

# Derivadas Parciais de Ordem Superior

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/cfvv1>

# Conteúdo

Derivadas Parciais de Segunda Ordem

Teorema das Derivadas Mistas

Derivadas Parciais de Ordem Superior

Lista Mínima

# Conceito

Derivada de uma derivada de uma função

# Notações

Derivadas de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{yy}$$

Derivadas de segunda ordem mistas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{xy}$$

# Atenção Para a Ordem das Derivadas Mistas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$f_{xy} = (f_x)_y$$

# Exemplo 1

Encontre as derivadas de segunda ordem da função

$$f(x, y) = x \cos(y) + ye^x$$

Note que  $f$  é contínua no plano

Precisamos calcular  $f_{xx}$ ,  $f_{yy}$ ,  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$

## Exemplo 1 – $f_x$

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x} \\&= \frac{\partial}{\partial x} (x \cos(y) + ye^x) \\&= \frac{\partial}{\partial x} (x \cos(y)) + \frac{\partial}{\partial x} (ye^x) \\&= \cos(y) \frac{\partial x}{\partial x} + y \frac{\partial e^x}{\partial x} \\&= \cos(y) + ye^x\end{aligned}$$

(contínua no plano)

## Exemplo 1 – $f_y$

$$\begin{aligned}f_y(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y} \\&= \frac{\partial}{\partial y}(x \cos(y) + ye^x) \\&= \frac{\partial}{\partial y}(x \cos(y)) + \frac{\partial}{\partial y}(ye^x) \\&= x \frac{\partial}{\partial y} \cos(y) + e^x \frac{\partial y}{\partial y} \\&= -x \sin(y) + e^x \\&= e^x - x \sin(y)\end{aligned}$$

(contínua no plano)



## Exemplo 1 – $f_{xx}$

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\&= \frac{\partial}{\partial x} (\cos(y) + ye^x) \\&= \frac{\partial}{\partial x} (\cos(y)) + \frac{\partial}{\partial x} (ye^x) \\&= 0 + y \frac{\partial e^x}{\partial x} \\&= ye^x\end{aligned}$$

(contínua no plano)

## Exemplo 1 – $f_{xy}$

$$\begin{aligned}f_{xy}(x, y) &= (f_x)_y(x, y) \\&= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\&= \frac{\partial}{\partial y} (\cos(y) + ye^x) \\&= \frac{\partial}{\partial y} (\cos(y)) + \frac{\partial}{\partial y} (ye^x) \\&= -\operatorname{sen}(y) + e^x \frac{\partial y}{\partial y} \\&= -\operatorname{sen}(y) + e^x = e^x - \operatorname{sen}(y) \quad (\text{contínua no plano})\end{aligned}$$

## Exemplo 1 – $f_{yy}$

$$\begin{aligned}f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\&= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\&= \frac{\partial}{\partial y} (e^x - x \operatorname{sen}(y)) \\&= \frac{\partial}{\partial y} (e^x) - \frac{\partial}{\partial y} (x \operatorname{sen}(y)) \\&= 0 - x \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{sen}(y) \\&= -x \cos(y)\end{aligned}$$

(contínua no plano)

## Exemplo 1 – $f_{yx}$

$$f_{yx}(x, y) = (f_y)_x(x, y)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (e^x - x \operatorname{sen}(y))$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} e^x - \frac{\partial}{\partial x} (x \operatorname{sen}(y))$$

$$= e^x - \operatorname{sen}(y) \frac{\partial x}{\partial x}$$

$$= e^x - \operatorname{sen}(y)$$

(contínua no plano)

# Exemplo 1 – Resposta

$$f_{xx}(x, y) = ye^x$$

$$f_{xy}(x, y) = e^x - \text{sen}(y)$$

$$f_{yy}(x, y) = -x \cos(y)$$

$$f_{yx}(x, y) = e^x - \text{sen}(y)$$

## Exemplo 2

Encontre as derivadas de segunda ordem mistas da função  $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

Dica  $\frac{d}{dt} \operatorname{arctg}(t) = \operatorname{arctg}'(t) = \frac{1}{1+t^2}$

$f$  não é contínua no plano

Precisamos calcular  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$

## Exemplo 2 – $f_x$

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x} \\&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \arctg \left( \frac{y}{x} \right) \right) \\&= \arctg' \left( \frac{y}{x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x} \right) \\&= \arctg' \left( \frac{y}{x} \right) y \frac{\partial x^{-1}}{\partial x} \\&= \arctg' \left( \frac{y}{x} \right) y (-x^{-2}) \\&= \arctg' \left( \frac{y}{x} \right) \frac{-y}{x^2}\end{aligned}$$

Lembrando que  $\arctg'(t) = \frac{1}{1+t^2}$

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \frac{1}{1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2} \frac{-y}{x^2} \\&= \frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \frac{-y}{x^2} \\&= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{-y}{x^2} \\&= \frac{-y}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

## Exemplo 2 – $f_y$

$$\begin{aligned}f_y(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y} \\&= \frac{\partial}{\partial y} \left( \arctg \left( \frac{y}{x} \right) \right) \\&= \arctg' \left( \frac{y}{x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x} \right) \\&= \arctg' \left( \frac{y}{x} \right) \frac{1}{x} \frac{\partial y}{\partial y} \\&= \arctg' \left( \frac{y}{x} \right) \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Lembrando que  $\arctg'(t) = \frac{1}{1+t^2}$

$$\begin{aligned}f_y(x, y) &= \frac{1}{1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2} \frac{1}{x} \\&= \frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \frac{1}{x} \\&= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{1}{x} \\&= \frac{x}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$



## Exemplo 2 – $f_{xy}$

$$\begin{aligned}f_{xy}(x, y) &= (f_x)_y(x, y) \\&= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\&= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \\&= - \frac{(x^2 + y^2) \frac{\partial y}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\f_{xy}(x, y) &= - \frac{x^2 + y^2 - y \left( \frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial y^2}{\partial y} \right)}{(x^2 + y^2)^2} \\&= - \frac{x^2 + y^2 - y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \\&= - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\&= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

## Exemplo 2 – $f_{yx}$

$$\begin{aligned}f_{yx}(x, y) &= (f_y)_x(x, y) \\&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\&= \frac{(x^2 + y^2) \frac{\partial x}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{yx}(x, y) &= \frac{x^2 + y^2 - x \left( \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial x} \right)}{(x^2 + y^2)^2} \\&= \frac{x^2 + y^2 - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \\&= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

## Exemplo 2 – Resposta

$$f_{xy}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

# Conteúdo

Derivadas Parciais de Segunda Ordem

Teorema das Derivadas Mistas

Derivadas Parciais de Ordem Superior

Lista Mínima

# Teorema das Derivadas Mistas

Se a função  $f(x, y)$  e suas derivadas parciais  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  forem definidas em uma vizinhança do ponto  $(a, b)$  e todas forem contínuas, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

## Exemplo 3

Encontre  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  se  $w = xy + \frac{e^y}{y^2 + 1}$

Assumindo que as derivadas são contínuas

## Exemplo 3 – solução

Queremos calcular

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Calculando a primeira derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( xy + \frac{e^y}{y^2 + 1} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (xy) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{e^y}{y^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Precisamos calcular a derivada de uma divisão

## Exemplo 3 – solução

Usando a hipótese de que as derivadas são **contínuas**  
podemos usar o teorema

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

Temos então que calcular

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$



## Exemplo 3 – solução

Calculando a derivada primeira

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( xy + \frac{e^y}{y^2 + 1} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (xy) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^y}{y^2 + 1} \right) \\ &= y \frac{\partial x}{\partial x} + 0 \\ &= y\end{aligned}$$

(contínua no plano)

## Exemplo 3 – solução

Calculando a derivada segunda

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (y) \\ &= 1\end{aligned}$$

(contínua no plano)

# Conteúdo

Derivadas Parciais de Segunda Ordem

Teorema das Derivadas Mistas

Derivadas Parciais de Ordem Superior

Lista Mínima

# Notações

Derivadas terceiras

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

$$f_{xxx}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

$$f_{xxy}$$

Derivadas quartas

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$$

$$f_{xxx}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}$$

$$f_{xxyy}$$

# Ordem de Derivação

Desde que todas as derivadas envolvidas sejam contínuas  
a ordem de derivação é irrelevante

## Exemplo 4

Encontre a derivada  $f_{yxyz}(x, y, z)$  da função  $f(x, y, z) = 1 - 2xy^2z + x^2y$

Queremos calcular

$$f_{yxyz}(x, y, z) = \left( \left( \left( f_y(x, y, z) \right)_x \right)_y \right)_z = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right) \right)$$

## Exemplo 4 – solução

$$f(x, y, z) = 1 - 2xy^2z + x^2y$$

$$f_y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} (1 - 2xy^2z + x^2y) = 0 - 2x2yz + x^2 = -4xyz + x^2$$

$$f_{yx}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} (-4xyz + x^2) = -4yz + 2x$$

$$f_{yxy}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} (-4yz + 2x) = -4z + 0 = -4z$$

$$f_{yxyz}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} (-4z) = -4$$

# Conteúdo

Derivadas Parciais de Segunda Ordem

Teorema das Derivadas Mistas

Derivadas Parciais de Ordem Superior

Lista Mínima



# Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12<sup>a</sup> ed. – Seção 14.3

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 43-45, 51-54, 57, 61

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações