Ejemplo Reducción

TDA - curso Buchwald-Genender

2 de julio de 2024

En este breve documento presentamos el ejemplo de una reducción completa, en la cuál hacemos todos los pasos esperados en cualquier instancia (Parcial o TP). No nos interesa que se concentren en las palabras exactas que usamos, sino en el procedimiento y la formalidad (especialmente en la demostración). Los modos de escribir y frases usadas son simplemente del toque personal de quien escribe.

El ejemplo es uno que podemos catalogar como *sencillo*. No queremos ahondar aquí en cómo hacer una reducción más o menos difícil, sino que queremos usar una bastante sencilla y directa para enfocarnos en cómo debemos hacer para demostrar que nuestra reducción es correcta. Los pasos son los mismos para toda reducción, más difícil, rebuscada o incluso más sencilla que la presentada a continuación. Aquí parecerá que nos estamos .explayando por demás en un ejercicio presuntamente obvio". Puede ser, pero queremos dejar bien en claro cuáles son los pasos a seguir independientemente de cuán fácil, complicada o brillante sea la reducción, porque los pasos son los mismos, y si les evaluamos un ejercicio así, con más razón estamos esperando que se esmeren en la correctitud de lo que escriben.

1. Problema

Coty cumplió años ayer y está organizando su festejo. En dicho festejo, va a dar unos regalos. Son regalos geniales, que van a dar que hablar luego del festejo. Eso es justamente lo que desea ella: que todos aquellos invitados que se conozcan entre sí, luego de terminado el evento hablen del regalo que recibió uno, o bien el otro. ¿El problema? Coty está invitando a n personas, pero no tiene presupuesto para comprar n regalos, sino tan sólo k.

El problema del cumpleaños de Coty puede enunciarse como: Dada la lista de n invitados al cumpleaños de Coty, un número k, y conociendo quién se conocen con quién (ej: una lista con los pares de conocidos), ¿existe una forma de asignar a lo sumo k personas para dar los regalos, de tal forma que todos los invitados, al hablar luego con quienes se conozcan, puedan hablar del regalo que obtuvo uno o bien el otro?

Demostrar que *el problema del cumpleaños de Coty* es un problema NP-Completo.

2. Resolución

Para demostrar que un problema es NP-Commpleto debemos:

- demostrar que se encuentra en NP.
- reducir un problema NP-Completo conocido a este problema.

2.1. El problema se encuentra en NP

Para que el problema se encuentre en NP, debe haber un *verificador eficiente*. Es decir, debe haber un verificador que ejecute en tiempo polinomial. El problema recibe una lista de invitados, así como una lista de pares de conocidos, además del valor de k.

En nuestro caso, presentamos el siguiente validador (solución es un conjunto con los invitados que son parte de la solución, valga la redundancia):

```python
def validador_cumple(invitados, conocidos, k, solucion):
    if len(solucion) > k:
        return False
    inv_set = set(invitados)
    for elem in solucion:
        if elem not in inv_set:
            return False

    for par in conocidos:
        inv1, inv2 = par
        if inv1 not in solucion and inv2 not in solucion:
            return False
    return True
```

Dicho algoritmo ejecuta en tiempo $\mathcal{O}(k + c + i)$, siendo c la cantidad de pares de conocidos, e i la cantidad de invitados al cumpleaños. Por lo tanto, ejecuta en tiempo polinomial a las variables del problema, lo cual quiere decir que se trata de un problema que se encuentra en NP.

2.2. Reducción de un problema NP-Completo

Ahora debemos elegir un problema NP-Completo para reducir a este. Haciendo un paréntesis, y volviendo a *modo docente*, cosas importantes a notar:

- Recordar reducir en el sentido correcto
- La reducción es una, no son 2. Se reduce el problema NP-Completo al nuestro, y se demuestra que esta es correcta, mostrando que es correcta de ambos lados. Hacer "la reducción inversa" no sólo puede ser muy difícil de hacer, sino que además no demuestra lo que queremos.
- Como indicamos en el punto anterior, hay que demostrar que nuestra reducción es correcta demostrando la doble implicación (o "sí sólo sí").
- En muchos ejercicios de este tema se suele o bien sugerir cuál es el problema que conviene utilizar para reducir, o bien directamente indicar cuál queremos que utilicen. En un caso como este, no se hace porque la reducción es bastante directa y también sencilla (entonces esperamos que sepan identificar un problema que es extremadamente equivalente).

Dicho esto, el problema NP-Completo que elegimos es *Vertex Cover*. Es decir, vamos a demostrar que:

$$VC \leq_P \mathit{CumpleCoty}$$

2.2.1. Reducción planteada

Vamos a utilizar una caja negra que resuelve *el problema del cumpleaños de Coty* (CC) para resolver *Vertex Cover* (VC). Este recibe un grafo y un valor k. Definimos entonces:

- Un invitado I_i por cada vértice V_i del grafo. Pasamos una lista con estos invitados.
- Un par de conocidos (I_i, I_j) si los vértices V_i y V_j a los que representan son adyacentes en nuestro grafo. Tenemos una lista de estos pares.
- El valor del k' del problema del cumpleaños coincide con el valor del k recibido por el problema de VC.

A continuación demostramos que la reducción es correcta. Para esto, debemos demostrar que:

Hay solución de VC tamaño a lo sumo $k \leftrightarrow$ Hay solución de CC tamaño a lo sumo k' en la reducción dada.

Demostramos ambas implicaciones. Esto lo hacemos por método directo, asumiendo para cada una que la hipótesis es cierta (por ejemplo, en el caso de "Hay solución de VC tamaño a lo sumo $k \rightarrow$ Hay solución de CC tamaño a lo sumo k' en la reducción dada. ", asumimos que hay solución a VC), y luego procedemos o bien a demostrar que necesariamente eso implica que el consecuente es verdadero, o bien que si asumimos que el consecuente es falso necesariamente llegamos a una contradicción (es decir, a un absurdo, matemáticamente hablando). Muchas veces la una y la otra son dos formas diferentes de escribir lo mismo. Aquí no nos queremos concentrar demasiado en si estamos usando método directo o por el absurdo para cada caso, pero es importante que sepan explicar la implicancia lógica de lo que están afirmando y demostrando.

Si alguien aún tiene dudas de por qué no es suficiente con *"demostrar que si hay VC, entonces hay CC"*, piensen que sino podría decir que reduzco VC a una función que sólo hace *return true*. Es cierto que cada vez que hay VC, dicha función devuelve *true*.

2.2.2. Si hay VC, hay CC

Si hay un VC de a lo sumo k vértices, eso implica que todas las aristas están cubiertas por uno u otro extremo por alguno de esos k vértices. Si nosotros decidiéramos que los invitados que corresponden a esos mismos vértices reciban regalo, ya que son a lo sumo k, cumple con esta misma restricción. A su vez, como las relaciones de conocidos establecidas fueran generadas dadas las aristas del grafo, no puede suceder que haya un par de invitados conocidos donde ninguno tenga regalo, porque eso implicaría que hay una arista en el grafo original en el que ningún extremo forma parte del conjunto del VC, lo cual es un absurdo.

2.2.3. Si hay CC, hay VC

Es importante notar que en este caso no estamos tomando cualquier instancia posible de CC, sino una que resulta de la reducción implementada (tal vez en un caso así no se nota tanto la importancia de esto, pero recomendamos revisar casos como la reducción de 3-SAT a IS, o bien a Coloreo, donde no tenemos çualquier instancia del problema de coloreo", sino una con las características dadas por la reducción).

Volviendo a la demostración, si tenemos un CC de a los sumo k' invitados, implica que todos los invitados pueden hablar con sus conocidos de su regalo, o el del conocido en cuestión, sólo dando k' regalos. Podemos definir que los vértices a elegir en el VC son los representados por los k' (o menos) invitados elegidos para darles regalos. Empezando por lo obvio, no pueden ser más que el k requerido por VC porque habíamos definido que $k' = k$. Luego, no puede existir una arista que no esté cubierta con esta selección. Nuevamente, yendo por el absurso, si decimos que existe una arista no cubierta dada esta selección, implica que esos dos vértices tienen invitados que, por un lado son *conocidos*, ya que tienen una arista en común y por lo tanto creamos esta relación de conocidos en nuestra reducción; y, por el otro lado, que ninguno de los dos tiene regalo (ninguno de los dos forma parte del grupo de invitados que recibieron regalo, porque sino en nuestra afirmación no sería cierto que ninguno está seleccionado). Esto implicaría que la solución brindada para CC no era correcta, lo cual es un absurdo ya que partimos de esa hipótesis. Entonces, necesariamente si hay CC, debe haber VC (todo de tamaño k).

2.2.4. Conclusión

Habiendo demostrado que la reducción es correcta, queda demostrado también que *el problema del cumpleaños de Coty* es un problema NP-Completo.