UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Lista de Exercícios - Matrizes

Prof. Helder G. G. de Lima[1]

Legenda

Cálculos Conceitos Teoria Software

Questões

1. Exiba matrizes quadradas A e B de ordem 2×2 que exemplifiquem as situações a seguir. Compare com o que ocorreria se A e B fossem números reais.

   (a) É possível que $A^2 = B^2$ mesmo que $A \neq B$ e $A \neq -B$.

   (b) $(AB)^2 \neq A^2B^2$.

   (c) Pode ocorrer que $A^2 = 0$ apesar de $A \neq 0$.

   (d) Há casos em que $AB = 0$ ao mesmo tempo em que $0 \neq A \neq B \neq 0$.

2. Seja $M = (m_{ij})$ a matriz de ordem 7×7 cujo termo geral é $m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \leq j, \\ 0, & \text{se } i > j. \end{cases}$

   Utilize a definição do produto de matrizes para obter uma fórmula (em função de i e j) para as seguintes entradas da matriz $C = M^2$:

   (a) c_{1j}, sendo $1 \leq j \leq 7$.

   (b) c_{4j}, quando $1 \leq j < 4$.

   (c) c_{4j}, quando $4 \leq j \leq 7$.

   (d) c_{ij}, quando $1 \leq j < i \leq 7$.

   (e) c_{ij}, quando $1 \leq i \leq j \leq 7$.

3. Uma matriz A é considerada **simétrica** se $A^T = A$ e **antissimétrica** se $A^T = -A$. Levando em conta as propriedades da transposição de matrizes, justifique as afirmações que forem verdadeiras e exiba um contraexemplo para as falsas:

   (a) Todas as entradas da diagonal de uma matriz antissimétrica devem ser nulas.

   (b) Não existem matrizes simétricas que também sejam antissimétricas.

   (c) Toda matriz simétrica é antissimétrica.

   (d) Toda matriz antissimétrica é simétrica.

   (e) Se uma matriz não é simétrica, então ela é antissimétrica.

4. Se A é uma matriz $p \times q$, B uma matriz $q \times r$ e C uma matriz $r \times q$, qual é o tamanho da matriz $M = (B + C^T)((AB)^T + CA^T)$?

5. Se X é uma matriz $m \times n$, para que valores de m e n as operações a seguir fazem sentido? Quais os tamanhos das matrizes obtidas? Quais delas são simétricas? Justifique.

(a) XX^T (b) X^TX (c) $X + X^T$ (d) $X^T + X$ (e) $X - X^T$

6. Justifique as afirmações verdadeiras e exiba um contraexemplo para as demais:

   (a) A matriz nula é uma matriz na forma escalonada reduzida por linhas.

   (b) A matriz identidade 4×4 está na forma escalonada reduzida por linhas.

   (c) Se uma matriz triangular superior é simétrica então ela é uma matriz diagonal.

   (d) Se U e V são matrizes diagonais, então $UV = VU$.

   (e) Se A é uma matriz antissimétrica, isto é, se $A^T = -A$, então A^T é antissimétrica.

   (f) Se A é uma matriz $n \times n$ antissimétrica, então sua diagonal é igual a zero.

   (g) Nenhuma matriz A $n \times n$ pode ser simétrica e antissimétrica simultaneamente.

7. Quantas matrizes diagonais D de ordem 2×2 satisfazem $D^2 = I$, isto é, quantas matrizes diagonais são "raízes quadradas" da matriz identidade de ordem 2? E se D for 3×3?

8. Encontre todas as matrizes diagonais D de ordem 3×3 tais que $D^2 - 7D + 10I = 0$.

9. Mostre que se S é uma matriz simétrica então S^2 também é simétrica. Decida se vale o mesmo para S^n, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, e explique sua conclusão.

10. Se M é uma matriz quadrada $n \times n$, a soma das entradas da diagonal de M é chamada de **traço** de M, e denotada por $\mathrm{tr}(M) = m_{11} + m_{22} + \ldots + m_{nn}$. Explique por que são válidas as seguintes afirmações, para quaisquer matrizes A e B e todo $c \in \mathbb{R}$:

    (a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

    (b) $\mathrm{tr}(c \cdot A) = c \cdot \mathrm{tr}(A)$

    (c) $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$

Respostas

1. Em todos os itens há uma infinidade de matrizes que exemplificam as afirmações feitas. Seguem alguns exemplos:

   (a) Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é verdade que $A^2 = I = B^2$, mas $A \neq B$ e $A \neq -B$.

   (b) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ então $(AB)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mas $A^2B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (c) Toda matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ satisfaz $C^2 = 0$, até mesmo quando $k \neq 0$ (e então $A \neq 0$).

   (d) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ então $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mas $0 \neq A \neq B \neq 0$.

2. (a) As entradas da primeira linha são dadas por $c_{1j} = j$ pois, por definição,

$$\begin{aligned} c_{1j} &= \underbrace{m_{11}m_{1j} + m_{12}m_{2j} + \ldots + m_{1j}m_{jj}}_{j \text{ parcelas}} + \underbrace{\ldots + m_{17}m_{7j}}_{7-j \text{ parcelas}} \\ &= \underbrace{1 + 1 + \ldots 1}_{j \text{ vezes}} + \underbrace{0 + \ldots 0}_{7-j \text{ vezes}} = j. \end{aligned}$$

   (b) Se $1 \leq j < 4$, então $c_{4j} = 0$ pois

$$\begin{aligned} c_{4j} &= m_{41}m_{1j} + m_{42}m_{2j} + m_{43}m_{3j} + m_{44}m_{4j} + \ldots + m_{47}m_{7j} \\ &= 0m_{1j} + 0m_{2j} + 0m_{3j} + 1m_{4j} + \ldots + 1m_{7j} \\ &= m_{4j} + \ldots + m_{7j} \\ &= 0 + \ldots + 0 = 0. \end{aligned}$$

   (c) Se $4 \leq j \leq 7$, então $c_{4j} = j - i + 1$.

   (d) Se $1 \leq j < i \leq 7$, então $c_{ij} = 0$.

   (e) Se $1 \leq i \leq j \leq 7$, então $c_{ij} = j - i + 1$.

3. (a) **Verdadeira**, pois dada uma matriz antissimétrica $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, tem-se $[A]_{ij} = [A^T]_{ji} = -[A]_{ji}$. Em particular, se $i = j$, vale $[A]_{ii} = -[A]_{ii}$, o que implica que $2[A]_{ii} = 0$, isto é, $[A]_{ii} = 0$. Assim, todas as entradas da diagonal de A são nulas.

   (b) **Falsa**, pois a matriz nula $0 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é simétrica e antissimétrica simultaneamente.

   (c) **Falsa**, pois $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ é simétrica mas não é antissimétrica.

   (d) **Falsa**, pois $D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ é antissimétrica mas não é simétrica.

   (e) **Falsa**, pois $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ não é uma matriz simétrica mas não é antissimétrica.

4. A matriz $(B + C^T)((AB)^T + CA^T)$ tem tamanho $q \times p$, pois

   - B e C^T têm tamanho $q \times r$, de modo que $B + C^T$ também é $q \times r$.
   - AB têm tamanho $p \times r$, de modo que $(AB)^T$ é $r \times p$.
   - A^T têm tamanho $q \times p$, de modo que CA^T é $r \times p$.

- O produto de qualquer matriz $q \times r$ por uma matriz $r \times p$ tem tamanho $q \times p$.

5. (a) Para quaisquer m e n, se X é $m \times n$ então sua transposta X^T é $n \times m$. Em particular, o número de colunas de X é sempre igual ao número de linhas de X^T, e estas matrizes podem ser multiplicadas (nesta ordem), gerando um produto que é $m \times m$. Além disso, XX^T é simétrica pois

$$(XX^T)^T = (X^T)^T X^T = XX^T.$$

(b) De forma análoga ao item anterior, o número de colunas de X^T é sempre igual ao número de linhas de X, e estas matrizes podem ser multiplicadas (nesta ordem), desta vez gerando um produto que é $n \times n$. Além disso, $X^T X$ também é simétrica:

$$(X^T X)^T = X^T (X^T)^T = X^T X.$$

(c) Para que seja possível calcular $X + X^T$, é necessário que X e X^T tenham o mesmo tamanho. Como uma delas é $m \times n$ e a outra é $n \times m$, a adição só será possível se $m = n$. Neste caso, a soma será uma matriz simétrica, pois

$$(X + X^T)^T = X^T + (X^T)^T = X^T + X = X + X^T.$$

(d) Como no item anterior, para que $X^T + X$ faça sentido é preciso que X e X^T tenham o mesmo tamanho, isto é, que $m = n$. Neste caso, a soma também será uma matriz simétrica, já que

$$(X^T + X)^T = (X^T)^T + X^T = X + X^T = X^T + X.$$

(e) Novamente, é preciso que $m = n$ para que a operação $X - X^T$ seja possível. No entanto, neste caso

$$(X - X^T)^T = X^T - (X^T)^T = X^T - X = -(X - X^T).$$

No entanto, $D = X - X^T$ só será igual a $-(X - X^T)$ se $d_{ij} = -d_{ij}$, para cada i, j, e isso só é possível se todos os d_{ij} forem nulos. Em outras palavras, $X - X^T$ só é uma matriz simétrica se $X - X^T = 0$.

6. (a) A matriz nula é uma matriz na forma escalonada reduzida por linhas, pois
   - Não há nenhuma linha não nula em que o primeiro elemento não nulo seja diferente de 1 (nem sequer existem linhas não nulas);
   - Todas as linhas nulas estão na parte inferior
   - Não há pivôs mais a esquerda dos pivôs de linhas anteriores (já que não há pivôs)
   - Não há elementos não nulos acima ou abaixo de nenhum pivô

(b) A matriz identidade $I_{4\times 4}$ está na forma escalonada reduzida por linhas pois
   - Em todas as linhas o o primeiro elemento não nulo é 1;
   - Não há linhas nulas
   - Todos os pivôs estão na diagonal
   - Exceto pelos pivôs que estão na diagonal, as colunas só contém zeros

(c) Em uma matriz triangular superior $S \in M_{n\times n}(K)$, todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja, $s_{ij} = 0$ sempre que $i > j$. Se S é simétrica, então $s_{ij} = s_{ji}$, sendo $1 \leq i, j \leq n$. Em particular, se $i < j$ então $s_{ij} = s_{ji} = 0$, pois $j > i$. Logo, T é uma matriz diagonal, já que $s_{ij} = 0$ sempre que que $i > j$ ou $i < j$, isto é, para $i \neq j$.

(d) Se $U, V \in M_{m\times m}(K)$ são matrizes diagonais, então $UV = VU$. De fato, se $i \neq j$ então $u_{ij} = v_{ij} = 0$ e além disso

$$[UV]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} u_{ik}v_{kj} = u_{i1}v_{1j} + u_{i2}v_{2j} + \ldots + u_{im}v_{mj}.$$

Nesta soma, tem-se $u_{ik} = 0$, exceto possivelmente quando $k = i$. Mesmo assim, a parcela $u_{ii}v_{ij}$ será nula, pois $k = i \neq j \Rightarrow v_{kj} = v_{ij} = 0$. Assim, todos os termos da soma são nulos, e as entradas $[UV]_{ij}$ são nulas sempre que $i \neq j$. De forma análoga, tem-se $[VU]_{ij} = 0$ para $i \neq j$, ou seja, UV e VU coincidem fora da diagonal principal. Por outro lado, na diagonal principal tem-se $i = j$ e então

$$[UV]_{ij} = u_{ii}v_{ii} = v_{ii}u_{ii} = [VU]_{ij}.$$

(e) Seja A antissimétrica. Então $A^T = -A$ e resulta que $\left(A^T\right)^T = A = -A^T$, ou seja, A^T também é antissimétrica.

(f) Dada uma matriz antissimétrica $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, tem-se $[A]_{ij} = [A^T]_{ji} = -[A]_{ji}$. Em particular, se $i = j$, vale $[A]_{ii} = -[A]_{ii}$, o que implica que $2[A]_{ii} = 0$, isto é, $[A]_{ii} = 0$. Assim, todas as entradas da diagonal de A são nulas.

(g) A matriz nula $0 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é simétrica e antissimétrica simultaneamente.

7. Seja $D \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uma matriz diagonal. Então $D = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e tem-se

$$D^2 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} x_1^2 & 0 \\ 0 & x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, os escalares x_1 e x_2 satisfazem $x_i^2 = 1$, ou seja, $x_i = 1$ ou $x_i = -1$. Logo, D pode ser uma destas 4 matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

No caso de matrizes 3×3, cada uma das três entradas da diagonal pode ser igual a 1 ou a -1, e consequentemente $I = I_3$ tem 8 raízes quadradas distintas.

8. Seja $D \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz diagonal. Então $D = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix}$, com $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ e tem-se

$$\begin{aligned} D^2 - 7D + 10I &= \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix}^2 - 7\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1^2 - 7x_1 + 10 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 - 7x_2 + 10 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 - 7x_3 + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, se $D^2 - 7D + 10I = 0$ os escalares x_1, x_2 e x_3 são soluções de $x_i^2 - 7x_i + 10 = 0$, ou seja, de $(x_i - 2)(x_i - 5) = 0$. Portanto, cada x_i pode assumir os valores 2 ou 5, e há as seguintes possibilidades para D:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

9. Seja S uma matriz simétrica $n \times n$, isto é, $S^T = S$. As entradas de S^2 e de $(S^2)^T$, são dadas por

$$[S^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}s_{kj} = s_{i1}s_{1j} + s_{i2}s_{2j} + \ldots + s_{in}s_{nj} \tag{1}$$

e

$$[(S^2)^T]_{ij} = [S^2]_{ji} = \sum_{k=1}^{n} s_{jk}s_{ki} = s_{j1}s_{1i} + s_{j2}s_{2i} + \ldots + s_{jn}s_{ni}$$

respectivamente. Mas as entradas de S satisfazem a igualdade $s_{ij} = s_{ji}$, então resulta desta última equação, permutando os índices de cada termo, que

$$\begin{aligned}[(S^2)^T]_{ij} &= s_{j1}s_{1i} + s_{j2}s_{2i} + \ldots + s_{jn}s_{ni}\\ &= s_{1j}s_{i1} + s_{2j}s_{i2} + \ldots + s_{nj}s_{in}\\ &= s_{i1}s_{1j} + s_{i2}s_{2j} + \ldots + s_{in}s_{nj},\end{aligned}$$

onde a última igualdade deve-se à propriedade comutativa dos escalares s_{ij}. Comparando com (1), conclui-se que $[(S^2)^T]_{ij} = [S^2]_{ij}$, ou seja, que $(S^2)^T = S^2$, o que significa que S^2 é simétrica.

Observação: Para uma verificação mais direta, sem comparar entradas individuais das matrizes, poderia ser usada o fato de que $(AB)^T = B^T A^T$:

$$(S^2)^T = (SS)^T = S^T S^T = SS = S^2.$$

Por este raciocínio fica fácil ver que as potências de uma matriz simétrica são simétricas:

$$(S^n)^T = (S \cdot \ldots \cdot S)^T = S^T \cdot \ldots \cdot S^T = S \cdot \ldots \cdot S = S^n.$$

10. (a) Usando a definição de traço e as propriedades da adição, resulta que:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A+B) &= [A+B]_{11} + [A+B]_{22} + \ldots + [A+B]_{nn}\\ &= ([A]_{11} + [A]_{11}) + ([A]_{22} + [B]_{22}) + \ldots + ([A]_{nn} + [B]_{nn})\\ &= ([A]_{11} + \cdots + [A]_{nn}) + ([B]_{11} + \ldots + [B]_{nn})\\ &= \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B).\end{aligned}$$

(b) Segue da definição de traço e das propriedades da multiplicação por escalar que:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(cB) &= [cA]_{11} + [cA]_{22} + \ldots + [cA]_{nn}\\ &= c[A]_{11} + c[A]_{22} + \ldots + c[A]_{nn}\\ &= c([A]_{11} + \cdots + [A]_{nn})\\ &= c \cdot \mathrm{tr}(A).\end{aligned}$$

(c) Como a diagonal principal não é alterada pela transposição de matrizes, e o traço só depende destas entradas, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A^T) &= [A^T]_{11} + [A^T]_{22} + \ldots + [A^T]_{nn}\\ &= [A]_{11} + [A]_{22} + \ldots + [A]_{nn}\\ &= \mathrm{tr}(A).\end{aligned}$$