GABARITO

- 1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
- 2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
- 3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
- 4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
- 5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
- 1 [25] Use o teste da integral para verificar se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4}$ é convergente. Verifique todas as condições do teste.

Vamos usar a função $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$

Verificando as três condições do teste da integral.

- 1) A função é positiva para x > 0.
- 2) A função é contínua pois $x^2 + 4$ nunca será zero.
- 3) Para veerificar que f é decrescente precisamos verificar o sinal da dua derivada

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2+4) - x(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-x2x}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

A derivada será negativa para todo x>2 portanto a função é decrescente. Calculando a primitiva de f

$$F(x) = \int f(x)dx$$

$$= \int \frac{x}{x^2 + 4} dx \qquad u = x^2 + 4 \qquad du = 2xdx$$

$$= \int \frac{1}{u} \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2} \ln|u|$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4|$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4)$$

Calculando a integral de f no intervalo onde ela atende as condições do teste

$$I = \int_{3}^{\infty} f(x)dx$$
$$= \lim_{b \to \infty} \int_{2}^{b} f(x)dx$$

$$\begin{split} &= \lim_{b \to \infty} \left(F(x) \Big|_3^b \right) \\ &= \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{2} \ln \left(b^2 + 4 \right) - \frac{1}{2} \ln \left(3^2 + 4 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \to \infty} \left[\ln \left(b^2 + 4 \right) \right] - \frac{1}{2} \ln \left(13 \right) \end{split}$$

Como $\lim_{b\to\infty}\ln\left(b^2+4\right)=\infty$ a integral imprópria diverge e portanto a série também diverge.

Vamos aplicar o teste da razão.

O termo geral da série é

$$u_n = \frac{4^n x^{2n}}{n}$$

seu sucessor é

$$u_{n+1} = \frac{4^{n+1}x^{2(n+1)}}{n+1} = \frac{4^{n+1}x^{2n+2}}{n+1}$$

Calculando o quociente dos módulos

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \left| \frac{4^{n+1}x^{2n+2}}{n+1} \right| \left| \frac{n}{4^n x^{2n}} \right|$$

$$= \frac{4^{n+1}|x|^{2n+2}}{n+1} \frac{n}{4^n |x|^{2n}}$$

$$= \frac{4|x|^2 n}{n+1}$$

$$= \frac{4nx^2}{n+1}$$

Calculando o limite

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{4nx^2}{n+1} = 4x^2 \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 4x^2$$

A condição de convergência do teste da razão é $\rho < 1$ portanto

$$\rho < 1
4x^{2} < 1
x^{2} < \frac{1}{4}
|x| < \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}
-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

A série converge absolutamente no intervalo $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

3 [25] Calcule a derivada da função $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n \ln n}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n \ln n}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \frac{d}{dx} x^{n-2}$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} (n-2) x^{n-3}$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-2}{n \ln n} x^{n-3}$$

A série da derivada começa em n=3 pois a derivada de x^{n-2} com n=2 é zero.

4 [25] Encontre a Série de Taylor, centrada em 1, da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Calculando as derivadas de $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$$f^{(1)}(x) = (x^{-2})' = -2x^{-3}$$

$$f^{(2)}(x) = (-2x^{-3})' = -2(-3)x^{-4} = 3!x^{-4}$$

$$f^{(3)}(x) = (3!x^{-4})' = 3!(-4)x^{-5} = -4!x^{-5}$$

$$f^{(4)}(x) = (-4!x^{-5})' = -4!(-5)x^{-6} = 5!x^{-6}$$

Identificamos o padrão

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (n+1)! x^{-n-2}$$

Avaliando em x=1 temos

$$f^{(n)}(1) = (-1)^n (n+1)!$$

O coeficiente da Série de Taylos será

$$c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{(-1)^n (n+1)!}{n!} = \frac{(-1)^n (n+1)n!}{n!} = (-1)^n (n+1)$$

A Série de Taylor é

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$$