UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

1ª Lista de Exercícios (ALI0001)

Prof. Helder G. G. de Lima[1]

Legenda

Cálculos   Conceitos   Teoria   Software

Questões

1. Exiba matrizes quadradas A e B de ordem 2×2 que exemplifiquem as situações a seguir. Compare com o que ocorreria se A e B fossem números reais.

   (a) É possível que $A^2 = B^2$ mesmo que $A \neq B$ e $A \neq -B$.

   (b) $(AB)^2 \neq A^2B^2$.

   (c) Pode ocorrer que $A^2 = 0$ apesar de $A \neq 0$.

   (d) Há casos em que $AB = 0$ ao mesmo tempo em que $0 \neq A \neq B \neq 0$.

   (e) Mesmo que $A \neq B$ pode existir uma matriz P tal que $A = P^{-1}BP$.

2. Calcule, se existir, a inversa de cada uma das matrizes a seguir:

   (a) $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

3. Seja $M = (m_{ij})$ a matriz de ordem 7×7 cujo termo geral é $m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \leq j, \\ 0, & \text{se } i > j. \end{cases}$

   Utilize a definição do produto de matrizes para obter uma fórmula (em função de i e j) para as seguintes entradas da matriz $C = M^2$:

   (a) c_{1j}, sendo $1 \leq j \leq 7$.

   (b) c_{4j}, quando $1 \leq j < 4$.

   (c) c_{4j}, quando $4 \leq j \leq 7$.

   (d) c_{ij}, quando $1 \leq j < i \leq 7$.

   (e) c_{ij}, quando $1 \leq i \leq j \leq 7$.

4. Uma matriz A é considerada **simétrica** se $A^T = A$ e **antissimétrica** se $A^T = -A$. Levando em conta as propriedades da transposição de matrizes, justifique as afirmações que forem verdadeiras e exiba um contra-exemplo para as falsas:

   (a) Todas as entradas da diagonal de uma matriz antissimétrica devem ser nulas.

   (b) Não existem matrizes simétricas que também sejam antissimétricas.

(c) Toda matriz simétrica é antissimétrica.

(d) Toda matriz antissimétrica é simétrica.

(e) Se uma matriz não é simétrica, então ela é antissimétrica.

5. Encontre uma matriz triangular superior equivalente por linhas a cada matriz P indicada a seguir, e utilize-as para calcular o determinante de P.

(a) $P = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 21 \\ -3 & -7 & -13 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $P = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & -3 & 14 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Supondo que a matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ satisfaz $\det M = 9$, calcule $\begin{vmatrix} a+c & a+b+c+d \\ 2a & 2(a+b) \end{vmatrix}$.

7. Dê exemplos de matrizes não nulas A e B de tamanho $n \times n$ (com $n \geq 2$) tais que:

(a) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

(b) $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

(c) $\det(cA) = c\det(A)$, para algum $c \neq 0$

(d) $\det(cA) \neq c\det(A)$, para algum $c \neq 0$

8. Verifique que as matrizes $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ satisfazem:

(a) $\det(PQ) = \det(P)\det(Q)$

(b) $\det(QP) = \det(P)\det(Q)$

(c) $\det(R^T) = \det(R)$, sendo $R = P + Q$

(d) $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$

9. Calcule o determinante das seguintes matrizes:

(a) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$

(b) $R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

(c) $T = DD^T$, sendo $D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $U = D^T D$, sendo D como no item anterior

(e) $A = LU$, sendo $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 0 \\ -5/4 & 9/2 & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $M = PQP^{-1}$, sendo $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 20 & -7 \\ 3 & 1 & 21 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

10. Mostre que

(a) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & 0 \\ w & 0 & 0 \end{vmatrix} = -wvz$ (b) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & 0 \\ h & i & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = jigd$ (c) $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & 0 \\ x & y & z & 0 & 0 \\ u & v & 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = wvzie$

11. Dê exemplos de matrizes A e B tais que

(a) $A + B$ seja inversível, mas A e B não sejam

(b) A e B sejam inversíveis, mas $A + B$ não seja

(c) A, B e $A + B$ sejam inversíveis

12. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 5x + y = 7 \end{cases}$$

e utilize um software como o GeoGebra[2] para:

(a) Plotar o conjunto A formado pelos pontos (x, y) cujas coordenadas satisfazem a primeira equação e o conjunto B dos que verificam a segunda equação.

Dica: Não é preciso um comando especial para representar equações polinomiais no GeoGebra. Basta digitá-las diretamente (mesmo se forem como `5xy^2+2y^3x^2=1`).

(b) Alterar algumas vezes os números do segundo membro, e perceber o tipo de mudança que ocorre na representação gráfica de A e B.

(c) Verificar se com alguma escolha de valores os conjuntos se intersectam. Parece ser possível que isso não aconteça dependendo dos valores escolhidos?

Dica: O comando `Interseção[p, q]` gera a interseção dos objetos `p` e `q`.

13. Repita o exercício anterior para o seguinte sistema, em uma janela de visualização 3D:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + y + 5z = 7 \end{cases}$$

14. Considere os seguintes sistemas lineares nas variáveis $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y &= 6 \\ 2x - cy &= 0 \end{cases} \qquad (1) \qquad\qquad \begin{cases} x + 2y = 6 \\ -cx + y = 1 - 4c \end{cases} \qquad (2)$$

(a) Determinar para quais valores de c os sistemas lineares têm uma, nenhuma ou infinitas soluções.

[2] https://www.geogebra.org/download/

(b) Obtenha as mesmas conclusões sobre c experimentalmente, usando o GeoGebra. **Dica**: defina por exemplo `c=10` e use o botão direito do mouse para tornar o número visível como um "controle deslizante" e mova-o para ver o efeito deste parâmetro.

15. Determine para que valores de t o sistema linear $(A - tI)X = 0$ possui mais de uma solução, sendo I a matriz identidade, A a matriz definida nos casos a seguir, $(A - tI)$ a matriz de coeficientes do sistema, e 0 uma matriz coluna de ordem apropriada.

    (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

16. Obtenha a forma escalonada reduzida por linhas da matriz de coeficientes de cada um dos sistemas lineares a seguir, e partir dela determine as soluções dos sistemas:

    (a) $\begin{cases} 5s - 5\pi t = -5\pi^2 \\ -s + (\pi + 3)t = \pi(\pi + 6) \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 16 \\ 5x_2 - 15x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ -x_2 + 8x_4 = 3/5 \end{cases}$

    (c) $\begin{cases} 3x_1 - 12x_2 - 6x_3 + 9x_5 = -21 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 7 \\ \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - \frac{3}{2}x_5 = -\frac{5}{2} \\ -7x_1 + 28x_2 + 15x_3 - 23x_5 = 53 \end{cases}$

    (d) $\begin{cases} b + 6c = 6 \\ a + 6b - 5c = -3 \\ 3a + 20b - 3c = 1 \end{cases}$

17. Utilize matrizes inversas para resolver os sistemas anteriores, quando for possível.

18. Resolva os seguintes sistemas lineares sobre $\mathbb{R}$, usando matrizes inversas:

    (a) $\begin{cases} -y + 5z = 2 \\ x + 2y + 3z = 7 \\ 2x + 4y + 5z = 13 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -v + 5w = 0 \\ u + 2v + 3w = 0 \\ 2u + 4v + 5w = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} -q + 5r = -2 \\ p + 2q + 3r = 3 \\ 2p + 4q + 5r = 1 \end{cases}$

19. Se A é uma matriz $p \times q$, B uma matriz $q \times r$ e C uma matriz $r \times q$, qual é o tamanho da matriz $M = (B + C^T)((AB)^T + CA^T)$?

20. Se X é uma matriz $m \times n$, para que valores de m e n as operações a seguir fazem sentido? Quais os tamanhos das matrizes obtidas? Quais delas são simétricas? Justifique.

    (a) XX^T (b) X^TX (c) $X + X^T$ (d) $X^T + X$ (e) $X - X^T$

21. Seja $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a matriz associada a um sistema linear homogêneo. Utilize a eliminação de Gauss-Jordan para provar que se $ad - bc \neq 0$ então o sistema possui somente a solução trivial.

22. Suponha que $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ são tais que $MX = I_{3\times 3}$. Determine X, por meio da comparação das entradas de MX e I, e depois calcule XM.

23. Em um software de computação numérica (GNU Octave[3], o Scilab[4], MatLab, etc):

   (a) Sortear ao acaso 10 matrizes de ordem 7×7 e verificar quantas delas são inversíveis. **Dica**: o comando `rand(m,n)` gera aleatoriamente uma matriz de ordem $m \times n$, e o comando `det(A)` calcula o determinante da matriz A.

   (b) Repetir o experimento anterior com matrizes quadradas de algum outro tamanho. O que ocorre com a maioria das matrizes em cada uma das dimensões consideradas?

   (c) Escolher matrizes triangulares superiores A_2, A_3 e A_4 de ordens 2×2, 3×3 e 4×4 respectivamente, todas com zeros na diagonal e então:

      i. Calcular as potências A_2^2, A_3^3 e A_4^4.

      ii. Com base nos resultados obtidos, formule uma conjectura a respeito da n-ésima potência das matrizes triangulares superiores $n \times n$, com zeros na diagonal.

      iii. Prove que o seu palpite é realmente válido para **qualquer** matriz nas condições acima (pelo menos nos casos 2×2 e 3×3).

24. Para que valor(es) de $t \in \mathbb{R}$ a matriz $T = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 1 \\ -1 & t & 3 \\ -1 & 9 & t+1 \end{bmatrix}$ é inversível? Qual é a inversa?

25. Existe algum $t \in \mathbb{R}$ para o qual $N = \begin{bmatrix} 2-t & 0 & -4 \\ 6 & 1-t & -15 \\ 2 & 0 & -4-t \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ não é inversível?

26. Justifique as afirmações verdadeiras e exiba um contra-exemplo para as demais:

   (a) A matriz nula é uma matriz na forma escalonada reduzida por linhas.

   (b) A matriz identidade 4×4 está na forma escalonada reduzida por linhas.

   (c) Se uma matriz triangular superior é simétrica então ela é uma matriz diagonal.

   (d) Se U e V são matrizes diagonais, então $UV = VU$.

   (e) Se A é uma matriz antissimétrica, isto é, se $A^T = -A$, então A^T é antissimétrica.

   (f) Se A é uma matriz $n \times n$ antissimétrica, então sua diagonal é igual a zero.

   (g) Nenhuma matriz A $n \times n$ pode ser simétrica e antissimétrica simultaneamente.

27. Quantas matrizes diagonais D de ordem 2×2 satisfazem $D^2 = I$, isto é, quantas matrizes diagonais são "raizes quadradas" da matriz identidade de ordem 2? E se D for 3×3?

28. Encontre todas as matrizes diagonais D de ordem 3×3 tais que $D^2 - 7D + 10I = 0$.

29. Mostre que se S é uma matriz simétrica então S^2 também é simétrica. Decida se vale o mesmo para S^n, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, e explique sua conclusão.

30. Se M é uma matriz quadrada $n \times n$, a soma das entradas da diagonal de M é chamada de **traço** de M, e denotada por $tr(M) = m_{11} + m_{22} + \ldots + m_{nn}$. Explique por que são válidas as seguintes afirmações, para quaisquer matrizes A e B e todo $c \in \mathbb{R}$:

   (a) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$

   (b) $tr(c \cdot A) = c \cdot tr(A)$

   (c) $tr(A^T) = tr(A)$

[3] https://www.gnu.org/software/octave/download.html
[4] http://www.scilab.org/download/latest

Respostas

1. Em todos os itens há uma infinidade de matrizes que exemplificam as afirmações feitas. Seguem alguns exemplos:

   (a) Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é verdade que $A^2 = I = B^2$, mas $A \neq B$ e $A \neq -B$.

   (b) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ então $(AB)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mas $A^2B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (c) Toda matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ satisfaz $C^2 = 0$, até mesmo quando $k \neq 0$ (e então $A \neq 0$).

   (d) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ então $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mas $0 \neq A \neq B \neq 0$.

   (e) Se $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ então $A = P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ é diferente de B.

2. (a) $D^{-1} = \begin{bmatrix} -23 & -2 & -13 \\ -9 & -1 & -5 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

   (b) $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

   (c) $U^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

3. (a) As entradas da primeira linha são dadas por $c_{1j} = j$ pois, por definição,

$$\begin{aligned} c_{1j} &= \underbrace{m_{11}m_{1j} + m_{12}m_{2j} + \ldots + m_{1j}m_{jj}}_{j \text{ parcelas}} + \underbrace{\ldots + m_{17}m_{7j}}_{7-j \text{ parcelas}} \\ &= \underbrace{1 + 1 + \ldots 1}_{j \text{ vezes}} + \underbrace{0 + \ldots 0}_{7-j \text{ vezes}} = j. \end{aligned}$$

   (b) Se $1 \leq j < 4$, então $c_{4j} = 0$ pois

$$\begin{aligned} c_{4j} &= m_{41}m_{1j} + m_{42}m_{2j} + m_{43}m_{3j} + m_{44}m_{4j} + \ldots + m_{47}m_{7j} \\ &= 0m_{1j} + 0m_{2j} + 0m_{3j} + 1m_{4j} + \ldots + 1m_{7j} \\ &= m_{4j} + \ldots + m_{7j} \\ &= 0 + \ldots + 0 = 0. \end{aligned}$$

   (c) Se $4 \leq j \leq 7$, então $c_{4j} = j - i + 1$.

   (d) Se $1 \leq j < i \leq 7$, então $c_{ij} = 0$.

   (e) Se $1 \leq i \leq j \leq 7$, então $c_{ij} = j - i + 1$.

4. (a) **Verdadeira**, pois dada uma matriz antissimétrica $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, tem-se $[A]_{ij} = [A^T]_{ji} = -[A]_{ji}$. Em particular, se $i = j$, vale $[A]_{ii} = -[A]_{ii}$, o que implica que $2[A]_{ii} = 0$, isto é, $[A]_{ii} = 0$. Assim, todas as entradas da diagonal de A são nulas.

(b) **Falsa**, pois a matriz nula $0 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é simétrica e antissimétrica simultaneamente.

(c) **Falsa**, pois $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ é simétrica mas não é antissimétrica.

(d) **Falsa**, pois $D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ é antissimétrica mas não é simétrica.

(e) **Falsa**, pois $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ não é uma matriz simétrica mas não é antissimétrica.

5. (a) $\det P = -\begin{vmatrix} 0 & 5 & 21 \\ 3 & 7 & 13 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 13 \\ 0 & 5 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

(b) $\det P = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & -3 & 14 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -30$

(c)

$$\det P = 2\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}$$
$$= 6\cdot 1\cdot 1\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-9) = -324$$

6. Usando as propriedades dos determinantes relacionadas ao uso de operações elementares sobre as linhas e colunas da matriz S, resulta que:

$$\det S = \begin{vmatrix} a+c & a+b+c+d \\ 2a & 2(a+b) \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a+c & a+b+c+d \\ a & a+b \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a+c & b+d \\ a & b \end{vmatrix}$$
$$= 2\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -2\det M = -18.$$

7. (a) Considere $A = I \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = -I \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Então $\det(A+B) = \det(0) = 0 = 1 + (-1) = \det(A) + \det(B)$.

(b) Considere $A = B = I \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Então $\det(A) = \det(B) = 1$ e $\det(A+B) = \det(2I) = 4$, enquanto que $\det(A) + \det(B) = 1 + 1 = 2$.

(c) Sabe-se que para $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, vale $\det(cA) = c^n \det(A)$. Deste modo, $\det(cA) = c\det(A)$ se, e somente se, $c^n \det(A) = c\det(A)$. Ou seja, pode-se escolher qualquer matriz que não seja inversível, e o resultado será

$$c^n \det(A) = c^n 0 = 0 = c0 = c\det(A).$$

Outra opção é escolher $c = 1$ e qualquer matriz inversível A.

(d) Seguindo o raciocínio do item anterior, basta escolher uma matriz A inversível e qualquer $c \in \mathbb{R}$ tal que $c^n \neq c$, ou seja, $c \neq 1$ e $c \neq 0$.

8. (a) $\det(PQ) = -32 = (-8)\cdot 4 = \det(P)\cdot\det(Q)$

(b) $\det(QP) = -32 = (-8)\cdot 4 = \det(P)\cdot\det(Q)$

(c) $R = P + Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ e $\det(R)^T = -60 = \det(R)$.

(d) $\det(P^{-1}) = -1/8 = \dfrac{1}{-8} = \dfrac{1}{\det(P)} = \det(P)^{-1}$

9. (a) $\det(Q) = \frac{5}{144}$

(b) $\det(R) = 1$

(c) $T = DD^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ e $\det(T) = 27$

(d) $U = D^T D = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\det(T) = 0$

(e) $A = LU = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{25}{4} & -\frac{9}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{67}{8} & -\frac{23}{4} \end{bmatrix}$ e $\det(T) = \det(L)\det(U) = (2 \cdot 3 \cdot 1) \cdot (-1 \cdot 2 \cdot 1) = -12$

(f) $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $\det(M) = \det(P)\det(Q)\det(P^{-1}) = \frac{\det(P)\det(Q)}{\det(P)} = \det(Q) = -1$

10. (a) $\begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ u & v & 0 \\ \mathbf{w} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{w} & 0 & 0 \\ u & \mathbf{v} & 0 \\ x & y & \mathbf{z} \end{vmatrix} = -wvz$, pois o determinante de matrizes triangulares inferiores é o produto das entradas que aparecem na diagonal.

(b) $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ e & f & g & 0 \\ h & i & 0 & 0 \\ \mathbf{j} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} j & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{e} & \mathbf{f} & \mathbf{g} & \mathbf{0} \\ \mathbf{h} & \mathbf{i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{j} & 0 & 0 & 0 \\ h & \mathbf{i} & 0 & 0 \\ e & f & \mathbf{g} & 0 \\ a & b & c & \mathbf{d} \end{vmatrix} = jigd$

(c) $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} \\ f & g & h & i & 0 \\ x & y & z & 0 & 0 \\ u & v & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{w} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{f} & \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{i} & \mathbf{0} \\ x & y & z & 0 & 0 \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a & b & c & d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{w} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & \mathbf{v} & 0 & 0 & 0 \\ x & y & \mathbf{z} & 0 & 0 \\ f & g & h & \mathbf{i} & 0 \\ a & b & c & d & \mathbf{e} \end{vmatrix} = wvzie$

11. (a) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, que é inversível. Porém, A e B não são inversíveis, já que possuem uma coluna de zeros.

(b) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, então $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ não é inversível, pois $AX = 0$ tem uma solução não nula $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Porém, $A = A^{-1}$ e $B = B^{-1}$ são inversíveis.

(c) Se $A = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $A+B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e as matrizes A, B e $A+B$ são inversíveis, sendo $A^{-1} = B^{-1} = I$ e $(A + B)^{-1} = (2I)^{-1} = \frac{1}{2}I$.

12. (a) Digite `2x-3y=-4` para que o GeoGebra mostre a reta formada pelos pontos que satisfazem a primeira equação, e `5x+y=7` para representar a segunda reta.

    (b) Ao trocar o -4 por um número maior, a reta correspondente se desloca para baixo, mantendo-se paralela à reta original. Ao diminuir este valor, a reta se desloca paralelamente para cima. Na segunda equação, a troca de 7 por um número maior resulta em um deslocamento para a direita, e a diminuição deste valor desloca a reta para a esquerda.

    (c) As retas, que inicialmente se intersectam em $(1, 2)$, têm sempre um ponto em comum, independentemente dos valores atribuídos ao segundo membro das equações. Isso reflete o fato de que as duas equações correspondem a retas que não são paralelas entre si, e sua direção permanece inalterada mesmo quando o segundo membro é modificado.

13. (a) Digite `x-y+z=1` para que o GeoGebra mostre o plano formado pelos pontos (x, y, z) que satisfazem a primeira equação, e então `2x+y+z=4` e `x+y+5z=7` para representar os planos correspondentes às demais equações.

    (b) A trocar os valores do segundo membro de cada equação, o plano correspondente desloca-se no espaço mantendo-se paralelo à sua posição original.

    (c) Como os planos se intersectam inicialmente no ponto $(1, 1, 1)$, e sempre permanecem paralelos às suas posições iniciais, continua existindo um único ponto de interseção, quaisquer que sejam os valores do segundo membro do sistema.

14. (a) i. A matriz aumentada associada ao primeiro sistema pode ser levada à sua forma escalonada reduzida por linhas por meio das seguintes operações elementares:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -c & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2-2L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -c-4 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-1}{c+4}L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{12}{c+4} \end{array}\right] \xrightarrow{L_1-2L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{6c}{c+4} \\ 0 & 1 & \frac{12}{c+4} \end{array}\right]$$

Se $c = -4$ a segunda operação deixa de ser possível, e o sistema não tem solução. Por outro lado, se $c \neq -4$, todos os passos podem ser realizados e conclui-se que o sistema é possível e determinado, tendo como única solução o ponto $\left(\frac{6c}{c+4}, \frac{12}{c+4}\right)$.

ii. A matriz aumentada associada ao segundo sistema pode ser levada à sua forma escalonada reduzida por linhas por meio das seguintes operações elementares:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ -c & 1 & 1-4c \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+cL_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1+2c & 1+2c \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{1+2c}L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1-2L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Desta vez, se $c = -1/2$ a segunda linha zera após a primeira operação elementar, e o sistema tem mais de uma solução. De fato, o escalonamento mostra que o sistema original é equivalente a um sistema formado pela primeira equação e por uma equação do tipo $0 = 0$, que não impõe qualquer restrição sobre os valores de x e y. Assim, todo par da forma $(6 - 2y, y)$, com $y \in \mathbb{R}$, é solução deste sistema possível e indeterminado.

Por outro lado, nos casos em que $c \neq -1/2$, os três passos da eliminação de Gauss-Jordan podem ser realizados, e a conclusão é de que o sistema possui como única solução o ponto $(4, 1)$, sendo então possível e determinado.

(b) i. Geometricamente, nota-se que conforme o valor de c vai se aproximando de $c = -4$ a reta que corresponde à segunda equação gira em torno da origem até ficar paralela à reta da primeira equação. Quando isso ocorre, não há um ponto de interseção. Nos demais casos, as retas se intersectam em um único ponto.

ii. Geometricamente, ao variar o valor de c, uma das retas gira em torno do ponto $(4,1)$, em que elas se intersectam, e em um caso específico (quando $c = -1/2$) as duas retas coincidem, fazendo com que todos os seus pontos sejam pontos de interseção.

15. O sistema $(A - tI)X = 0$ possui mais de uma solução se, e somente se, a matriz $(A - tI)$ não for inversível, isto é, se $\det(A - tI) = 0$. Em cada um dos casos, esta condição resultará em uma equação polinomial na variável t, cujas soluções são dadas a seguir:

    (a) $t = 3$ ou $t = -1$

    (b) $t = -5$ ou $t = 0$ ou $t = 4$

    (c) $t = -3$ ou $t = 0$ ou $t = 1$

16. (a) A matriz aumentada associada ao sistema dado é $A = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -5\pi & -5\pi^2 \\ -1 & \pi+3 & \pi(\pi+6) \end{array}\right]$ e sua forma escalonada reduzida é obtida por meio das seguintes operações elementares sobre as linhas:

$$A \xrightarrow{\frac{1}{5}L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\pi & -\pi^2 \\ -1 & \pi+3 & \pi(\pi+6) \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\pi & -\pi^2 \\ 0 & 3 & 6\pi \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{3}L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\pi & -\pi^2 \\ 0 & 1 & 2\pi \end{array}\right] \xrightarrow{L_1+\pi L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 1 & 2\pi \end{array}\right]$$

Esta última matriz está associada às equações

$$\begin{cases} s = \pi^2 \\ t = 2\pi \end{cases},$$

e, portanto, $S = \{(\pi^2, 2\pi)\}$ é o conjunto das soluções do sistema proposto.

(b) A redução à forma escalonada reduzida da matriz associada ao sistema é obtida através das seguintes operações elementares:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 0 & -15 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 3/5 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -15 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 3/5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-2L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -15 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 3/5 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{5}L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 3/5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4+L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}L_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_2+3L_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1-L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{array}\right]$$

Esta última matriz está associada às equações

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 1/5 \end{cases},$$

de modo que $S = \{(3, 1, 4, 1/5)\}$ é o conjunto das soluções do sistema proposto.

(c) A redução à forma escalonada reduzida da matriz associada ao sistema é obtida através das seguintes operações elementares:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -12 & -6 & 0 & 9 & -21 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & -3 & 7 \\ 1/2 & -2 & -1 & 1 & -3/2 & -5/2 \\ -7 & 28 & 15 & 0 & -23 & 53 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}L_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -7 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & -3 & 7 \\ 1/2 & -2 & -1 & 1 & -3/2 & -5/2 \\ -7 & 28 & 15 & 0 & -23 & 53 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3-\frac{1}{2}L_1 \\ L_4+7L_1}]{L_2+L_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1+2L_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta última matriz está associada às equações

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_5 = 1 \\ x_3 - 2x_5 = 4 \\ x_4 - 3x_5 = 1 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Logo, o conjunto das soluções do sistema proposto é

$$\begin{aligned} S &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 1 + 4x_2 + x_5, x_2 = 4 + 2x_5, x_4 = 1 + 3x_5\} \\ &= \{(1 + 4x_2 + x_5, 4 + 2x_5, x_3, 1 + 3x_5, x_5) \mid x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(d) A matriz aumentada associada ao sistema dado é $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & -5 & -3 \\ 3 & 20 & -3 & 1 \end{array}\right]$ e sua forma escalonada reduzida é obtida por meio das seguintes operações elementares sobre as linhas:

$$[A|B] \xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \\ 3 & 20 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 12 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{2}L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1+3L_3]{L_2-6L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1-6L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -41 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como a última linha corresponde a uma equação da forma $0 = 1$, o sistema é impossível, ou seja, $S = \emptyset$.

17. (a) Primeiro é preciso determinar a inversa de A, e para isso serão usadas as mesmas operações elementares que produziram a forma escalonada reduzida de A:

$$\left[\begin{array}{cccc} 5 & -5\pi & 1 & 0 \\ -1 & \pi+3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}L_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -\pi & 1/5 & 0 \\ -1 & \pi+3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+L_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -\pi & 1/5 & 0 \\ 0 & 3 & 1/5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}L_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -\pi & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/15 & 1/3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1+\pi L_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1/5+\pi/15 & \pi/3 \\ 0 & 1 & 1/15 & 1/3 \end{array}\right]$$

Assim, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5+\pi/15 & \pi/3 \\ 1/15 & 1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3+\pi & 5\pi \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Sempre que $AX = B$ e A é inversível, vale $X = A^{-1}B$. Assim, para $B = \begin{bmatrix} -5\pi^2 \\ \pi(\pi+6) \end{bmatrix}$, tem-se

$$X = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3+\pi & 5\pi \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5\pi^2 \\ \pi(\pi+6) \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -5\pi^2(3+\pi)+5\pi^2(\pi+6) \\ -5\pi^2+5\pi(\pi+6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi^2 \\ 2\pi \end{bmatrix}.$$

(b) Primeiro, determina-se A^{-1} usando as mesmas operações elementares que produziram a forma escalonada reduzida de A:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4+L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}L_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/25 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2+3L_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8/25 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/25 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1-L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -8/25 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8/25 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/25 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Assim, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -8/25 & 0 & -3/5 \\ 0 & 8/25 & 0 & 3/5 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/25 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 25 & -32 & 0 & -60 \\ 0 & 32 & 0 & 60 \\ -50 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 20 \end{bmatrix}$ e a solução $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ do sistema é obtida através da seguinte multiplicação:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 25 & -32 & 0 & -60 \\ 0 & 32 & 0 & 60 \\ -50 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \\ 12 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 300 \\ 100 \\ 400 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

(c) A matriz (não aumentada) associada ao sistema não é quadrada.

(d) A matriz associada ao sistema não é inversível, pois sua forma escalonada reduzida não é a matriz identidade.

18. Os três sistemas podem ser escritos na forma $AX = B$ com uma mesma matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, então será preciso calcular apenas uma matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 2L1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L2 + 5L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - 3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -25 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Disto resulta que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -25 & 13 \\ -1 & 10 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Se $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$ então: $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -25 & 13 \\ -1 & 10 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) Se $X = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ então $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ pois A é inversível.

(c) Se $X = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ então: $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -25 & 13 \\ -1 & 10 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -66 \\ 27 \\ 5 \end{bmatrix}$.

19. A matriz $(B + C^T)((AB)^T + CA^T)$ tem tamanho $q \times p$, pois

- B e C^T têm tamanho $q \times r$, de modo que $B + C^T$ também é $q \times r$.
- AB têm tamanho $p \times r$, de modo que $(AB)^T$ é $r \times p$.
- A^T têm tamanho $q \times p$, de modo que CA^T é $r \times p$.
- O produto de qualquer matriz $q \times r$ por uma matriz $r \times p$ tem tamanho $q \times p$.

20. (a) Para quaisquer m e n, se X é $m \times n$ então sua transposta X^T é $n \times m$. Em particular, o número de colunas de X é sempre igual ao número de linhas de X^T, e estas matrizes podem ser multiplicadas (nesta ordem), gerando um produto que é $m \times m$. Além disso, XX^T é simétrica pois

$$(XX^T)^T = (X^T)^T X^T = XX^T.$$

(b) De forma análoga ao item anterior, o número de colunas de X^T é sempre igual ao número de linhas de X, e estas matrizes podem ser multiplicadas (nesta ordem), desta vez gerando um produto que é $n \times n$. Além disso, $X^T X$ também é simétrica:

$$(X^T X)^T = X^T (X^T)^T = X^T X.$$

(c) Para que seja possível calcular $X+X^T$, é necessário que X e X^T tenham o mesmo tamanho. Como uma delas é $m\times n$ e a outra é $n\times m$, a adição só será possível se $m=n$. Neste caso, a soma será uma matriz simétrica, pois

$$(X+X^T)^T = X^T + (X^T)^T = X^T + X = X + X^T.$$

(d) Como no item anterior, para que X^T+X faça sentido é preciso que X e X^T tenham o mesmo tamanho, isto é, que $m=n$. Neste caso, a soma também será uma matriz simétrica, já que

$$(X^T+X)^T = (X^T)^T + X^T = X + X^T = X^T + X.$$

(e) Novamente, é preciso que $m=n$ para que a operação $X-X^T$ seja possível. No entanto, neste caso

$$(X-X^T)^T = X^T - (X^T)^T = X^T - X = -(X-X^T).$$

No entanto, $D = X - X^T$ só será igual a $-(X-X^T)$ se $d_{ij} = -d_{ij}$, para cada i,j, e isso só é possível se todos os d_{ij} forem nulos. Em outras palavras, $X-X^T$ só é uma matriz simétrica se $X-X^T=0$.

21. Há duas possibilidades, dependendo das entradas da primeira coluna:

(a) Se $a\neq 0$ então a redução à forma escalonada reduzida começa com as seguintes operações elementares:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & 0\\ c & d & 0\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{a}L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & 0\\ c & d & 0\end{array}\right] \xrightarrow{L_2-cL_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & 0\\ 0 & d-c\frac{b}{a} & 0\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & 0\\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & 0\end{array}\right]$$

Neste ponto, a hipótese de que $ad-bc\neq 0$ pode ser usada para concluir a eliminação:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & 0\\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & 0\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{a}{ad-bc}L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & 0\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{L_1-\frac{b}{a}L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right].$$

Assim, o sistema $MX=0$ só tem a solução trivial $X=0$.

(b) Se $a=0$ então uma troca da primeira linha com a segunda faz com que o problema recaia no caso anterior, em que a primeira entrada da primeira linha não é zero. Note que neste caso c não será zero, pois senão ocorreria $ad-bc = 0\cdot d - b\cdot 0 = 0$.

Observação: Note que $ad-bc$ é justamente a fórmula do determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$.

22. Como

$$MX = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3\\ 2 & -4 & 5\\ -1 & 1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+2d+3g & -b+2e+3h & -c+2f+3i\\ 2a-4d+5g & 2b-4e+5h & 2c-4f+5i\\ -a+d+7g & -b+e+7h & -c+f+7i\end{bmatrix}$$

e por hipótese $MX=I$, uma comparação das entradas de MX com as de I mostra que as incógnitas que formam as colunas de X devem ser soluções dos sistemas lineares

$$\begin{cases} -a+2d+3g=1\\ 2a-4d+5g=0\\ -a+\ \ d+7g=0\end{cases},\quad \begin{cases} -a+2d+3g=0\\ 2a-4d+5g=1\\ -a+\ \ d+7g=0\end{cases}\ \text{e}\ \begin{cases} -a+2d+3g=0\\ 2a-4d+5g=1\\ -a+\ \ d+7g=0\end{cases}.$$

Como todos os sistemas têm a mesma matriz de coeficientes, os três podem ser escalonados simultaneamente como segue:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3+L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{11}L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/11 & 1/11 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+4L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 19/11 & 4/11 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/11 & 1/11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1+3L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -5/11 & 3/11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 19/11 & 4/11 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/11 & 1/11 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1+2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 19/11 & 4/11 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/11 & 1/11 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $X = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 19/11 & 4/11 & -1 \\ 2/11 & 1/11 & 0 \end{bmatrix}$. Multiplicando esta matriz à esquerda de M, obtém-se:

$$XM = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 19/11 & 4/11 & -1 \\ 2/11 & 1/11 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Isto quer dizer que a matrix X que atua como inversa à direita de A também é uma inversa à esquerda de A, pois ambos os produtos (AX e XA) resultam na matriz identidade.

23. (a) Ao sortear 10 matrizes 7×7 *aleatoriamente*, é bem provavel que **todas** as matrizes obtidas sejam inversíveis (execute o comando mais de 10 vezes se não estiver convencido).

    (b) Repetindo o experimento com matrizes quadradas de qualquer outro tamanho, há grandes chances de não encontrar uma única matriz que não seja inversível. De fato, ao sortear *aleatoriamente* uma matriz quadrada, há **probabilidade zero** (não é só pequena, é zero!) de ser escolhida uma matriz não inversível. Elas são raras, mas pode se deparar com elas se estiver com sorte (ou se o sorteio não for realmente aleatório).

    (c) Sejam $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Então:

i.

$$A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} A_3^3 &= \left(\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$A_4^4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ii. Com base nos exemplos anteriores, é natural suspeitar que a n-ésima potência de uma matriz triangular superior $n \times n$ qualquer, com zeros na diagonal, é sempre a matriz nula $n \times n$.

iii. As matrizes triangulares superiores de tamanho 2×2, com zeros na diagonal, têm a forma $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, em que c pode ser qualquer escalar. Então:

$$A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Já no caso 3×3, tem-se $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e então:

$$A_3^3 = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mais geralmente, se $A = (a_{ij})$ for uma matriz triangular superior de tamanho $n \times n$ com diagonal nula, então as primeiras i entradas da linha i são todas nulas. Ao elevar A ao quadrado, a matriz obtida terá as primeiras $i+1$ entradas da linha i iguais a zero. Analogamente, ao calcular A^3, a matriz resultante terá $i+2$ entradas da linha i igual a zero. Como a matriz tem n colunas, procedendo desta maneira até obter A^n o resultado final será uma matriz com zeros em todas as n colunas de cada linha.

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \mathbf{0} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}}^{A} \to \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}^{A^2} \dots \to \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}^{A^n}$$

O padrão acima também pode ser percebido ao calcular explicitamente as entradas dos produtos. Como a matriz A é triangular superior e tem zeros na diagonal, tem-se $a_{ij} = 0$ sempre que $i \geq j$. Consequentemente, se $i \geq j-1$ a entrada ij de A^2 é dada por

$$\begin{aligned}[A^2]_{ij} = [A \cdot A]_{ij} &= (a_{i1}a_{1j} + \ldots + a_{ii}a_{ij}) + (a_{i,i+1}a_{i+1,j} + \ldots + a_{in}a_{nj}) \\ &= (0a_{1j} + \ldots + 0a_{ij}) + (a_{i,i+1}0 + \ldots + a_{in}0) = 0.\end{aligned}$$

Do mesmo modo, $[A^3]_{ij} = 0$ para $i \geq j-2$:

$$\begin{aligned}[A^3]_{ij} = [A^2 \cdot A]_{ij} &= ([A^2]_{i1}a_{1j} + \ldots + [A^2]_{i,i+1}a_{i+1,j}) \\ &\quad + ([A^2]_{i,i+2}a_{i+2,j} + \ldots + [A^2]_{in}a_{nj}) \\ &= (0a_{1j} + \ldots + 0a_{i+1,j}) + ([A^2]_{i+2,j+1}0 + \ldots + [A^2]_{in}0) = 0.\end{aligned}$$

Procedendo da mesma maneira até a n-ésima potência de A, consegue-se todas as entradas iguais a zero.

24. Para que a matriz $T = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 1 \\ -1 & t & 3 \\ -1 & 9 & t+1 \end{bmatrix}$ seja inversível, sua forma escalonada reduzida por linhas deve ser a matriz identidade. Procedendo com a eliminação de Gauss-Jordan, seriam realizadas as seguintes operações elementares sobre as linhas:

$$\begin{bmatrix} -1 & 9 & 1 \\ -1 & t & 3 \\ -1 & 9 & t+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_1} \begin{bmatrix} 1 & -9 & -1 \\ -1 & t & 3 \\ -1 & 9 & t+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+L_1} \begin{bmatrix} 1 & -9 & -1 \\ 0 & t-9 & 2 \\ -1 & 9 & t+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3+L_1} \begin{bmatrix} 1 & -9 & -1 \\ 0 & t-9 & 2 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Neste ponto, para conseguir um pivô igual a 1 na segunda coluna da segunda linha, seria necessária uma divisão da segunda linha por $t-9$, e isso significa que se $t = 9$ a matriz não será inversível. Além disso, no passo seguinte, será necessário dividir a terceira linha por t, de modo que para $t = 0$ a matriz também não será inversível. Supondo que $t \neq 0$ e $t \neq 9$, basta realizar mais algumas operações elementares e obtém-se a identidade:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} 1 & -9 & -1 \\ 0 & t-9 & 2 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{t-9}L_2} \begin{bmatrix} 1 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{t-9} \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{t}L_3} \begin{bmatrix} 1 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{t-9} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2-\frac{2}{t-9}L_3} \begin{bmatrix} 1 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{L_1+L_3} \begin{bmatrix} 1 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1+9L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Portanto, T é inversível se, e somente se, $t \notin \{0, 9\}$. Aplicando a mesma sequência de operações elementares à matriz identidade, o resultado é a inversa de T: 0

$$\begin{aligned}I &\xrightarrow{-L_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+L_1]{L_2+L_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{t}L_3]{\frac{1}{t-9}L_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{t-9} & \frac{1}{t-9} & 0 \\ \frac{-1}{t} & 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{L_2-\frac{2}{t-9}L_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2-t}{(t-9)t} & \frac{1}{t-9} & \frac{-2}{(t-9)t} \\ \frac{-1}{t} & 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1+L_3} \begin{bmatrix} \frac{-t-1}{t} & 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{2-t}{(t-9)t} & \frac{1}{t-9} & \frac{-2}{(t-9)t} \\ \frac{-1}{t} & 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{L_1+9L_2} \begin{bmatrix} \dfrac{-t^2-t+27}{(t-9)t} & \dfrac{9}{t-9} & \dfrac{t-27}{(t-9)t} \\ \dfrac{2-t}{(t-9)t} & \dfrac{1}{t-9} & \dfrac{-2}{(t-9)t} \\ \dfrac{-1}{t} & 0 & \dfrac{1}{t} \end{bmatrix} = T^{-1}.\end{aligned}$$

25. As operações elementares a seguir mostram que N é equivalente por linhas à identidade, desde que seja possível dividir por $1-t$ e depois por $t(t+2)$. Isto significa que para $t \in \{-2,0,1\}$ a matriz N não é inversível, pois apareceria uma linha nula em um dos passos da eliminação de Gauss-Jordan.

$$N = \begin{bmatrix} 2-t & 0 & -4 \\ 6 & 1-t & -15 \\ 2 & 0 & -4-t \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4-t \\ 6 & 1-t & -15 \\ 2-t & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2-\frac{t}{2} \\ 6 & 1-t & -15 \\ 2-t & 0 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2-6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2-\frac{t}{2} \\ 0 & 1-t & 3(t-1) \\ 2-t & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3-(2-t)L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-4-t}{2} \\ 0 & 1-t & 3(t-1) \\ 0 & 0 & -\frac{t(t+2)}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{1-t}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-4-t}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{t(t+2)}{2} \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{-\frac{2}{t(t+2)}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-4-t}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-4-t}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1-\frac{4+t}{2}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

26. (a) A matriz nula é uma matriz na forma escalonada reduzida por linhas, pois
    - Não há nenhuma linha não nula em que o primeiro elemento não nulo seja diferente de 1 (nem sequer existem linhas não nulas);
    - Todas as linhas nulas estão na parte inferior
    - Não há pivôs mais a esquerda dos pivôs de linhas anteriores (já que não há pivôs)
    - Não há elementos não nulos acima ou abaixo de nenhum pivô

    (b) A matriz identidade $I_{4\times 4}$ está na forma escalonada reduzida por linhas pois
    - Em todas as linhas o o primeiro elemento não nulo é 1;
    - Não há linhas nulas
    - Todos os pivôs estão na diagonal
    - Exceto pelos pivôs que estão na diagonal, as colunas só contém zeros

    (c) Em uma matriz triangular superior $S \in M_{n\times n}(K)$, todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja, $s_{ij} = 0$ sempre que $i > j$. Se S é simétrica, então $s_{ij} = s_{ji}$, sendo $1 \leq i, j \leq n$. Em particular, se $i < j$ então $s_{ij} = s_{ji} = 0$, pois $j > i$. Logo, T é uma matriz diagonal, já que $s_{ij} = 0$ sempre que que $i > j$ ou $i < j$, isto é, para $i \neq j$.

    (d) Se $U, V \in M_{m\times m}(K)$ são matrizes diagonais, então $UV = VU$. De fato, se $i \neq j$ então $u_{ij} = v_{ij} = 0$ e além disso

$$[UV]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} u_{ik}v_{kj} = u_{i1}v_{1j} + u_{i2}v_{2j} + \ldots + u_{im}v_{mj}.$$

    Nesta soma, tem-se $u_{ik} = 0$, exceto possivelmente quando $k = i$. Mesmo assim, a parcela $u_{ii}v_{ij}$ será nula, pois $k = i \neq j \Rightarrow v_{kj} = v_{ij} = 0$. Assim, todos os termos da soma são nulos, e as entradas $[UV]_{ij}$ são nulas sempre que $i \neq j$. De forma análoga, tem-se $[VU]_{ij} = 0$ para $i \neq j$, ou seja, UV e VU coincidem fora da diagonal principal. Por outro lado, na diagonal principal tem-se $i = j$ e então

$$[UV]_{ij} = u_{ii}v_{ii} = v_{ii}u_{ii} = [VU]_{ij}\,.$$

    (e) Seja A antissimétrica. Então $A^T = -A$ e resulta que $\left(A^T\right)^T = A = -A^T$, ou seja, A^T também é antissimétrica.

(f) Dada uma matriz antissimétrica $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, tem-se $[A]_{ij} = [A^T]_{ji} = -[A]_{ji}$. Em particular, se $i = j$, vale $[A]_{ii} = -[A]_{ii}$, o que implica que $2[A]_{ii} = 0$, isto é, $[A]_{ii} = 0$. Assim, todas as entradas da diagonal de A são nulas.

(g) A matriz nula $0 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é simétrica e antissimétrica simultaneamente.

27. Seja $D \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uma matriz diagonal. Então $D = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e tem-se

$$D^2 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} x_1^2 & 0 \\ 0 & x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, os escalares x_1 e x_2 satisfazem $x_i^2 = 1$, ou seja, $x_i = 1$ ou $x_i = -1$. Logo, D pode ser uma destas 4 matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

No caso de matrizes 3×3, cada uma das três entradas da diagonal pode ser igual a 1 ou a -1, e consequentemente $I = I_3$ tem 8 raízes quadradas distintas.

28. Seja $D \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz diagonal. Então $D = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix}$, com $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ e tem-se

$$\begin{aligned} D^2 - 7D + 10I &= \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix}^2 - 7\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1^2 - 7x_1 + 10 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 - 7x_2 + 10 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 - 7x_3 + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, se $D^2 - 7D + 10I = 0$ os escalares x_1, x_2 e x_3 são soluções de $x_i^2 - 7x_i + 10 = 0$, ou seja, de $(x_i - 2)(x_i - 5) = 0$. Portanto, cada x_i pode assumir os valores 2 ou 5, e há as seguintes possibilidades para D:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

29. Seja S uma matriz simétrica $n \times n$, isto é, $S^T = S$. As entradas de S^2 e de $(S^2)^T$, são dadas por

$$[S^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}s_{kj} = s_{i1}s_{1j} + s_{i2}s_{2j} + \ldots + s_{in}s_{nj} \tag{3}$$

e

$$[(S^2)^T]_{ij} = [S^2]_{ji} = \sum_{k=1}^{n} s_{jk}s_{ki} = s_{j1}s_{1i} + s_{j2}s_{2i} + \ldots + s_{jn}s_{ni}$$

respectivamente. Mas as entradas de S satisfazem a igualdade $s_{ij} = s_{ji}$, então resulta desta última equação, permutando os índices de cada termo, que

$$\begin{aligned} [(S^2)^T]_{ij} &= s_{j1}s_{1i} + s_{j2}s_{2i} + \ldots + s_{jn}s_{ni} \\ &= s_{1j}s_{i1} + s_{2j}s_{i2} + \ldots + s_{nj}s_{in} \\ &= s_{i1}s_{1j} + s_{i2}s_{2j} + \ldots + s_{in}s_{nj}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade deve-se à propriedade comutativa dos escalares s_{ij}. Comparando com (3), conclui-se que $[(S^2)^T]_{ij} = [S^2]_{ij}$, ou seja, que $(S^2)^T = S^2$, o que significa que S^2 é simétrica.

Observação: Para uma verificação mais direta, sem comparar entradas individuais das matrizes, poderia ser usada o fato de que $(AB)^T = B^T A^T$:

$$(S^2)^T = (SS)^T = S^T S^T = SS = S^2.$$

Por este raciocínio fica fácil ver que as potências de uma matriz simétrica são simétricas:

$$(S^n)^T = (S \cdot \ldots \cdot S)^T = S^T \cdot \ldots \cdot S^T = S \cdot \ldots \cdot S = S^n.$$

30. (a) Usando a definição de traço e as propriedades da adição, resulta que:

$$\begin{aligned} tr(A+B) &= [A+B]_{11} + [A+B]_{22} + \ldots + [A+B]_{nn} \\ &= ([A]_{11} + [A]_{11}) + ([A]_{22} + [B]_{22}) + \ldots + ([A]_{nn} + [B]_{nn}) \\ &= ([A]_{11} + \cdots + [A]_{nn}) + ([B]_{11} + \ldots + [B]_{nn}) \\ &= tr(A) + tr(B). \end{aligned}$$

(b) Segue da definição de traço e das propriedades da multiplicação por escalar que:

$$\begin{aligned} tr(cB) &= [cA]_{11} + [cA]_{22} + \ldots + [cA]_{nn} \\ &= c[A]_{11} + c[A]_{22} + \ldots + c[A]_{nn} \\ &= c([A]_{11} + \cdots + [A]_{nn}) \\ &= c \cdot tr(A). \end{aligned}$$

(c) Como a diagonal principal não é alterada pela transposição de matrizes, e o traço só depende destas entradas, tem-se:

$$\begin{aligned} tr(A^T) &= [A^T]_{11} + [A^T]_{22} + \ldots + [A^T]_{nn} \\ &= [A]_{11} + [A]_{22} + \ldots + [A]_{nn} \\ &= tr(A). \end{aligned}$$