

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [50] Encontre o ponto da superfície $z = xy + 1$ que está mais próximo da origem.

Queremos minimizar a distância

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Como a função raiz quadrada é crescente podemos minimizar a função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

suas derivadas parciais são

$$f_x(x, y, z) = 2x \quad f_y(x, y, z) = 2y \quad f_z(x, y, z) = 2z$$

As derivadas parciais da função $g(x, y, z) = z - xy$ são

$$g_x(x, y, z) = -y \quad g_y(x, y, z) = -x \quad g_z(x, y, z) = 1$$

Aplicando os Multiplicadores de Lagrange, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x = -\lambda y \\ 2y = -\lambda x \\ 2z = \lambda \\ z - xy = 1 \end{cases}$$

Isolamos x na primeira equação e substituímos na segunda

$$x = \frac{-\lambda y}{2}$$

$$y = \frac{-\lambda}{2}x = \frac{-\lambda}{2} \frac{-\lambda y}{2} = \frac{\lambda^2}{4}y$$

Temos $y = 0$ ou

$$\frac{\lambda^2}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2$$

Se $y = 0$ a quarta equação se reduz a $z = 1$, pela terceira $\lambda = 2$ e

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2 \times 0}{2} = 0$$

Obtemos o ponto $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 1)$

Se $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2y}{2} = -y$$

$$2z = \lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad z = 1$$

Substituindo na quarta equação

$$z - xy = 1$$

$$1 - (-y)y = 1$$

$$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

Obtemos novamente o ponto $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 1)$

Se $\lambda = -2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-(-2)y}{2} = y$$

$$2z = \lambda = -2 \quad \Rightarrow \quad z = -1$$

Substituindo na quarta equação

$$z - xy = 1$$

$$-1 - y^2 = 1$$

$$-y^2 = 2$$

$$y^2 = -2$$

Não existe solução real.

O ponto mais próximo da origem é $(0, 0, 1)$.

2 [25] Dado $z = (\sqrt{3} + i)^4$, calcule

- a) a parte real de z ,
- b) a parte imaginária de z ,
- c) o módulo de z ,
- d) o argumento de z

Convertendo $u = \sqrt{3} + i$ para a forma polar

$$\rho = |u| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\operatorname{sen}(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(u)}{|u|} = \frac{1}{2} \qquad \cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(u)}{|u|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \varphi = \arg(u) = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

Assim

$$u = \rho [\cos(\varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi)] = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

Portanto

$$\begin{aligned} z &= u^3 \\ &= \rho^4 [\cos(4\varphi) + i \operatorname{sen}(4\varphi)] \\ &= 2^4 \left[\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{6}\right) \right] \\ &= 16 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &= 16 \left[-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\ &= -8 + 8\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Parte real de z

$$\operatorname{Re}(z) = -8$$

Parte imaginária de z

$$\operatorname{Im}(z) = 8\sqrt{3}$$

Módulo de z

$$|z| = 16$$

Argumento de z

$$\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$$

3 [25] Encontre as raízes cúbicas complexas do número $z = 27i$.

Escrevemos $z = 27i$ na forma trigonométrica

$$z = 27 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

As raízes cúbicas são

$$\begin{aligned} u_k &= \sqrt[3]{27} \left[\cos \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right) \right] & k = 0, 1, 2 \\ &= 3 \left[\cos \left(\frac{\pi + 4k\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 4k\pi}{6} \right) \right] \end{aligned}$$

Para cada valor de k

$$\begin{aligned} u_0 &= 3 \left[\cos \left(\frac{\pi + 4 \times 0\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 4 \times 0\pi}{6} \right) \right] \\ &= 3 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= 3 [\cos(30^\circ) + i \operatorname{sen}(30^\circ)] \\ &= 3 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 3 \left[\cos \left(\frac{\pi + 4 \times 1\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 4 \times 1\pi}{6} \right) \right] \\ &= 3 \left[\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right] \\ &= 3 [\cos(150^\circ) + i \operatorname{sen}(150^\circ)] \\ &= 3 \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right] \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= 3 \left[\cos \left(\frac{\pi + 4 \times 2\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 4 \times 2\pi}{6} \right) \right] \\ &= 3 \left[\cos \left(\frac{9\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{9\pi}{6} \right) \right] \\ &= 3 \left[\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right] \\ &= 3 [\cos(270^\circ) + i \operatorname{sen}(270^\circ)] \\ &= 3 [0 + i(-1)] = -3i \end{aligned}$$