## Séries Numéricas – Exemplos

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

17 de agosto de 2025

### Conteúdo

Séries Geométricas

Séries Telescópicas

Lista Mínima

### Séries Geométricas

Uma Série Geométrica é uma série com a forma

$$\alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \dots + \alpha r^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$
 número fixo não nulo,  $\alpha \neq 0$ 

$$r \in \mathbb{R}$$
 razão da série

$$a_n = \alpha r^{n-1}$$
 termo geral

Especial pois sabemos quando converge e qual sua soma

# Convergência da Série Geométrica – Parte 1

Se r = 1 temos

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha \, 1^{k-1} = \sum_{k=1}^n \alpha = \underbrace{\alpha + \dots + \alpha}_{n \text{ vezes}} = n\alpha$$

Portanto  $S_n$  diverge quando  $n \to \infty$ 

# Convergência da Série Geométrica – Parte 2

Se  $r \neq 1$  temos

$$S_n = \alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \dots + \alpha r^{n-1}$$

$$rS_n = \alpha r + \alpha r^2 + \dots + \alpha r^{n-1} + \alpha r^n$$

$$S_n - rS_n = \alpha - \alpha r^n$$

$$S_n(1-r) = \alpha - \alpha r^n$$

$$S_n = \frac{\alpha(1 - r^n)}{1 - r} \qquad (r \neq 1)$$

#### Calculando o Limite

Com 
$$r \neq 1$$
, temos  $S_n = \frac{\alpha(1 - r^n)}{1 - r}$ , portanto

$$\lim S_n = \lim \frac{\alpha(1-r^n)}{1-r} = \frac{\alpha}{1-r} - \frac{\alpha}{1-r} \lim r^n$$

$$r=-1$$
  $r^n=(-1)^n$  diverge quando  $n\to\infty$  portanto  $S_n$  diverge

$$|r|>1$$
  $|r^n|\to\infty$  quando  $n\to\infty$  portanto  $S_n$  diverge

$$|r| < 1$$
  $r^n \to 0$  quando  $n \to \infty$  portanto  $S_n \to \frac{\alpha}{1-r}$ 

### Séries Geométricas

Uma série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1}$$

é convergente se |r| < 1 com soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1} = \frac{\alpha}{1-r}$$

e divergente se  $|r| \ge 1$ 

### Conteúdo

Séries Geométricas

Séries Telescópicas

Lista Mínima

## Séries Telescópicas

Raramente conseguimos fórmulas exatas para a soma de séries

Séries Telescópicas são um caso especial onde quase todos os termos se anulam

# Exemplo

Calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

### Somas Parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

### Calculando o Limite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \to \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1$$

## Pode Não Ser Óbvio

Calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Usando frações parciais

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

**Temos** 

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

### Conteúdo

Séries Geométricas

Séries Telescópicas

Lista Mínima

#### Lista Mínima

Estudar as Seção 6.1 da Apostila

Exercícios: 8a-c, 10, 11a-b

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações