

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

- 1 [25] Considere que a equação $e^{xyz} + x^2 - z = 0$ defina z como função de x e y , encontre $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$e^{xyz(x,y)} + x^2 - z(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{xyz(x,y)} + x^2 - z(x,y) \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{xyz(x,y)} + \frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$e^{xyz(x,y)} \frac{\partial}{\partial x} (xyz(x,y)) + 2x - \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$e^{xyz(x,y)} \left(yz(x,y) + xy \frac{\partial z}{\partial x} \right) + 2x - \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\left(xye^{xyz(x,y)} - 1 \right) \frac{\partial z}{\partial x} = -yz(x,y)e^{xyz(x,y)} - 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-yz(x,y)e^{xyz(x,y)} - 2x}{xye^{xyz(x,y)} - 1}$$

$$= \frac{-yze^{xyz} - 2x}{xye^{xyz} - 1}$$

2 [25] Seja $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, use a aproximação linear de f no ponto $(1, 2)$ para estimar $f(1,01; 1,98)$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

Avaliando as derivadas no ponto $(1, 2)$

$$f(1, 2) = \ln(1 + 4) = \ln(5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = \frac{4}{5}$$

A aproximação linear é

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$$

$$= \ln(5) + \frac{2}{5}(x - 1) + \frac{4}{5}(y - 2)$$

Avaliando no ponto $f(1,01; 1,98)$

$$L(1,01; 1,98) = \ln(5) + \frac{2}{5}(0,01) + \frac{4}{5}(-0,02)$$

$$= \ln(5) + \frac{2 - 8}{500}$$

$$= \ln(5) - \frac{6}{500}$$

$$= \ln(5) - \frac{3}{250}$$

$$\approx 1.59744$$

Comparando com o valor exato

$$f(1,01; 1,98) = 1.59747$$

3 [25] Seja $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

a) Calcule o gradiente de f

b) Calcule a derivada de f no ponto $(1, 2)$ na direção do vetor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Vetor gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \\ \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \end{pmatrix}$$

b) Gradiente no ponto $(1, 2)$

$$\nabla f(x, y)(1, 2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} \\ \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Calculando um vetor unitário na direção de v

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Derivada direcional

$$\begin{aligned} D_u f(1, 2) &= \nabla f(1, 2) \cdot u \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{-2}{3} + \frac{2}{3} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

4 [25] Seja $f(x, y, z) = e^{x+y} \cos(z)$, calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ no ponto $(0, 0, \pi)$. Efetue as derivadas na ordem especificada pela notação.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (e^{x+y} \cos(z)) \\&= e^{x+y} \frac{\partial}{\partial z} \cos(z) \\&= e^{x+y} (-\operatorname{sen}(z)) \\&= -e^{x+y} \operatorname{sen}(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} (-e^{x+y} \operatorname{sen}(z)) \\&= -\operatorname{sen}(z) \frac{\partial}{\partial x} e^{x+y} \\&= -\operatorname{sen}(z) e^{x+y} \frac{\partial}{\partial x} (x + y) \\&= -\operatorname{sen}(z) e^{x+y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0, 0, \pi) &= -\operatorname{sen}(z) e^{x+y} \Big|_{(0, 0, \pi)} \\&= -\operatorname{sen}(\pi) e^{0+0} \\&= -\operatorname{sen}(\pi) e^0 \\&= 0\end{aligned}$$