CFVVI – Prova 2 – Turma 1 12/08/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [20] Considerando que a equação $xe^y + \text{sen}(xy) + y - \ln(2) = 0$ define y como função de x encontre $\dfrac{dy}{dy}$.

Usando a fórmula para a diferenciação implícita

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

onde $F(x,y) = xe^y + \text{sen}(xy) + y - \ln(2)$ temos

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[xe^y + \text{sen}(xy) + y - \ln(2)\right] = e^y + y\cos(xy)$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[xe^y + \text{sen}(xy) + y - \ln(2)\right] = xe^y + x\cos(xy) + 1$$

Assim

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^y + y\cos(xy)}{xe^y + x\cos(xy) + 1}$$

2 [25] Encontre a direção na qual a função $f(x,y) = x^2y + e^{xy}\,\text{sen}(y)$ cresce mais rapidamente a partir do ponto $(1,0)$. Qual a derivada nessa direção?

A direção de crescimento mais rápido é a direção do vetor gradiente

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2y + e^{xy}\,\text{sen}(y)\right] = 2xy + ye^{xy}\,\text{sen}(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2y + e^{xy}\,\text{sen}(y)\right] = x^2 + xe^{xy}\,\text{sen}(y) + e^{xy}\cos(y)$$

Avaliando as derivadas no ponto $(1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \left[2xy + ye^{xy}\,\text{sen}(y)\right]\Big|_{(1,0)} = 2\times 1\times 0 + 0e^{1\times 0}\,\text{sen}(0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \left[x^2 + xe^{xy}\,\text{sen}(y) + e^{xy}\cos(y)\right]\Big|_{(1,0)} = 1^2 + 1e^{1\times 0}\,\text{sen}(0) + e^{1\times 0}\cos(0) = 2$$

A direção de maior crescimento é

$$v = \nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Temos agora que calcular a derivada na direção do vetor gradiente. Primeiro encontramos o vetor unitário na direção de v

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{0^2+2^2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D_u = \nabla f(1,0)\cdot u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 2\times 1 = 2$$

A derivada na direção de maior crescimento é 2.

3 [25] Encontre linearização da função $f(x,y)=\sqrt{y-x}$ no ponto $(1,2)$.

A linearização de f no ponto $(1,2)$ é a função

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &= f(1,2)+f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2) \end{aligned}$$

Precisamos das derivadas parciais de f

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{y-x}\,\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[(y-x)^{1/2}\right]=\frac{1}{2}(y-x)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}(y-x)=\frac{-1}{2\sqrt{y-x}}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{y-x}\,\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[(y-x)^{1/2}\right]=\frac{1}{2}(y-x)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial y}(y-x)=\frac{1}{2\sqrt{y-x}}$$

Avaliando f e suas derivadas no ponto $(1,2)$

$$f(1,2)=\sqrt{2-1}=\sqrt{1}=1$$

$$f_x(1,2)=\frac{-1}{2\sqrt{2-1}}=\frac{-1}{2}$$

$$f_y(1,2)=\frac{1}{2\sqrt{2-1}}=\frac{1}{2}$$

Assim

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(1,2)+f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2) \\ &= 1-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-2) \\ &= 1-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{y}{2}-1 \\ &= -\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

4 [30] Considerando a função $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy$.

a) [5] Calcule o gradiente de f.

b) [5] Calcule a hessiana de f.

c) [10] Encontre todos os pontos críticos de f.

d) [10] Classifique cada ponto crítico de f.

a)
Precisamos das derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^4 + y^4 + 4xy\right] = 4x^3 + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^4 + y^4 + 4xy\right] = 4y^3 + 4x$$

então

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x^3 + 4y \\ 4y^3 + 4x \end{pmatrix}$$

b)
Precisamos das derivadas parciais de segunda ordem de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[4x^3 + 4y\right] = 12x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[4y^3 + 4x\right] = 12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[4y^3 + 4x\right] = 4$$

então

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 & 4 \\ 4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

c)
A função é um polinômio, então possui derivadas em todos os pontos do plano. Assim os pontos críticos são apenas os pontos onde as derivadas parciais são zero, $\nabla f = 0$

$$4x^3 + 4y = 0 \qquad \text{e} \qquad 4y^3 + 4x = 0$$

ou, simplificando,

$$x^3 + y = 0 \qquad \text{e} \qquad y^3 + x = 0$$

Isolando y na primeira equação, $y = -x^3$, e substituindo na segunda, temos

$$y^3 + x = 0$$

$$\begin{aligned}\left(-x^3\right)^3+x&=0\\-x^9+x&=0\\x^9-x&=0\\x(x^8-1)&=0\end{aligned}$$

As soluções dessa equação são $x=0$, $x=1$ ou $x-1$. Se $x=0$ temos $y=0$, se $x=1$ temos $y=-1$ e se $x=-1$ temos $y=1$. Portanto, os pontos críticos são

$$(x_1,y_1)=(0,0),\qquad (x_2,y_2)=(1,-1)\qquad \text{e}\qquad (x_3,y_3)=(-1,1)$$

d)

Para classificar os pontos críticos precisamos avaliar o discriminante nos pontos críticos.
Considerando o ponto $(x_1,y_1)=(0,0)$

$$f_{xx}(0,0)=0$$

$$f_{yy}(0,0)=0$$

$$f_{xy}(0,0)=4$$

$$D_1=f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0)=0\times 0-4^2=-16<0$$

Portanto, o ponto $(0,0)$ é um ponto de sela.
Considerando o ponto $(x_2,y_2)=(1,-1)$

$$f_{xx}(1,-1)=12$$

$$f_{yy}(1,-1)=12$$

$$f_{xy}(1,-1)=4$$

$$D_2=f_{xx}(1,-1)f_{yy}(1,-1)-f_{xy}^2(1,-1)=12\times 12-4^2=144-16=128>0$$

Portanto, o ponto $(1,-1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(1,-1)=12>0$ o ponto é um ponto de mínimo local.
Considerando o ponto $(x_3,y_3)=(-1,1)$

$$f_{xx}(-1,1)=12$$

$$f_{yy}(-1,1)=12$$

$$f_{xy}(-1,1)=4$$

$$D_3=f_{xx}(-1,1)f_{yy}(-1,1)-f_{xy}^2(-1,1)=12\times 12-4^2=144-16=128>0$$

Portanto, o ponto $(-1,1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(-1,1)=12>0$ o ponto é um ponto de mínimo local.