CFVVI – Prova 1 – Turma 4 08/07/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [15] Escreva a equação $r = \dfrac{5}{\text{sen}(\theta) - 2\cos(\theta)}$ em coordenadas cartesianas e simplifique.

Sabemos que a relação entre as coordenadas é

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \qquad \text{sen}(\theta) = \frac{y}{r} \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

Portanto, precisamos substituir as expressões e simplificar o resultado

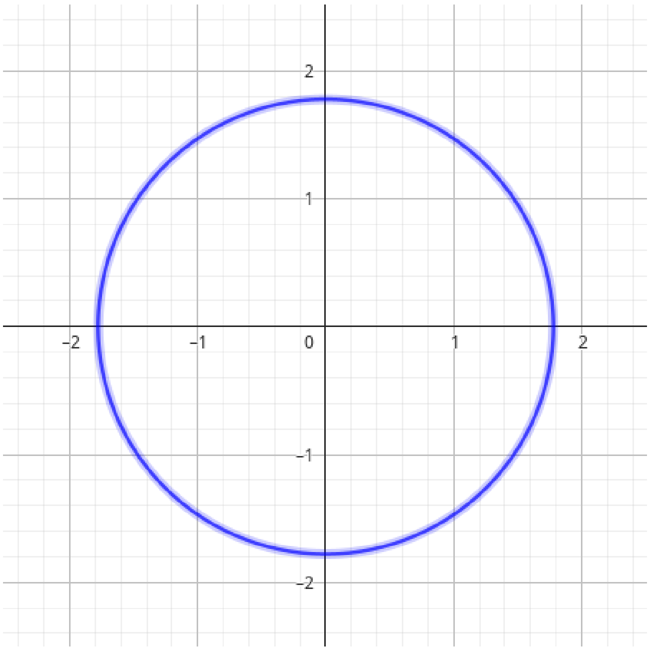
$$\begin{aligned} r &= \frac{5}{\text{sen}(\theta) - 2\cos(\theta)} \\ r\left(\text{sen}(\theta) - 2\cos(\theta)\right) &= 5 \\ r\left(\frac{y}{r} - 2\frac{x}{r}\right) &= 5 \\ r\frac{y - 2x}{r} &= 5 \\ y - 2x &= 5 \\ y &= 2x + 5 \end{aligned}$$

2 [10] Encontre e corte da quádrica $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$ pelo plano $z = 0$, identifique a região e a esboce no plano.

Encontramos o corte substituindo $z = 0$ na equação

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4z^2 &= 10 \\ x^2 + y^2 &= 10 \end{aligned}$$

Essa é a expressão da **circunferência**, centrada na origem com raio $\sqrt{10}$, ilustrada a seguir



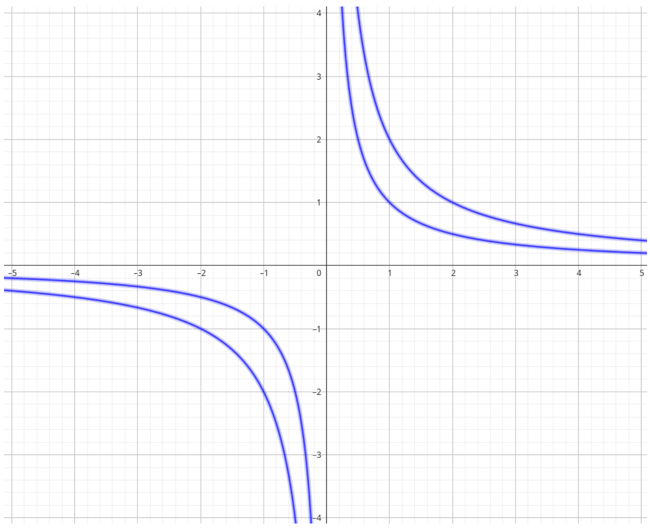
3 [15] Encontre e esboce duas curvas de nível da função $f(x,y) = e^{xy}$

As curvas de nível da função são regiões onde o valor da função é constante, ou seja, soluções das equações

$$\begin{aligned} f(x,y) &= c \\ e^{xy} &= c \\ xy &= \ln(c) \\ y &= \frac{\ln(c)}{x} \end{aligned}$$

Note que c precisa ser positiva para existir solução e, portanto, curva de nível. Escolhemos os valores $c = e$ e $c = e^2$ para obter as curvas

$$y = \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{2}{x}$$



4 [30] Calcule os limites solicitados, ou prove que o limite não existe

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$ b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$

a) Se tentarmos calcular diretamente a fração obtemos uma indeterminação $0/0$. Portanto, precisamos remover a indeterminação manipulando algebricamente a função, assumindo que $(x,y) \neq (4,3)$, temos

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1} \\
&= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y+1}\right)^2}{(x-y-1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\right)} \\
&= \frac{x-(y+1)}{(x-y-1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}
\end{aligned}$$

Onde o cancelamento só foi possível pois $(x,y) \neq (4,3)$. Agora podemos calcular o limite, pois temos uma função contínua em $(4,3)$,

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1} \\
&= \lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3+1}} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

b) Analisando a função percebemos que se fizermos $y = x$ o limite restrito a curva será

$$L_1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\left.\frac{x-y}{x+y}\right|_{y=x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{2x} = 0$$

Por outro lado, escolhendo $y = 2x$ temos

$$L_2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\left.\frac{x-y}{x+y}\right|_{y=2x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{3x} = \frac{-1}{3}$$

Como $L_1 \neq L_2$ o limite não existe.

5 [30] Calcule as derivadas solicitadas realizando as contas na ordem indicada

a) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\cos\left(\dfrac{2x}{5y}\right)\right)^2$ b) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ \ln\left(x^2+y^2\right)$

a)
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos\left(\frac{2x}{5y}\right)\right)^2 &= 2\cos\left(\frac{2x}{5y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos\left(\frac{2x}{5y}\right)\right)\\
&= 2\cos\left(\frac{2x}{5y}\right)(-1)\operatorname{sen}\left(\frac{2x}{5y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{5y}\right)\\
&= -2\cos\left(\frac{2x}{5y}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2x}{5y}\right)\frac{2x}{5}\frac{\partial y^{-1}}{\partial y}\\
&= -\frac{4x}{5}\cos\left(\frac{2x}{5y}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2x}{5y}\right)\frac{\partial y^{-1}}{\partial y}\\
&= -\frac{4x}{5}\cos\left(\frac{2x}{5y}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2x}{5y}\right)(-1)y^{-2}\\
&= \frac{4x}{5y^2}\cos\left(\frac{2x}{5y}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2x}{5y}\right)
\end{aligned}$$

b) Começamos calculando a primeira derivada

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\ln\left(x^2+y^2\right) &= \frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)\\
&= \frac{1}{x^2+y^2}\left(0+\frac{\partial y^2}{\partial y}\right)\\
&= \frac{1}{x^2+y^2}2y\\
&= \frac{2y}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

Agora calculamos a derivada segunda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\ln\left(x^2+y^2\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\left(x^2+y^2\right)\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)\\
&= 2y\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)^{-1}\\
&= 2y(-1)\left(x^2+y^2\right)^{-2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)\\
&= -2y\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}(2x+0)\\
&= \frac{-4yx}{\left(x^2+y^2\right)^2}
\end{aligned}$$