UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
JOINVILLE
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Lista de Exercícios - Sistemas Lineares

Prof. Helder G. G. de Lima[1]

Legenda

Cálculos   Conceitos   Teoria   Software

Questões

1. Obtenha a forma escalonada reduzida por linhas da matriz de coeficientes de cada um dos sistemas lineares a seguir, e partir dela determine as soluções dos sistemas:

   (a) $$\begin{cases} 5s - 5\pi t = -5\pi^2 \\ -s + (\pi+3)t = \pi(\pi+6) \end{cases}$$

   (b) $$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 16 \\ 5x_2 - 15x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ -x_2 + 8x_4 = 3/5 \end{cases}$$

   (c) $$\begin{cases} 3x_1 - 12x_2 - 6x_3 + 9x_5 = -21 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 7 \\ \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - \frac{3}{2}x_5 = -\frac{5}{2} \\ -7x_1 + 28x_2 + 15x_3 - 23x_5 = 53 \end{cases}$$

   (d) $$\begin{cases} b + 6c = 6 \\ a + 6b - 5c = -3 \\ 3a + 20b - 3c = 1 \end{cases}$$

2. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 5x + y = 7 \end{cases}$$

   e utilize um software como o GeoGebra[2] para:

   (a) Plotar o conjunto A formado pelos pontos (x, y) cujas coordenadas satisfazem a primeira equação e o conjunto B dos que verificam a segunda equação.
   Dica: Não é preciso um comando especial para representar equações polinomiais no GeoGebra. Basta digitá-las diretamente (mesmo se forem como `5xy^2+2y^3x^2=1`).

   (b) Alterar algumas vezes os números do segundo membro, e perceber o tipo de mudança que ocorre na representação gráfica de A e B.

   (c) Verificar se com alguma escolha de valores os conjuntos se intersectam. Parece ser possível que isso não aconteça dependendo dos valores escolhidos?
   Dica: O comando `Interseção[p, q]` gera a interseção dos objetos `p` e `q`.

3. Repita o exercício anterior para o seguinte sistema, em uma janela de visualização 3D:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + y + 5z = 7 \end{cases}$$

[2]https://www.geogebra.org/download/

4. Considere os seguintes sistemas lineares nas variáveis $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y &= 6 \\ 2x - cy &= 0 \end{cases} \qquad (1) \qquad\qquad \begin{cases} x + 2y = 6 \\ -cx + y = 1 - 4c \end{cases} \qquad (2)$$

   (a) Determinar para quais valores de c os sistemas lineares têm uma, nenhuma ou infinitas soluções.

   (b) Obtenha as mesmas conclusões sobre c experimentalmente, usando o GeoGebra. **Dica**: defina por exemplo `c=10` e use o botão direito do mouse para tornar o número visível como um "controle deslizante" e mova-o para ver o efeito deste parâmetro.

5. Seja $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a matriz associada a um sistema linear homogêneo. Utilize a eliminação de Gauss-Jordan para provar que se $ad - bc \neq 0$ então o sistema possui somente a solução trivial.

Respostas

1. (a) A matriz aumentada associada ao sistema dado é $A = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -5\pi & -5\pi^2 \\ -1 & \pi+3 & \pi(\pi+6) \end{array}\right]$ e sua forma escalonada reduzida é obtida por meio das seguintes operações elementares sobre as linhas:

$$A \xrightarrow{\frac{1}{5}L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\pi & -\pi^2 \\ -1 & \pi+3 & \pi(\pi+6) \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\pi & -\pi^2 \\ 0 & 3 & 6\pi \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{3}L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\pi & -\pi^2 \\ 0 & 1 & 2\pi \end{array}\right] \xrightarrow{L_1+\pi L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 1 & 2\pi \end{array}\right]$$

Esta última matriz está associada às equações

$$\begin{cases} s = \pi^2 \\ t = 2\pi \end{cases},$$

e, portanto, $S = \{(\pi^2, 2\pi)\}$ é o conjunto das soluções do sistema proposto.

(b) A redução à forma escalonada reduzida da matriz associada ao sistema é obtida através das seguintes operações elementares:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 0 & -15 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 3/5 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -15 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 3/5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-2L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -15 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 3/5 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{5}L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 3/5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4+L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}L_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_2+3L_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1-L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{array}\right]$$

Esta última matriz está associada às equações

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 1/5 \end{cases},$$

de modo que $S = \{(3, 1, 4, 1/5)\}$ é o conjunto das soluções do sistema proposto.

(c) A redução à forma escalonada reduzida da matriz associada ao sistema é obtida através das seguintes operações elementares:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -12 & -6 & 0 & 9 & -21 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & -3 & 7 \\ 1/2 & -2 & -1 & 1 & -3/2 & -5/2 \\ -7 & 28 & 15 & 0 & -23 & 53 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}L_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -7 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & -3 & 7 \\ 1/2 & -2 & -1 & 1 & -3/2 & -5/2 \\ -7 & 28 & 15 & 0 & -23 & 53 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{L_3-\frac{1}{2}L_1 \\ L_4+7L_1}}{\xrightarrow{L_2+L_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1+2L_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta última matriz está associada às equações

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_5 = 1 \\ x_3 - 2x_5 = 4 \\ x_4 - 3x_5 = 1 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Logo, o conjunto das soluções do sistema proposto é

$$\begin{aligned} S &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 1 + 4x_2 + x_5, x_2 = 4 + 2x_5, x_4 = 1 + 3x_5\} \\ &= \{(1 + 4x_2 + x_5, 4 + 2x_5, x_3, 1 + 3x_5, x_5) \mid x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(d) A matriz aumentada associada ao sistema dado é $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & -5 & -3 \\ 3 & 20 & -3 & 1 \end{array}\right]$ e sua forma escalonada reduzida é obtida por meio das seguintes operações elementares sobre as linhas:

$$[A|B] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \\ 3 & 20 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 12 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{2}L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1+3L_3}{\xrightarrow{L_2-6L_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1-6L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -41 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como a última linha corresponde a uma equação da forma $0 = 1$, o sistema é impossível, ou seja, $S = \emptyset$.

2. (a) Digite `2x-3y=-4` para que o GeoGebra mostre a reta formada pelos pontos que satisfazem a primeira equação, e `5x+y=7` para representar a segunda reta.

(b) Ao trocar o -4 por um número maior, a reta correspondente se desloca para baixo, mantendo-se paralela à reta original. Ao diminuir este valor, a reta se desloca paralelamente para cima. Na segunda equação, a troca de 7 por um número maior resulta em um deslocamento para a direita, e a diminuição deste valor desloca a reta para a esquerda.

(c) As retas, que inicialmente se intersectam em $(1, 2)$, têm sempre um ponto em comum, independentemente dos valores atribuídos ao segundo membro das equações. Isso reflete o fato de que as duas equações correspondem a retas que não são paralelas entre si, e sua direção permanece inalterada mesmo quando o segundo membro é modificado.

3. (a) Digite `x-y+z=1` para que o GeoGebra mostre o plano formado pelos pontos (x, y, z) que satisfazem a primeira equação, e então `2x+y+z=4` e `x+y+5z=7` para representar os planos correspondentes às demais equações.

   (b) A trocar os valores do segundo membro de cada equação, o plano correspondente desloca-se no espaço mantendo-se paralelo à sua posição original.

   (c) Como os planos se intersectam inicialmente no ponto $(1, 1, 1)$, e sempre permanecem paralelos às suas posições iniciais, continua existindo um único ponto de interseção, quaisquer que sejam os valores do segundo membro do sistema.

4. (a) i. A matriz aumentada associada ao primeiro sistema pode ser levada à sua forma escalonada reduzida por linhas por meio das seguintes operações elementares:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -c & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2-2L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -c-4 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-1}{c+4}L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{12}{c+4} \end{array}\right] \xrightarrow{L_1-2L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{6c}{c+4} \\ 0 & 1 & \frac{12}{c+4} \end{array}\right]$$

Se $c = -4$ a segunda operação deixa de ser possível, e o sistema não tem solução. Por outro lado, se $c \neq -4$, todos os passos podem ser realizados e conclui-se que o sistema é possível e determinado, tendo como única solução o ponto $\left(\frac{6c}{c+4}, \frac{12}{c+4}\right)$.

ii. A matriz aumentada associada ao segundo sistema pode ser levada à sua forma escalonada reduzida por linhas por meio das seguintes operações elementares:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ -c & 1 & 1-4c \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+cL_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1+2c & 1+2c \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{1+2c}L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1-2L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Desta vez, se $c = -1/2$ a segunda linha zera após a primeira operação elementar, e o sistema tem mais de uma solução. De fato, o escalonamento mostra que o sistema original é equivalente a um sistema formado pela primeira equação e por uma equação do tipo $0 = 0$, que não impõe qualquer restrição sobre os valores de x e y. Assim, todo par da forma $(6 - 2y, y)$, com $y \in \mathbb{R}$, é solução deste sistema possível e indeterminado.

Por outro lado, nos casos em que $c \neq -1/2$, os três passos da eliminação de Gauss-Jordan podem ser realizados, e a conclusão é de que o sistema possui como única solução o ponto $(4, 1)$, sendo então possível e determinado.

(b) i. Geometricamente, nota-se que conforme o valor de c vai se aproximando de $c = -4$ a reta que corresponde à segunda equação gira em torno da origem até ficar paralela à reta da primeira equação. Quando isso ocorre, não há um ponto de interseção. Nos demais casos, as retas se intersectam em um único ponto.

ii. Geometricamente, ao variar o valor de c, uma das retas gira em torno do ponto $(4, 1)$, em que elas se intersectam, e em um caso específico (quando $c = -1/2$) as duas retas coincidem, fazendo com que todos os seus pontos sejam pontos de interseção.

5. Há duas possibilidades, dependendo das entradas da primeira coluna:

(a) Se $a \neq 0$ então a redução à forma escalonada reduzida começa com as seguintes operações elementares:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{a}L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ c & d & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - cL_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & d - c\frac{b}{a} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & 0 \end{array}\right]$$

Neste ponto, a hipótese de que $ad - bc \neq 0$ pode ser usada para concluir a eliminação:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{a}{ad-bc}L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - \frac{b}{a}L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, o sistema $MX = 0$ só tem a solução trivial $X = 0$.

(b) Se $a = 0$ então uma troca da primeira linha com a segunda faz com que o problema recaia no caso anterior, em que a primeira entrada da primeira linha não é zero. Note que neste caso c não será zero, pois senão ocorreria $ad - bc = 0 \cdot d - b \cdot 0 = 0$.

Observação: Note que $ad - bc$ é justamente a fórmula do determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.