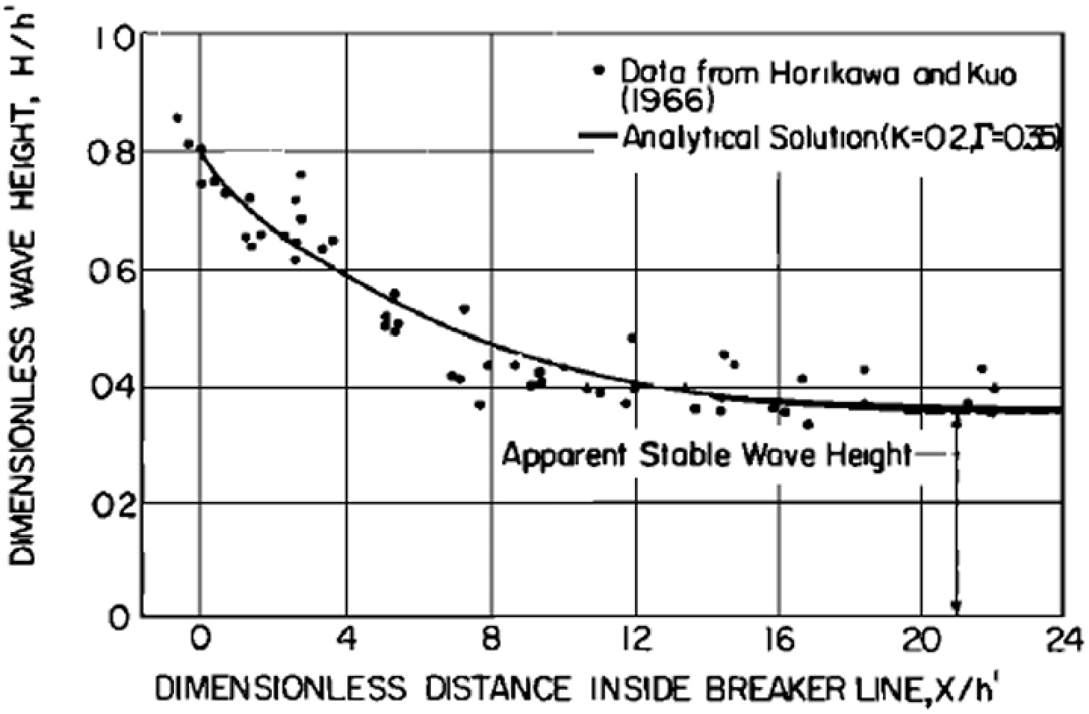
Solución por Euler

Para tratar de estimar cuál es la solución más exacta, decidimos usar un paso de cálculo muy pequeño. Con respecto al criterio de corte, decidimos poner una distancia a recorrer tn=24 metros, al igual que en el Paper de Dally, donde se puede ver que en el gráfico se toma una distancia de 24 metros. Decidimos partir de una solución aproximada que sea la arrojada por dx=0.025 por ser un valor muy pequeño.



¿Cómo saber qué tan buena es nuestra solución?

La vamos a comparar con la solución del Paper:

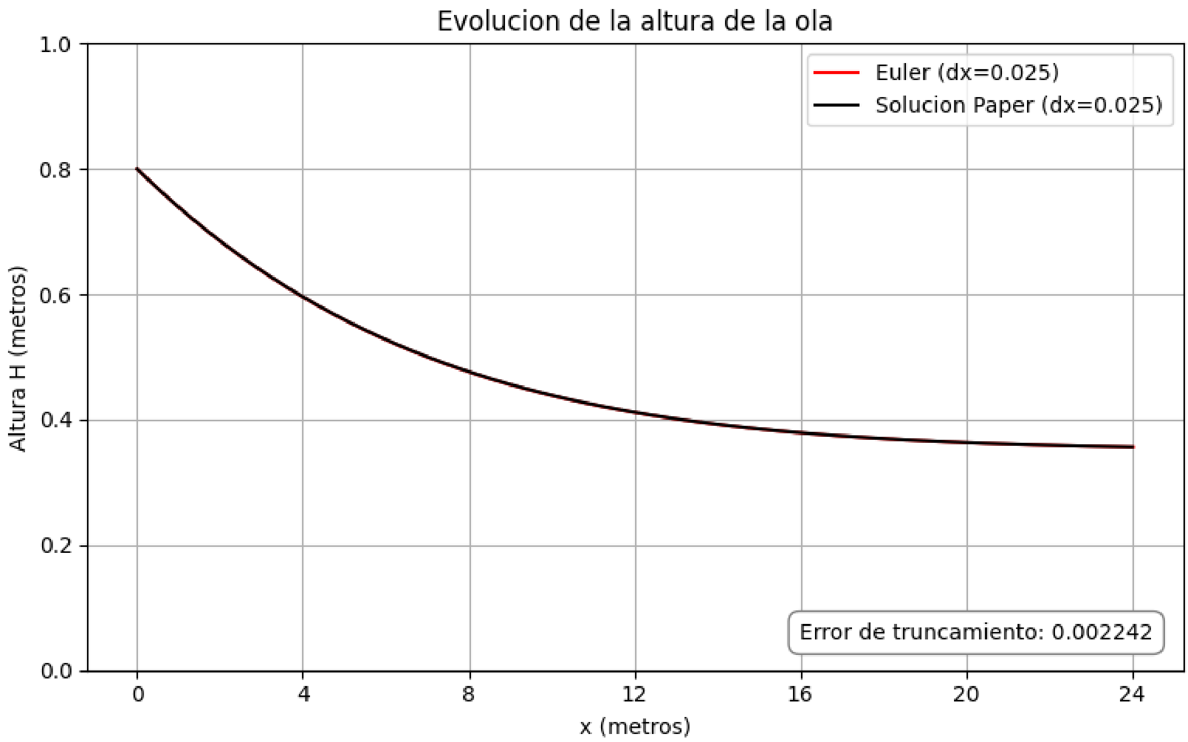


Podemos apreciar que los gráficos son muy similares, por lo que nuestra solución “exacta” pareciera que es muy similar a la exacta del Paper.

Para saber si realmente esto es así, del Paper tenemos la ecuación de esta solución para poder generar nuestro gráfico y ver las dos soluciones en el mismo gráfico:

$$Ec(x) = Ec_{\text{stable}} + (Ec_0 - Ec_{\text{stable}}) \cdot e^{-\frac{kx}{h}}$$

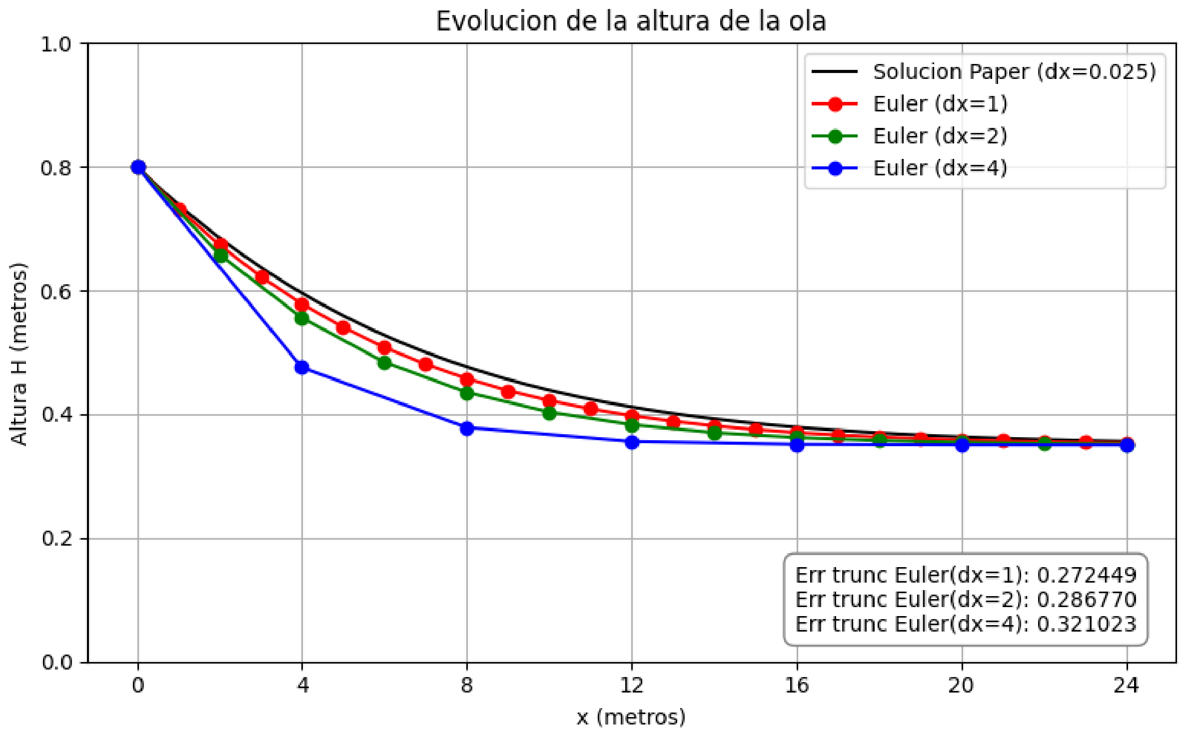
Con esta fórmula, podemos tener graficar la solución del Paper y nuestra solución en el mismo gráfico:



Podemos ver que la solución roja que es la nuestra por Euler, prácticamente no se ve en el gráfico porque la del Paper, la negra, la tapa, por lo que se puede contemplar que realmente son muy similares. Se estimó el error de truncamiento sumando la distancia entre todos los puntos en común de ambas soluciones, dando un número muy bajo.

Calculando Errores de truncamiento de Euler

Vamos a ver lo que ocurre al ir aumentando el paso de cálculo dx en nuestra solución:

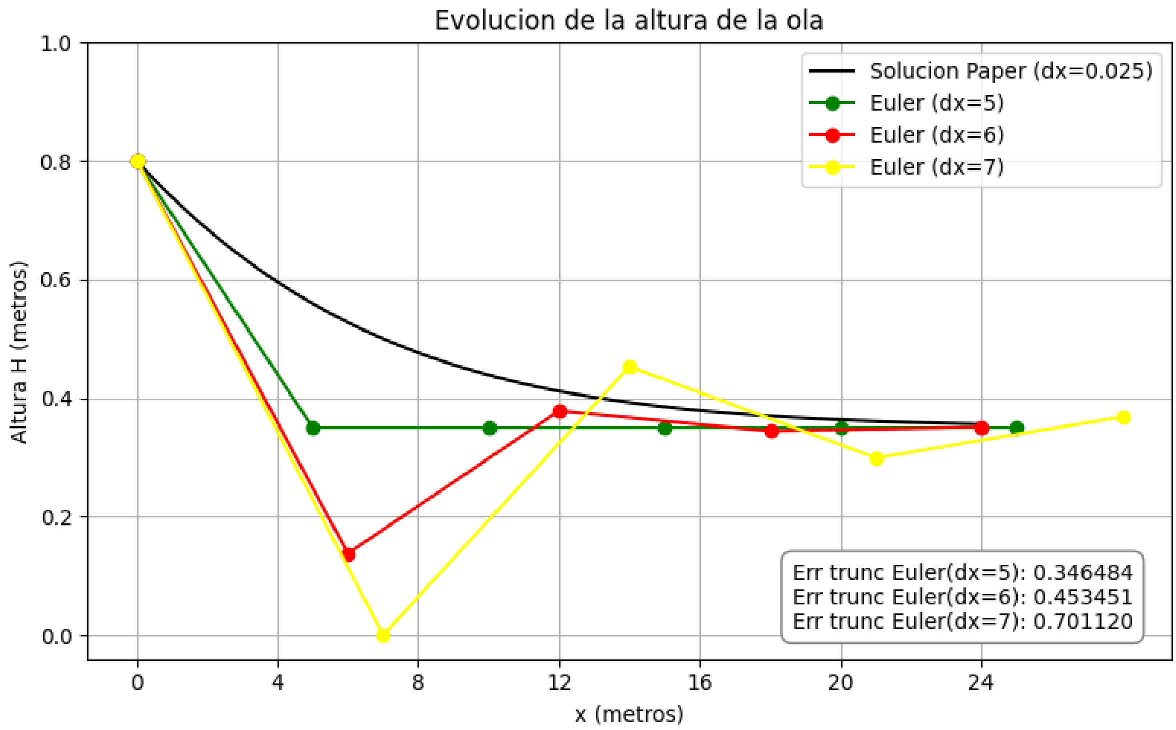


Podemos ver que al aumentar el paso de cálculo, el gráfico se aleja cada vez más del exacto, debido a que estamos tomando menos puntos, y por lo tanto, el error de truncamiento crece a medida que el paso de cálculo crece.

Calculando umbral de Inestabilidad del algoritmo de Euler

Ahora nos gustaría poder descubrir para cuáles pasos de cálculo dx, es estable este algoritmo, por lo que ahora mostraremos algunos resultados arrojados por el algoritmo variando el dx

En el gráfico anterior pudimos observar que con dx=4 se comportaba bastante bien, vamos a seguir aumentando un poco para ver qué ocurre:



Acá se puede ver que hasta la curva roja, la cuál es para un dx=6, la solución es medianamente aceptable, pero ya a partir de la curva amarilla que es con dx=7, la solución ya dista demasiado con respecto a la original, con un error de truncamiento bastante alto, de 0.7 aproximadamente.

Por lo tanto, diremos que experimentalmente **el algoritmo de Euler para esta ecuación se vuelve inestable para un paso de cálculo dx>=7**

2. Método Predictor Corrector de orden 2

Para comenzar a resolver nuestra ecuación con este algoritmo, lo que haremos será primero describir las ecuaciones correspondientes a este método:

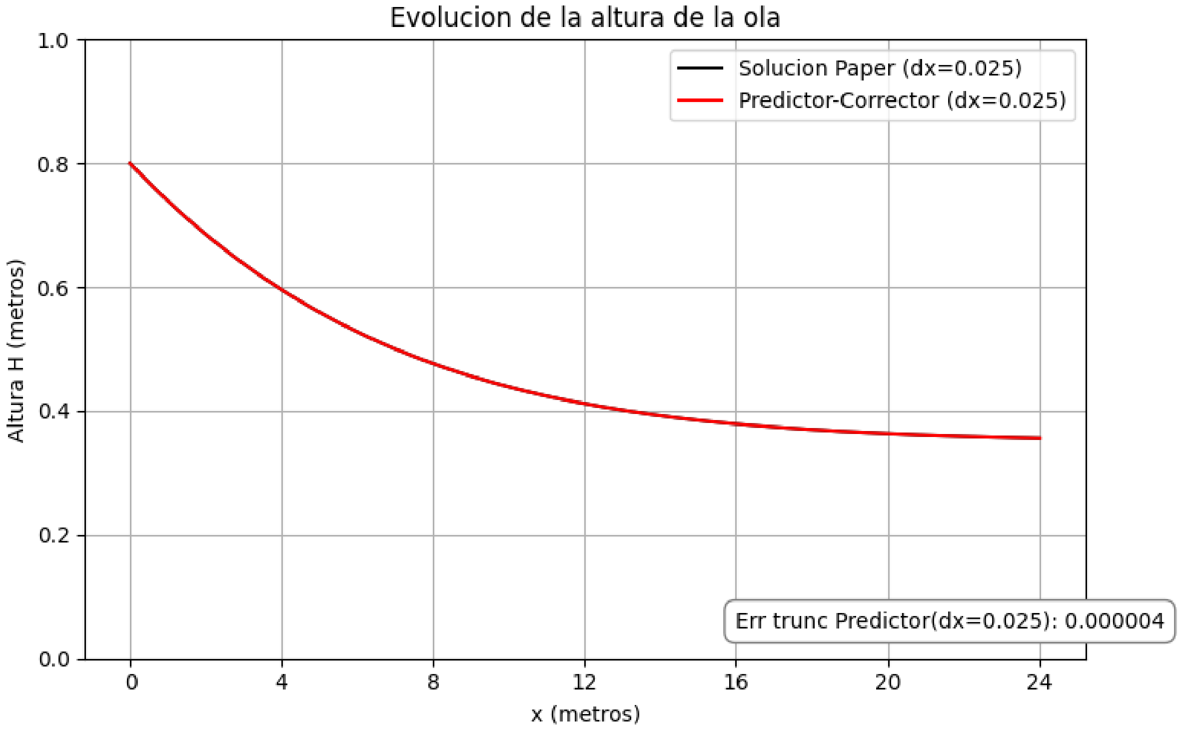
Predictor:

$$u_{n+\frac{1}{2}} = u_n + \frac{dx}{2}\left(-\frac{0.2}{1}\left(u_n - 0.1225\right)\right)$$

Corrector:

$$u_{n+1} = u_n + dx\left(-\frac{0.2}{1}\left(u_{n+\frac{1}{2}} - 0.1225\right)\right)$$

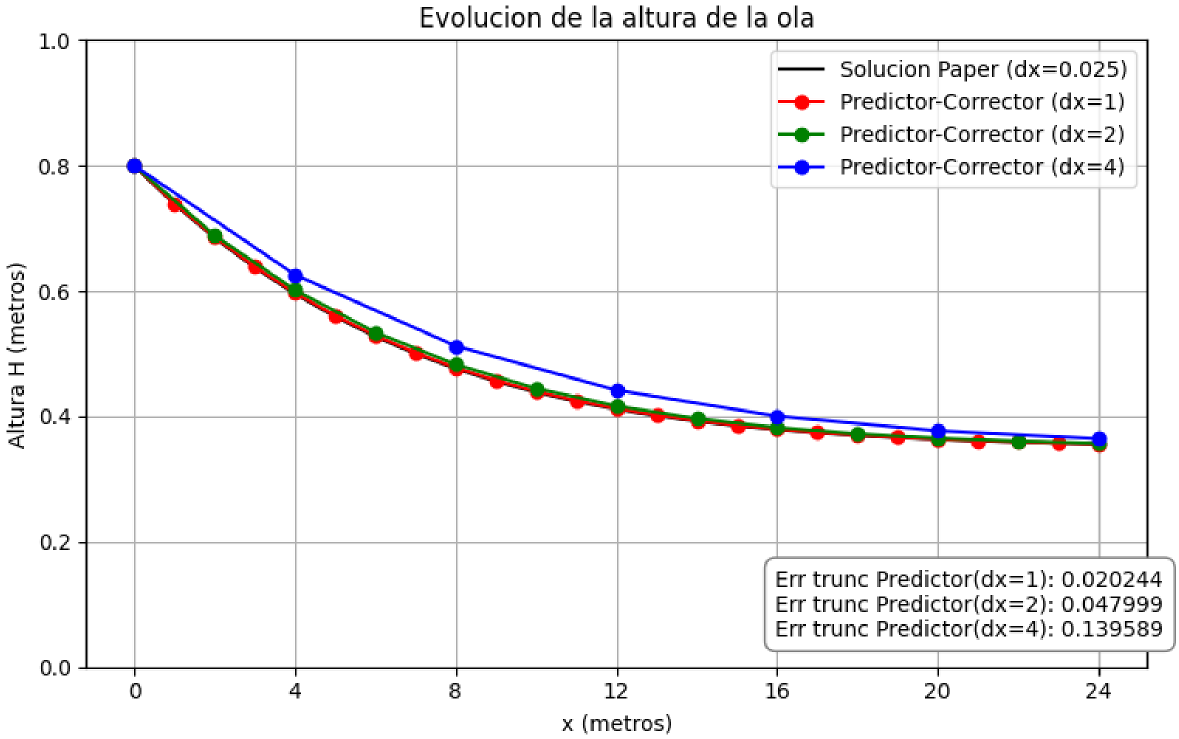
Ahora procederemos a calcular una solución con un paso de cálculo dx=0.025, al igual que hicimos con Euler, y en un mismo gráfico la exacta del Paper también para comparar:



Al igual que con Euler, nuestra solución propuesta en rojo vuelve a coincidir de manera muy similar con la exacta del Paper. Aunque visualmente no se note, esta solución es aún mejor que la de Euler, el error de truncamiento es aún más pequeño de lo que ya era, dando apenas 0.000004.

Calculando Errores de truncamiento de Predictor-Corrector

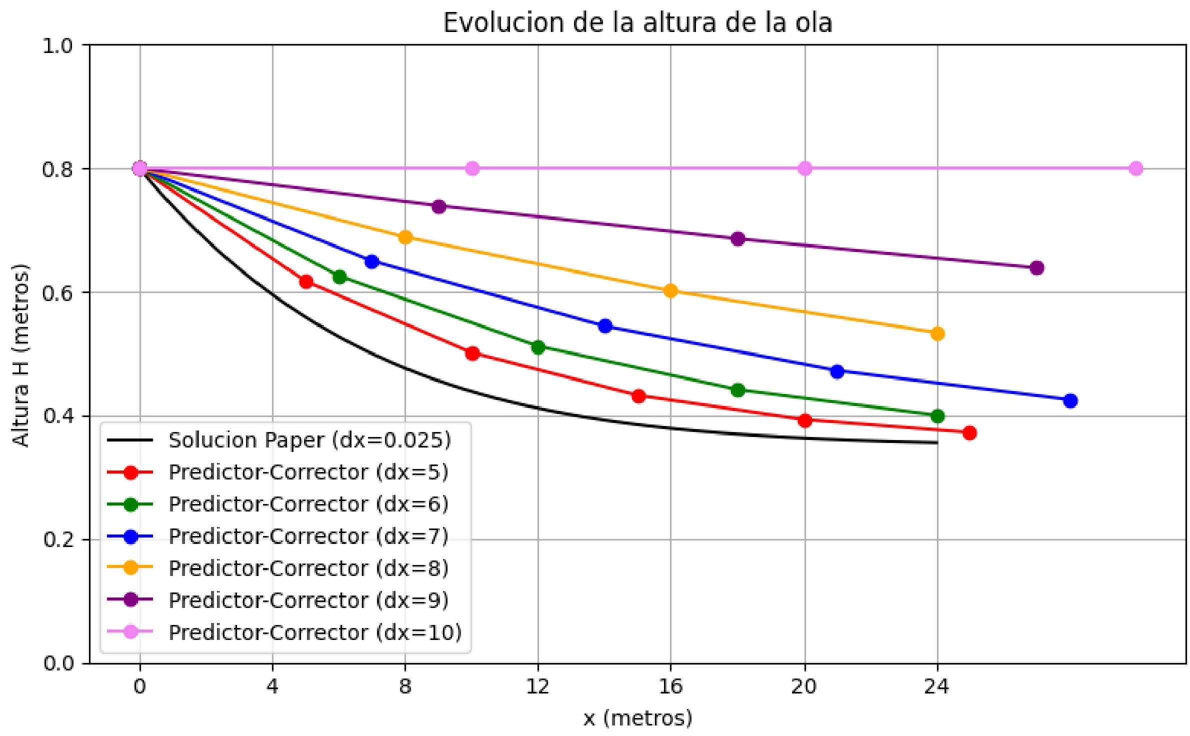
Veamos lo que sucede al ir variando el paso de cálculo dx:



Podemos ver que incluso aumentando el paso hasta dx=4, el algoritmo sigue comportándose de una muy buena manera, dando un resultado similar al exacto incluso con un paso grande, mientra que en Euler pudimos ver que un gráfico con estos mismos dx, ya se notaba que había más diferencia entre cada solución. El error de truncamiento para la solución con un dx=4, el cuál es un paso bastante grande, es de apenas 0.14 aproximadamente, lo cuál es muy bajo comparado al error para Euler con el mismo paso, que era de 0.32 aproximadamente. La curva roja que es con un dx=1 es muy similar a la exacta, mientras que en Euler se podía ver que ya había diferencia.

Esto es debido a que este método tiene orden 2, lo cuál es mayor al orden de Euler que es de 1. Este método estima la pendiente en el medio del Intervalo y de esta forma, logra corregir la pendiente inicial con una predicción a la mitad del paso, especialmente si la función cambia su curvatura rápidamente.

Calculando umbral de Inestabilidad del algoritmo Predictor-Corrector



Acá podemos ver experimentalmente que efectivamente este algoritmo es mejor que el de Euler. Antes con un dx=7, el algoritmo ya era inestable, acá hasta con un dx=9, es decir, incluso dos pasos más, la solución se nota que está bastante diferente a la del Paper, pero se comporta mejor que para un dx=7 en la de Euler. Acá se nota que se respeta más la curvatura de la solución, esto debido a la predicción de la pendiente que permite una mejor aproximación.

A partir de **dx>=10, experimentalmente el algoritmo se vuelve inestable.**

3. Método Runge-Kutta 4

Las ecuaciones de este método son:

$$q_1 = dx \cdot \left(-\frac{0.2}{1}(u_n - 0.1225)\right)$$

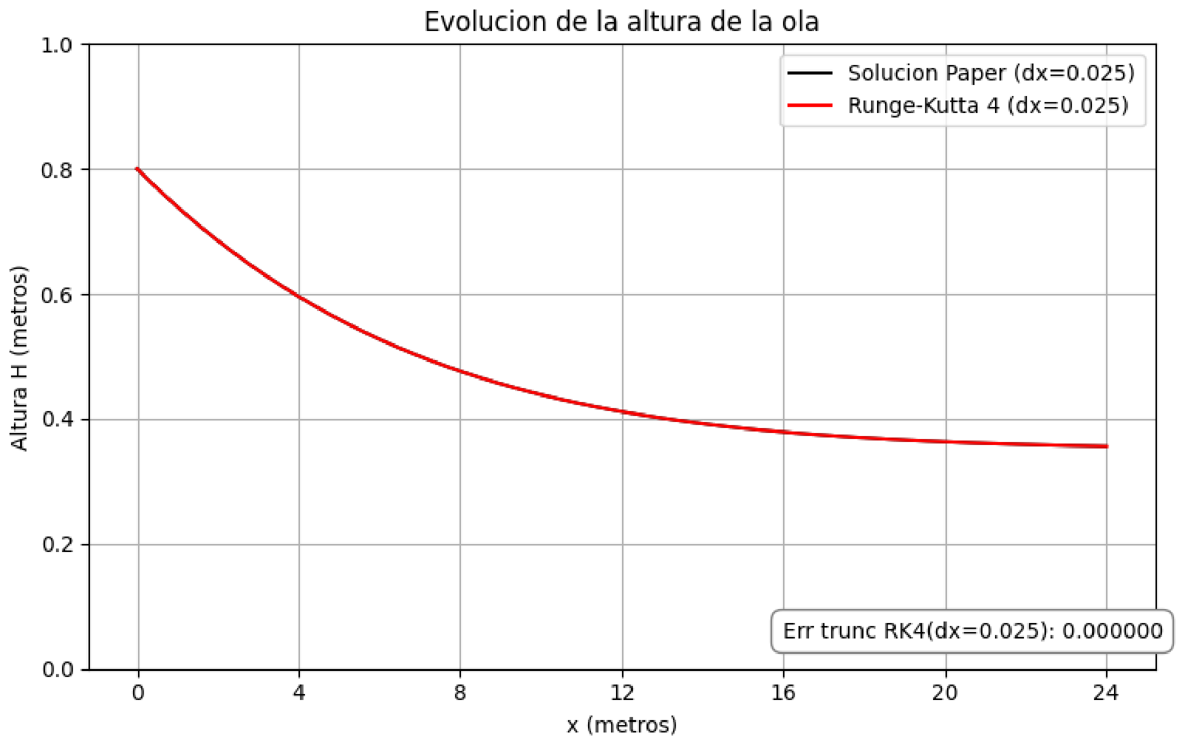
$$q_2 = dx \cdot \left(-\frac{0.2}{1}\left(u_n + \frac{1}{2}q_1 - 0.1225\right)\right)$$

$$q_3 = dx \cdot \left(-\frac{0.2}{1}\left(u_n + \frac{1}{2}q_2 - 0.1225\right)\right)$$

$$q_4 = dx \cdot \left(-\frac{0.2}{1}(u_n + q_3 - 0.1225)\right)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4)$$

Calculemos nuestra solución con un dx=0.025:

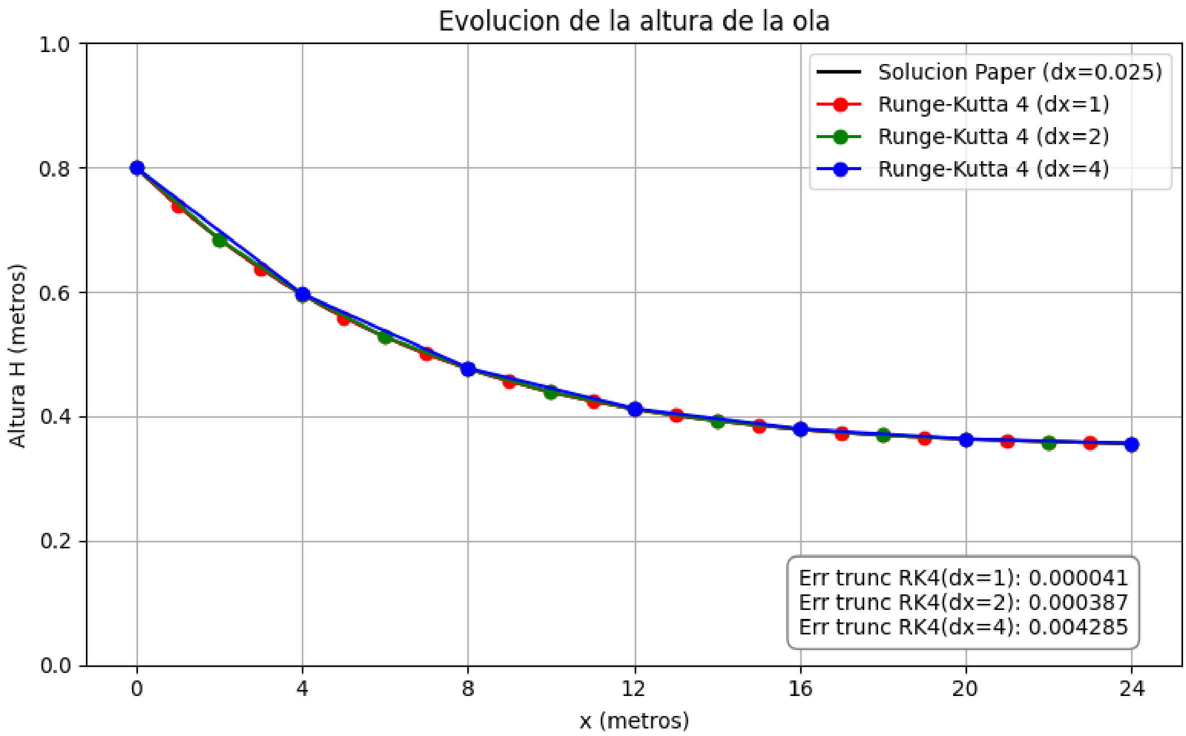


Esta es por lejos la mejor solución de todas, ya que el error de truncamiento con 6 decimales da 0, por lo que esta solución es la más cercana a la del Paper.

Este método tiene orden de precisión 4, por lo cuál es el más preciso.

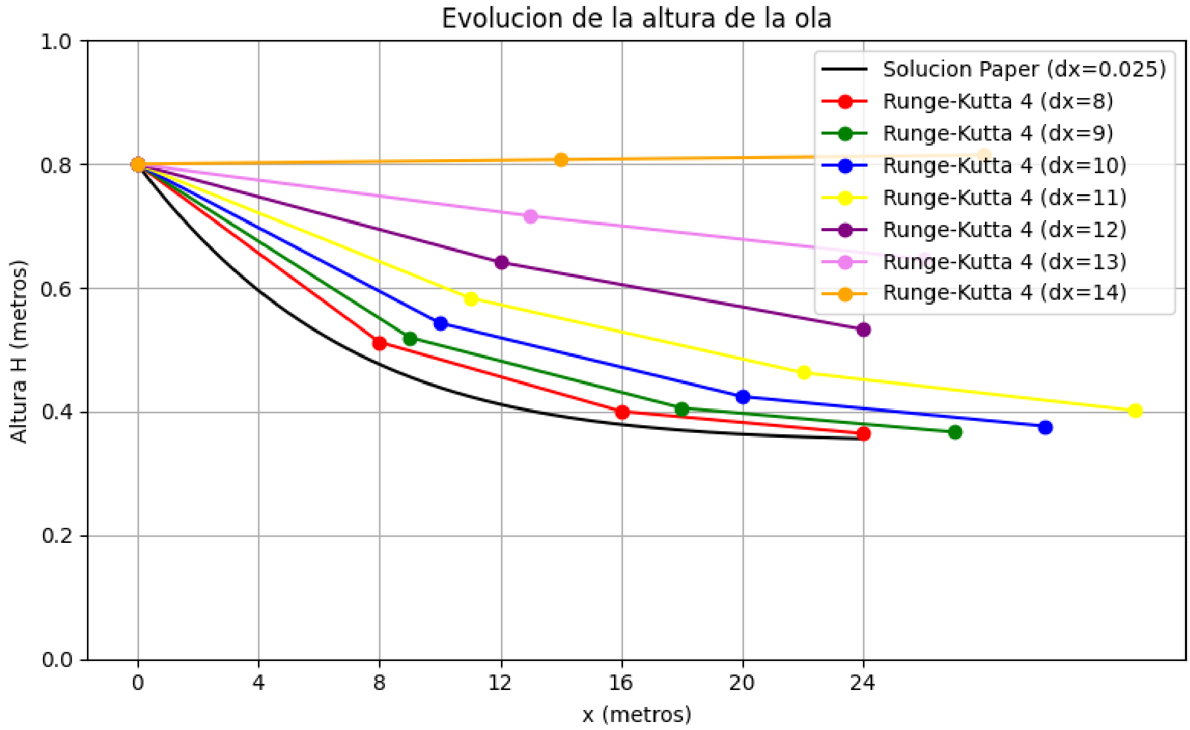
La llegada a la nueva solución u_{n+1} será producto de la ponderación de 4 pendientes diferentes, una la inicial como en los métodos anteriores, y tres estimadas, dos en la mitad del paso y una al final, por lo que conceptualmente este método pondera 4 pendientes, lo que representa una mayor cantidad de cálculos y una aproximación mayor.

Calculando Errores de truncamiento de RK4



Acá se puede apreciar que voy aumentando el paso de cálculo y la solución cambia muy poco con respecto a la exacta, lo cuál nos habla de lo bueno que es este método. Una solución con un dx=4, el cuál es un paso bastante grande, se acerca muchísimo a una solución exacta, teniendo solo un error de truncamiento de 0.004 aproximadamente.

Calculando umbral de Inestabilidad del algoritmo RK4

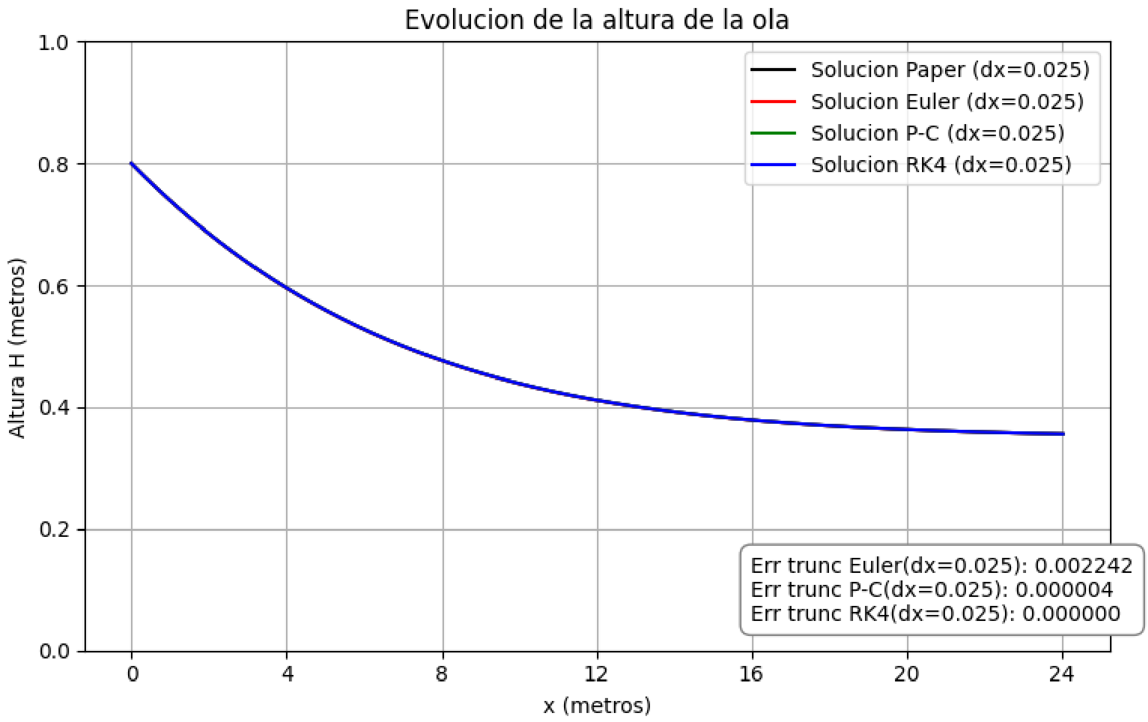


Este es el mejor de los 3 métodos, y vemos que con pasos de cálculo muy grandes, nuestras aproximaciones no son tan malas. Vemos que hasta un dx=13, se recrea de forma medianamente la curvatura de la solución exacta, y a partir de un dx=14, la curva se vuelve una recta, por lo que **el algoritmo de RK4 para esta ecuación es inestable para dx>=14**

4. **Conclusiones**

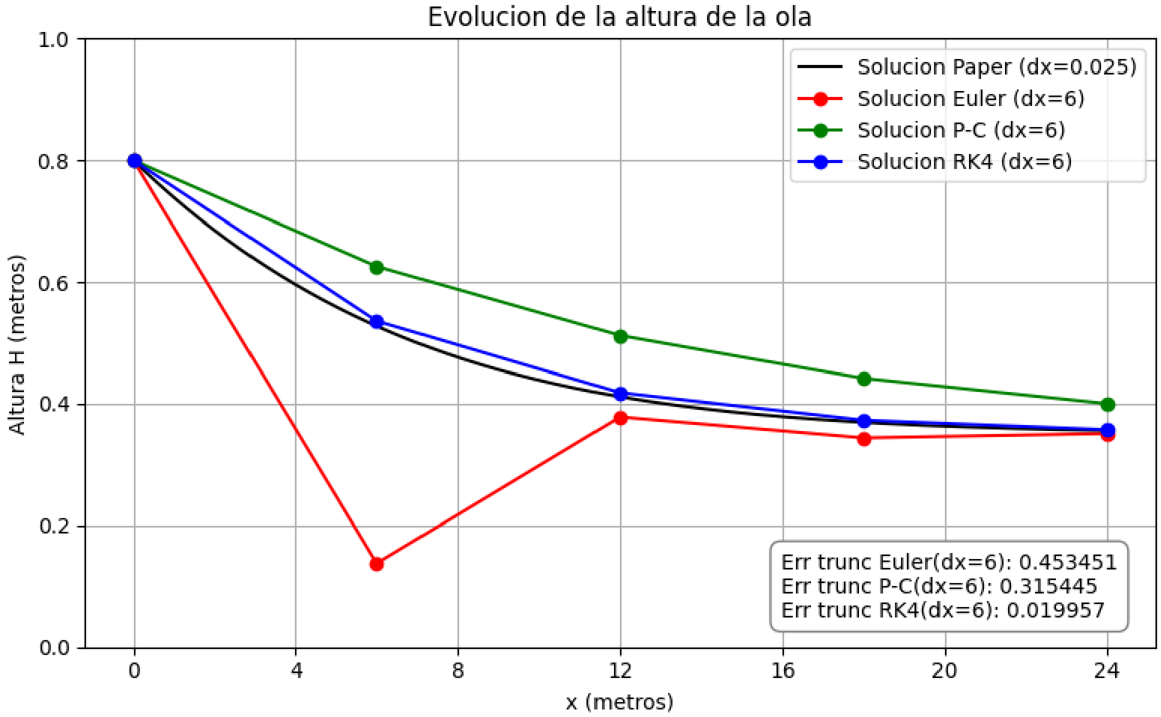
A través del análisis de estos 3 algoritmos y sus distintos gráficos, pudimos ver que efectivamente RK4 es el mejor con un mayor costo de operaciones, Predictor Corrector es mejor que Euler, y Euler sería el más simple, con poco costo de operaciones. Debido a que RK4 tiene mayor cantidad de operaciones, es el algoritmo que más errores de redondeo tiene por esta razón. Sin embargo, estos errores de redondeo son menores en comparación con el error de truncamiento al elegir un paso de cálculo, por lo que aún teniendo más operaciones y más errores de redondeo, sigue siendo el algoritmo que mejor aproxima por reducir notablemente el error de truncamiento, el cuál es el principal error presente en problemas de valores iniciales.

Las soluciones “exactas” en las 3 soluciones, tomando a dx=0.025, son muy similares entre sí, al ser comparadas con la solución del Paper.



Tal como se ve, las 3 aproximaciones son muy buenas con un paso de cálculo pequeño, teniendo errores de truncamiento aproximados 0.002, 0.000004 y 0 respectivamente.

El análisis se vuelve más interesante cuando incrementamos el paso de cálculo, es ahí donde se empiezan a ver las diferencias interesantes entre cada método.



Acá. usando un dx=6, podemos ver que cada aproximación toma muy pocos puntos, y se puede ver que RK4 con solo estos 5 puntos, logra una aproximación realmente muy buena y fiel a la exacta.

El método Predictor Corrector también es bastante bueno, y se aprecie especialmente de este método que si bien no es tan preciso como RK4, logra mantener de muy buena manera la curvatura de la solución

El método de Euler con tan pocos puntos le cuesta hacer una buena aproximación, y se puede ver como el gráfico en x=6 está en un valor muy diferente al exacto, y a medida que el paso crece le cuesta respetar la curvatura de la solución.

Se puede ver como los errores de truncamiento acá son más significativos que con un paso pequeño. Estos errores son aproximadamente 0.45, 0.32 y 0.02 respectivamente, siendo el 0.02 de RK4 un error muy bueno al ser tan chico, dando a ver que incluso con un paso grande da un resultado bastante bueno.

Como conclusiones finales, si tenemos un paso chico, seguramente las 3 soluciones sean bastante fieles a la exacta, pero las verdaderas ventajas de usar cada método empiezan a entrar en juego realmente cuando se quiere lograr una aproximación con un dominio con muy pocos puntos debido a un paso grande.