Ejercicio 1.

- Para $\hat{\mu}_K$, sabemos que existe un estimador para la media muestral:

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Por lo cual, en este caso se tiene para cada K:

$$\mu_K = \frac{1}{n_K}\sum_{i:y_i=K} x_i$$

- Para $\hat{\Sigma}_K$, partimos del estimador para las covarianza,

$$\Sigma_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\Sigma_{xx} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Así, un estimador para Σ_K, es:

$$\hat{\Sigma}_K = \frac{1}{n_K-1}\sum(x_i - \mu_K)^2 = \frac{1}{n_K-1}\sum(x_i - \mu_K)(x_i - \mu_K)^T$$

- Para π_K. Utilizando la probabilidad frecuentista y pensando en la función clasificadora, que solo toma 1 y 0. Tomamos los casos totales n_K, y obtenemos el sig estimador

$$\hat{\pi}_K = \frac{1}{n_K}\sum_{i=1}^{n_K} \mathbb{1}_{\{y_i=K\}} \quad //$$

- Para $\hat{\Sigma}$, nos basamos en el caso del estimador para cada K, pero ahora al incluir todas las K posibles, las incluimos en una sumatoria, donde el denominador es $n-K$ al cambiar los grados de libertad

$$\hat{\Sigma} = \frac{\sum_{K=0}^{K-1}\sum(x_i - \mu_K)(x_i - \mu_K)^T}{n-K} = \frac{\sum_{K=0}^{K-1}(n_K-1)\hat{\Sigma}_K}{n-K}$$

Ejercicio 2.

Su discriminante es

$$\log\left(\frac{f_1(x)\pi_1}{f_k(x)\pi_k}\right) = \log(f_1(x)\pi_1) - \log(f_k(x)\pi_k)$$

Usando la función δ_k del ejercicio anterior

$$= -\frac{1}{2}\log(\Sigma_1) - \frac{1}{2}(x-\mu_1)^T\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1) + \log(\pi_1)$$

$$+ \frac{1}{2}\log(\Sigma_k) + \frac{1}{2}(x-\mu_k)^T\Sigma_k^{-1}(x-\mu_k) - \log(\pi_k)$$

$$= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{\Sigma_1}{\Sigma_k}\right) - \frac{1}{2}\left((x-\mu_1)^T\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1) - (x-\mu_k)^T\Sigma_k^{-1}(x-\mu_k)\right)$$

$$+ \log\left(\frac{\pi_1}{\pi_k}\right) //$$

Dónde $-\frac{1}{2}\left[(x-\mu_1)^T\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1) - (x-\mu_k)^T\Sigma_k^{-1}(x-\mu_k)\right)$

es la función discriminante. //

de forma ...

Ejercicio 3

Sean $\mu_1 = \{(1,0)\}$ considere la sig matriz:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

¿Existe un vector gaussiano con media μ_1 y varianza Σ?

Σ es simétrica. ✓ $\Sigma = \Sigma^t$

Valores Propios

$$\text{Det}(\Sigma - \lambda I) = 0$$

$$(4-\lambda)^2 - 16 = 0 \to 16 + 8\lambda + \lambda^2 - 16 = \lambda^2 + 8\lambda = 0$$

$$\to \lambda(\lambda + 8) = 0 \qquad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -8 \;//$$

Tenemos que no todos los eigenvalores son mayores que 0, por lo tanto, no es positive definida, no existe un vector gaussiano con media μ y varianza Σ //

BACK 2 SCHOOL®

Ejercicio 4.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}(u x_1^2 + x_2^2 + u x_3^2 + u x_3^2 + 2 x_1 x_2)}$$

Podemos notar que tiene la forma de una multinormal con media $\vec{0}$, así, utilizando formas cuadráticas nos interesa descomponer la función que se encuentra dentro de la exponencial.

$$P(\vec{x}) = u x_1^2 + x_2^2 + u x_3^2 + 2 x_1 x_2$$

Se puede descomponer de la sig forma $X^T A X$, donde

$$X = (x_1, x_2, x_3) \quad y \quad A = \Sigma^{-1}$$

Se sigue que A tiene la sig forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{lll} a_{11} = u, & a_{12} = a_{21} & a_{13} = 0 \\ a_{21} = a_{12} & a_{22} = 1 & a_{23} = 0 \\ a_{31} = 0 & a_{32} = 0 & a_{33} = u \end{array}$$

Así $(a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 = 2 x_1 x_2$

$$2 a_{12} = 2 \rightarrow a_{12} = 1.$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{u-1} & -\frac{1}{u-1} & 0 \\ -\frac{1}{u-1} & \frac{u}{u-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{u} \end{pmatrix}$$

Así, concluimos que $X \sim Norm(\vec{0}, \Sigma)$

BACK 2 SCHOOL®

Ejercicio 5. $\mu_1 = (1,0)$ y $\mu_2 = (-2,2)$. Considere

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- ¿Existe un vector gaussiano bivariado con media μ_1 y matriz de covarianza Σ_1?

Σ_1 es simétrica y def. positiva, por lo tanto, sí.

Positiva definida:

$$\text{Det}(\Sigma_1 - \lambda I) = (7-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0$$

$$= 7 - \lambda - 7\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0$$

$$\frac{8 \pm \sqrt{64-12}}{2} = \quad \lambda_1 = \frac{8+\sqrt{32}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{8-\sqrt{32}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{8 - 2\sqrt{8}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{2}$$

Tanto λ_1 como λ_2 ~~tienen~~ son mayores que cero, así, es positiva definida, existe v.g.

- Si $\pi_k = 0.5$ para $k = 1, 2$, sea $f_1(x_1, x_2) \sim N(\mu_1, \Sigma_1)$ y $f_2(x_1, x_2) \sim N(\mu_2, \Sigma_1)$ calcule

$$L(x_1, x_2) = \log\left(\frac{f_1(x_1, x_2)\,\pi_1}{f_2(x_1, x_2)\,\pi_2}\right)$$

Asignamos (x_1, x_2) a π_1 si $L(x_1, x_2) > 0$.

BACK 2 SCHOOL®

~~Ejercic~~

$$\Sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{3}$$

Sea $X = (x_1, x_2)$

$$L(x) = \log\left(\frac{f_1(x)\,\pi_1}{f_2(x)\,\pi_2}\right) = b_0 + b^T x$$

$$b_0 = -\frac{1}{2}\left((1,0)\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-2,2)\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$+ \log(1)$$

$$b_0 = -\frac{1}{2}\left(1/3 - 16\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{47}{3}\right) = \frac{47}{6}$$

$$b = \Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_2) = \left(\frac{7}{3}, -\frac{20}{3}\right)$$

Así

$$L(x) = \frac{47}{6} + \frac{7}{3}x_1 - \frac{20}{3}x_2 \;//$$

A que grupo asignas $(2,1)$

$L(2,1) = \frac{35}{6}$, $\frac{35}{6} > 0$, se asigna a π_1