Integrais e Séries – Exame – Turma 6 25/02/2025

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

O exercício correspondente a prova que vai ser substituída vale 40 pontos.

Tabela de integrais

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad \int \operatorname{cossec}^2(x)\,dx = -\cot(x) + c$$

1 [20] Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região contida entre os gráficos das funções $f(x) = |x-1|$ e $g(x) = \dfrac{2-x}{2}$ em torno da reta $x = -1$

As funções vão se interceptar em $x = 0$ e em $b \in [1, 2]$

$$\begin{aligned} f(b) &= g(b) \\ |b-1| &= 1 - \frac{b}{2} \\ b - 1 &= 1 - \frac{b}{2} && \text{pois } b > 1 \\ \frac{3}{2}b &= 2 \\ b &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Vamos usar cascas cilíndricas

$$V = \int_a^b 2\pi r(x)h(x)dx$$

onde

$$\begin{aligned} r(x) &= x + 1 \\ h(x) &= g(x) - f(x) \\ a &= 0 \\ b &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Para encontrar $h(x)$ precisamos dividir região em duas partes, para $x \in [0, 1]$

$$h(x) = g(x) - f(x) = 1 - \frac{x}{2} - |x-1| = 1 - \frac{x}{2} + x - 1 = \frac{x}{2}$$

para $x \in [1, 4/3]$

$$h(x) = g(x) - f(x) = 1 - \frac{x}{2} - |x-1| = 1 - \frac{x}{2} - x + 1 = 2 - \frac{3x}{2}$$

Calculando o volume para $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
V_1 &= \int_0^1 2\pi r(x) h(x)\, dx \\
&= \int_0^1 2\pi (x+1)\, \frac{x}{2}\, dx \\
&= \pi \int_0^1 x^2 + x\, dx \\
&= \pi \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\
&= \pi \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{5}{6}\pi
\end{aligned}$$

para $x \in [1, 4/3]$

$$\begin{aligned}
V_2 &= \int_1^{4/3} 2\pi r(x) h(x)\, dx \\
&= \int_1^{4/3} 2\pi (x+1) \left(2 - \frac{3x}{2} \right) dx \\
&= 2\pi \int_1^{4/3} -\frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2} + 2\, dx \\
&= 2\pi \left(-\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} + 2x \right) \Big|_1^{4/3} \\
&= \pi \left(-x^3 + \frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_1^{4/3} \\
&= \pi \left[\left(-\frac{4^3}{3^3} + \frac{4^2}{3^2 \times 2} + \frac{4^2}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{2} + 4 \right) \right] \\
&= \pi \left(-\frac{4^3}{3^3} + \frac{4^2}{3^2 \times 2} + \frac{4^2}{3} - 3 - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{19}{54}\pi
\end{aligned}$$

Volume do sólido

$$V = V_1 + V_2 = \frac{5}{6}\pi + \frac{19}{54}\pi = \frac{32}{27}\pi \approx 3{,}7234$$

2 [20] Calcule a integral $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

$$F(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$$x = 2\,\text{sen}(\theta) \qquad dx = 2\cos(\theta)d\theta$$

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-2^2\,\text{sen}^2(\theta)} = \sqrt{4\left(1-\text{sen}^2(\theta)\right)} = \sqrt{4\cos^2(\theta)} = 2\cos(\theta)$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \\
&= \int \frac{4\,\text{sen}^2(\theta)}{2\cos(\theta)}\,2\cos(\theta)\,d\theta \\
&= 4\int \text{sen}^2(\theta)\,d\theta \\
&= 4\int \frac{1}{2}\left(1-\cos(2\theta)\right)\,d\theta \\
&= 2\int 1-\cos(2\theta)\,d\theta \\
&= 2\left(\theta - \frac{\text{sen}(2\theta)}{2}\right) + c \\
&= 2\theta - \text{sen}(2\theta) + c \\
&= 2\theta - 2\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta) + c \\
&= 2\,\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) - 2\cos(\theta)\frac{x}{2} + c \\
&= 2\,\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}x + c
\end{aligned}$$

3 [20] Analise a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\left(1+\ln^2(n)\right)}$

Usando o teste da integral com a função

$$f(x) = \frac{1}{x\left(1+\ln^2(x)\right)}$$

Verificando as condições do teste
A função f só não é contínua em $x=0$, portanto é contínua em $[2,\infty)$.
A funçao f é positiva para todo $x>0$.
Derivando f temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[x\left(1+\ln^2(x)\right)\right]^{-1} \\
&= -\left[x\left(1+\ln^2(x)\right)\right]^{-2}\frac{d}{dx}\left[x\left(1+\ln^2(x)\right)\right] \\
&= \frac{-1}{x^2\left(1+\ln^2(x)\right)^2}\left[\left(1+\ln^2(x)\right)+x\left(1+\ln^2(x)\right)'\right] \\
&= \frac{-1}{x^2\left(1+\ln^2(x)\right)^2}\left[1+\ln^2(x)+x\left(\ln^2(x)\right)'\right] \\
&= \frac{-1}{x^2\left(1+\ln^2(x)\right)^2}\left[1+\ln^2(x)+x2\ln(x)\left(\ln(x)\right)'\right] \\
&= \frac{-1}{x^2\left(1+\ln^2(x)\right)^2}\left[1+\ln^2(x)+x2\ln(x)\frac{1}{x}\right] \\
&= -\frac{1+\ln^2(x)+2\ln(x)}{x^2\left(1+\ln^2(x)\right)^2}
\end{aligned}$$

Que será negativa para $x>1$.
Calculando a primitiva

$$\begin{aligned}
F &= \int \frac{dx}{x(1+\ln^2(x))} \qquad\qquad u=\ln(x) \qquad du=\frac{dx}{x} \\
&= \int \frac{du}{1+u^2} \\
&= \operatorname{arctg}(u)+c \\
&= \operatorname{arctg}\left(\ln(x)\right)+c
\end{aligned}$$

Calculando a integral imprópria

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^{\infty}\frac{dx}{x(1+\ln^2(x))} \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x(1+\ln^2(x))} \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(\ln(x)\right)\Big|_2^b\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}\left(\ln(b)\right)-\operatorname{arctg}\left(\ln(2)\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\operatorname{arctg}(t)-\operatorname{arctg}\left(\ln(2)\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\big(\ln(2)\big)$$

Como a integral converge a série também converge.

4 [20] Sabendo que, para $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$f^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

a) [04] Construa a Série de Taylor de $f(x)$ centrada em 2

b) [04] Determine o intervalo aberto onde a série converge absolutamente

c) [06] Use o polinômio de Taylor de terceiro grau para aproximar $f(3)$

d) [06] Estime o erro cometido na aproximação

Não é necessário encontrar a representação decimal dos valores calculados, mas é necessário realizar as simplificações elementares.

a)

$$f^{(n)}(2) = \frac{2(-1)^n n!}{2^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{2^n}$$

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^n\, n!}(x-2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(x-2)^n \end{aligned}$$

b) Usando o teste da raiz

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x-2|^n}{2^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x-2|}{2} \\ &= \frac{|x-2|}{2} \end{aligned}$$

Impondo $\rho < 1$ temos $|x-2| < 2$ portanto $I = (0, 4)$

c)

$$P_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{2^n}(x-2)^n = 1 - \frac{x-2}{2} + \frac{(x-2)^2}{2^2} - \frac{(x-2)^3}{2^3}$$

$$P_3(3) = 1 - \frac{3-2}{2} + \frac{(3-2)^2}{2^2} - \frac{(3-2)^3}{2^3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

d)

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-2)^4 = \frac{2(-1)^4 4!}{c^5 4!}(x-2)^4 = \frac{2(x-2)^4}{c^5} \qquad c \in [2, x]$$

$$R_3(3) = \frac{2(3-2)^4}{c^5} = \frac{2}{c^5} \qquad c \in [2, 3]$$

$$|R_3(3)| \leq \frac{2}{2^5} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$