

# Integrais Indefinidas

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

# Conteúdo

Integrais Indefinidas

Encontrando uma Primitiva

Propriedades

Exemplos

Lista Mínima

# Integrais Indefinidas

## Sinônimos

- ▶ Integral indefinida
- ▶ Primitiva
- ▶ Antiderivada

# Definição

Uma função  $F$  é a **Primitiva** da função  $f$  em um intervalo  $I$  se

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

para todo  $x \in I$

# Primitiva Mais Geral

Se  $G$  é uma primitiva de  $f$  no intervalo  $I$ , então a **primitiva mais geral** de  $f$  em  $I$  é

$$F(x) = G(x) + C$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária

Notação da Primitiva, Antiderivada e Integral Indefinida de uma função  $f$

$$\int f(x) dx$$

# Conteúdo

Integrais Indefinidas

Encontrando uma Primitiva

Propriedades

Exemplos

Lista Mínima

# Calculando Inversas – Raízes Quadradas

$\sqrt{x}$  é a operação inversa de  $x^2$  para  $x \geq 0$

Sabemos calcular o quadrado

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 9$$

$$4^2 = 16$$

Valores conhecidos para raízes

$$\sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{16} = 4$$

Para os demais valores precisamos de uma nova técnica



# Exemplo

Encontrar a primitiva mais geral de  $f(x) = \cos(x)$

Sabemos que  $G(x) = \sin(x)$  é uma **primitiva** para  $f$ , pois

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) = f(x)$$

Portanto, a **primitiva mais geral** é

$$F(x) = \int \cos(x) dx = G(x) + C = \sin(x) + C$$

# Tabela de Primitivas

Função	Primitiva
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$e^x$	$e^x$
$\operatorname{sen}(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\operatorname{sen}(x)$

Função	Primitiva
$\sec^2(x)$	$\operatorname{tg}(x)$
$\sec(x) \operatorname{tg}(x)$	$\sec(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsen(x)$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg}(x)$

# Conteúdo

Integrais Indefinidas

Encontrando uma Primitiva

**Propriedades**

Exemplos

Lista Mínima

# Linearidade da Integral Indefinida

Sejam  $f$  e  $g$  integráveis e  $k$  uma constante temos

$$1. \int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$2. \int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$$

# Exemplo 1

Encontre a primitiva mais geral da função  $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$

# Exemplo 1

$$F(x) = \int f(x) dx$$

$$= \int 3x^2 + 2x + 5 dx$$

$$= \int 3x^2 dx + \int 2x dx + \int 5 dx \quad (\text{Linearidade})$$

$$= 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx + 5 \int dx \quad (\text{Linearidade})$$

$$= 3 \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2 \frac{x^{1+1}}{1+1} + 5 \frac{x^{0+1}}{0+1} + C \quad (\text{Tabela})$$

# Multiplicação da Variável por Constante

Qual a Primitiva da função  $f(ax + b)$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes?

Se  $F(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$

$$\frac{d}{dx}F(ax + b) = F'(ax + b)\frac{d}{dx}(ax + b) = f(ax + b)a$$

$$\frac{d}{dx} \frac{F(ax + b)}{a} = f(ax + b)$$

Então

$$\int f(ax + b)dx = \frac{F(ax + b)}{a} + C$$

# Conteúdo

Integrais Indefinidas

Encontrando uma Primitiva

Propriedades

**Exemplos**

Lista Mínima



## Exemplo 2

Calcule  $\int \cos(3\pi x) - \sqrt{x} \, dx$

## Exemplo 2

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \cos(3\pi x) - \sqrt{x} \, dx \\ &= \int \cos(3\pi x) \, dx - \int \sqrt{x} \, dx \\ &= \int \cos(3\pi x) \, dx - \int x^{1/2} \, dx \\ &= \frac{\text{sen}(3\pi x)}{3\pi} - \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + C \\ &= \frac{\text{sen}(3\pi x)}{3\pi} - \frac{2x^{3/2}}{3} + C \end{aligned}$$

## Exemplo 3

Encontre todas as funções  $g$ , tais que  $g'(x) = 4 \operatorname{sen}(x) + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$

## Exemplo 3

Queremos as primitivas de  $g'$

Reescrevemos  $g'$  como

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen}(x) + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

$$= 4 \operatorname{sen}(x) + \frac{2x^5}{x} - \frac{x^{1/2}}{x}$$

$$= 4 \operatorname{sen}(x) + 2x^4 - x^{-1/2}$$

## Exemplo 3

$$\begin{aligned}g(x) &= \int g'(x) dx \\&= \int 4 \operatorname{sen}(x) + 2x^4 - x^{-1/2} dx \\&= 4 \int \operatorname{sen}(x) dx + 2 \int x^4 dx - \int x^{-1/2} dx \\&= 4(-\cos(x)) + 2 \frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{1/2} + C \\&= -4 \cos(x) + \frac{2}{5} x^5 - 2\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

## Exemplo 4

Encontre  $f$  se  $f'(x) = e^x + 20(1+x^2)^{-1}$  e  $f(0) = -2$

Primeiro vamos encontrar a família de funções  $f$  que são primitivas de  $f'$

Depois usamos a condição  $f(0) = -2$  para encontrar a primitiva solicitada

## Exemplo 4

Primitiva mais geral

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) dx \\&= \int e^x + 20 (1 + x^2)^{-1} dx \\&= \int e^x + 20 \frac{1}{1 + x^2} dx \\&= \int e^x dx + 20 \int \frac{1}{1 + x^2} dx \\&= e^x + 20 \operatorname{arctg}(x) + C\end{aligned}$$

## Exemplo 4

Vamos determinar o valor de  $C$  usando  $f(0) = -2$

$$f(0) = -2$$

$$e^0 + 20 \operatorname{arctg}(0) + C = -2$$

$$C = -2 - e^0 - 20 \operatorname{arctg}(0)$$

$$= -2 - 1 - 0$$

$$= -3$$

Portanto

$$f(x) = e^x + 20 \operatorname{arctg}(x) - 3$$



# Conteúdo

Integrais Indefinidas

Encontrando uma Primitiva

Propriedades

Exemplos

**Lista Mínima**

# Lista Mínima

Estudar a Seção 2.2 da Apostila

Exercícios: 1a-f, 2, 3

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações