CFVVI – PROVA 1 – TURMA 4 05/05/2025

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

**1** [25] Encontre uma parametrização para o movimento de uma partícula que começa no ponto $(-2, 0)$ e traça a metade superior do círculo $x^2 + y^2 = 4$

Metade superior do círculo de raio 2 centrado na origem
Parametrização do círculo unitário centrado na origem

$$x = \cos(\theta)$$

$$y = \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Parametrização do círculo de raio 2 centrado na origem

$$x = 2\cos(\theta)$$

$$y = 2\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Parametrização da metade superior

$$x = 2\cos(\theta)$$

$$y = 2\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\theta \in [0, \pi]$$

Essa parametrização começa em $(2, 0)$ e termina em $(-2, 0)$. Queremos inverter o sentido em que percorremos a trajetória

$$x = 2\cos(\pi - \theta) = -2\cos(\theta)$$

$$y = 2\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \quad 2\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\theta \in [0, \pi)$$

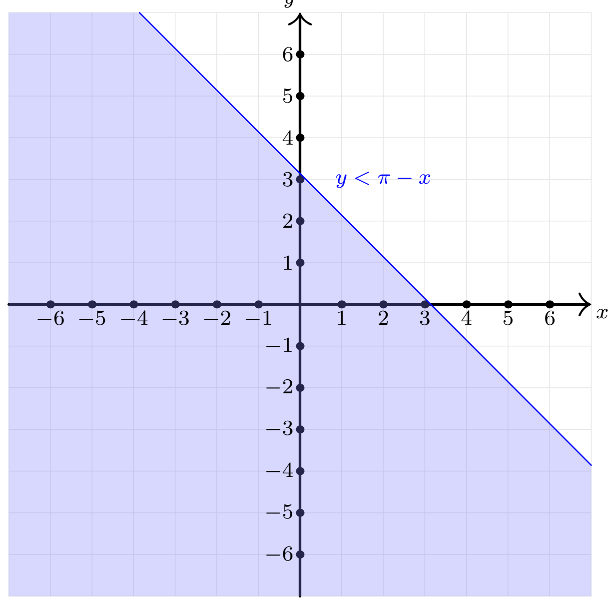
**2** [25] Considerando a função $f(x,y) = \ln(\pi - x - y)$

(a) [10] Determine o domínio de $f$ e represente-o graficamente

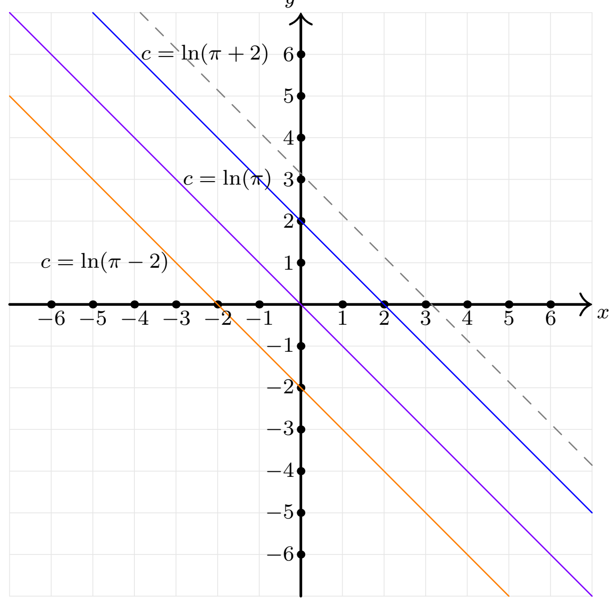
(b) [5] Encontre a imagem de $f$

(c) [10] Caracterize todas as curvas de nível de $f$ e esboce três delas

Domínio




Curvas de nível




(a) O domínio de $f$ é o conjunto de pontos $(x,y)$ tais que

$$\pi - x - y > 0$$

$$y < \pi - x$$

Portanto

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y < \pi - x\}$$

(b) A imagem de $f$ é o conjunto de valores que $f$ pode assumir. Como $y < \pi - x$ assume valores no intervalo $(0, \infty)$ a imagem de $f$ é $\operatorname{Im}(f) = (-\infty, \infty)$

(c) As curvas de nível são dadas por

$$\ln(\pi - x - y) = c \qquad \text{para } c \in \mathbb{R}$$

$$\pi - x - y = e^c$$

$$y = \pi - e^c - x$$

isto é, retas com coeficiente angular $-1$ e intercepto $b = \pi - e^c$

| | | |
|---|---|---|
| $b = -2$ | $c = \ln(\pi - (-2)) = \ln(\pi + 2)$ | $y = -2 - x$ |
| $b = 0$ | $c = \ln(\pi)$ | $y = -x$ |

$b = 2$ $c = \ln(\pi - 2)$ $y = 2 - x$

**3** [30] Calcule o limite ou mostre que ele não existe

(a) [15] $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

(b) [15] $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$

(a) Testando diferentes caminhos
Caminho $x = y^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}\bigg|_{x=y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2y^2}{y^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{2y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Caminho $x = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}\bigg|_{x=0} = \lim_{y\to 0} \frac{0\times y^2}{0+y^4} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Como os limites são diferentes, o limite **não existe**

(b) Multiplicando pelo conjugado

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}$$

$$= \frac{x-(y+1)}{(x-y-1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}$$

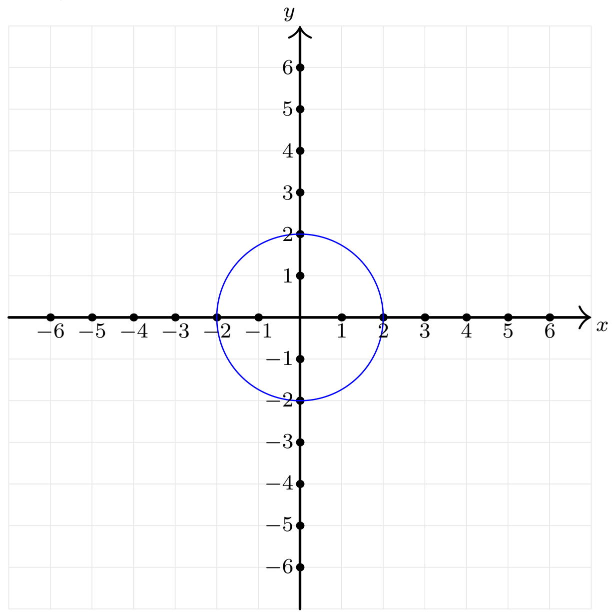
$$\lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1} = \lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3+1}}$$

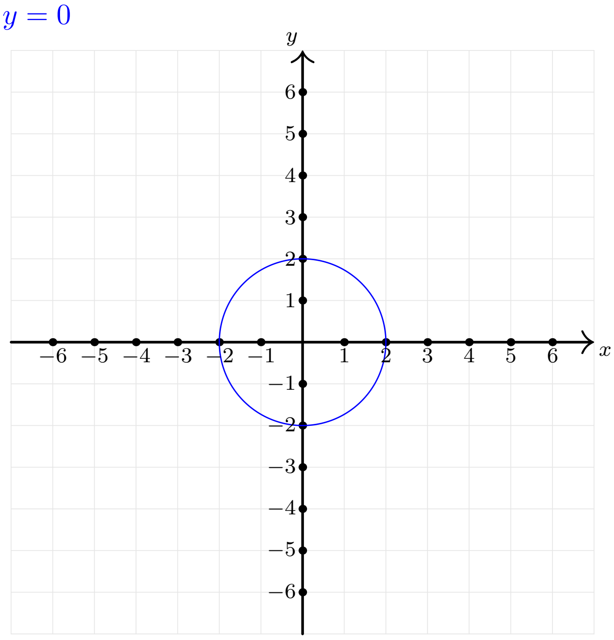
$$= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

**4** [20] Encontre e esboce as curvas que representam o corte da superfície $x^2 + y^2 = 4 - z^2$ pelos planos $z = 0$ e $y = 0$

$z = 0$




$y = 0$




No plano $z = 0$ a equação $x^2 + y^2 = 4 - z^2$ se reduz a

$$x^2 + y^2 = 4 - 0$$

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

que corresponde circunferência de raio 2 centrada na origem
No plano $y = 0$ a equação $x^2 + y^2 = 4 - z^2$ se reduz a

$$x^2 + 0 = 4 - z^2$$

$$x^2 + z^2 = 2^2$$

que corresponde circunferência de raio 2 centrada na origem