

# Limites de Funções de Várias Variáveis

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

# Conteúdo

Límites

Propriedades

Exemplos

Inexistência do Limite

Exemplos

Lista Mínima

# Definição

Uma função  $f: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y)$ ,

se aproxima do **limite**  $L$  a medida que  $(x, y)$  se aproxima de  $(x_0, y_0)$

se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que, para todo  $(x, y)$  no domínio de  $f$

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta(\varepsilon)$$

Obs:  $(x_0, y_0)$  não precisa estar no domínio de  $f$

# Notação

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

$$f(x,y) \rightarrow L \quad \text{quando} \quad (x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$$

# Conteúdo

Límites

Propriedades

Exemplos

Inexistência do Limite

Exemplos

Lista Mínima

# Teorema – Unicidade do Limite

Se uma função  $f(x, y)$  possui um limite  $L$   
quando  $(x, y)$  se aproxima de  $(x_0, y_0)$ ,  
então  $L$  é único

# Teorema – Propriedades dos limites de várias variáveis

As propriedades a seguir são verdadeiras se

►  $L, M$  e  $k$  forem números reais

►  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$

►  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = M$

# Regra da Soma e Diferença

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) + g(x,y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = L + M$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) - g(x,y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) - \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = L - M$$



# Regra da Multiplicação por Constante e do Produto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [kf(x,y)] = k \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = kL$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y)g(x,y)] = \left[ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \right] \left[ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) \right] = LM$$

# Regra do Quociente (Divisão)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left[ \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \right] = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y)} = \frac{L}{M}$$

Desde que  $M \neq 0$

# Regra da Potência e da Raiz

Para  $n$  inteiro positivo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y)]^n = \left[ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \right]^n = L^n$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)} = \sqrt[n]{L}$$

Se  $n$  for par  $L$  precisa ser positivo

# Conteúdo

Límites

Propriedades

**Exemplos**

Inexistência do Limite

Exemplos

Lista Mínima

# Exemplo 1

Calcule os limites

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} k$

2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x$

3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y$

4.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} xy$

Respostas

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} k = k$

2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$

3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b$

4.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} xy = ab$

## Exemplo 2

Calcule o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3}$ , se ele existir

Assumindo que todos os limites necessários para aplicar as propriedades existam  
(Isso pode não ser verdade)

## Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (x - xy + 3)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (x^2y + 5xy - y^3)} \\&= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} xy + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} 3}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x^2y + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} 5xy - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} y^3} \\&= \frac{0 - 0 \times 1 + 3}{0^2 \times 1 + 5 \times 0 \times 1 - 1^3} \\&= \frac{3}{-1} = -3\end{aligned}$$

## Exemplo 3

Calcule o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$  se ele existir

Assumindo que todos os limites necessários para aplicar as propriedades existam  
(Isso pode não ser verdade)



## Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 - xy)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt{x} - \sqrt{y})} \\&= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{y}} \\&= \frac{0 - 0}{0 - 0} = \frac{0}{0} = 1\end{aligned}$$

**Não existe divisão por zero !!!**

## Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 - xy)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt{x} - \sqrt{y})} \\&= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{y}} \\&= \frac{0 - 0}{0 - 0} = \frac{0}{0} \quad \nexists\end{aligned}$$

Então o limite não existe?

## Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 - xy)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt{x} - \sqrt{y})} \\ &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{y}} \\ &= \frac{0 - 0}{0 - 0} = \frac{0}{0}\end{aligned}$$

Não podemos aplicar a propriedade do quociente

Precisamos remover a indeterminação

## Exemplo 3 – Solução

Ao calcular o limite consideramos apenas os pontos dentro do domínio da função

Para  $x \neq y$

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{(x^2 - xy) (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y}) (\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \frac{x(x - y) (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} \\ &= x(\sqrt{x} + \sqrt{y})\end{aligned}$$

## Exemplo 3 – Solução

Calculando o limite

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \\&= \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \right) \left[ \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x} \right) + \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{y} \right) \right] \\&= 0 (\sqrt{0} + \sqrt{0}) \\&= 0\end{aligned}$$

## Exemplo 4

Analise o limite de  $f(x, y) = \frac{y}{x}$  quando  $(x, y)$  se aproxima de  $(0, 0)$

A reta  $x = 0$  não faz parte do domínio de  $f$

O ponto  $(0, 0)$  não está no domínio de  $f$

Não podemos usar as propriedades diretamente

Não existe manipulação que remova a indeterminação

## Exemplo 4 – Solução

Analisando  $f$  sobre a reta  $y = x$

$$f(x, y) \Big|_{y=x} = f(x, x) = \frac{x}{x} = 1 \quad \text{pois } x = 0 \text{ não está no domínio de } f$$

Analisando  $f$  sobre a reta  $y = 0$

$$f(x, y) \Big|_{y=0} = f(x, 0) = \frac{0}{x} = 0 \quad \text{pois } x = 0 \text{ não está no domínio de } f$$

O que vai acontecer com outras retas da forma  $y = ax$ ?

## Exemplo 4 – Solução

Para qualquer  $\delta > 0$  sempre vai existir um ponto da forma  $(x, x)$  e um ponto da forma  $(x, 0)$  dentro da bola de raio  $\delta$  de centro em  $(0, 0)$

Nenhum valor  $L$  atende as condições da definição de limite

O limite não existe



# Conteúdo

Límites

Propriedades

Exemplos

**Inexistência do Limite**

Exemplos

Lista Mínima

# Teste dos Dois Caminhos

Se  $f(x, y)$  tem limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes, no domínio de  $f$ , quando  $(x, y)$  se aproxima de  $(x_0, y_0)$ , então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) \quad \text{n\~ao existe}$$

# Conteúdo

Límites

Propriedades

Exemplos

Inexistência do Limite

**Exemplos**

Lista Mínima

## Exemplo 5

Verifique se a função  $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$  possui limite na origem.

O limite na origem leva a uma indeterminação do tipo  $0/0$

## Exemplo 5 – Solução

Fazendo  $y = mx$ , para  $m \neq 0$  e  $x \neq 0$ , temos

$$f(x, y) \Big|_{y=mx} = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} \Big|_{y=mx} = \frac{2mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{2mx x^2}{(x^2 + m^2) x^2} = \frac{2mx}{x^2 + m^2}$$

Calculando o limite  $x \rightarrow 0$ , que corresponde a  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx}{x^2 + m^2} = \frac{0}{m^2} = 0 \quad \forall m$$

Portanto,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} = 0$  **Falso!**

## Exemplo 5 – Solução

Fazendo  $y = kx^2$ , para  $k \neq 0$  e  $x \neq 0$ , temos

$$f(x, y) \Big|_{y=kx^2} = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} \Big|_{y=kx^2} = \frac{2kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{2kx^4}{(1 + k^2) x^4} = \frac{2k}{1 + k^2}$$

Para cada valor de  $k$ , a função  $f$  se aproxima da origem com um valor diferente

Portanto, o limite não existe

# Conteúdo

Límites

Propriedades

Exemplos

Inexistência do Limite

Exemplos

Lista Mínima

# Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12<sup>a</sup> ed. – Seção 14.2

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 4-6, 13-15, 18, 26, 55

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações