Curvas de Nível

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Curvas de Nível

Curva de nível: conjunto de pontos no plano xy onde

$$f(x, y) = c$$

para uma constante c

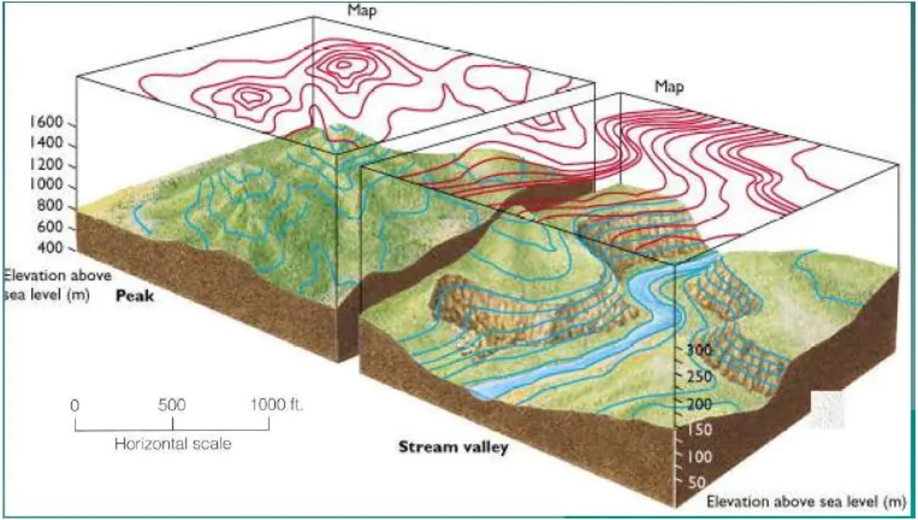
Superfície de Nível

Superfície de nível: conjunto de pontos onde

$$f(x, y, z) = c$$

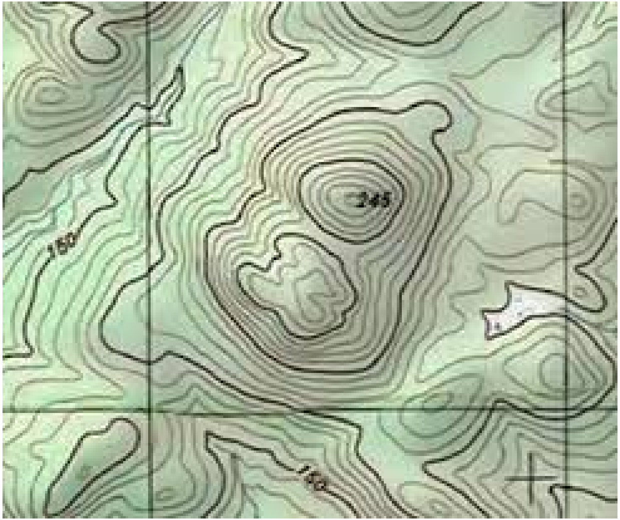
para uma constante c

Exemplo

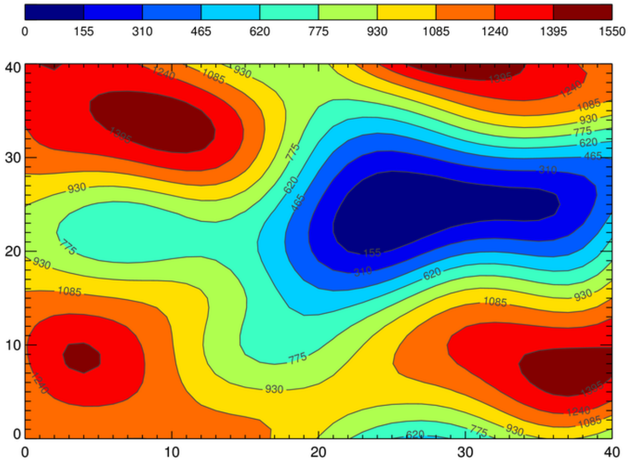


Map
Map
1600
1400
1200
1000
800
600
400
Elevation above sea level (m)
Peak
0
500
1000 ft.
Horizontal scale
Stream valley
300
250
200
150
100
50
Elevation above sea level (m)

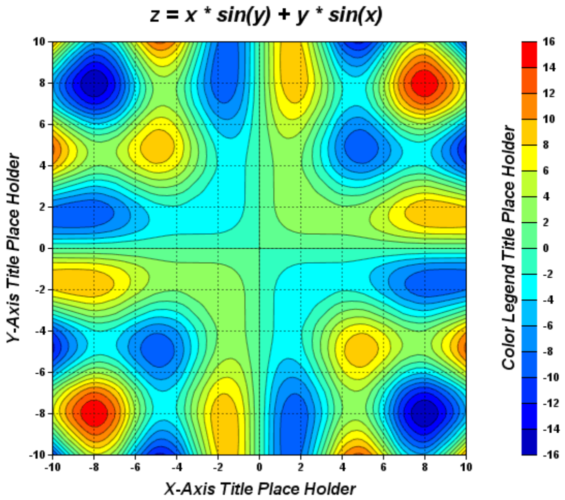
Exemplo



Exemplo

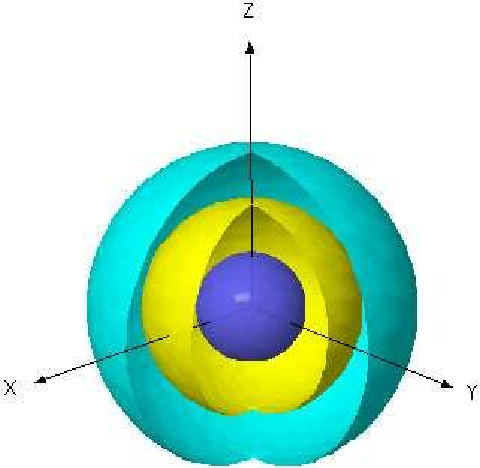

0
155
310
465
620
775
930
1085
1240
1395
1550
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
930
1085
775
620
465
310
155

Exemplo

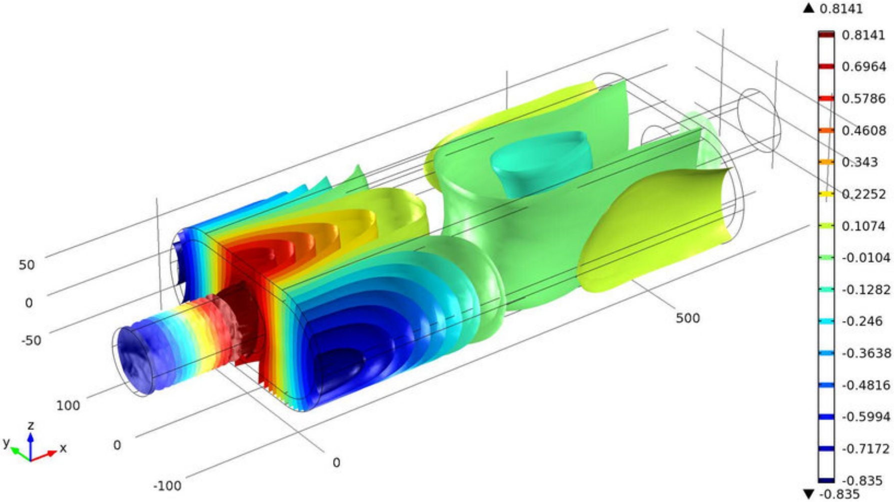


z = x * sin(y) + y * sin(x)
Y-Axis Title Place Holder
X-Axis Title Place Holder
Color Legend Title Place Holder
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16

Exemplo

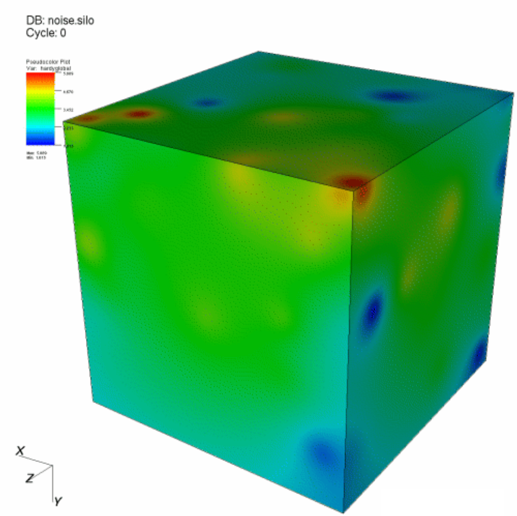


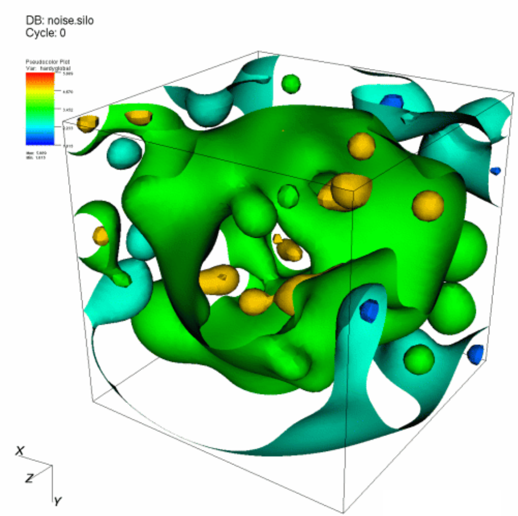
Exemplo



0.8141
0.8141
0.6964
0.5786
0.4608
0.343
0.2252
0.1074
-0.0104
-0.1282
-0.246
-0.3638
-0.4816
-0.5994
-0.7172
-0.835
-0.835
50
0
-50
100
0
-100
0
500
z
y
x

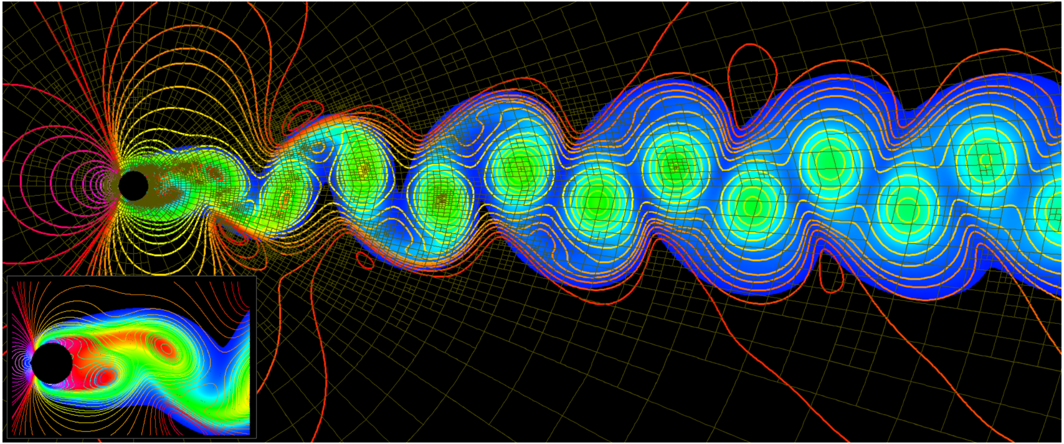
Exemplo


DB: noise.silo
Cycle: 0
Pseudocolor Plot
X
Z
Y


DB: noise.silo
Cycle: 0
Pseudocolor Plot
X
Z
Y

Exemplo

Exemplo



Conteúdo

Exemplo 1

Descreva e esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$

Exemplo 1 – Solução

Para cada valor $c \leq 100$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= c \\ 100 - x^2 - y^2 &= c \\ -x^2 - y^2 &= c - 100 \\ x^2 + y^2 &= 100 - c \end{aligned}$$

As curvas de nível são circunferências centradas nas origem de raio $\sqrt{100 - c}$

Exemplo 2

Descreva as superfícies de nível da função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Exemplo 2 – Solução

Para cada valor $c \geq 0$

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= c \\
\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= c \\
x^2 + y^2 + z^2 &= c^2
\end{aligned}
$$

As superfícies de nível são esferas centradas na origem de raio c

Exemplo 3

Descreva e esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = xy$

Exemplo 3 – Solução

Para cada valor $c \neq 0$

$$f(x, y) = c$$

$$xy = c$$

$$y = \frac{c}{x}$$

Para $c = 0$, ou $x = 0$ ou $y = 0$

Exemplo 4

Descreva e esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = \ln\left(9 - x^2 - y^2\right)$

Exemplo 4 – Solução

Domínio de f

$$
\begin{aligned}
9 - x^2 - y^2 &> 0 \\
9 &> x^2 + y^2 \\
x^2 + y^2 &< 3^2
\end{aligned}
$$

Disco aberto centrado na origem de raio 3

Imagem: a função assume valores no intervalo $\left(-\infty, \ln(9)\right]$

Exemplo 4 – Solução

Para cada valor $c \leq \ln(9)$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= c \\ \ln\left(9 - x^2 - y^2\right) &= c \\ 9 - x^2 - y^2 &= e^c \\ -x^2 - y^2 &= e^c - 9 \\ x^2 + y^2 &= 9 - e^c \end{aligned}$$

As curvas de nível são circunferências centrada nas origem de raio $\sqrt{9 - e^c}$

Exemplo 4 – Solução

Encontre a equação e esboce a curva de nível da função

$$f(x, y) = \frac{2y - x}{x + y + 1}$$

que passa pelo ponto $(-1, 1)$

Exemplo 4 – Solução

$$c = f(-1, 1)$$

$$c = \left.\frac{2y - x}{x + y + 1}\right|_{(-1,1)}$$

$$c = \frac{2 \times 1 - (-1)}{(-1) + 1 + 1}$$

$$c = \frac{2 + 1}{1}$$

$$c = 3$$

Exemplo 4 – Solução

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= 3 \\
\frac{2y - x}{x + y + 1} &= 3 \\
2y - x &= 3(x + y + 1) \\
2y - x &= 3x + 3y + 3 \\
2y - 3y &= 3x + x + 3 \\
-y &= 4x + 3 \\
y &= -4x - 3
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Solução

Encontre a equação e esboce a curva de nível da função

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - 1}$$

que passa pelo ponto $(1, 0)$

Exemplo 4 – Solução

Domínio

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &\geq 0 \\ x^2 &\geq 1 \\ |x| &\geq 1 \\ x \leq -1 \quad &\text{ou} \quad x \geq 1 \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Solução

$$c = f(1, 0)$$

$$c = \sqrt{x^2 - 1}\,\Bigg|_{(1,0)}$$

$$c = \sqrt{1 - 1}$$

$$c = 0$$

Exemplo 4 – Solução

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= 0 \\
\sqrt{x^2 - 1} &= 0 \\
x^2 - 1 &= 0 \\
x^2 &= 1 \\
|x| &= 1 \\
x &= \pm 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Solução

Encontre uma equação para a superfície de nível da função

$$f(x, y, z) = \frac{x - y + z}{2x + y - z}$$

que passa pelo ponto $(1, 0, -2)$

Exemplo 4 – Solução

Domínio

$$2x + y - z \neq 0$$

$$2x + y \neq z$$

$$z \neq 2x + y$$

Exemplo 4 – Solução

$$c = f(1, 0, -2)$$

$$c = \left. \frac{x - y + z}{2x + y - z} \right|_{(1,0,-2)}$$

$$c = \frac{1 - 0 - 2}{2 \times 1 + 0 - (-2)}$$

$$c = \frac{-1}{4}$$

Exemplo 4 – Solução

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= -\frac{1}{4} \\
\frac{x - y + z}{2x + y - z} &= -\frac{1}{4} \\
-4(x - y + z) &= 2x + y - z \\
-4x + 4y - 4z &= 2x + y - z \\
-4z + z &= 2x + y + 4x - 4y \\
-3z &= 6x - 3y \\
z &= -2x + y
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Solução

Encontre a equação e esboce para a superfície de nível da função

$$f(x, y, z) = \frac{x - y + z}{2x + y - z}$$

que passa pelo ponto $(1, 0, -2)$

Exemplo 4 – Solução

Domínio

$$2x + y - z \neq 0$$

$$2x + y \neq z$$

$$z \neq 2x + y$$

Exemplo 4 – Solução

$$c = f(1, 0, -2)$$

$$c = \left.\frac{x - y + z}{2x + y - z}\right|_{(1,0,-2)}$$

$$c = \frac{1 - 0 - 2}{2 \times 1 + 0 - (-2)}$$

$$c = \frac{-1}{4}$$

Exemplo 4 – Solução

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= -\frac{1}{4} \\
\frac{x-y+z}{2x+y-z} &= -\frac{1}{4} \\
-4(x-y+z) &= 2x+y-z \\
-4x+4y-4z &= 2x+y-z \\
-4z+z &= 2x+y+4x-4y \\
-3z &= 6x-3y \\
z &= -2x+y
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Solução

Encontre a equação e esboce para a superfície de nível da função

$$f(x, y, z) = \sqrt{x - y} - \ln(z)$$

que passa pelo ponto $(3, -1, 1)$

Exemplo 4 – Solução

Domínio

$$x - y \geq 0$$

$$x \geq y$$

e

$$z > 0$$

Exemplo 4 – Solução

$$c = f(3, -1, 1)$$

$$c = \sqrt{x - y} - \ln(z) \Big|_{(3,-1,1)}$$

$$c = \sqrt{3 - (-1)} - \ln(1)$$

$$c = \sqrt{4}$$

$$c = 2$$

Exemplo 4 – Solução

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= 2 \\
\sqrt{x - y} - \ln(z) &= 2 \\
\sqrt{x - y} &= 2 + \ln(z) \\
-4x + 4y - 4z &= 2x + y - z \\
-4z + z &= 2x + y + 4x - 4y \\
-3z &= 6x - 3y \\
z &= -2x + y
\end{aligned}
$$

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.1

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 17-23, 31-36

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações