

# Séries Numéricas com Termos Gerais

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

# Conteúdo

Séries Alternadas

Estimativa do Erro para Séries Alternadas

Convergência Absoluta

Exemplos

Lista Mínima

# Séries Alternadas

Os **termos trocam de sinal** alternando entre um positivo e um negativo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

com  $a_n > 0$  para todo  $n$

Exemplo, **Série Harmônica Alternada**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

# Teste da Série Alternada – Teste de Leibniz

Seja  $a_n$  tal que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

1.  $a_n > 0$   $a_n$  são os módulos dos termos da série
2.  $a_n \geq a_{n+1}$  os termos são decrescentes em módulo
3.  $a_n \rightarrow 0$  os termos tendem a zero

Então, a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  converge

# Exemplo 1

Vamos analisar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Percebemos que

- ▶ a série é alternada
- ▶ o módulo do termo geral é  $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$
- ▶  $a_n \geq a_{n+1}$
- ▶  $a_n \rightarrow 0$

Portanto a série converge pelo Teste da Série Alternada

# Exemplo 1

Por outro lado

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2 (-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Série geométrica com  $a = 1$  e  $r = -\frac{1}{2}$

Como  $|r| < 1$  ela converge

sua soma é 
$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}$$

# Conteúdo

Séries Alternadas

Estimativa do Erro para Séries Alternadas

Convergência Absoluta

Exemplos

Lista Mínima

# Estimativa do Erro

Dada uma série que satisfaz as condições do teste da série alternada

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n$$

converge para a soma da série  $S$

- ▶  $|R_n| < a_{n+1}$
- ▶  $S$  está entre  $S_n$  e  $S_{n+1}$
- ▶  $R_n = S - S_n$  tem o mesmo sinal do primeiro termo não utilizado



# Conteúdo

Séries Alternadas

Estimativa do Erro para Séries Alternadas

**Convergência Absoluta**

Exemplos

Lista Mínima

# Convergência Absoluta

Uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

converge absolutamente, ou é absolutamente convergente,

se  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge

# Convergência Condicional

Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge

mas  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  diverge

a série é **condicionalmente convergente**

Exemplo: Série Harmônica Alternada

# Teste da Convergência Absoluta

Uma série absolutamente convergente é convergente.

Séries com termos não negativos e convergentes são absolutamente convergentes

# Teorema do Rearranjo

Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente

dado qualquer **rearranjo**  $(b_k)$  da sequência  $(a_n)$

a série  $\sum b_k$  converge e

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

# Conteúdo

Séries Alternadas

Estimativa do Erro para Séries Alternadas

Convergência Absoluta

**Exemplos**

Lista Mínima

## Exemplo 2

Use o Teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

## Exemplo 2 – Condição 1: $a_n > 0$

Como  $1 + \frac{1}{n} > 1$  para todo  $n \geq 1$

Podemos escolher

$$a_n = \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

que garante  $a_n > 0$



## Exemplo 2 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Considerando a função

$$f(x) = \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \ln (1 + x^{-1})$$

temos

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^{-1}} (-x^{-2}) = \frac{-1}{(1 + x^{-1}) x^2} = \frac{-1}{x^2 + x} < 0 \quad \forall x \geq 1$$

Portanto  $a_n$  é decrescente  $a_n > a_{n+1}$

## Exemplo 2 – Condição 3: $a_n \rightarrow 0$

Observando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

e a função  $\ln(x)$  é contínua em 1

$$\lim a_n = \lim \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \ln 1 = 0$$

O Teste de Leibniz garante que a série converge

## Exemplo 3

Use o Teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{(\ln n)^2}$$

## Exemplo 3 – Condição 1: $a_n > 0$

Vemos que  $a_n = \frac{4}{(\ln n)^2} > 0$  para todo  $n \geq 2$

## Exemplo 3 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Como  $\ln n$  é crescente,

$$a_n = \frac{4}{(\ln n)^2}$$

é decrescente

## Exemplo 3 – Condição 3: $a_n \rightarrow 0$

$a_n \rightarrow 0$ , pois

$$(\ln n)^2 \rightarrow \infty$$

O teste de Leibniz garante que a série converge

## Exemplo 4

Use o teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^n}{(n+1)!}$$

## Exemplo 4 – Condição 1: $a_n > 0$

$$a_n = \frac{10^n}{(n+1)!} \text{ é positivo para } n \geq 1$$



## Exemplo 4 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

$$n \geq 8$$

$$n + 2 \geq 10$$

$$1 \geq \frac{10}{n+2}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{10^{n+1}}{(n+2)!} \\ &= \frac{10}{(n+2)} \frac{10^n}{(n+1)!} \\ &\leq \frac{10^n}{(n+1)!} \\ &= a_n \end{aligned}$$

Portanto,  $a_n$  é decrescente para  $n \geq 8$

## Exemplo 4 – Condição 3: $a_n \rightarrow 0$

Para  $n > 10$

$$\begin{aligned}(n+1)! &= 1 \times 2 \times \cdots \times 9 \times 10 \times 11 \times \cdots \times n \times (n+1) \\ &\geq 10! 10^{n-10} (n+1)\end{aligned}$$

Dessa forma

$$\frac{10^n}{(n+1)!} \leq \frac{10^n}{10! 10^{n-10} (n+1)} = \frac{10^{10}}{10!} \frac{1}{(n+1)} \rightarrow 0$$

$$\text{Como } 0 < \frac{10^n}{(n+1)!} \leq \frac{10^{10}}{10!} \frac{1}{(n+1)}$$

o Teorema do Confronto garante que  $a_n \rightarrow 0$

## Exemplo 4

O teste de Leibniz garante que a série converge

## Exemplo 5

Estime o erro cometido quando aproximamos o valor da soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

pela soma dos seus quatro primeiros termos

## Exemplo 5

A série converge pelo teste da série alternada, portanto

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Como somamos quatro termos ( $S_4$ ), temos que

$$|R_4| < a_5 = \frac{1}{5}$$

## Exemplo 6

Determine quantos termos devem ser somados para aproximar a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 3}$$

com erro menor do que 0,0001

## Exemplo 6

A série converge pelo teste da série alternada, portanto

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Para garantir que o erro é menor do que 0,001 devemos impor que

$$a_{n+1} < 10^{-4}$$

$$n^2 > 10^4 - 3$$

$$\frac{1}{n^2 + 3} < 10^{-4}$$

$$n^2 > 10^4$$

$$\frac{1}{10^{-4}} < n^2 + 3$$

$$n > 10^2$$

# Conteúdo

Séries Alternadas

Estimativa do Erro para Séries Alternadas

Convergência Absoluta

Exemplos

Lista Mínima



# Lista Mínima

Estudar a Seção ? da Apostila

Exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações