UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Lista de Exercícios - Matrizes Inversas

Prof. Helder G. G. de Lima[1]

Legenda

Cálculos Conceitos Teoria Software

Questões

1. Exiba matrizes quadradas A e B de ordem 2×2 que exemplifiquem as situações a seguir. Compare com o que ocorreria se A e B fossem números reais.

   (a) Mesmo que $A \neq B$ pode existir uma matriz P tal que $A = P^{-1}BP$.

2. Calcule, se existir, a inversa de cada uma das matrizes a seguir:

   (a) $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

3. Calcule a matriz inversa de $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e verifique que $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$.

4. Se $M = PQP^{-1}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 20 & -7 \\ 3 & 1 & 21 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -7 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $\det(M)$.

5. Dê exemplos de matrizes A e B tais que

   (a) $A + B$ seja inversível, mas A e B não sejam

   (b) A e B sejam inversíveis, mas $A + B$ não seja

   (c) A, B e $A + B$ sejam inversíveis

6. Utilize matrizes inversas para resolver os seguintes sistemas lineares (quando for possível).

   (a) $\begin{cases} 5s - 5\pi t = -5\pi^2 \\ -s + (\pi + 3)t = \pi(\pi + 6) \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 16 \\ 5x_2 - 15x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ -x_2 + 8x_4 = 3/5 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x_1 - 12x_2 - 6x_3 + \phantom{\frac{3}{2}}9x_5 = -21 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 - \phantom{\frac{3}{2}}3x_5 = 7 \\ \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - \frac{3}{2}x_5 = -\frac{5}{2} \\ -7x_1 + 28x_2 + 15x_3 - 23x_5 = 53 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} b + 6c = 6 \\ a + 6b - 5c = -3 \\ 3a + 20b - 3c = 1 \end{cases}$

7. Resolva os seguintes sistemas lineares sobre $\mathbb{R}$, usando matrizes inversas:

   (a) $\begin{cases} -y + 5z = 2 \\ x + 2y + 3z = 7 \\ 2x + 4y + 5z = 13 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -v + 5w = 0 \\ u + 2v + 3w = 0 \\ 2u + 4v + 5w = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} -q + 5r = -2 \\ p + 2q + 3r = 3 \\ 2p + 4q + 5r = 1 \end{cases}$

8. Suponha que $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ são tais que $MX = I_{3\times 3}$. Determine X, por meio da comparação das entradas de MX e I, e depois calcule XM.

9. Em um software de computação numérica (GNU Octave[2], o Scilab[3], MatLab, etc):

   (a) Sortear ao acaso 10 matrizes de ordem 7×7 e verificar quantas delas são inversíveis. **Dica**: o comando `rand(m,n)` gera aleatoriamente uma matriz de ordem $m \times n$, e o comando `det(A)` calcula o determinante da matriz A.

   (b) Repetir o experimento anterior com matrizes quadradas de algum outro tamanho. O que ocorre com a maioria das matrizes em cada uma das dimensões consideradas?

   (c) Escolher matrizes triangulares superiores A_2, A_3 e A_4 de ordens 2×2, 3×3 e 4×4 respectivamente, todas com zeros na diagonal e então:

      i. Calcular as potências A_2^2, A_3^3 e A_4^4.

      ii. Com base nos resultados obtidos, formule uma conjectura a respeito da n-ésima potência das matrizes triangulares superiores $n \times n$, com zeros na diagonal.

      iii. Prove que o seu palpite é realmente válido para **qualquer** matriz nas condições acima (pelo menos nos casos 2×2 e 3×3).

10. Para que valor(es) de $t \in \mathbb{R}$ a matriz $T = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 1 \\ -1 & t & 3 \\ -1 & 9 & t+1 \end{bmatrix}$ é inversível? Qual é a inversa?

11. Existe algum $t \in \mathbb{R}$ para o qual $N = \begin{bmatrix} 2-t & 0 & -4 \\ 6 & 1-t & -15 \\ 2 & 0 & -4-t \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ não é inversível?

[2] https://www.gnu.org/software/octave/download.html
[3] http://www.scilab.org/download/latest

Respostas

1. Há uma infinidade de matrizes que exemplificam a afirmação feita. Segue um exemplo:

   (a) Se $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ então $A = P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ é diferente de B.

2. (a) $D^{-1} = \begin{bmatrix} -23 & -2 & -13 \\ -9 & -1 & -5 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

   (b) $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

   (c) $U^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

3. $\det(P^{-1}) = -1/8 = \dfrac{1}{-8} = \dfrac{1}{\det(P)} = \det(P)^{-1}$

4. $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $\det(M) = \det(P)\det(Q)\det(P^{-1}) = \frac{\det(P)\det(Q)}{\det(P)} = \det(Q) = -1$

5. (a) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, que é inversível. Porém, A e B não são inversíveis, já que possuem uma coluna de zeros.

   (b) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, então $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ não é inversível, pois $AX = 0$ tem uma solução não nula $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Porém, $A = A^{-1}$ e $B = B^{-1}$ são inversíveis.

   (c) Se $A = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $A+B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e as matrizes A, B e $A+B$ são inversíveis, sendo $A^{-1} = B^{-1} = I$ e $(A+B)^{-1} = (2I)^{-1} = \frac{1}{2}I$.

6. (a) Primeiro é preciso determinar a inversa de A, e para isso serão usadas as mesmas operações elementares que produziram a forma escalonada reduzida de A:

$$\begin{bmatrix} 5 & -5\pi & 1 & 0 \\ -1 & \pi+3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}L_1} \begin{bmatrix} 1 & -\pi & 1/5 & 0 \\ -1 & \pi+3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+L_1} \begin{bmatrix} 1 & -\pi & 1/5 & 0 \\ 0 & 3 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{3}L_2} \begin{bmatrix} 1 & -\pi & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/15 & 1/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1+\pi L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5+\pi/15 & \pi/3 \\ 0 & 1 & 1/15 & 1/3 \end{bmatrix}$$

   Assim, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5+\pi/15 & \pi/3 \\ 1/15 & 1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3+\pi & 5\pi \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Sempre que $AX = B$ e A é inversível, vale $X = A^{-1}B$. Assim, para $B = \begin{bmatrix} -5\pi^2 \\ \pi(\pi+6) \end{bmatrix}$, tem-se

$$X = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3+\pi & 5\pi \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5\pi^2 \\ \pi(\pi+6) \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -5\pi^2(3+\pi) + 5\pi^2(\pi+6) \\ -5\pi^2 + 5\pi(\pi+6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi^2 \\ 2\pi \end{bmatrix}.$$

(b) Primeiro, determina-se A^{-1} usando as mesmas operações elementares que produziram a forma escalonada reduzida de A:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4+L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}L_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/25 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2+3L_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8/25 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/25 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1-L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -8/25 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8/25 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/25 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Assim, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -8/25 & 0 & -3/5 \\ 0 & 8/25 & 0 & 3/5 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/25 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 25 & -32 & 0 & -60 \\ 0 & 32 & 0 & 60 \\ -50 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 20 \end{bmatrix}$ e a solução $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ do sistema é obtida através da seguinte multiplicação:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 25 & -32 & 0 & -60 \\ 0 & 32 & 0 & 60 \\ -50 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \\ 12 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 300 \\ 100 \\ 400 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

(c) A matriz (não aumentada) associada ao sistema não é quadrada.

(d) A matriz associada ao sistema não é inversível, pois sua forma escalonada reduzida não é a matriz identidade.

7. Os três sistemas podem ser escritos na forma $AX = B$ com uma mesma matriz $A =$

$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, então será preciso calcular apenas uma matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 2L1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L2 + 5L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - 3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -25 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Disto resulta que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -25 & 13 \\ -1 & 10 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Se $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$ então: $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -25 & 13 \\ -1 & 10 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) Se $X = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ então $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ pois A é inversível.

(c) Se $X = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ então: $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -25 & 13 \\ -1 & 10 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -66 \\ 27 \\ 5 \end{bmatrix}$.

8. Como

$$MX = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+2d+3g & -b+2e+3h & -c+2f+3i \\ 2a-4d+5g & 2b-4e+5h & 2c-4f+5i \\ -a+d+7g & -b+e+7h & -c+f+7i \end{bmatrix}$$

e por hipótese $MX = I$, uma comparação das entradas de MX com as de I mostra que as incógnitas que formam as colunas de X devem ser soluções dos sistemas lineares

$$\begin{cases} -a+2d+3g = 1 \\ 2a-4d+5g = 0 \\ -a+\ \ d+7g = 0 \end{cases}, \begin{cases} -a+2d+3g = 0 \\ 2a-4d+5g = 1 \\ -a+\ \ d+7g = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} -a+2d+3g = 0 \\ 2a-4d+5g = 1 \\ -a+\ \ d+7g = 0 \end{cases}.$$

Como todos os sistemas têm a mesma matriz de coeficientes, os três podem ser escalonados simultaneamente como segue:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3+L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{11}L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/11 & 1/11 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+4L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 19/11 & 4/11 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/11 & 1/11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1+3L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -5/11 & 3/11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 19/11 & 4/11 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/11 & 1/11 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1+2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 19/11 & 4/11 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/11 & 1/11 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $X = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 19/11 & 4/11 & -1 \\ 2/11 & 1/11 & 0 \end{bmatrix}$. Multiplicando esta matriz à esquerda de M, obtém-se:

$$XM = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 19/11 & 4/11 & -1 \\ 2/11 & 1/11 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Isto quer dizer que a matrix X que atua como inversa à direita de A também é uma inversa à esquerda de A, pois ambos os produtos (AX e XA) resultam na matriz identidade.

9. (a) Ao sortear 10 matrizes 7×7 *aleatoriamente*, é bem provavel que **todas** as matrizes obtidas sejam inversíveis (execute o comando mais de 10 vezes se não estiver convencido).

   (b) Repetindo o experimento com matrizes quadradas de qualquer outro tamanho, há grandes chances de não encontrar uma única matriz que não seja inversível. De fato, ao sortear *aleatoriamente* uma matriz quadrada, há **probabilidade zero** (não é só pequena, é zero!) de ser escolhida uma matriz não inversível. Elas são raras, mas pode se deparar com elas se estiver com sorte (ou se o sorteio não for realmente aleatório).

   (c) Sejam $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Então:

i.

$$
\begin{aligned}
A_2^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
A_3^3 &= \left(\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
A_4^4 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

ii. Com base nos exemplos anteriores, é natural suspeitar que a n-ésima potência de uma matriz triangular superior $n \times n$ qualquer, com zeros na diagonal, é sempre a matriz nula $n \times n$.

iii. As matrizes triangulares superiores de tamanho 2×2, com zeros na diagonal, têm a forma $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, em que c pode ser qualquer escalar. Então:

$$
A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Já no caso 3×3, tem-se $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e então:

$$
A_3^3 = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Mais geralmente, se $A = (a_{ij})$ for uma matriz triangular superior de tamanho $n \times n$ com diagonal nula, então as primeiras i entradas da linha i são todas nulas. Ao elevar A ao quadrado, a matriz obtida terá as primeiras $i+1$ entradas da linha i iguais a zero. Analogamente, ao calcular A^3, a matriz resultante terá $i+2$ entradas da linha i igual a zero. Como a matriz tem n colunas, procedendo desta maneira até obter A^n o resultado final será uma matriz com zeros em todas as n colunas de cada linha.

$$
\overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \mathbf{0} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}}^{A} \rightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}^{A^2} \dots \rightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}^{A^n}
$$

O padrão acima também pode ser percebido ao calcular explicitamente as entradas dos produtos. Como a matriz A é triangular superior e tem zeros na diagonal, tem-se $a_{ij} = 0$ sempre que $i \geq j$. Consequentemente, se $i \geq j-1$ a entrada ij de A^2 é dada por

$$\begin{aligned}[A^2]_{ij} = [A \cdot A]_{ij} &= (a_{i1}a_{1j} + \ldots + a_{ii}a_{ij}) + (a_{i,i+1}a_{i+1,j} + \ldots + a_{in}a_{nj}) \\ &= (0a_{1j} + \ldots + 0a_{ij}) + (a_{i,i+1}0 + \ldots + a_{in}0) = 0.\end{aligned}$$

Do mesmo modo, $[A^3]_{ij} = 0$ para $i \geq j-2$:

$$\begin{aligned}[A^3]_{ij} = [A^2 \cdot A]_{ij} &= ([A^2]_{i1}a_{1j} + \ldots + [A^2]_{i,i+1}a_{i+1,j}) \\ &\quad + ([A^2]_{i,i+2}a_{i+2,j} + \ldots + [A^2]_{in}a_{nj}) \\ &= (0a_{1j} + \ldots + 0a_{i+1,j}) + ([A^2]_{i+2,j+1}0 + \ldots + [A^2]_{in}0) = 0.\end{aligned}$$

Procedendo da mesma maneira até a n-ésima potência de A, consegue-se todas as entradas iguais a zero.

10. Para que a matriz $T = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 1 \\ -1 & t & 3 \\ -1 & 9 & t+1 \end{bmatrix}$ seja inversível, sua forma escalonada reduzida por linhas deve ser a matriz identidade. Procedendo com a eliminação de Gauss-Jordan, seriam realizadas as seguintes operações elementares sobre as linhas:

$$\begin{bmatrix} -1 & 9 & 1 \\ -1 & t & 3 \\ -1 & 9 & t+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_1} \begin{bmatrix} 1 & -9 & -1 \\ -1 & t & 3 \\ -1 & 9 & t+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+L_1} \begin{bmatrix} 1 & -9 & -1 \\ 0 & t-9 & 2 \\ -1 & 9 & t+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3+L_1} \begin{bmatrix} 1 & -9 & -1 \\ 0 & t-9 & 2 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Neste ponto, para conseguir um pivô igual a 1 na segunda coluna da segunda linha, seria necessária uma divisão da segunda linha por $t-9$, e isso significa que se $t = 9$ a matriz não será inversível. Além disso, no passo seguinte, será necessário dividir a terceira linha por t, de modo que para $t = 0$ a matriz também não será inversível. Supondo que $t \neq 0$ e $t \neq 9$, basta realizar mais algumas operações elementares e obtém-se a identidade:

$$\begin{bmatrix} 1 & -9 & -1 \\ 0 & t-9 & 2 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{t-9}L_2} \begin{bmatrix} 1 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{t-9} \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{t}L_3} \begin{bmatrix} 1 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{t-9} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2-\frac{2}{t-9}L_3} \begin{bmatrix} 1 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1+L_3} \begin{bmatrix} 1 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1+9L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, T é inversível se, e somente se, $t \notin \{0, 9\}$. Aplicando a mesma sequência de operações elementares à matriz identidade, o resultado é a inversa de T: 0

$$I \xrightarrow{-L_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+L_1]{L_2+L_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{t}L_3]{\frac{1}{t-9}L_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{t-9} & \frac{1}{t-9} & 0 \\ \frac{-1}{t} & 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2-\frac{2}{t-9}L_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2-t}{(t-9)t} & \frac{1}{t-9} & \frac{-2}{(t-9)t} \\ \frac{-1}{t} & 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1+L_3} \begin{bmatrix} \frac{-t-1}{t} & 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{2-t}{(t-9)t} & \frac{1}{t-9} & \frac{-2}{(t-9)t} \\ \frac{-1}{t} & 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1+9L_2} \begin{bmatrix} \dfrac{-t^2-t+27}{(t-9)t} & \dfrac{9}{t-9} & \dfrac{t-27}{(t-9)t} \\ \dfrac{2-t}{(t-9)t} & \dfrac{1}{t-9} & \dfrac{-2}{(t-9)t} \\ \dfrac{-1}{t} & 0 & \dfrac{1}{t} \end{bmatrix} = T^{-1}.$$

11. As operações elementares a seguir mostram que N é equivalente por linhas à identidade, desde que seja possível dividir por $1-t$ e depois por $t(t+2)$. Isto significa que para $t \in \{-2, 0, 1\}$ a matriz N não é inversível, pois apareceria uma linha nula em um dos passos da eliminação de Gauss-Jordan.

$$N = \begin{bmatrix} 2-t & 0 & -4 \\ 6 & 1-t & -15 \\ 2 & 0 & -4-t \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4-t \\ 6 & 1-t & -15 \\ 2-t & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2-\frac{t}{2} \\ 6 & 1-t & -15 \\ 2-t & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2-\frac{t}{2} \\ 0 & 1-t & 3(t-1) \\ 2-t & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3-(2-t)L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-4-t}{2} \\ 0 & 1-t & 3(t-1) \\ 0 & 0 & -\frac{t(t+2)}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{1-t}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-4-t}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{t(t+2)}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{2}{t(t+2)}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-4-t}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-4-t}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - \frac{4+t}{2}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$