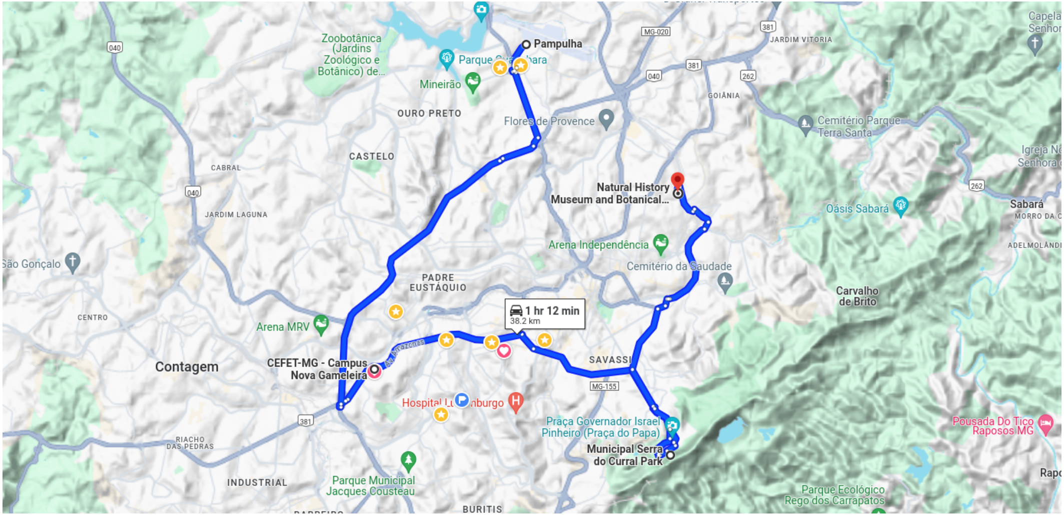
Curvas Paramétricas

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

Conteúdo

Trajetória



Pampulha
Zoobotânica (Jardins Zoológico e Botânico) de...
Mineirão
OURO PRETO
CASTELO
CABRAL
JARDIM LAGUNA
São Gonçalo
CENTRO
Arena MRV
Contagem
CEFET-MG - Campus Nova Gameleira
PADRE EUSTÁQUIO
1 hr 12 min
38.2 km
SAVASSI
Flores de Provence
Natural History Museum and Botanical...
Arena Independência
Cemitério da Saudade
GOIÂNIA
JARDIM VITORIA
Cemitério Parque Terra Santa
Oásis Sabará
Sabará
Carvalho de Brito
Praça Governador Israel Pinheiro (Praça do Papa)
Municipal Serra do Curral Park
Pousada Do Tico Raposos MG
Parque Ecológico Rego dos Carrapatos
Parque Municipal Jacques Cousteau
RIACHO DAS PEDRAS
INDUSTRIAL
BURITIS
MG-020
MG-155

Curvas Paramétricas

Função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = (x, y) = \big(f(t), g(t)\big)$$

ou

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

ou

$$\gamma(t) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$$

Podemos pensar na variável como o tempo e a curva como uma trajetória

Conteúdo

Definição em 2D

Se x e y são dados como funções

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

sobre um intervalo I de valores de t, então o conjunto de pontos

$$(x, y) = \big(f(t), g(t)\big)$$

forma uma curva paramétrica em $\mathbb{R}^2$

Definição em 3D

Se x, y e z são dados como funções

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

sobre um intervalo I de valores de t, então o conjunto de pontos

$$(x, y, z) = \big(f(t), g(t), h(t)\big)$$

forma uma curva paramétrica em $\mathbb{R}^3$

Definição Geral

Se x_i, $i = 1, \ldots, n$ são as coordenadas no espaço $\mathbb{R}^n$

$$x_i = f_i(t)$$

sobre um intervalo I de valores de t, então o conjunto de pontos

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \big(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\big)$$

forma uma curva paramétrica em $\mathbb{R}^n$

Nomenclatura

As equações são as equações paramétricas da curva

t é o parâmetro da curva

I intervalo do parâmetro

Se I é um intervalo fechado $a \leq t \leq b$

$\big(f(a), g(a)\big)$ é o ponto inicial

$\big(f(b), g(b)\big)$ é o ponto final

Notações

$$(x, y) = \big(x(t), y(t)\big) = \big(f(t), g(t)\big)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \big(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\big)$$

Conteúdo

Exemplo 1

Trace a curva definida pelas equações paramétricas

$$x = t^2 \qquad y = t + 1 \qquad -\infty < t < \infty$$

Exemplo 1 – Solução

Note que

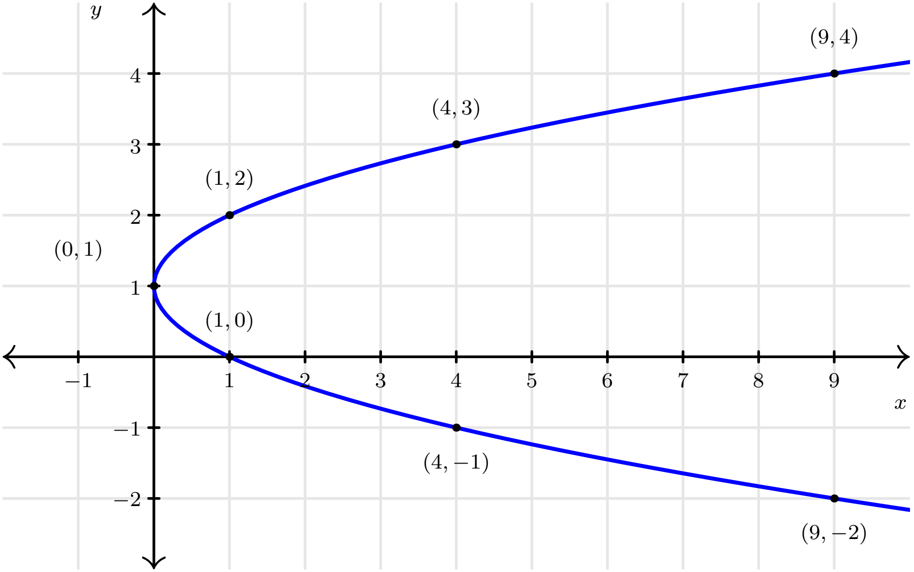
y varia com t e
x varia com t^2

então a curva é uma parábola

Calculando alguns pontos

t	x	y
-3	9	-2
-2	4	-1
-1	1	0
0	0	1
1	1	2
2	4	3
3	9	4

Exemplo 1 – Solução



Exemplo 2

Identifique geometricamente a curva do Exemplo 1 eliminando o parâmetro t

$$x = t^2 \qquad y = t + 1 \qquad -\infty < t < \infty$$

Transformar a curva paramétrica em t em uma equação envolvendo x e y

Exemplo 2 – Solução

Eliminar t em

$$x = t^2$$

$$y = t + 1$$

$$y = t + 1$$

$$t = y - 1$$

$$\begin{aligned} x &= t^2 \\ &= (y-1)^2 \\ &= y^2 - 2y + 1 \end{aligned}$$

Exemplo 3

Determine se os pontos $(2, 3)$ e $(4, -1)$ pertencem à curva paramétrica

$$x = t^2 \qquad y = t + 1 \qquad -\infty < t < \infty$$

Exemplo 3 – Solução

Testando o ponto $(2, 3)$

$$y = 3$$

$$t + 1 = 3$$

$$t = 3 - 1 = 2$$

$$x = t^2 = 2^2 = 4 \neq 2$$

O ponto não pertence a curva

Testando o ponto $(4, -1)$

$$y = -1$$

$$t + 1 = -1$$

$$t = -1 - 1 = -2$$

$$x = t^2 = (-2)^2 = 4$$

O ponto pertence a curva

Exemplo 4

Representе graficamente a curva paramétrica

$$x = \cos(t) \qquad y = \operatorname{sen}(t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

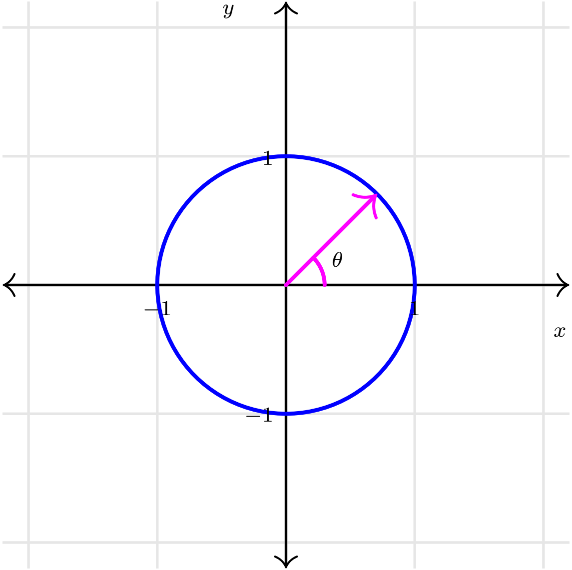
Exemplo 4 – Solução

Sabemos que essa é a parametrização do circulo trigonométrico

Calculando alguns pontos

t	x	y
0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1
2π	1	0

Exemplo 4 – Solução



Exemplo 5

Esboce a trajetória definida pela curva paramétrica

$$\begin{cases} x = t\cos(t\pi) \\ y = t\,\mathrm{sen}(t\pi) \end{cases}$$

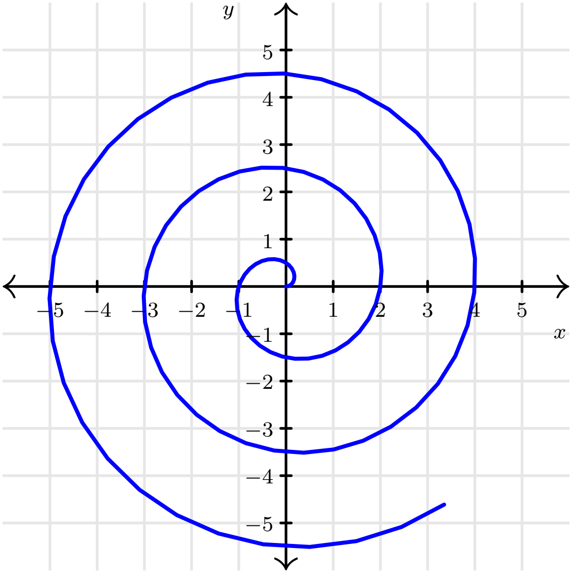
$0 \leq t$

Exemplo 5 – Solução

Similar a parametrização do circulo trigonométrico

t	$t\pi$	$\cos(t\pi)$	$\text{sen}(t\pi)$	x	y
0	0	1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$
1	π	-1	0	-1	0
$\frac{3}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	0	$-\frac{3}{2}$
2	2π	1	0	2	0

Exemplo 5 – Solução



Exemplo 6

A posição de uma partícula se movendo no plano xy é dada por

$$x = \sqrt{t} \qquad y = t \qquad t \geq 0$$

Esboce sua trajetória

Exemplo 6 – Solução

Eliminando t em

$$x = \sqrt{t}$$

$$y = t$$

temos

$$x = \sqrt{t} = \sqrt{y}$$

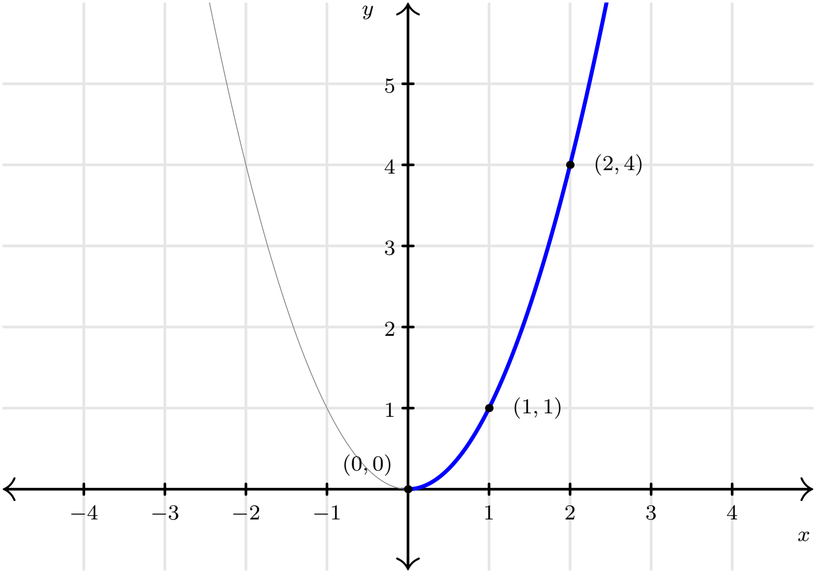
Elevando os dois lados ao quadrado

$$x = \sqrt{y}$$

$$x^2 = (\sqrt{y})^2 = |y| = y$$

$$y = x^2$$

Exemplo 6 – Solução



Exemplo 7

Construa uma curva paramétrica cuja trajetória seja uma circunferência de raio 2 centrada em $(3, 4)$

Exemplo 7 – Solução

Sabemos que

$$x = \cos(t)$$

$$y = \operatorname{sen}(t)$$

$$0 \leq t < 2\pi$$

parametriza uma circunferência de raio 1 centrada em $(0,0)$

Para que o raio seja 2 multiplicamos as funções por 2

$$x = 2\cos(t)$$

$$y = 2\operatorname{sen}(t)$$

$$0 \leq t < 2\pi$$

Para mover o centro para $(3,4)$ somamos esses valores

$$x = 2\cos(t) + 3$$

$$y = 2\operatorname{sen}(t) + 4$$

$$0 \leq t < 2\pi$$

Exemplo 8

Encontre uma parametrização para o círculo definido pela equação

$$(x-3)^2+(y+1)^2=4$$

Exemplo 8 – Solução

Círculo de raio 2 centrado no ponto $(3, -1)$

Parametrização do círculo unitário centrado na origem

$$x = \cos(\theta)$$

$$y = \text{sen}(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Exemplo 8 – Solução

Parametrização do círculo de raio 2 centrado na origem

$$x = 2\cos(\theta)$$

$$y = 2\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Exemplo 8 – Solução

Parametrização do círculo de raio 2 centrado no ponto $(3, -1)$

$$x = 2\cos(\theta) + 3$$

$$y = 2\,\mathrm{sen}(\theta) - 1$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Exemplo 9

Encontre uma parametrização para o movimento de uma partícula que começa no ponto $(-2, 0)$ e traça a metade superior do círculo $x^2 + y^2 = 4$

Exemplo 9 – Solução

Metade superior do círculo de raio 2 centrado na origem

Parametrização do círculo unitário centrado na origem

$$x = \cos(\theta)$$

$$y = \text{sen}(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Exemplo 9 – Solução

Parametrização do círculo de raio 2 centrado na origem

$$x = 2\cos(\theta)$$

$$y = 2\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Exemplo 9 – Solução

Parametrização da metade superior

$$x = 2\cos(\theta)$$

$$y = 2\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\theta \in [0, \pi]$$

Exemplo 9 – Solução

Essa parametrização começa em $(2, 0)$ e termina em $(-2, 0)$

Queremos inverter o sentido em que percorremos a trajetória

$$x = 2\cos(\pi - \theta) = -2\cos(\theta)$$

$$y = 2\,\mathrm{sen}(\pi - \theta) = \quad 2\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\theta \in [0, \pi)$$

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 11.1

1. Estudar todo o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 3, 5, 11, 19, 21, 23, 31

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações