EDOs orden 1: estabilidad
Matemática para Economistas III – UNGS

G. Sebastián Pedersen

sebasped@gmail.com

Marzo de 2019

Resumen

Se analiza la estabilidad de una EDO de orden 1 lineal, a coeficientes constantes, y autónoma (i.e. no dependiente explícitamente de la variable independiente) desde dos puntos de vista diferentes: por un lado analizando la convergencia de la solución general a la solución particular, y por otro lado analizando la estabilidad de los puntos de equilibrio (se entiende por punto de equilibro donde la derivada vale cero).

Se concluye que, esencialmente, los dos puntos de vista son equivalentes.

El texto pone encima de la "elegancia" matemática a la claridad de exposición que permita transmitir ideas y herramientas. En este sentido los caminos de resolución y explicación se han elegido acorde, y la redundancia debe entenderse como una técnica que se utiliza para revisitar conceptos importantes.

1. Introducción

Trabajaremos con la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} + ay = b \tag{1}$$

Donde:

- $y = y(t)$ es una función.
- a, b son números reales.
- $a \neq 0$.

Se podría decir, no sin generar algo de polémica, que el caso $a = 0$ es un tanto patológico y no encierra del todo las ideas centrales del tema. Es por eso que preferimos tratar el caso $a \neq 0$.

La solución $y = y(t)$ de la ecuación (1) se puede escribir como:

$$y = y_h + y_p \tag{2}$$

Donde:

- y_h es la solución general del homogéneo asociado.
- y_p es *una* solución particular del no homogéneo.

Observemos que como $a \neq 0$ entonces y_p es siempre simplemente una constante ($y_p = \frac{b}{a}$ más precisamente).

2. Estabilidad como convergencia de y a y_p

De la ecuación (2) podemos escribir:

$$y - y_p = y_h \tag{3}$$

y por lo tanto que y converja a y_p (i.e. cuando $t \to +\infty$) es equivalente a que y_h converja a cero. Más aún como el homogéneo asociado es:

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0 \tag{4}$$

entonces que y_h converja a cero implica que $\frac{dy_h}{dt}$ también converge a cero (pues $\frac{dy_h}{dt} = -ay_h$).

Mirando ahora la ecuación (3) y derivando, obtenemos:

$$\frac{dy}{dt} - \frac{dy_p}{dt} = \frac{dy_h}{dt} \tag{5}$$

y como $\frac{dy_p}{dt} = 0$ (pues y_p constante) y de antes $\frac{dy_h}{dt}$ converge a cero, no queda otra que también $\frac{dy}{dt}$ converja a cero.

Resumiendo: si $y \to y_p$ entonces $\frac{dy}{dt} \to 0$.

3. Estabilidad con puntos de equilibrio

Llamaremos *puntos de equilibrio* a los valores de y para los cuales $\frac{dy}{dt} = 0$. Para que nos quede más cómodo, reescribamos la ecuación (1) despejando la derivada:

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b \tag{6}$$

Luego mirando la anterior ecuación, el único punto de equilibrio es $y = \frac{b}{a}$ (recordar que es $a \neq 0$). Para simplificar llamemos y_e al punto de equilibrio (observemos que y_e es igual al y_p de antes).

Si inicialmente es $y(0) = y_0 = y_e$ entonces $y = y_e$ para todo tiempo (pues la derivada vale cero).

Surge entonces la pregunta: ¿qué ocurre si inicialmente $y_0 \neq y_e$? Una forma de responder a esta pregunta es mirando el llamado *diagrama de fases*, es decir pensar a la ecuación (6) como la derivada en función de y: $\frac{dy}{dt} = f(y)$.

Para el caso de la ecuación (6) con $a > 0$ el diagrama de fases queda así (los signos de la derivada se analizan posteriomente en detalle):

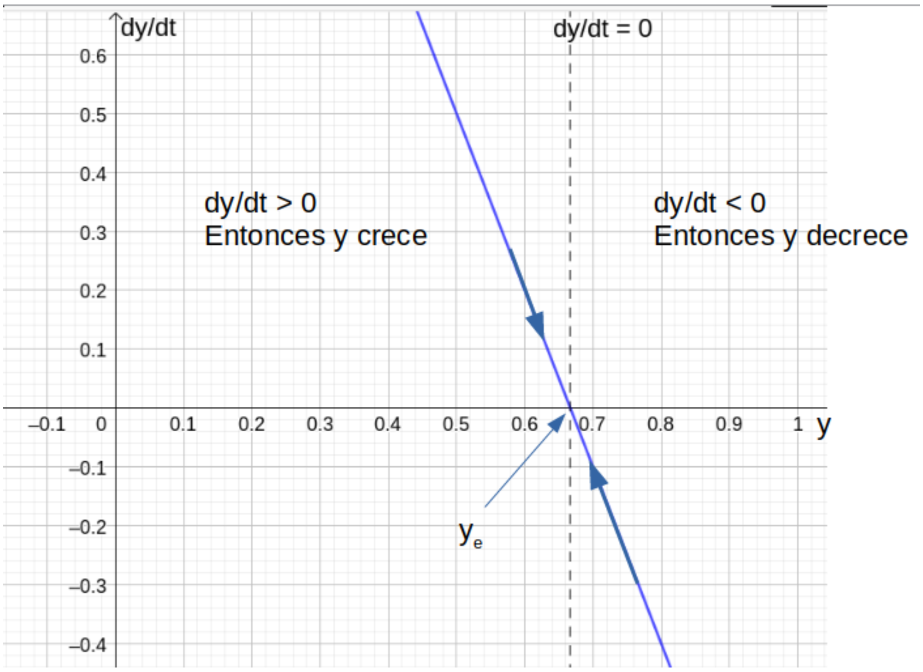

Figura 1: Diagrama de fases para la ecuación (6) con $a > 0$.

Sigamos suponiendo que es $a > 0$. Como la pregunta es qué pasa si $y_0 \neq y_e$, tenemos dos casos:

Caso $y_0 < y_e$: es decir $y_0 < \frac{b}{a}$, y por lo tanto $-ay + b > 0$. Luego, mirando la ecuación (6), debe ser $\frac{dy}{dt} > 0$, y por lo tanto el valor de y va a tender a aumentar.

Caso $y_0 > y_e$: análogamente al caso anterior, obtenemos que $\frac{dy}{dt} < 0$, y por lo tanto el valor de y va a tender a disminuir.

Supongamos que, efectivamente, y está convergiendo a algún valor. Si en algún momento es y igual a y_e, ya sabemos que se debe quedar ahí pues allí la derivada vale cero.

Si y estuviese convergiendo a algún valor *distinto* de y_e, entonces razonando igual que en la sección 2, ese valor debe ser un cero de la derivada (por continuidad de la derivada). Pero acabamos de ver que el único cero de la derivada es y_e. Por lo tanto de converger y a algún valor, debe hacerlo a y_e.

Este último análisis también de paso descarta el caso $a < 0$ si queremos que y converja (simplemente analizando los signos de la derivada).

Resumiendo: si y converge a algún valor e inicialmente vale distinto que su punto de equilibrio y_e, entonces debe ser $y \to y_e$.

4. Conclusiones

Analizar la convergencia de y a la y_p o analizar la convergencia de y a su punto de equilibrio, son en el fondo análisis equivalentes.

Dicho de otro modo, al único punto adonde puede converger la y es a su punto de equilibrio y_e, y a su vez este último es igual a la y_p.