CFVVI – EXAME ESPECIAL – TURMA 4 18/09/2024

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [25] Calcule o limite solicitado, ou prove que o limite não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{y-x}$

Se tentarmos calcular diretamente a fração obtemos uma indeterminação $0/0$. Portanto, precisamos remover a indeterminação manipulando algebricamente a função, assumindo que $(x,y) \neq (1,1)$, temos

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2-y^2}{y-x} \\
&= \frac{(x-y)(x+y)}{y-x} \\
&= -\frac{(x-y)(x+y)}{x-y} \\
&= -(x+y) \\
&= -x-y
\end{aligned}$$

Onde o cancelamento só foi possível, pois $(x,y) \neq (1,1)$. Agora podemos calcular o limite, pois temos uma função contínua em $(1,1)$,

$$L = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{y-x} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} -x-y = -2$$

2 [25] Encontre linearização da função $f(x,y) = x^2 - xy - y^2$ no ponto $(1,1)$.

A linearização de f no ponto $(1,1)$ é a função

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &= f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) \end{aligned}$$

Precisamos das derivadas parciais de f

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 - xy - y^2\right] = 2x - y$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 - xy - y^2\right] = -x - 2y$$

Avaliando f e suas derivadas no ponto $(1,1)$

$$f(1,1) = \left(x^2 - xy - y^2\right)\Big|_{(1,1)} = 1^2 - 1 \times 1 - 1^2 = -1$$

$$f_x(1,1) = (2x - y)\Big|_{(1,1)} = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$f_y(1,1) = (-x - 2y)\Big|_{(1,1)} = -1 - 2 \times 1 = -3$$

Assim

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) \\ &= -1 + 1(x-1) - 3(y-1) \\ &= -1 + x - 1 - 3y + 3 \\ &= x - 3y + 1 \end{aligned}$$

3 [25] Encontre e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

Precisamos das derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^3 + 3xy + y^3\right] = 3x^2 + 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^3 + 3xy + y^3\right] = 3x + 3y^2$$

então

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y \\ 3x + 3y^2 \end{pmatrix}$$

A função é um polinômio, então possui derivadas em todos os pontos do plano. Assim os pontos críticos são apenas os pontos onde as derivadas parciais são zero, $\nabla f = 0$

$$3x^2 + 3y = 0 \qquad \text{e} \qquad 3x + 3y^2 = 0$$

ou, simplificando,

$$x^2 + y = 0 \qquad \text{e} \qquad x + y^2 = 0$$

Isolando y na primeira equação, $y = -x^2$, e substituindo na segunda, temos

$$\begin{aligned} x + y^2 &= 0 \\ x + \left(-x^2\right)^2 &= 0 \\ x + x^4 &= 0 \\ x(1 + x^3) &= 0 \end{aligned}$$

As soluções dessa equação são $x = 0$ ou $x = -1$. Se $x = 0$ temos $y = 0$ e se $x = -1$ temos $y = -1$. Portanto, os pontos críticos são

$$(x_1, y_1) = (0,0) \qquad \text{e} \qquad (x_2, y_2) = (-1,-1)$$

Precisamos das derivadas parciais de segunda ordem de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[3x^2 + 3y\right] = 6x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[3x + 3y^2\right] = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[3x + 3y^2\right] = 3$$

então

$$H = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}$$

Para classificar os pontos críticos precisamos avaliar o discriminante nos pontos críticos.

Considerando o ponto $(x_1, y_1) = (0, 0)$

$$f_{xx}(0,0) = 0$$

$$f_{yy}(0,0) = 0$$

$$f_{xy}(0,0) = 3$$

$$D_1 = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = 0 \times 0 - 3^2 = -9 < 0$$

Portanto, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela.
Considerando o ponto $(x_2, y_2) = (-1, -1)$

$$f_{xx}(-1,-1) = -6$$

$$f_{yy}(-1,-1) = -6$$

$$f_{xy}(-1,-1) = 3$$

$$D_2 = f_{xx}(-1,-1)f_{yy}(-1,-1) - f_{xy}^2(-1,-1) = (-6)(-6) - 3^2 = 36 - 9 = 25 > 0$$

Portanto, o ponto $(-1, -1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0$ o ponto é um ponto de máximo local.

4 [25] Encontre os valores máximo e mínimo de $f(x,y,z) = x - 2y + 5z$ na esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 30$

Queremos os extremos da função

$$f(x,y,z) = x - 2y + 5z$$

restrita a

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 30$$

Para aplicarmos multiplicadores de Lagrange precisamos das derivadas parciais das funções f e g

$$f_x(x,y,z) = 1 \qquad f_y(x,y,z) = -2 \qquad f_z(x,y,z) = 5$$

$$g_x(x,y,z) = 2x \qquad g_y(x,y,z) = 2y \qquad g_z(x,y,z) = 2z$$

Precisamos resolver o sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g = 30$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 5 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 30 \end{cases}$$

Da primeiro equação temos

$$\lambda = \frac{1}{2x}$$

Isolando y na segunda e substituindo λ temos

$$y = \frac{-2}{2\lambda} = \frac{-1}{\lambda} = -2x$$

Fazendo o mesmo na terceira temos

$$z = \frac{5}{2\lambda} = \frac{5 \times 2x}{2} = 5x$$

Substituindo y e z na quarta equação

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 30 \\ x^2 + (-2x)^2 + (5x)^2 &= 30 \\ x^2 + 4x^2 + 25x^2 &= 30 \\ 30x^2 &= 30 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Para $x = 1$

$$y = -2x = -2 \qquad z = 5x = 5$$

portanto

$$f(1,-2,5) = 1 - 2(-2) + 5 \times 5 = 1 + 4 + 25 = 30$$

Para $x = -1$

$$y = -2x = 2 \qquad\qquad z = 5x = -5$$

portanto

$$f(-1, 2, -5) = -1 - 2 \times 2 + 5(-5) = -1 - 4 - 25 = -30$$

O valor mínimo de f é -30 e o valor máximo é 30