CFVVI – Prova 3 – Turma 4 09/09/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [50] Encontre o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ mais distante do ponto $(1, -1, 1)$.
Dica: não é necessário avaliar completamente a distância para determinar o máximo.

Queremos minimizar a distância

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2}$$

Como a função raiz quadrada é crescente podemos minimizar a função

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2$$

suas derivadas parciais são

$$f_x(x, y, z) = 2(x-1) \qquad f_y(x, y, z) = 2(y+1) \qquad f_z(x, y, z) = 2(z-1)$$

As derivadas parciais da função $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ são

$$g_x(x, y, z) = 2x \qquad g_y(x, y, z) = 2y \qquad g_z(x, y, z) = 2z$$

Aplicando os Multiplicadores de Lagrange, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2(x-1) = 2\lambda x \\ 2(y+1) = 2\lambda y \\ 2(z-1) = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Das três primeiras equações obtemos

$$\begin{aligned} 2(x-1) &= 2\lambda x \\ x - 1 &= \lambda x \\ x(1-\lambda) &= 1 \\ x &= \frac{1}{1-\lambda} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2(y+1) &= 2\lambda y \\ y + 1 &= \lambda y \\ y(1-\lambda) &= -1 \\ y &= \frac{-1}{1-\lambda} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2(z-1) &= 2\lambda z \\ z - 1 &= \lambda z \\ z(1-\lambda) &= 1 \\ z &= \frac{1}{1-\lambda} \end{aligned}$$

Sabemos que $1 - \lambda \neq 0$ pois $x(1-\lambda) = 1$.

Substituindo na última equação

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \\
\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 &= 4 \\
\frac{1+1+1}{(1-\lambda)^2} &= 4 \\
\frac{1}{(1-\lambda)^2} &= \frac{4}{3} \\
\frac{1}{1-\lambda} &= \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Para $\dfrac{1}{1-\lambda} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad y = \frac{-2}{\sqrt{3}} \qquad z = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Para $\dfrac{1}{1-\lambda} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$$x = \frac{-2}{\sqrt{3}} \qquad y = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad z = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

Temos dois candidatos $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{-2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(\dfrac{-2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{-2}{\sqrt{3}}\right)$. Avaliando a função em cada ponto temos

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 \\
&= 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right) &= \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 \\
&= 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2
\end{aligned}
$$

Portanto o ponto mais distante é $\left(\dfrac{-2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{-2}{\sqrt{3}}\right)$.

2 [25] Dado $z = \dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i}{2+2i}$, calcule

a) a parte real de z,

b) a parte imaginária de z,

c) o módulo de z,

d) o argumento de z

Avaliando z

$$\begin{aligned}
z &= \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i}{2+2i} \\
&= \frac{\left[\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i\right](2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} \\
&= \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)(2-2i)+\left(1+\sqrt{3}\right)(2i+2)}{2^2+2^2} \\
&= \frac{2-2i-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i+2i+2+2\sqrt{3}i+2\sqrt{3}}{8} \\
&= \frac{4+4\sqrt{3}i}{8} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

Parte real de z

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$$

Parte imaginária de z

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Módulo de z

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1+3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Argumento de z, $\varphi = \arg(z)$

$$\mathrm{sen}(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad \cos(\varphi) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{1}{2}$$

$$\arg(z) = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

3 [25] Encontre as raízes cúbicas complexas do número $z = 1 + i$.

Escrevemos $z = 1 + i$ na forma trigonométrica. O módulo é

$$\rho = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

O argumento é

$$\varphi = \arg(1 + i) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

As raízes cúbicas são

$$\begin{aligned} u_k &= \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right)\right] \qquad k = 0, 1, 2 \\ &= \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)\right] \\ &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 8k\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 8k\pi}{12}\right)\right] \end{aligned}$$

Para cada valor de k

$$\begin{aligned} u_0 &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 8 \times 0\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 8 \times 0\pi}{12}\right)\right] \\ &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 8 \times 1\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 8 \times 1\pi}{12}\right)\right] \\ &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{12}\right)\right] \\ &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] \\ &= \sqrt[6]{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ &= -\frac{2^{1/6}}{2^{1/2}} + \frac{2^{1/6}}{2^{1/2}}i \\ &= -2^{-1/3} + 2^{-1/3}i \\ &= -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{i}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 8 \times 2\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 8 \times 2\pi}{12}\right)\right] \\ &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{17}{12}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{17}{12}\pi\right)\right] \end{aligned}$$