UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Lista de Exercícios - Determinantes

Prof. Helder G. G. de Lima[1]

Legenda

Cálculos — Conceitos — Teoria — Software

Questões

1. Encontre uma matriz triangular superior equivalente por linhas a cada matriz P indicada a seguir, e utilize-as para calcular o determinante de P.

   (a) $P = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 21 \\ -3 & -7 & -13 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   (b) $P = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & -3 & 14 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Supondo que a matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ satisfaz $\det M = 9$, calcule $\begin{vmatrix} a+c & a+b+c+d \\ 2a & 2(a+b) \end{vmatrix}$.

3. Dê exemplos de matrizes não nulas A e B de tamanho $n \times n$ (com $n \geq 2$) tais que:

   (a) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

   (b) $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

   (c) $\det(cA) = c\det(A)$, para algum $c \neq 0$

   (d) $\det(cA) \neq c\det(A)$, para algum $c \neq 0$

4. Verifique que as matrizes $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ satisfazem:

   (a) $\det(PQ) = \det(P)\det(Q)$

   (b) $\det(QP) = \det(P)\det(Q)$

   (c) $\det(R^T) = \det(R)$, sendo $R = P + Q$

5. Calcule o determinante das seguintes matrizes:

   (a) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$

(b) $R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

(c) $T = DD^T$, sendo $D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $U = D^T D$, sendo D como no item anterior

(e) $A = LU$, sendo $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 0 \\ -5/4 & 9/2 & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Mostre que

(a) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & 0 \\ w & 0 & 0 \end{vmatrix} = -wvz$

(b) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & 0 \\ h & i & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = jigd$

(c) $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & 0 \\ x & y & z & 0 & 0 \\ u & v & 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = wvzie$

7. Determine para que valores de t o sistema linear $(A - tI)X = 0$ possui mais de uma solução, sendo I a matriz identidade, A a matriz definida nos casos a seguir, $(A - tI)$ a matriz de coeficientes do sistema, e 0 uma matriz coluna de ordem apropriada.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Respostas

1. (a) $\det P = -\begin{vmatrix} 0 & 5 & 21 \\ 3 & 7 & 13 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 13 \\ 0 & 5 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

   (b) $\det P = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & -3 & 14 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -30$

   (c)

$$\det P = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}$$
$$= 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-9) = -324$$

2. Usando as propriedades dos determinantes relacionadas ao uso de operações elementares sobre as linhas e colunas da matriz S, resulta que:

$$\det S = \begin{vmatrix} a+c & a+b+c+d \\ 2a & 2(a+b) \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a+c & a+b+c+d \\ a & a+b \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ a & b \end{vmatrix}$$
$$= 2 \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -2 \det M = -18.$$

3. (a) Considere $A = I \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = -I \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Então $\det(A+B) = \det(0) = 0 = 1 + (-1) = \det(A) + \det(B)$.

   (b) Considere $A = B = I \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Então $\det(A) = \det(B) = 1$ e $\det(A+B) = \det(2I) = 4$, enquanto que $\det(A) + \det(B) = 1 + 1 = 2$.

   (c) Sabe-se que para $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, vale $\det(cA) = c^n \det(A)$. Deste modo, $\det(cA) = c\det(A)$ se, e somente se, $c^n \det(A) = c\det(A)$. Ou seja, pode-se escolher qualquer matriz que tenha determinante nulo, e o resultado será

$$c^n \det(A) = c^n 0 = 0 = c0 = c\det(A).$$

   Outra opção é escolher $c = 1$ e qualquer matriz A.

   (d) Seguindo o raciocínio do item anterior, basta escolher uma matriz A com determinante não nulo e qualquer $c \in \mathbb{R}$ tal que $c^n \neq c$, ou seja, $c \neq 1$ e $c \neq 0$.

4. (a) $\det(PQ) = -32 = (-8) \cdot 4 = \det(P) \cdot \det(Q)$

   (b) $\det(QP) = -32 = (-8) \cdot 4 = \det(P) \cdot \det(Q)$

   (c) $R = P + Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ e $\det(R)^T = -60 = \det(R)$.

5. (a) $\det(Q) = \frac{5}{144}$

   (b) $\det(R) = 1$

(c) $T = DD^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ e $\det(T) = 27$

(d) $U = D^T D = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\det(T) = 0$

(e) $A = LU = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{25}{4} & -\frac{9}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{67}{8} & -\frac{23}{4} \end{bmatrix}$ e $\det(T) = \det(L)\det(U) = (2 \cdot 3 \cdot 1) \cdot (-1 \cdot 2 \cdot 1) = -12$

6. (a) $\begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ u & v & 0 \\ \mathbf{w} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{w} & 0 & 0 \\ u & \mathbf{v} & 0 \\ x & y & \mathbf{z} \end{vmatrix} = -wvz$, pois o determinante de matrizes triangulares inferiores é o produto das entradas que aparecem na diagonal.

(b) $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ e & f & g & 0 \\ h & i & 0 & 0 \\ \mathbf{j} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} j & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{e} & \mathbf{f} & \mathbf{g} & \mathbf{0} \\ \mathbf{h} & \mathbf{i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{j} & 0 & 0 & 0 \\ h & \mathbf{i} & 0 & 0 \\ e & f & \mathbf{g} & 0 \\ a & b & c & \mathbf{d} \end{vmatrix} = jigd$

(c) $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} \\ f & g & h & i & 0 \\ x & y & z & 0 & 0 \\ u & v & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{w} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{f} & \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{i} & \mathbf{0} \\ x & y & z & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a & b & c & d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{w} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & \mathbf{v} & 0 & 0 & 0 \\ x & y & \mathbf{z} & 0 & 0 \\ f & g & h & \mathbf{i} & 0 \\ a & b & c & d & \mathbf{e} \end{vmatrix} = wvzie$

7. O sistema $(A - tI)X = 0$ possui mais de uma solução se, e somente se, a matriz $(A - tI)$ tiver determinante nulo, isto é, se $\det(A - tI) = 0$. Em cada um dos casos, esta condição resultará em uma equação polinomial na variável t, cujas soluções são dadas a seguir:

   (a) $t = 3$ ou $t = -1$

   (b) $t = -5$ ou $t = 0$ ou $t = 4$

   (c) $t = -3$ ou $t = 0$ ou $t = 1$