Planos Tangentes

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

23 de agosto de 2025

https://material-didatico.github.io/cfvv1

Conteúdo

Plano Tangente à Superfície de Nível

Plano Tangente ao Gráfico de uma Função

Lista Mínima

Justificativa

Primeiro vamos verificar que o gradiente é normal a superfície de nível

Considere uma função $f(x, y)$ diferenciável e sua superfície de nível

$$f(x, y, z) = c$$

Assuma que a curva paramétrica

$$r(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \\ k(t) \end{pmatrix}$$

está contida na superfície de nível c da função f

Justificativa

$$f\big(g(t), h(t), k(t)\big) = c$$

$$\frac{d}{dt} f\big(g(t), h(t), k(t)\big) = \frac{dc}{dt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dk}{dt} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dg}{dt} \\ \frac{dh}{dt} \\ \frac{dk}{dt} \end{pmatrix} = 0$$

$$\nabla f \cdot \frac{dr}{dt} = 0$$

Justificativa

Se tomarmos todas as curvas suaves que passam por um ponto (x_0, y_0)

Seus vetores tangentes são todos ortogonais ao vetor gradiente no ponto

Todos os vetores tangentes estão no plano tangente a superfície

Definição

O Plano Tangente ao ponto (x_0, y_0, z_0) na superfície de nível $f(x, y, z) = c$ de uma função diferenciável f é o plano passando pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e normal a $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$

A Reta Normal da superfície no ponto é a reta passando pelo ponto e paralela a $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$

Equação do Plano Tangente

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (X - X_0) = 0$$

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Equação da Reta Normal

$$X = X_0 + t\,\nabla f(x_0, y_0, z_0) \qquad\qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0, z_0) \\ f_y(x_0, y_0, z_0) \\ f_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,f_x(x_0, y_0, z_0) \\ y = y_0 + t\,f_y(x_0, y_0, z_0) \\ z = z_0 + t\,f_z(x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

Exemplo 1

Encontre o plano tangente e a reta normal da superfície

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0$$

no ponto $(1, 2, 4)$

Exemplo 1 – Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z - 9\right) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 + z - 9\right) = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 + y^2 + z - 9\right) = 1$$

$$\nabla f = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \nabla f(1,2,4) &= \left(2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\right)\Big|_{(1,2,4)} \\ &= 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

Plano tangente

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

$$f_x(1, 2, 4)(x - 1) + f_y(1, 2, 4)(y - 2) + f_z(1, 2, 4)(z - 4) = 0$$

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + (z - 4) = 0$$

$$2x + 4y + z = 14$$

Exemplo 1 – Solução

Reta normal

$$X = X_0 + t\,\nabla f(x_0, y_0, z_0) \qquad\qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,f_x(x_0, y_0, z_0) \\ y = y_0 + t\,f_y(x_0, y_0, z_0) \\ z = z_0 + t\,f_z(x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Conteúdo

Plano Tangente à Superfície de Nível

Plano Tangente ao Gráfico de uma Função

Lista Mínima

Justificativa

Queremos o Plano Tangente a superfície suave $z = f(x, y)$ em um ponto (x_0, y_0, z_0) onde $z_0 = f(x_0, y_0)$

Podemos escrever $z = f(x, y)$ como $f(x, y) - z = 0$

Queremos o plano tangente a curva de nível zero da função

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

Derivadas de F

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x, y) - z\right) = f_x - 0 = f_x$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(f(x, y) - z\right) = f_y - 0 = f_y$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(f(x, y) - z\right) = 0 - 1 = -1$$

Justificativa

Equação do Plano Tangente ao gráfico da função $f(x, y)$

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Plano Tangente a superfície $z = f(x, y)$

O plano tangente à superfície $z = f(x, y)$
de uma função diferenciável f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Exemplo 2

Encontre o plano tangente à superfície

$$z = x\cos(y) - ye^x$$

no ponto $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

Exemplo 2 – Solução

Essa superfície corresponde ao gráfico da função $f(x, y) = x\cos(y) - ye^x$

Conferindo que o ponto $(0, 0, 0)$ está na superfície

$$f(0,0) \;=\; \left(x\cos(y) - ye^x\right)\Big|_{(0,0)} \;=\; 0 \times \cos(0) - 0 \times e^0 \;=\; 0$$

Exemplo 2 – Solução

Derivadas parciais de $f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\cos(y) - ye^x\right) = \cos(y) - ye^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\cos(y) - ye^x\right) = -x\,\mathrm{sen}(y) - e^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left(\cos(y) - ye^x\right)\Big|_{(0,0)} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left(-x\,\mathrm{sen}(y) - e^x\right)\Big|_{(0,0)} = -1$$

Exemplo 2 – Solução

Plano tangente

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$$f_x(0, 0)(x - 0) + f_y(0, 0)(y - 0) - (z - 0) = 0$$

$$1(x - 0) - 1(y - 0) - (z - 0) = 0$$

$$x - y - z = 0$$

Conteúdo

Plano Tangente à Superfície de Nível

Plano Tangente ao Gráfico de uma Função

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.6

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 2, 4, 6, 8

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações