

Cilindros e Superfícies Quádricas

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/cfvv1>

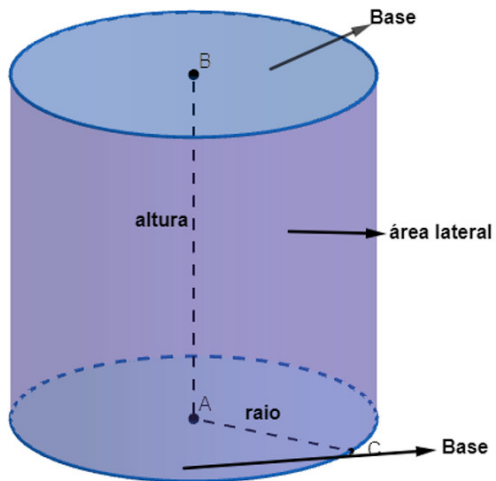
Conteúdo

Cilindros

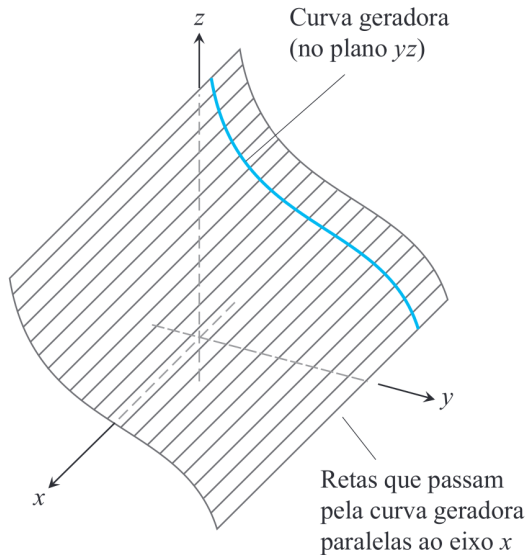
Quádricas

Lista Mínima

Cilindro Sólido



Cilindros



Conteúdo

Cilindros

Quádricas

Lista Mínima

Cônicas e Quádricas

Cônica: Gráfico de uma equação de segundo grau no plano

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Quádrica: gráfico de uma equação de segundo grau em \mathbb{R}^3

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + G = 0$$

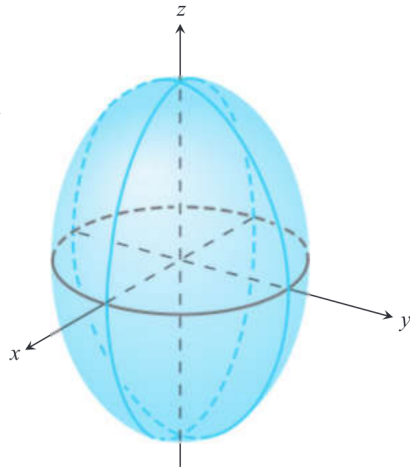
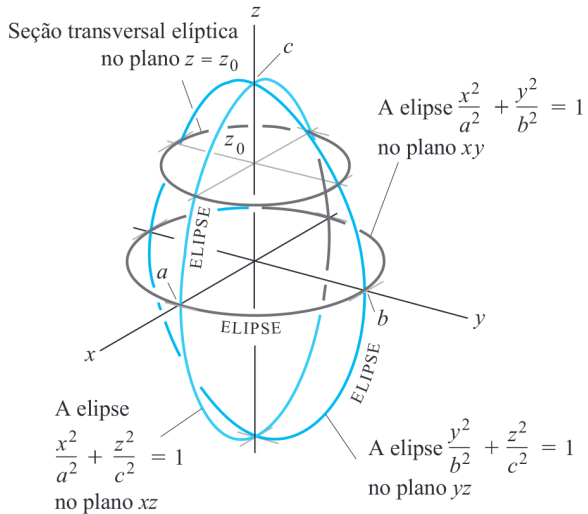
Quádricas

- ▶ Elipsoides
- ▶ Paraboloides
- ▶ Cones elípticos
- ▶ Hiperboloides

Elipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Elipsoides

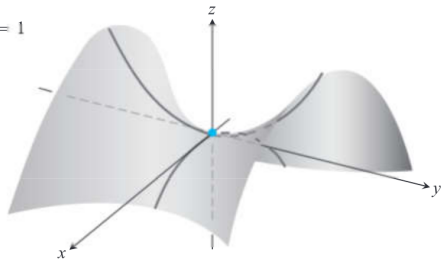
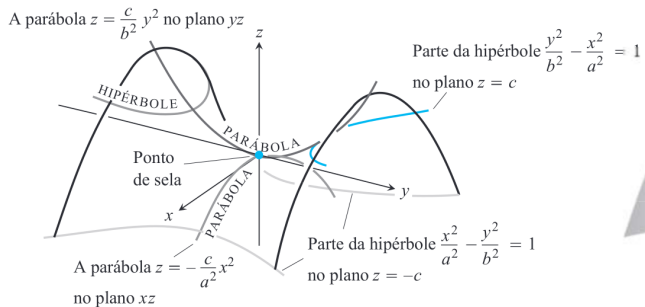


Parabolóide Hiperbólico

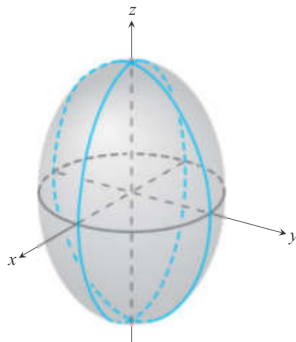
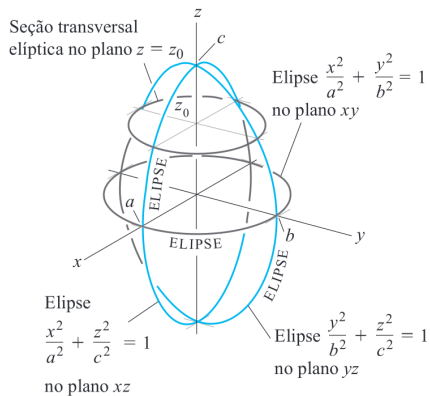
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$$

Ponto de sela

Elipsoides



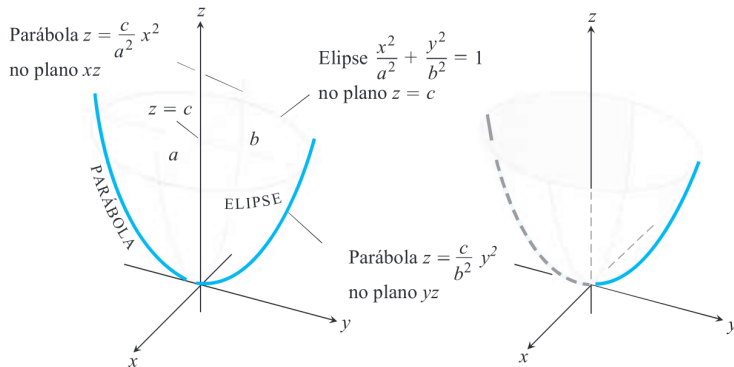
Elipsoide



ELIPSOIDE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

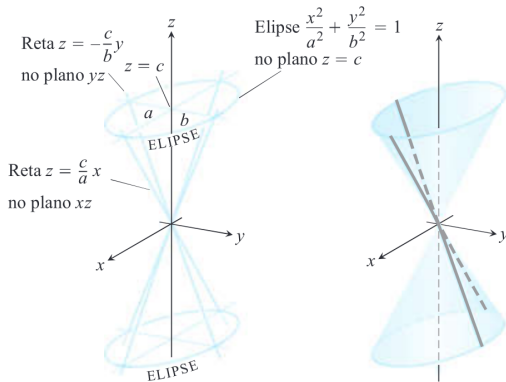
Paraboloides Elíptico



PARABOLOIDE ELÍPTICO

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

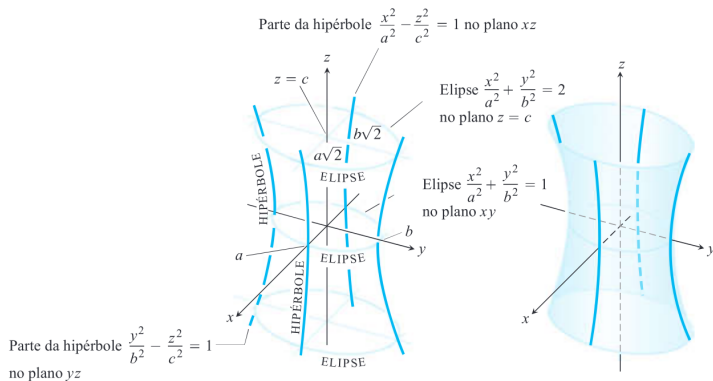
Cone Elíptico



CONE ELÍPTICO

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

Hiperboloide de Uma Folha



HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Exemplo 1

Encontre e esboce as curvas que representam o corte da superfície

$$4x^2 + y^2 = 16$$

pelos planos $z = 0$ e $y = 0$

Exemplo 1 – Solução

No plano $z = 0$ a equação

$$4x^2 + y^2 = 16$$

permanece inalterada, porém, agora representa a elipse

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

que intercepta o eixo x nos pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$

e o eixo y nos pontos $(0, 4)$ e $(0, -4)$

Exemplo 1 – Solução

No plano $y = 0$ a equação

$$4x^2 + y^2 = 16$$

se reduz a

$$4x^2 + 0 = 16$$

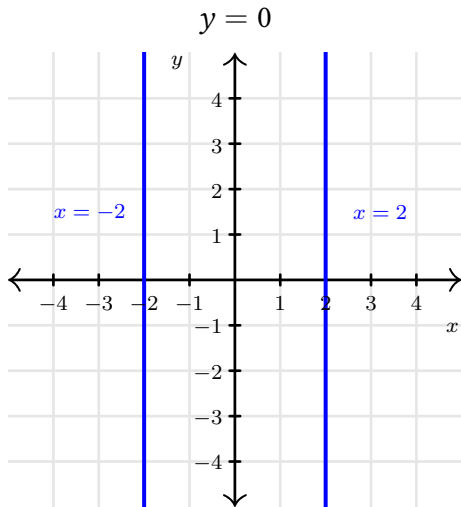
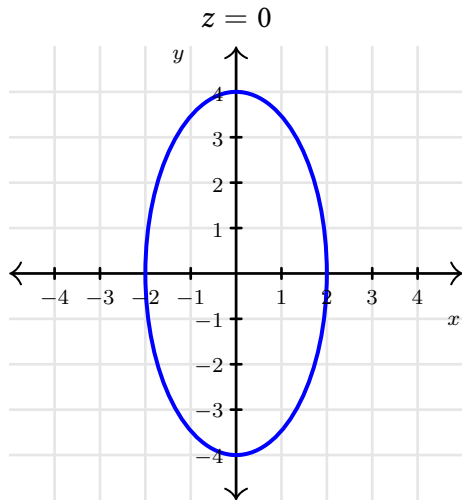
$$x^2 = 4$$

$$|x| = 2$$

$$x = \pm 2$$

que representa as retas verticais $x = 2$ e $x = -2$

Exemplo 1 – Solução



Exemplo 2

Encontre e esboce as curvas que representam o corte da superfície

$$x^2 + y^2 = 4 - z^2$$

pelos planos $z = 0$ e $y = 0$

Exemplo 2 – Solução

No plano $z = 0$ a equação

$$x^2 + y^2 = 4 - z^2$$

se reduz a

$$x^2 + y^2 = 4 - 0$$

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

que corresponde circunferência de raio 2 centrada na origem

Exemplo 2 – Solução

No plano $y = 0$ a equação

$$x^2 + y^2 = 4 - z^2$$

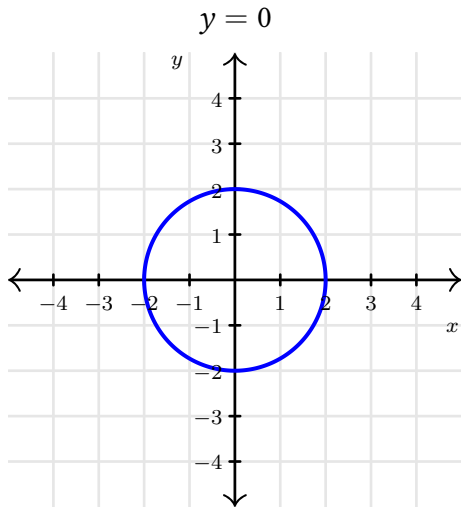
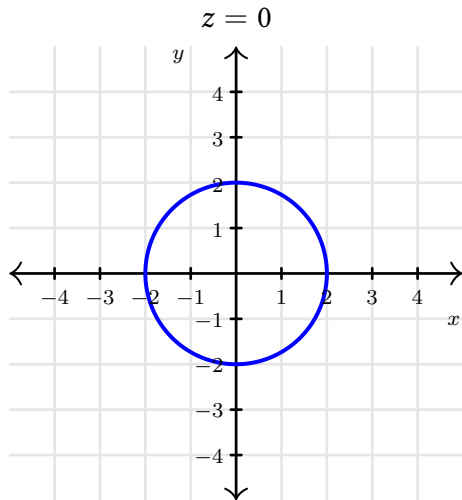
se reduz a

$$x^2 + 0 = 4 - z^2$$

$$x^2 + z^2 = 2^2$$

que corresponde circunferência de raio 2 centrada na origem

Exemplo 2 – Solução



Exemplo 3

Encontre e esboce as curvas que representam os cortes da superfície

$$y^2 - x^2 = z$$

pelos planos $z = 0$ e $y = 0$

Exemplo 3 – Solução

No plano $z = 0$ a equação

$$y^2 - x^2 = z$$

se reduz a

$$y^2 - x^2 = 0$$

$$y^2 = x^2$$

$$|y| = |x|$$

$$y = \pm x$$

que corresponde as retas $y = x$ e $y = -x$

Exemplo 3 – Solução

No plano $y = 0$ a equação

$$y^2 - x^2 = z$$

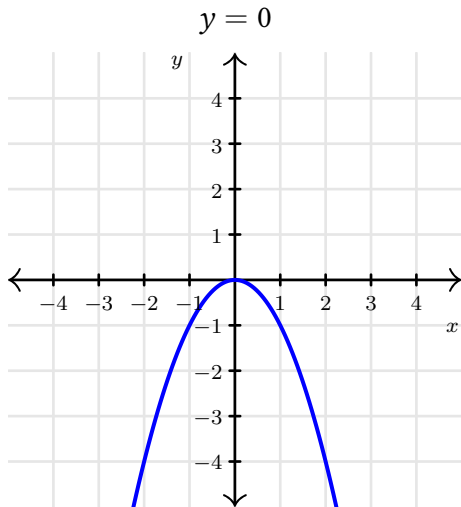
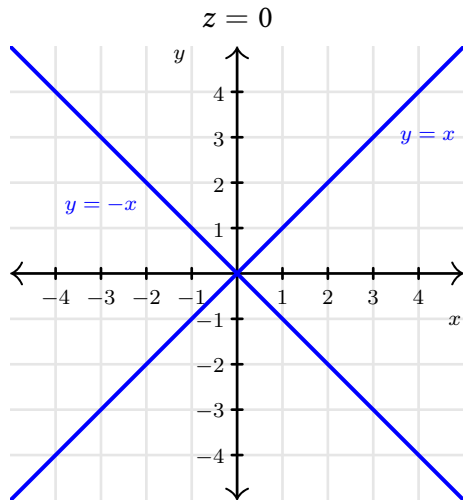
se reduz a

$$0 - x^2 = z$$

$$z = -x^2$$

que corresponde uma parábola com vértice na origem
e apontando para baixo

Exemplo 3 – Solução



Exemplo 4

Considerando a esfera de raio 3 centrada na origem

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

e o plano horizontal

$$z = 2$$

Determine a curva de interseção das duas superfícies no espaço

Exemplo 4 – Solução

A equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

restrita ao plano $z = 2$, se reduz a

$$x^2 + y^2 + 2^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

que corresponde a uma circunferência de raio $\sqrt{5}$
contida no plano $z = 2$
e centrada no ponto $(0, 0, 2)$

Exemplo 5

Considerando a esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

e o plano

$$x + y + z = 0$$

Determine a projeção da interseção das superfícies no plano xy

Exemplo 5 – Solução

Isolamos z na equação do plano

$$x + y + z = 0$$

$$z = -x - y$$

Substituímos na equação da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 9$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy = 9$$

$$x^2 + y^2 + xy = \frac{9}{2}$$

que é uma cônica rotacionada

Exemplo 6

Considere as quádricas

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad (\text{esfera})$$

$$z = x^2 + y^2 \quad (\text{parabolóide circular})$$

Encontre a equação da curva de interseção

Dica: use $u = x^2 + y^2$

Exemplo 6 – Solução

Substituimos a equação do parabolóide

$$z = x^2 + y^2$$

na da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2 = 9$$

$$u + u^2 = 9$$

$$u^2 + u - 9 = 0$$

Exemplo 6 – Solução

Resolvendo $u^2 + u - 9 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 37$$

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Como $u \geq 0$

$$u = \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}$$

Exemplo 6 – Solução

Então

$$x^2 + y^2 = \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}$$

Uma circunferência de raio $\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{37}}{2}}$ centrada em $(0, 0, 0)$

Conteúdo

Cilindros

Quádricas

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 12.6

1. Estudar o texto da seção
2. Encontre a equação e esboce os gráficos dos cortes, nos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, das quádricas dos exercícios: 1-12

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações