Integrais e Séries – Prova 4 – Turma 4 12/12/2023

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [30] Calcule a Série de Taylor da função $f(x) = \displaystyle\int \operatorname{senh}\left(x^2\right) dx$

Lembrete: $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Sabemos que a Série de Taylor da função exponencial é

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Primeiro calculamos a Série de Taylor das funções

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

agora da função

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}\left(x^2\right) &= \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[x^{2n} - (-1)^n x^{2n}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n!} x^{2n}
\end{aligned}$$

Observando que $1-(-1)^n = 1+(-1)^{n+1}$ vale 2 para n ímpar e zero para n par, podemos remover todos os índices pares e fazer a mudança de índice $n = 2k+1$, obtendo

$$\operatorname{senh}\left(x^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)!} x^{2(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(2k+1)!}$$

Agora integramos

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int \operatorname{senh}\left(x^2\right) dx \\
&= \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(2k+1)!}\, dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \int x^{4k+2} dx \\
&= C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{x^{4k+3}}{4k+3} \\
&= C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)(2k+1)!}
\end{aligned}
$$

2 [40] Seja $f(x) = \dfrac{2}{1+x}$

a) [12] Encontre um padrão para $f^{(n)}(x)$

b) [14] Usando o padrão do item anterior, encontre a Serie de Taylor de $f(x)$, centrada em zero

c) [14] Obtenha o intervalo de convergência da série de potências

a) Calculando as primeiras derivadas

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \frac{2}{1+x} = 2(1+x)^{-1} \\
f^{(1)}(x) &= \frac{d}{dx}\left[2(1+x)^{-1}\right] = 2(-1)(1+x)^{-1-1}(1+x)' = -2(1+x)^{-2} \\
f^{(2)}(x) &= \frac{d^2}{dx^2}\left[2(1+x)^{-1}\right] = \quad 2 \cdot 2(1+x)^{-3} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{d^3}{dx^3}\left[2(1+x)^{-1}\right] = -2 \cdot 2 \cdot 3(1+x)^{-4} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{d^4}{dx^4}\left[2(1+x)^{-1}\right] = \quad 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(1+x)^{-5} \\
f^{(5)}(x) &= \frac{d^5}{dx^5}\left[2(1+x)^{-1}\right] = -2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5(1+x)^{-6}
\end{aligned}
$$

Por inspeção, vemos que

$$
f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[2(1+x)^{-1}\right] = 2(-1)^n n!(1+x)^{-n-1} = \frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}
$$

b) Os coeficientes da série de Taylor são

$$
c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{2(-1)^n n!}{(1-0)^{n+1} n!} = 2(-1)^n
$$

Montando a série temos

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n$$

c) Reescrevendo a série temos

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-x)^n$$

que é uma série geométrica com $\alpha = 2$ e $r = -x$, portanto, convergente apenas quando $|r| < 1$ ou seja $x \in (-1, 1)$.

3 [30] Prove que a série de Maclaurin da função cosseno converge para $\cos x$, em todo $x \in \mathbb{R}$

Pelo **Teorema de Taylor**, sabemos que o erro cometido ao aproximarmos $\cos(x)$ pelo seu polinômio de Taylor centrado em zero de grau n é

$$R_n(x) = \frac{\cos^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

para algum ξ entre zero e x. Como todas as derivadas do cosseno são cossenos ou senos alternando os sinais, podemos escrever

$$\left|\cos^{(k)}(t)\right| \leq 1$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$. Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$|R_n(x)| = \frac{\left|\cos^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right| \leq \frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!}$$

Calculando o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!} = \left|x^{n+1}\right| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \left|x^{n+1}\right| \cdot 0 = 0$$

podemos usar o **Teorema do Confronto** para mostrar que $R_n(x)$ vai para zero, quando n vai para o infinito. Portanto, a série converge para a função.