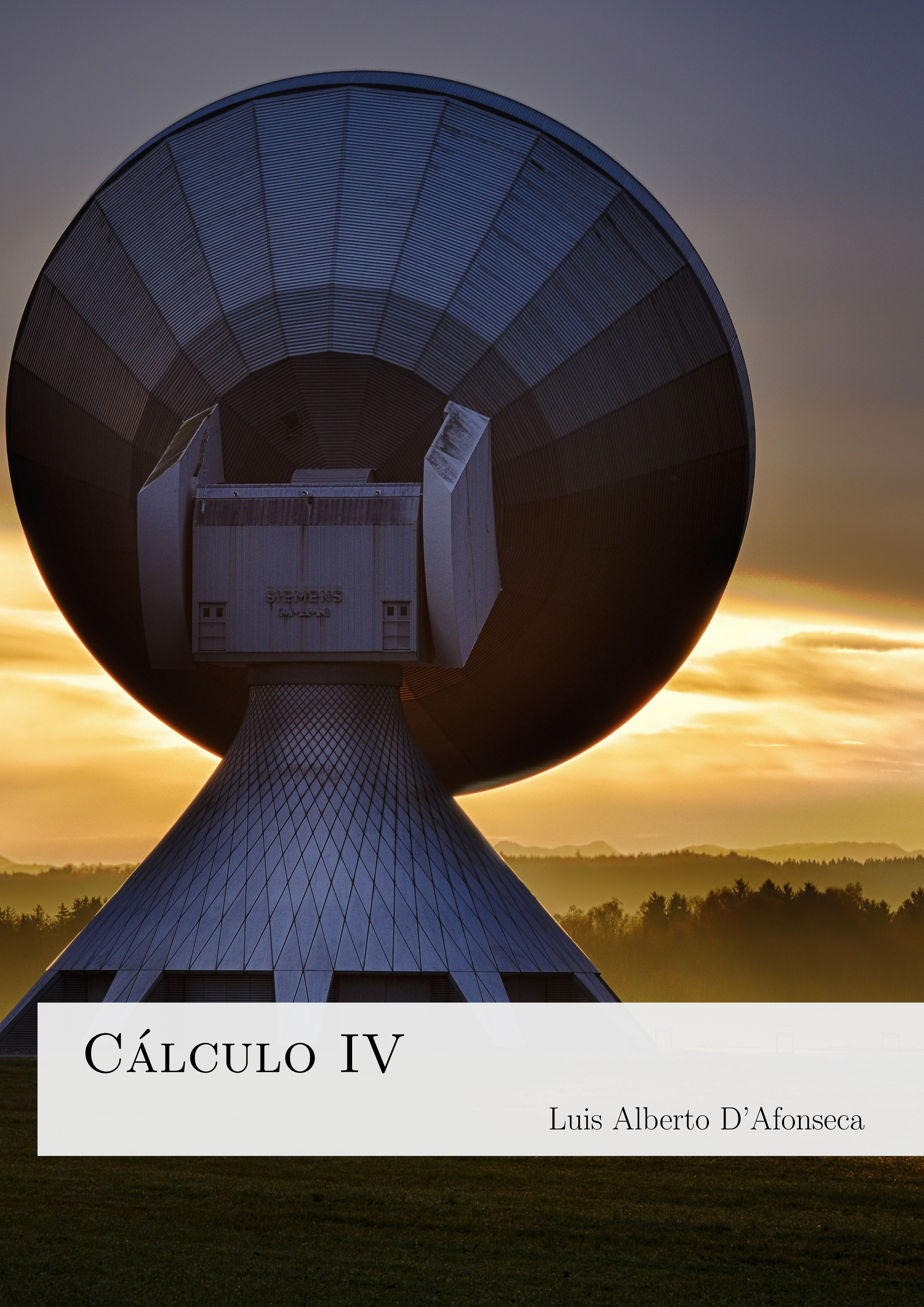


Cálculo IV

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo IV

Luis Alberto D'Afonseca

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG

19 de junho de 2023

Essa apostila foi escrita para agrupar de forma integrada todo o conteúdo da ementa da disciplina de Cálculo IV ministrada no CEFET-MG.

Apostila escrita em LaTeX com a classe `nice-booklet` criada por Luis Alberto D'Afonseca

A versão mais recente desta apostila pode ser baixada clicando ou escaneando o código QR.

Arte da capa: Fotografia de Pixabay baixada de Pexels

Sumário

1 Apresentação **1**

2 Sequências Numéricas **4**

2.1 Apresentação e Motivação 4

2.2 Definição e Propriedades 7

2.3 Sequências e Funções 29

2.4 Sequências Limitadas 35

2.5 Teorema do Confronto 41

2.6 Revisão 44

3 Séries Numéricas **46**

3.1 Definição 46

3.2 Propriedades 59

3.3 Teste de Divergência 64

3.4 Teste da Integral 69

3.5 Teste da Comparação 84

3.6 Teste da Razão 93

3.7 Teste da Raiz 99

3.8 Série Alternada e Teste de Leibniz 103

3.9 Convergência Absoluta e Condicional 110

3.10 Revisão 115

4 Séries de Taylor **118**

4.1 Séries de Potências . . . 118

4.2 Operações com Séries de Potências . . . 130

4.3 Séries de Taylor . . . 136

4.4 Convergência da Série de Taylor . . . 147

4.5 Aproximações por Polinômios de Taylor . . . 160

4.6 Usos da Série de Taylor . . . 164

4.6.1 Avaliando Integrais Não Elementares . . . 164

4.6.2 Avaliando Formas Indeterminadas . . . 165

4.6.3 Definição de Novas Funções . . . 167

4.6.4 Identidade de Euler . . . 170

4.6.5 Cálculo da Série de Taylor para o Arco Tangente . . . 172

4.6.6 Problema de Basileia . . . 174

4.7 Revisão . . . 179

5 Séries de Fourier **181**

5.1 Introdução . . . 181

5.2 Funções Senoidais . . . 182

5.3 Séries de Fourier . . . 190

5.4 Convergência da Série de Fourier . . . 205

5.5 Série de Fourier de Funções Pares e Ímpares . . . 211

5.6 Fenômeno de Gibbs . . . 223

5.7 Revisão . . . 225

6 Equações Diferenciais Parciais **227**

6.1 Introdução . . . 227

6.2 EDO's e o Problema de Autovalores . . . 232

6.3 Método de Separação de Variáveis . . . 246

6.4 Equação do Calor 247
6.4.1 Condição de Dirichlet Homogênea 250
6.4.2 Condição de Dirichlet Não Homogênea 257
6.4.3 Condição de Neumann 260
6.5 Equação da Onda 266
6.6 Equação de Laplace 281
6.6.1 Condição de Dirichlet no Retângulo 282
6.6.2 Equação de Laplace em Coordenadas Polares 294
6.6.3 No Disco com Fronteira de Dirichlet 298
6.7 Revisão 305

7 Transformada de Fourier **309**

7.1 Introdução 309
7.2 Série de Fourier Complexa 312
7.3 Transformada de Fourier 317
7.4 Equação do Calor em uma Barra Infinita 322
7.5 Convergência da Transformada de Fourier 327
7.6 Teorema da Convolução 331
7.7 Propriedades da Transformada de Fourier 333
7.8 Calculando a Transformada de Fourier 337
7.9 Tabelas de Transformadas de Fourier 345
7.10 Revisão 348

A Conteúdo Complementar **350**

A.1 Notação Matemática 350
A.2 Revisão de Alguns Conceitos de Álgebra 353
A.3 Revisão de Algumas Funções 355
A.4 Indução Finita 365

A.5 Sistemas de Coordenadas 367
A.6 Números Complexos 369
A.7 Álgebra Linear 374
A.8 Cálculo de Funções Reais 380

B Referências e Recursos Online **392**
B.1 Recursos Online 392
B.2 Sequências Numéricas 393
B.3 Séries Numéricas 394
B.4 Séries de Taylor 396
B.5 Séries de Fourier 398
B.6 Equações Diferenciais Parciais 399
B.7 Transformada de Fourier 400

Respostas **401**

Referências **421**

Índice Remissivo **422**

Lista de Tabelas

4.1 Tabela 4.1: Séries de Maclaurin 159

7.1 Tabela 7.1: Transformadas de Fourier 346

7.2 Tabela 7.2: Propriedades da Transformadas de Fourier 347

A.1 Tabela A.1: Tabela de Derivadas 387

A.2 Tabela A.2: Tabela de Integrais 389

1

Apresentação

Esse texto ainda está em construção e portanto está incompleto e contém erros, ele não é um substituto para as aulas e livros da bibliografia.

Essa apostila foi idealizada para apresentar o conteúdo programático previsto para a disciplina de Cálculo 4 no CEFET-MG, cuja ementa contém os tópicos:

1. séries numéricas e de potências;
2. séries de Taylor e aplicações;
3. séries de Fourier;
4. transformada de Fourier;
5. equações diferenciais parciais;
6. equações da onda, do calor e de Laplace.

Porém, não conhecemos um livro didático que apresente esses assuntos de forma adequada para a disciplina. Tradicionalmente os professores responsáveis por ministrá-la recorrem a diferentes materiais bibliográficos extraindo apenas uma parte de cada. Nosso objetivo é suprir a ausência de um material compatível com a ementa, produzindo uma apostila específica para a disciplina.

O conteúdo dessa apostila está distribuído nos seguintes capítulos:

3. Sequências Numéricas
4. Séries Numéricas
5. Séries de Taylor
6. Séries de Fourier
7. Equações Diferenciais Parciais
8. Transformada de Fourier

Cada capítulo apresenta a teoria, exemplos e exercícios sobre o tópico correspondente. Sempre que possível apresentamos também exemplos e ilustrações implementadas em Python disponibilizadas como *notebooks* no Google Colaboratory ou Colab. Nenhuma das atividades em Python é necessária para o estudo da apostila, elas foram criadas apenas como atividades complementares para os alunos interessados. A seguir está o *link* para o *notebook* que apresenta as bibliotecas NumPy, usada para computação numérica, e SymPy, usada para computação simbólica.

Notebook introduz as bibliotecas NumPy e SymPy.

Como os textos matemáticos costumam ser muito densos em informação, não absorvemos todas as sutilezas apenas em uma leitura. Por isso, fazer exercícios é parte fundamental do processo de aprendizado, ao manipularmos os conceitos no processo de resolução do exercício somos forçados a utilizar os resultados e a explorar suas sutilezas. A regra geral é que cada passagem da resolução precisa ser embasada em um resultado verdadeiro explicitamente descrito antes, essa é a razão pela qual os textos numeraram os resultados e fórmulas. Mesmo que não escrevamos essas referências, precisamos estar plenamente conscientes delas.

Uma sugestão é utilizar os exemplos contidos no texto como exercícios, tente resolver o problema proposto antes de ler a resolução apresentada. Depois dessa tentativa leia a resolução e a compare criticamente à sua resposta. Seu resultado coincide com o apresentado? Se sim verifique se você apresentou todos os argumentos necessários para embasar sua resposta. Quando os resultados ou argumentos não coincidirem revise sua resolução e verifique se ela corresponde a uma solução alternativa ou contém algum erro. Nas disciplinas de Matemática, na maioria das vezes, a argumentação é muito mais importante do que o resultado.

Nesse texto foi inserida uma lista de exercícios após cada seção e uma lista de revisão no final de cada capítulo. Ao estudar uma seção, teste sua compreensão resolvendo alguns exercícios da seção. Ao fazer uma revisão ou se preparar para uma avaliação, resolva os exercícios da revisão. O fato deles não estarem organizados por temas introduz o processo de identificação do problema e escolha da teoria adequada para resolvê-los.

Alguns exercícios possuem resposta no final da apostila, nesses casos o *link* [resp] no enunciado do exercício leva para sua resposta. Para retornar ao enunciado clique no número da resposta. Em alguns casos a resposta consiste apenas do resultado final, em outros toda a resolução está escrita.

Alguns resultados matemáticos necessários para a disciplina, como números complexos e funções hiperbólicas, são apresentados sucintamente no apêndice Conteúdo Complementar. O apêndice Referências e Recursos Online apresenta diversos materiais complementares, como videoaulas e atividades *online*, que podem ser acessados gratuitamente e contribuir para o estudo de cada tópico. O Índice Remissivo traz *links* para os principais termos discutidos dentro do texto.

Agradeço aos professores *André Ferreira e Pereira*, *Éden Amorim* e *José Luiz Acebal* pela valiosa contribuição para a confecção desse material.

2

Sequências Numéricas

2.1 Apresentação e Motivação 4
2.2 Definição e Propriedades 7
2.3 Sequências e Funções 29
2.4 Sequências Limitadas 35
2.5 Teorema do Confronto 41
2.6 Revisão 44

2.1 Apresentação e Motivação

Apresentamos nesse capítulo o conceito de sequências de números reais. Estamos interessados em explorar suas propriedades de convergência. Esses resultados serão fundamentais quando iniciarmos a discussão sobre séries no próximo capítulo.

Note que os mesmos conceitos podem ser estendidos para sequências de outros objetos matemáticos, como vetores, matrizes ou funções. Porém, as propriedades de convergência serão basicamente as mesmas.

Sequências e séries estão entre os conceitos matemáticos mais aplicados, por exemplo, qualquer algoritmo computacional que busque a solução para um problema fazendo correções iterativas em uma aproximação inicial vai produzir uma sequência de aproximações que podem convergir ou não para a solução desejada. Como exemplo, apresentamos o método de Newton.

Método das Tangentes de Newton

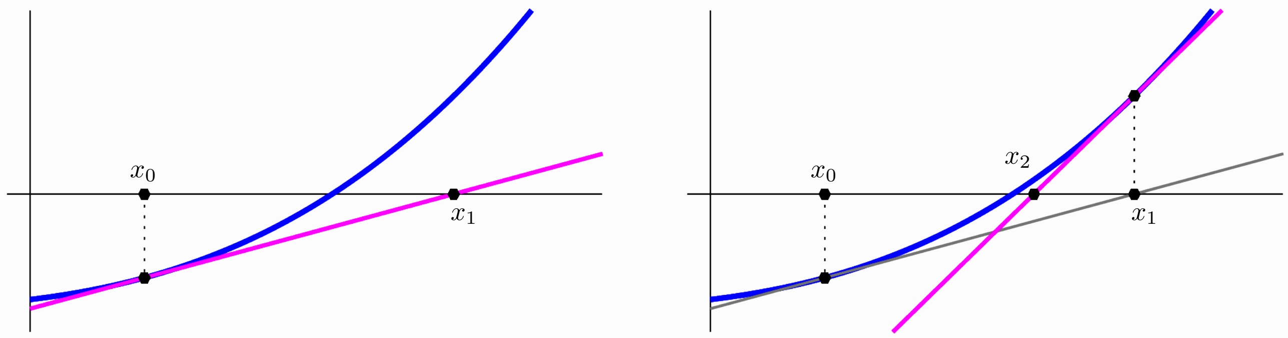
Muitos métodos numéricos ou computacionais se baseiam na busca de uma solução por aproximações sucessivas, isso é, eles partem de um chute inicial e a cada iteração constroem uma nova aproximação para a solução. Um dos métodos mais importantes com essas características é o Método de Newton para encontrar zeros de funções.

Queremos encontrar um valor real x^* que satisfaça a equação

$$f(x^*) = 0 \ ,$$

para uma função $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em A e cuja derivada, f', é diferente de zero para todo $x \in A$.

O Método de Newton busca uma solução para $f(x) = 0$ partindo de um chute inicial $x_0 \in A$. Começamos construindo a reta tangente ao gráfico de f pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e encontrando o ponto onde a reta toca o eixo-x, como ilustrado na Figura 2.1a. O ponto x_1 encontrado dessa forma é a nova aproximação para a solução.



(a) Reta tangente em $(x_0, f(x_0))$ e intercepto x_1

(b) Reta tangente em $(x_1, f(x_1))$ e intercepto x_2

Figura 2.1: Ilustração dos primeiros passos do Método de Newton

De posse da nova aproximação repetimos o processo para obter x_2, como ilustrado na Figura 2.1b. Aplicando sucessivamente esse método produzimos uma lista infinita de aproximações para a solução do problema.

Podemos construir uma fórmula para calcular cada aproximação x_n a partir do valor da aproximação anterior x_{n-1}. O primeiro passo é calcular a expressão para a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_n, f(x_n))$

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \ .$$

A próxima aproximação será o valor de x onde essa reta cruza o eixo-x, isso é, quanto $y = 0$, assim temos

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \ ,$$

rearranjando, obtemos a fórmula para o Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ .$$

Note que a exigência de que a derivada de f não seja nula em A é para garantir que a divisão sempre seja possível.

Esse método vai produzir várias listas infinitas de números

$$\begin{array}{llllll} x_0, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, & \ldots \\ f(x_0), & f(x_1), & f(x_2), & \ldots, & f(x_n), & \ldots \\ f'(x_0), & f'(x_1), & f'(x_2), & \ldots, & f'(x_n), & \ldots \end{array}$$

a cada uma dessas listas infinitas damos o nome de Sequência Numérica.

Código Python para ilustrar o Método de Newton.

A pergunta que precisamos responder agora é se essas sequências convergem para a solução que desejamos. O primeiro passo é definir o que queremos dizer com convergência, depois verificamos se as sequências convergem para alguma coisa e por fim verificamos que os valores $f(x_n)$ convergem para zero e consequentemente os valores x_n convergem para a solução que buscamos. Nas próximas seções deste capítulo apresentamos os resultados matemáticos necessários para respondermos a essas questões.

2.2 Definição e Propriedades

Começamos pela definição de sequências numéricas.

Definição 2.1: Sequência Numérica

Uma sequência de números reais é uma lista de números em uma ordem determinada

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \dots, \quad a_n, \quad \dots$$

Cada $a_i \in \mathbb{R}$ é um termo da sequência, enquanto i é o índice com $i = 1, 2, 3, \dots$

Uma definição equivalente, descreve a sequência de números reais como uma função, $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dos naturais (índices) nos reais (termos). Neste caso, os termos da sequência são

$$a_1 = f(1), \quad a_2 = f(2), \quad a_3 = f(3), \quad \dots, \quad a_n = f(n), \quad \dots$$

Um aspecto importante na definição de sequência é o fato que os elementos são dados em uma ordem determinada. Isso distingue uma sequência de um conjunto enumerável de valores. Dessa forma, podemos ter duas sequências distintas que contém exatamente os mesmos elementos.

Nesse trabalho vamos representar sequências com os termos entre parênteses, como nestes exemplos:

$$(\,1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n,\ \dots\,)\,,$$
$$(\,1,\ 2^{-1},\ 2^{-2},\ 2^{-3},\ \dots,\ 2^{-n},\ \dots\,)\,.$$

Normalmente atribuímos nomes aos termos de uma sequência

$$(a_n) \qquad \text{ou} \qquad (b_n)\,.$$

Quando necessário podemos explicitar os valores para o índice

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \qquad \text{ou} \qquad (b_i)_{i=0}^{\infty}\,,$$

Em resumo, temos as seguintes notações para uma sequência

$$(a_n) = \big(a_n\big)_{n=1}^{\infty} = (\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots\ ).$$

Sempre que estivermos definindo uma sequência numérica e não explicitarmos os índices estamos assumindo que o índice começa em um. Mas tome cuidado pois essa regra não é universal, em muitos casos assume-se que o índice começa em zero, por exemplo, nas Séries de Potências que veremos no Capítulo 4.

Note que muitos livros representam sequências com os termos entre chaves

$$\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots\ \}.$$

Porém, a notação com chaves também é usada para representar conjuntos, onde a ordem dos elementos não é relevante, isso é, os conjuntos $\{a,b,c\}$ e $\{c,b,a\}$ são idênticos. Assim, escolhemos a notação com parênteses para enfatizar essa característica, isso é, as sequências

$$(a_n) = (\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots\ ),$$
$$(b_n) = (\ 2,\ 1,\ 4,\ 3,\ \ldots,\ 2n,\ 2n-1,\ \ldots\ )$$

são diferentes apesar de possuírem os mesmos elementos. Note que, os termos da primeira sequência são da forma $a_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mas os termos da segunda sequência são da forma $b_n = n+1$ se n é impar e $b_n = n-1$ se n é par.

A forma como os termos de uma sequência são determinados não importa para a aplicação dos resultados da teoria. Porém, pode fazer muita diferença quando desejamos fazer manipulações algébricas com os termos. As duas formas mais comuns para calcular os termos de uma sequência são por uma expressão direta ou por uma relação de recorrência. No caso da expressão direta temos uma fórmula explicita para o termo em função do índice, como nos exemplos:

$$a_n = \sqrt{n}\,, \qquad b_n = \ln(n)\,, \qquad c_n = \frac{1}{n^2}\,.$$

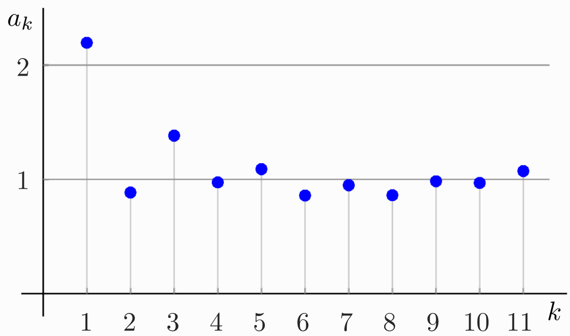
Na Relação de Recorrência o valor de um termo da sequência é calculado a partir do termo anterior, ou dos anteriores. Nesse caso, dizemos que a sequência é recursiva. O exemplo mais famoso é a Sequência de Fibonacci, que é definida pela relação de recorrência

$$f_1 = 1\,, \qquad f_2 = 2\,, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\,, \quad n \geq 3\,.$$

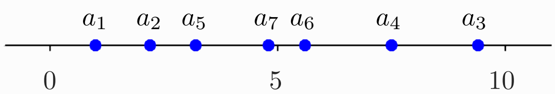
Outros exemplos são a Progressão Aritmética, p_n, e a Progressão Geométrica, q_n, definidas como

$$\begin{aligned} p_1 &= a\,, \qquad & p_n &= p_{n-1} + s\,, \\ q_1 &= a\,, \qquad & q_n &= r q_{n-1}\,. \end{aligned}$$

Podemos representar graficamente as sequências de uma forma semelhante a que usamos para representar o gráfico de uma função real $y = f(x)$, marcando os pontos em um plano cartesiano com os valores dos índices no eixo-x. Porém, no caso das sequências temos pontos isolados e não uma linha contínua, como ilustrado na Figura 2.2a. Alternativamente, podemos representar os valores dos termos de uma sequência sobre um único eixo, como ilustrado na Figura 2.2b.



(a) Representação de uma sequência em um plano cartesiano.



(b) Representação de uma sequência sobre um eixo.

Figura 2.2: Representação gráfica de sequências.

A seguir apresentamos alguns exemplos de sequências definidas diretamente por expressões envolvendo o índice. Observe que a linha conectando os pontos não faz parte do gráfico, ela foi incluída apenas para facilitar a visualização da ordem dos pontos.

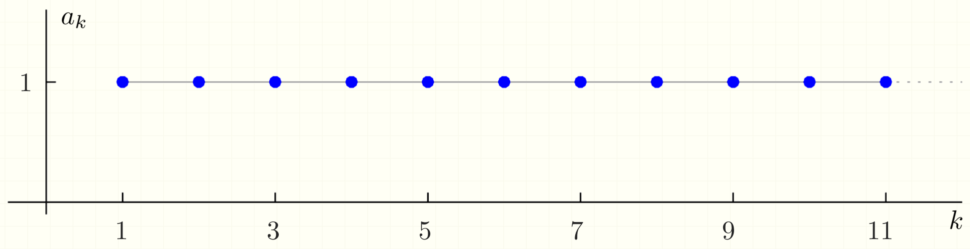
Exemplo 2.2.1:
Escreva os primeiros termos de cada sequência e esboce seu gráfico no plano cartesiano.

1. $a_k = 1\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$

   Primeiros termos

   $$(a_k) = (\,1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1, \ldots\,)\,.$$

   Gráfico da sequência

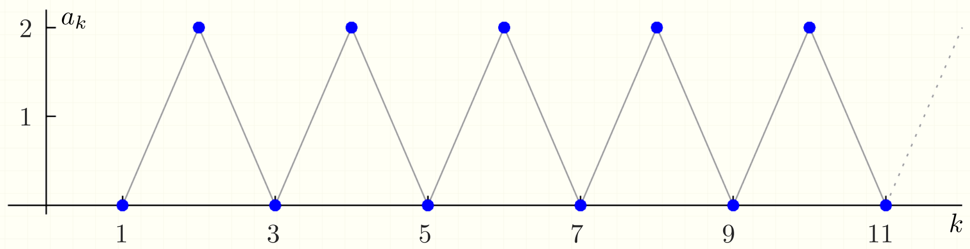


2. $a_k = 1 + (-1)^k\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$

Primeiros termos

$$
\begin{aligned}
(a_k) &= \big(1 + (-1)^1, \quad 1 + (-1)^2, \quad 1 + (-1)^3, \quad 1 + (-1)^4, \ldots\big)\\
&= (1 - 1, \quad 1 + 1, \quad 1 - 1, \quad 1 + 1, \ldots)\\
&= (\,0,\ 2,\ 0,\ 2,\ 0,\ 2, \ldots\,)\ .
\end{aligned}
$$

Gráfico da sequência

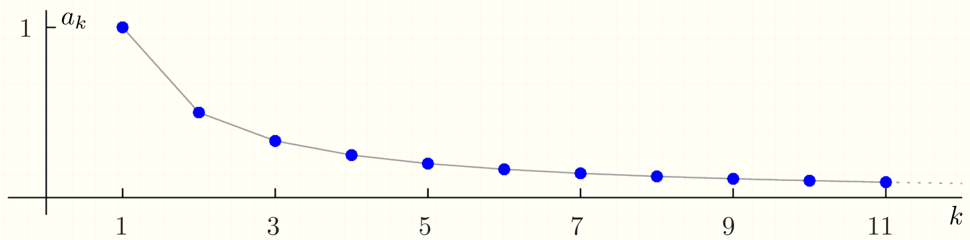


3. $a_k = \dfrac{1}{k}\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$

Primeiros termos

$$
(a_k) = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}, \ldots\right)\ .
$$

Gráfico da sequência



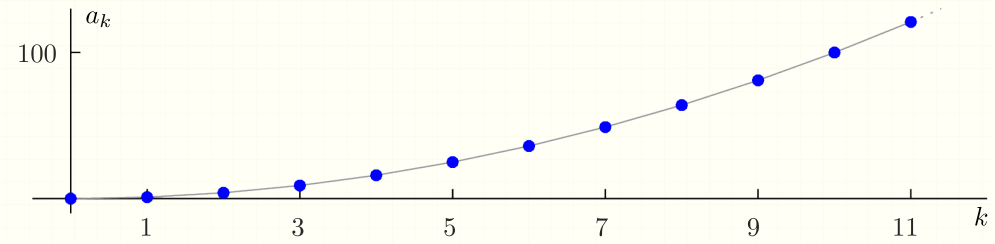
4. $a_k = k^2\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

Primeiros termos

$$
(a_k) = \big(\,0^2,\ 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2, \ldots\big)
$$

$$= (\,0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16, \dots)\ .$$

Gráfico da sequência

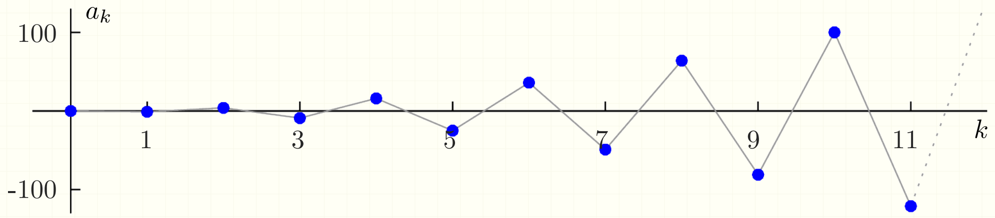


5. $a_k = (-1)^k k^2\,, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$

Primeiros termos

$$\begin{aligned}(a_k) &= \big((-1)^1 \times 1^2,\quad (-1)^2 \times 2^2,\quad (-1)^3 \times 3^2,\quad (-1)^4 \times 4^2, \dots\big)\\ &= (-1 \times 1,\quad 1 \times 4,\ -1 \times 9,\quad 1 \times 16, \dots)\\ &= (\,0, -1,\ 4, -9,\ 16, \dots)\ .\end{aligned}$$

Gráfico da sequência

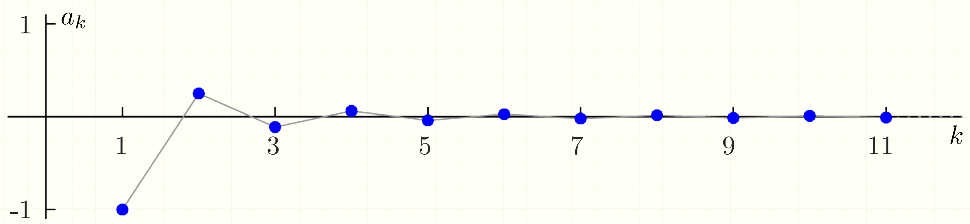


6. $a_k = \dfrac{(-1)^k}{k^2}\,, \qquad k = 1, 2, 3, \dots$

Primeiros termos

$$\begin{aligned}(a_k) &= \left(\frac{(-1)^1}{1^2},\quad \frac{(-1)^2}{2^2},\quad \frac{(-1)^3}{3^2},\quad \frac{(-1)^4}{4^2}, \dots\right)\\ &= \left(\frac{-1}{1},\quad \frac{1}{4}, \frac{-1}{9},\quad \frac{1}{16}, \dots\right)\\ &= \left(-1,\ \frac{1}{4}, \frac{-1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right)\ .\end{aligned}$$

Gráfico da sequência



A seguir apresentamos alguns exemplos de sequências definidas recursivamente.

Exemplo 2.2.2:
Escreva os primeiros termos de cada sequência e esboce seu gráfico no plano cartesiano.

1. $a_1 = 1\,, \qquad a_{n+1} = 0{,}8\,a_n\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

   Note que essa sequencia é uma Progressão Geométrica, seus primeiros termos são:

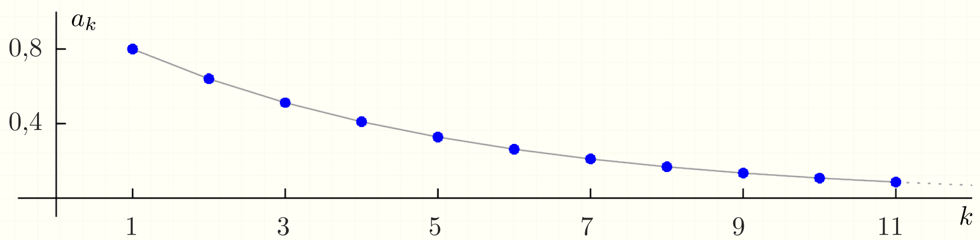
$$\begin{aligned} &a_1 = 1 \\ &a_2 = 0{,}8\,a_1 = 0{,}8 \\ &a_3 = 0{,}8\,a_2 = 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}64 \\ &a_4 = 0{,}8\,a_3 = 0{,}8 \times 0{,}64 = 0{,}512 \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

   portanto

$$(a_k) = (\,1;\ 0{,}8;\ 0{,}64;\ 0{,}512; \ldots\,)\ .$$

   Observe que usamos o ponto e virgula para separar termos. Fazemos isso sempre que necessário para evitar confusão com a virgula da representação decimal do número.

   Gráfico da sequência



2. $a_1 = 1\,,\ a_2 = 1\,, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,, \qquad n = 3, 4, 5, \ldots$

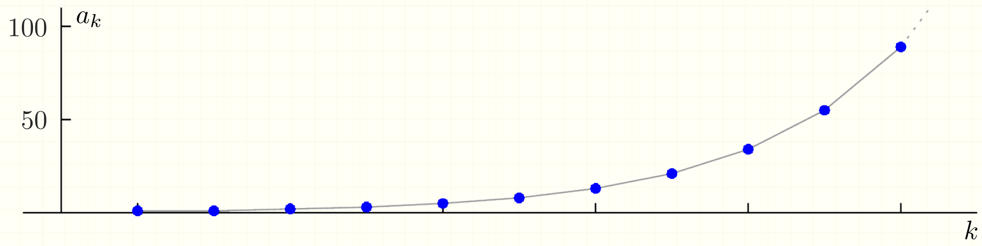
Note que essa é a sequencia de Fibonacci, seus primeiros termos são:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 1 \\
a_3 &= a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2 \\
a_4 &= a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3 \\
a_5 &= a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

portanto

$$(a_k) = (\, 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5, \ldots \,)\ .$$

Gráfico da sequência



3. $a_1 = 1\,, \qquad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}\,, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$

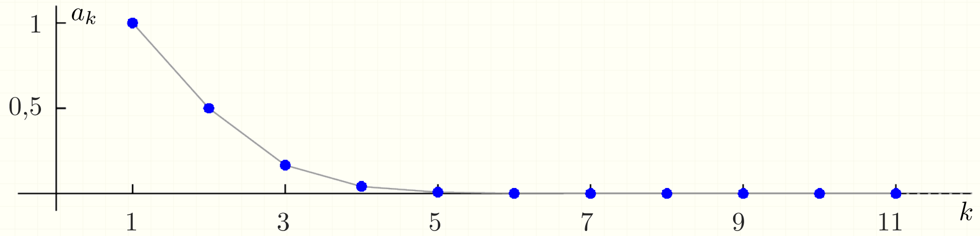
Os primeiros termos dessa sequência são:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2} \\
a_3 &= \frac{a_2}{3} = \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6} \\
a_4 &= \frac{a_3}{4} = \frac{1/6}{4} = \frac{1}{24} \\
a_5 &= \frac{a_4}{5} = \frac{1/24}{5} = \frac{1}{120} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

portanto

$$(a_k) = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{24},\ \frac{1}{120}, \ldots \right)\ .$$

Gráfico da sequência



Código Python para calcular os termos das sequências dos exemplos anteriores.

Podemos agora apresentar a definição de convergência de sequências. Note que a definição para o limite de funções reais é muito similar, porém, nem sempre ela é trabalhada dessa forma na disciplina de Cálculo I. Um exercício interessante é buscar a definição do limite de funções reais em um livro de Cálculo I e comparar com a definição a seguir.

DEFINIÇÃO 2.2: CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS

Dizemos que uma sequência de números reais (a_n) converge para um número real L se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \qquad \Rightarrow \qquad |a_n - L| < \varepsilon \,.$$

Se (a_n) converge para L, usamos uma das notações

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \qquad \text{ou} \qquad \lim a_n = L$$

e dizemos que L é o limite da sequência (a_n).

A Figura 2.3 ilustra a definição do limite de uma sequência numérica. Esse gráfico apresenta uma sequência (a_n) que converge para L. Para qualquer valor ε que escolhermos, não importa o quão pequeno, sempre vai existir um índice N a partir do qual todos os valores a_n estão sempre dentro do intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Uma forma para entender o significado do ε é imaginá-lo como um valor de tolerância. Se estivéssemos buscando uma aproximação para L, utilizando a sequência a_n,

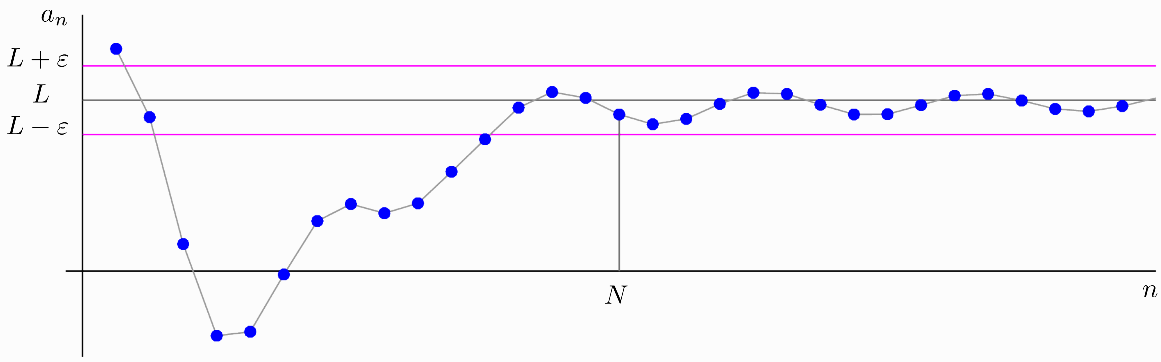


Figura 2.3: Ilustração da definição do limite de sequências numéricas.

precisaríamos garantir que para qualquer tolerância ε exigida seríamos capazes de encontrar um índice N a partir do qual todos os termos da sequência aproximam L com um erro menor do que ε. Porém, queremos mais do que apenas aproximar L, queremos poder dizer que o limite de a_n é igual a L, nesse caso precisamos garantir que para todos os valores de $\varepsilon > 0$ sempre é possível encontrar um N que satisfaça a condição de que o erro seja menor do que ε.

Para nos familiarizarmos com os elementos da definição vamos explorar um exemplo numérico.

EXEMPLO 2.2.3:
A partir de que termo da sequência

$$a_n = \frac{1}{n}$$

podemos dizer que ela aproxima zero com as tolerâncias de $\varepsilon = 0{,}1$ e $\varepsilon = 0{,}001$?

Queremos determinar o índice N a partir do qual todos os termos a_n satisfazem a relação $|a_n| < \varepsilon$. Manipulando $|a_n|$ temos

$$|a_n| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}\,.$$

Portanto $|a_n| < \varepsilon$ equivale a

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

que podemos reescrever como

$$\frac{1}{\varepsilon} < n\,.$$

Assim, concluímos que a relação $|a_n| < \varepsilon$ é equivalente a

$$n > \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Podemos agora substituir os valores definidos para a tolerância. Para garantir que $|a_n| < 0{,}1$ precisamos que

$$n > \frac{1}{0{,}1} = 10\,.$$

Podemos então escolher $N = 10$, ou qualquer outro valor maior do que 10.

Enquanto que para garantir que $|a_n| < 0{,}001$ precisamos que

$$n > \frac{1}{0{,}001} = 1000\,.$$

Nesse caso podemos escolher $N = 1000$.

O exemplo anterior, assim como qualquer exploração numérica, pode nos ajudar a entender o comportamento de uma sequência, mas não garante nada sobre seu limite. A seguir fazemos a demonstração da convergência usando essencialmente as mesmas manipulações do exemplo anterior, mas sem usar valores numéricos.

Exemplo 2.2.4:
Mostre que a sequência $a_n = \dfrac{1}{n}$ converge para zero.

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, queremos determinar o índice N tal que

$$|a_n - 0| < \varepsilon \qquad \forall n > N\,.$$

Simplificando essa relação temos

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \forall n > N\,.$$

Note que a condição $1/n < \varepsilon$ equivale a

$$n > \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Escolhendo N de forma que

$$N > \frac{1}{\varepsilon}$$

Garantimos que $|a_n - 0| < \varepsilon$ para todo $n > N$, pois

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

Provamos assim que

$$\frac{1}{n} \to 0\,.$$

A seguir apresentamos outros exemplos de como a definição de convergência é usada para provar a convergência de uma sequência.

Exemplo 2.2.5:
Mostre que $\lim \frac{1}{2^n} = 0\,.$

Precisamos provar que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon \qquad \forall\, n > N\,, \tag{2.1}$$

Reescrevendo a desigualdade como $2^{-n} < \varepsilon$ e calculando o logaritmo base 2 em ambos os lados temos

$$\begin{aligned} \log_2\left(2^{-n}\right) &< \log_2 \varepsilon \\ -n &< \log_2 \varepsilon \\ n &> -\log_2 \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto basta escolher

$$N > -\log_2 \varepsilon$$

para garantir a condição (2.1) e mostrar que $\lim \dfrac{1}{2^n} = 0$.

O próximo exemplo generaliza o anterior.

Exemplo 2.2.6:
Mostre que se $|\alpha| < 1$, então $\lim \alpha^n = 0$.

Se $\alpha = 0$ todos os termos da sequência são zero e portanto o limite é zero.

Quando $|\alpha| \neq 0$, precisamos provar que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\alpha^n - 0| = |\alpha^n| < \varepsilon \qquad \forall\, n > N\,, \tag{2.2}$$

para isso vamos usar uma variável auxiliar c que atende a condição

$$|\alpha| = \frac{1}{1+c}\,,$$

ou seja, $c = {}^1\!/\!_{|\alpha|} - 1$. Como $0 < |\alpha| < 1$, sabemos que ${}^1\!/\!_{|\alpha|} > 1$ e portanto $c > 0$. Usando a Desigualdade de Bernoulli (Veja o exemplo A.4)

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall x > -1,\ \forall n \geq 0$$

podemos escrever que

$$(1+c)^n \geq 1 + nc \geq nc$$

Retornando para a sequência α^n temos

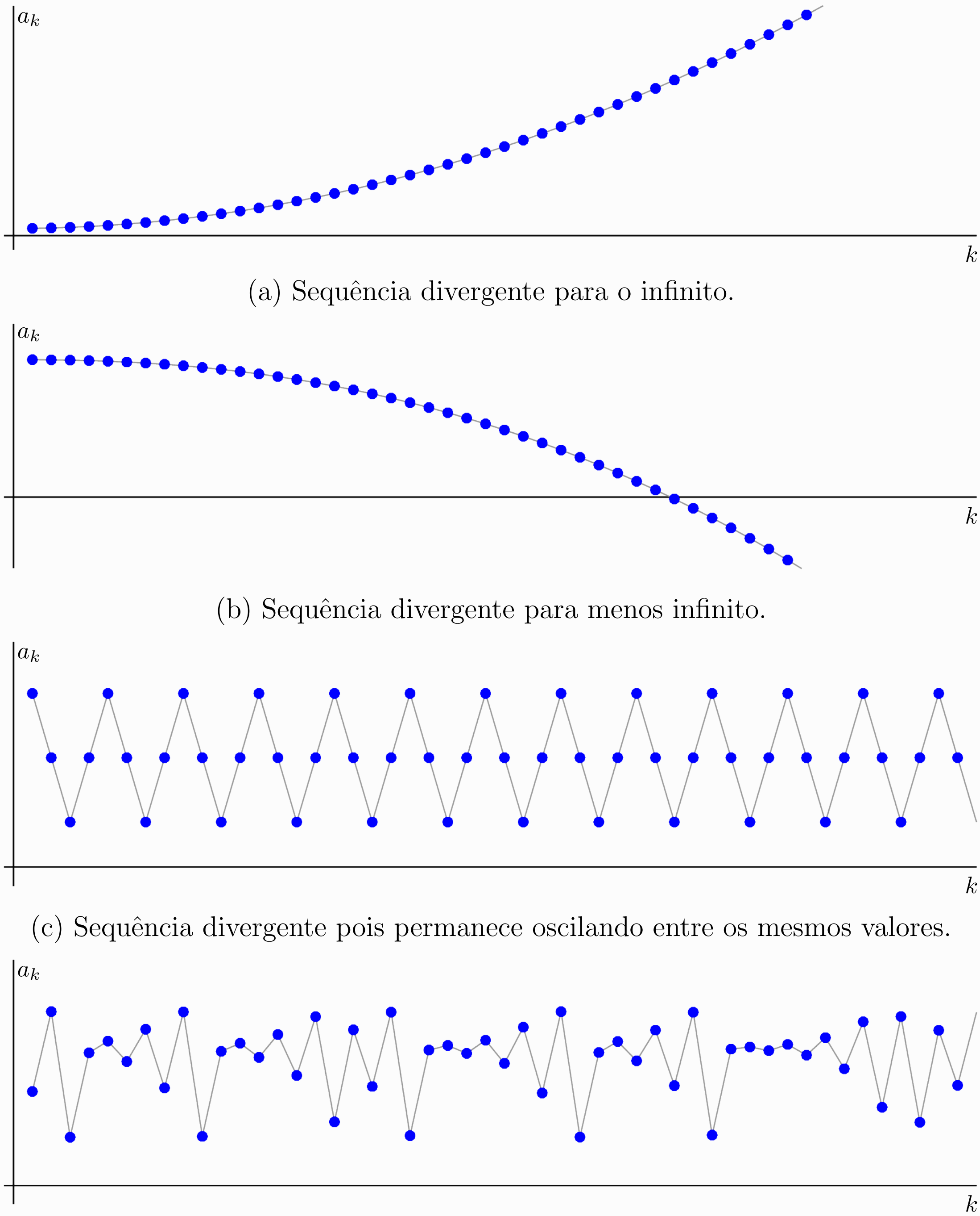
$$\alpha^n = \frac{1}{(1+c)^n} \leq \frac{1}{nc}$$

Escolhendo N tal que

$$\frac{1}{Nc} < \varepsilon$$

ou seja $N > {}^1\!/\!_{c\varepsilon}$, concluímos que para todo $n > N$ vale

$$\alpha^n = \frac{1}{(1+c)^n} \leq \frac{1}{nc} < \frac{1}{Nc} < \varepsilon$$



(a) Sequência divergente para o infinito.

(b) Sequência divergente para menos infinito.

(c) Sequência divergente pois permanece oscilando entre os mesmos valores.

(d) Sequência divergente pois tem comportamento caótico.

Figura 2.4: Formas em que uma sequência pode divergir.

que é exatamente a condição (2.2) e portanto mostra que $\lim a^n = 0$.

Observe que a definição do limite não nos diz como encontrar L e sua aplicação pode ser extremamente complicada. Sua importância está em ser a base para demonstrar as propriedades do limite que utilizaremos.

Se não existe um número real L que satisfaça a Definição 2.2, dizemos que (a_n)

diverge. A Figura 2.4 ilustra as formas como uma sequência numérica pode divergir. Os gráficos 2.4a e 2.4b mostram sequências que divergem para infinto e menos infinito, veja a Definição 2.7 mais a frente nesta seção. Em 2.4c temos uma sequência que oscila repetindo os mesmos valores indefinidamente, enquanto que a sequência ilustrada em 2.4d, o Mapa Logístico, apresenta um comportamento caótico.

Código Python para explorar o Mapa Logístico.

O próximo exemplo usa a definição para provar que uma sequência não converge para nenhum número real.

Exemplo 2.2.7:
Mostre que a sequência $(1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ diverge.

Suponha, por absurdo, que ela convirja para algum valor L, então dado $\varepsilon = {}^1\!/\!_3$, é impossível que $|0 - L| < {}^1\!/\!_3$ e $|1 - L| < {}^1\!/\!_3$, pois

$$|0 - L| < \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad L \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

enquanto que

$$|1 - L| < \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad L \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Porém, esses intervalos são disjuntos, ou seja, não tem interseção. Assim, é impossível que exista L que seja limite dessa sequência.

Quando uma sequência é covergente, existe um único valor para L que atende as condições da Definição 2.2. Mesmo que essa afirmação pareça bastante intuitiva, não podemos acreditar nela sem antes demostrá-la. Por isso precisamos do próximo teorema.

Teorema 2.3: Unicidade do Limite

Uma sequência convergente (a_n) tem apenas um limite.

Demonstração

Suponha que existam L_1 e L_2 tais que $a_n \to L_1$ e $a_n \to L_2$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existem naturais N_1 e N_2 tais que

$$|a_n - L_1| < \varepsilon \quad \forall\, n > N_1 \qquad \text{e} \qquad |a_n - L_2| < \varepsilon \quad \forall\, n > N_2\,.$$

Seja $N = \max(N_1, N_2)$, então para todo $n > N$, pela desigualdade triangular,

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| < 2\varepsilon\,.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $L_1 = L_2$.

Muitas vezes estaremos interessados em apenas alguns termos de uma sequência, selecionando esses termos criamos uma subsequência como definido a seguir.

Definição 2.4: Subsequências

Uma subsequência (b_k) de (a_n)

$$(b_k) = (a_{n_k})$$

é uma nova sequência com índices $k \in \mathbb{N}$ formada por elementos de (a_n), mantendo sua ordem, ou seja, $n_{k+1} > n_k$.

O próximo exemplo apresenta alguns casos de subsequências.

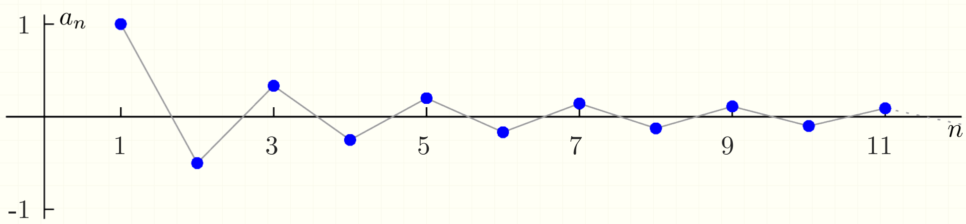
Exemplo 2.2.8:
Dada a sequência

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,,$$

calcule primeiros termos e esboce o gráfico dessa sequência e das suas subsequências com índices pares e ímpares.

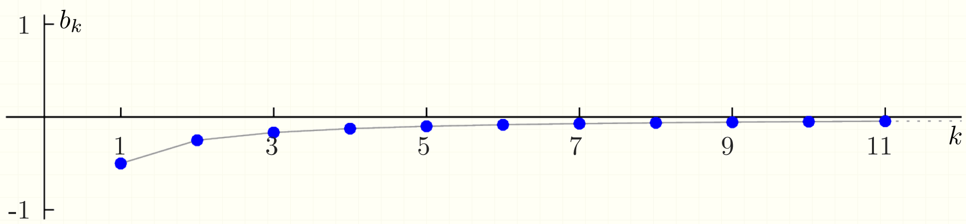
A sequência original, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(a_n) = \left(1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)\,.$$



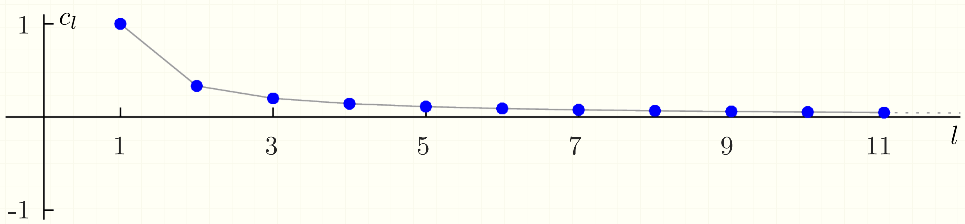
A subsequência dos termos pares, $n = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$(b_k) = (a_{2k}) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{8}, \ldots \right) .$$



A subsequência dos termos ímpares, $n = 2l - 1$, $l = 1, 2, 3, \ldots$

$$(c_l) = (a_{2l-1}) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots \right) .$$



O corolário a seguir relaciona o limite de uma subsequência com o limite da sequência original.

Corolário 2.5: Convergência de Subsequências

Toda subsequências (b_k) de uma sequência convertente (a_n) converge para o limite de a_n

$$\lim_{k \to \infty} b_k = \lim_{n \to \infty} a_n \, .$$

Esse resultado pode ser usado para determinar o limite de uma subsequência ou, como mostrado no exemplo a seguir, provar que uma sequência não poder ser convergente.

Exemplo 2.2.9:
Mostre que a sequência $a_n = (-1)^n$ diverge.

Vamos assumir por absurdo que a_n seja convergente, nesse caso suas subsequências precisam convergir para o mesmo limite. Tomamos agora a subsequência de termos pares

$$b_k = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$$

e a subsequência de termos ímpares

$$c_k = a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1\,.$$

Como elas convergem para valores diferentes, $b_k \to 1$ e $c_k \to -1$, temos um absurdo, portanto a_n não pode convergir.

Quando desejamos operar com sequências convergentes podemos utilizar as propriedades do cálculo do limite descritas no teorema a seguir.

Teorema 2.6: Propriedades de Sequências Convergentes

Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências convergentes, então, valem as seguintes regras:

1. $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ — Regra da soma
2. $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$ — Regra da diferença
3. $\lim(ka_n) = k \lim a_n, \quad \forall\, k \in \mathbb{R}$ — Regra da multiplicação por escalar
4. $\lim(a_n\, b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n)$ — Regra do produto
5. $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}, \quad \lim b_n \neq 0$ — Regra do quociente

Demonstração

Sejam $A = \lim a_n$ e $B = \lim b_n$. Dado $\varepsilon > 0$, existem $N_1,\, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_n - A| < \varepsilon/2$ se $n > N_1$ e $|b_n - B| < \varepsilon/2$ se $n > N_2$.

Então tomando $N = \max(N_1, N_2)$, segue, pela desigualdade triangular, que

$$|a_n + b_n - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

> de onde, temos $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.

As demais demonstrações são equivalentes e deixadas como exercício. Compare, em um livro de Cálculo I, com a demonstração das propriedades equivalentes para limites de funções reais.

A seguir apresentamos alguns exemplos de como as propriedades do Teorema 2.6 podem ser usadas para calcular o limite de sequências que são definidas como combinações de sequências convergentes.

Exemplo 2.2.10:
Sendo $0 < a < 1$, calcule o limite da sequência $-5a^n$

$$\lim -5a^n = -5 \lim a^n = -5 \cdot 0 = 0\,.$$

Exemplo 2.2.11:
Sendo $0 < a < 1$, calcule o limite da sequência $10 + a^n$

$$\lim(10 + a^n) = 10 + \lim a^n = 10 + 0 = 10\,.$$

Exemplo 2.2.12:
Sendo $0 < a < 1$, calcule o limite da sequência $\dfrac{-\frac{1}{a^n} + 7}{1 + \frac{5}{a^n}}$.

$$\begin{aligned}\lim\left(\frac{-1/a^n + 7}{1 + 5/a^n}\right) &= \lim\left(\frac{-1 + 7a^n}{a^n + 5}\right)\\ &= \frac{-1 + 7\lim(a^n)}{\lim(a^n) + 5} = -\frac{1}{5}\,.\end{aligned}$$

Uma técnica para calcular o limite de uma sequência recursiva, (a_n), que sabemos ser convergente, é usar o fato de que as sequências (a_n) e (a_{n+1}) convergem para o mesmo valor. O exemplo a seguir ilustra essa técnica.

Exemplo 2.2.13:

Calcule o limite da sequência convergente definida pela relação de recorrência

$$a_1 = 2\,, \qquad a_{n+1} = \frac{6}{1+a_n}\,.$$

Como sabemos que a sequência converge podemos escrever

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L\,.$$

Agora podemos aplicar as propriedades de limite na expressão para a_{n+1}

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim \frac{6}{1+a_n} = \frac{6}{1+\lim a_n}\,.$$

Substituindo os limites por L temos uma equação algébrica

$$L = \frac{6}{1+L}\,,$$

$$L(1+L) = 6\,,$$

$$L^2 + L - 6 = 0\,.$$

Usando a fórmula de Bhaskara

$$L = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}\,,$$

temos

$$L = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \qquad \text{ou} \qquad L = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Encontramos dois candidatos para L os valores -3 e 2, porém, o limite é único. O segundo candidato surge no momento que elevamos as expressões ao quadrado, mas uma das alternativas precisa ser descartada. Qual alternativa deve ser descartada depende do valor dado para o primeiro termo a_1. Observamos que com $a_1 = 2$ portanto os valores de a_n nunca são negativos. Então o limite da sequência é 2.

A Figura 2.4 nos mostra as formas como uma sequência diverge. Entre esses casos, os dois primeiros, onde a sequência diverge para mais ou menos infinito, merecem uma atenção especial pois, mesmo que a sequência seja divergente, é possível realizar alguns cálculos com ela. Para isso vamos definir com precisão o que significa divergir para o infinito.

Definição 2.7: Divergência ao Infinito

Dizemos que a sequência (a_n) diverge para o infinito se para cada número M dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $a_n > M$. Quando isso ocorre, escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{ou} \qquad a_n \to \infty \qquad \text{ou} \qquad \lim a_n = \infty\,.$$

Analogamente, se para cada número real m existir $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, $a_n < m$, então diremos que a sequência diverge para menos infinito e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \text{ou} \qquad a_n \to -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim a_n = -\infty\,.$$

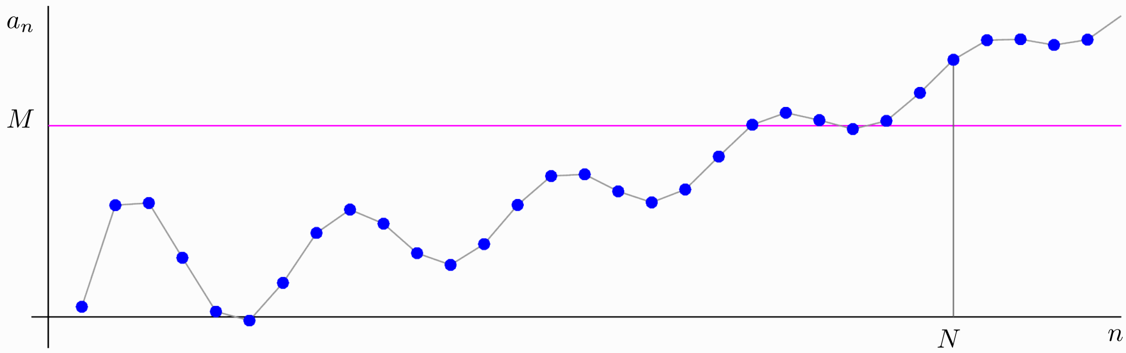


Figura 2.5: Ilustração da divergência para o infinito de sequências numéricas.

A Figura 2.5 apresenta uma sequência (a_n) que diverge para infinito positivo. Isso significa que para qualquer valor M que escolhermos, não importa o quão grande ele seja, sempre vai existir um índice N a partir do qual todos os valores de a_n são maiores do que M.

Exemplo 2.2.14:
Mostre que a sequência $a_n = n^a$, diverge ao infinito para todo $a > 0$.

Dado qualquer número M, podemos supor sem perda de generalidade que $M > 0$,

$$n^a > M \quad \Leftrightarrow \quad n > M^{1/a}\,.$$

Agora basta escolher $N = M^{1/a}$, de modo que se $n > N$, segue que $a_n = n^a > M$.

Da mesma forma que toda subsequência b_k de uma sequência convergente, a_n, converge para o limite de a_n, toda subsequência c_k de uma sequência d_n, que diverge para o infinito precisa também divergir para o infinito.

Exercícios Seção 2.2

1) Responda as questões.

a) O que é uma sequência?

b) O que significa dizer que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$?

c) O que significa dizer que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

d) O que é uma sequência convergente? Dê dois exemplos.

e) O que é uma sequência divergente? Dê dois exemplos.

2) [resp] Dada a fórmula para o n-ésimo termo, a_n, de uma sequência (a_n), encontre os valores de a_1, a_2, a_3 e a_4.

$$a_n = \frac{1-n}{n^2}$$

3) Dada a fórmula para o n-ésimo termo a_n, encontre os valores dos quatro primeiros termos da sequência (a_n).

a) $a_n = \dfrac{1}{n!}$

b) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

c) $a_n = 2 + (-1)^n$

d) $a_n = \dfrac{2^n}{2^{n+1}}$

e) $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$

f) $a_n = \dfrac{3n}{1+6n}$

g) $a_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

h) $a_n = 1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

i) $a_n = 1 + \dfrac{10^n}{9^n}$

4) [resp] Dada um ou dois termos iniciais de uma sequência, bem como uma fórmula de recursão para os termos remanescentes. Escreva os dez termos iniciais da sequência.

$$a_1 = -2 \qquad a_{n+1} = \frac{na_n}{n+1}$$

5) Dada a relação de recorrência e os valores iniciais necessários da sequência (a_n), calcule seus cinco primeiros termos.

a) $a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = a_n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

b) $a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$

c) $a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = (-1)^{n+1}\dfrac{a_n}{2}$

d) $a_1 = a_2 = 1 \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

e) $a_1 = 2,\ a_2 = -1 \qquad a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

6) [resp] Encontre uma fórmula para o n-ésimo termo da sequência dos quadrados dos inteiros positivos menos 1

$$(0, 3, 8, 15, 24, \ldots)$$

7) Encontre uma fórmula explicita para o n-ésimo termo de cada sequência.

a) Números 1 alternando o sinal

$$(1, -1, 1, -1, \ldots)$$

b) Quadrados dos inteiros positivos alternando os sinais

$$(1, -4, 9, -16, 25, \ldots)$$

c) Potências de 2 divididas por múltiplos de 3

$$\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{12}, \frac{2^2}{15}, \frac{2^3}{18}, \ldots\right)$$

d) Inteiros começando com -3

$$(-3, -2, -1, 0, 1, \ldots)$$

e) Um inteiro positivo impar sim um não

$$(1, 5, 9, 13, 17, \ldots)$$

f) $\left(1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{9}, \ldots\right)$

g) $\left(1, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \ldots\right)$

h) $\left(-3, 2, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{9}, -\dfrac{16}{27}, \ldots\right)$

i) $(5, 8, 11, 14, 17, \ldots)$

j) $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{4}, -\dfrac{16}{5}, \dfrac{25}{6}, \ldots\right)$

k) $(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots)$

8) [resp] A sequência (a_n) converge ou diverge? Encontre seu limite se for convergente.

$$a_n = 1 + (-1)^n$$

9) [resp] A sequência (a_n) converge ou diverge? Encontre seu limite se for convergente.

$$a_n = (-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

10) [resp] Método de Newton: As seguintes sequências vêm da fórmula recursiva para o método de Newton,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

As sequências convergem? Em caso afirmativo, para qual valor? Em cada caso, comece identificando a função f que gera a sequência.

a) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2-2}{2x_n} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$

b) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{\operatorname{tg}(x_n)-1}{\sec^2(x_n)}$

c) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - 1$

11) [resp] Verifique se a sequência é convergente, caso seja calcule seu limite.

a) $a_n = 2 + (0{,}1)^n$

b) $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$

c) $a_n = \dfrac{1-2n}{1+2n}$

d) $a_n = \dfrac{2n+1}{1-3\sqrt{n}}$

e) $a_n = \dfrac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$

f) $a_n = \dfrac{n+3}{n^2+5n+6}$

g) $a_n = \dfrac{n^2-2n+1}{n-1}$

h) $a_n = \dfrac{1-n^3}{70-4n^2}$

i) $a_n = 1+(-1)^n$

j) $a_n = (-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

k) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

l) $a_n = \left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)\left(3+\dfrac{1}{2^n}\right)$

12) Verifique se a sequência converge ou não e calcule o limite das sequências convergentes.

a) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

b) $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

c) $a_n = \dfrac{1}{(0{,}9)^n}$

d) $a_n = 1-(0{,}2)^n$

e) $a_n = \dfrac{n^3}{n^3+1}$

f) $a_n = \dfrac{3+5n^2}{n+n^2}$

g) $a_n = \dfrac{n^3}{n+1}$

h) $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n}$

i) $a_n = \dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$

13) [resp] Assuma que a sequência converge e encontre seu limite.

a) $a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \dfrac{72}{1+a_n}$

b) $a_1 = -1 \qquad a_{n+1} = \dfrac{a_n+6}{a_n+2}$

c) $a_1 = -4 \qquad a_{n+1} = \sqrt{8+2a_n}$

d) $a_1 = 0 \qquad a_{n+1} = \sqrt{8+2a_n}$

e) $a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = \sqrt{5a_n}$

f) $a_1 = 3 \qquad a_{n+1} = 12-\sqrt{a_n}$

g) $2,\ 2+\dfrac{1}{2},\ 2+\dfrac{1}{2+{}^1\!/\!_2},\ 2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2+1/2}},\ \ldots$

h) $\sqrt{1},\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ \ldots$

2.3 Sequências e Funções

Nessa seção apresentamos alguns resultados relacionando o cálculo de limites de sequências com propriedades de algumas funções. O primeiro resultado nos informa quando podemos trocar a ordem do cálculo do limite e a avaliação da função em situações como essa

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \quad \overset{?}{=} \quad f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right).$$

O segundo nos diz que podemos trocar o cálculo do limite de sequências pelo cálculo do limite de funções, o que nos permite utilizar as técnicas estudadas no Cálculo I.

Teorema 2.8: Teorema da Função Contínua

Se a_n é uma sequência numérica real convergente, $a_n \to L$, e $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $L \in D$, então

$$f(a_n) \to f(L).$$

Demonstração

Seja $\varepsilon > 0$, como f é contínua em L, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - L| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(L)| < \varepsilon.$$

Como $a_n \to L$, temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - L| < \delta \qquad \text{para todo} \quad n > N.$$

Então, para todo $n > N$ temos que $|f(a_n) - f(L)| < \varepsilon$, ou seja,

$$f(a_n) \to f(L).$$

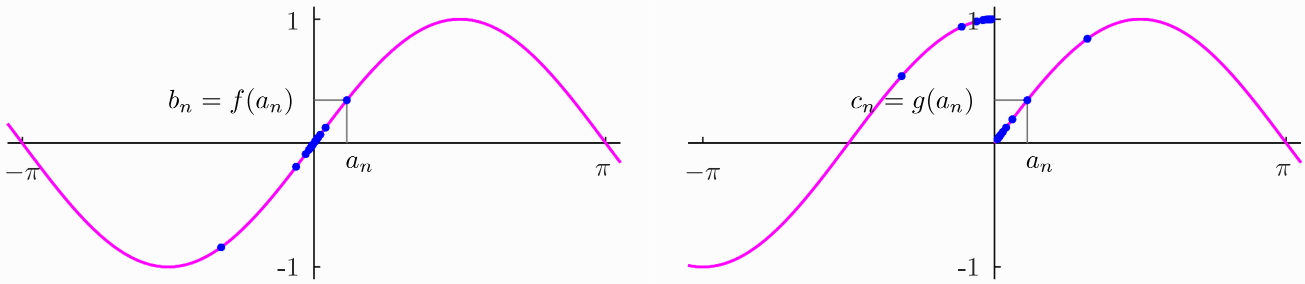
A Figura 2.6 ilustra a aplicação do Teorema 2.8 para as sequências $b_n = f(a_n)$ e $c_n = g(a_n)$ onde a sequência (a_n) e dada por

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^{1,5}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

que converge para $L = 0$, e as funções f e g são

$$f(x) = \operatorname{sen}(x), \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} \cos(x) & x < 0 \\ \operatorname{sen}(x) & x \geq 0 \end{cases}.$$

No gráfico 2.6a observamos que b_n também converge para zero, mas no gráfico 2.6b a sequência c_n oscila indefinidamente entre zero e 1.



(a) Função é contínua em $L = 0$. (b) Função é descontínua em $L = 0$.

Figura 2.6: Ilustração do Teorema da Função Contínua.

EXEMPLO 2.3.1:
Verificar que se $0 < a < 1$ então $\lim \cos(a^n) = 1$.

Para ver isso basta lembrar que $\lim a_n = 0$ e que a função cosseno é contínua em zero. Portanto,

$$\lim \cos(a^n) = \cos\left(\lim a_n\right) = \cos(0) = 1\,.$$

O próximo teorema é bastante natural, mas uma regra da Matemática é nunca acreditar em um resultado antes de demonstrá-lo. Não importa o quão natural e aparentemente óbvio ele pareça ser.

TEOREMA 2.9: SEQUÊNCIA DEFINIDA POR FUNÇÃO

Se f é uma função real definida para todo $x \geq n_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, e a_n é uma sequência tal que

$$a_n = f(n) \qquad \text{para todo } n \geq n_0\,,$$

então

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L\,.$$

Uma consequência desse último teorema é que, em caso de indeterminação, podemos aplicar a Regra de L'Hôpital para calcular o limite de sequências que "concordam" com alguma função real. Os próximos exemplos aplicam essa técnica.

Exemplo 2.3.2:
Mostre que $\lim \dfrac{1-5n^4}{n^4+8n^3} = -5\,.$

A função

$$f(x) = \frac{1-5x^4}{x^4+8x^3}$$

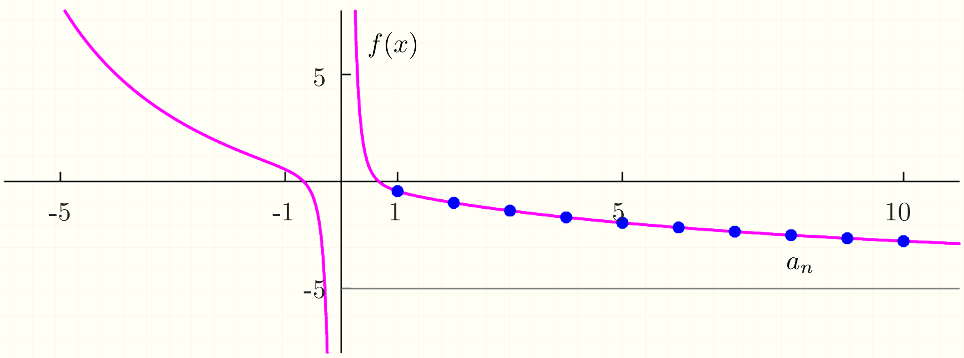
está definida para todo $x > 0$ e a sequência

$$f(n) = \frac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$$

para todo $n > 0$. Assim podemos usar Teorema 2.9 e aplicar a regra de L'Hôpital para calcular o limite desejado

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{1-5x^4}{x^4+8x^3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{-20x^3}{4x^3+24x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-60x^2}{12x^2+48x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-120x}{24x+48} \\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{120}{24} = -5\,.
\end{aligned}$$

A figura a seguir mostra os gráficos da função e da sequência.



Exemplo 2.3.3:
Verifique se a sequência $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$ converge, se sim, calcule o limite.

Essa é uma indeterminação do tipo 1^∞, portando devemos aplicar o logaritmo natural para obter

$$\ln(a_n) = n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\ln\left(1 - 1/n^2\right)}{1/n}\,.$$

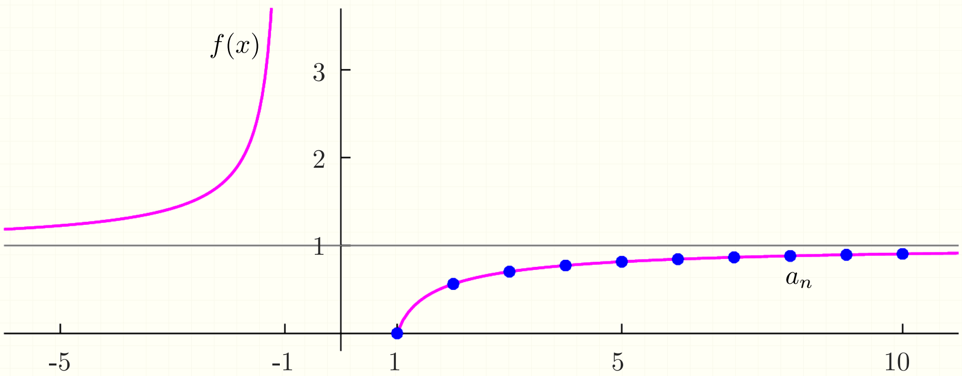
A última expressão é uma indeterminação do tipo $0/0$, então, aplicando a regra de L'Hôpital, segue que

$$\begin{aligned}
\lim \ln(a_n) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{d}{dx}\ln\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)}{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{1 - 1/x^2}\,\dfrac{2}{x^3}}{-1/x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2}{x^3 - x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{3x^2 - 1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4}{6x} = 0\,.
\end{aligned}$$

Como a função e^x é contínua em 0, podemos usar o Teorema da Função Contínua 2.8, de modo que

$$\lim a_n = \lim\left(e^{\ln a_n}\right) = e^{\lim(\ln a_n)} = e^0 = 1\,.$$

A figura a seguir mostra os gráficos da função e da sequência.



Observe que o teorema vale apenas em um sentido, se a sequência converge, não podemos concluir nada sobre a função. Assim como, se a função não convergir não podemos concluir nada sobre a sequência. O próximo exemplo ilustra esse caso.

Exemplo 2.3.4:
Comparação entre a sequência $a_n = 0$, com $n \in \mathbb{N}$ e a função $f(x) = \text{sen}(\pi x)$, com $x \in \mathbb{R}$.

Primeiro observamos que vale a igualdade

$$a_n = f(n)$$

pois, para todo n inteiro

$$f(n) = \text{sen}(\pi n) = 0\,.$$

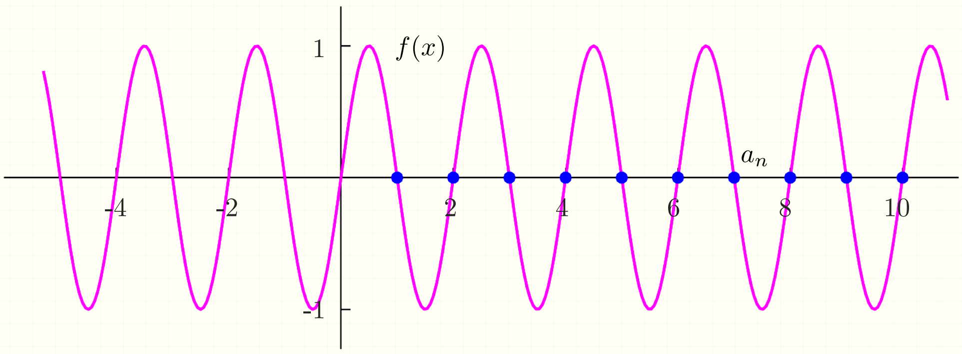
Analisando a sequência, concluímos que ela é convergente pois todos os seus termos são iguais a zero

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0\,.$$

Entretanto, a função f oscila entre -1 e 1 quando tentamos calcular seu limite para o infinito nos reais

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \text{sen}(\pi x) \qquad \text{não existe.}$$

A figura a seguir mostra os gráficos da função e da sequência.



Exercícios Seção 2.3

1) Use o Teorema da Função Contínua para mostrar que

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)=1$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{4^n}\right)=0$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \operatorname{tgh}\left(\frac{n+{}^{1}/_{2^n}}{5-{}^{10}/_{5^n}}\right)=1$

2) Verifique se a sequência converge ou não e calcule o limite das sequências convergentes.

a) $a_n = e^{1/n}$

b) $a_n = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2n\pi}{1+8n}\right)$

c) $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{9n+1}}$

d) $a_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^3+4n}}$

e) $a_n = \exp\left(\dfrac{2n}{n+2}\right)$

f) $a_n = \cos\left(\dfrac{n}{2}\right)$

g) $a_n = \cos\left(\dfrac{2}{n}\right)$

h) $a_n = \dfrac{\ln(n)}{\ln(2n)}$

i) $a_n = \dfrac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}-1}$

j) $a_n = \dfrac{\operatorname{arctg}(n)}{n}$

k) $a_n = n^2e^{-n}$

l) $a_n = \ln(n+1)-\ln(n)$

2.4 Sequências Limitadas

Em muitas aplicações precisamos determinar se uma sequência é convergente ou não, mas não precisamos calcular explicitamente seu limite. Muitos métodos numéricos ou computacionais entram nessa categoria. Nos próximos capítulos vamos usar a existência do limite de sequências para analisar a convergência de séries, nestes casos também não precisaremos determinar o valor do limite. Dessa forma, nesta seção apresentamos algumas propriedades de sequências que podem nos ajudar a determinar sua convergência sem precisarmos calcular seu limite.

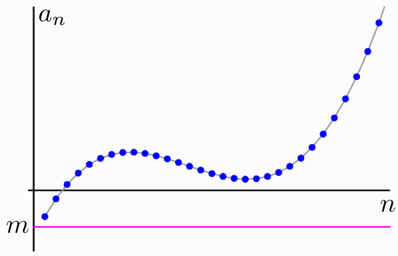
A primeira propriedade que vamos definir é se uma sequência é limitada ou não, isso é, se os seus termos podem divergir para o infinito ou não. Note que no Cálculo I esse mesmo conceito é definido para funções reais.

Definição 2.10: Sequências Limitadas

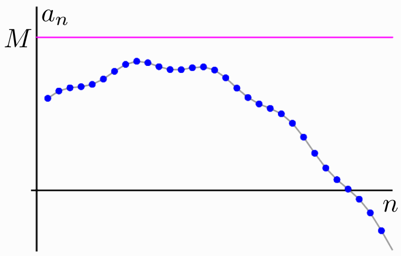
Dizemos que uma sequência numérica real (a_n) é:

Limitada Inferiormente	se existe $m\in\mathbb{R}$ tal que $m\le a_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$;
Limitada Superiormente	se existe $M\in\mathbb{R}$ tal que $a_n\le M$ para todo $n\in\mathbb{N}$;
Limitada	se é limitada superiormente e inferiormente, ou seja, existem M e m tais que $m\le a_n\le M$.

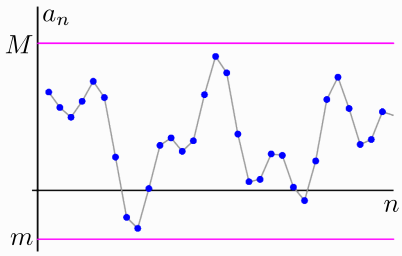
Um cuidado especial precisa ser tomado aqui, estamos usando a palavra limite em dois sentidos diferentes. Quando falamos do limite de uma sequência estamos tratando da sua convergência, isso é, queremos saber se $a_n \to L$. Porém, quando falamos de sequências limitadas estamos nos referindo a barreiras que os termos da sequência jamais ultrapassam, $m \leq a_n \leq M$. A Figura 2.7 ilustra os casos descritos na Definição 2.10.



(a) Sequência limitada inferiormente.



(b) Sequência limitada superiormente.



(c) Sequência limitada.

Figura 2.7: Ilustração das sequências limitadas.

Note que, mesmo que a Definição 2.10 exija que as desigualdades valham para todos os termos da sequência, $n \in \mathbb{N}$, em muitos casos basta que a relação seja verdadeira apenas a partir de um determinado índice $n > N \in \mathbb{N}$.

Uma foma alternativa de descrever uma sequência limitada é impor a condição

$$|a_n| \leq A\,,$$

nesse caso $M = A$ e $m = -A$.

Outra propriedade que vamos definir depende dos termos da sequência serem sempre maiores ou menores do que o seu antecessor. Também existe uma definição equivalente para funções reais, estudada no Cálculo I. Pesquise as semelhanças e diferenças das definições em cada caso.

DEFINIÇÃO 2.11: SEQUÊNCIAS CRESCENTES E DECRESCENTES

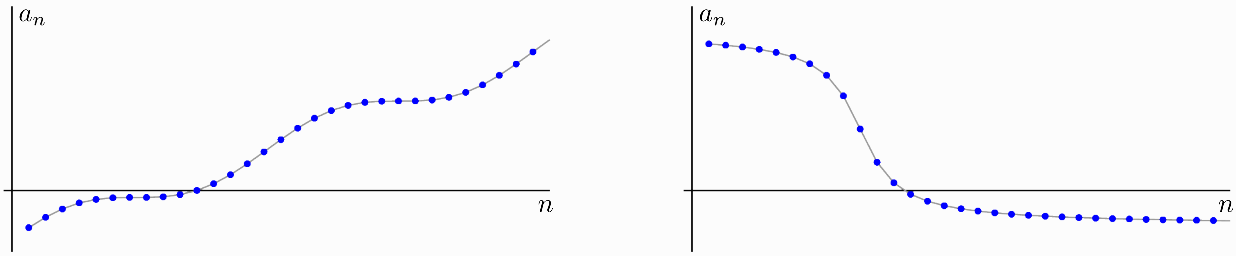
Uma sequência (a_n) é:

Crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

Decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

Monótona se é crescente ou decrescente, também chamada de monotônica.

Note que a definição de sequência crescente não exige que um termo seja estritamente maior do que o anterior, permitindo que ele seja igual. O equivalente vale para as sequências decrescentes. Dessa forma, pela definição, uma sequência constante é crescente e decrescente ao mesmo tempo. Uma nomenclatura mais precisa seria sequência "não decrescente" ou "não crescente", porém, esses nomes não são comumente usados nos livros de Cálculo. A Figura 2.8 apresenta uma sequência crescente e uma decrescente, ambas são monótonas.



(a) Sequência crescente. (b) Sequência decrescente.

Figura 2.8: Ilustração das sequências crescentes e decrescentes.

Usando as duas definições anteriores podemos apresentar o seguinte teorema que pode nos ajudar a determinar se uma sequência é convergente sem precisar calcular seu limite.

Teorema 2.12: Convergência da Sequência Monótona

Se uma sequência é limitada e monótona então ela é convergente.

Para demonstrar esse resultado será necessário utilizar o ínfimo de um subconjunto dos reais, para os detalhes sobre o ínfimo veja Definição A.1.

Demonstração

Vamos considerar o caso que a_n é decrescente, ou seja,

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \cdots$$

Seja L o maior valor tal que $a_n \geq L$, ou seja, o ínfimo dos termos da sequência

$$L = \inf(a_n)\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como L é o maior valor satisfazendo essa propriedade, para qualquer $\varepsilon > 0$

existe N tal que

$$a_N < L + \varepsilon\,.$$

Como a sequência é decrescente, para todo $n > N$, $a_n \leq a_N$, então

$$a_n < L + \varepsilon\,,$$

para todo $n > N$. Como $a_n > L$ segue diretamente que

$$a_n > L - \varepsilon\,.$$

Assim,

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \qquad \text{portanto} \qquad a_n \to L\,.$$

Note que os valores iniciais da sequência não influenciam na sua convergência. Assim basta que ela seja limitada e monótona a partir de algum índice N, isso é, basta que ela seja limitada e monótona para todo $n > N$.

O teorema a seguir explicita a propriedade de que as sequências convergentes sempre são limitadas.

Teorema 2.13: Sequência convergente é limitada

Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração

Tome uma sequência convergente $a_n \to L$. Como ela é convergente podemos escolher um ε e sabemos que existe N tal que, para todo $n > N$, temos que $|x_n - L| < \varepsilon$, ou seja,

$$\varepsilon - L < x_n < \varepsilon + L$$

Como a lista de termos a_n com $n \leq N$ é finita ela possui um minimo e um máximo

$$m_1 = \min_{n \leq N}(a_n) \qquad \text{e} \qquad M_1 = \max_{n \leq N}(a_n)$$

Definindo

$$m = \min(m_1, \varepsilon - L) \qquad \text{e} \qquad M = \max(M_1, \varepsilon + L)$$

Concluímos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$m \leq a_n \leq M$$

e portanto a_n é limitada.

Os últimos teoremas são úteis para verificar se uma dada sequência é ou não convergente, como ilustrado nos exemplos a seguir.

Exemplo 2.4.1:
Verifique a convergência das sequências

$$\begin{aligned}
(a_n) &= (1, 2, 3, \ldots, n, \ldots) \\
(b_n) &= (-2, -4, -6, \ldots, -2n, \ldots) \\
(c_n) &= (1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, \ldots) \\
(d_n) &= (-1, 4, -9, \ldots, (-1)^n n^2, \ldots)
\end{aligned}$$

Observamos que nenhuma das sequências é limitada, assim pelo Teorema 2.13 nenhuma pode ser convergente.

Exemplo 2.4.2:
Verifique a convergência da sequência $a_n = p^n$ para $p > 1$.

Como $p > 1$, a sequência $a_n = p^n$ é monotônica crescente, mas não é limitada, portanto não é convergente.

Exemplo 2.4.3:
Verifique a convergência da sequência $a_n = p^n$ para $0 < p < 1$.

Como $0 < p < 1$, a sequência $a_n = p^n$ é monotônica decrescente e limitada, portanto é convergente.

Exemplo 2.4.4:
Para $0 < p < 1$, verifique a convergência da sequência

$$\left(1,\ 1+p,\ 1+p+p^2,\ \ldots,\ \sum_{k=0}^{n} p^k,\ \ldots\right).$$

Como $p > 0$, a sequência claramente é crescente.

Vamos verificar que a sequência é limitada. Note que o n-ésimo termo dessa sequência tem a forma

$$a_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^n\,.$$

Multiplicando por p, temos

$$pa_n = p + p^2 + \cdots + p^{n+1}\,.$$

Subtraindo as expressões temos

$$a_n - pa_n = 1 - p^{n+1}\,,$$

ou seja,

$$a_n = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p}\,.$$

Como $0 < p < 1$ sabemos que $0 < p^{n+1} < 1$ e portanto $1 - p^{n+1} < 1$, portanto

$$a_n \leq \frac{1}{1-a}\,,$$

ou seja, a_n é limitada, sendo assim, a_n é uma sequência convergente.

Exercícios Seção 2.4

1) Suponha que que (a_n) é uma sequência decrescente e que todos os termos estão entre os números 5 e 8. Explique por que a sequência tem um limite. O que você pode dizer sobre o valor do limite?

2) [resp] Determine se a sequência

$$a_n = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!}$$

é monotônica e se é limitada.

3) Determine se cada sequência é monotônica e se é limitada

a) $a_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$

b) $a_n = \dfrac{2^n\, 3^n}{n!}$

c) $a_n = 2 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{2^n}$

4) Determine se a sequência dada é crescente, decrescente ou não monótona. Verifique se a sequência é limitada.

a) $a_n = (-2)^{n+1}$

b) $a_n = \dfrac{2}{2n+5}$

c) $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+4}$

d) $a_n = (-1)^n\, n$

e) $a_n = ne^{-n}$

f) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

g) $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

5) Considere a sequência (a_n) definida como

$$a_1 = \sqrt{2} \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

a) Mostre por indução que (a_n) é crescente.

b) Mostre que ela é limitada superiormente por 3.

c) Aplique o Teorema da Sequencia Monótona para mostrar que (a_n) é convergente.

d) Calcule o limite de (a_n).

6) Mostre que a sequência

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

é crescente e $a_n < 3$ para todo n. Verifique se (a_n) é convergente e se for calcule seu limite.

7) Mostre que a sequência

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

é decrescente e satisfaz $0 < a_n \leq 3$ para todo n. Verifique se (a_n) é convergente e se for calcule seu limite.

2.5 Teorema do Confronto

O Teorema do Confronto é um resultado que nos permite obter o limite de uma sequência pela análise de sequências outras mais simples, ou já conhecidas, como descrito no teorema a seguir.

Teorema 2.14: Teorema do Confronto para Sequências

Sejam (a_n), (b_n) e (c_n) sequências de números reais tais que, para $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq b_n \leq c_n\,.$$

Se as sequências (a_n) e (c_n) convergem para um mesmo limite L

$$\lim a_n = \lim c_n = L$$

então a sequência b_n é convergente e

$$\lim b_n = L\,.$$

Demonstração

Como

$$\lim a_n = \lim c_n = L\,,$$

dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, por exemplo, $N = \max(N_1, N_2)$, onde N_1 e N_2 são associados às sequências a_n e c_n, tal que, para todo $n > N$

$$|a_n - L| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad |c_n - L| < \varepsilon\,,$$

ou seja,

$$-\varepsilon + L < a_n < \varepsilon + L \qquad \text{e} \qquad -\varepsilon + L < c_n < \varepsilon + L\,,$$

mas como $a_n \leq b_n \leq c_n$, segue que

$$-\varepsilon + L \;<\; a_n \;\leq\; b_n \;\leq\; c_n \;<\; \varepsilon + L\,.$$

Daí seque que $-\varepsilon < b_n - L < \varepsilon$, ou seja $|b_n - L| < \varepsilon$, o que implica que $b_n \to L$.

A Figura 2.9 ilustra o Teorema do Confronto 2.14, no caso onde sabemos que a_n e c_n convergem para L e que $a_n \leq b_n \leq c_n$, portanto podemos concluir que $b_n \to L$.

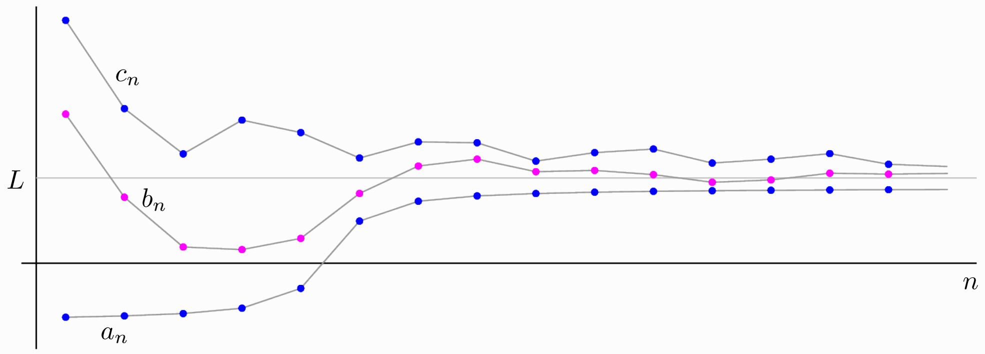


Figura 2.9: Ilustração do Teorema do Confronto com $a_n \leq b_n \leq c_n$.

O próximo exemplo mostra uma aplicação do Teorema do Confronto para calcular o limite de uma sequência.

Exemplo 2.5.1:
Calcule o limite da sequência $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Note que

$$\frac{-1}{2n-1} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \leq \frac{1}{2n-1}\,.$$

Como

$$\lim \frac{-1}{2n-1} = \lim \frac{1}{2n-1} = 0\,,$$

segue, pelo Teorema do Confronto, que

$$\lim \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 0\,.$$

Analisando a sequência do exemplo anterior observamos que ela é o produto de uma sequência limitada

$$a_n = (-1)^{n+1}$$

por uma sequência que converge para zero

$$b_n = {}^{1}\!/_{(2n-1)}$$

e concluímos que ela converge para zero. Esse fato é verdade, como apresentado pelo corolário a seguir.

Corolário 2.15: Sequência que Converge para Zero

Se a_n é uma sequência limitada

$$|a_n| \leq M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e algum número $M > 0$ e b_n uma sequência que converge para zero

$$\lim b_n = 0$$

então

$$\lim a_n\, b_n = 0\,.$$

O próximo exemplo utiliza esse resultado para calcular o limite de uma sequência.

Exemplo 2.5.2:
Calcular o limite de $\dfrac{\cos n}{n}$.

Uma vez que $\cos n$ é limitada e $\dfrac{1}{n} \to 0$ podemos concluir que $\lim \dfrac{\cos n}{n} = 0\,.$

Exercícios Seção 2.5

1) [resp] A sequência (a_n) converge ou diverge? Encontre seu limite se for convergente.

$$a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$$

2) Verifique se a sequência converge ou não e calcule o limite das sequências convergentes.

a) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}\, n}{n^2 + 1}$

b) $a_n = \dfrac{(-1)^n\, n^3}{n^3 + 2n^2 + 1}$

c) $a_n = \dfrac{\cos^2(n)}{2^n}$

d) $a_n = 2^{-n} \cos(n\pi)$

e) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen}(2n)}{1 + \sqrt{n}}$

2.6 Revisão

1) Determine quais sequências são convergentes e quais são divergentes. Calcule o limite das sequências convergentes.

a) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

b) $a_n = \dfrac{1 - (-1)^n}{\sqrt{n}}$

c) $a_n = \dfrac{1 - 2^n}{2^n}$

d) $a_n = 1 + \left(\dfrac{9}{10}\right)^n$

e) $a_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

f) $a_n = \operatorname{sen}(n\pi)$

g) $a_n = \dfrac{\ln\left(n^2\right)}{n}$

h) $a_n = \dfrac{\ln(2n+1)}{n}$

i) $a_n = \dfrac{n + \ln(n)}{n}$

j) $a_n = \dfrac{\ln\left(2n^3 + 1\right)}{n}$

k) $a_n = \left(\dfrac{n-5}{n}\right)^n$

l) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

m) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n}}$

n) $a_n = \left(\dfrac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

o) $a_n = n\left(2^{1/n} - 1\right)$

p) $a_n = \sqrt[n]{2n+1}$

q) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n!}$

r) $a_n = \dfrac{(-4)^n}{n!}$

2) Considere as sequências

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{n^2}$$

a) Enuncie a definição de convergência de uma sequência e use essa definição para mostrar que $b_n \to 0$.
Dica: *Se $\varepsilon > 0$ e $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$ então $1/n^2 < \varepsilon$.*

b) Mostre que $a_n \to 0$ e que $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$.

3) Defina divergência ao infinito ($\lim a_n = \infty$). Mostre, usando essa definição, que se $\lim a_n = \infty$, então $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$.

4) Considere as sequências

$$a_n = \frac{n!}{5^n} \qquad b_n = \frac{1}{n \ln n} \qquad c_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(\ln n)}$$

Verifique se as sequências a_n, b_n e c_n convergem ou divergem. Calcule o limite no(s) caso(s) em que converge.

5) Expresse a dizima periódica $0{,}\overline{23} = 0{,}232\,323\,232\ldots$ como a razão de dois números inteiros.

6) Qual frase a seguir é verdadeira e qual é falsa? Prove a verdadeira e dê um contra exemplo para a falsa.

a) Toda sequência convergente é limitada.

b) Toda sequência limitada é convergente.

7) Considerando as sequências

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad c_n = \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}$$

mostre que

$$a_n \to 0 \qquad b_n^{2/n} \to 1 \qquad \frac{c_n}{b_n} \to \frac{1}{2}$$

8) Mostre que $1 = 0{,}\bar{9} = 0{,}999\ldots$

9) Verifique se a sequência converge ou não e calcule o limite das sequências convergentes.

a) $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$

b) $a_n = n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

c) $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

d) $a_n = \ln\left(2n^2 + 1\right) - \ln\left(n^2 + 1\right)$

e) $a_n = \dfrac{\left(\ln(n)\right)^2}{n}$

f) $a_n = \operatorname{arctg}\left(\ln(n)\right)$

g) $a_n = n - \sqrt{n+1}\sqrt{n+3}$

h) $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

i) $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

3

Séries Numéricas

3.1 Definição . . . 46
3.2 Propriedades . . . 59
3.3 Teste de Divergência . . . 64
3.4 Teste da Integral . . . 69
3.5 Teste da Comparação . . . 84
3.6 Teste da Razão . . . 93
3.7 Teste da Raiz . . . 99
3.8 Série Alternada e Teste de Leibniz . . . 103
3.9 Convergência Absoluta e Condicional . . . 110
3.10 Revisão . . . 115

3.1 Definição

Séries são somas com um número infinito de termos. As primeiras questões que precisamos responder é o que exatamente isso significa e quando essa soma faz sentido. Para isso vamos utilizar as ideias construídas no estudo das sequências numéricas.

Definição 3.1: Série Numérica

Série Numérica é a soma dos infinitos termos de uma sequência numérica, (a_n),

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Cada termo a_n é chamado de Termo Geral da série.

Para determinarmos se essa soma faz sentido precisamos construir um critério de convergência, para isso, vamos construir outra sequência numérica associada a série.

Definição 3.2: Sequência de Somas Parciais

Seja (a_n) uma sequência de números reais, sua Sequência de Somas Parciais é definida como

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$

Podemos agora definir a convergência das séries numéricas usando a definição da convergência das sequências numéricas.

Definição 3.3: Convergência de Uma Série

Dada uma série numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

dizemos que ela converge para um número real L quando sua sequência de somas parciais (S_n) converge para L, isso é, $S_n \to L$. Nesse caso podemos escrever

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L$$

e dizemos que L é a Soma da Série.

No caso em que a sequência de somas parciais diverge, dizemos que a série diverge.

Quando é evidente que os índices da série variam de 1 até ∞, podemos usar apenas a notação

$$\sum a_n \,.$$

Entretanto, muitas vezes as séries começam com índices diferentes de 1, nesses casos os índices precisam ser explicitados, por exemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \,.$$

Para ilustrar os conceitos envolvendo séries infinitas apresentados, vamos explorar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \,.$$

Essa série é interessante pois podemos interpretá-la geometricamente com facilidade. Note que os primeiros termos da sequência que queremos somar são

$$a_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad a_2 = \frac{1}{4}\,, \qquad a_3 = \frac{1}{8}\,, \qquad a_4 = \frac{1}{16}\,, \qquad a_5 = \frac{1}{32}\,.$$

Podemos imaginar que cada termo é a área de um retângulo e queremos encontrar a área da figura formada pela união de todos esses retângulos. A Figura 3.1 ilustra geometricamente os cinco primeiros termos da sequência de somas parciais dessa série e sua soma. O próximo exemplo efetua os cálculos para mostrar que a série realmente converge e que sua soma é igual a 1.

Exemplo 3.1.1:
Calcular a soma os termos da sequência $a_k = \dfrac{1}{2^k}$.

Queremos calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \,.$$

O gráfico a seguir ilustra a soma dessa série, cada retângulo tem base igual a um e altura igual ao termo correspondente da série a_n.

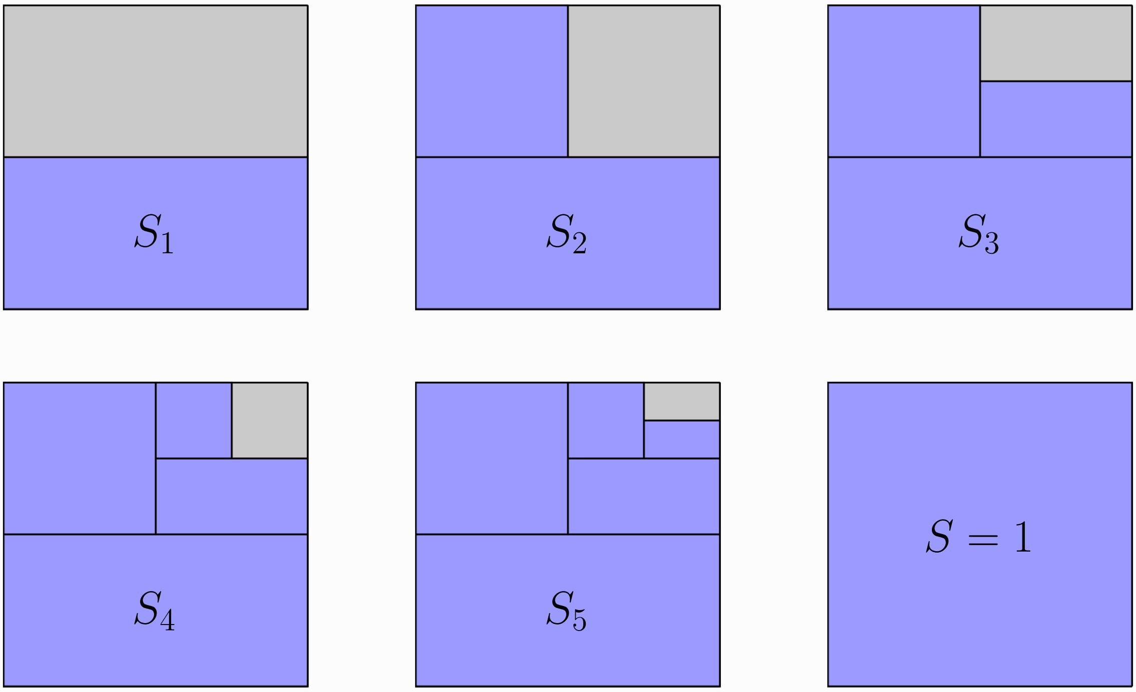
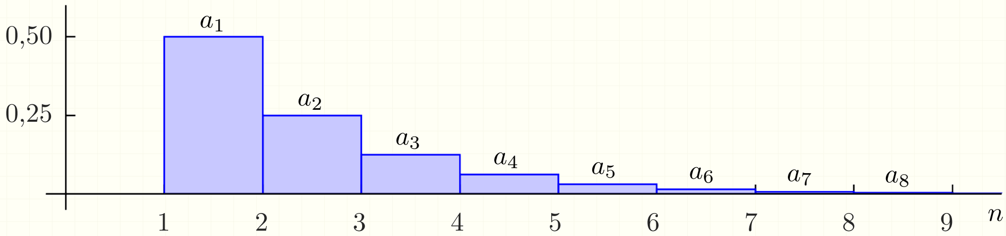


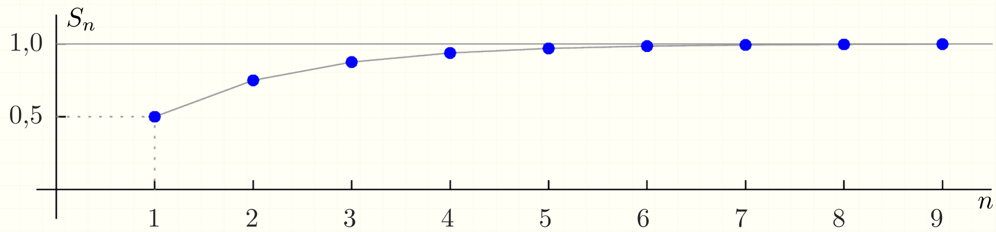
Figura 3.1: Ilustração das somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.



Para analisarmos se a série converge e qual seria o valor da sua soma, vamos construir a sequência de somas parciais dessa série:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 && = \frac{1}{2}\,, \\
S_2 &= a_1 + a_2 && = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,, \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 && = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\,, \\
S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 && = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\,.
\end{aligned}$$

O próximo gráfico mostra os primeiros termos da sequência de somas parciais.



Podemos observar nos gráficos que, como esperado, a série converge para um. Porém, não podemos ficar dependentes da evidencia gráfica, que muitas vezes é enganosa. Precisamos verificar rigorosamente esse resultado. Para isso precisamos identificar a fórmula geral para cada soma parcial. Esse é um ponto onde alguns livros escrevem "*é fácil ver que*" para não serem forçados a escrever "*após muita dor e sofrimento descobrimos que*"

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}, \qquad S_2 = 1 - \frac{1}{4}, \qquad S_3 = 1 - \frac{1}{8}, \qquad S_4 = 1 - \frac{1}{16}.$$

Observando o padrão podemos escrever uma conjectura sobre como a fórmula geral deve ser

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Agora precisamos verificar se ela é verdadeira para todos os valores de $n \in \mathbb{N}$. Uma técnica para fazer essa demonstração é utilizar a Indução Finita, veja a Seção A.4. Para isso precisamos primeiro mostrar que a fórmula vale para $n = 1$. Depois assumimos que ela vale para um n qualquer e, partido dessa hipótese, mostrarmos que ela vale para o próximo, $n + 1$.

A demostração que a fórmula vale para $n = 1$ pode ser feita por mera avaliação. Vamos agora assumir que a fórmula vale para um valor qualquer $n = k - 1$

$$S_{k-1} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}}, \tag{3.1}$$

queremos mostrar que isso implica que ela também vale para o próximo $n = k$. Começamos calculando S_k

$$S_k = S_{k-1} + a_k = S_{k-1} + \frac{1}{2^k},$$

substituindo a hipótese de indução (3.1) temos

$$S_k = 1 - \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \frac{2}{2^k} + \frac{1}{2^k} \\
&= 1 - \frac{1}{2^k}\,,
\end{aligned}
$$

que é a fórmula que desejamos demonstrar.

Tendo uma expressão explícita para os termos da sequência de somas parciais, podemos calcular seu limite e determinar a soma da série.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \lim 1 - \lim \frac{1}{2^n} \\
&= 1 - 0 = 1\,.
\end{aligned}
$$

Portanto, a série converge e podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1\,.$$

Código Python para ilustrar algumas séries e suas somas parciais.

Exemplos de Séries

Apresentamos agora alguns exemplos de séries numéricas importantes. A série geométrica e a telescópica são exemplos para os quais podemos calcular a soma da série com relativa facilidade. Além dessas duas séries, também apresentaremos nessa seção as séries do inverso do quadrado e inverso do fatorial.

Definição 3.4: Série Geométrica

Sejam α e r números reais com $\alpha \neq 0$, uma série com a forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1} = \alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \cdots + \alpha r^{n-1} + \cdots$$

é chamada de Série Geométrica.

No ensino básico a sequência dos termos dessa série é chamada de Progressão Geométrica. Esse é um exemplo especialmente importante pois conseguimos verificar sua convergência e calcular sua soma com relativa facilidade.

Proposição 3.5: Convergência da Série Geométrica

A série geométrica converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$.

No caso em que a série converge, isso é, se $|r| < 1$ a soma da série é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1} = \frac{\alpha}{1-r}. \tag{3.2}$$

Demonstração

A sequência de somas parciais da série geométrica é

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha r^{k-1}.$$

Subtraindo rS_n de S_n, obtemos

$$\begin{aligned} S_n(1-r) &= S_n - rS_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha r^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} \alpha r^k \\ &= \left(\alpha + \alpha r + \cdots + \alpha r^{n-1}\right) - \left(\alpha r + \cdots + \alpha r^{n-1} + \alpha r^n\right) \\ &= \alpha - \alpha r^n. \end{aligned}$$

Temos então que

$$S_n = \frac{\alpha\,(1 - r^n)}{1 - r}\,.$$

Como $r^n \to 0$ se $|r| < 1$ e $|r^n| \to \infty$ se $|r| \geq 1$, segue que

$$S_n \to \frac{\alpha}{1 - r}$$

se $|r| < 1$ e S_n diverge se $|r| \geq 1$.

Observe que na demonstração todas as manipulações algébricas aconteceram com as somas parciais, que são somas finitas e não envolvem limites. Só depois de obtermos uma expressão explícita para S_n é que fizemos n tender para o infinito e calculamos o limite.

Ao aplicar a proposição acima, cuidado com os índices, por exemplo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} br^n$$

também é uma série geométrica, mas a proposição não pode ser aplicada diretamente. Primeiro precisamos reescrever a série de modo que os índices sejam compatíveis com os da proposição. Nesse caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} br^n = \sum_{n=1}^{\infty} brr^{n-1}\,.$$

Então podemos tomar $\alpha = br$ e se $|r| < 1$ teremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} br^n = \frac{br}{1 - r}\,.$$

EXEMPLO 3.1.2:

Verifique a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n}$.

Essa série pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}.$$

Então é uma série geométrica com $\alpha = {}^4\!/_5$ e $r = {}^2\!/_5$. Como $|r| = {}^2\!/_5 < 1$, segue do critério de convergência da série geométrica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n} = \frac{4/5}{1 - 2/5} = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}.$$

Exemplo 3.1.3:
Escreva a dízima periódica $0{,}\overline{d} = 0{,}ddddd\dots$ (onde $d \neq 0$ é um dígito) como a razão de dois números.

$$\begin{aligned}
0{,}ddd\,ddd\dots &= \frac{d}{10} + \frac{d}{(10)^2} + \frac{d}{(10)^3} + \cdots \\
&= \frac{d}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{(10)^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{d}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \\
&= \frac{d}{10}\left(\frac{1}{1 - 1/10}\right) \\
&= \frac{d}{10}\left(\frac{1}{0{,}9}\right) \\
&= \frac{d}{9}.
\end{aligned}$$

Note que o resultado obtido nesse exemplo mostra que $0{,}999\,999\dots$ é igual a 1.

Definição 3.6: Série Telescópica

Dizemos que uma série é telescópica se todos os termos, exceto o primeiro e o último, da n-ésima soma parcial se anulam.

Essa definição e seu uso para calcular o limite de uma série são melhor explicados com a utilização de um exemplo.

Exemplo 3.1.4:
Encontre a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$.

Escrevendo os primeiros temos dessa série percebemos que eles se anulam quando somados

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\cdot 1+1} - \frac{1}{2\cdot 1+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}, \\ a_2 &= \frac{1}{2\cdot 2+1} - \frac{1}{2\cdot 2+3} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}, \\ a_3 &= \frac{1}{2\cdot 3+1} - \frac{1}{2\cdot 3+3} = \frac{1}{7} - \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Assim, expandindo os termos da série e cancelando a segunda fração de um termo com a primeira do termo seguinte temos

$$\begin{aligned} S_k &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2k+3}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2k+3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 3.1.5:
Encontre a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$.

Primeiro escrevemos o termo geral em somas parciais

$$a_n = \frac{4}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{A}{4n-3} + \frac{B}{4n+1}.$$

Então, $A(4n+1) + B(4n-3) = 4$. Assim, para $n = 1$ e $n = 2$, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 5A + B = 4 \\ 9A + 5B = 4 \end{cases}$$

Resolvendo, temos $A = 1$ e $B = -1$, ou seja,

$$a_n = \frac{4}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\,.$$

Escrevendo agora os primeiros temos da série:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4\cdot 1-3} - \frac{1}{4\cdot 1+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{5}\,, \\ a_2 &= \frac{1}{4\cdot 2-3} - \frac{1}{4\cdot 2+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{9}\,, \\ a_3 &= \frac{1}{4\cdot 3-3} - \frac{1}{4\cdot 3+1} = \frac{1}{9} - \frac{1}{13}\,. \end{aligned}$$

Assim, expandindo os termos da série e cancelando a segunda fração de um termo com a primeira do termo seguinte temos

$$\begin{aligned} S_k &= \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{4k+1}\,. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)} = \lim_{k\to\infty} S_k = 1\,.$$

Dada uma sequência (x_n) qualquer, podemos construir uma série $\sum a_n$ cujo termo geral é dado por

$$a_1 = x_1\,, \qquad a_{n+1} = x_{n+1} - x_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então a sequência de somas parciais é dada por

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_n\,. \end{aligned}$$

Assim, se a sequência (x_n) converge para L, a série $\sum a_n$ também converge para L. Por outro lado, se a sequência (x_n) diverge, a série também diverge. Essa é uma forma de construir uma infinidade de séries telescópicas.

Apresentamos a seguir as Séries do Inverso do Quadrado e do Inverso do Fatorial e suas somas.

Definição 3.7: Série do Inverso do Quadrado

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

é conhecida como Série do Inverso do Quadrado.

Definição 3.8: Série do Inverso do Fatorial

A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e =\approx 2{,}7183$$

é chamada de Série do Inverso do Fatorial.

Para calcular as somas dessas séries precisamos de resultados que serão apresentados mais a frente neste capítulo. Vamos mostrar que a Série do Inverso do Quadrado Converge no Exemplo 3.4.1 e calculamos seu valor na subseção sobre o problema de Basileia 4.6.6. A verificação da convergência da Série do Inverso do Fatorial está no Exemplo 3.4.2 e o cálculo da sua soma é feito no Exemplo 4.4.4.

Exercícios Seção 3.1

1) Escreva as quatro primeiras somas parciais S_n da série.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2-n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n)$

2) Escreva a série como um somatório.

a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots$

b) $2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12 + \cdots$

c) $3 + \frac{5}{2} + \frac{7}{4} + \frac{9}{8} + \frac{11}{16} + \cdots$

d) $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \cdots$

3) [resp] Encontre a fórmula para a n-ésima soma parcial da série

$$\frac{9}{100}+\frac{9}{100^2}+\frac{9}{100^3}+\cdots\frac{9}{100^n}+\cdots$$

use-a para encontrar a soma da série se ela convergir.

4) Encontre a fórmula para a n-ésima soma parcial de cada série e use-a para encontrar a soma da série se ela convergir.

a) $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}+\cdots$

b) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots$

c) $1-2+4-8+\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}+\cdots$

d) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$
$+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\cdots$

e) $\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{5}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

5) [resp] Escreva os primeiros termos da série para mostrar como a série começa. Então, calcule a soma da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$$

6) Escreva os primeiros termos de cada série para mostrar como a série começa. Então, calcule a soma da série.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{4^n}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5}{4^n}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right)$

7) [resp] Encontre uma fórmula para a n-ésima soma parcial da série e use-a para determinar se a série converge ou diverge. Se a série converge, encontre a soma.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

8) Encontre uma fórmula para a n-ésima soma parcial de cada série e use-a para determinar se a série converge ou diverge. Se a série converge, encontre sua soma.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n^2}-\frac{3}{(n+1)^2}\right)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\sqrt{n+1}-\ln\sqrt{n}\right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}(n)-\operatorname{tg}(n-1)\right)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}\right)$

9) Calcule a soma da série telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

10) Considere a série geométrica

$$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{(-9)^{(n-9)}}{10^{(n-10)}}$$

a) Rearranje os índices da série geométrica acima para que ela fique na forma $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ e identifique a e r.

b) Encontre o limite da série caso ela convirja.

11) Escreva os primeiros termos das séries geométricas e encontre a e r. Em seguida determine para quais valores de x temos que $|r|<1$ e calcule a soma de série.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}3\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{-2n}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x+1)^n$

g) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 (x-3)^n$

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}^n(x)$

i) $\sum_{n=0}^{\infty}\big(\ln(x)\big)^n$

3.2 Propriedades

Nessa seção apresentamos algumas propriedades das séries que podemos utilizar ao fazermos manipulações algébricas.

Teorema 3.9: Linearidade das Séries

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries convergentes e $k \in \mathbb{R}$, então

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,,$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,,$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.$

Exemplo 3.2.1:

Calcular a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}\right).$

Observe que a série que queremos calcular é a soma, termo a termo de duas séries geométricas. Além disso, as razões das séries geométricas são $|1/2| < 1$ e $|-1/5| < 1$. Então, podemos usar a regra da soma de séries e a fórmula da soma da série geométrica.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-1/2}+\frac{1}{1+1/5}=\frac{17}{6}\,.\end{aligned}$$

Note que, nesse exemplo, o índice começou em zero e não em 1. O início da série não tem influência na convergência, mas pode mudar o valor da soma da série.

Exemplo 3.2.2:
Calcular a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right].$

Observe que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}$ converge, pois é uma série geométrica com $r = 1/4 < 1$, além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

é uma série telescópica com a sequência de somas parciais dada por

$$S_n = 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 1\,.$$

Temos então que

$$\begin{aligned}S &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}} \\ &= 1-\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= 1-\frac{1}{16}\,\frac{1}{1-1/4}\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

A hipótese de que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries convergentes é importante, por exemplo, se considerarmos as duas séries divergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$$

observamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n + (-1)^{n+1}\right] = 0 \quad \neq \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\right).$$

Manipulando Índices e Termos

Primeiro vamos destacar uma característica do cálculo do limite de uma série, não importa o valor dos primeiros termos, $n < N$, pois a existência do limite só depende do que acontece no “final” da série. Assim quando formos verificar a convergência sempre que for conveniente podemos ignorar o início da série. Não se esqueça que isso só vale para determinar a convergência, o valor da soma, se existir, provavelmente será alterado. O teorema a seguir formaliza essa afirmação.

Teorema 3.10: Verificando a Convergência

Ao verificarmos a convergência de uma série basta analisar a soma dos termos a partir de um índice N, isso é, se a série

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

for convergente, ou divergente, então a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

terá a mesma propriedade.

Podemos construir novas séries a partir de uma série dada, por exemplo, adicionando ou retirando termos. Note que mudar a ordem dos termos de uma série cria outra série. Se a mudança é feita em uma quantidade finita de termos a nova série mantem a convergência ou divergência da série original. Porém, se infinitos termos forem alterados será necessário analisar separadamente a convergência da nova série.

Se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge, então a série onde removemos, $k > 0$, ou incluímos termos, $k < 0$,

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}$$

também converge, desde que os temos adicionais estejam bem definidos. Se a série original divergir então a nova série também diverge. Note que no caso de convergência, se $k \neq 0$ o limite é alterado. De fato, se L é o limite da série original, no caso onde removemos termos, $k > 0$, temos que

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - (a_1 + \cdots + a_{k-1}) = L - (a_1 + \cdots + a_{k-1}) \ .$$

Enquanto que, quando acrescentando termos, $k < 0$, temos que

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + (a_k + \cdots + a_{-1}) = L + (a_k + \cdots + a_{-1}) \ .$$

Proposição 3.11: Alterando os Termos de uma Série

Adicionar, retirar ou permutar um número finito de termos em uma série, não altera o fato da série convergir ou divergir.

Porém, pode alterar o valor da soma da série, caso ele exista.

Exemplo 3.2.3:

Verifique a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=-3}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

converge, pois é uma série geométrica com $r = {}^1\!/_2$. Portanto, a série

$$\sum_{n=-3}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

também converge. Além disso,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= 2^3 + 2^2 + 2^1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 8 + 4 + 2 + \frac{1}{1 - {}^1\!/_2} \\ &= 14 + 2 \\ &= 16\,. \end{aligned}$$

Proposição 3.12: Reindexando uma Série

Alterar o índice inicial de uma série da seguinte maneira

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

não altera a convergência ou a soma da série, caso ela exista.

Note que, quando $k < 0$, estamos iniciando a série com índices menores do que zero. Por outro lado, se $k > 0$, estamos começando a série com índices positivos. Claro que esse tipo de mudança nos índices também podem ser feitas em séries indexadas a partir de $n \neq 0$. De forma geral temos

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=m+k}^{\infty} a_{n-k}\,.$$

Note que não é necessário decorar essa fórmula, basta fazer um mudança de variáveis.

Exemplo 3.2.4:
Reescreva a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)}$ indexando-a a partir de -1.

Como n começa em 1 e queremos indexar a partir de -1, basta introduzir um novo índice $m = n - 2$, então $n = m + 2$ e $m = -1, \ldots, \infty$. Assim, a série indexada a partir de -1 é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} = \sum_{m=-1}^{\infty} \frac{5}{(m+2)(m+3)}.$$

Exemplo 3.2.5:
Reindexe a série do exemplo anterior a partir 20.

Para indexar a partir de 20, queremos que $m = 20$ corresponda a $n = 1$, ou seja, quando $m = 20$ devemos ter $m + a = n = 1$ e $m + b = n + 1 = 2$. Assim os valores de a e b devem ser -19 e -18. Concluímos que a nova série é escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} = \sum_{m=20}^{\infty} \frac{5}{(m-19)(m-18)}.$$

Exercícios Seção 3.2

1) Calcule a soma da série.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n} \right)$

3.3 Teste de Divergência

A partir desse ponto começamos a construir um conjunto de ferramentas que nos ajudam a decidir se uma série converge ou não. Note que, por enquanto, não estamos preocupados com a soma da série, queremos apenas saber se a soma existe. O primeiro desses resultados, que chamamos de Teste de Divergência ou Teste do

Termo Geral, nos ajuda a identificar muitas séries que não podem ser convergentes com relativa facilidade . Dessa forma, sempre o aplicamos primeiro para descartar rapidamente essas séries. O teorema a seguir é o principal resultado que nos permite construir o teste da divergência.

Teorema 3.13: Limite do Termo Geral

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente a_n tende para zero.

Demonstração

Como a série é convergente, a sequência de somas parciais S_n é convergente, ou seja,

$$\lim S_n = \lim S_{n-1} = L$$

observando que $S_n - S_{n-1} = a_n$ concluirmos que

$$\lim a_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = L - L = 0\,.$$

O teste de divergência é uma consequência direta desse teorema.

Teorema 3.14: Teste de Divergência

Se a sequência a_n não converge para zero, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Uma forma para provar que uma série diverge é mostrar que o seu termo geral a_n ou converge para um limite diferente de zero ou diverge. Mas tome cuidado, isso não quer dizer que toda série que diverge satisfaz a propriedade que o termo geral não converge para zero, ou, analogamente, não é verdade que toda série cujo termo geral converge para zero é uma série convergente. Os próximos exemplos ilustram o uso desse teste em algumas séries específicas.

Exemplo 3.3.1:

Mostrar que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ diverge quando $|r| \geq 1$.

A série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

diverge quando $|r| \geq 1$, pois, nesse caso, ar^{n-1} não converge para zero. Verificamos isso observando que se $r = 1$

$$ar^n \to a \neq 0$$

enquanto que, se $|r| > 1$ ou $r = -1$, ar^{n-1} diverge.

EXEMPLO 3.3.2:

Verificar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n$

A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n$ diverge, uma vez que $\lim \left(\sqrt{2}\right)^n = \infty$ pois $\sqrt{2} > 1$.

EXEMPLO 3.3.3:

Verificar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi)$

Essa série diverge, pois $\lim \cos(n\pi)$ não existe, já que

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

que alterna entre -1 e 1.

EXEMPLO 3.3.4:

Verificar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ diverge, pois $\lim \frac{n^n}{n!} = \infty$. De fato, note que, se $n \geq 2$,

$$n! \; = \; 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \; \leq \; \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{n-1 \text{ fatores}} \; = \; n^{(n-1)}$$

Então, multiplicando ambos os lados por n

$$n\, n! \leq n^n \qquad \Rightarrow \qquad n \leq \frac{n^n}{n!}$$

Como $n \to \infty$, seque que $\frac{n^n}{n!} \to \infty$.

Exemplo 3.3.5:
Verificar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$ diverge, pois

$$\lim \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right) \; = \; \ln\left(\lim \frac{n}{2n+1}\right) \; = \; \ln \frac{1}{2} \; \neq \; 0\,.$$

A seguir apresentamos um exemplo clássico de uma série cujo termo geral converge para zero mas a série diverge. Primeiro vamos apresentar a definição dessa série e em seguida verificamos que ela é divergente.

Definição 3.15: Série Harmônica

A Série Harmônica é a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Exemplo 3.3.6:
Verificar a convergência da série harmônica.

Para ver que essa série diverge, observe que

$$\begin{aligned}
S_{2^n} &= 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\\
&= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\\
&> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{2^n}\\
&= 1+\frac{n}{2}\to\infty\,.
\end{aligned}$$

Portanto a série diverge, mesmo que $^1/_n \to 0$.

Exercícios Seção 3.3

1) [resp] A série converge ou diverge? Justifique sua resposta.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}$$

2) [resp] Use o teste do n-ésimo termo para divergência para mostrar que a série é divergente ou afirmar que o teste não é conclusivo.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$$

3) [resp] Verifique se a série é convergente, caso seja calcule seu limite.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\cos(n\pi)$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{5^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2n}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{1}{3^n}\right)$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{10^n}$

j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x^n}\quad |x|>1$

k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{3^n + 4^n}$

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$

s) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$

t) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}$

3.4 Teste da Integral

Nesta seção e nas próximas vamos apresentar alguns testes que podem ser utilizados para verificar se séries com termos não-negativos são convergentes. Começamos definindo esse caso particular de séries.

Definição 3.16: Série com Termos Não Negativos

Uma série $\sum a_n$ onde todos os termos da sequência a_n são não negativos, isso é,

$$a_n \geq 0 \qquad \forall n$$

é chamada de Série de Termos Não Negativos.

Note que se quisermos estudar uma série com ternos não positivos $a_n \leq 0$ podemos remover todos os sinais negativos e estudar a série de termos não negativos correspondente. Uma das razões para começarmos o estudo da convergência das séries por esse caso particular é que podemos usar o Teorema da Sequência Monotônica 2.12 na sequência das somas parciais o que produz o seguinte corolário.

Corolário 3.17: Convergência de Série com Termos Não Negativos

Uma série $\sum a_n$ de Termos Não Negativos, $a_n \geq 0$, é convergente se, e somente se, sua sequência de somas parciais é uma sequência limitada.

Demonstração

Basta ver que a sequência de somas parciais é crescente, já que a sequência do termo geral é não negativa. Assim, S_n é monotônica e portanto convergente. Por outro lado, se a série é convergente, então a sequência S_n é convergente e, portanto, limitada.

Os próximos exemplos ilustram o uso desse resultado. No início do Capítulo definimos a Série do Inverso do Quadrado (Definição 3.7) e apresentamos sua soma sem demonstração, vamos agora mostrar que ela converge.

Exemplo 3.4.1:
Mostre que a Série do Inverso do Quadrado é convergente.

Verificamos facilmente que todos os termos são positivos e construímos a sequência de somas parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Começamos manipulando S_n

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{nn} \\ &< 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1 + \sigma_n \end{aligned}$$

onde σ_n são todos os termos exceto o primeiro

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k}, \end{aligned}$$

ou seja, σ_n é a sequência de somas parciais da série com termos

$$a_k = \frac{1}{(k-1)k}\,.$$

Decompondo a_k em frações parciais

$$a_k = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

verificamos que essa é uma Série Telescópica e portanto podemos calcular seu limite

$$\begin{aligned}\sigma &= \lim_{n\to\infty} \sigma_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} \\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Retornando a S_n, para todo $n \geq 2$ podemos escrever

$$S_n < 1 + \sigma_n$$

calculando o limite nos dois lados da desigualdade verificamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;<\; 2\,,$$

ou seja, a série é limitada. Portanto pelo Corolário 3.17 ela é convergente.

Vamos também mostrar que a Série do Inverso do Fatorial 3.8 é convergente.

Exemplo 3.4.2:
Mostre que a Série do Inverso do Fatorial é convergente.

Também nesse caso é fácil verificar que os termos da série são todos positivos e começamos manipulando suas somas parciais

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2} \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 2} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \,.
\end{aligned}
$$

Observe que, removendo o primeiro termo, a última expressão é a n-ésima soma parcial da série geométrica com $\alpha = 1$ e $r = 1/2$,

$$
\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \,,
$$

cuja soma é

$$
\sigma = \frac{\alpha}{1-r} = \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{1/2} = 2 \,.
$$

Retornando a S_n, temos que, para todo $n \geq 2$ vale a seguinte desigualdade

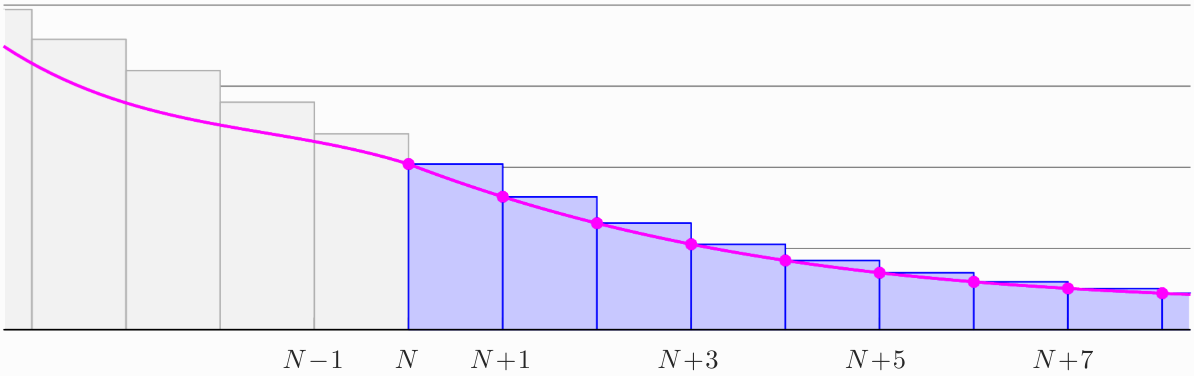
$$
S_n < 1 + \sigma_n \,.
$$

Calculando o limite dos dois lados da desigualdade verificamos que

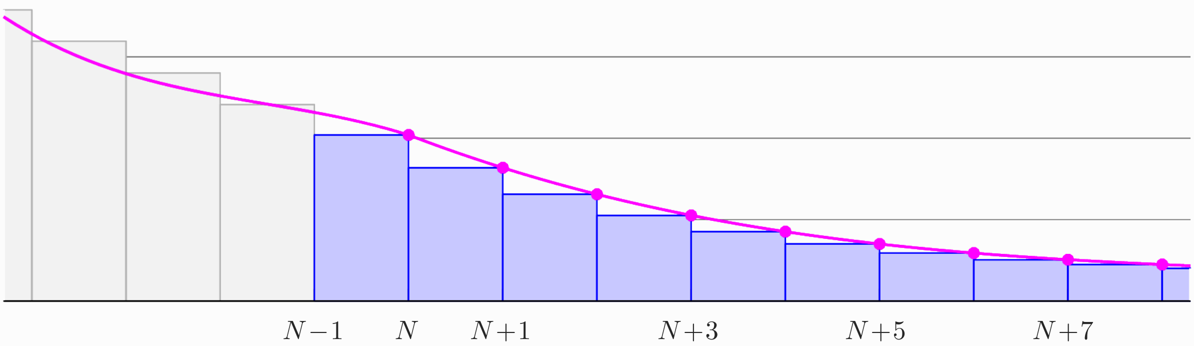
$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 3 \,.
$$

Como a série só tem termos não negativos e é limitada, usamos o Corolário 3.17 para concluir que a série é convergente.

Vamos agora apresentar o teste da integral que compara a soma da série com a Integral Imprópria A.29 de uma função f. Porém, antes de apresentar esse resultado, vamos explorar as ideias envolvidas analisando a Figura 3.2. Estamos assumindo que, pelo menos a partir de algum ponto $n \geq N$, os termos da série sejam dados pela função, $a_n = f(n)$, e que a função é contínua e decrescente para $x \geq N$. Vamos



(a) Construindo os retângulos a direita a série é maior do que a integral.



(b) Construindo os retângulos a esquerda a série é menor do que a integral.

Figura 3.2: Ilustração do teste da integral.

representar os termos da série por retângulos de largura um e altura a_n, que podem ser construídos a direita ou a esquerda do ponto $x = n$. Como f é decrescente, se os retângulos estão na direita como no Gráfico 3.2a, a área do retângulo é maior do que a integral de f em cada intervalo $[n, n+1]$. Enquanto que, se desenharmos o retângulo à esquerda como no Gráfico 3.2b, a integral será maior do que a área do retângulo. O próximo teorema usa essas relações para associar a convergência da integral imprópria com a existência da soma da série.

Teorema 3.18: Teste da Integral

Seja a_n uma sequência tal que para todo $n \geq N$, onde N é um número natural, $a_n \geq 0$. Seja f uma função contínua, positiva e decrescente para $x \geq N$, satisfazendo $f(n) = a_n$, para todo $n \geq N$. Então, a série

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

converge se, e somente se, a integral

$$\int_N^\infty f(x)\,dx$$

converge.

Demonstração

Prova da Ida

Vamos mostrar primeiro que a convergência da série garante a convergência da integral. Seja $n > N$ e considere a partição do intervalo $[N, n]$ dada por

$$[N, N+1] \cup [N+1, N+2] \cup \cdots \cup [n-1, n]\,.$$

Como cada intervalo tem comprimento igual a 1, a função f é decrescente e estamos considerando os retângulos a direita do ponto $x = n$, segue que a soma parcial

$$S_{N,n-1} = a_N + a_{N+1} + \cdots + a_{n-1}$$

nos dá um limite superior para área abaixo do gráfico da função f dentro do intervalo $[N, n]$, isso é,

$$\int_N^n f(x)\,dx \leq S_{N,n-1}\,.$$

Como a série converge a sequência de somas parciais $S_{N,n-1}$ converge para algum valor L. Além disso, como a_n é não negativo a sequência $S_{N,n-1}$ é crescente, então para todo $n > N$

$$I_n = \int_N^n f(x)\,dx \leq L\,,$$

ou seja, a sequência I_n é uma sequência limitada, além disso como f é positiva I_n é crescente e podemos concluir que a sequência I_n é convergente e portanto a integral imprópria

$$\int_N^\infty f(x)\,dx$$

é convergente.

Verificando a Volta

Agora mostraremos que se a integral converge a série também converge. Para isso vamos construir os retângulos que representam os termos da série à esquerda do ponto $x = n$, nesse caso a soma parcial correspondente ao intervalo $[N, n]$ é dada por

$$S_{N+1,n} = a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n \,.$$

Usando novamente o fato que a função é decrescente, essa soma parcial nos dá um limite inferior para a integral, ou seja

$$S_{N+1,n} \leq \int_N^n f(x)\, dx \,.$$

Somando a_N dos dois lados temos que

$$S_{N,n} = a_N + S_{N+1,n} \leq a_N + \int_N^n f(x)\, dx \,.$$

Como a função f é positiva e a integral imprópria é convergente

$$\int_N^\infty f(x)\, dx = L$$

temos, para todo $n > N$, que

$$S_{N,n} \leq L \,.$$

Como a_k é não negativo e a série é limitada usando o Corolário 3.17 concluímos que a série é convergente.

Note que também podemos reescrever a tese do teorema acima como: a série

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

diverge se, e somente se, a integral

$$\int_N^\infty f(x)\, dx$$

diverge. O próximo exemplo aplica essa versão do teorema.

Exemplo 3.4.3:
Verificar a convergência da integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.

Verificamos que a Série Harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge, assim, pela observação acima, podemos concluir que a integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

também diverge.

É importante destacar que o valor a integral não é uma boa aproximação para a soma da série. Podemos observar isso na Figura 3.3 comparando a área sob o gráfico da função $f(x) = x^{-2}$ entre os pontos n e $n+1$ que é data pela integral

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n^2+n}$$

com os termos da série

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

representados pelos retângulos.

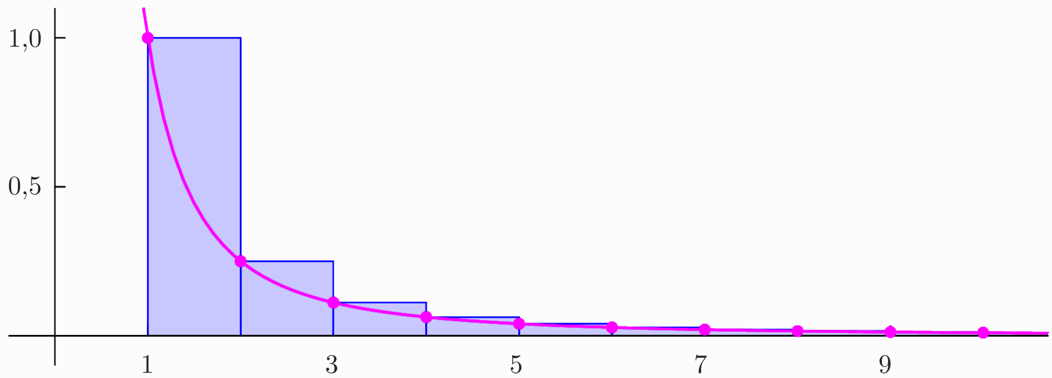


Figura 3.3: Comparação do valor da integral com a soma da série, mostrando que a integral não é uma boa aproximação para a soma.

A tabela a seguir reproduz a mesma comparação apresentando os valores numéricos dos sete primeiros termos e sua soma. Note que os termos são significativamente diferentes no início e só começam a se aproximar posteriormente. Note também que o erro acumulado no início nunca é compensado não importando o número de termos somado.

n	a_n	I_n	$a_n - I_n$
1	1,000	0,500	0,500
2	0,250	0,167	0,083
3	0,111	0,083	0,028
4	0,062	0,050	0,012
5	0,040	0,033	0,007
6	0,028	0,024	0,004
7	0,020	0,018	0,003
Soma	1,512	0,875	0,637

Mais a frente vamos apresentar o Teorema 3.22, que nos mostra como podemos usar o valor da integral para obter estimativas de erro para a aproximação da soma da série por suas somas parciais.

Podemos agora utilizar o Teste da Integral para verificar a convergência de uma classe importante de séries, que chamamos de Serie p. Primeiro apresentamos a definição dessas séries e depois aplicamos o teste para verificar em quais condições elas convergem.

Definição 3.19: Série p

Uma série com a forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é chamada de Série p ou p-série.

Essas séries são importantes pois existe uma forma simples para verificar quando elas são convergentes. O próximo resultado apresenta esse critério.

Proposição 3.20: Convergência da Série p

Uma série p converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Demonstração

Quando $p = 1$ temos a série harmônica que diverge, como já vimos.

Suponha então que $p \neq 1$, nesse caso temos

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_1^b \right]$$
$$= \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) . \tag{3.3}$$

Quando $p > 1$ temos que $p - 1 > 0$, então

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{p-1}} = 0 .$$

Assim, da equação (3.3) temos que a integral converge e

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} .$$

Concluímos então que para $p > 1$ a série p converge. Quando $p < 1$ temos que $p - 1 < 0$, então

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{p-1}}$$

diverge, portanto a integral diverge e consequentemente a série também.

Exemplo 3.4.4:
Verifique a convergência série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ não é um série p, mas como $n^2 + 1 > n^2$, segue que

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} .$$

Entretanto, pela Proposição 3.20, temos que a série p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge, pois $p = 2 > 1$. Dessa forma a sequência de somas parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 1}$$

é limitada, e como os termos da série são não negativos, usamos o Corolário 3.17 para verificar que a série converge.

Estimativa de Erro

Para analisarmos o erro cometido ao aproximarmos a soma de uma série S por uma soma parcial S_n vamos definir o erro ou resto da série.

Definição 3.21: Resto da Série

Dada uma série convergente, cuja soma é S

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

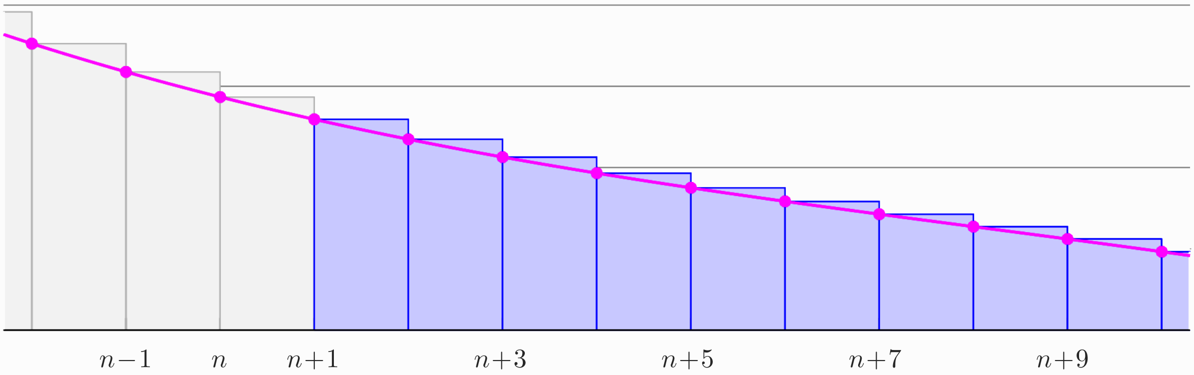
podemos usar suas somas parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

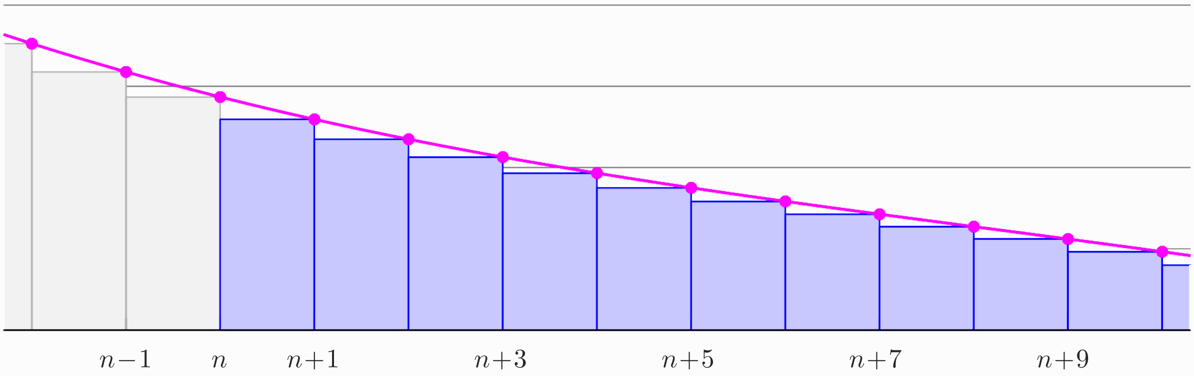
como aproximações para S. Ao fazermos isso estamos cometendo um erro igual ao Resto da Série, isso é, o erro é igual a todos os termos que não foram somados

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\,.$$

Quando verificamos que uma série é convergente pelo teste da integral podemos obter também estimativas para o erro cometido ao aproximarmos a soma da série por uma das suas somas parciais. Observe os gráficos da Figura 3.4 que indicam o resto da



(a) Construindo os retângulos a direita a série é maior do que a integral.



(b) Construindo os retângulos a esquerda a série é menor do que a integral.

Figura 3.4: Estimativa do erro pelo testo da integral.

série, R_n, após calcularmos a n-ésima soma parcial, S_n. No Gráfico 3.4a os retângulos com área a_k estão desenhados a direita do ponto $x = k$ e podemos perceber que

$$R_n > \int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx\,.$$

Fazendo a mesma comparação no Gráfico 3.4b, onde os retângulos estão a esquerda, vemos que

$$R_n < \int_{n}^{\infty} f(x)\, dx\,.$$

Note a mudança no início do intervalo de integração. Temos assim limites inferior e superior para o erro cometido ao aproximarmos a soma da série por uma soma parcial. O próximo teorema formaliza esse resultado.

Teorema 3.22: Estimativa de Erro

Seja a_k uma sequência tal que $a_k \geq 0$, para todo $k \geq N$, onde N é um número natural. Seja f uma função contínua, positiva e decrescente para $x \geq N$, satisfazendo $f(k) = a_k$, para todo $k \geq N$. Suponha que a série com termos a_k converge para S, isso é,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

então o resto

$$R_n = S - S_n$$

satisfaz

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \;\leq\; R_n \;\leq\; \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

Consequentemente,

$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \;\leq\; S \;\leq\; S_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

Demonstração

A demonstração é parecida com a demonstração do Teorema 3.18. Basta reparar que R_n é uma aproximação por baixo da integral

$$\int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

já que representa a soma de retângulos de base 1 e altura $a_k = f(k)$, para $k = n+1, n+2, \ldots$ Por outro lado, R_n é uma aproximação por cima da integral

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx$$

A última desigualdade segue somando S_n na desigualdade anterior e usando que

$$R_n = S - S_n\,.$$

Exemplo 3.4.5:
Sabemos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge, pois é uma série p, com $p = 2$. Descubra n tal que o resto R_n da aproximação S_n seja menor que 0,01.

Sabemos que o Teste da Integral pode ser aplicado, pois

$$\int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b} + \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{n}.$$

Assim, pelo Teorema 3.22,

$$\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}.$$

Para garantir que $R_n < 0{,}01$ impomos que

$$\frac{1}{n} < 0{,}01$$

isolando n optemos $n > 100$. Concluímos então que a aproximação S_{100} tem um erro menor do que 0,01.

Exercícios Seção 3.4

1) [resp] Use o teste da integral para determinar se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge ou diverge. Certifique-se de que as condições do teste da integral sejam satisfeitas.

2) [resp] Use o teste da integral para determinar se a série converge ou diverge. Certifique-se de que as condições do teste da integral sejam satisfeitas.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$$

3) Use o teste da integral para determinar se cada série converge ou diverge. Certifique-se de que as condições do teste da integral sejam satisfeitas.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0,2}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n^2)}{n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n/3}}$

h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-4}{n^2-2n+1}$

4) [resp] A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$$

converge ou diverge? Justifique sua resposta.

5) Verifique se cada série converge ou diverge? Justifique sua resposta.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n}}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{8^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{n}$

h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4n+3}$

l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{n+1}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+1\right)}$

p) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

6) Verifique se cada série converge ou diverge? Justifique sua resposta.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 3)^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1+\ln^2(n)\right)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+e^n}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\operatorname{arctg}(n)}{1+n^2}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{senh}(n)$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}^2(n)$

l) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1/n}{\ln(n)\sqrt{\ln^2(n)-1}}$

7) Determine para quais valores de a cada série converge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1}-\frac{2a}{n+1}\right)$

8) [resp] Quantos termos da série convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,1}}$$

devem ser utilizados para estimar seu valor com erro de no máximo 0,000 01?

9) Quantos termos da série convergente

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\left(\ln n\right)^3}$$

devem ser utilizados para estimar seu valor com erro de no máximo 0,01?

10) Calcule a soma da série com a precisão solicitada.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 0,01

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ 0,1

3.5 Teste da Comparação

Nessa seção apresentamos um resultado que nos permite comparar séries conhecidas com séries que queremos analisar, o Teste da Comparação. Existem duas versões desse teste o Teste da Comparação apresentado no teorema a seguir e o Teste da Comparaçao no Limite apresentado no Teorema 3.24.

Teorema 3.23: Teste da Comparação

Sejam

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=N}^{\infty} b_n$$

séries tais que $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$. Suponha que para algum N,

$$a_n \leq b_n, \qquad \forall n \geq N$$

então,

1. se $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ converge, então $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge;
2. se $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ diverge, então $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ diverge.

Demonstração

Parte 1

Como

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq N$$

temos que

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leq \sum_{k=N}^{n} b_k \qquad \forall n \geq N\,.$$

Somando $b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1}$ de ambos os lados, obtemos

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1} + \sum_{k=N}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k = B_n \qquad \forall n \geq N\,.$$

O termo B_n, do lado direito da desigualdade acima, é a sequência de somas parciais da série $\sum b_n$, como essa série converge e $b_n \geq 0$ (ou seja a B_n é crescente), segue que

$$0 \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1} + \sum_{k=N}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B \qquad \forall n \geq N\,,$$

ou seja, a sequência

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1} + \sum_{k=N}^{n} a_k$$

é limitada e crescente, pois $a_n \geq 0$, portanto esta é uma sequência convergente, ou seja, a série

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1} + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

converge. Mas como já discutimos anteriormente, adicionar e retirar um número finito determos em uma série não muda sua natureza, de modo que podemos retirar os termos $b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1}$ e adicionar os termo $a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}$ e concluir que a série $\sum a_n$ é convergente.

Parte 2

Suponha por absurdo que $\sum b_n$ converge, então, pelo item anterior, segue que $\sum a_n$ converge. O que é um absurdo, pois por hipótese $\sum a_n$ diverge. Segue que $\sum b_n$ diverge.

Exemplo 3.5.1:
Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^4+2}$ converge.

De fato, veja que

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n^4+2} &= \frac{n}{n^4+2} - \frac{1}{n^4+2} \\ &\leq \frac{n}{n^4+2} \\ &= \frac{1}{n^3 + {}^2/_n} \\ &\leq \frac{1}{n^3}\,. \end{aligned}$$

Como a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

é uma série p com $p = 3 > 1$, ela é convergente. Assim, pelo teste de comparação a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^4+2}$$

também converge.

Exemplo 3.5.2:
Verifique a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n-1}$.

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n-1}$$

diverge, pois

$$\frac{3^n}{2^n - 1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

e a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

diverge, pois $|r| = {}^3\!/_2 > 1$.

Apresentamos agora a segunda versão do teste da comparação. nessa versão substituímos a necessidade de verificar se $a_n \leq b_n$ ou $a_n \geq b_n$ pelo cálculo de um limite. Ao aplicarmos o teste em uma série específica podemos escolher a versão que necessitar de cálculos mais simples.

Teorema 3.24: Teste da Comparação no Limite

Sejam $a_n > 0$ e $b_n > 0$, para todo $n \geq N$, $N \in \mathbb{N}$.

1. Se $\displaystyle\lim \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.
2. Se $\displaystyle\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
3. Se $\displaystyle\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demonstração

Parte 1

A demonstração da Parte 1 está no Teorema 11 na Seção 10.4 no livro do Thomas [20].

Parte 2

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_1 \geq N$, tal que

$$\frac{a_n}{b_n} = \left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq N_1$$

ou seja,

$$a_n \leq \varepsilon b_n \qquad \forall n \geq N_1 \,.$$

Assim, pelo teorema anterior, se $\sum \varepsilon b_n$ converge, então $\sum a_n$ também converge, mas é claro que $\sum \varepsilon b_n$ converge, pois $\sum b_n$ converge e ε é uma constante.

Parte 3

Para todo $M > 0$ dado, existe $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_1 \geq N$, tal que

$$\frac{a_n}{b_n} > M \qquad \forall n > N_1 \,,$$

ou seja,

$$a_n > M b_n \qquad \forall n > N_1 \,.$$

Como $\sum b_n$ diverge e M é constante, segue que $\sum M b_n$ também diverge. Pelo teorema anterior, como $\sum M b_n$ diverge, segue que $\sum a_n$ também diverge.

Exemplo 3.5.3:
Verificar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3+4^n}$.

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3+4^n}$$

converge, pois tomando

$$b_n = \frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2^n}$$

temos

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{4^n}{3 + 4^n} = \lim \frac{1}{3/4^n + 1} = 1\,.$$

Como a série

$$\sum \frac{1}{2^n}$$

converge, pois é uma série geométrica com $|r| = 1/2 < 1$, segue, usando o item 1 do teorema, que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3 + 4^n}$$

também converge.

EXEMPLO 3.5.4:
Use o fato que $\ln n$ cresce mais lentamente que n^c para qualquer constante positiva c para provar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}\,.$$

Para verificarmos que $\ln n$ cresce mais lentamente que n^c para qualquer constante positiva c usamos a regra de L'Hôpital para mostrar que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^c} = 0\,.$$

Usando esse fato podemos escrever que para qualquer $c > 0$ vale a desigualdade

$$\frac{(\ln n)^2}{n^3} < \frac{n^{2c}}{n^3} = \frac{1}{n^{3-2c}}\,.$$

Queremos agora escolher a constante c tal que a expressão do lado direito seja o termo geral de uma série convergente. Observando que esses são os termos de uma série-p com $p = 3 - 2c$, precisamos impor que $3 - 2c > 1$ ou seja $c < 1$, escolhemos então $c = 1/2$. Dessa forma construímos uma série convergente com termos

$$b_n = \frac{1}{n^{3-2c}} = \frac{1}{n^2}\,.$$

Podemos aplicar o Teste da Comparação no Limite

$$\begin{aligned}\lim \frac{a_n}{b_n} &= \lim \frac{(\ln n)^2}{n} \\ &= 2 \lim \frac{\ln n}{n} \\ &= 2 \lim \frac{1}{n} = 0\,.\end{aligned}$$

Pelo item 2 do Teorema 3.24, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge, segue que a série em questão também converge.

EXEMPLO 3.5.5:
Verifique que série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$ diverge.

Com efeito, comparando o termo geral $a_n = \left(\dfrac{2n+3}{5n+4}\right)^n$ com $b_n = \left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{5n}\right)^n$, temos

$$\begin{aligned}\lim \frac{a_n}{b_n} &= \lim \left(\frac{2n+3}{5n+4}\,\frac{5n}{2n+3}\right)^n \\ &= \lim \left(\frac{5n}{5n+4}\right)^n \\ &= \lim \left(\frac{1}{1+{}^4\!/_{5n}}\right)^n \\ &= \frac{1}{e^{4/5}}\,.\end{aligned}$$

Como $\dfrac{1}{e^{4/5}} > 0$, pelo primeiro item do teorema, segue que o comportamento de

$\sum a_n$ é o mesmo de $\sum b_n$, mas $\sum b_n$ diverge, pois

$$b_n = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5n}\right)^n \to e^{6/25} \neq 0\,.$$

Para verificar as passagens desse exemplo, é possível utilizar a expressão

$$\lim \left(\frac{1}{1+4/5n}\right)^n = \exp\left[\lim \ln \left(\frac{1}{1+4/5n}\right)^n\right].$$

Exercícios Seção 3.5

1) [resp] Utilize o teste da comparação para determinar se a série converge ou diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^{3/2}}$$

2) [resp] Utilize o teste da comparação para determinar se a série converge ou diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+4}{n^4+4}}$$

3) [resp] Aplicando os testes de convergência verifique se a série numérica abaixo é convergente ou divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$$

4) Utilize o teste da comparação para determinar se cada série converge ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+30}$ d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^4+2}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^2+3}}$

5) [resp] Utilize o teste da comparação no limite para determinar se a série converge ou diverge.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

Dica: *compare no limite com* $\sum 1/n$

6) [resp] A série converge ou diverge?

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n^3-3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}$$

7) Use o teste da comparação no limite para determinar se cada série é convergente ou divergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^3-n^2+3}$

Dica: *Compare com* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+2}}$

Dica: *Compare com* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n^2+1)(n-1)}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n\sqrt{n}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3+4^n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

Dica: *Compare com* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

8) Utilize qualquer método para determinar se a série converge ou diverge.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{2^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{n^2}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n-1}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$

h) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n^3-3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln\big(\ln(n)\big)}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{n^3}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\ln(n)}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{n^{3/2}}$

o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln(n)}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$

q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

r) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{2^n n}$

t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{2^n n^2}$

9) Utilize qualquer método para determinar se a série converge ou diverge.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}+1}{3^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n}\,\frac{1}{5n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-n}{2^n\,n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Dica: *mostre que* $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ *para* $n \geq 2$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+2)!}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n)}{n^{1,1}}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tgh}(n)}{n^2}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcsec}(n)}{n^{1,3}}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$

o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth(n)}{n^2}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$

q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4+9+\cdots+n^2}$

3.6 Teste da Razão

Nessa seção apresentamos mais teste que pode ser aplicado a séries de termos positivos, o Teste da Razão. Nesse teste estamos verificando se os termos da série caem com velocidade suficiente calculando a razão entre um termo e seu antecessor.

Teorema 3.25: Teste da Razão

Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série tal que $a_n > 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

então,

1. se $\rho < 1$ a série converge;
2. se $\rho > 1$ ou $\rho = \infty$ a série diverge;
3. se $\rho = 1$ o teste é inconclusivo.

Demonstração

Parte 1

Como $\rho < 1$ podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que $\rho + \varepsilon < 1$, e como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho \right| < \varepsilon\,.$$

Dessa forma, denotando $r = \varepsilon + \rho < 1$, temos em particular que

$$a_{n+1} < (\varepsilon + \rho)a_n = a_n r \qquad \forall n \geq N\,.$$

Repetindo essa relação para todo n a partir de N temos

$$a_{N+1} < a_N r$$

$$
\begin{aligned}
&a_{N+2} < a_{N+1}r < a_N r^2 \\
&a_{N+3} < a_{N+2}r < a_N r^3 \\
&a_{N+k} < a_N r^k \,.
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança de índices $n = N + k$ podemos escrever

$$a_n < a_N r^{n-N} \qquad \forall n > N$$

e consequentemente temos que

$$\sum_{n=N+1}^{m} a_n < \sum_{n=N+1}^{m} a_N r^{n-N} = \sum_{k=1}^{m-N} a_N r^k \qquad \forall m > N\,.$$

Como $|r| < 1$, a sequência de somas parciais da série geométrica do lado direito converge. Então, a sequência de somas parciais do lado esquerdo está limitada pela soma da série geométrica e é crescente, pois os termos gerais são positivos. Portanto a sequência do lado esquerdo converge, quando $m \to \infty$, ou seja, a série

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

converge. Podemos concluir então que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

também converge, pois ela coincide com a série anterior exceto por um número finito de termos.

No caso em que $\rho = 1$, não podemos tirar conclusão alguma com base no teste da razão. De fato para todo p, a série p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)^p}}{\dfrac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$$

entretanto, como já vimos anteriormente, a série p converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Exemplo 3.6.1:
Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$.

Seja $a_n = \dfrac{n!}{(2n)!}$, então

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\,\frac{(2n)!}{n!} \\ &= \frac{(n+1)\,n!\;\;(2n)!}{(2n+2)(2n+1)\,(2n)!\;\;n!} \\ &= \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \to 0 < 1\,.\end{aligned}$$

Assim, a série converge.

Exemplo 3.6.2:
Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$.

Seja $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{\ln(n)}$, então

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)}\,\frac{\ln(n)}{3^{n+2}}$$

$$= \frac{3\ln(n)}{\ln(n+1)}\,.$$

Usando L'Hôpital, obtemos que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{3(n+1)}{n} = 3 > 1\,.$$

Portanto, a série diverge.

EXEMPLO 3.6.3:
Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Seja $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, então

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} \\
&= \frac{(n+1)\,n!\,n^n}{(n+1)^n\,(n+1)\,n!} \\
&= \frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= \left(\frac{1}{1+{}^1\!/_n}\right)^n \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\,.
\end{aligned}$$

Podemos agora calcular o limite

$$\begin{aligned}
\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \\
&= \lim \exp\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]
\end{aligned}$$

$$= \lim \exp\left[-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$$

$$= \exp\left[-\ln \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$$

$$= \exp\left[-\ln\left(e^1\right)\right]$$

$$= \exp(-1)$$

onde usamos a relação (A.1). Temos então que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-1} \approx 0{,}3679 < 1$$

portanto a série converge.

Exemplo 3.6.4:
Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$.

Veja que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \to \frac{1}{2} < 1$$

então a série converge.

Exercícios Seção 3.6

1) [resp] Aplicando os testes de convergência verifique se a série numérica abaixo é convergente ou divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n}{3^n}$$

2) Utilize o teste da razão para determinar se cada série converge ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)^2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}\, n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+2)!}{n!\, 3^{2n}}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\, n}{(2n+3)\ln(n+1)}$

3) Determine se a série converge ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{1{,}25^n}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ln(n)}{2^n}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}\, n^3$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!\, n!\, 3^n}$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, 2^n\, (n+1)!}{3^n\, n!}$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n}$

s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)(2^n+3)}{3^n+2}$

4) Determine se as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cujos termos são definidos pelas relações de recorrência são convergentes ou divergentes.

a) $a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \dfrac{1+\operatorname{sen}(n)}{n} a_n$

b) $a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \dfrac{1+\operatorname{arctg}(n)}{n} a_n$

c) $a_1 = \dfrac{1}{3} \qquad a_{n+1} = \dfrac{3n-1}{2n+5} a_n$

d) $a_1 = 3 \qquad a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_n$

e) $a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \dfrac{2}{n} a_n$

f) $a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$

g) $a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \dfrac{1+\ln(n)}{n} a_n$

h) $a_1 = \dfrac{1}{2} \qquad a_{n+1} = \dfrac{n+\ln(n)}{n+10} a_n$

i) $a_1 = \dfrac{1}{3} \qquad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$

j) $a_1 = \dfrac{1}{2} \qquad a_{n+1} = (a_n)^{n+1}$

3.7 Teste da Raiz

O Teste da Raiz é similar ao Teste da Razão, ele é útil quando calcular a raiz n-ésima for mais fácil do que calcular a razão ente os termos da série.

Teorema 3.26: Teste da Raiz

Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série tal que $a_n \geq 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

então,

1. se $\rho < 1$ a série converge;
2. se $\rho > 1$ ou $\rho = \infty$ a série diverge;
3. se $\rho = 1$ o teste é inconclusivo.

Demonstração

Parte 1

Nesse caso, temos que $\rho < 1$, assim podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que $\rho + \varepsilon < 1$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$

$$\left|\sqrt[n]{a_n} - \rho\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} < \varepsilon + \rho \quad \Rightarrow \quad a_n < (\varepsilon + \rho)^n .$$

Dessa forma, pelo teste da comparação, temos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge, pois seu termo geral, a_n está limitado pelo termo geral da série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\varepsilon+\rho)^n$$

que é convergente pois $\varepsilon+\rho<1$.

Assim como no Teste da Razão, no Teste da Raiz o teorema é inconclusivo quando $\rho=1$. Observe as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

em ambos os casos temos que $\lim \sqrt[n]{a_n}=1$ entretanto, a série harmônica diverge e a série p, com $p=2$, converge.

Note o Teste da Raiz continua válido mesmo trocando a hipótese de que

$$\lim \sqrt[n]{a_n}=\rho$$

por

$$\lim \sqrt[n+k]{a_n}=\rho \qquad \forall k\in\mathbb{N}\,. \tag{3.4}$$

Para ver que isso é verdade basta notar na demonstração que o termo geral da série continua limitado pelo termo geral de uma série geométrica.

Seguem agora alguns exemplos do uso desse teste.

Exemplo 3.7.1:
Use o teste da raiz para analisar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(3n)^n}\,.$$

Seja

$$a_n=\frac{4^n}{(3n)^n}$$

então

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{4^n}{(3n)^n}} = \frac{4}{3n} \to 0 < 1$$

portanto a série converge.

Exemplo 3.7.2:
Use o teste da raiz para analisar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}}\,.$$

Observe que, fazendo uma mudança de índice, podemos reescrever a série como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^n}\,.$$

Podemos agora tomar

$$a_n = \frac{1}{(n-1)^n}$$

que nos leva a

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n-1} \to 0 < 1$$

o que nos permite concluir que série converge.

Outra forma de resolver o exemplo anterior é usar a variação do Teste da Raiz (3.4). Neste caso, podemos tomar

$$a_n = \frac{1}{n^{n+1}}$$

que nos leva a

$$\sqrt[n+1]{a_n} = \frac{1}{n} \to 0 < 1\,.$$

Assim, chegamos a conclusão de que a série converge.

Exemplo 3.7.3:
Use o teste da raiz para analisar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(e^2+\frac{1}{n}\right)\right]^{n+1}.$$

Fazendo uma transformação no índice podemos reescreve a série da seguinte forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(e^2+\frac{1}{n}\right)\right]^{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\left[\ln\left(e^2+\frac{1}{n-1}\right)\right]^{n}.$$

Dessa forma temos que

$$a_n=\left[\ln\left(e^2+\frac{1}{n-1}\right)\right]^{n}.$$

Aplicando o Teste da Raiz temos

$$\sqrt[n]{a_n}=\ln\left(e^2+\frac{1}{n-1}\right)\to\ln(e^2)=2>1\,.$$

Portanto essa série diverge.

Exercícios Seção 3.7

1) Utilize o teste da raiz para determinar se cada série converge ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{(2n+5)^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(3n)^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+3}{3n-5}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(e^2+\frac{1}{n}\right)\right]^{n+1}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(3+{}^1\!/_n)^{2n}}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

<u>Dica</u>: *Use* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$

h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+n}}$

2) Determine se a série converge ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\ln(n)\right)^n}{n^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\big(\ln(n)\big)^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\big(\ln(n)\big)^{n/2}}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\ln(n)}{n(n+2)!}$

3.8 Série Alternada e Teste de Leibniz

Nas seções anteriores apresentamos vários testes que verificam se uma série de termos não negativos é convergente. Agora vamos discutir séries que possuem termos positivos e negativos. Nesta seção estudaremos o caso particular onde os sinais se alternam produzindo o que chamamos de série alternada. Na próxima seção apresentamos os conceitos de convergência absoluta e condicional que vamos usar para os outros casos.

Definição 3.27: Série Alternada

Uma série com a forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

onde $a_n > 0$ para todo n é chamada de Série Alternada.

Para esse caso particular de série temos um teste de convergência bastante simples, o Teste de Leibniz 3.28, e também uma forma de estimar o erro ao aproximarmos a soma da série por uma soma parcial 3.30.

Teorema 3.28: Teste de Leibniz

Seja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

uma Série Alternada, Definição 3.27, se

1. $a_n > 0$,
2. $a_n \geq a_{n+1}$,
3. $a_n \to 0$

para todo $n \geq N$, então a série converge.

Demonstração

Vamos assumir que $N = 1$, isso é, as condições do teste valem para todos os termos da série. Escolhendo n par e escrevendo $n = 2m$, temos que a soma dos n primeiros termos é

$$S_n = S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots + a_{2m-1} - a_{2m} \,.$$

Como essa é uma soma finita podemos agrupar os termos dois a dois

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}) \,.$$

Cada termo entre parenteses é positivo ou zero, pois $a_k \geq a_{k+1}$, então podemos concluir que $S_{2m+2} \geq S_{2m}$ para todo m, ou seja, a sequência S_{2m} é crescente. Vamos agora agrupar os termos de S_{2m} de outra forma

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$

dessa igualdade concluímos que $S_{2m} \leq a_1$. Como a sequência S_{2m} é crescente e limitada, pelo Teorema 2.12, concluirmos que ela é convergente e podemos escrever

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = L \tag{3.5}$$

para algum $L \in \mathbb{R}$. Considerando agora o caso onde n é ímpar, $n = 2m + 1$, temos que a soma dos n primeiros termos é

$$S_n = S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$$

como $a_n \to 0$ temos que

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = L + 0 = L \,. \tag{3.6}$$

A equação (3.5) nos informa que a subsequência dos termos pares tende para L, enquanto que, a equação (3.6) garante que os termos impares convergem para o mesmo valor. Podemos concluir então que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = L\,.$$

Para aplicarmos o Teste de Leibniz precisamos garantir que $a_n \geq a_{n+1}$, o que pode ser complicado em alguns casos. Porém, se conhecermos uma função f tal que $f(n) = a_n$, podemos verificar se a função é decrescente calculando sua derivada. Se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \leq N$ podemos concluir que $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \geq N$.

Um resultado que podemos extrair do Teste de Leibniz é o critério de convergência da Série-p com termos alternados.

Proposição 3.29: Convergência da Série p Alternada

Observe que $a_n = {}^1\!/\!_{n^p}$ com $p > 0$, satisfaz todas as hipóteses do Teorema 3.28, então a Série p Alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

é convergente para todo $p > 0$.

Note para $0 < p \leq 1$ a série p não converge, entretanto a série p alternada converge.

Apresentamos a seguir alguns exemplos do uso do Teste de Leibniz.

Exemplo 3.8.1:
Use o Teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Seja

$$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

note que $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$, pois $1 + \dfrac{1}{n} > 1$, note também que se definirmos

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

temos

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2 + x} < 0 \qquad \forall x \geq 1$$

o que mostra que $a_{n+1} < a_n$. Então a_n é decrescente. Além disso, como a função $\ln(x)$ é contínua em 1 segue que

$$\lim a_n = \ln \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0\,.$$

Assim, podemos aplicar o Teste de Leibniz e concluir que a série alternada converge.

EXEMPLO 3.8.2:
Use o Teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{(\ln n)^2}\,.$$

Como $\ln n$ é crescente,

$$a_n = \frac{4}{(\ln n)^2}$$

é decrescente. Além disso $a_n > 0$ para todo $n \geq 2$ e $a_n \to 0$, pois

$$(\ln n)^2 \to \infty\,.$$

Dessa forma, podemos aplicar o teste de Leibniz para concluir que a série alternada converge.

EXEMPLO 3.8.3:

Use o teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10^n}{(n+1)!}\,.$$

Seja $a_n = \dfrac{10^n}{(n+1)!}$. Veja que se $n \geq 8$, então $n+2 \geq 10$ e $1 \geq \dfrac{10}{n+2}$. Assim,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{10^{n+1}}{(n+2)!} \\ &= \frac{10^n}{(n+1)!}\frac{10}{(n+2)} \\ &\leq \frac{10^n}{(n+1)!} \\ &= a_n \end{aligned}$$

ou seja, a_n é decrescente a partir de $n = 8$.

Para verificar que $a_n \to 0$, note que se $n \geq 10$,

$$\begin{aligned} (n+1)! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) \\ &\geq 10!\; 10^{n-10}\,(n+1)\,. \end{aligned}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{10^n}{(n+1)!} \\ &\leq \frac{10^n}{10!\; 10^{n-10}\,(n+1)} \\ &= \frac{10^{10}}{10!\,(n+1)}\,. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema do Confronto 2.14 temos que $a_n \to 0$.

Desse modo, todas as hipóteses do teorema são satisfeitas, de forma que podemos concluir que essa série alternada converge.

Estimativa de Erro

Assim como no Teste da Integral o Teste de Leibniz também nos fornece uma estimativa para o erro R_n de uma série que atende às condições do teste.

Proposição 3.30: Erro de uma Série Alternada

Seja $a_k > 0$ tal que $a_{k+1} \leq a_k$ e que a série alternada converge para S

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \,.$$

Nesse caso, o erro cometido ao aproximarmos S por uma soma parcial

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

é o resto da série (Definição 3.21) e está limitado pelo primeiro termo não incluído na soma parcial

$$|R_n| = |S - S_n| \leq |a_{n+1}| \,.$$

Demonstração

Note que, o resto da série

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

pode ser expandido em

$$R_n = \begin{cases} a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots \,, & \text{se } n \text{ é par} \\ -a_{n+1} + a_{n+2} - a_{n+3} + \cdots \,, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Podemos escrever então que

$$|R_n| = |\, a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots |\,.$$

Agora, usando que todos os termos entre parênteses são positivos, pois $a_n > a_{n+1}$, temos que

$$|R_n| < |a_{n+1}|$$

o que demonstra o teorema.

Exercícios Seção 3.8

1) Determine se as séries satisfazem as condições para serem séries alternadas e se convergem ou divergem.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{3/2}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3^n\,n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{4}{(\ln n)^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2+1}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+5}{n^2+4}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n^2}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{10^n}{(n+1)!}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{10}\right)^n$

j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n)}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$

2) Estime a magnitude do erro quando aproximamos o valor da soma de cada série pela soma dos seus quatro primeiros termos.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{10^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0{,}01)^n}{n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\,t^n$ onde $0<t<1$

3) Determine quantos termos devem ser somados para aproximar a soma da série com erro menor do que 0,001.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2+3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,n}{n^2+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\left(n+3\sqrt{n}\right)^3}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\ln\big(\ln(n+2)\big)}$

3.9 Convergência Absoluta e Condicional

Testar diretamente a convergência de séries com termos positivos e negativos arbitrários precisa considerar o arranjo particular de sinais, assim não temos testes gerais para esses casos. A solução que empregaremos é comparar as séries com termos quaisquer com séries com termos não negativos. A definição a seguir define os conceitos de convergência condicional e absoluta que empregaremos para esse fim.

Definição 3.31: Convergência Absoluta e Condicional

Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Converge Absolutamente, ou é Absolutamente Convergente, se a série com os valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Uma série que converge mas não é absolutamente convergente é chamada Condicionalmente Convergente.

Quando queremos verificar a convergência de uma série com termos positivos e negativos podemos construir a série que soma os módulos dos termos dessa série e verificar a convergência dessa nova série usando um dos testes para as séries de termos não negativos. Se essa série convergir usamos o teorema a seguir para garantir que a série original também converge.

Teorema 3.32: Teste da Convergência Absoluta

Uma série absolutamente convergente é convergente.

Demonstração

Seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

uma série absolutamente convergente. Observando que

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

e somando $|a_n|$ em todos os termos temos

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|\,.$$

Como a série é absolutamente convergente, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$$

converge. Assim, pelo Teste da Comparação a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + |a_n|\right)$$

converge. Consequentemente, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + |a_n|\right) - |a_n|$$

e as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + |a_n|\right) \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

convergem.

Note que não é possível afirmar que uma série que converge também converge absolutamente. Como exemplo, observe a série p alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\,.$$

Essa série converge se $0 < p \leq 1$, entretanto esta série não é absolutamente convergente, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

e a série p não converge se $p \leq 1$, ou seja, a série p alternada, com $0 < p \leq 1$, é condicionalmente convergente.

Observe que dada uma série convergente de termos não negativos a_n, então, a série alternada

$$\sum (-1)^{n+1} a_n$$

é absolutamente convergente. Note que, todas as séries convergentes com termo geral não negativo que vimos anteriormente, tem sua respectiva série alternada absolutamente convergente.

Os exemplos a seguir mostram como usar o teste da convergência absoluta.

EXEMPLO 3.9.1:
Use o teste da convergência absoluta para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2\, 3^n}{(2n+1)!}$$

é uma série convergente.

Mostraremos que a série é absolutamente convergente, ou seja, que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$$

converge. Para isso aplicaremos o Teste da Razão

$$\begin{aligned}
\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{\big((n+1)!\big)^2\, 3^{n+1}}{(2n+3)!} \; \frac{(2n+1)!}{(n!)^2\, 3^n} \\
&= \frac{(n+1)^2 (n!)^2\; 3^n 3\; (2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!\; (n!)^2\; 3^n} \\
&= \frac{3(n+1)^2}{2(n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{3(n+1)}{2(2n+3)}
\end{aligned}$$

Assim, aplicando L'Hôpital, segue que

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{3(n+1)}{2(2n+3)} = \frac{3}{4} < 1 \,.$$

Portanto, pelo Teste da Razão a série $\sum |a_n|$ é convergente. Então, pelo Teste da Convergência Absoluta, concluímos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$$

é absolutamente convergente.

Exemplo 3.9.2:
Verifique se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg}(n)}{n^2+1}$ é absolutamente convergente.

Temos que verificar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n)}{n^2+1} \,.$$

Pelo Teste da Integral sabemos que essa série converge se, e somente se, a integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2+1}\, dx$$

for convergente. Para calcular a integral usamos a mudança de variáveis

$$u = \operatorname{arctg}(x) \qquad\qquad du = \frac{dx}{x^2+1}$$

que leva aos novos limites de integração

$$\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} \qquad\qquad \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$$

segue que

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2+1}\, dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} u\, du$$

$$= \frac{u^2}{2}\bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16}\right)$$

$$= \frac{3\pi^2}{32}\,.$$

Como a integral é convergente a série é absolutamente convergente.

Exercícios Seção 3.9

1) Determine se as séries convergem absolutamente, convergem ou divergem.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(0{,}1)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0{,}1)^n}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+1}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n+3}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{n^2}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt[n]{10}$

2) Determine se as séries convergem absolutamente, apenas convergem ou divergem.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln(n)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\operatorname{arctg}(n)}{n^2+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln(n)}{n-\ln(n)}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-5)^{-n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-100)^n}{n!}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+2n+1}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n\sqrt{n}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{(2n)^n}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n\, n!\, n}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2\, 3^n}{(2n+1)!}$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$

3.10 Revisão

1) Calcule a soma das séries.

a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{n(n+1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{(3n-1)(3n+2)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{-8}{(4n-3)(4n+1)}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{4^n}$

2) Determine se as séries convergem absolutamente, convergem condicionalmente ou divergem.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-5}{n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\big(\ln(n)\big)^2}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$

h) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\ln\big(\ln(n)\big)}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 3\, n^2}{n^3+1}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2+1)}{2n^2+n-1}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, 3^n}{n^n}$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

p) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

3) [resp] Considere as sequências

$$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{n^2}$$

a) Quais das seguintes séries convergem e quais divergem? No item (i) use o teste da integral diretamente, não use que é uma série p.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$

b) Use o teste de Leibniz para mostrar que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge.

c) Mostre que o teste da raiz não é conclusivo para a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]^n$$

Por que o teste da raiz é inconclusivo neste caso? Dica: *Dê exemplos de duas séries que satisfazem $\sqrt[n]{a_n} \to 1$, onde a_n é o termo geral, mas uma converge e a outra diverge.*

4) Considere as sequências

$$a_n = \frac{n!}{5^n} \qquad b_n = \frac{1}{n\ln n} \qquad c_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/\ln(n)}$$

Use o teste indicado entre parenteses para verificar se as séries convergem ou divergem. No(s) caso(s) que converge(m) justifique se é absolutamente ou condicionalmente convergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (teste do termo geral)

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ (teste da razão)

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ (teste da integral)

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ (teste de Leibniz)

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (teste do termo geral)

5) Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)}{\ln(n+2)\ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$$

Encontre o limite desta série.

6) Considere as sequências

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad c_n = \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$$

Use o teste indicado entre parenteses para verificar se as séries convergem ou divergem. No(s) caso(s) que converge(m) justifique se é absolutamente ou condicionalmente convergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (teste da razão)

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (teste da integral)

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{2/n}$ (teste do termo geral)

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n$ (teste da comparação no limite)

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ (teste de Leibniz)

7) Encontre o limite da seguinte série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$$

8) Encontre o limite da seguinte série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$$

9) Determine quais séries são convergentes ou divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n!\, n!}{(2n)!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{4^n\, 2^n\, n!}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{\big(2\cdot 4\cdots(2n)\big)\,(3^n+1)}$

10) Determine quais séries são convergentes ou divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)^{n+1/2}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(\operatorname{arctg}(n)\big)^2}{n^2+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tgh}(n)$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log_n(n!)}{n!}$

11) Considere as somas das sequências dadas a seguir, quais delas convergem?

a) $a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \dfrac{n(n+1)a_n}{(n+2)(n+3)}$

Dica: *escreva os primeiros termos e generalize os cancelamentos*

b) $a_1 = 7 \qquad a_{n+1} = \dfrac{n a_n}{(n+1)(n-1)}$

c) $a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$

d) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3^n}, & n \text{ ímpar} \\ \dfrac{n}{3^n}, & n \text{ par} \end{cases}$

4

Séries de Taylor

4.1 Séries de Potências 118
4.2 Operações com Séries de Potências 130
4.3 Séries de Taylor 136
4.4 Convergência da Série de Taylor 147
4.5 Aproximações por Polinômios de Taylor 160
4.6 Usos da Série de Taylor 164
4.7 Revisão 179

4.1 Séries de Potências

Nesse capítulo vamos utilizar a teoria desenvolvida para o estudo de séries numéricas para construir as Séries de Potências, que podemos imaginar como polinômios de grau infinito. Para estudar a convergência das Séries de Potência, vamos considerar que para cada valor fixo de x temos uma série numérica que pode ser analisada com os resultados do capítulo anterior. Porém, estaremos também interessados em estudar essas séries como funções de x. Na próxima seção apresentaremos as Séries de Taylor, que nos mostram como construir séries de potência para funções que conhecemos, desejamos estudar ou aproximar. Começamos apresentando a definição da Série de Potências.

Definição 4.1: Série de Potências

Série de Potências centrada em a é uma série de funções da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

onde c_n e a são constantes e $x \in \mathbb{R}$ é uma variável.

A seguir temos um exemplo de uma Série de Potências e a função que corresponde a sua soma.

Exemplo 4.1.1:

Determine a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Primeiro note que essa é uma Série de Potências centrada em $a = 0$ com coeficientes $c_n = 1$, para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$ Consideramos agora o valor de x fixo e observamos que essa é uma Série Geométrica com $r = x$, portanto convergente para todo x tal que $|x| < 1$. Além disso, usando a fórmula da soma da Série Geométrica (3.2), nos pontos onde a série converge, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \, .$$

Como essa série diverge para todo $|x| \geq 1$ essa igualdade só vale para o intervalo $(-1, 1)$.

A Figura 4.1 exibe o gráfico da função $1/(1-x)$ e as quatro primeiras somas parciais da série de potências.

Com base no resultado desse exemplo podemos usar a série truncada como uma aproximação para a função, desde que $|x| < 1$, isso é,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \approx \sum_{n=0}^{N} x^n \, .$$

O próximo exemplo apresenta uma generalização desse resultado.

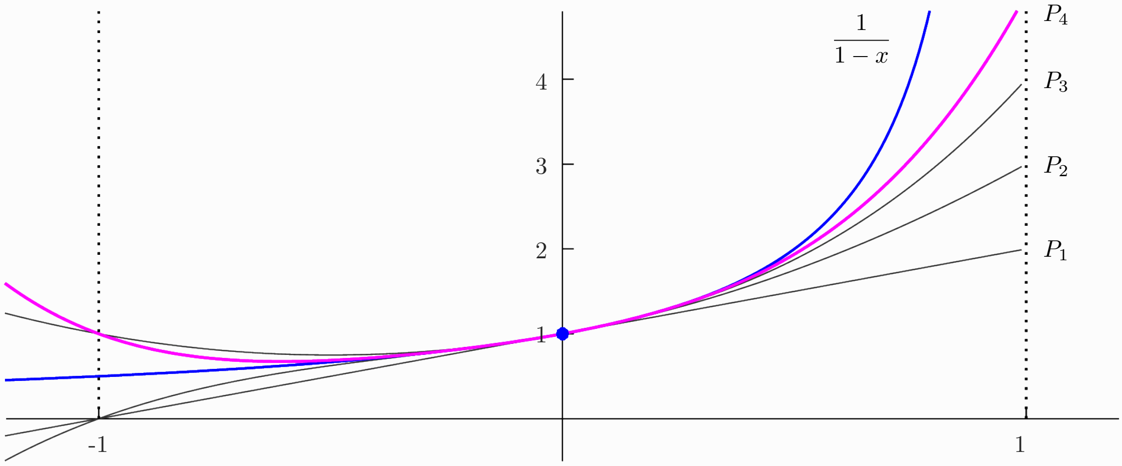


Figura 4.1: Comparação da função $1/(1-x)$ com seus Polinômios de Taylor.

Exemplo 4.1.2:
Para quaisquer constantes reais a e $\beta \neq 0$, calcule a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n \,.$$

Essa é uma Série de Potências centrada em a com coeficientes $c_n = \beta^n$ que podemos escrever como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(\beta(x-a)\big)^n \,.$$

Para cada x fixo, esta é uma série geométrica com $r = \beta(x-a)$. Ela converge se, e somente se, $|r| < 1$, ou seja, quando

$$\begin{aligned} |\beta(x-a)| &< 1 \\ -\frac{1}{|\beta|} < x - a &< \frac{1}{|\beta|} \\ a - \frac{1}{|\beta|} < x &< a + \frac{1}{|\beta|} \,. \end{aligned}$$

Novamente usamos a fórmula da soma da Série Geométrica (3.2) nos pontos onde a série converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\beta(x-a)\big)^{n-1} = \frac{1}{1-\beta(x-a)} \,.$$

Exemplo 4.1.3:
Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$.

Essa série é um caso particular do exemplo anterior com $\beta = 1/2$ e $a = 2$, temos então que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x-2}{2}} = \frac{2}{4-x}\,,$$

que converge para

$$\begin{aligned} a - \frac{1}{|\beta|} &< x < a + \frac{1}{|\beta|}\,, \\ 2 - \left|\frac{1}{1/2}\right| &< x < 2 + \left|\frac{1}{1/2}\right|\,, \\ 0 &< x < 4\,. \end{aligned}$$

Código Python para ilustrar algumas séries de potências.

Os exemplos anteriores mostraram como podemos usar a definição de convergência de séries numéricas para estudar a convergência das séries de potências. Porém, existem resultados específicos que podemos utilizar para as Séries de Potência, por exemplo, toda série de potências converge no seu centro, chamamos esse caso de Convergência Trivial. Podemos comprovar isso simplesmente avaliando cada termo da série em $x = a$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\Big|_{x=a} = c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + \cdots = c_0\,.$$

O teorema a seguir apresenta uma propriedade das séries de potências que simplifica a analise de convergência.

Teorema 4.2: Convergência da Série de Potências

Se a Série de Potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

converge em $x-a=L\neq 0$, então ela converge absolutamente para todo x com

$$|x-a|<|L|\ .$$

Se a série diverge em $x-a=M$, então ela diverge para todo x tal que

$$|x-a|>|M|\ .$$

Demonstração

Parte 1

Suponha que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n L^n$$

converge, então, pelo Teste de Divergência 3.14 $\lim(c_nL^n)=0$. Assim, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$|c_nL^n|<1 \qquad \forall n>N\ .$$

Dividindo os dois lados por $|L|^n$ e multiplicando por $|x-a|^n$, temos

$$|c_n||x-a|^n \ < \left|\frac{x-a}{L}\right|^n \qquad \forall n>N\ . \tag{4.1}$$

Note que, se x é tal que $|x-a|<|L|$, a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x-a}{L}\right|^n$$

converge. Então, pelo Teste da Comparação 3.23 usando a desigualdade (4.1) a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||x-a|^n$$

converge. Isso é o mesmo que dizer que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

converge absolutamente.

Parte 2

Assuma que a série diverge para

$$r - a = M \neq 0$$

e suponha, por absurdo, que existe s satisfazendo

$$|s-a| > |M|$$

onde a série converge. Usando a primeira parte do teorema sabemos que se a série converge em s ela deve convergir para todo x tal que

$$|x-a| < |s-a|$$

Em particular deve convergir em r o que é uma contradição. Provamos então que não pode existir nenhum ponto s convergente tal que

$$|s-a| > |M| \,.$$

Esse teorema é útil para encontrar intervalos onde a série converge absolutamente e onde a série diverge, o próximo exemplo emprega esse resultado.

Exemplo 4.1.4:
Determine para quais valores de x a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{n}$$

é convergente.

Note que quando $x - 2 = \pm 1$ podemos decidir com facilidade se a série converge ou não. Considerando o caso $x - 2 = 1$ temos $x = 3$ que gera a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

que converge pois é a Série Harmônica Alternada. Assim, pelo Teorema 4.2, podemos afirmar que essa série converge absolutamente para todo x tal que $|x - 2| < 1$, ou seja, a série converge absolutamente no intervalo $(1, 3)$. Note que no ponto $x = 3$ a série converge condicionalmente, por se tratar da Série Harmônica Alternada.

Tomando agora $x - 2 = -1$, isso é $x = 1$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n} .$$

Como a Série Harmônica diverge, essa última série também diverge. Assim pelo Teorema 4.2, a série diverge sempre que $|x - a| > 1$, ou seja, a série diverge em $(-\infty, 1] \cup (3, \infty)$. O gráfico a seguir exibe a região de convergência dessa série. No interior do intervalo a convergência é absoluta e no ponto $x = 3$ é condicional.

Note que o último teorema garante que os pontos onde uma série de potências converge estão sempre em um intervalo, que chamamos de intervalo de convergência.

Definição 4.3: Intervalo de convergência

O intervalo dos pontos onde uma Série de Potências converge é chamado de Intervalo de Convergência.

O teorema sobre a convergência das séries de potências pode ser reescrito de uma forma mais poderosa, apresentada a seguir.

Teorema 4.4: Raio de Convergência

O Intervalo de Convergência de uma Série de Potências centrada em a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

sempre será um intervalo centrado em a com raio R. Chamamos o número R de Raio de Convergência da Série de Potências e ele se enquadra em um dos casos:

$R = 0$ Convergência trivial, a série converge apenas em $x = a$;

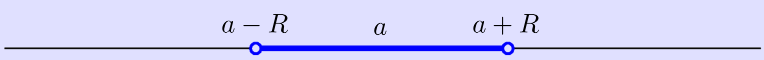
$R = \infty$ A série converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$;

$R > 0$ A série converge absolutamente para todo x satisfazendo

$$|x-a| < R$$

e diverge para todo x tal que

$$|x-a| > R\ .$$



Demonstração

Queremos mostrar que se não estivermos em um dos dois primeiros casos precisamos estar no terceiro, isso é, se o conjunto dos valores de x onde a série converge

$$\Omega = \left\{ \ x \in \mathbb{R} \ \ / \ \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ converge } \right\}$$

não for $\Omega = \{a\}$ nem $\Omega = \mathbb{R}$ ele precisa ser o intervalo

$$\Omega = [\, a-R, a+R \,]$$

para algum número finito R.

Como não estamos na situação em que a convergência ocorre para toda a reta, existe um ponto u onde a série diverge, Assim, pelo Teorema 4.2, temos que a série diverge para todo x tal que $|x-a| > d$, onde $d = |u-a|$. Concluímos então que Ω é um conjunto limitado

$$\Omega \subset [a - d, a + d] \,.$$

Como também não estamos na situação de convergência trivial, existe $x \in \Omega$ diferente de a. Tomamos então R como o menor número maior ou igual a $|x - a|$ para todo $x \in \Omega$, isso é, (veja a Definição A.1)

$$R = \sup_{x \in \Omega} |x - a| \,. \tag{4.2}$$

Como Ω é limitado e existe $x \neq a$ em Ω sabemos que $R > 0$ e é finito. Agora, vamos mostrar que a série converge para qualquer x tal que $|x - a| < R$. Como R é tal que a condição (4.2) vale, existe $u \in \Omega$ tal que

$$|x - a| < |u - a| \leq R$$

então, pelo Teorema 4.2, a série converge absolutamente em x. Por outro lado, se v é tal que

$$R < |v - a|$$

então a série tem que divergir em v, pois caso contrário $v \in \Omega$ o que contraria (4.2).

Usando o Teorema 4.2 ao identificarmos o intervalo onde a série converge absolutamente, $|x - a| < R$, sabemos automaticamente que a série diverge para $|x - a| > R$. Entretanto, o teorema não diz nada sobre os extremos do intervalo de convergência, $|x - a| = R$, precisamos analisar individualmente esses pontos. Para determinar R podemos usar os testes de convergência, em especial o Teste da Razão (Teorema 3.25) ou o Teste da Raiz (Teorema 3.26). Os próximos exemplos mostram como determinar o intervalo de convergência de algumas séries.

Exemplo 4.1.5:
Analise a convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$.

O termo geral dessa série é

$$a_n = \frac{(x-2)^n}{10^n}$$

então podemos aplicar o Teste da Raiz no módulo do termo geral, ou seja,

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(x-2)^n}{10^n}\right|} = \sqrt[n]{\left|\frac{x-2}{10}\right|^n} = \frac{|x-2|}{10} \to \frac{|x-2|}{10}$$

Então a série converge absolutamente desde que

$$\frac{|x-2|}{10} < 1$$

ou seja, converge pare $|x-2| < 10$ e diverge sempre que $|x-2| > 10$. Assim, o raio de convergência é $R = 10$.

Resta analisar o que ocorre nos extremos $x - 2 = \pm 10$. Se $x - 2 = 10$ temos a série

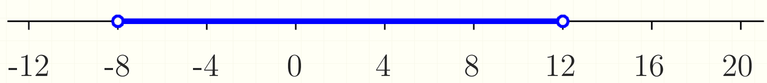
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

que diverge pelo Teste da Divergência. No caso $x - 2 = -10$, obtemos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

que também diverge pelo Teste da Divergência.

Em resumo a série converge absolutamente no intervalo $(-8, 12)$ e diverge em $(-\infty, -8] \cup [12, \infty)$. O gráfico a seguir ilustra os intervalo de convergência da série.



Código Python para ilustrar o raio de convergência das séries de potências.

Exemplo 4.1.6:
Analise a convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$.

Aplicando o Teste da Razão para encontrar o raio de convergência obtemos,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}\right| = \left|\frac{x}{(n+1)}\right| \to 0 \ .$$

Como o limite é menor do que 1 para qualquer valor de x concluímos que a série converge em toda a reta real, ou seja, o raio de convergência da série é $R=\infty$.

Exemplo 4.1.7:
Analise a convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|n^n x^n|$.

Aplicando o Teste da Raiz para a série obtemos, para todo $x \neq 0$, que

$$\sqrt[n]{|n^n x^n|} = n|x| \to \infty \ .$$

Então essa série de potências converge apenas em $x=0$, isto é, seu raio de convergência é $R=0$.

Resumindo, quando queremos testar a convergência de uma Série de Potências, normalmente empregamos os seguintes passos:

1. Usar o teste da razão, ou da raiz, para encontrar o intervalo onde a série converge absolutamente

$$|x-a| < R \qquad \text{ou} \qquad a-R < x < a+R$$

2. Se o intervalo de convergência absoluta for finito precisamos testar a convergência em cada extremo. Nesses pontos os testes da razão ou raiz provavelmente serão inconclusivos, portanto devemos usar o teste da comparação, integral ou série alternada.

Observe que se o intervalo de convergência absoluta for finito, $|x-a| < R$, podemos afirmar diretamente que a série diverge para $|x-a| > R$.

Exercícios Seção 4.1

1) [resp] Encontre o raio e o intervalo de convergência da série de potências.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^n x^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2 x^n}{2^n}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{n^3}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n x^n}{n\sqrt{n}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$

k) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{4^n\ln n}$

l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

n) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{2n+1}$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{n}}$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+1)^n}{4^n}$

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^n}$

r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{5^n\sqrt{n}}$

s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-a)^n}{b^n}\quad b>0$

t) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b^n(x-a)^n}{\ln n},\quad b>0$

u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n!(2x-1)^n$

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2n)}$

w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x-4)^n}{n^3}$

x) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}$

z) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}$

2) Encontre o raio e o intervalo de convergência da série de potências. Para quais valores de x a série converge absolutamente e para quais valores ela converge condicionalmente.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x+5)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x+1)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-2)^n}{n}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+2)^n}{n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n\sqrt{n}}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^{2n}}{n}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3 3^n}$

o) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

p) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{\sqrt{n}+3}$

q) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$

r) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}$

s) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n\sqrt{n}}{3^n}$

t) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}(2x+5)^n$

4.2 Operações com Séries de Potências

Apresentamos nessa seção alguns resultados que nos auxiliam a realizar operações em Séries de Potências. Começamos pela importante propriedade que nos permite derivar e integrar essas séries termo a termo. Se uma Série de Potências possui um raio de convergência $R > 0$, então a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

está definida no intervalo $(a-R, a+R)$ e é infinitamente derivável, isso é, tem as derivadas de todas as ordens, neste mesmo intervalo. Além disso, podemos calcular as derivadas ou integrais de f derivando ou integrando a série termo a termo como descrito nos próximos dois teoremas

Teorema 4.5: Derivação de Série de Potências Termo a Termo

Se o raio de convergência, R, não for nulo, podemos calcular a derivada da função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

derivando a série termo a termo dentro do intervalo $(a-R, a+R)$

$$f'(x) \;=\; \sum_{n=o}^{\infty} \frac{d}{dx}\big(c_n (x-a)^n\big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n\, (x-a)^{n-1}\,.$$

Essa série também converge em $(a-R, a+R)$.

Observe que o primeiro termo da série é uma constante, portanto quando derivamos a série ele desaparece e o índice da série para a derivada começa em um. Note também que podemos aplicar a derivação termo a termo repetidas vezes para calcular a k-ésima derivada de f

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \big(c_n (x-a)^n\big)^{(k)} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)\cdots\big(n-(k-1)\big)\, c_n\,(x-a)^{n-k}\,. \end{aligned}$$

Teorema 4.6: Integração de Série de Potências Termo a Termo

Se o raio de convergência, R, não for nulo, podemos calcular a primitiva da função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

integrando a série termo a termo dentro do intervalo $(a-R, a+R)$

$$\int f(x)\,dx \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n (x-a)^n dx \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

onde C é a constante de integração. Esta série também converge em $(a-R, a+R)$.

Esses teoremas, combinados com a fórmula que temos para a Série Geométrica, são úteis para encontrar a função que representa uma dada série, ou para encontrar uma série para uma dada função. Claro que isso só será possível quando operações de integração ou derivação nos dão ou uma série geométrica ou uma função que pode ser vista como limite de uma série geométrica. Os próximos exemplos ilustram essa aplicação.

Exemplo 4.2.1:
Encontre uma série de potências centrada em $x = 0$ para a função $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$.

Note que

$$\frac{d}{dx}\ln\left(1+x^2\right) = \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x}{1-(-x^2)}\,.$$

Comparando essa expressão com a fórmula da soma Série Geométrica com $r = -x^2$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n = \frac{1}{1-(-x^2)}$$

percebemos que, nos pontos onde a série converge,

$$\frac{d}{dx}\ln\left(1+x^2\right) = 2x\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,x^{2n+1}\,.$$

Integrando e simplificando temos

$$\ln\left(1+x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{n+1} + C$$

onde C é uma constante. Avaliando a série em $x = 0$ verificamos que $C = \ln(1) = 0$, portanto

$$\ln\left(1+x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{n+1}\,.$$

Note que provamos a validade dessa fórmula apenas para $x \in (-1{,}1)$, pois usamos o limite da Série Geométrica que converge apenas para valores de x tais que $|r| = \left|-x^2\right| < 1$ . . Porém, série que aparece na última equação converge no intervalo $[-1, 1]$, entretanto, neste momento só podemos afirmar que a igualdade vale para $x \in (-1, 1)$. Os casos $x = -1$ e $x = 1$ precisariam ser analisados separadamente.

No próximo exemplo faremos o caminho inverso do anterior, ou seja, começaremos com uma série e procuraremos uma função que represente essa série em algum intervalo.

Exemplo 4.2.2:
Encontre uma função $f(x)$ que represente a série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

em um intervalo contendo a origem.

Se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

podemos derivar f termo a termo

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n .$$

Rearranjando temos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-x^2\right)^{n-1} .$$

Comparando com uma Série Geométrica observamos que $a = 1$ e $r = -x^2$. Usando a fórmula para a soma da série temos que, para $x \in (-1, 1)$,

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} .$$

Veja que $f(0) = 0$, então integrando $f'(t)$ sobre $[0, x]$ e usando o Teorema Fundamental do Cálculo A.28, obtemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t)\,dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= \operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(0) \\ &= \operatorname{arctg}(x)\ . \end{aligned}$$

Note que só podemos garantir que a função $\operatorname{arctg}(x)$ representa a série no intervalo $(-1, 1)$, pois utilizamos o limite da Série Geométrica, que só converge neste intervalo. Observe ainda que podemos afirmar que essa série converge no extremo $x = 1$, usando o Teste de Leibniz 3.28. Entretanto, neste momento, não podemos afirmar que em $x = 1$ essa série converge para $\operatorname{arctg}(1)$.

Apresentamos a seguir algumas operações que podem ser realizadas em séries de potências dentro do seu intervalo de convergência.

Teorema 4.7: Multiplicação de Séries de Potências

Se as séries

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{e} \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

convergem absolutamente para $|x| < R$, e

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0\ ,$$

então

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = A(x)B(x) \qquad\qquad |x| < R\ ,$$

ou seja, podemos escrever

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \,.$$

Observe que esse resultado nos diz que o produto de duas séries de potencia convergentes também converge no mesmo intervalo. Porém, calcular os valores c_n pode ser uma tarefa extremamente complexa.

Podemos também fazer uma mudança de variáveis trocando x por uma função $f(x)$.

Teorema 4.8: Mudança de Variáveis em uma Série de Potências

Se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge absolutamente para $|x| < R$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \big(f(x)\big)^n$$

converge absolutamente desde que f seja uma função contínua e $|f(x)| < R$.

Exercícios Seção 4.2

1) Utilize o Teorema 4.8 para encontrar o intervalo de convergência da série. Encontre também a soma da série, como uma função de x, dentro do intervalo de convergência.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (e^x - 4)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{9^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^n$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n$

h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$

4.3 Séries de Taylor

Nessa seção definiremos as Séries de Taylor e mostraremos como calcular seus coeficientes. Um ponto importante é que construir uma série de Taylor para uma função não garante a convergência da série para essa função, a série pode, por exemplo, convergir para outra função. Essa questão será discutida na próxima seção. Apresentamos primeiro a definição dos Polinômios de Taylor que podem ser construídos para quaisquer funções que possuam o número necessário de derivadas no ponto a.

Definição 4.9: Polinômio de Taylor

Se uma função real f tem derivadas até ordem n em uma vizinhança de a, definimos o Polinômio de Taylor de f e ordem n centrado em a como

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Quando a função possuir derivadas de todas as ordens em a podemos definir sua Série de Taylor.

Definição 4.10: Série de Taylor

Dada uma função real f infinitamente derivável em uma vizinhança de a, sua Série de Taylor centrada em a, é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$
$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

A Série de Maclaurin é um caso particular da Série de Taylor.

Definição 4.11: Série de Maclaurin

A Série de Maclaurin é uma Série de Taylor centrada na origem, isso é, $a = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

Observe que estamos usando a notação de derivada zero $f^{(0)}$ para indicar a própria função f, isso é,

$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

Apresentamos como primeiro exemplo o cálculo da Série de Taylor da função e^x centrada na origem, isso é, sua Série de Maclaurin.

Exemplo 4.3.1:
Calcule a Série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$.

O primeiro passo é calcular as derivadas da função. Esse exemplo foi escolhido pela simplicidade em calcular as derivadas da função exponencial que têm sempre a mesma expressão

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k e^x}{dx^k} = e^x \ .$$

Como queremos a série centrada em $x = 0$, precisamos avaliar as derivadas nesse ponto

$$f^{(k)}(0) = e^0 = 1 \ .$$

Podemos agora calcular os coeficientes da Série de Taylor

$$c_0 = f(0) = 1 \ ,$$

$$c_1 = f'(0) = 1 \ ,$$

$$c_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = \frac{1}{2} \ ,$$

$$c_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{1}{6} \ .$$

Repetindo essas operações observamos que

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}\ .$$

Podemos agora construir a Série de Taylor da função exponencial

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \end{aligned}$$

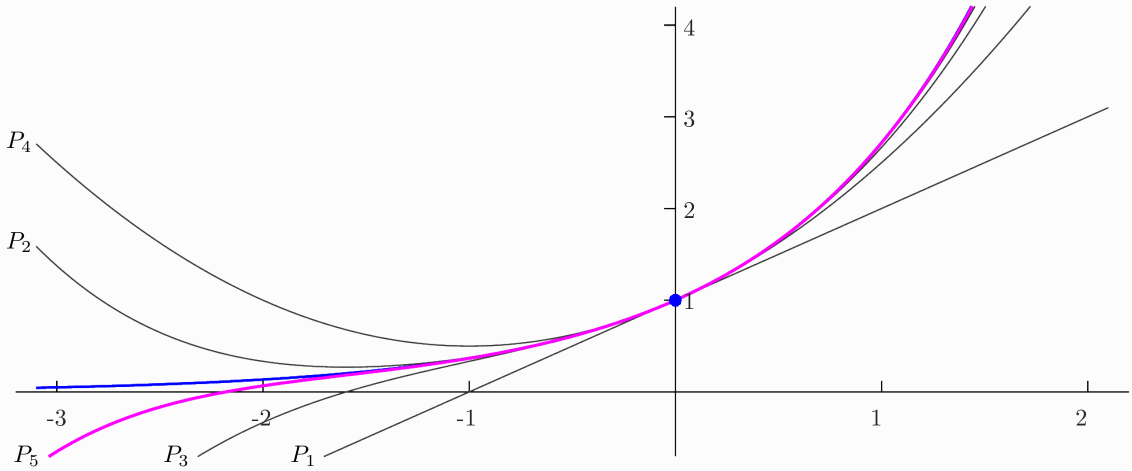


Figura 4.2: Comparação da função exponencial com seus polinômios de Taylor.

Ainda não podemos dizer que a série calculada nesse exemplo seja igual a função e^x. Entretanto ela aproxima muito bem a função como podemos ver na Figura 4.2, onde a função e^x está mostrada em azul. Nesse gráfico também estão as primeiras somas parciais da série, correspondentes aos Polinômio de Taylor com graus de 1 a 5. O gráfico em magenta exibe P_5, observe que a partir de $x = -1$ esse gráfico sobrepõe o da função exponencial.

Código Python para ilustrar algumas séries de Taylor.

Séries Binomiais

Vamos agora apresentar um caso particular de grande importância histórica e prática a Série Binomial. Começamos apresentando o Binômio de Newton que é a expansão de um binômio elevado a uma potência inteira, $(a-b)^m$, estamos interessados no caso particular

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k \qquad \forall\, m \in \mathbb{N} \tag{4.3}$$

onde

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \tag{4.4}$$

é o Número de Combinações de m elementos tomados k a k. Observe que, para qualquer m

$$\binom{m}{0} = 1 \,.$$

Podemos verificar a fórmula (4.3) calculando a Serie de Taylor da função

$$f(x) = (1+x)^m$$

onde m é um número inteiro positivo. Começamos calculando as derivadas de f em $x=0$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^m & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= m(1+x)^{m-1} & f'(0) &= m \\ f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2} & f''(0) &= m(m-1)\,. \end{aligned}$$

Repetindo o processo observamos que para todo k

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}$$

portanto

$$f^{(k)}(0) = m(m-1)\cdots(m-k+1)\ .$$

Note que para todo $k > m$ teremos que $f^{(k)}(0) = 0$. Dessa forma, a Série de Taylor de f centrada em zero é uma soma finita

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=1}^{m} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}\, x^k$$

onde os coeficientes são exatamente o número de combinações de m elementos tomados k a k. Assim, podemos escrever que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k \qquad\qquad m \in \mathbb{N}\ . \tag{4.5}$$

Como o somatório é finito temos apenas uma igualdade entre polinômios e podemos escrever que a soma é igual a função

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k \qquad\qquad m \in \mathbb{N}\ .$$

Queremos agora generalizar esse resultado para $m \in \mathbb{R}$. Essa generalização é a Série Binomial. Com m real as derivadas de f continuam com as mesmas expressões

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}$$
$$f^{(k)}(0) = m(m-1)\cdots(m-k+1)\ .$$

Porém, $f^{(k)}(0)$ deixa de ser zero para $k > m$. Isso transforma a soma (4.5) em uma série propriamente dita

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$$

onde

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \qquad\qquad m \in \mathbb{R}\ .$$

Observe que como m não é um inteiro positivo não podemos calcular seu fatorial. Outro ponto fundamental é que com infinitos termos na Série de Taylor não podemos afirmar que ela é igual a função sem verificar sua convergência. O próximo teorema conclui a generalização da equação (4.3) para todo m real, mostrando que a Série de Taylor de $f(x) = (1+x)^m$ converge para a função.

Teorema 4.12: Série Binomial

Para qualquer número $m \in \mathbb{R}$ e todo $x \in (-1,1)$, vale que

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$$

onde

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \,.$$

Demonstração

Vamos aplicar o Teste da Razão nos termos da série

$$a_k = \binom{m}{k} x^k = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k \,.$$

A razão entre os módulos dos termos é

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \left| \binom{m}{k+1} x^{k+1} \left[\binom{m}{k} x^k \right]^{-1} \right| \\
&= \left| \frac{m(m-1)\cdots(m-k)}{(k+1)!} \, \frac{k!}{m(m-1)\cdots(m-k+1)} \, \frac{x^{k+1}}{x^k} \right| \\
&= \frac{|m-k|}{k+1} |x| \,.
\end{aligned}$$

O limite dessa razão, quando $k \to \infty$, é igual a $|x|$. Então, a série converge absolutamente quando $|x| < 1$, ou seja, o intervalo de convergência é $(-1,1)$. Isso significa que nesse intervalo podemos definir a função

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k \,.$$

Nosso objetivo agora é mostrar que

$$h(x) = (1+x)^m$$

Para verificar essa igualdade, vamos usar uma expressão equivalente

$$g(x) = \frac{h(x)}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m}h(x) = 1$$

Avaliando g em zero temos

$$g(0) = (1+0)^{-m}h(0) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}0^k = \binom{m}{0}0^0 = 1\ .$$

Agora basta provar que g é uma função constante, ou seja, vamos mostrar que $g'(x) = 0$ para todo $x \in (-1,1)$. Calculando a derivada e igualando a zero temos

$$g'(x) = -m(1+x)^{-m-1}h(x) + (1+x)^{-m}h'(x) = 0\ .$$

Rearranjando a equação

$$\begin{aligned}
-m(1+x)^{-m-1}h(x) + (1+x)^{-m}h'(x) &= 0 \\
(1+x)^{-m}h'(x) &= m(1+x)^{-m-1}h(x) \\
(1+x)^{-m}(1+x)^{m+1}h'(x) &= mh(x) \\
(1+x)h'(x) &= mh(x)\ .
\end{aligned}$$

obtemos que $g'(x)$ será zero se

$$(1+x)h'(x) = mh(x)$$

Para demonstrar essa igualdade vamos partir da expressão do lado esquerdo e mostrar que ela é igual a do lado direito. Começamos por derivar a série $h(x)$ termo a termo

$$h'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}kx^{k-1}\ .$$

Podemos agora escrever

$$(1+x)h'(x) = h'(x) + xh'(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} k x^k \,.$$

Para somar as duas séries precisamos igualar o expoente de x, para isso alteramos o índice da primeira série

$$(1+x)h'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k+1} (k+1) x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} k x^k$$

Agora igualamos os índices das séries separando o termo $k = 0$ da primeira e agrupamos os somatórios

$$(1+x)h'(x) = m + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{m}{k+1} (k+1) + \binom{m}{k} k \right] x^k \,.$$

Vamos agora substituir as fórmulas para as combinações

$$\begin{aligned}(1+x)h'(x) = m + \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg[& \frac{m(m-1)\cdots(m-k)}{(k+1)!} (k+1) \\ & + \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} k \Bigg] x^k \,.\end{aligned}$$

Podemos agora simplificar os coeficientes de x^k e colocar em evidência a parte comum

$$\begin{aligned}(1+x)h'(x) = m + \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg[& \frac{m(m-1)\cdots(m-k)}{k!} \\ & + \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{(k-1)!} \Bigg] x^k \\ = m + \sum_{k=1}^{\infty} & \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{(k-1)!} \left[\frac{(m-k)}{k} + 1 \right] x^k \\ = m + \sum_{k=1}^{\infty} & \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{(k-1)!} \frac{m}{k} x^k \\ = m + \sum_{k=1}^{\infty} & \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} m x^k \,.\end{aligned}$$

Colocando a constante m em evidencia e notando que a fração é a expressão da combinação temos que

$$\begin{aligned}(1+x)h'(x) &= m + m\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k \\ &= m\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k\right] \\ &= m\left[\binom{m}{0}+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k\right] \\ &= m\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k \\ &= mh(x)\ .\end{aligned}$$

Isso mostra que, para $x \in (-1,1)$,

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k\ .$$

As Funções Potência, $f(x) = x^r$, são muito comuns em diversas áreas e aplicações da Matemática. Se o expoente r for um número inteiro elas também são fáceis para avaliar. Porém, em casos como

$$f(x) = x^{\sqrt{2}} \qquad f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad f(x) = x^{5/7}$$

precisamos aproximar o valor da função por seu Polinômio de Taylor. O próximo exemplo mostra como calcular a Série de Taylor para essas funções.

Exemplo 4.3.2:
Encontre a Série de Taylor da função $\sqrt[3]{x}$.

Primeiro escrevemos a função na forma binomial

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3} = \big(1+(x-1)\big)^{1/3} = (1+y)^{1/3}$$

onde $y = x - 1$. Usando o Teorema 4.12 podemos escrever

$$(1+y)^{1/3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/3}{k} y^k \qquad y \in (-1,1)\ .$$

Desfazendo a mudança de variáveis, concluímos que, para $x \in (0,2)$,

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/3}{k} (x-1)^k \\
&= \binom{1/3}{0}(x-1)^0 + \binom{1/3}{1}(x-1)^1 + \binom{1/3}{2}(x-1)^2 + \binom{1/3}{3}(x-1)^3 + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{3}(x-1) \\
&\quad + \frac{1/3\,(1/3-1)}{2}(x-1)^2 \\
&\quad + \frac{1/3\,(1/3-1)\,(1/3-2)}{3!}(x-1)^3 + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Exercícios Seção 4.3

1) [resp] Encontre a série de Maclaurin para $f(x)$, e o raio de convergência da série de potências.

a) $f(x) = (1-x)^{-2}$

b) $f(x) = \ln(1+x)$

c) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$

d) $f(x) = e^{-2x}$

e) $f(x) = 2^x$

f) $f(x) = x\cos(x)$

g) $f(x) = \operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

h) $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

2) [resp] Encontre a série de Taylor para $f(x)$ centrada em a, e o raio de convergência da série de potências.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1 \quad a = 1$

b) $f(x) = x - x^3 \quad a = -2$

c) $f(x) = \ln x \quad a = 2$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad a = -3$

e) $f(x) = e^{2x} \quad a = 3$

f) $f(x) = \operatorname{sen} x \quad a = \pi/2$

g) $f(x) = \cos x \quad a = \pi$

h) $f(x) = \sqrt{x} \quad a = 16$

3) Encontre os polinômios de Taylor de ordens 0, 1, 2 e 3 gerados por f em a.

a) $f(x) = e^{2x} \quad a = 0$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(x) \quad a = 0$

c) $f(x) = \ln(x)$ $\quad a = 1$

d) $f(x) = \ln(1+x)$ $\quad a = 0$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad a = 2$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ $\quad a = 0$

g) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ $\quad a = \pi/4$

h) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ $\quad a = \pi/4$

i) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad a = 4$

j) $f(x) = \sqrt{1-x}$ $\quad a = 0$

4) Encontre as Séries de Maclaurin das funções

a) $f(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = xe^{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{2+x}{1-x}$

e) $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$

f) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

g) $f(x) = 7\cos(-x)$

h) $f(x) = 5\cos(\pi x)$

i) $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

j) $f(x) = \operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

k) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x + 4$

l) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

5) Encontre as Séries de Taylor gerada por f centrada em a.

a) $f(x) = x^3 - 2x + 4$ $\quad a = 2$

b) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 8$ $\quad a = 1$

c) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ $\quad a = -2$

d) $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2$ $\quad a = -1$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad a = 1$

f) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^3}$ $\quad a = 0$

g) $f(x) = e^{x}$ $\quad a = 2$

h) $f(x) = 2^{x}$ $\quad a = 1$

i) $f(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\quad a = \dfrac{\pi}{4}$

j) $f(x) = \sqrt{x+1}$ $\quad a = 0$

6) Encontre os três primeiros termos diferentes de zero da Série de Maclaurin para cada função e determine os valores de x para os quais a série converge absolutamente.

a) $f(x) = \cos(x) - \dfrac{2}{1-x}$

b) $f(x) = \left(1 - x + x^2\right) e^{x}$

c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)\ \ln(1+x)$

d) $f(x) = x\operatorname{sen}^2(x)$

7) Aplique a série binomial com $m = -1$ e $x = -r$ para obter que se $|r| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

8) Use a série binomial para expandir a função f em uma série de potências.

a) $f(x) = \sqrt[4]{1-x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$

c) $f(x) = (2+x)^{-3}$

d) $f(x) = (1-x)^{2/3}$

9) Use uma tabela de séries de Maclaurin para construir as séries de Maclaurin para a função f.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$

b) $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

c) $f(x) = e^{x} + e^{2x}$

d) $f(x) = e^{x} + 2e^{-x}$

e) $f(x) = x\cos\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$

f) $f(x) = x^2\ln(1+x^3)$

g) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2+x}}$

i) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ Dica: $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

j) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} & x \neq 0 \\ 1/6 & x = 0 \end{cases}$

10) Encontre o polinômio de Taylor de terceiro grau 3 da função $f(x)$ centrado em a.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad a = 2$

b) $f(x) = x + e^{-x}$ $\quad a = 0$

c) $f(x) = \cos(x)$ $\quad a = \pi/2$

d) $f(x) = e^{-x}\operatorname{sen}(x)$ $\quad a = 0$

e) $f(x) = \ln x$ $\quad a = 1$

f) $f(x) = x\cos(x)$ $\quad a = 0$

g) $f(x) = xe^{-2x}$ $\quad a = 0$

h) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ $\quad a = 1$

11) Encontre a série de Maclaurin para f e determine seu raio de convergência.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

b) $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$

c) $f(x) = \ln(4-x)$

d) $f(x) = xe^{2x}$

e) $f(x) = \operatorname{sen}(x^4)$

f) $f(x) = 10^x$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{16-x}}$

h) $f(x) = (1-3x)^{-5}$

4.4 Convergência da Série de Taylor

Uma consequência da definição da Série de Taylor é que se uma função pode ser representada por uma Série de Potências essa série coincide com a Série de Taylor da função. Esse fato é apresentado com precisão pela proposição a seguir.

Proposição 4.13: Igualdade das Séries de Potências e Taylor

Se a função f for igual a uma Série de Potências, no intervalo de convergência da série,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

então os coeficientes da série são os coeficientes de Taylor

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Demonstração

A função f é infinitamente derivável, pois as séries de potências são infinitamente deriváveis em seu intervalo de convergência. Calculando a n-ésima derivada de

f, temos

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)c_k(x-a)^{k-n} \\ &= n!c_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)c_k(x-a)^{k-n} \end{aligned}$$

Avaliando a derivada em a temos

$$f^{(n)}(a) = n!c_n$$

Isolando c_n concluímos a demonstração

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

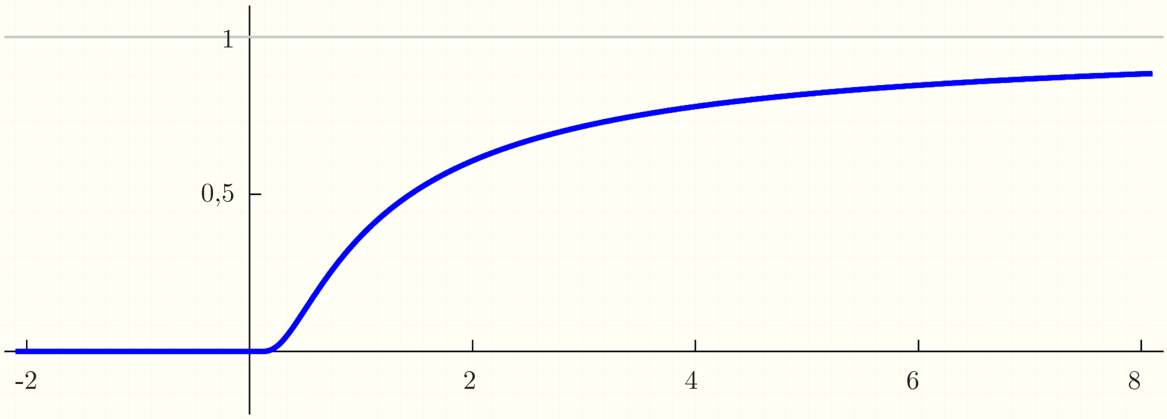
A utilidade dessa última proposição é limitada, pois precisamos saber de antemão que a função pode ser escrita como uma Série de Potências e essa verificação não é trivial. Por exemplo, existem funções infinitamente deriváveis, cujas séries de Taylor são convergentes mas não convergem para a função. O próximo exemplo apresenta uma dessas funções.

Exemplo 4.4.1:
Calcule a Série de Taylor centrada na origem, $a = 0$, da função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-1/x} & x > 0 \end{cases}$$

Calcule a soma da série e compare com a função.

Essa é uma função suave, infinitamente derivável, cujo gráfico está ilustrado na figura a seguir.



Primeiro calculamos as derivadas de f em zero. Como a função é definida com expressões diferentes de cada lado da origem precisamos calcular as derivadas de cada lado e verificar que ambas coincidem em $x = 0$.

Calcular as derivadas do lado esquerdo, $x < 0$, é trivial pois a função é constante e portanto todas as suas derivadas são nulas. Consequentemente, o limite na origem também é zero

$$\lim_{x \to 0^-} f^{(k)}(x) = 0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Do lado direito, $x > 0$, a função tem a forma $f(x) = e^{-1/x}$, calculando as primeiras derivadas obtemos

$$f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^4}(1 - 2x)$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^6}(6x^2 - 6x + 1)$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^8}(-24x^3 + 36x^2 - 12x + 1)$$

Observamos, sem demonstrar, que a n-ésima derivada será sempre a exponencial dividida por uma potência de x e multiplicada por um poliônimo. Ao calcularmos o limite $x \to 0^+$ o polinômio sempre produzirá um valor finito, enquanto

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^k} = 0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Concluímos que todas as derivadas de $f(x)$ são zero na origem. Assim todos os coeficientes da sua Série de Taylor são nulos e a soma da série é a função constante igual a zero, que, evidentemente, não é igual a f.

Uma função f cuja Série de Taylor converge para f é chamada de Função Analítica. Nosso objetivo aqui é poder determinar quais funções são analíticas.

O próximo exemplo mostra uma forma direta para demonstrarmos que a Série de Taylor de uma função coincide com a função. Ainda nessa seção apresentaremos o Teorema de Taylor que simplifica essa verificação.

EXEMPLO 4.4.2:
Seja $f(x) = \ln(x)$ encontre a série de Taylor de f centrada em $a = 1$. Encontre o intervalo onde a série converge absolutamente e mostre que neste intervalo a série coincide com f.

Note que

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) & f(1) &= 0 \\ f^{(1)}(x) &= x^{-1} & f^{(1)}(1) &= 1 \\ f^{(2)}(x) &= -x^{-2} & f^{(2)}(1) &= -1 \\ f^{(3)}(x) &= 2x^{-3} & f^{(3)}(1) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= -2 \cdot 3\, x^{-4} & f^{(4)}(1) &= -6\ . \end{aligned}$$

Podemos escrever, para todo $n \geq 1$, que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

portanto

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)! \qquad n \geq 1\ .$$

Então, a série de Taylor de $\ln(x)$ em $a = 1$ é dada por

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$= \frac{(-1)^0 f(1)}{0!}(x-1)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \,.$$

Para encontrarmos o raio de convergência da série vamos aplicar o Teste da Raiz, ou seja, vamos calcular o limite

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n\right|}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{|x-1|^n}{n}}$$

$$= \frac{|x-1|}{\sqrt[n]{n}}$$

$$\to |x-1|$$

onde usamos que $\sqrt[n]{n} \to 1$. Verificamos que o raio de convergência da série é $R = 1$, portanto a série converge absolutamente para x tal que $|x-1| < 1$, ou seja, para $x \in (0, 2)$. Poderíamos analisar os extremos desse intervalo, mas para identificar a série com a função f vamos precisar derivar a série termo a termo e esse procedimento só está garantido no intervalo aberto.

Derivando $T(x)$ temos

$$T'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{d}{dx} \frac{(x-1)^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^{n-1} \,.$$

Observe que essa última série é uma Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = 1 - x$. Como era de se esperar ela converge para $|r| = |1 - x| < 1$. Além disso, nesse intervalo sua soma é dada por

$$T'(x) = \frac{\alpha}{1-r} = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}\ .$$

Então, integrando $g'(t)$ sobre $[1, x]$ e usando que $g(1) = 0$, obtemos

$$T(x) = g(x) - g(1) = \int_1^x g'(t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln(x)\ .$$

Dessa forma, fica provado que, no intervalo $(0, 2)$, a função $\ln(x)$ coincide com sua Série de Taylor centrada em $x = 1$.

A Figura 4.3 mostra a função $\ln(x)$, em azul, e seus polinômios de Taylor de ordens 1, 2, 3 e 6, o último desses polinômios está desenhado em magenta. Observe que para x entre zero e dois os polinômios se aproximam da função logaritmo, porém a partir de $x = 2$ eles se afastam rapidamente.

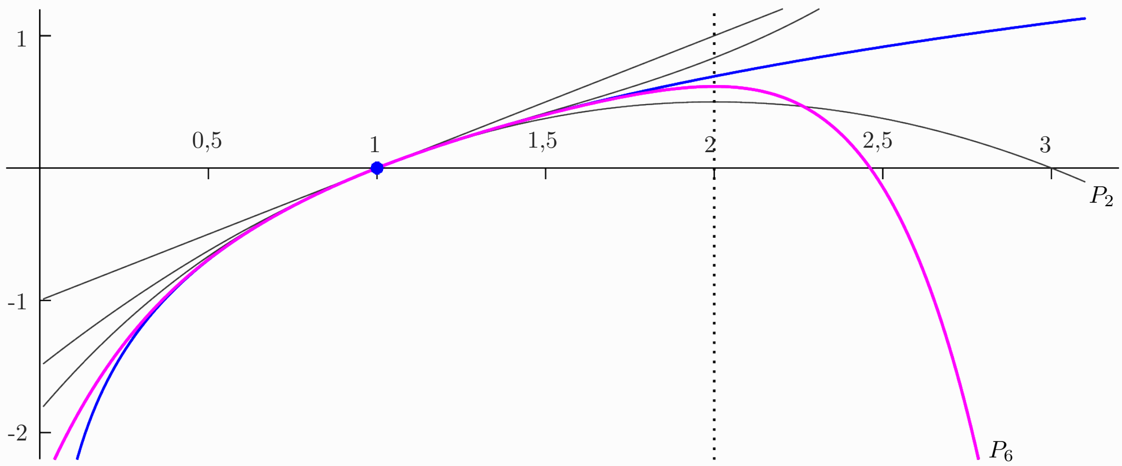


Figura 4.3: Comparação da função logaritmo com seus polinômios de Taylor.

O método usado no último exemplo funcionou bem para a função logaritmo, mas buscar uma estratégia especifica para cada função pode ser bastante complicado. Felizmente, o Teorema de Taylor fornece uma forma relativamente simples para verificar a convergência da série para uma classe muito grande de funções.

A ideia do teorema é que podemos escrever uma função f em uma vizinhança de $x = a$ como sendo o seu polinômio de Taylor de ordem n, $P_n(x)$, somado com o erro,

$R_n(x)$, ou seja,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) .$$

Se formos capazes de encontrar os valores de x para os quais $R_n(x)$ tende a zero quando o grau do polinômio vai para infinito, podemos concluir que f coincide com sua Série de Taylor nestes valores. Verificamos isso observando que

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \big(P_n(x) + R_n(x)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} P_n(x) + \lim_{n\to\infty} R_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} P_n(x) + 0 \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k . \end{aligned}$$

A importância do Teorema de Taylor está exatamente no fato que ele fornece uma fórmula para o resto $R_n(x)$.

Teorema 4.14: Teorema de Taylor

Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função que tem $n+1$ derivadas contínuas no intervalo aberto I, então para a, $x \in I$, podemos escrever que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

onde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para algum c entre a e x.

Demonstração

Dado um x fixo, que podemos considerar sem perda de generalidade menor do que a, definimos a constante K, de modo que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{K}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \,.$$

Precisamos mostrar que existe $c \in (x, a)$ tal que

$$K = f^{(n+1)}(c) \,.$$

Para isso definimos a função

$$\phi(y) = f(x) - \Bigg[f(y) + f'(y)(x-y) + \cdots + \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n + \frac{K}{(n+1)!}(x-y)^{n+1} \Bigg] \,.$$

Por construção essa função é tal que

$$\phi(a) = \phi(x) = 0 \,.$$

Então, pelo Teorema de Rolle A.22, existe $c \in (x, a)$ tal que $\phi'(c) = 0$. Calculando a derivada de $\phi(y)$ obtemos

$$\begin{aligned}\phi'(y) = -\Bigg[\; & f^{(1)}(y) \\ & + f^{(2)}(y)(x-y) - f^{(1)}(y) \\ & + \frac{f^{(3)}(y)}{2}(x-y)^2 - f^{(2)}(y)(x-y) \\ & + \cdots \\ & + \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - \frac{f^{(n)}(y)}{n!}n(x-y)^{n-1} \\ & - (n+1)\frac{K}{(n+1)!}(x-y)^n \Bigg] \,.\end{aligned}$$

Subtraindo os termos repetidos obtemos

$$\phi'(y) = -\left[\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - (n+1)\frac{K}{(n+1)!}(x-y)^n\right]$$

rearranjando podemos escrever

$$\phi'(y) = \left(K - f^{(n+1)}(y)\right)\frac{(x-y)^n}{n!}\ .$$

Avaliando essa derivada em c temos

$$\phi'(c) = \left(K - f^{(n+1)}(c)\right)\frac{(x-c)^n}{n!} = 0\ .$$

Como $c \in (x, a)$, ou seja, $c \neq x$, segue que

$$K = f^{(n+1)}(c)\ .$$

Para garantirmos que uma Série de Taylor converge para a sua função, podemos mostrar que a diferença entre as somas parciais, $P_n(x)$, e a função, f, tende à zero, para algum intervalo contendo a, quando o número de termos vai para infinito, isso é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0\ .$$

Porém, não existe uma forma sistemática para encontrar o valor correto para c, o que normalmente fazemos é analisar todos os valores possíveis e considerar o pior caso, o próximo resultado formaliza esse procedimento.

Proposição 4.15: Desigualdade de Taylor

Se para $|x-a| \leq d$ vale a desigualdade

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M\ .$$

Então o erro da Série de Taylor de f centrada em a satisfaz a Desigualdade de Taylor

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

para todo x tal que $|x-a| \leq d$.

O próximo exemplo ilustra como podemos verificar quando a Série de Taylor de uma função converge para a própria função.

Exemplo 4.4.3:
Mostre que a Série de Taylor da função exponencial converge para a função exponencial.

Vimos no Exemplo 4.3.1 que a Série de Taylor da função exponencial, e^x, centrada na origem, $a = 0$, é convergente para todo $x \in \mathbb{R}$ e tem a forma

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Vamos demonstrar agora que a série converge para a função, isso é,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \, .$$

Para qualquer valor $x \in \mathbb{R}$ tomamos d tal que $|x| \leq d$ temos então que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| = e^x \leq e^d \, .$$

Podemos agora usar a Desigualdade de Taylor 4.15 com $M = e^d$ obtendo

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} \, .$$

Calculamos o limite encontramos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \, .$$

Usando o Teorema do Confronto concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

e portanto a Série de Taylor converge para a função

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \, .$$

Temos agora os resultados necessários para demonstrar o cálculo da soma da Série do Inverso do Fatorial apresentada na Definição 3.8.

EXEMPLO 4.4.4:
Mostre que a soma da Série do Inverso do Fatorial é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e\,.$$

Basta observarmos que a Série do Inverso do Fatorial coincide com a Série de Taylor da função exponencial em $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = e^1 = e\,.$$

A seguir apresentamos mais um exemplo de como podemos verificar que a Série de Taylor converge para a sua função.

EXEMPLO 4.4.5:
Encontre a série de Taylor de $\cos(x)$ centrada em $x = {}^{\pi}\!/_{2}$. Mostre que essa série converge para $\cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Calculando as derivadas de $f(x) = \cos(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= -\operatorname{sen}(x) \\ f^{(2)}(x) &= -\cos(x) \\ f^{(3)}(x) &= \operatorname{sen}(x)\,. \end{aligned}$$

Repetindo o processo percebemos que

$$\begin{aligned} f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \quad \cos(x) \\ f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} \operatorname{sen}(x)\,. \end{aligned}$$

Calculando em ${}^{\pi}\!/_{2}$ temos

$$\begin{aligned} f^{(2n)}\left({}^{\pi}\!/_{2}\right) &= 0 \\ f^{(2n+1)}\left({}^{\pi}\!/_{2}\right) &= (-1)^{n+1}\,. \end{aligned}$$

Desse modo, a série de Taylor em $x = {}^{\pi}\!/_{2}$ é

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} .$$

Pelo teorema de Taylor, sabemos que existe $c \in ({}^{\pi}\!/_{2}, x)$, ou $c \in (x, {}^{\pi}\!/_{2})$, tal que

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} + R_{2k+1}(x)$$

onde

$$\begin{aligned} R_{2k+1}(x) &= \frac{f^{(2k+2)}(c)}{(2k+2)!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\cos(c)}{(2k+2)!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} . \end{aligned}$$

Como $|\cos(c)| \leq 1$, segue que, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$0 \;\leq\; |R_{2k+1}(x)| \;\leq\; \frac{|x - {}^{\pi}\!/_{2}|^{2k+2}}{(2k+2)!} \;\to\; 0 .$$

Assim, $R_{2k+1}(x) \to 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isso implica que

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

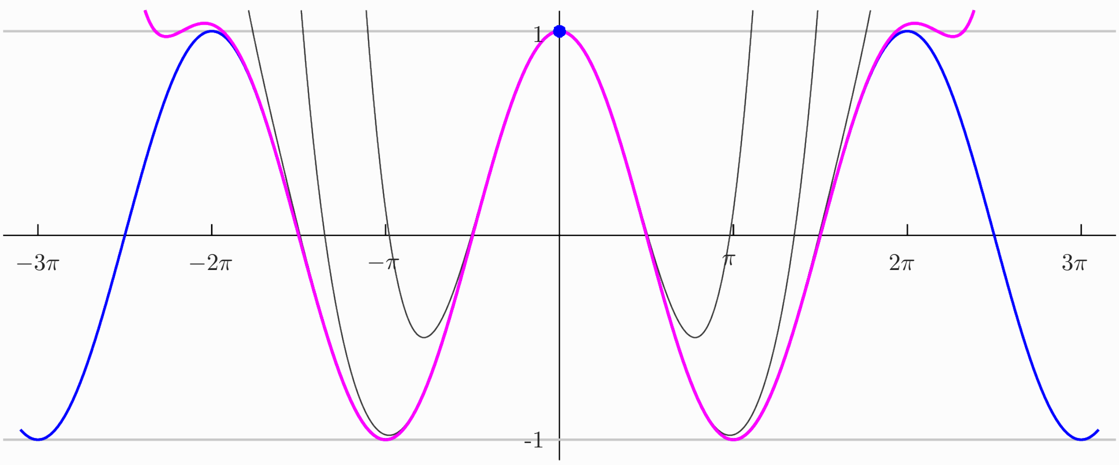


Figura 4.4: Comparação da função cosseno com seus polinômios de Taylor.

A Figura 4.4 mostra o gráfico do cosseno em azul e os polinômios de Taylor de graus

4, 8, 12 e 16, sendo que esse último destacado em magenta.

A Tabela 4.1 lista algumas séries de Maclaurin importantes e seus raios de convergência.

Tabela 4.1: Séries de Maclaurin

$\dfrac{1}{1-x}$	$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$R = 1$
e^x	$= \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$	$= 1 + \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$	$R = \infty$
$\operatorname{sen}(x)$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$= x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$	$R = \infty$
$\cos(x)$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$= 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$	$R = \infty$
$\operatorname{arctg}(x)$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	$= x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots$	$R = 1$
$\ln(x+1)$	$= \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$	$= x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$	$R = 1$
$(1+x)^k$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$	$= 1 + kx + \dfrac{k(k-1)}{2} x^2 + \cdots$	$R = 1$

Exercícios Seção 4.4

1) Encontre a série de Taylor de $\cos(x)$ centrada em $x = 0$, mostre que o $\cos(x)$ coincide com a série obtida para todo $x \in \mathbb{R}$.

2) Calcule a série de Maclaurin ou Taylor da função, determine seu raio de convergência e prove que a série converge para a função no intervalo de convergência.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ $\quad a = {}^{\pi}/_{2}$

c) $f(x) = \operatorname{senh}(x)$

d) $f(x) = \cosh(x)$

4.5 Aproximações por Polinômios de Taylor

Uma das principais aplicações das Séries de Taylor é calcular aproximações para uma função com o auxilio dos Polinômios de Taylor. Se a série converge temos a fórmula para o erro do Teorema de Taylor 4.14 para estimarmos o erro cometido ou determinarmos o número de termos necessários para garantir que o erro é menor do que a tolerância aceitável. Apresentamos a seguir alguns exemplos desse uso das Séries de Taylor.

Exemplo 4.5.1:
Escreva $\displaystyle\int_0^y e^{-x^2}dx$ como uma série de potências centrada em $x = 0$. Use a série obtida para encontrar uma aproximação para $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$ somando os quatro primeiros termos da série.

Primeiro vamos encontrar a série de Taylor de $f(x) = e^x$. Como a k-ésima derivada $f^{(k)}(x) = e^x$ e $e^0 = 1$, segue que

$$e^x = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} + R_k(x)\ .$$

Verificamos que $R_k(x) \to 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois $f^{(k)}(c) = e^c$ para todo k, ou seja, as derivadas são limitadas por $|e^c|$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ .$$

Seja $u(x) = -x^2$. Note que $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\ .$$

Dessa forma,

$$\int_0^y e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^y x^{2n}dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{y^{2n+1}}{2n+1} .$$

Usando a série obtida, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-x^2} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \\
&\approx \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!\,5} - \frac{1}{3!\,7} \\
&= \frac{26}{35} \\
&\approx 0{,}7429 .
\end{aligned}$$

No último exemplo encontramos uma aproximação para o valor de

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

entretanto não sabemos o erro cometido ao fazer essa aproximação. Como se trata de uma série alternada, podemos usar a Proposição 3.30 que nos dá uma estimativa superior para esse erro.

Exemplo 4.5.2:
Estimar o erro cometido na aproximação do exemplo anterior.

Vimos no último exemplo que

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.7429 .$$

Com o uso da Proposição 3.30 temos o seguinte limitante para o erro

$$R_3 \leq a_4 = \frac{(-1)^4}{4!(2 \cdot 4 + 1)} = \frac{1}{4!\,9} \approx 0{,}0046 .$$

Exemplo 4.5.3:
Aproxime o valor de $\sqrt[3]{3/2}$ usando Polinômio de Taylor de grau 3 da função $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$. Obtenha uma estimativa para o erro cometido.

Podemos construir a Série de Taylor para a função $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ utilizando a Série Binomial

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} x^n$$

onde

$$\binom{1/3}{0} = 1$$
$$\binom{1/3}{1} = \frac{1}{3}$$
$$\binom{1/3}{2} = \frac{1/3(1/3-1)}{2} = -\frac{1}{9}$$
$$\binom{1/3}{3} = \frac{1/3(1/3-1)(1/3-2)}{6} = \frac{5}{81}\,.$$

Assim

$$\sqrt[3]{1+x} \approx P_3(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}\,.$$

Tomando $x = 1/2$, temos

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{1+\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} + \frac{5}{648} \approx 1{,}1466\,.$$

Como a série é alternada podemos estimar o erro cometido por

$$R_3 \leq a_4 = \left|\binom{1/3}{4}\right| \left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0{,}0026\,.$$

A Figura 4.5 mostra o gráfico da função $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ e o Polinômio de Taylor P_3, assim como a aproximação de $f(1/2)$ por $P_3(1/2)$.

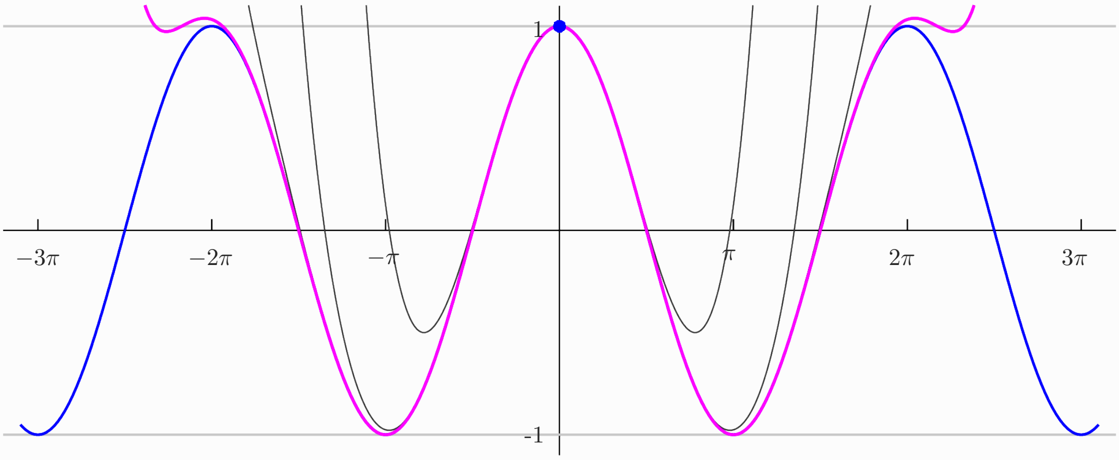


Figura 4.5: Comparação da raiz cúbica com seu polinômio de Taylor.

Exercícios Seção 4.5

1) [resp] Encontre o polinômio de Taylor de segundo grau da função $f(x)$ centrado em a. Use o Teorema de Taylor para estimar o erro no intervalo $\mathcal{I}$.

a) $f(x) = \sqrt{x}$

$a = 4 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 4 \leq x \leq 4{,}2\}$

b) $f(x) = x^{-2}$

$a = 1 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 0{,}9 \leq x \leq 1{,}1\}$

c) $f(x) = x^{2/3}$

$a = 1 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 0{,}8 \leq x \leq 1{,}2\}$

d) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

$a = \frac{\pi}{6} \qquad \mathcal{I} = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right\}$

e) $f(x) = \sec(x)$

$a = 0 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; -0{,}2 \leq x \leq 0{,}2\}$

f) $f(x) = \ln(1 + 2x)$

$a = 1 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 0{,}5 \leq x \leq 1{,}5\}$

g) $f(x) = e^{x^2}$

$a = 0 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 0 \leq x \leq 0{,}1\}$

h) $f(x) = x\ln(x)$

$a = 1 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 0{,}5 \leq x \leq 1{,}5\}$

i) $f(x) = x\operatorname{sen}(x)$

$a = 0 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; -1 \leq x \leq 1\}$

j) $f(x) = \operatorname{senh}(2x) = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$

$a = 0 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; -1 \leq x \leq 1\}$

2) Calcule a integral indefinida como uma série infinita.

a) $\displaystyle\int x\cos\left(x^3\right)\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{x}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\cos(x) - 1}{x}\, dx$

d) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(x^2)\, dx$

3) Use séries para aproximar a integral definida com erro menor do que a tolerância, ε, indicada. Dica: *Use a estimativa de erros das séries alternadas e uma calculadora.*

a) $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{arctg}(x)\, dx \qquad \varepsilon = 10^{-4}$

b) $\displaystyle\int_0^{1} \operatorname{sen}(x^4)\, dx \qquad \varepsilon = 10^{-4}$

c) $\displaystyle\int_0^{0{,}4} \sqrt{1 + x^4}\, dx \qquad \varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$

4) Encontre uma série cuja soma seja o valor da integral definida

$$\int_0^{0{,}5} x^2 e^{-x^2}\, dx$$

5) Use séries para calcular o limite.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(1 + x)}{x^2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{1+x-e^x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x + x^3/6}{x^5}$

4.6 Usos da Série de Taylor

Nessa seção apresentamos algumas exemplos de uso das Séries de Taylor para resolver problemas matemáticos.

4.6.1 Avaliando Integrais Não Elementares

Podemos utilizar as Séries de Taylor para calcular integrais de funções cuja integração seja muito complexa ou que a primitiva não pode ser expressa como uma combinação finita de funções elementares. Para ilustrar essa técnica vamos aplicá-la para uma função

Exemplo 4.6.1:
Calcule a Série de Taylor para a primitiva da função

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(x^2\right) .$$

Sabemos que a função seno é igual a sua Série de Taylor para todo número real, isso é, podemos escrever

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \cdots$$

Fazendo $\alpha = x^2$ temos

$$\operatorname{sen}\left(x^2\right) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots$$

Substituindo a função pela sua série dentro da integral e integrando termo a termo, obtemos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}\left(x^2\right)\,dx &= \int x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots\,dx\\ &= \int x^2\,dx - \int \frac{x^6}{3!}\,dx + \int \frac{x^{10}}{5!}\,dx - \int \frac{x^{14}}{7!}\,dx + \cdots\end{aligned}$$

$$= C + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \cdots$$

onde C é a constante de integração. Para escrevermos essa série em um somatório, colocamos x^3 em evidência e escrevemos as potências em termos de x^4

$$\int \operatorname{sen}\left(x^2\right)\, dx = x^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{x^4}{7 \cdot 3!} + \frac{x^8}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{12}}{15 \cdot 7!} + \cdots\right)$$

$$= x^3 \left(\frac{\left(-x^4\right)^0}{3} + \frac{(-x^4)^1}{7 \cdot 3!} + \frac{\left(-x^4\right)^2}{11 \cdot 5!} + \frac{\left(-x^4\right)^3}{15 \cdot 7!} + \cdots\right)$$

onde escolhemos $C = 0$ para simplificar as expressões. Precisamos agora identificar as sequências que constroem os valores necessários

k	$3 + 4k$	$1 + 2k$
0	3	1
1	7	3
2	11	5
3	15	7

Temos então que

$$\int \operatorname{sen}\left(x^2\right)\, dx = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-x^4\right)^k}{(3 + 4k)(1 + 2k)!} \,.$$

Note que continuamos sem uma expressão fechada e finita para a integral. Porém, mesmo a série sendo uma representação infinita, ela pode ser utilizada para aproximar o valor da integral em qualquer ponto com a precisão que desejarmos.

4.6.2 Avaliando Formas Indeterminadas

Outra operação que pode ser complexa é o cálculo de limites indeterminados, nesse caso a Série de Taylor também pode ajudar. Vamos ilustrar a técnica caculando o limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} \,.$$

Esse é um limite, com indeterminação do tipo $^0/_0$, onde podemos utilizar a regra de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{^1/_x}{1} = 1\,.$$

Entretanto, a Série de Taylor oferece uma forma alternativa para calcular esse limite que pode ser útil em outras situações.

Exemplo 4.6.2:
Calcule o limite $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

Primeiro obtemos a Série de Taylor da função $\ln(x)$ com centro em $a = 1$

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$$

a igualdade é verdadeira para todo x tal que $|x-1| < 1$. Agora substituímos o logaritmo pela sua série na função original

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{x-1}\left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots\right)\,.$$

Manipulamos os termos da série obtemos

$$\frac{\ln x}{x-1} = 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(x-1)^3}{4} + \cdots$$

Agora calculamos o limite desejado

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(x-1)^3}{4} + \cdots\right)$$

como todos os termos da série, com exceção do primeiro, vão para zero, quando $x \to 1$, temos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1\,.$$

4.6.3 Definição de Novas Funções

Podemos definir novas funções como a soma de uma Série de Taylor, essa é uma forma para definir as funções reais conhecidas para variáveis complexas, como ilustrado na próxima subseção, e também é como definimos várias funções especiais. Como exemplo vamos definir uma das Funções de Bessel, que são as soluções da equação de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \,. \tag{4.6}$$

Exemplo 4.6.3:
Exiba a Função de Bessel de Primeira Espécie de Ordem Zero, $J_0(x)$.

Essa função é uma solução da equação de Bessel (4.6) com $\alpha = 0$

$$\mathcal{L}[y] = x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \,.$$

Vamos buscar a solução com a forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,.$$

Calculando as derivadas de y obtemos

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} \,.$$

Substituindo na equação temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y] &= x^2y'' + xy' + x^2y \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \,.
\end{aligned}$$

Queremos agrupar todos os termos em um único somatório, para isso fazemos uma mudança de índice no último para igualar as potências de x

$$\mathcal{L}[y] = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \,.$$

Precisamos agora fazer o índice do segundo somatório começar em $n = 2$, conseguimos isso movendo o termo $n = 1$ para fora

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y] &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^n + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\ &= a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \big(a_n n(n-1) + a_n n + a_{n-2}\big) x^n \\ &= a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \big(a_n n^2 + a_{n-2}\big) x^n \,.\end{aligned}$$

Para que $\mathcal{L}[y] = 0$ precisamos que o coeficiente de cada potência de x seja zero. Ao analisarmos o coeficiente de x verificamos que

$$a_1 = 0 \,.$$

Para as demais potências, x^n, temos a condição

$$a_n n^2 + a_{n-2} = 0$$

que produz a relação de recorrência

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2} \,.$$

Usando essa relação e a condição $a_1 = 0$ concluímos que todos os coeficientes ímpares são nulos

$$a_n = 0 \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

Para encontrarmos os coeficientes pares fazemos $n = 2k$

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k)^2} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Observando que

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2^2} \\
a_4 &= -\frac{a_2}{4^2} = -\frac{1}{4^2}\left(-\frac{a_0}{2^2}\right) = \frac{a_0}{2^6} \\
a_6 &= -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{1}{6^2}\left(\frac{a_0}{2^6}\right) = -\frac{a_0}{2^6(3\cdot 2)^2} \\
a_8 &= -\frac{a_6}{8^2} = -\frac{1}{8^2}\left(-\frac{a_0}{2^6(3\cdot 2)^2}\right) = \frac{a_0}{2^8(4\cdot 3\cdot 2)^2}\,.
\end{aligned}
$$

Generalizando temos

$$
a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k!)^2}a_0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots
$$

Podemos agora escrever

$$
y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k!)^2}\, x^{2k}\,.
$$

A Função de Bessel de Primeira Espécie de Ordem Zero é definida como

$$
J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k!)^2}\, x^{2k}\,.
$$

Vamos agora analisar a convergência dessa série usando o Teste da Razão

$$
\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+2}}{2^{2k+2}\,((k+1)!)^2}\;\frac{2^{2k}\,(k!)^2}{(-1)^k x^{2k}}\right| = \frac{x^2}{2^2(k+1)^2}
$$

Quando $k \to \infty$ essa expressão vai para zero independentemente do valor de x, portanto a série converge para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

A Figura 4.6 a seguir mostra o gráfico da função $J_0(x)$ e alguns dos seus Polinômios de Taylor.

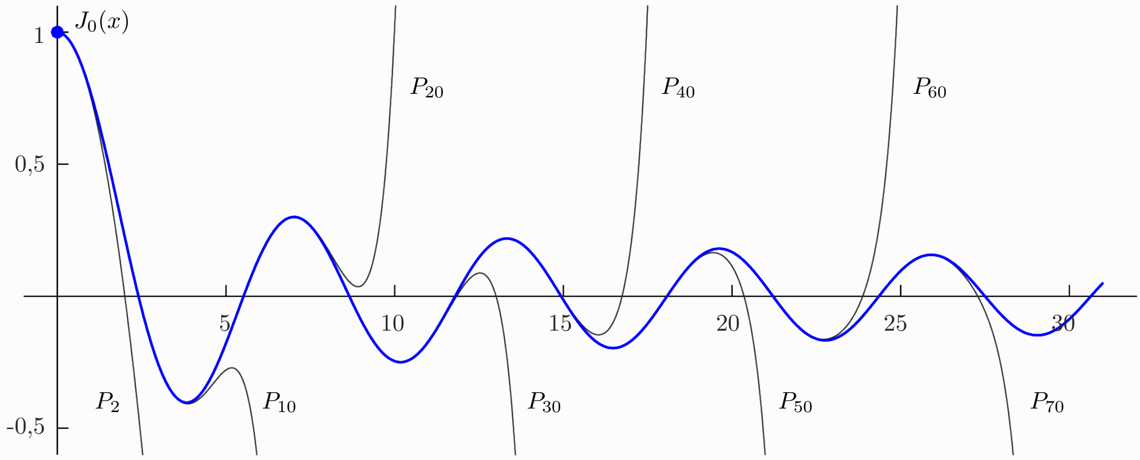


Figura 4.6: Comparação da função de Bessel com seus polinômios de Taylor.

4.6.4 Identidade de Euler

Com os devidos cuidados, os resultados sobre sequências e séries valem também para os números ou funções complexos. Vamos apresentar aqui a Identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta\ .$$

Na Seção A.6 apresentamos um resumo sobre os números complexos, aqui vamos utilizar que um número complexo pode ser escrito como

$$z = a + bi$$

onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária

$$i = \sqrt{-1}\ .$$

As operações de soma e produto com números complexos obedecem as mesmas propriedades conhecidas para os números reais. Aplicando essas propriedades podemos calcular as potências da unidade imaginária, por exemplo,

$$i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1, \qquad i^5 = i\ .$$

Vamos estender a definição das funções seno, cosseno e exponencial para variáveis complexas, isso é, queremos avaliar essas funções para qualquer valor complexo $z \in \mathbb{C}$. Fazemos isso substituindo o x real pelo z complexo nas Séries de Taylor dessas funções

$$\mathrm{sen}(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \cdots$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

Note que, estamos apresentando esse resultado sem a devida justificativa. Para sermos rigorosos precisamos verificar que todas as operações estão bem definidas e que as séries convergem, porém, essa analise foge ao escopo desse curso.

Para verificarmos a Identidade de Euler escrevemos Série de Taylor da exponencial de $z = i\theta$, com $\theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \cdots$$

Utilizando a propriedade de potências $(xy)^r = x^r y^r$ reescrevemos essa expressão como

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \cdots$$

Utilizando o cálculo das potencias de i obtemos

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

Nessa expressão, os termos com potências impares contém i e os termos com potências pares não. Vamos agrupar esses dois tipos de termos e colocar i em evidência

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) .$$

Os termos dentro do primeiro par de parênteses são os termos da Série de Taylor do cosseno e os termos dentro do segundo par de parênteses são a série do seno. Podemos, então, escrever a Identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta .$$

Uma consequência interessante dessa identidade é que podemos escrever uma relação envolvendo "Todas as Constantes da Matemática". Para isso basta escolher $\theta = \pi$

$$e^{i\pi} \;=\; \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi \;=\; -1 + i0 \;=\; -1$$

ou seja

$$e^{i\pi} + 1 = 0 .$$

4.6.5 Cálculo da Série de Taylor para o Arco Tangente

Vamos ilustrar uma forma alternativa para calcular a Série de Taylor da função $\operatorname{arctg}(x)$ para ilustrar algumas manipulações possíveis quando precisamos obter uma Série de Taylor. Vamos começar, como em outros casos, calculando as derivadas da função

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\operatorname{arctg}(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$
$$\frac{d^3}{dx^3}\operatorname{arctg}(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$
$$\frac{d^4}{dx^4}\operatorname{arctg}(x) = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}\ .$$

Não precisamos ir mais longe para perceber que esse não é um bom método, as expressões estão se tornando cada vez mais complexas, portanto, precisamos tentar outra abordagem.

Inicialmente, nesse desenvolvimento, não vamos nos preocupar com o rigor matemático para obter uma candidata a Série de Taylor, depois justificamos o processo utilizado demonstrando a convergência da série. Começamos observando que a derivada da função arco tangente é igual a soma de uma Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = -x^2$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{\alpha}{1-r} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Escrevemos então que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

integrando os dois lados temos a candidata a Série de Taylor para $\operatorname{arctg}(x)$

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

Temos uma Série de Taylor, porém, nossos cálculos não foram cuidadosos. Precisamos demonstrar que a série obtida converge para a função. Faremos isso voltando para a fórmula da soma da Série Geométrica

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1} x^{2(n+1)} + \cdots \tag{4.7}$$

Note que para qualquer n o resto dessa série, R_n, é uma Série Geométrica com $r = -x^2$ e $\alpha = (-1)^{n+1} x^{2(n+1)}$

$$R_n = (-1)^{n+1} x^{2(n+1)} + (-1)^{n+2} x^{2(n+2)} + (-1)^{n+3} x^{2(n+3)} + \cdots$$

Utilizando a fórmula da soma dos termos dessa série obtemos

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{1+x^2} \, .$$

Podemos então escrever a série em (4.7) como uma soma finita

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{1+x^2}$$

Temos agora uma expressão finita para a derivada da função arco tangente

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{1+x^2}$$

Por ser uma soma finita podemos integrar termo a termo sem preocupações com a convergência

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} u^{2(n+1)}}{1+u^2} \, du \, .$$

Estamos agora em uma situação similar ao Teorema de Taylor 4.14, onde podemos concluir que a série converge para a função se o erro

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} u^{2(n+1)}}{1+u^2} \, du$$

convergir para zero, quando $n \to \infty$.

Para garantirmos que R_n tende para zero, basta verificar que seu módulo tente a zero, ou seja, queremos calcular o limite de

$$|R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} u^{2(n+1)}}{1+u^2} \, du \right|$$

$$= \int_0^{|x|} \left| \frac{(-1)^{n+1} u^{2(n+1)}}{1+u^2} \right| du$$

$$= \int_0^{|x|} \frac{u^{2(n+1)}}{1+u^2}\, du$$

quando $n \to \infty$. Como $1 + u^2 \geq 1$ temos que

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} u^{2(n+1)}\, du = \left. \frac{u^{2n+3}}{2n+3} \right|_0^{|x|} = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} .$$

Portanto, para todo $|x| \leq 1$ sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

e podemos concluir que, para todo $x \in [-1, 1]$ a Série de Taylor da função arco tangente converge para a função

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

4.6.6 Problema de Basileia

O Problema de Basileia consiste em encontrar a soma da Série de Inversos do Quadrado, apresentada na Definição 3.7,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

A solução desse problema obtida por Euler em 1735 o tornou conhecido na comunidade Matemática da época e é de grande importância por estar relacionada ao estuda da Função Zeta de Riemann, $\zeta(z)$, pois

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} .$$

Entre as aplicações desse resultado está o cálculo da probabilidade de dois números escolhidos ao acaso serem primos entre si. A verificação dos cálculos realizados por Euler usa a decomposição do seno em um produto infinito que depende no Teorema de Fatoração de Weierstrass para funções holomorfas em todo o plano complexo, evidentemente além do escopo dessa disciplina. Dessa forma, vamos apresentar apenas os passos principais desse desenvolvimento e em seguida apresentamos uma demonstração publicada por T. M. Apostol [1] em 1983 que envolve operações mais simples.

O desenvolvimento dos cálculos de Euler começa com a Série de Taylor da função seno

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

dividindo ambos os lados por x temos

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Usando o Teorema de Fatoração de Weierstrass nessa função, podemos escrever

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

Igualando a Série de Taylor da função com sua fatoração temos

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \tag{4.8}$$

Como essa igualdade é válida sabemos que o coeficiente de cada potência de x é igual nas duas expressões. Extraímos diretamente o coeficiente de x^2 da Série de Taylor obtendo

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}\,.$$

Multiplicando os termos do produto e coletando apenas os coeficientes de x^2 temos

$$-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots\right) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

Igualando os coeficientes temos que

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

Isolando a série chegamos ao resultado desejado

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \, .$$

Apresentamos agora a demostração alternativa proposta por Apostol, que se baseia na avaliação da integral

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy} \, dx dy \, .$$

O primeiro passo é verificar que essa integral é igual a $\zeta(2)$. Note que a fração é a soma da Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = xy$, como os valores de x e y na integral estão entre zero e um podemos escrever

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy} \, dx dy \; = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n y^n \, dx dy \, .$$

Como essa série é absolutamente convergente podemos trocar a ordem da soma com a integração

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n \, dx dy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{y^n}{n+1} \, dy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \zeta(2) \, . \end{aligned}$$

A segunda parte consiste em calcular a integral e mostrar que

$$I = \frac{\pi^2}{6} \, .$$

Aplicamos uma mudança de variáveis rotacionando os eixos 45° no sentido horário

$$x = \frac{u - v}{\sqrt{2}} \qquad\qquad y = \frac{u + v}{\sqrt{2}}$$

de modo que

$$\frac{1}{1-xy} = \frac{2}{2-u^2+v^2}$$

e a nova região de integração seja o quadrado, Ω, com vértices opostos em $(0,0)$ e $\left(\sqrt{2},0\right)$. O Jacobiano dessa transformação é

$$J = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{-1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = 1\ .$$

Assim a integral assume a forma

$$I = \iint_\Omega \frac{2}{2-u^2+v^2}\, dudv\ .$$

Usando a simetria de reflexão do quadrado em relação ao eixo u podemos escrever a integral como

$$I = 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_0^u \frac{1}{2-u^2+v^2}\, dvdu + 4\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{1}{2-u^2+v^2}\, dvdu\ .$$

Usando

$$\int_0^x \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$$

temos que

$$\int_0^u \frac{dv}{2-u^2+v^2} = \frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right)\ ,$$

$$\int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{dv}{2-u^2+v^2} = \frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right)\ .$$

Voltando para o cálculo de I fazemos $I = I_1 + I_2$ onde

$$I_1 = 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right)\frac{du}{\sqrt{2-u^2}}$$

$$I_2 = 4\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right)\frac{du}{\sqrt{2-u^2}}$$

Para calcularmos I_1 usamos a transformação

$$u = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,(\theta) \qquad\qquad du = \sqrt{2}\cos(\theta)\; d\theta = \sqrt{2-u^2}\, d\theta$$

que produz

$$\begin{aligned} I_1 &= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,(\theta)}{\sqrt{2}\cos(\theta)}\right) d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta\, d\theta = 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{2\pi^2}{6^2}\ . \end{aligned}$$

Para I_2 usamos $u = \sqrt{2}\cos(2\theta)$ que produz

$$\begin{aligned} du &= -2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,(2\theta)\; d\theta \\ &= -2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2(2\theta)}\; d\theta \\ &= -2\sqrt{2}\sqrt{1-{}^{u^2}\!/_2}\; d\theta \\ &= -2\sqrt{2-u^2}\; d\theta \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} &= \frac{\sqrt{2}(1-\cos(2\theta))}{\sqrt{2-2\cos^2(2\theta)}} \\ &= \sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{1+\cos(2\theta)}} \\ &= \sqrt{\frac{2\,\mathrm{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} \\ &= \mathrm{tg}(\theta)\ . \end{aligned}$$

Temos então

$$I_2 = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{0} \mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}(\theta))\,(-2)\, d\theta \;=\; 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta\, d\theta \;=\; 4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \;=\; \frac{4\pi^2}{6^2}\ .$$

Calculando I temos

$$I = I_1 + I_2 = \frac{2\pi^2}{6^2} + \frac{4\pi^2}{6^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

o que conclui nossa demostração.

4.7 Revisão

1) [resp] Para cada função abaixo, apresente sua série de Taylor com o centro indicado. Apresente também o raio de convergência das séries.

a) $q(x) = \dfrac{1}{5-x}$, centrada em 4

b) $E(x) = \displaystyle\int e^{-x^2}\,dx$, centrada em 0

c) $d(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, centrada em 0

2) [resp] Considere a função

$$\begin{aligned} L(x) &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \end{aligned}$$

para $|x| < 1$ Ela é utilizada para obter séries numéricas que aproximam os valores de $\ln 2$ e $\ln 3$. Nessa questão vamos explorar essa utilização.

a) Obtenha os valores de x para os quais $L(x) = \ln 2$ e $L(x) = \ln 3$.

b) Obtenha uma série de potências para L centrada em zero, explicitando seu raio de convergência.

c) Com base nos itens anteriores, apresente séries numéricas que convergem para $\ln 2$ e $\ln 3$

3) Seja $f(x) = \ln(x)$.

a) Mostre que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$$

para $x \in (0{,}2)$

b) Mostre que a série no item anterior converge absolutamente em $x \in (0{,}2)$. Analise se a série converge nos extremos $x = 0$ e $x = 2$. É possível afirmar que a série diverge em $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$?

c) Some os quatro primeiros termos da série do item (a) para encontrar uma aproximação para o valor de $\ln(3/2)$. Estime o erro cometido.

4) Seja $f(x) = \dfrac{2}{1-x}$

a) Encontre um padrão para $f^{(n)}(x)$ e use isso para construir a série de Taylor de f centrada em $x = -1$.

b) Mostre que $f(x) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{x+1}{2}}$

c) Tomando $r = \dfrac{x+1}{2}$, para quais valores de x a função f pode ser vista como o limite da série geométrica $\sum r^n$?

d) Use os itens (a) e (b) para concluir que $R_n(x) \to 0$ se $x \in (-3, 1)$, onde $R_n(x)$ é o resto dado pelo teorema de Taylor.

5) Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(5x-5)^n}{n5^n}$$

a) Qual o centro a da série?

b) Qual o raio de convergência?

c) Qual o intervalo de convergência da série?

d) Encontre uma função $f(x)$ que coincide com a série no interior do intervalo de convergência.

6) Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

a) Encontre o intervalo de convergência da série.

b) Encontre uma função f tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

no interior do intervalo de convergência.

7) Seja $f(x) = e^x$

a) Encontre a série de Taylor de f centrada em $x = 0$ e mostre que f coincide com a série em todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Escreva

$$\int_0^y f(-x^3)\,dx = \int_0^y e^{-x^3}\,dx$$

como uma série de potências centrada em $y = 0$.

c) Calcule uma aproximação para

$$\int_0^{1/2} f(-x^3)\,dx$$

fazendo a soma dos três primeiros termos da série obtida no item anterior.

d) Estime o erro cometido na aproximação do item anterior.

8) Seja $f(x) = \cos(x)$.

a) Encontre um padrão para $f^{(n)}(x)$ e use isso para encontrar a série de Taylor de f centrada em $x = 0$. Mostre que $f(x)$ coincide com sua série de Taylor para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Escreva

$$\int_0^x \cos(t^2)\,dt$$

como uma série de potências centrada em $x = 0$.

c) Encontre uma aproximação para

$$\int_0^1 \cos(t^2)\,dt$$

somando até o terceiro termo da série obtida no item anterior. Estime o erro cometido.

5

Séries de Fourier

5.1 Introdução . . . 181
5.2 Funções Senoidais . . . 182
5.3 Séries de Fourier . . . 190
5.4 Convergência da Série de Fourier . . . 205
5.5 Série de Fourier de Funções Pares e Ímpares . . . 211
5.6 Fenômeno de Gibbs . . . 223
5.7 Revisão . . . 225

5.1 Introdução

Nesse capítulo apresentamos a Série de Fourier, que tem como característica decompor funções periódicas em suas frequências constituintes. Começamos com um estudo sobre as funções senoidais na Seção 5.2, depois definimos a Série de Fourier na Seção 5.3 e discutimos sua convergência na Seção 5.4. A Seção 5.5 mostra como podemos tirar proveito da simetria de algumas funções para simplificar os cálculos dos coeficientes de Fourier. Por fim a Seção 5.6 discute uma característica particular das somas parciais da Série de Fourier, conhecida como Fenômeno de Gibbs. Usamos esse fenômeno para discutir mais alguns detalhes importantes da aproximação de funções pela sua Série de Fourier.

5.2 Funções Senoidais

No estudo das Séries de Fourier vamos decompor funções periódicas em suas frequências constituintes, para isso precisamos ter um entendimento claro do significado de alguns termos. Vamos começar apresentando o conceito de Senoide ou Função senoidal, essas são funções que possuem a mesma forma de uma função seno, podemos representar essas funções de diversas formas, por exemplo

$$f(t) = a\cos(\,2\pi\omega t\,) + b\,\mathrm{sen}(\,2\pi\omega t\,)\ .$$

Essa função representa uma oscilação suave que se repete com Frequência ω. A multiplicação por 2π serve para ajustar as unidades, com esse ajuste se t representar o tempo medido em segundos, a frequência, ω, será medida em hertz. Sem esse fator ω representaria uma frequência angular.

As funções senoidais podem ser escritas alternativamente como

$$f(t) = A\cos(\,2\pi\omega t + \varphi\,)$$

essa forma tem a vantagem de explicitar a Amplitude, A, e a Fase, φ, da senoide. Podemos transformar esta expressão na anterior usando as relações entre os coeficientes

$$a = A\cos(\varphi) \qquad b = -A\,\mathrm{sen}(\varphi)\ .$$

Assim como, podemos fazer a transformação inversa

$$A = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right)\ .$$

Exemplo 5.2.1:
Mostre que as expressões

$$f(t) = a\cos(\,2\pi\omega t\,) + b\,\mathrm{sen}(\,2\pi\omega t\,)$$
$$g(t) = A\cos(\,2\pi\omega t + \varphi\,)$$

são equivalentes.

Vamos partir da segunda expressão e mostrar que ela é igual a primeira

$$\begin{aligned} g(t) &= A\cos(2\pi\omega t + \varphi) \\ &= A\big(\cos(2\pi\omega t)\cos(\varphi) - \operatorname{sen}(2\pi\omega t)\operatorname{sen}(\varphi)\big) \\ &= A\cos(\varphi)\cos(2\pi\omega t) - A\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(2\pi\omega t)\ . \end{aligned}$$

Fazendo

$$a = A\cos(\varphi) \qquad\qquad b = -A\operatorname{sen}(\varphi)$$

concluímos que

$$g(t) = a\cos(2\pi\omega t) + b\operatorname{sen}(2\pi\omega t) = f(t)\ .$$

Exemplo 5.2.2:
Mostre que $\operatorname{sen}(2\pi\omega t) = \cos\left(2\pi\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Começamos pela expressão do lado direto e obtemos o seno

$$\begin{aligned} \cos\left(2\pi\omega t + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(2\pi\omega t)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(2\pi\omega t)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \operatorname{sen}(2\pi\omega t)\ . \end{aligned}$$

A Figura 5.1 compara algumas funções senoidais. No gráfico (a) está a função $\cos(2\pi t)$ que possui amplitude $A = 1$, frequência $\omega = 1$ e fase $\varphi = 0$. Em (b) está a função $\cos(2\pi 3t)$ com frequência $\omega = 3$, note que o gráfico indica o Período T da senoide que é igual ao inverso da frequência

$$T = \frac{1}{\omega}\ .$$

Em (c) temos $2\cos(2\pi t)$ com amplitude $A = 2$ enquanto que (d) exibe $\cos(2\pi t + {}^{2\pi}/_{3})$ com fase $\varphi = {}^{2\pi}/_{3}$.

Outra forma para representar funções senoidais é empregando a exponencial complexa e a Identidade de Euler,

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\operatorname{sen}(\omega t)\ .$$

Porém, apesar de possuir a mesma frequência, essa não é a mesma função, visto que

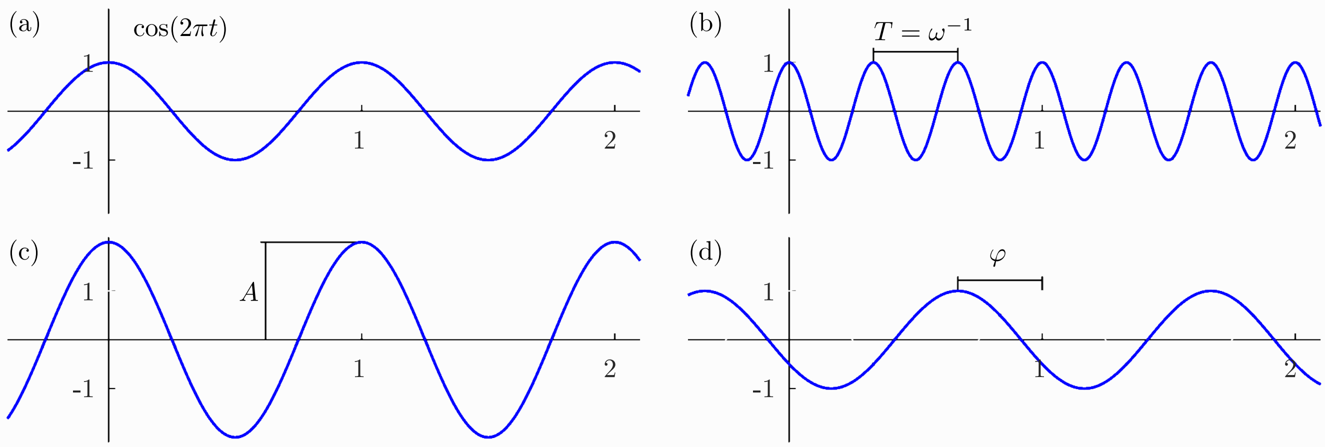


Figura 5.1: Comparação de Funções Senoidais

possui partes real e imaginária. Essa representação possui algumas vantagens, mas vamos postergar seu uso até o capítulo sobre a Transformada de Fourier.

Neste capítulo vamos representar as funções senoidais como a soma de um seno e um cosseno, pois dessa forma podemos utilizar as propriedades de ortogonalidade dessas funções.

Definição 5.1: Função Senoidal

Uma Função Senoidal f, de frequência ω, é uma função da forma

$$f(t) = a\cos(\,2\pi\omega t\,) + b\,\mathrm{sen}(\,2\pi\omega t\,) \tag{5.1}$$

onde a, b e ω são constantes reais.

Código Python para ilustrar as funções senoidais.

A proposição a seguir resume algumas relações que foram descritas nessa seção.

Proposição 5.2: Amplitude, Fase e Período

Dada uma função senoidal de Frequência ω

$$f(t) = a\cos(\,2\pi\omega t\,) + b\,\mathrm{sen}(\,2\pi\omega t\,)$$

podemos calcular suas características com as fórmulas

Amplitude $A = \sqrt{a^2 + b^2}$

Fase $\varphi = \text{arctg}\left(\frac{-b}{a}\right)$

Período $T = \frac{1}{\omega}$.

A propriedade de ser periódica não se restringe apenas às senoidais A definição a seguir generaliza o conceito de periodicidade de forma que podemos usá-lo para verificar se uma função qualquer é periódica ou não.

Definição 5.3: Funções Periódicas

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período $T > 0$ se

$$f(x + T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Observe que uma função que possui período T também possui período kT, com $k = 1, 2, \ldots$ O menor valor que é um período de f é chamado de Período Fundamental de f.

A proposição a seguir lista algumas propriedades de funções periódicas.

Proposição 5.4: Propriedades das Funções Periódicas

Sejam f e g funções periódicas de período T, então o produto

$$h(x) = f(x)g(x)$$

é periódico de período T.

Sejam f_k funções periódicas de período T, então a combinação linear

$$h(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k(x)$$

é periódica de período T. A série de funções

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(x)$$

se for convergente, é periódica de período T.

Demonstração

Podemos demonstrar essas propriedades por substituição

$$h(x+T) = f(x+T)g(x+T) = f(x)g(x) = h(x)$$

portanto $h(x+T) = h(x)$. De modo similar

$$h(x+T) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k(x+T) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k(x) = h(x)$$

portanto $h(x+T) = h(x)$.

A Função Constante $f(x) = c$ é periódica para qualquer período, pois, para qualquer número T temos

$$f(x+T) = c = f(x)\ .$$

No estudo das Séries de Fourier estaremos interessados em senoides que possuem um período específico. Precisamos, então, determinar quais são as funções trigonométricas com período T. Por simplicidade escolhermos trabalhar no intervalo de comprimento T centrado em zero, isso é, o intervalo $[-L, L]$ onde $L = {}^{T}\!/_{2}$. Temos que impor as condições

$$\begin{aligned} \cos(\alpha L) &= \cos(-\alpha L)\,, \\ \operatorname{sen}(\alpha L) &= \operatorname{sen}(-\alpha L)\,, \end{aligned}$$

que correspondem a

$$\begin{aligned} \cos(\alpha L) &= \quad \cos(\alpha L)\,, \\ \operatorname{sen}(\alpha L) &= -\operatorname{sen}(\alpha L)\,. \end{aligned}$$

O cosseno não impõe nenhuma restrição, mas o seno precisa ser zero, $\operatorname{sen}(\alpha L) = 0\,,$

isso será verdade quando

$$\alpha L = n\pi \qquad\qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Isolando α temos

$$\alpha = \frac{n\pi}{L} \qquad\qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Concluímos que as funções trigonométricas com período T são

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Comparando os parâmetros dessas funções com a Definição das Funções Senoidais 5.1 podemos explicitar o valor da frequência para cada n

$$\begin{aligned} 2\pi\omega &= \frac{n\pi}{L} \\ \omega &= \frac{n}{2L} \end{aligned}$$

consequentemente o período fundamental será

$$T = \omega^{-1} = \frac{2L}{m} .$$

Código Python para ilustrar as funções seno e cosseno.

A próxima propriedade que queremos analisar é a ortogonalidade dessas funções. Nesse momento estamos pensando no conjunto das funções reais como um Espaço Vetorial, como definido em Álgebra Linear, onde cada função é pensada como um vetor e as funções seno e cosseno são linearmente independentes e compõem uma base ortogonal para o espaço. A Seção A.7 apresenta um resumo dos resultados da Álgebra Linear que serão utilizados aqui.

Para quem ainda não estudou Álgebra Linear a propriedade que realmente precisamos é que quando integramos funções seno e cosseno com frequências diferentes o resultado é zero. A próxima definição e a proposição seguinte apresentam essa propriedade com clareza.

Definição 5.5: Funções Ortogonais

Duas funções reais u e v são ortogonais em um intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ se a integral abaixo está bem definida e vale zero

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x)\, v(x)\, dx = 0 \, .$$

Com a escolha adequada do intervalo e das frequências as funções seno e cosseno são funções ortogonais entre si.

Proposição 5.6: Ortogonalidade das Funções Trigonométricas

As funções

$$\cos\left(\frac{m\pi}{L}\,x\right) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}\,x\right)$$

com $m = 1, 2, \ldots$, formam um conjunto ortogonal no intervalo $-L \leq x \leq L$, isso é

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi}{L}\,x\right)\, \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)\, dx \;=\; 0 \quad \text{para todo } m, n$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi}{L}\,x\right)\, \cos\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)\, dx \;=\; \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ L, & \text{se } n = m \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}\,x\right)\, \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)\, dx \;=\; \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ L, & \text{se } n = m \end{cases}$$

Demonstração

Vamos demonstrar aqui a relação de ortogonalidade entre as funções cosseno. As demonstrações das demais relações são análogas.

Para avaliar as integrais vamos usar o fato que

$$2\cos(\theta)\cos(\phi) = \cos(\theta+\phi) + \cos(\theta-\phi)\ .$$

No caso $m = n$ temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx \\
&\qquad = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{(m+n)\pi}{L}x\right) + \cos\left(\frac{(m-n)\pi}{L}x\right)\,dx \\
&\qquad = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{2m\pi}{L}x\right) + \cos(0)\,\,dx \\
&\qquad = \frac{1}{2}\left[\frac{L}{2m\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{L}x\right) + x\right]\Bigg|_{-L}^{L} \\
&\qquad = \frac{1}{2}(L-(-L)) \\
&\qquad = L\ .
\end{aligned}$$

No caso $m \neq n$ temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx \\
&\qquad = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{(m+n)\pi}{L}x\right) + \cos\left(\frac{(m-n)\pi}{L}x\right)\,dx \\
&\qquad = \frac{L}{2\pi}\left[\frac{1}{m+n}\operatorname{sen}\left(\frac{(m+n)\pi}{L}x\right) + \frac{1}{m-n}\operatorname{sen}\left(\frac{(m-n)\pi}{L}x\right)\right]\Bigg|_{-L}^{L} \\
&\qquad = 0\ .
\end{aligned}$$

Exercícios Seção 5.2

1) Determine os zeros e extremos locais de cada função

a) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

b) $f(x) = 2\operatorname{sen}(2\pi x)$

c) $f(x) = \sqrt{3}\cos\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right)$

2) Determine se a função é periódica, se for encontre seu período fundamental

a) $f(x) = \operatorname{sen}(5x)$

b) $f(x) = \cos(2\pi x)$

c) $f(x) = \operatorname{senh}(2x)$

d) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{L}\right)$

e) $f(x) = \operatorname{tg}(\pi x)$

f) $f(x) = x^2$

g) $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)$

h) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}x\right)$

i) $f(x) = \sqrt{3}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}x\right) + 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}x\right)$

j) $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)$

k) $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x$

3) Escreva a função

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(x)$$

na forma $f(x) = A\operatorname{sen}(x+\varphi)$, onde A e φ são constantes.

4) Escreva a função

$$f(x) = 2\cos(x+\pi) + \sqrt{3}\operatorname{sen}(x+\pi)$$

na forma $f(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x$, onde A e B são constantes.

5) Determine o valor de k para que a função $f(x) = \operatorname{sen} kx$ tenha período $\dfrac{\pi}{2}$.

6) Seja f definida para $-L < x < L$ como $f(x) = -x$ e tal que $f(x+2L) = f(x)$, encontre uma fórmula para f no intervalo $L < x < 2L$ e no intervalo $-3L < x < -2L$.

7) Seja f definida para $0 < x < 2L$ como $f(x) = L - x$ e tal que $f(x+2L) = f(x)$, encontre uma fórmula para f no intervalo $-L < x < 0$.

5.3 Séries de Fourier

Assim como no estudo das Séries de Taylor, vamos primeiro definir as Séries de Fourier, em seguida associar essas séries à funções e depois estudar sua convergência. Começamos pela seguinte definição.

Definição 5.7: Série Fourier

Sejam a_n e b_n sequências de números reais e $L > 0$ um número real, a Série de Fourier é uma série na forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \tag{5.2}$$

para $x \in \mathbb{R}$.

Podemos usar a Série de Fourier para construir novas funções especificando os coeficientes que desejamos. Os próximos exemplos empregam essa técnica e nos dão uma noção do potencial da Série de Fourier.

Exemplo 5.3.1:
Sintetizando funções.

Utilizando a Série de Fourier podemos criar funções com o espectro de frequências que desejarmos. Nesse exemplo vamos nos limitar a somas finitas, isso é, escolhemos sequências de coeficientes que são zero para todo índice maior do que um valor fixado, especificamente teremos $a_n = b_n = 0$ para todo $n > 7$.

Ao criar as funções fixamos $L = 1$ e especificamos os valores da amplitude A e fase φ para cada frequência. Depois calculamos os coeficientes da série pelas fórmulas

$$a_n = A_n \cos(\varphi_n) \qquad b_n = -A_n \operatorname{sen}(\varphi_n)$$

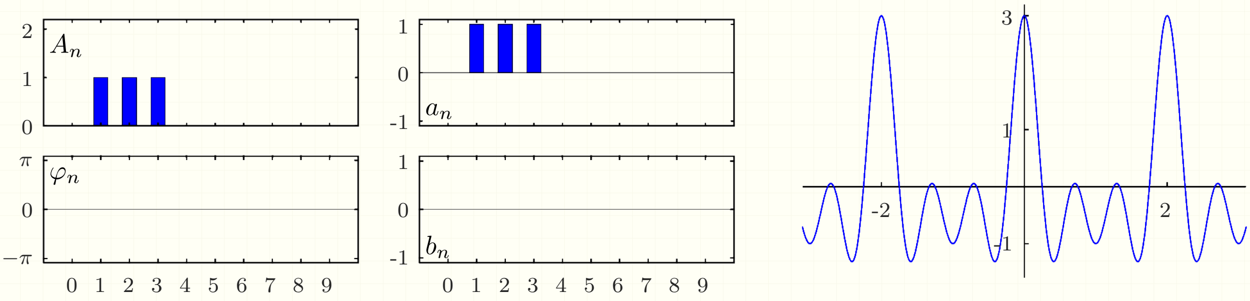
Podemos calcular a frequência associada a cada termo da série simplesmente comparando os parâmetros das funções seno e cosseno na definição da série com a Definição das Funções Senoidais 5.1

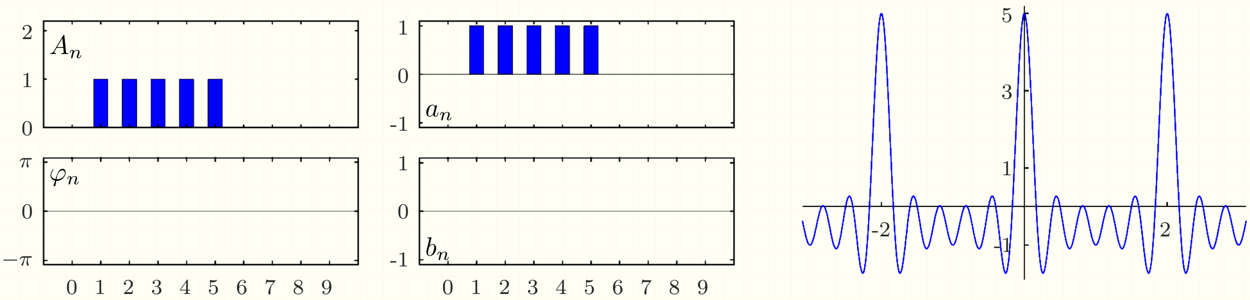
$$\omega_n = \frac{n}{2L} = \frac{n}{2}$$

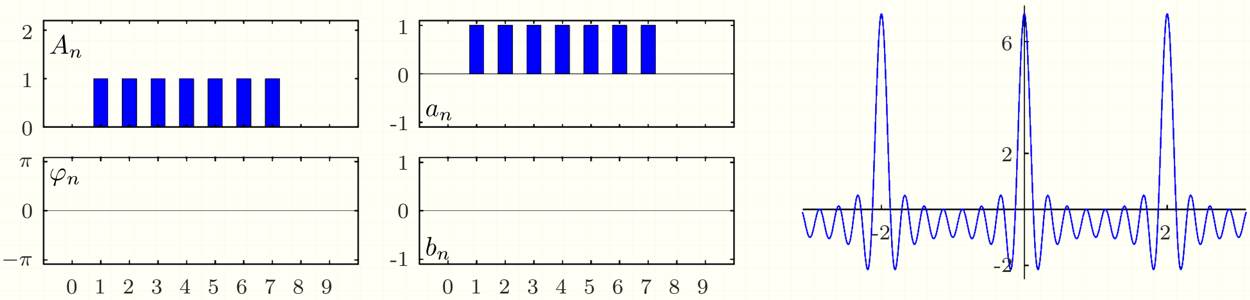
então, se a variável x representar o tempo em segundos, as frequências de cada termo é

$$(\omega_n) = \left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\right) .$$

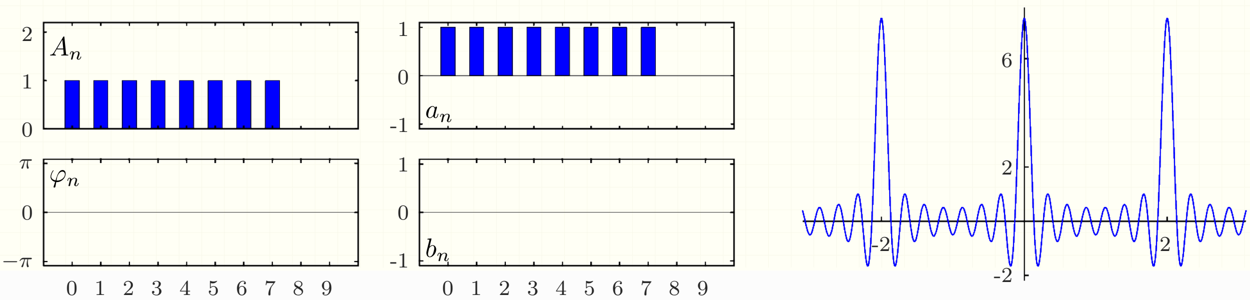
Para cada função sintetizada apresentamos graficamente os valores da amplitude e fase, os coeficientes e finalmente três períodos da função. Observe as relações entre as espectros e o comportamento da função. Nas primeiras 3 funções mantemos a fase nula e atribuímos 1 para os primeiros valores da amplitude exceto o termo A_0.







Observe nos casos anteriores que pela fase ser sempre zero a_n coincide com A_n e b_n é sempre nulo. Outro ponto relevante é que essas funções tem sempre média zero, pois o termo constante, $n = 0$, não está presente. Para que a função oscile em torno do zero vamos incluir a amplitude $A_0 = 1$. Obtemos assim a próxima função.

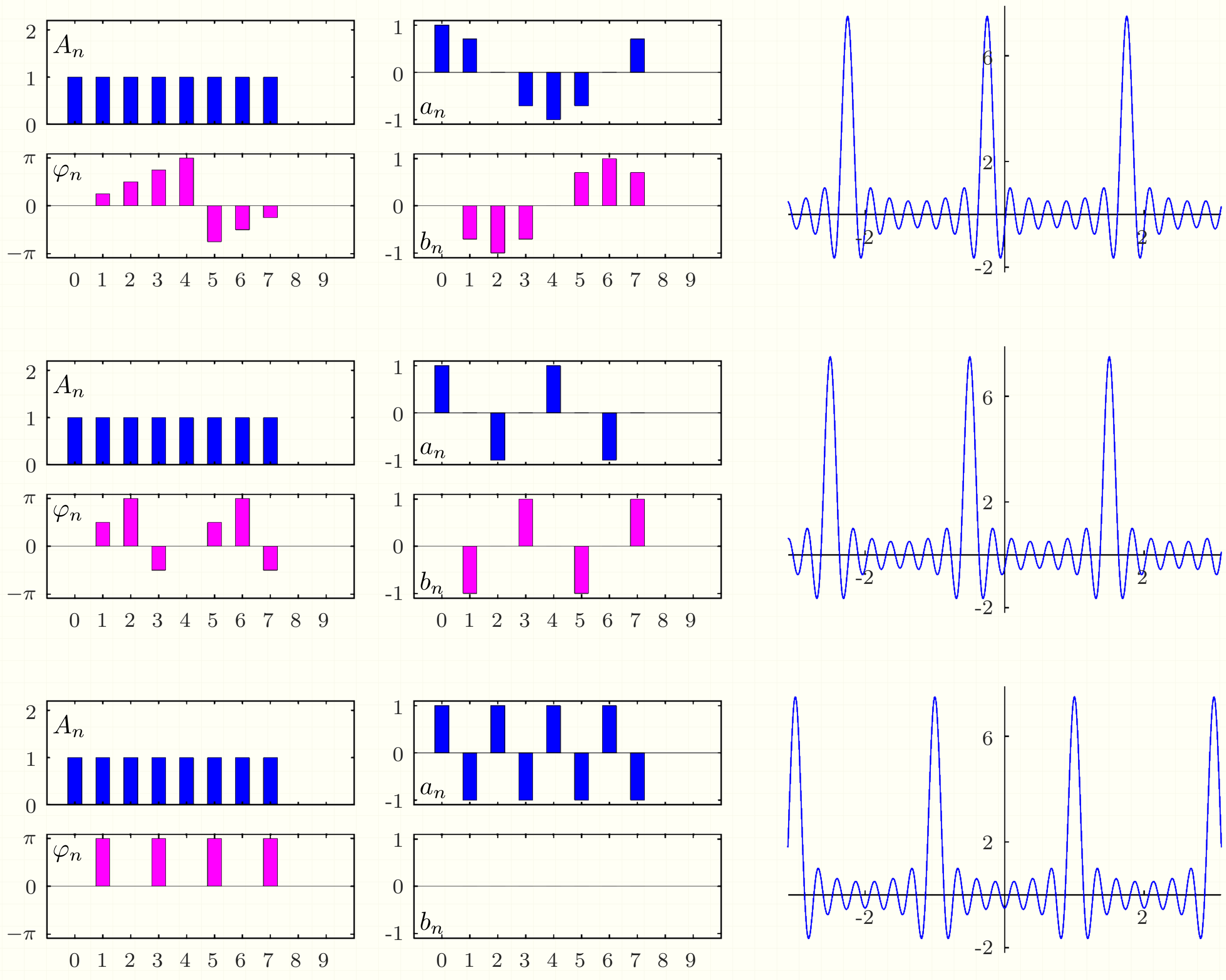


Para explorar o efeito da fase escolhemos usar os seguintes valores

$$\varphi_n = np \qquad n = 0, 1, \ldots, 7$$

onde o parâmetro p assume os valores $p = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}$ e π .

Assim os valores da fase crescem linearmente com o índice segundo a velocidade p. Cada função a seguir corresponde a um dos valores para p. Observe que e no gráficos da fase φ_n estamos usando a periodicidade para representar os valores maiores do que π dentro do intervalo $[-\pi, \pi]$.



Note que a fase distribui a amplitude entre os coeficientes a_n e b_n. Observe também o efeito da fase no gráfico da função, quanto maior o valor de p mais o gráfico é deslocado para a esquerda.

Código Python para ilustrar a síntese de funções com a Série de Fourier.

Exemplo 5.3.2:
Função de Weierstrass.

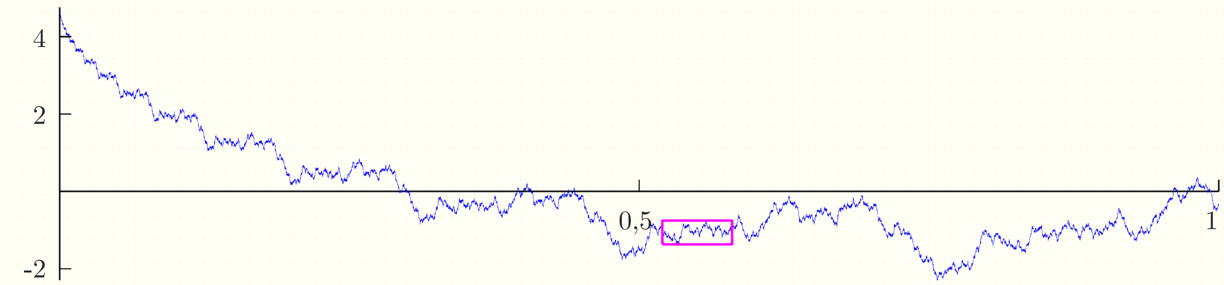
A função de Weierstrass é uma função contínua para todo $x \in \mathbb{R}$ mas que não é derivável em nenhum ponto. Ela foi criada para derrubar a conjectura, que se tentava verificar na época, de que toda função contínua é derivável exceto em pontos isolados. Essa função é definida como a soma da Serie de Fourier

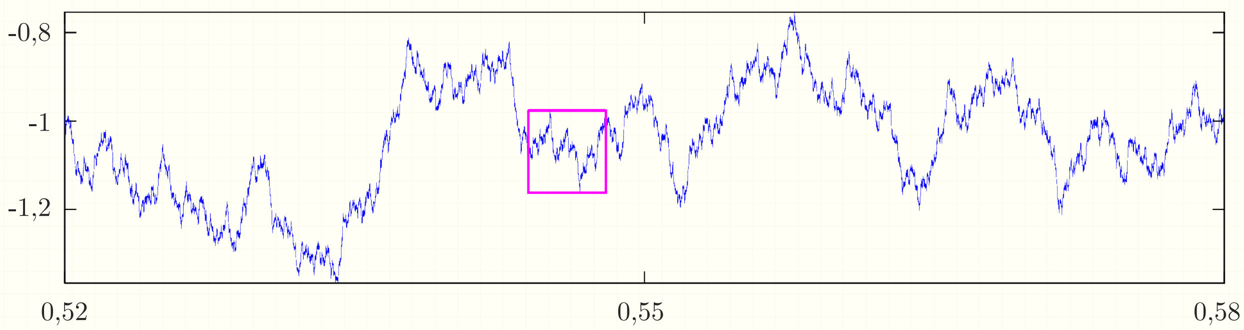
$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cos\left(\beta^n \pi x\right)$$

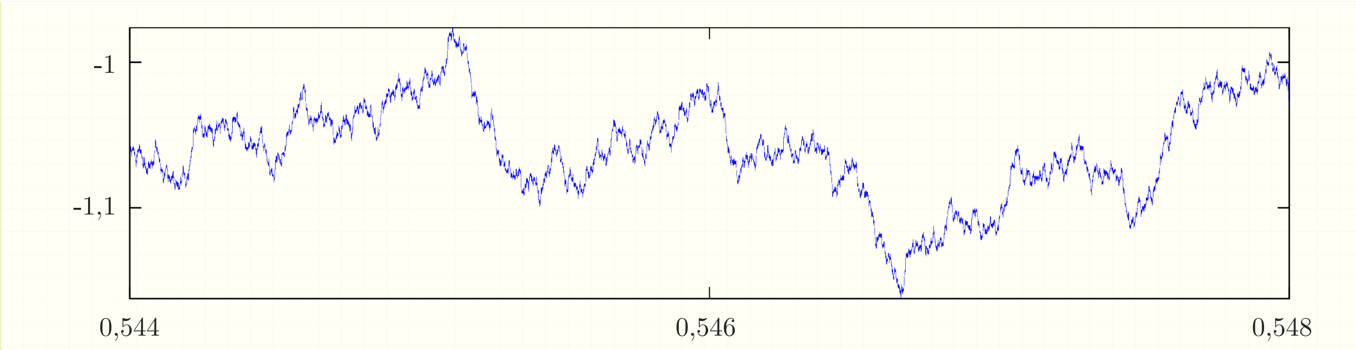
onde os parâmetros a e b satisfazem as condições

$$0 < \alpha < 1 \qquad \beta > 1 \qquad \alpha\beta > 1\ .$$

As figuras a seguir mostram o gráfico de $W(x)$, para $\alpha = 0{,}79$ e $\beta = 1{,}56$. A primeira mostra a função no intervalo entre 0 e 1, enquanto que, as duas seguintes mostram ampliações ilustrando a autossimilaridade característica de fractais.







Código Python para calcular a Função de Weierstrass.

Vamos agora relacionar o valor dos coeficientes a_m e b_m de uma Série de Fourier convergente com integrais da função que representa a soma da série. Comparando com as fórmulas dos coeficiente da Série de Taylor, percebemos que lá eles eram calculados com derivadas da função em um único ponto, isso é, eles consideram apenas informação local da função. Em oposição, os coeficientes para a Série de Fourier dependem da integral ao longo de um intervalo.

Teorema 5.8: Fórmula de Euler-Fourier

Se a Série de Fourier (5.2) converge, então podemos definir a função

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{5.3}$$

que possui período $T = 2L$ e os coeficientes a_n e b_n são dados por

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, dx \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{5.4}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.5}$$

Demonstração

Que o período de f é $2L$ segue do fato que as funções

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

são periódicas com período ${}^{2L}/_{n}$ então $2L$ também é um período.

Para demonstrar as fórmulas (5.4) e (5.5) precisamos supor que podemos integrar a série termo a termo, assim como fizemos para as séries de potências. A ideia é utilizar as relações de ortogonalidade da Proposição 5.6.

Para mostrar (5.4), multiplicamos a equação (5.3) por $\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$, e integramos sobre $[-L, L]$, obtendo assim

$$\begin{aligned}
&\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) f(x)\,dx \\
&\quad = \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right] dx \\
&\quad = \int_{-L}^{L} \left[\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\frac{a_0}{2}\right. \\
&\qquad\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right] dx \\
&\quad = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \\
&\qquad\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\; a_n \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx\right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + b_n \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx\right].
\end{aligned}$$

Se $k = 0$, usando que a integral sobre $[-L, L]$ das funções

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

são nulas, temos

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) f(x)dx \;=\; \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} \cos(0)\, dx \;=\; \frac{a_0}{2}\big(L-(-L)\big) \;=\; a_0 L$$

Se $k \neq 0$, utilizando as propriedades de ortogonalidade, obtemos

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) f(x)dx \;=\; a_k \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \;=\; a_k L$$

Isolando a_k e mudando o índice para n temos

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

Para mostrar a fórmula de b_n basta multiplicar (5.3) por

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

integrar sobre $[-L, L]$ e usar as relações de ortogonalidade.

Dada uma função f que é periódica de período $2L$, queremos saber se essa função pode ser representada por uma Série de Fourier. Aliás, sempre que for possível calcular as integrais em (5.4) e (5.5), podemos dizer que a série em (5.2) com os coeficientes dados por (5.4) e (5.5) é a Série de Fourier de f. Note que ainda não temos nenhuma garantia de que a Série de Fourier de f coincide com a própria f. Porém, antes de iniciarmos a discussão sobre a convergência vamos definir a Série de Fourier de uma função f e ilustrar como podemos calculá-la.

Definição 5.9: Série de Fourier de Uma Função

Seja f uma função periódica de período $2L$. Se f é integrável no intervalo $[-L, L]$, então a Série de Fourier de f é a série (5.2)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

com os coeficientes dados por (5.4) e (5.5)

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, dx \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)\;dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Os exemplos a seguir ilustram o uso desse resultado para construir a Série de Fourier de algumas funções.

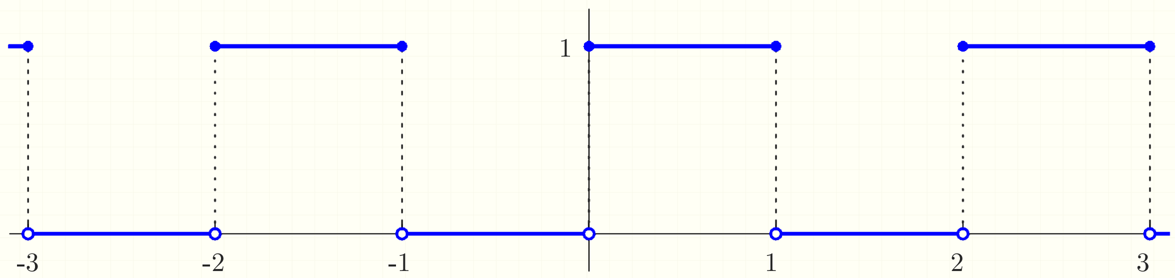
Exemplo 5.3.3:
Encontre a série de Fourier gerada pela função periódica

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad\qquad f(x+2) = f(x)\ .$$

Analisando essa função verificamos que ela é periódica com período $T = 2$ então

$$L = \frac{T}{2} = 1$$

e seu gráfico é



A Série de Fourier da função f é dada por (5.3) substituindo o valor de $L = 1$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n\,\text{sen}(n\pi x)$$

onde os coeficientes são calculados pelas fórmulas de Euler-Fourier (5.4) e (5.5)

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)\;dx\ ,$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\,\text{sen}(n\pi x)\;dx\ .$$

Note que ainda não podemos dizer se a soma da série, $S(x)$, será igual a função que deu origem a série $f(x)$.

Substituindo a função f nas fórmulas para os coeficientes encontramos

$$a_n = \int_0^1 \cos(n\pi x)\, dx \,,$$

$$b_n = \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\, dx \,.$$

Para $n = 0$ temos

$$a_0 = \int_0^1 \cos(0)\, dx = \int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1 \,.$$

Para $n \neq 0$ temos

$$a_n = \int_0^1 \cos(n\pi x)\, dx = \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\Big|_0^1 = 0 \,,$$

$$b_n = \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\, dx = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}\big(\cos(n\pi) - 1\big) \,.$$

Como $\cos(n\pi)$ oscila entre 1 e -1

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & n \text{ par}\,, \\ -1 & n \text{ ímpar}\,. \end{cases}$$

Podemos reescrever b_n como

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par}\,, \\ \dfrac{2}{n\pi} & n \text{ ímpar}\,. \end{cases}$$

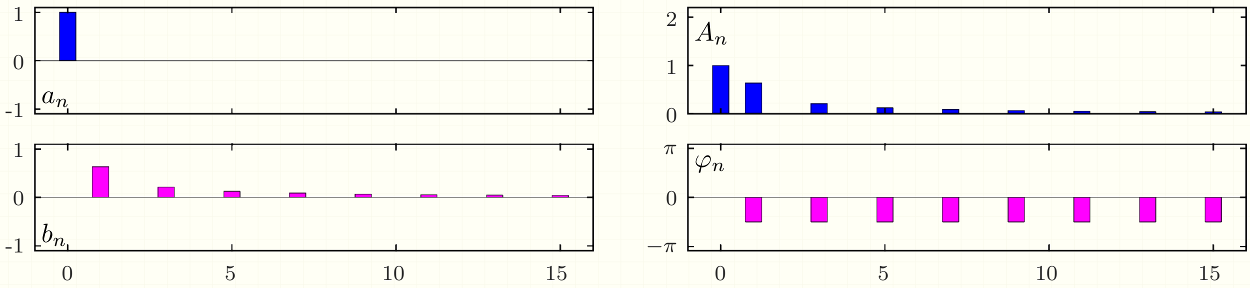
Substituindo os coeficientes na série temos

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x) \,. \end{aligned}$$

Removendo todos os índices n pares e fazendo a mudança de índices $n = 2k - 1$ temos

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} \operatorname{sen}\big((2k-1)\pi x\big)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \operatorname{sen}\big((2k-1)\pi x\big)\ .$$

Os gráficos a seguir mostram os primeiros coeficientes, a_n e b_n, dessa série, assim como os valores da amplitude, A_n, e fase, φ_n, correspondentes.



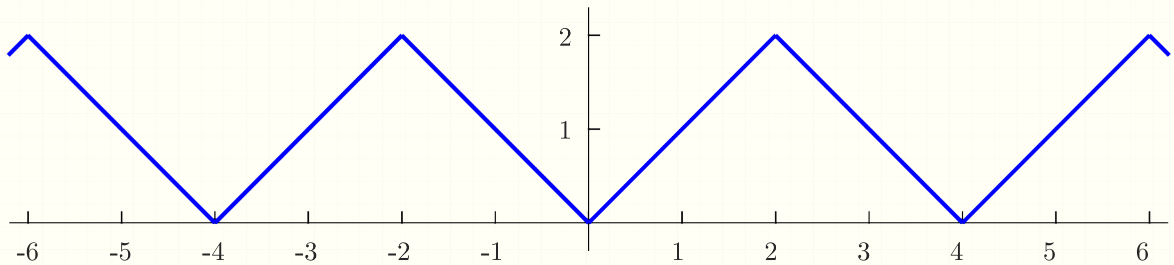
Exemplo 5.3.4:
Encontre a série de Fourier gerada pela função periódica

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 < x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 2 \end{cases} \qquad f(x+4) = f(x)\ .$$

Analisando essa função verificamos que ela é periódica com período $T = 4$ então

$$L = \frac{T}{2} = 2$$

e seu gráfico é



A Série de Fourier dessa função é dada por (5.3) substituindo o valor de $L = 2$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\, x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\, x\right)$$

onde os coeficientes são calculados pelas fórmulas de Euler-Fourier (5.4) e (5.5)

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\, x\right)\, dx\ ,$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\, x\right)\, dx\ .$$

Precisamos agora calcular as integrais e encontrar os valores dos coeficientes. Começamos calculando a_0

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{0\pi}{2}\, x\right)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x) dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{2} -x\, dx + \int_{0}^{2} x\, dx\right) \\
&= \int_{0}^{2} x\, dx \\
&= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0}{2} = 2\ .
\end{aligned}$$

O próximo passo é calcular a_n para $n \neq 0$. Repetindo a substituição de f e a manipulação das integrais nos intervalos $[-2, 0]$ e $[0, 2]$ temos

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\, x\right)\, dx = \int_{0}^{2} x\cos\left(\frac{n\pi}{2}\, x\right)\, dx\ .$$

Vamos agora calcular a primitiva dessa função

$$H(x) = \int x\cos\left(\frac{n\pi}{2} x\right)\, dx$$

para isso aplicamos a integração por partes

$$u = x \qquad dv = \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx \qquad\qquad du = dx \qquad v = \frac{2}{n\pi}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

que nos leva a

$$\begin{aligned}
H(x) &= uv - \int vdu \\
&= \frac{2x}{n\pi}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\,x\right) - \frac{2}{n\pi}\int \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\,x\right)dx \\
&= \frac{2x}{n\pi}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\,x\right) + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\,x\right) \ .
\end{aligned}$$

Empregando a primitiva para calcular a_n temos

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^2 x\cos\left(\frac{n\pi}{2}\,x\right)dx = H(2) - H(0) \\
&= \frac{2\cdot 2}{n\pi}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}2\right) + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}2\right) \\
&- \left[\frac{2\cdot 0}{n\pi}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}0\right) + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}0\right)\right] \\
&= \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\left(\frac{2n\pi}{2}\right) + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos(0) \\
&= \frac{4}{(n\pi)^2}\Big(\cos(n\pi) - 1\Big) \ .
\end{aligned}$$

Notando que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ -1 & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

podemos simplificar a expressão para a_n

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par ,} \\ \dfrac{-8}{(n\pi)^2} & n \text{ ímpar .} \end{cases}$$

Precisamos calcular os valores de b_n, para isso empregamos manipulações similares e obtemos

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\big(\cos(-n\pi) - \cos(n\pi)\big) = 0 \ .$$

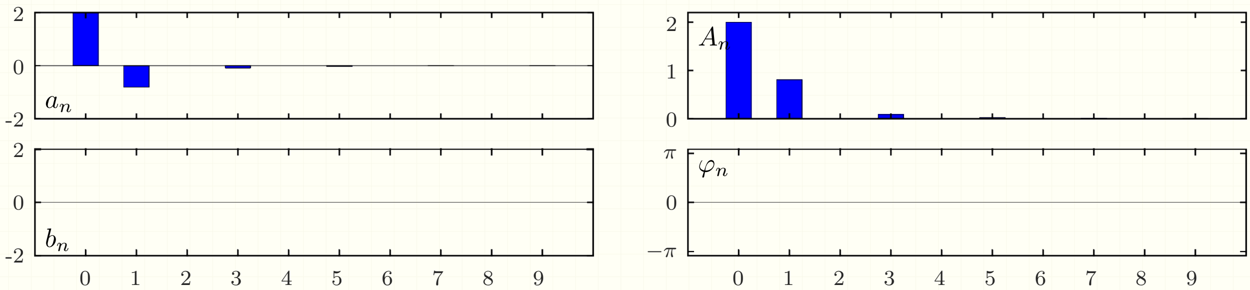
O último passo é substituir os coeficientes calculados na expressão da série e simplificar os termos

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\,x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\,x\right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\,x\right) \ . \end{aligned}$$

Removendo todos os índices n pares e fazendo a mudança de índices $n = 2k-1$ temos

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2}x\right) \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2}x\right) \ . \end{aligned}$$

Os gráficos a seguir mostram os primeiros coeficientes, a_n e b_n, dessa série, assim como os valores da amplitude, A_n, e fase, ϕ_n, correspondentes.



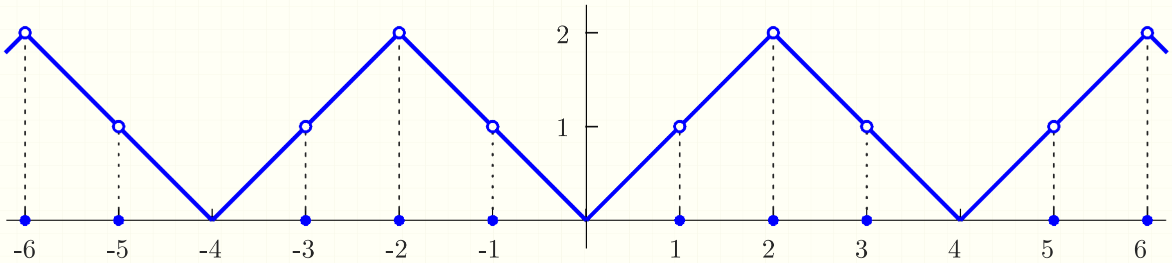
O próximo exemplo apresenta uma função muito similar a do anterior e explicita uma característica fundamental da convergência das Séries de Fourier.

Exemplo 5.3.5:

Encontre a série de Fourier gerada pela função periódica

$$g(x) = \begin{cases} -x, & -2 < x < -1 \text{ ou } -1 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1 \text{ ou } 1 < x < 2 \\ 0, & x = -2, -1, 0, 1, 2 \end{cases} \qquad g(x+4) = g(x)$$

Na figura a seguir vemos o gráfico da função g, note que essa função é idêntica a função, f, do exemplo anterior exceto pelos seus pontos de descontinuidade.



Ao cacularmos os coeficientes da Série de Fourier dessa função

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{2} x\right) \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} x\right) \, dx$$

vamos obter exatamente os mesmos valores do exemplo anterior, pois os pontos de descontinuidade isolados não alteram os valores das integrais. Portanto, a Série de Fourier dessa função é a mesma do exemplo anterior.

$$S(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2} x\right)$$

Os dois exemplos anteriores apresentam uma questão fundamental sobre a convergência da Série de Fourier. As funções f e g, apesar de similares, são funções diferentes que possuem exatamente a mesma Série de Fourier. Ficamos assim com a questão de determinar para qual função a série converge e porque. Essa discussão será feita na próxima seção onde apresentamos a convergência da Série de Fourier.

Exercícios Seção 5.3

1) Esboce o gráfico da função por três períodos e encontre a sua Série de Fourier.

a) $f(x) = -x \quad -L \le x < L$
$f(x+2L) = f(x)$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & -L \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < L \end{cases}$
$f(x+2L) = f(x)$

c) $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$
$f(x+2\pi) = f(x)$

d) $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0 \\ 1-x, & 0 \le x < 1 \end{cases}$
$f(x+2) = f(x)$

e) $f(x) = \begin{cases} x+L, & -L \le x \le 0 \\ L, & 0 < x < L \end{cases}$
$f(x+2L) = f(x)$

f) $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x \le -1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \end{cases}$
$f(x+4) = f(x)$

g) $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < 2 \end{cases}$
$f(x+4) = f(x)$

h) $f(x) = x \quad -1 \le x < 1$
$f(x+2) = f(x)$

i) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} \quad -2 \le x < 2$
$f(x+4) = f(x)$

j) $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \le x < 0 \\ 2-2x, & 0 \le x < 2 \end{cases}$
$f(x+4) = f(x)$

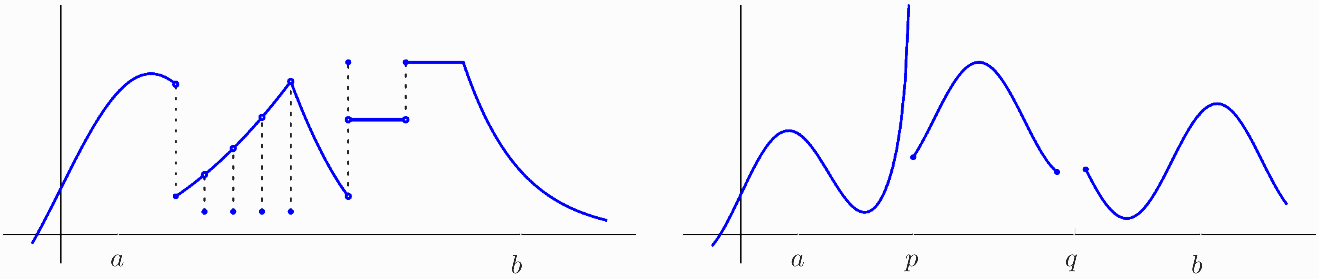
k) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2}, & -2 \le x < 0 \\ 2x - \dfrac{x^2}{2}, & 0 \le x < 2 \end{cases}$
$f(x+4) = f(x)$

l) $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \le x \le 0 \\ x^2(3-x), & 0 < x < 3 \end{cases}$
$f(x+6) = f(x)$

5.4 Convergência da Série de Fourier

Queremos estabelecer quando a Série de Fourier gerada por uma determinada função f converge e em quais pontos essa série coincide com a função. Porém, para podermos apresentar os critérios de convergência precisamos de alguns resultados preliminares.

A primeira observação que precisamos fazer é que se duas funções f e g são iguais em todos os pontos de um intervalo $[a, b]$, exceto por um único ponto $c \in [a,b]$, a integral das duas funções é a mesma nesse intervalo. Essa igualdade vale mesmo que elas sejam diferentes em um conjunto finito de pontos, c_n. A versão mais geral desse resultado diz que a integral das funções será igual, mesmo que elas sejam diferentes em um conjunto de medida nula contido no intervalo. Essa propriedade é relevante nesse momento pois as fórmulas para os coeficientes de Fourier, (5.4) e (5.5), são



(a) Função contínua por partes (b) Não é uma função contínua por partes

Figura 5.2: Continuidade por partes

integrais e portanto não podem distinguir funções que sejam diferentes apenas em um conjunto finito de pontos dentro do intervalo $[-L, L]$.

Para apresentarmos o critério de convergência da Série de Fourier precisamos definir uma função que é contínua em quase todos os pontos de um intervalo, que chamamos de função contínua por partes. A Figura 5.2a ilustra uma função contínua por partes no intervalo $[a, b]$. Enquanto função da Figura 5.2b não é contínua por partes pois tem assintota vertical em p e não está definida em uma vizinhança de q. O resultado a seguir apresenta os detalhes dessa definição.

Definição 5.10: Função Seccionalmente Contínua

Uma função f é Seccionalmente Contínua, ou Contínua por Partes, em um intervalo $a \leq x \leq b$ se o intervalo pode ser dividido por um número finito de pontos

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

de modo que

1. f é contínua em cada subintervalo aberto $x_{k-1} < x < x_k$
2. f tem limites laterais finitos nas extremidades de cada subintervalo, quando aproximadas pelo interior do subintervalo.

Na apresentação que se segue, será conveniente utilizarmos a seguinte notação para os Limites Laterais de uma função $f(x)$

$$f\left(a^+\right) = \lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \text{e} \qquad f\left(a^-\right) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

note que se f é contínua

$$f\left(x^{+}\right) = f\left(x^{-}\right) = f(x)\,.$$

Podemos agora sapresentar um critério de convergência para a Série de Fourier.

Teorema 5.11: Convergência da Série de Fourier

Seja f uma função periódica, de período $2L$, e seccionalmente contínua no intervalo $[-L, L]$. Suponha que sua derivada, f', existe nos pontos onde f é contínua e que f' também seja seccionalmente contínua em $[-L, L]$. Então a Série de Fourier de f converge para f, onde ela é contínua, e para

$$\frac{f\left(x^{+}\right) + f\left(x^{-}\right)}{2}$$

onde a função for descontínua.

Vamos agora voltar a questão deixada em aberto no final da seção anterior, onde, nos dois últimos exemplos 5.3.4 e 5.3.5, vimos que a Série de Fourier das funções

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 < x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 2 \end{cases} \qquad\qquad f(x+4) = f(x)$$

$$g(x) = \begin{cases} -x, & -2 < x < -1 \;\text{ ou }\; -1 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1 \;\text{ ou }\; 1 < x < 2 \\ 0, & x = -2, -1, 0, 1, 2 \end{cases} \qquad\qquad g(x+4) = g(x)$$

são idênticas. Nesse caso, para qual função a serie converge?

A resposta vem da aplicação do Teorema 5.11, como a função f é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$ a série

$$S(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2}x\right)$$

converge para f para todo $x \in \mathbb{R}$. Entretanto, permanece a questão da relação entre a série e a função g. Nos pontos onde g é contínua ela é igual a f e portanto a série também converge para g para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pela periodicidade da função precisamos analisar apenas os pontos $p = -2, -1, 1, 2$, nesses casos o Teorema 5.11

diz que a série converge para a média entre os limites laterais, ou seja

$$S(p) = \frac{g\left(p^+\right) + g\left(p^-\right)}{2} \ .$$

Lembrando que, ao calcularmos limites nunca avaliamos a função no ponto para o qual a variável está tendendo, temos que

$$g\left(p^+\right) = f\left(p^+\right) \qquad \text{e} \qquad g\left(p^-\right) = f\left(p^-\right) \ .$$

Portanto, pela continuidade de f

$$S(p) = \frac{g\left(p^+\right) + g\left(p^-\right)}{2} = \frac{f\left(p^+\right) + f\left(p^-\right)}{2} = f(p)$$

como esperado, chegamos ao mesmo resultado aplicando o teorema na função g.

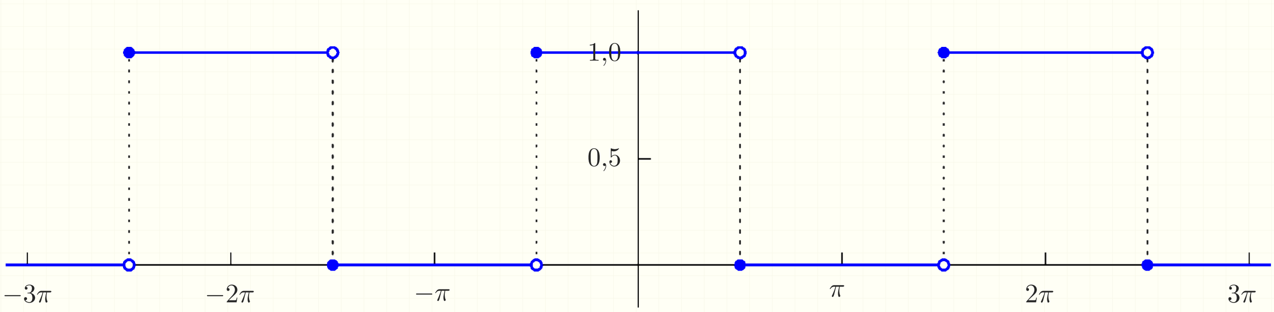
O próximo exemplo calcula a Série de Fourier de uma função com descontinuidades não removíveis.

Exemplo 5.4.1:
Calcule a Série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < -\pi/2 \\ 1, & -\pi/2 \leq x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \qquad f(x) = f(x + 2\pi)$$

e verifique para qual função a série converge.

Primeiro verificamos que essa função tem período $T = 2\pi$ e portanto $L = \pi$, observamos também que ela é descontínua em $x = \pm\pi/2$ e em todas as repetições periódicas desses pontos. Vemos a seguir o gráfico dessa função



Usando as fórmulas de Euler-Fourier, temos

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = 1$$

assim como

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{-n\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) .
\end{aligned}$$

Note que, $\operatorname{sen}(n\pi/2)$ é zero se n é par e fica alternando entre 1 e -1 se n é impar, mais precisamente

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par },\\ \dfrac{2(-1)^{n-1/2}}{n\pi}, & n \text{ ímpar }. \end{cases}$$

Calculando as integrais correspondentes verificamos que $b_n = 0$ para todo n. Então para todos os pontos onde f é contínua temos que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{\pi}x\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cos\big((2k-1)x\big) .
\end{aligned}$$

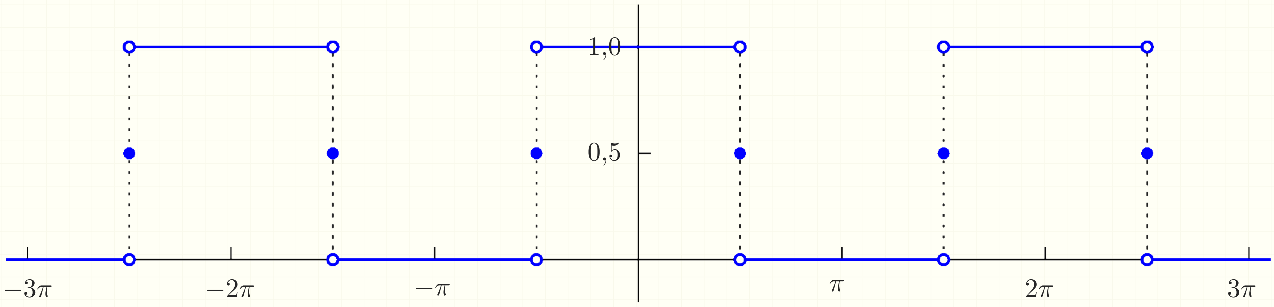
A diferença entre o gráfico de f e o gráfico da série ocorre apenas nos pontos de descontinuidade, no nosso caso esses pontos são da forma

$$x = \frac{(2k-1)\pi}{2} .$$

Nestes pontos a série de Fourier converge para

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Portanto a Série de Fourier de f converge para a função mostrada no gráfico a seguir

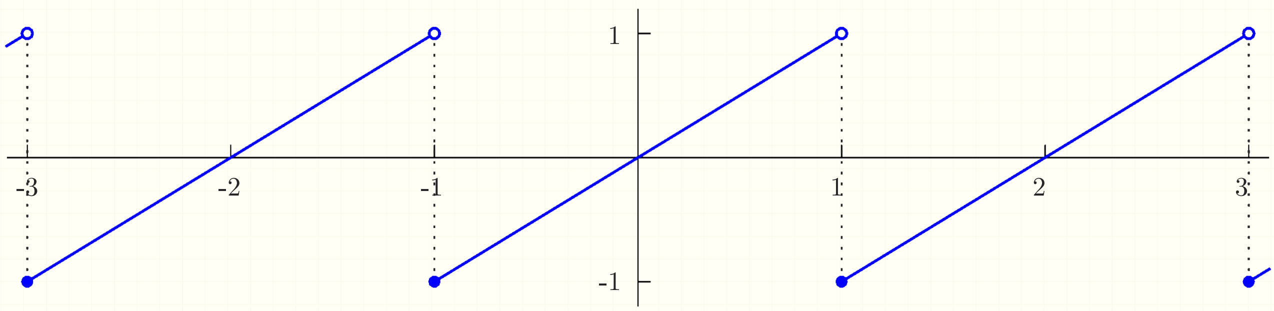


Note que, apesar de fazermos todos os cálculos no intervalo $[-L, L]$, as funções com as quais estamos trabalhando estão definidas em toda a reta. Portanto, ao buscarmos os pontos de descontinuidade não basta verificar apenas o interior do intervalo, precisamos analisar a função como um todo. O próximo exemplo ilustra essa analise.

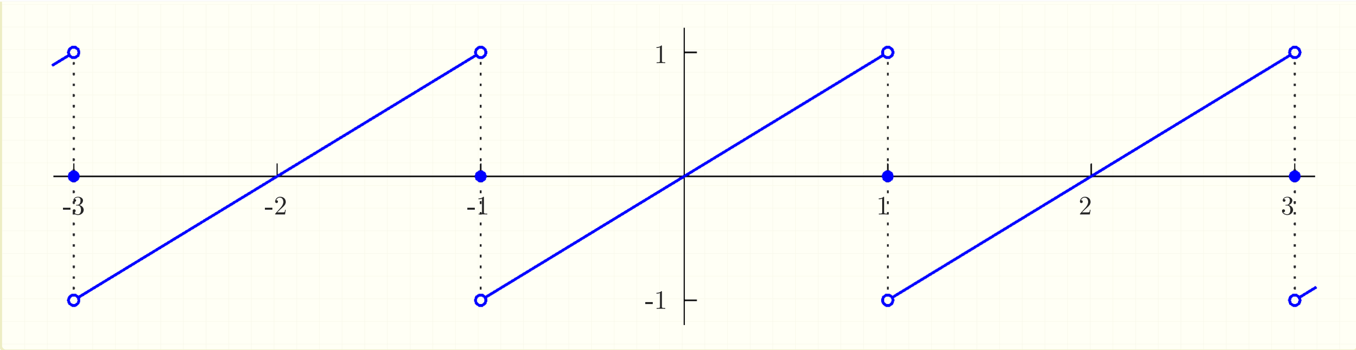
Exemplo 5.4.2:
Qual a soma da Serie de Fourier da função

$$f(x) = x \qquad \text{para } x \in [-1, 1) \qquad\qquad f(x) = f(x+2)\,.$$

Observamos que essa função tem período $T = 2$, portanto $L = 1$, e que seu gráfico é



Como f e sua derivada são seccionalmente contínuas podemos aplicar o Teorema 5.11, que garante a convergência para a função ilustrada do gráfico a seguir. Observe o valor da função nas descontinuidades.



A convergência da Série de Fourier apresenta algumas sutilezas que estão além do escopo dessa disciplina, especialmente quando desejamos aproximar a função por uma soma parcial da sua Série de Fourier. A Seção 5.6 faz uma discussão introdutória o Fenômeno de Gibbs que pode ocorrer nesses casos.

Exercícios Seção 5.4

1) Suponha que cada função é estendida periodicamente fora do intervalo original, calcule sua Série de Fourier e esboce o gráfico da função **para qual a série converge** por três períodos.

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ x & 0 \le x < \pi \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} L + x & -L \le x < 0 \\ L - x & 0 \le x < L \end{cases}$

d) $f(x) = 1 - x^2 \quad -1 \le x < 1$

e) $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < -\pi/2 \\ 1 & -\pi/2 \le x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x < 0 \\ x^2 & 0 \le x < 1 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < \pi \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \le x < 0 \\ 1 - x & 0 \le x < 1 \end{cases}$

i) $f(x) = x \quad -1 \le x < 1$

j) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & -2 \le x < 0 \\ 2 - 2x & 0 \le x < 2 \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \end{cases}$

l) $f(x) = x - x^3 \quad -1 \le x < 1$

5.5 Série de Fourier de Funções Pares e Ímpares

Ao calcularmos os coeficientes da Série de Fourier, podemos tirar proveito de algumas simetrias da função f, por exemplo, se ela é uma função par ou impar. Além disso, muitas vezes, estamos interessados em estudar uma função que não é periódica dentro do intervalo onde ela está definida. Nesses casos podemos estender a função criando uma nova função que seja periódica, ao fazermos isso temos a escolha de criar uma extensão par ou ímpar. Faremos uso dessa técnica para escrever as soluções das Equações Diferenciais Parciais no Capítulo 6.

Definição 5.12: Função Par e Função Ímpar

Uma função real f é par se

$$f(-x) = f(x)$$

e é ímpar se

$$f(-x) = -f(x) \ .$$

A forma direta para verificar se uma função é par ou ímpar é partir da expressão de $f(-x)$ e manipulá-la até encontrar $f(x)$ ou $-f(x)$. Os próximos exemplos mostram algumas funções pares e ímpares e funções que não possuem essas simetrias.

Exemplo 5.5.1:
Mostre que $(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, é par quando n for par e é ímpar quando n for ímpar.

Considerando primeiro o caso n par, isso é, $n = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$

$$f(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = (-1)^{2k} x^n = x^n = f(x) \ .$$

Considerando agora n ímpar temos $n = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$

$$f(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = (-1)^{2k+1} x^n = -x^n = -f(x) \ .$$

O exemplo anterior apresenta o caso mais comum e o motivo para dizermos que a função é par ou impar.

Devido a suas definições a função seno é impar e a função cosseno é par. O próximo exemplo generaliza essas afirmações.

Exemplo 5.5.2:
Mostre as que, para $\alpha \neq 0$, a função $\operatorname{sen}(\alpha x)$ é impar e a função $\cos(\alpha x)$ é par.

Sabemos que a função $\operatorname{sen}(x)$ é impar e a função $\cos(x)$ é par, isso é

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) \qquad \text{e} \qquad \cos(-x) = \cos(x) \ .$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, temos que

$$\operatorname{sen}(\alpha(-x)) = \operatorname{sen}(-(\alpha x)) = -\operatorname{sen}(\alpha x) \ .$$

Ao mesmo tempo, temos que

$$\cos(\alpha(-x)) = \cos(-(\alpha x)) = \cos(\alpha x) \ .$$

Exemplo 5.5.3:
Mostre que se f é par, a função

$$g(x) = f(x)\cos(\alpha x)$$

também é par e a função

$$h(x) = f(x)\operatorname{sen}(\alpha x)$$

é ímpar.

Partindo de $g(-x)$ vamos tentar chegar em $g(x)$, conseguimos isso usando que $f(-x) = f(x)$ e que $\cos(-\alpha x) = \cos(\alpha x)$

$$g(-x) = f(-x)\cos(-\alpha x) = f(x)\cos(\alpha x) = g(x) \ .$$

Repetimos o processo para h, mas agora usamos que $\operatorname{sen}(-\alpha x) = -\operatorname{sen}(\alpha x)$

$$h(-x) = f(-x)\operatorname{sen}(-\alpha x) = f(x)\big(-\operatorname{sen}(\alpha x)\big) = -h(x) \ .$$

Exemplo 5.5.4:
Mostre que se f é ímpar, a função

$$g(x) = f(x)\cos(\alpha x)$$

também é ímpar e a função

$$h(x) = f(x)\operatorname{sen}(\alpha x)$$

é par.

Usando os mesmos procedimentos do exemplo anterior temos que

$$\begin{aligned} g(-x) &= f(-x)\cos(-\alpha x) = (-f(x))\cos(\alpha x) = -g(x)\ , \\ h(-x) &= f(-x)\,\mathrm{sen}(-\alpha x) = (-f(x))\big(-\mathrm{sen}(\alpha x)\big) = h(x)\ . \end{aligned}$$

Exemplo 5.5.5:
Mostre que $f(x) = x + b$ é ímpar se, e somente se, $b = 0$.

Precisamos verificar a implicação nos dois sentidos para podermos afirmar que a relação é "se, e somente se". Vamos primeiro mostrar que se $b = 0$ então a função é ímpar. Essa verificação é simples e direta

$$f(-x) = -x = -f(x)\ .$$

Agora vamos mostrar que se f é ímpar b precisa ser zero. Como f é ímpar sabemos que $f(-x) = -f(x)$ substituindo a expressão da função e manipulando temos

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x) \\ -x + b &= -(x + b) \\ -x + b &= -x - b \\ b &= -b\ . \end{aligned}$$

O único número que satisfaz essa relação é o zero portanto b só pode ser zero. Com isso concluímos a demostração.

O resultado importante para o cálculo da Série de Fourier de funções pares ou ímpares está na consequência que essas simetrias tem no cálculo de integrais em domínios simétricos em relação a origem, como descrito no próximo teorema.

Teorema 5.13: Integrais de Funções Pares e Impares

Se f é uma função par, então

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx\ .$$

Se f é uma função ímpar, então

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0\ .$$

Demonstração

Note que

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{L} f(x)\,dx\ .$$

Fazendo a mudança de variável $y = -x$ na primeira integral, obtemos $dy = -dx$ e os limites de integração $x = -L$ e $x = 0$ se transformam em $y = L$ e $y = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx &= -\int_{L}^{0} f(-y)\,dy + \int_{0}^{L} f(x)\,dx\\ &= \int_{0}^{L} f(-y)\,dy + \int_{0}^{L} f(x)\,dx\\ &= \int_{0}^{L} f(-x) + f(x)\,dx\ .\end{aligned}$$

Se f for par temos que $f(-y) = f(y)$ portanto

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx\ .$$

Se f for impar temos que $f(-y) = -f(y)$ portanto

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0\ .$$

Observe que a integral ser zero não garante que a função seja ímpar. Esse resultado tem um impacto direto tanto na forma da Série de Fourier quanto no cálculo dos coeficientes. Os próximo dois teoremas apresentam a forma que a Série de Fourier assume no caso de funções pares ou ímpares.

Teorema 5.14: Coeficientes de Fourier de funções pares

Se f é uma função par integrável no intervalo $[-L, L]$ os coeficientes da Série de Fourier de f são

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Consequentemente a série de Fourier de uma função par f é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \; .$$

Dizemos que essa é uma Série de Fourier em Cossenos.

Demonstração

Esse resultado é uma consequência direta do Teorema 5.13 e do fato que a função

$$f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

é par, enquanto a função

$$f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

é ímpar.

Teorema 5.15: Coeficientes de Fourier de Funções Ímpares

Seja f uma função ímpar integrável no intervalo $[-L, L]$ os coeficientes da série de Fourier de f são

$$a_n = 0 \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Consequentemente a série de Fourier de uma função ímpar f é

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) .$$

Dizemos que essa é uma Série de Fourier em Senos

Demonstração

Como no teorema anterior esse resultado é uma consequência direta do Teorema 5.13 e do fato que a função

$$f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

é ímpar, enquanto a função

$$f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

é par.

Note que, nas fórmulas para os coeficientes a_m e b_m nos dois teoremas a integral é realizada apenas entre zero e L. Dessa forma, podemos calcular esses coeficientes para uma função f que esteja definida apenas no intervalo $[0, L]$. Nesse caso, temos a liberdade para usar a série de Fourier de Cossenos ou a de Senos. Se usarmos a Série de Fourier em Cossenos, ela converge para a extensão par da função f no intervalo $[-L, L]$. Se usarmos a Série de Fourier em Senos, ela converge para a extensão ímpar nesse intervalo. Em ambos os casos a série converge para a extensão periódica, de período $2L$, nos pontos fora do intervalo $[-L, L]$.

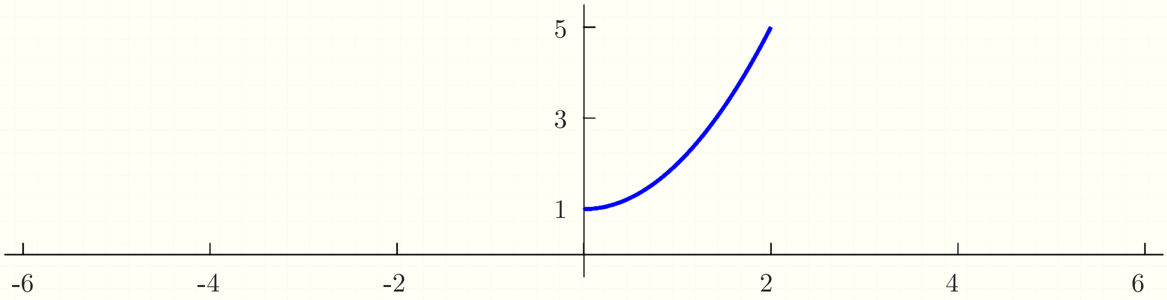
Em outras palavras se temos uma função definida apenas e um intervalo, a princípio, não podemos calcular uma Série de Fourier para ela. Porém, podemos estender a definição da função para toda a reta fazendo com que a extensão seja periódica e calculamos a série para a extensão. Como a função e sua extensão coincidem no intervalo onde a função é originalmente definida, depois de ter calculado e série, podemos ignorar a extensão e retornar ao domínio original com uma Série de Fourier para a função. Podemos definir a função no intervalo $[-L, 0]$ de qualquer forma que desejássemos, porém se escolhermos estende-la como uma função par ou ímpar podemos tirar proveito da simetria e simplificar os cálculos necessários para obter a série, o próximo exemplo ilustra essas extensões.

Exemplo 5.5.6:
Construa as extensões periódicas par e ímpar da função

$$f(x) = 1 + x^2$$

definida no intervalo $[0, 2]$.

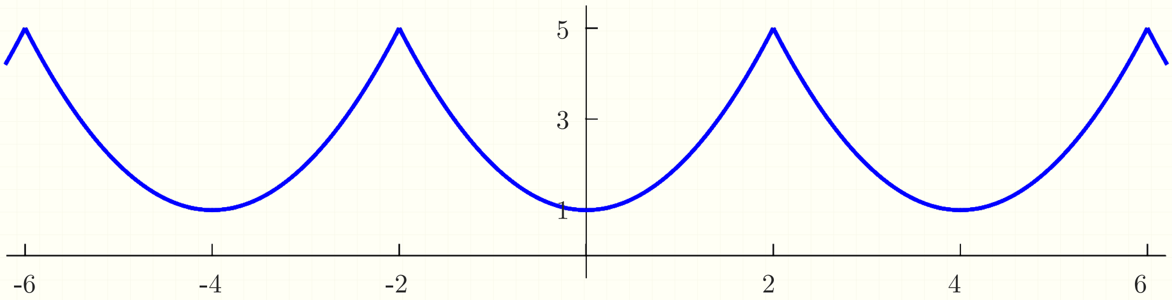
A função f não é periódica e não está definida fora do intervalo $[0, 2]$, seu gráfico está na próxima imagem.



Primeiro vamos estender a função para um intervalo simétrico com relação a origem, nesse caso $[-2, 2]$, depois estendemos a função periodicamente, com período $T = 4$, para toda a reta real. A extensão par é definida como

$$f_{\text{par}}(x) = \begin{cases} f(\ \ x), & x \in [\ \ 0, 2\,] \\ f(-x), & x \in [-2, 0\,] \end{cases} \qquad f_{\text{par}}(x) = f_{\text{par}}(x+4)$$

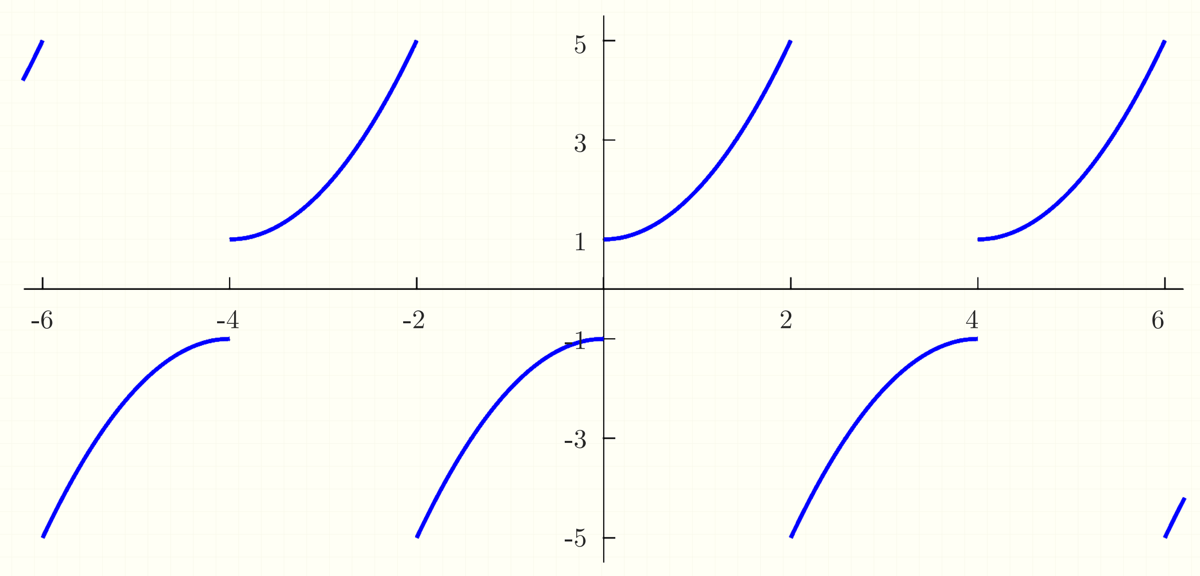
e seu gráfico está esboçado a seguir.



A extensão ímpar é definida como

$$f_{\text{ímpar}}(x) = \begin{cases} \ \ f(\ \ x), & x \in [\ \ 0, 2\,] \\ -f(-x), & x \in [-2, 0\,] \end{cases} \qquad f_{\text{ímpar}}(x) = f_{\text{ímpar}}(x+4)$$

e seu gráfico está esboçado a seguir.

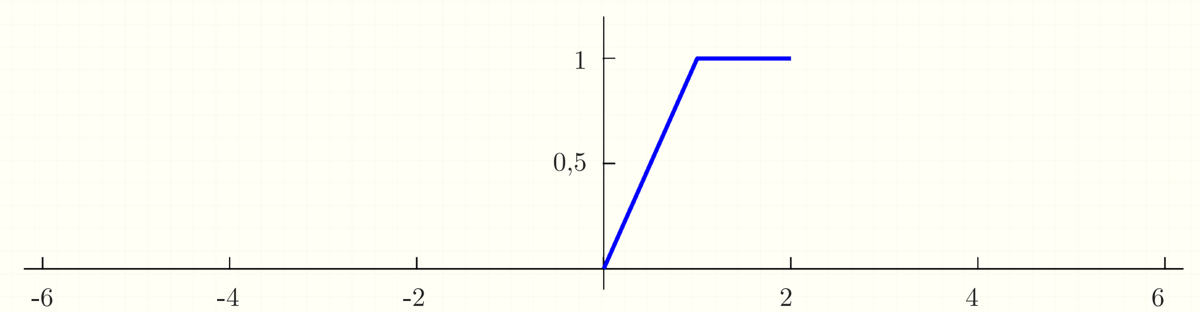


Nos próximos dois exemplos calculamos as Séries de Fourier de senos e cossenos para uma função. Note que, a pesar de no exemplo anterior termos explicitado as expressões das extensões, para calcular os coeficientes da série, essas expressões não são necessárias, pois vamos usar as fórmulas dos Teoremas 5.14 e 5.15.

EXEMPLO 5.5.7:
Encontre a Série de Senos da função

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \, , \\ 1 & 1 < x \leq 2 \, . \end{cases}$$

Note que essa função esta definida apenas no intervalo $[0, 2]$. Seu gráfico tem a forma ilustrada a seguir.



Como queremos a Série de Senos, isso é, a Série de Fourier da extensão ímpar da função que só contém termos envolvendo senos, usamos as fórmulas do

Teorema 5.15, com $L = 2$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx \\ &= \int_0^1 x\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx + \int_1^2 \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx\ . \end{aligned}$$

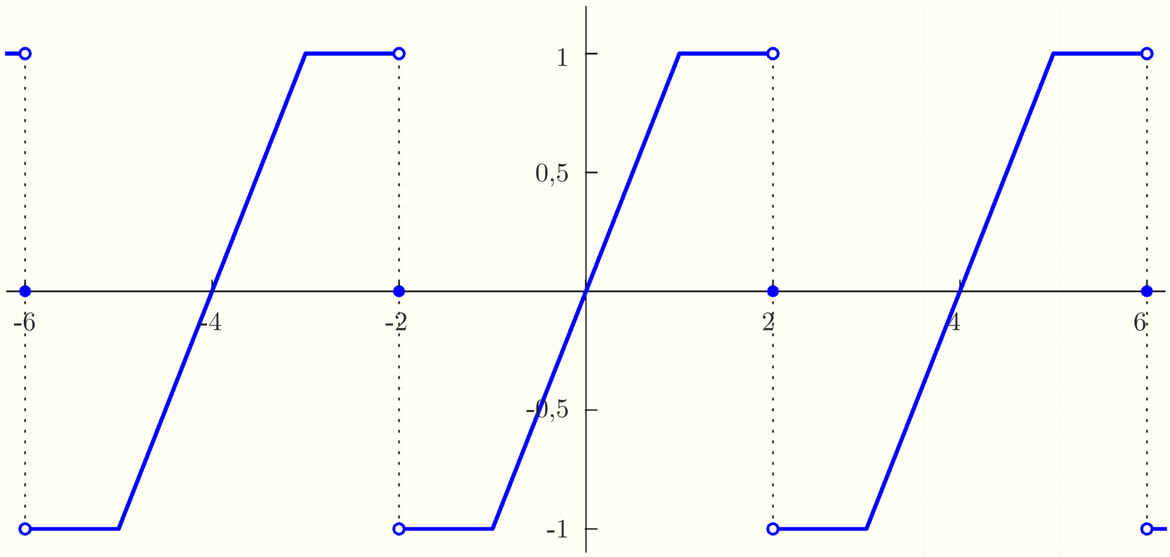
Integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{n\pi}\left(\frac{2}{n\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right) \\ &= \begin{cases} -\dfrac{2}{n\pi} & n \text{ par}, \\ \dfrac{2}{n\pi}\left(\dfrac{2}{n\pi}(-1)^{(n-1)/2} + 1\right) & n \text{ ímpar}. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, a série em senos fica da seguinte forma

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}\,\mathrm{sen}\,(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi}\left(\frac{2(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} + 1\right)\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) - \frac{\mathrm{sen}(n\pi x)}{n\pi}\ . \end{aligned}$$

Essa série vai convergir para a função ilustrada a seguir.



O próximo exemplo calcula a série de cossenos para a mesma função, produzindo uma extensão par.

Exemplo 5.5.8:
Encontre a Série em Cossenos da função f do exemplo anterior.

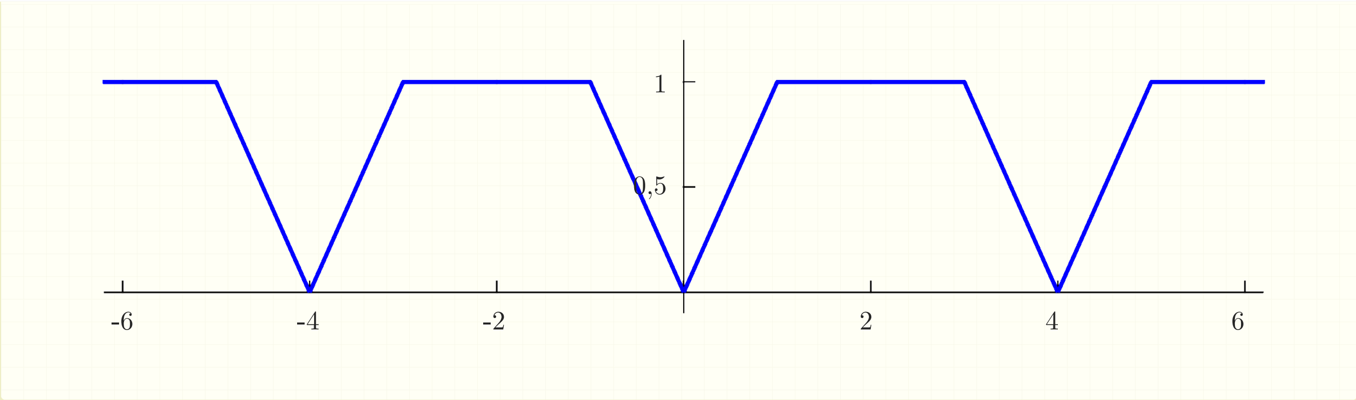
Como queremos a Série de Cossenos, isso é, a Série de Fourier da extensão par da função que só contém termos envolvendo cossenos, usamos as fórmulas do Teorema 5.14, com $L = 2$

$$a_n = \int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx \qquad\qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Após as integrações e simplificações concluímos que Série de Cossenos é dada por

$$S(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos(n\pi x)$$
$$- \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right).$$

O gráfico da soma dessa série é



Note que nos dois últimos exemplos construímos as séries de senos e cossenos de uma mesma função definida no intervalo $[0, 2]$, em cada caso a série converge para a extensão par ou ímpar da função, mas em nenhum momento precisamos escrever essas extensões. Elas são construídas automaticamente ao escolhermos um dos dois tipos de série.

Exercícios Seção 5.5

1) Determine se a função e par, impar ou nenhuma das duas.

a) $f(x) = x^3 - 2x$

b) $f(x) = x^3 - 2x + 1$

c) $f(x) = \mathrm{tg}(2x)$

d) $f(x) = \sec(x)$

e) $f(x) = |x|^3$

f) $f(x) = e^{-x}$

2) Dada a função f definida em um intervalo entre zero e L, esboce os gráficos das extensões par e ímpar de f de período $2L$. Desenhe três períodos da função estendida.

a) $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

c) $f(x) = 2 - x \qquad 0 \leq x < 2$

d) $f(x) = x - 3 \qquad 0 \leq x < 4$

e) $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

f) $f(x) = 4 - x^2 \qquad 0 \leq x < 1$

3) Encontre os coeficientes para as séries em senos e em cossenos para as extensões par e impar da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

4) Para cada função, encontre a Série de Fourier indicada e esboce o gráfico da função para qual a série converge em um intervalo de três períodos.

a) Série de cossenos com período 4

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

b) Série de senos com período 4

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

c) Série de senos com período 2π

$$f(x) = 1 \qquad 0 \leq x < \pi$$

d) Série de cossenos com período 2π

$$f(x) = 1 \qquad 0 \leq x < \pi$$

e) Série de senos com período 6π

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < \pi \\ 1 & \pi \le x < 2\pi \\ 2 & 2\pi \le x < 3\pi \end{cases}$$

f) Série de cossenos com período 2

$$f(x) = x \qquad 0 \le x < 1$$

g) Série de cossenos com período $2L$

$$f(x) = L - x \qquad 0 \le x < L$$

h) Série de senos com período $2L$

$$f(x) = L - x \qquad 0 \le x < L$$

5.6 Fenômeno de Gibbs

Essa seção discute o Fenômeno de Gibbs que ocorre com as somas parciais da Série de Fourier de funções com descontinuidades tipo salto. Nesses casos, mesmo que a série convirja para a função, as somas parciais apresentam um salto excessivo em torno da descontinuidade da função. Vamos ilustrar esse fenômeno usando uma onda quadrada com um exemplo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0 \\ 1 & 0 < x \le 1 \end{cases} \qquad f(x-2) = f(x)\ . \tag{5.6}$$

As somas parciais da série de Fourier dessa função são

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}\big((2k-1)\pi x\big)}{2k-1}\ . \tag{5.7}$$

Como f é contínua por partes, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

para todo x onde f é contínua. A Figura 5.3 mostra a função f, em preto, e as somas parciais S_3, em azul, e S_7, em magenta. Observe que um pouco antes e um pouco depois de cada descontinuidade de f a somas parciais se afastam do valor da função.

Para facilitar a visualização a Figura 5.4 amplia o gráfico da Figura 5.3 na região logo após uma descontinuidade, $0 \le x \le 0{,}4$, e acrescenta o gráfico de S_{45}. Observe que com o aumento do número de termos a soma parcial se aproxima da função, porém, o pico do salto não diminui, sempre alcançando um valor máximo próximo de 1,09. Esse comportamento se mantem não importando quantos termos sejam

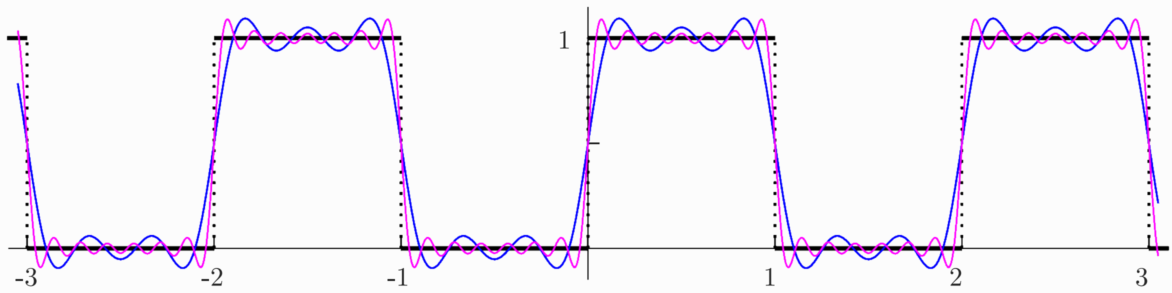


Figura 5.3: Função f e as somas parciais S_3 e S_7.

acrescentados na soma parcial e é a ele que damos o nome de Fenômeno de Gibbs. Esse fenômeno nos obriga a repensar como entendemos a convergência da Série de Fourier e se é possível usar suas somas parciais como aproximações para a função.

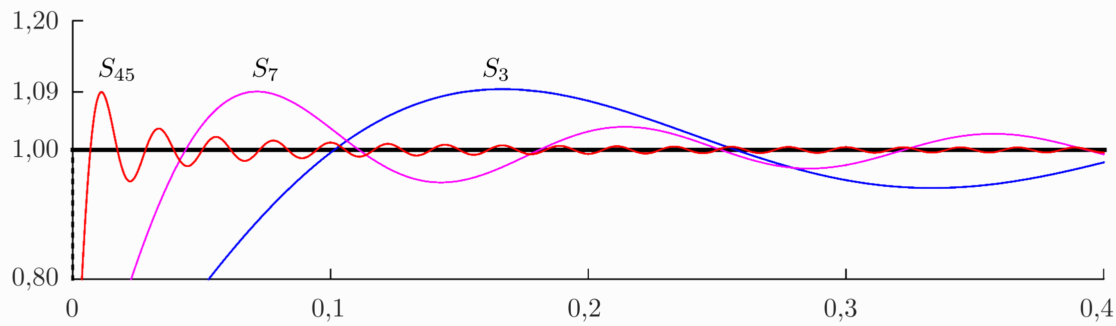


Figura 5.4: Ampliação do gráfico da função f e das somas parciais S_3, S_7 e S_{45}. na região logo após a descontinuidade

Para entendermos em que sentido a Série de Fourier converge e suas somas parciais são aproximações da função, vamos definir a distância entre duas funções u e v em um intervalo $[a, b]$ e usar esse valor como medida do erro entre as somas parciais e a função. Uma definição possível é dizer que a distância é igual a maior diferença entre as funções, isso é

$$d_\infty(u, v) = \max_{x\in[a,b]} |u(x) - v(x)| \, .$$

Essa definição é baseada na Norma Infinito e, em geral, funciona muito bem para decidirmos se duas funções estão próximas ou não. Porém, devido ao Fenômeno de Gibbs se calcularmos a distância entre uma função com descontinuidade tipo salto e as somas parciais da sua Série de Fourier veremos que a distância tente para um valor finito, no caso do nosso exemplo um valor pouco menor do que 0,09. Como o erro não tende a zero somos forçados a concluir que as somas parciais não se aproximam da função o que contradiz o teorema da convergência da Série de Fourier e também vai contra nossa percepção visual de que as somas parciais estão se aproximando da função.

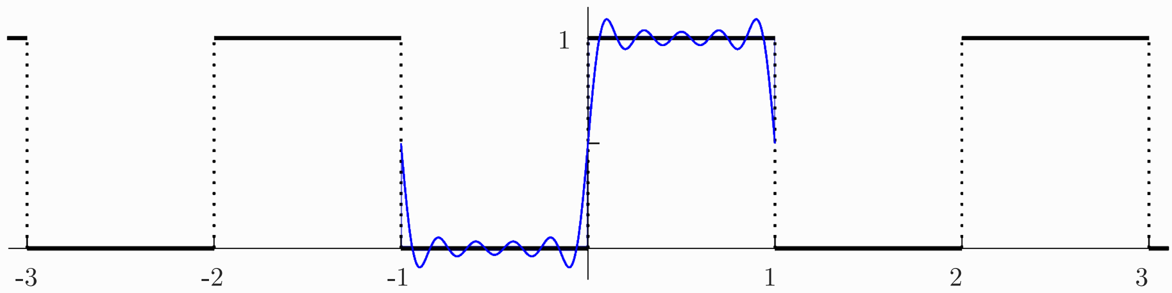


Figura 5.5: Calculo da diferença pela área.

A solução para esse aparente paradoxo é perceber que devemos medir a distância entre a função e as somas parciais como sendo a área entre elas, como mostra a Figura 5.5. Definimos então uma nova medida de distância

$$d_2(u,v) = \int_a^b \big(u(x) - v(x)\big)^2\,dx$$

que é baseada na Norma 2. Existe uma definição similar substituindo a elevação ao quadrado pelo módulo que corresponde a Norma 1. Porém, o quadrado é preferível pois é derivável e possui outras propriedades desejáveis que estão além da discussão dessa seção.

Usando essa medida de distância para calcular o erro, a diferença entre as somas parciais e a função tende a zero, como esperado, independentemente da função possuir descontinuidades ou não. Analisando novamente a Figura 5.4 podemos perceber que a área entre as somas parciais e a função realmente está diminuindo. Mesmo que o ponto máximo do pico não diminua sua base diminui e portanto sua área tende a zero.

5.7 Revisão

1) [resp] Obtenha a série de Fourier para as funções apresentadas abaixo.

a) $q(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

b) $g(x) = -x, \quad -2 \le x \le 2$

2) [resp] (Estudando uma função por sua série de Fourier) Considere uma função f contínua, com derivada contínua, definida em intervalo simétrico. A série de Fourier de sua extensão periódica é dada por

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \cos nx$$

Com base nessa série, vamos obter algumas informações sobre a função f.

a) A função f possui alguma simetria (par ou ímpar)? Se sim, qual?

b) Qual o período (da extensão) de f?

c) Qual o valor de f para $x = \pi$?

d) Obtenha os pontos críticos da função f.

3) Seja $f(x) = x^2$ para $-1 \leq x < 1$ e $f(x) = f(x+2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

a) Encontre a série de Fourier de f de período 2.

b) Esboce o gráfico da função definida pela série de Fourier de f em um intervalo de três períodos.

c) Há alguma diferença entre o gráfico de f e da série de Fourier de f?

4) Seja $f(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < 0 \\ L, & 0 < x < L \end{cases}$

a) Encontre a série de Fourier de f de período $2L$.

b) Esboce o gráfico da função definida pela série de Fourier de f em um intervalo de três períodos.

c) Nos pontos onde a extensão periódica de f de período $2L$ não está definido a série de Fourier converge?

5) Seja $f(x) = \begin{cases} L + x, & -L \leq x < 0 \\ L - x, & 0 \leq x < L \end{cases}$
e $f(x) = f(x + 2L)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Encontre a série de Fourier de f de período $2L$.

b) Esboce o gráfico da função definida pela série de Fourier de f em um intervalo de três períodos.

c) Há alguma diferença entre o gráfico de f e da série de Fourier de f?

6

Equações Diferenciais Parciais

6.1 Introdução . . . 227
6.2 EDO's e o Problema de Autovalores . . . 232
6.3 Método de Separação de Variáveis . . . 246
6.4 Equação do Calor . . . 247
6.5 Equação da Onda . . . 266
6.6 Equação de Laplace . . . 281
6.7 Revisão . . . 305

6.1 Introdução

Vamos começar com uma breve apresentação sobre o que são equações diferenciais e como podemos classificá-las. Uma equação diferencial é uma equação que envolve derivadas de uma função que queremos determinar. Se todas as derivadas são em relação a uma única variável, isso é, todas as derivadas são ordinárias, dizemos que a equação é uma Equação Diferencial Ordinária (EDO). Por outro lado, se a equação envolver derivadas em mais do que uma variável da função, isso é, as derivadas envolvidas são parciais, dizemos que a equação é uma Equação Diferencial Parcial (EDP).

Uma função que satisfaz a equação é chamada de Solução da equação. Em geral equações diferenciais não possuem solução única, isso é, impondo apenas a equação diferencial teremos uma família de soluções possíveis. Para determinar uma função dentro das soluções possíveis precisamos impor condições extras que chamamos de Condições de Fronteira ou Condições Iniciais.

As equações diferenciais podem ser classificadas segundo vários critérios, já descrevemos a classificação com relação ao número de variáveis, onde as equações podem ser ordinárias, por exemplo

$$\text{Determinar } u(x) \text{ tal que} \qquad u' + 2u = 1$$

ou parciais, por exemplo

$$\text{Determinar } u = y(x,y,z,t) \text{ tal que} \qquad u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

Note que, para que a expressão ficasse mais legível suprimimos as variáveis da função $u(x,y,z,t)$ e indicamos as derivadas como índices

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} u(x,y,z,t) \ .$$

Outro critério utilizado para classificar equações diferenciais é a derivada de maior ordem, dizemos que uma equação diferencial que envolve apenas derivadas de primeira ordem é uma Equação Diferencial de Primeira Ordem, por exemplo

$$\mathcal{L}(u) = au_x + bu + c = 0$$

da mesma forma nos referimos como uma Equação Diferencial de Segunda Ordem aquelas equações cuja derivada mais alta seja a segunda, por exemplo,

$$\mathcal{L}(u) = pu_{xx} + qu_x + ru + s = 0 \ .$$

Nesses exemplos, e em outras ocasiões, utilizamos a notação $\mathcal{L}(u)$ para indicar as operações aplicadas na função u.

Outro critério importante é a linearidade. Dizemos que uma equação diferencial é uma Equação Diferencial Linear se para quaisquer funções u e v e números a e b, vale a relação de linearidade

$$\mathcal{L}(au + bv) = a\mathcal{L}(u) + b\mathcal{L}(v) \ . \tag{6.1}$$

Uma propriedade extremamente importante das equações diferenciais lineares é que a combinação linear de soluções também é solução, isso é

$$\mathcal{L}(u) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(v) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}(au + bv) = 0$$

Se a relação de linearidade (6.1) não for verdadeira dizemos que a equação é uma Equação Diferencial Não-Linear.

Também podemos classificar as equações lineares como Homogêneas ou Não Homogêneas, uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem

$$p(t)y''(t) + q(t)y'(t) + r(t)y(t) = s(t)$$

será homogênea se $s(t) = 0$ e não homogênea caso contrário.

Nesse material vamos nos restringir ao estudo de Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem Lineares. Essas equações podem ser classificadas também segundo a "propagação da informação", por esse critério, as equações serão divididas em três classes que, por questões históricas, são chamadas de Hiperbólicas, Parabólicas e Elípticas.

Uma Equação Hiperbólica é uma equação que modela uma evolução temporal com velocidade finita. Normalmente, essas equações precisam ser complementadas por condições iniciais e de fronteira. A Equação da Onda, que vamos estudar, é o exemplo mais simples dessa classe

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} s \tag{6.2}$$

Essa equação modela, por exemplo, a oscilação de uma corda elástica esticada, neste caso, o coeficiente α^2 é dado por

$$\alpha^2 = \frac{T}{\rho}$$

onde T é a tensão na corda e ρ é a massa por unidade de comprimento do material da corda.

Uma Equação Parabólica modela fenômenos que acontecem muito mais rápido do que a escala de tempo do observador, nesse caso a informação se propaga com "velocidade infinita", esse tipo de equação também precisa de condições iniciais e de fronteira. Aqui vamos estudar a Equação do Calor

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{6.3}$$

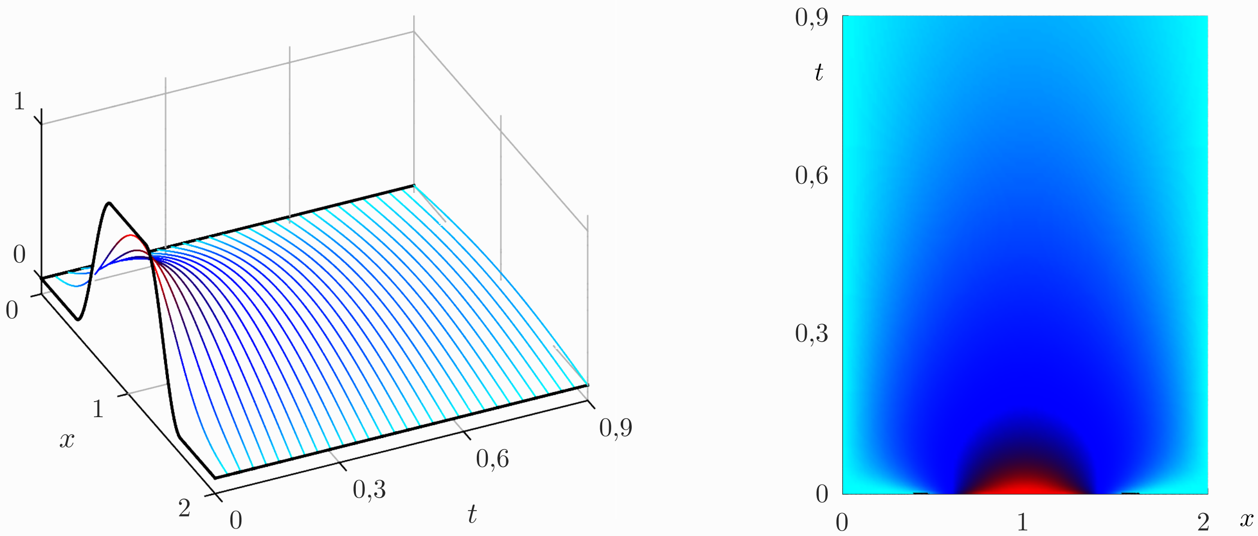
como exemplo dessa classe de equações. Entre outros fenômenos essa equação modela a condução de calor em uma barra finita, neste caso a constante α^2 é conhecida como difusibilidade térmica e depende apenas do material do qual a barra é feita e pode ser obtida por

$$\alpha^2 = \frac{k}{\rho s}$$

onde k é a condutividade térmica, ρ é a densidade e s é o calor específico do material na barra.

A terceira classe, das Equações Elípticas, modela situações de equilíbrio. Como as soluções dessas equações representam estados estacionários nenhuma das variáveis é interpretada como o tempo. Essas equações precisam apenas de condições de fronteira. A equação dessa categoria que vamos estudar é a Equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0\ . \tag{6.4}$$

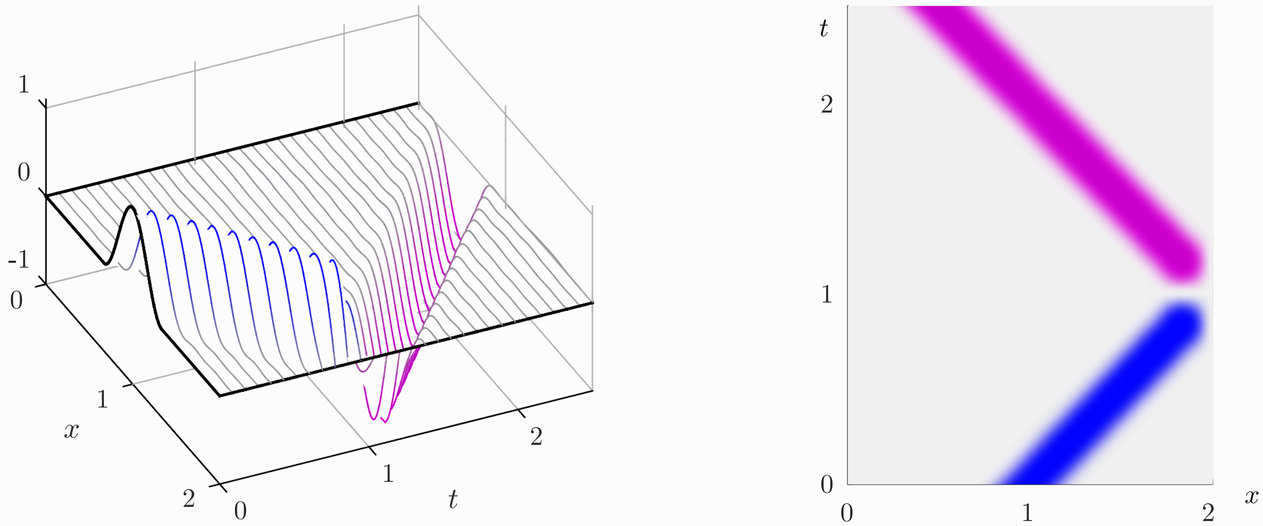


(a) Visualização em 3D. (b) Visualização como mapa.

Figura 6.1: Exemplo de solução da equação do calor.

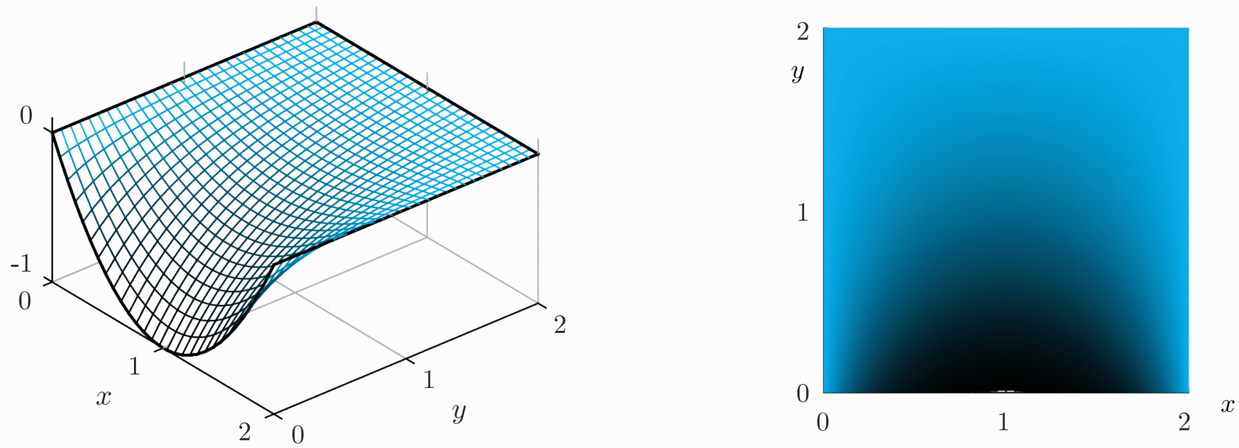
A Figura 6.1 mostra um exemplo de solução para a Equação do Calor em uma barra de comprimento 2 e com o tempo entre zero e 0,9. No instante inicial a parte central da barra tem temperatura igual a 1, com o avanço do tempo a temperatura se dissipa ficando mais próxima de zero. Os Gráficos 6.1a e 6.1b apresentam a mesma solução de formas alternativas.

A Figura 6.2 mostra um exemplo de solução para a Equação a Onda com um pulso centrado em $x = 1$ no instante inicial $t = 0$ que se propaga para a direita até



(a) Visualização em 3D. (b) Visualização como mapa.

Figura 6.2: Exemplo de solução da equação da onda.



(a) Visualização em 3D. (b) Visualização como mapa.

Figura 6.3: Exemplo de solução da equação de Laplace.

encontrar a fronteira e ser refletido com o sinal trocado. Os Gráficos 6.2a e 6.2b mostram a solução também em duas representações alternativas.

A Figura 6.3 mostra um exemplo de solução para equação de Laplace. Podemos considerar que essa solução representa uma membrana esticada com as extremidades presas no formato determinado pelas condições de fronteira. Novamente os gráficos, 6.3a e 6.3b mostram a solução de formas alternativas.

Existem diversas técnicas para obter soluções exatas ou aproximadas para EDP's, aqui vamos explorar a técnica de Separação de Variáveis e expansão da solução em Séries de Fourier. Para atingir esse objetivo vamos iniciar com uma revisão de equações diferencias ordinárias e problemas de autovalores, em seguida apresentamos a técnica de Separação de Variáveis e, por fim, aplicamos essa técnica em cada uma das três EDP's descritas.

6.2 EDO's e o Problema de Autovalores

Apresentamos aqui uma revisão sobre as equações diferenciais ordinárias homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes. Assim como dos problemas de valor inicial, de valores de contorno e de autovalores. Esses resultados serão importantes para resolvermos as equações diferenciais parciais mais a frente.

Uma equação diferencial ordinária linear homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes para a função $y = y(x)$ pode ser escrita como

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{6.5}$$

onde $a \neq 0$, b e c são constantes reais. Para resolvermos essa equação, fazemos $y(x) = e^{rx}$ para alguma constante r, calculamos suas derivadas e substituímos em (6.5) obtendo

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \ .$$

Usando o fato que a exponencial não é nula, transformamos essa expressão na Equação Característica da EDO (6.5)

$$ar^2 + br + c = 0 \ .$$

Ao buscarmos os valores de r que satisfazem essa equação do segundo grau temos três possibilidades dependendo do valor de delta $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ existem duas raízes reais distintas,

$\Delta = 0$ existe apenas uma raiz real,

$\Delta < 0$ existem duas raízes complexas conjugadas.

A seguir analisaremos o que ocorre em cada um desses casos. Para algumas analises será necessário utilizar números complexos, na Seção A.6 existe um resumo dos resultados necessários.

No caso em que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, temos duas raízes reais distintas, que denotaremos por r_1 e r_2, então

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \qquad \text{e} \qquad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

são as Soluções Fundamentais da equação. Além disso, qualquer solução da equação diferencial pode ser escrita como uma combinação linear dessas funções, portanto sua Solução Geral tem a forma

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \tag{6.6}$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

Assim como podemos mudar a base em um subespaço vetorial, também podemos mudar nossa escolha de soluções fundamentais. Uma escolha alternativa, que é bastante útil, é utilizar as Funções Hiperbólicas (veja (A.2) e (A.3)) que são combinações lineares da função exponencial

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \qquad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,.$$

Com essa escolha a solução geral é escrita como

$$y(x) = \tilde{c}_1 \cosh(r_1 x) + \tilde{c}_2 \operatorname{senh}(r_2 x) \tag{6.7}$$

para novas constantes $\tilde{c}_1$ e $\tilde{c}_2$.

Exemplo 6.2.1:
Dado $\sigma > 0$, encontrar a solução geral da equação

$$y'' - \sigma^2 y = 0\,.$$

A equação característica dessa equação diferencial é

$$r^2 - \sigma^2 = 0$$

suas raízes são

$$r_1 = \sigma \qquad \text{e} \qquad r_2 = -\sigma$$

portanto, a solução geral é dada por

$$y(x) = c_1 e^{\sigma x} + c_2 e^{-\sigma x}$$

com c_1 e c_2 constantes.

No caso em que $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ temos

$$r = -\frac{b}{2a}$$

como raiz da equação característica, nesse caso as soluções fundamentais são

$$y_1(x) = e^{-bx/2a} = \exp\left(\frac{-bx}{2a}\right) \qquad \text{e} \qquad y_2(x) = xe^{-bx/2a} = x\exp\left(\frac{-bx}{2a}\right)$$

portanto a solução geral é dada por

$$y(x) = c_1 \exp\left(\frac{-bx}{2a}\right) + c_2 x \exp\left(\frac{-bx}{2a}\right) \tag{6.8}$$

com c_1 e c_2 constantes.

Exemplo 6.2.2:
Encontrar a solução geral da equação

$$y'' = 0 \ .$$

A equação característica dessa equação diferencial é

$$r^2 = 0$$

cuja raiz é zero, neste caso, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} \\ &= c_1 + c_2 x \end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes.

Quando $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a equação característica tem duas raízes complexas conjugadas

$$r_1 = u + iw \qquad \text{e} \qquad r_2 = u - iw$$

Nesse caso podemos escolher as funções

$$y_1(x) = e^{ux}\,\mathrm{sen}(wx) \qquad \text{e} \qquad y_2(x) = e^{ux}\cos(wx)\ .$$

como soluções fundamentais, obtendo assim, a solução geral

$$y(x) = c_1 e^{ux}\,\mathrm{sen}(wx) + c_2 e^{ux}\cos(wx)\ . \tag{6.9}$$

Note que a parte real das raízes, u, aparece como coeficiente na função exponencial e portanto determina o crescimento ou decrescimento exponencial da solução, enquanto que a parte imaginária, w, aparece nas funções trigonométrica e portanto controla a frequência de oscilação da solução.

Exemplo 6.2.3:
Dado $\sigma > 0$, encontrar a solução geral da equação

$$y'' + \sigma^2 y = 0\ .$$

A equação característica é

$$r^2 + \sigma^2 = 0$$

cujas raízes complexas, calculadas por Bhaskara, são

$$r_1 = i\sigma \qquad \text{e} \qquad r_2 = -i\sigma$$

portanto, a solução geral é dada por

$$y = c_1 e^{0x}\,\mathrm{sen}(\sigma x) + c_2 e^{0x}\cos(\sigma x)$$

$$= c_1 \operatorname{sen}(\sigma x) + c_2 \cos(\sigma x)$$

com c_1 e c_2 constantes.

O Teorema a seguir resume o que discutimos até aqui sobre as soluções para essas equações.

Teorema 6.1: Solução Geral para EDO's

Dada uma equação diferencial ordinária linear homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0$$

para a função real $y = y(x)$, onde $a \neq 0$, b e c são constantes reais, sua equação característica é

$$ar^2 + br + c = 0$$

com soluções r_1 e r_2. A solução geral da EDO se enquadra em um dos três casos a seguir.

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$
: Nesse caso as soluções r_1 e r_2 são reais e distintas, portanto

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\ &= \tilde{c}_1 \cosh(r_1 x) + \tilde{c}_2 \operatorname{senh}(r_2 x) \end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$
: Temos uma única raiz real $r = r_1 = r_2 = {}^{-b}/_{2a}$, portanto

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$
: Aqui as soluções da equação característica são complexas

$$r_1 = u + iw \qquad \text{e} \qquad r_2 = u - iw$$

e produzem a solução geral

$$y(x) = c_1 e^{ux} \operatorname{sen}(wx) + c_2 e^{ux} \cos(wx)$$

Note que as soluções gerais dessas EDO's sempre possuem constantes arbitrárias e, portanto, representam famílias de funções. Para determinarmos uma função dentro dessas famílias precisamos impor condições extras. No caso dessas EDO's podemos impor essas condições em um único ponto ou em dois pontos distintos.

Ao impormos as condições em um único ponto criamos um Problema de Valor Inicial (PVI), devido a suas aplicações na Física, costumamos pensar que a variável independente desses problemas é o tempo t, como nesse exemplo

Determinar $u(t)$ tal que

$$
\begin{aligned}
&au'' + bu' + cu = 0 \\
&u\left(t_0\right) = u_0 \\
&u'(t_0) = v_0
\end{aligned}
$$

onde t_0 é o ponto onde a Condição Inicial é imposta e u_0 e v_0 são os valores impostos para a função e sua derivada nesse ponto.

Exemplo 6.2.4:
Determine a solução do problema de valor inicial

$$
\begin{aligned}
&u'' - 4u = 0 \\
&u\left(0\right) = 3 \\
&u'(0) = 2\ .
\end{aligned}
$$

Nesse caso

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16$$

e as raízes da equação característica são

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2 \\
r_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{16}}{2} = -2
\end{aligned}
$$

assim a solução geral para a equação diferencial é

$$u(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}\ .$$

Temos agora que determinar os valores para as constantes c_1 e c_2. Começamos avaliando a solução geral no ponto inicial $t = 0$

$$u(0) = c_1 e^{2\cdot 0} + c_2 e^{-2\cdot 0} = c_1 + c_2$$

calculamos agora a derivada da solução geral

$$u'(t) = 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t}$$

e a avaliamos em zero

$$u'(0) = 2c_1 e^{2\cdot 0} - 2c_2 e^{-2\cdot 0} = 2c_1 - 2c_2 \ .$$

Impondo as condições iniciais obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} c_1 + \ \ c_2 = 3 \\ 2c_1 - 2c_2 = 2 \end{cases}$$

cuja solução é

$$c_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad c_2 = 1$$

assim a solução do PVI é

$$u(t) = 2e^{2t} + e^{-2t} \ .$$

Outra forma de impor as condições extras é fixando o valor da função, ou da sua derivada, em dois pontos distintos, esse tipo de problema é chamado de Problema de Valores de Contorno (PVC)

Determinar $u(x)$ tal que

$$\begin{aligned} &au'' + bu' + cu = p \qquad (6.10)\\ &u(x_1) = u_1 \\ &u(x_2) = u_2 \ . \end{aligned}$$

Também devido a suas aplicações na Física, tipicamente interpretamos a variável independente de um problema de valores de contorno como uma variável espacial x. Nesse exemplo x_1 e x_2 são os pontos onde as condições de fronteira estão impostas e em geral estaremos interessados em obter uma solução no intervalo entre esses pontos.

Podemos classificar os problemas de valores de contorno como homogêneos ou não homogêneos. Considerando o problema (6.10) como exemplo, se $p = 0$ temos uma equação diferencial homogênea. Se u_1 e u_2 também forem zero dizemos que o PVC é homogêneo. Note que todo problema de valores de contorno homogêneo admite a solução identicamente nula $u(x) = 0$ que chamamos de Solução Trivial.

Determinar a existência da solução para um problema de valores de contorno pode ser mais complexo do que para um problema de valores iniciais, além disso os PVC podem ter ou não solução e se tiverem ela pode ser única ou não. Os próximos exemplos ilustram a solução desses problemas.

Exemplo 6.2.5:
Resolver o problema de valores de contorno

$$\begin{aligned}
&u'' + 2u = 0\\
&u(0) = 1\\
&u(\pi) = 0\ .
\end{aligned}$$

Começamos resolvendo a equação característica onde

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -8$$

e as raízes da equação característica são

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{-8}}{2} = i\sqrt{2}\\
r_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{-8}}{2} = -i\sqrt{2}
\end{aligned}$$

portanto, a solução geral para a equação diferencial é

$$u(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{2}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}x\right)\ .$$

Impondo a condição em $x = 0$ temos

$$u(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \operatorname{sen}(0) = c_1 = 1$$

portanto $c_1 = 1$. Podemos agora impor a segunda condição

$$u(\pi) = \cos\left(\sqrt{2}\pi\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\pi\right) = 0$$

isolando c_2 temos

$$c_2 = -\frac{\cos\left(\sqrt{2}\pi\right)}{\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\pi\right)} = -\cot\left(\sqrt{2}\pi\right)$$

portanto a solução para o PVC é

$$u(x) = \cos\left(\sqrt{2}x\right) - \cot\left(\sqrt{2}\pi\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}x\right) .$$

O próximo exemplo é um caso onde o problema pode não ter solução ou ter infinitas soluções.

Exemplo 6.2.6:
Resolver o problema de valores de contorno

$$u'' + u = 0$$
$$u(0) = 1$$
$$u(\pi) = a .$$

Sabemos que a solução geral da equação diferencial é

$$u(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x) .$$

Impondo a primeira condição temos

$$u(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \operatorname{sen}(0) = c_1 = 1$$

portanto $c_1 = 1$. Ao impormos a segunda condição obtemos

$$u(\pi) = c_1 \cos(\pi) + c_2 \operatorname{sen}(\pi) = -c_1 = a$$

Se $a \neq -1$ essa condição não pode ser satisfeita e não existe nenhuma solução para o problema.

Se $a = -1$ a segunda condição é satisfeita, mas teremos infinitas soluções, pois c_2 pode assumir qualquer valor

$$u(x) = \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x) .$$

Como veremos a frente, ao aplicarmos o método de Separação de Variáveis vamos obter um tipo de problema envolvendo equações diferenciais ordinárias que chamamos de Problema de Autovalores. Esses problemas consistem em determinar as condições em que um tipo específico de problema de valores de contorno possui soluções não triviais. Ao invés de apresentar uma teoria geral vamos explorar esse conceito através de um exemplo, nesse caso queremos determinar para quais valores de λ o seguinte problema de valores de contorno possui soluções não triviais.

Determinar $u(x)$ tal que

$$\begin{aligned} &u'' + \lambda u = 0 \\ &u(x_1) = 0 \\ &u(x_2) = 0 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Note que esse problema sempre possui a solução trivial $u(x) = 0$, mas essa solução raramente é relevante, por isso, estamos interessados na existência de outras soluções. Observe a semelhança com o problema de encontrar os autovalores e autovetores de uma matriz, A, onde buscamos os valores λ tais que o sistema linear

$$Av = \lambda v$$

possua soluções não triviais. Cada valor para λ que satisfaz essa condição é chamado Autovalor e o vetor v correspondente é chamado Autovetor. O próximo exemplo ilustra as possibilidades de solução dos problemas de valores de contorno dados valores diferentes para λ.

EXEMPLO 6.2.7:
Resolver o problema de valores de contorno

$$\begin{aligned} &u'' + \lambda u = 0 \\ &u(0) = 0 \\ &u(\pi) = 0 \end{aligned}$$

para $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$.

Sabemos que a solução geral da equação diferencial é

$$u(x) = c_1 \cos(\sigma x) + c_2 \operatorname{sen}(\sigma x)$$

onde fizemos $\sigma = \sqrt{\lambda}$ para evitar a repetição da raiz.

Impondo a primeira condição temos

$$u(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \operatorname{sen}(0) = c_1 = 0\ .$$

Assim a segunda condição pode ser escrita como

$$u(\pi) = c_2 \operatorname{sen}(\sigma\pi) = 0\ .$$

Se $\lambda = 1$ temos que $\sigma = 1$ e o seno se anula, pois

$$\operatorname{sen}(\sigma\pi) = \operatorname{sen}(\pi) = 0\ .$$

Portanto a condição será satisfeita para qualquer valore de c_2 e o PVC possui infinitas soluções

$$u(x) = c_2 \operatorname{sen}(x)\ .$$

Porém, se $\lambda = 2$ temos que $\sigma = \sqrt{2}$ e portanto

$$\operatorname{sen}(\sigma\pi) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\pi\right) \neq 0$$

assim, para satisfazer a segunda condição precisamos impor $c_2 = 0$ e o PVC possui apenas a solução trivial

$$u(x) = 0\ .$$

Nosso objetivo é encontrar todos os valores de λ para os quais o PVC (6.11) possui soluções não triviais. Sem perda de generalidade vamos escolher o domínio como sendo o intervalo $[0, L]$, ou seja $x_1 = 0$ e $x_2 = L$.

$$\begin{aligned} &u'' + \lambda u = 0 \\ &u(0) = 0 \\ &u(L) = 0\ . \end{aligned} \tag{6.12}$$

Além disso, vamos dividir o problema em três casos $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$, pois a solução geral para a equação diferencial será diferente em cada um.

Ao abordarmos o primeiro caso, $\lambda > 0$, definimos $\sigma^2 = \lambda$, para simplificar as expressões evitando a repetições de raízes quadradas. Note que $\sigma \neq 0$ e podemos considerá-lo sempre positivo. Nesse caso o problema (6.11) assume a forma

$$u'' + \sigma^2 u = 0$$
$$u(0) = 0$$
$$u(L) = 0\ .$$

Pelo Teorema 6.1 sua solução geral é

$$u(x) = c_1 \cos(\sigma x) + c_2 \operatorname{sen}(\sigma x)\ .$$

Como vimos no Exemplo 6.2.7 a condição $u(0) = 0$ implica que $c_1 = 0$, portanto a solução assume a forma

$$u(x) = c_2 \operatorname{sen}(\sigma x)$$

como queremos soluções não triviais c_2 não pode ser zero, assim ao impormos a segunda condição

$$u(L) = c_2 \operatorname{sen}(\sigma L) = 0$$

precisamos que

$$\operatorname{sen}(\sigma L) = 0\ .$$

Sabemos que a função seno se anula para todo múltiplo inteiro de π portanto essa condição será satisfeita sempre que

$$\sigma_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como $\lambda = \sigma^2$ temos que os Autovalores são

$$\lambda_n = \sigma_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.13}$$

para cada autovalor temos uma Autofunção correspondente

$$u_n(x) = \operatorname{sen}(\sigma_n x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\ . \tag{6.14}$$

Como as autofunções são determinadas a menos de uma constante multiplicativa escolhemos a constante c_2 igual a 1.

Considerando agora o caso $\lambda < 0$, fazemos agora $\lambda = -\sigma^2$, e o problema (6.11) é escrito como

$$u'' - \sigma^2 u = 0$$
$$u(0) = 0$$
$$u(L) = 0\ .$$

Nesse momento escolhemos escrever a solução geral em termos das funções hiperbólicas (6.7) pois elas serão mais convenientes quando aplicarmos as condições de fronteira

$$u(x) = c_1 \cosh(\sigma x) + c_2 \operatorname{senh}(\sigma x)\ .$$

Aplicando a primeira condição verificamos que

$$u(0) = c_1 \cosh(0) + c_2 \operatorname{senh}(0) = c_1 = 0$$

então a solução geral passa a ser

$$u(x) = c_2 \operatorname{senh}(\sigma x)$$

A segunda condição impõe que

$$u(L) = c_2 \operatorname{senh}(\sigma L) = 0$$

porém, a função $\operatorname{senh}(x)$ só é zero quando $x = 0$ e portanto a única solução possível para essa condição é $c_2 = 0$. Como, para todo $\lambda < 0$, a única solução possível é a solução trivial, não existem autovalores negativos para o problema (6.11).

O último caso a ser considerado é $\lambda = 0$, agora o problema (6.11) se resume a

$$u'' = 0$$
$$u(0) = 0$$
$$u(L) = 0$$

cuja solução geral é

$$u(x) = c_1 x + c_2\ .$$

Ao impormos as condições verificamos que $c_1 = c_2 = 0$ e, portanto, $\lambda = 0$ não é um autovalor do problema (6.11).

Ao longo desse capítulo precisaremos resolver diversos problemas de autovalores similares a esse, o método de solução sempre será o mesmo discutido aqui.

Exercícios Seção 6.2

1) [resp] Encontre a solução geral da equação

$$y'' + 5' + 6y = 0$$

2) [resp] Encontre a solução para o problema de valor inicial

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = 3$$

3) [resp] Encontre a solução para o problema de valor inicial

$$4y'' - 8y' + 3y = 0 \qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = \frac{1}{2}$$

4) Encontre a solução geral para cada equação diferencial

a) $y'' + 2y' - 3y = 0$

b) $y'' + 3y' + 2y = 0$

c) $6y'' - y' - y = 0$

d) $2y'' - 3y' + y = 0$

e) $y'' + 5y' = 0$

f) $4y'' - 9y = 0$

g) $y'' - 9y' + 9y = 0$

h) $y'' - 2y' - 2y = 0$

5) Encontre a solução de cada problema de valor inicial

a) $y'' + y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 1$

b) $y'' + 4y' + 3y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = -1$

c) $6y'' - 5y' + y = 0 \qquad y(0) = 4 \qquad y'(0) = 0$

d) $y'' + 3y' = 0 \qquad y(0) = -2 \qquad y'(0) = 3$

e) $y'' + 5y' + 3y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$

f) $2y'' + y' - 4y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$

g) $y'' + 8y' - 9y = 0 \qquad y(1) = 1 \qquad y'(1) = 0$

h) $4y'' - y = 0 \qquad y(-2) = 1 \qquad y'(-2) = -1$

6) Para cada problema de valores de contorno encontre a solução ou mostre que não existe uma solução

a) $y'' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(\pi) = 1$

b) $y'' + 2y = 0 \qquad y'(0) = 1 \qquad y'(\pi) = 0$

c) $y'' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y(L) = 0$

d) $y'' + y = 0 \qquad y'(0) = 1 \qquad y(L) = 0$

e) $y'' + y = x \qquad y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$

f) $y'' + 2y = x \qquad y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$

g) $y'' + 4y = \cos(x) \qquad y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$

h) $y'' + 4y = \operatorname{sen}(x) \qquad y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$

i) $y'' + 4y = \cos(x) \qquad y'(0) = 0 \qquad y'(\pi) = 0$

j) $y'' + 3y = \cos(x) \qquad y'(0) = 0 \qquad y'(\pi) = 0$

7) Encontre os autovalores e as autofunções para cada problema de valores de contorno, assuma que todos os autovalores, λ, são reais.

a) $y'' + \lambda y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(\pi) = 0$

b) $y'' + \lambda y = 0 \qquad y'(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$

c) $y'' + \lambda y = 0 \qquad y'(0) = 0 \qquad y'(\pi) = 0$

d) $y'' + \lambda y = 0 \qquad y'(0) = 0 \qquad y(L) = 0$

e) $y'' + \lambda y = 0 \qquad y'(0) = 0 \qquad y'(L) = 0$

f) $y'' - \lambda y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(L) = 0$

6.3 Método de Separação de Variáveis

O método de Separação de Variáveis consiste essencialmente em supor que existe uma solução da equação diferencial parcial que pode ser escrita como o produto de outras funções, onde cada uma dessas novas funções depende de uma única variável. Claro que essa suposição nem sempre é verdadeira mas, como veremos, ela é muito eficaz para os problemas que desejamos resolver.

Vamos apresentar esse método aplicando-o na equação do calor (6.3) como um exemplo

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \ . \tag{6.15}$$

Começamos supondo que podemos escrever a solução da equação diferencial parcial como o produto de duas funções, onde cada função depende de uma única variável

$$u(x,t) = X(x)T(t) \ .$$

Derivando u uma vez com relação a t e duas vezes com relação a x, obtemos expressões para as derivadas de u envolvidas na equação do calor

$$u_t(x,t) = X(x)T'(t) \qquad \text{e} \qquad u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t) \ .$$

Substituindo essas derivadas na equação (6.15) obtemos

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \ .$$

Agrupando os termos que dependem de x ou t, chegamos a

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \ .$$

Note que essa equação consiste de uma igualdade entre uma função que só depende de t e outra que só depende de x, a única forma para essa igualdade ser verdadeira é que ambas sejam constantes. Dessa forma podemos escrever

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

para alguma constante λ. O sinal negativo foi escolhido para simplificar as equações ordinárias que serão produzidas. Podemos agora desmembrar essa equação em uma envolvendo apenas a variável x e outra envolvendo apenas t, cada uma dessas novas equações é uma EDO linear com coeficientes constantes que podem ser resolvidas com as técnicas da Seção 6.2

$$X'' + \lambda X = 0\ , \tag{6.16}$$

$$T' + \alpha^2 \lambda T = 0\ . \tag{6.17}$$

Nas próximas seções vamos aplicar essa técnica para resolver a equação do Calor, da Onda e de Laplace.

Exercícios Seção 6.3

1) Determine se o método de separação de variáveis pode ser aplicado a cada EDP para obter um par de EDO's. Caso seja possível, encontre as EDO's.

a) $xu_{xx} + u_t = 0$

b) $tu_{xx} + xu_t = 0$

c) $u_{xx} + u_{xt} + u_t = 0$

d) $\left[p(x)u_x\right]_x - r(x)u_{tt} = 0$

e) $u_{xx} + (x+y)u_{yy} = 0$

f) $u_{xx} + u_{yy} + xu = 0$

6.4 Equação do Calor

A equação diferencial parcial linear de segunda ordem (6.3)

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

é chamada de Equação do Calor, pois, entre outros fenômenos, ela modela a dissipação de calor em uma barra de material homogêneo com seção plana pequena. A seção plana deve ser pequena o suficiente para que possamos desprezar a dissipação nas direções perpendiculares ao comprimento da barra. Nesse caso a constante α^2 é conhecida como difusividade térmica e depende apenas do material do qual a barra é feita e pode ser obtida por

$$\alpha^2 = \frac{k}{\rho s}$$

onde k é a condutividade térmica, ρ é a densidade e s é o calor específico do material na barra. Note que se t for o tempo medido em segundos e x a distancia medida em metros α^2 tem a unidade de metros ao quadrado por segundo.

A dissipação de calor na barra depende da sua temperatura inicial e do ambiente onde ela está inserida, essa informação é fornecida pelas condição inicial e de fronteira. Ao agregarmos essas condições à equação diferencial criamos o Problema de Dissipação do Calor em uma Barra Finita

$$\begin{array}{ll} u_t = \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < t \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq L \\ \text{Condição em } x = 0 & 0 < t \\ \text{Condição em } x = L & 0 < t\,. \end{array} \tag{6.18}$$

Nesse problema consideramos uma barra de comprimento $L > 0$ e a representamos no intervalo $0 \leq x \leq L$. Iniciamos a observação no instante $t = 0$ e seguimos por todo o tempo. A função $u(x,t)$ indica a temperatura da barra na posição x e instante t. Note que essa função obedece a equação diferencial no interior do domínio e as condição inicial e de fronteira nas bordas do domínio. A distribuição de temperatura inicial é determinada pela condição inicial $u(x,0) = f(x)$.

Falta determinar quais são as condições nos extremos da barra. Existem várias escolhas possíveis para essas condições que dependem do que se deseja modelar, podemos impor condições de simetria, de entrada ou saída de calor ou impor uma temperatura fixa entre outas possibilidades. Aqui vamos apresentar os casos que podem ser resolvidos mais facilmente pelas técnicas que estamos empregando.

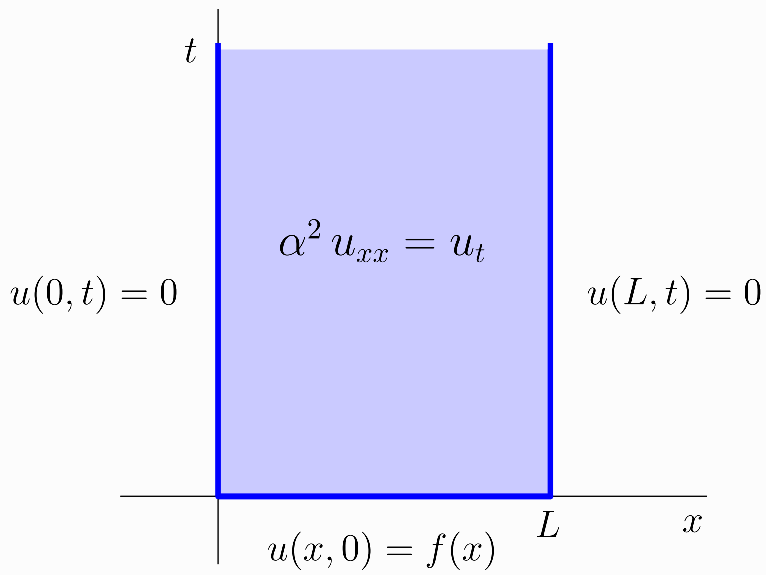


Figura 6.4: Domínio e condições do problema de dissipação do calor com fronteiras de Dirichlet homogêneas.

O primeiro tipo de condição de fronteira que vamos considerar é a Condição de Dirichlet Homogênea. Essa condição impõe que a temperatura é sempre zero nos dois extremos da barra o que nos leva ao problema

$$\begin{aligned} & u_t = \alpha^2 u_{xx} && 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < t \\ & u(x,0) = f(x) && 0 \le x \le L \\ & u(0,t) = 0 && 0 < t \\ & u(L,t) = 0 && 0 < t\ . \end{aligned} \tag{6.19}$$

A Figura 6.4 ilustra esse problema mostrando seu domínio, condição inicial e de fronteira. Se a temperatura inicial for nula, isso é, $f(x) = 0$ a solução desse problema é trivial $u(x,t) = 0$ o que não fornece nenhuma informação relevante. Dessa forma, impomos que $f(x)$ não seja nula e portanto a solução trivial não pode satisfazer esse problema.

Se escolhemos impor um valor de temperatura diferente de zero em um dos extremos da barra temos as Condição de Dirichlet Não Homogênea, que nos leva ao problema

$$\begin{aligned} & u_t = \alpha^2 u_{xx} && 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < t \\ & u(x,0) = f(x) && 0 \le x \le L \\ & u(0,t) = u_1 && 0 < t \\ & u(L,t) = u_2 && 0 < t \end{aligned} \tag{6.20}$$

onde u_1 e u_2 indicam as temperaturas fixas em cada extremo da barra.

Outra escolha possível é impor fluxos constantes como condições de fronteira, fazemos isso impondo valores para as derivadas da função u em relação a variável x. Essa é a Condição de Neumann e define o problema

$$\begin{aligned} & u_t = \alpha^2 u_{xx} && 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < t \\ & u(x,0) = f(x) && 0 \le x \le L \\ & u_x(0,t) = v_1 && 0 < t \\ & u_x(L,t) = v_2 && 0 < t \end{aligned} \tag{6.21}$$

onde v_1 e v_2 indicam as variações de temperatura em cada extremo da barra. Se um desses valores for nulo ele indica que não há fluxo nesse extremo o que representa uma condição de simetria.

Na próxima subseção mostramos como resolver a equação do calor com condição de

Dirichlet homogênea. Na Subseção 6.4.2 apresentamos o problema com condição de Dirichlet não homogênea e na Subseção 6.4.3 com condição de Neumann.

6.4.1 Condição de Dirichlet Homogênea

Nessa subseção vamos resolver o problema de dissipação de calor com condição de Dirichlet homogênea (6.19).

Definição 6.2: Problema do Calor com Fronteira de Dirichlet Homogênea

O problema de propagação de calor com fronteira de Dirichlet homogênea consiste da equação do calor com as seguintes condições iniciais e de fronteira

$$\begin{array}{ll} u_t = \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < t \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & 0 < t \end{array}$$

onde $L > 0$ e f não é identicamente nula no intervalo $[0, L]$.

Como vimos na Seção 6.3, sobre separação de variáveis, ao supormos que é possível escrever a função u como o produto de duas funções onde cada uma depende de uma única variável $u(x,t) = X(x)T(t)$ a equação diferencial parcial se transforma em duas equações diferenciais ordinárias (6.16) e (6.17)

$$X'' + \lambda X = 0 ,$$
$$T' + \alpha^2 \lambda T = 0 .$$

Consideraremos primeiro a equação em x e as condições de fronteira do Problema (6.2)

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad 0 < t$$

reescrevendo essas condições em termos das funções X e T temos as expressões

$$\begin{array}{l} u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(L,t) = X(L)T(t) = 0 \end{array}$$

que devem valer para todo $t > 0$. Como fazer $T(t) = 0$ para todo t leva à solução trivial devemos impor

$$X(0) = X(L) = 0 .$$

Assim chegamos a um problema de autovalores para determinar a função X

$$
\begin{aligned}
& X'' + \lambda X = 0 \\
& X(0) = 0 \\
& X(L) = 0\ .
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

Note que esse é exatamente o problema (6.12) que resolvemos sa Seção 6.2. Sabemos então que soluções não triviais para esse problema só existem para os autovalores

$$
\lambda_n = \sigma_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.23}
$$

que nos fornecem as autofunções

$$
X_n(x) = \operatorname{sen}(\sigma_n x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ . \tag{6.24}
$$

Os gráficos do lado esquerdo da Figura 6.5 mostram as sete primeiras funções X_n. Note que, todas essas funções valem zero nos extremos do intervalo, $x = 0$ e $x = L$, atendendo a condição de fronteira de Dirichlet homogênea. Além disso, podemos ver que o valor de n determina o número de oscilações dentro do intervalo.

Agora que os valores possíveis para λ estão estabelecidos, podemos voltar na equação envolvendo o tempo

$$
T' + \alpha^2\sigma_n^2 T = 0
$$

cuja solução é

$$
T_n(t) = e^{-\alpha^2\sigma_n^2 t} = \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{L^2}\,t\right)\ . \tag{6.25}
$$

Os gráficos do lado direito da Figura 6.5 mostram as sete primeiras funções T_n. Note que, todas essas funções são exponenciais decrescentes que valem 1 quando $t = 0$ e o valor de n determina a rapidez com que elas decrescem.

Podemos agora desfazer a separação de variáveis $u(x,t) = X(x)T(t)$ usando as soluções (6.24) e (6.25) e obter a seguinte lista de soluções para a equação do calor

$$
u_n(x,t) = \exp\left(-\alpha^2\sigma_n^2 t\right)\operatorname{sen}(\sigma_n x) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.26}
$$

Qualquer uma das funções u_n satisfaz a equação diferencial e as condições de fronteira do problema de dissipação do calor com condição de Dirichlet homogênea, por isso

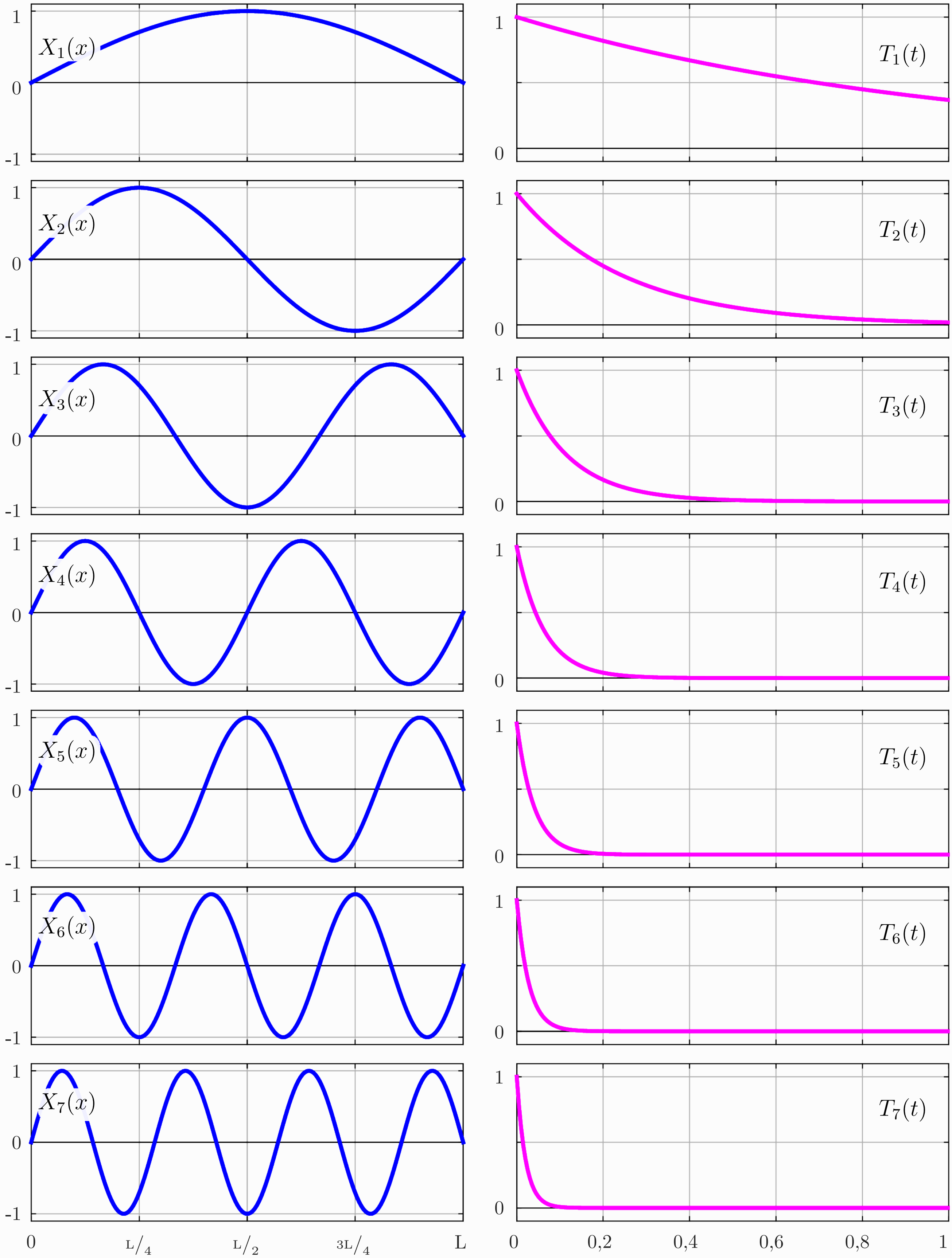


Figura 6.5: Autofunções (6.24), X_n, e soluções (6.25) da EDO para o tempo, T_n, da equação do calor com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas.

elas são chamadas de Soluções Fundamentais do Problema 6.2. A Figura 6.6 exibe as seis primeiras soluções fundamentais para a equação do calor com $L = 2$ e $\alpha = 0{,}5$.

Porém, exceto em casos muito particulares nenhuma delas vai satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$. Para satisfazer a condição inicial, observamos que a equação diferencial é linear e as condições de fronteira são homogêneas, portanto qualquer combinação linear da funções (6.26) também é solução da equação diferencial e satisfaz as condições de fronteira. Podemos então escrever a Solução Geral como a série de funções

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\alpha^2\sigma_n^2 t\right) \operatorname{sen}\left(\sigma_n x\right) \ . \tag{6.27}$$

Temos agora que impor a condição inicial $u(x,0) = f(x)$ para $x \in [0,L]$. Começamos avaliando $u(x,0)$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\sigma_n x\right)$$

e escrevendo a condição como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\sigma_n x\right) \qquad x \in [0,L] \ .$$

Comparando com a Série de Fourier de Senos descrita no Teorema 5.15 percebemos que os coeficientes c_n podem ser calculados pela fórmula

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\sigma_n x\right)\, dx \tag{6.28}$$

desde que a a série de Fourier da função f seja exista.

A proposição a seguir apresenta a solução do Problema 6.2 obtida.

Proposição 6.3: Solução do Problema do Calor com Fronteira de Dirichlet Homogênea

A solução do Problema 6.2 é dada pela solução geral (6.27)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\, t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\, x\right)$$

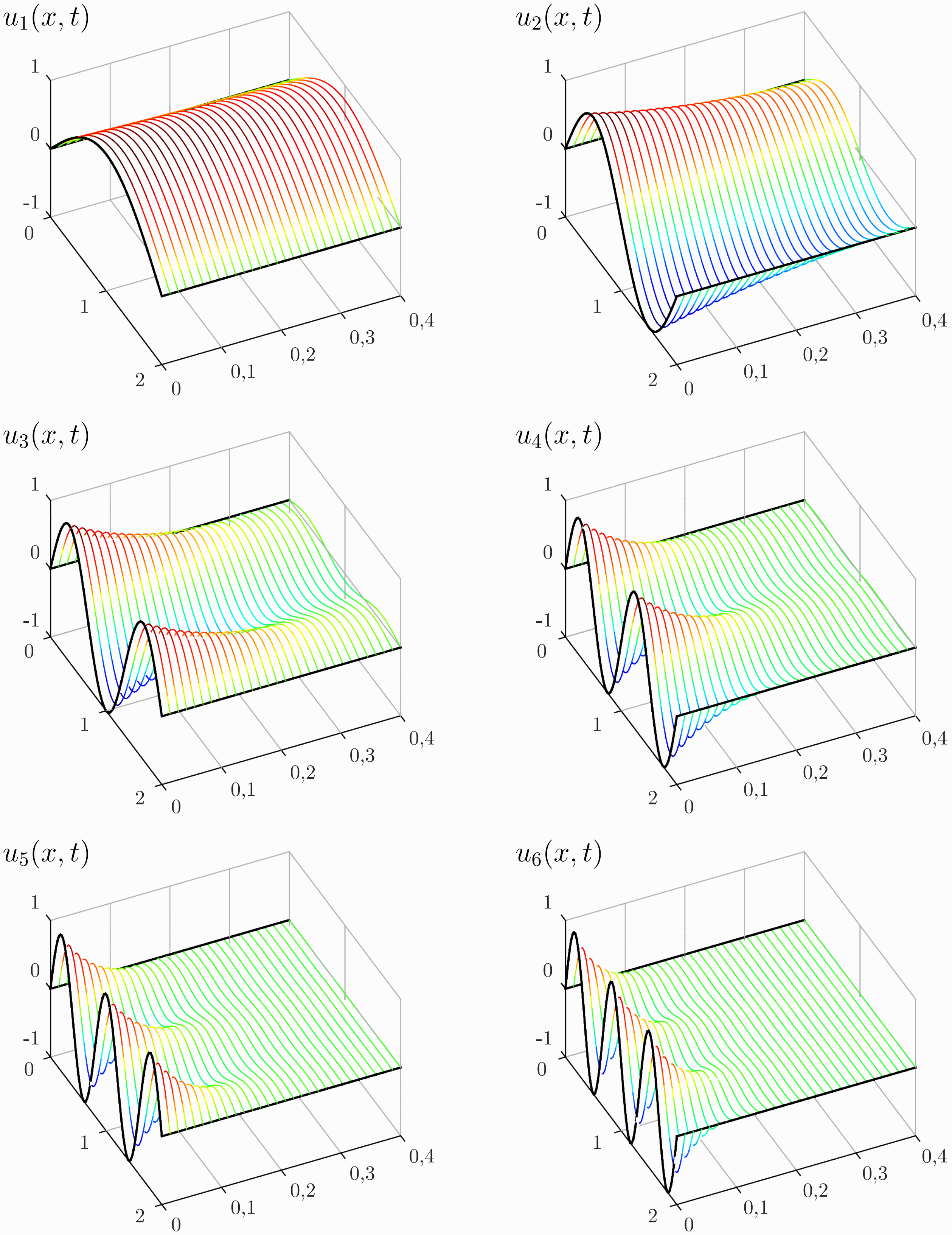


Figura 6.6: Soluções fundamentais (6.26) da equação do calor com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas.

com os coeficientes c_n determinados pela Série de Fourier (6.28) da expansão ímpar da função f

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx\,.$$

O próximo exemplo ilustra a aplicação dessa proposição para obter a solução de um problema envolvendo a equação do calor.

Exemplo 6.4.1:
Encontre a solução para o problema de dissipação de calor

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} && 0 < x < 5 \quad \text{e} \quad 0 < t\\
&u(x,0) = 2 && 0 \le x \le 5\\
&u(0,t) = u(5,t) = 0 && 0 < t\,.
\end{aligned}$$

O primeiro passo é reconhecer que esse é um problema do tipo 6.2 com

$$\alpha = 1 \qquad L = 5 \qquad f(x) = 2$$

cuja solução é descrita pela Proposição 6.3. Portanto sua solução geral é

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{L^2}\,t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{25}\,t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{5}\,x\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{5}\right)^2 t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{5}\,x\right)
\end{aligned}$$

e os coeficientes c_n são dados por

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx\\
&= \frac{2}{5}\int_0^5 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{5}\int_0^5 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\, dx \\
&= \frac{4}{5}\left[-\frac{5}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\right]\Bigg|_0^5 \\
&= -\frac{4}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\right]\Bigg|_0^5 \\
&= -\frac{4}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi 5}{5}\right) - \cos\left(\frac{n\pi 0}{5}\right)\right] \\
&= -\frac{4}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - 1\right] \\
&= \frac{4}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi)\right] \\
&= \begin{cases} \dfrac{8}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par}\ . \end{cases}
\end{aligned}
$$

Obtemos a solução do problema substituindo c_n na solução geral. Primeiro removemos os termos ímpares, pois $c_n = 0$ nesses casos, e mudamos o índice dos termos pares para $n = 2p$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{5}\right)^2 t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{5}\, x\right) \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} c_{2p} \exp\left(-\left(\frac{2p\pi}{5}\right)^2 t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2p\pi}{5}\, x\right)\ .
\end{aligned}
$$

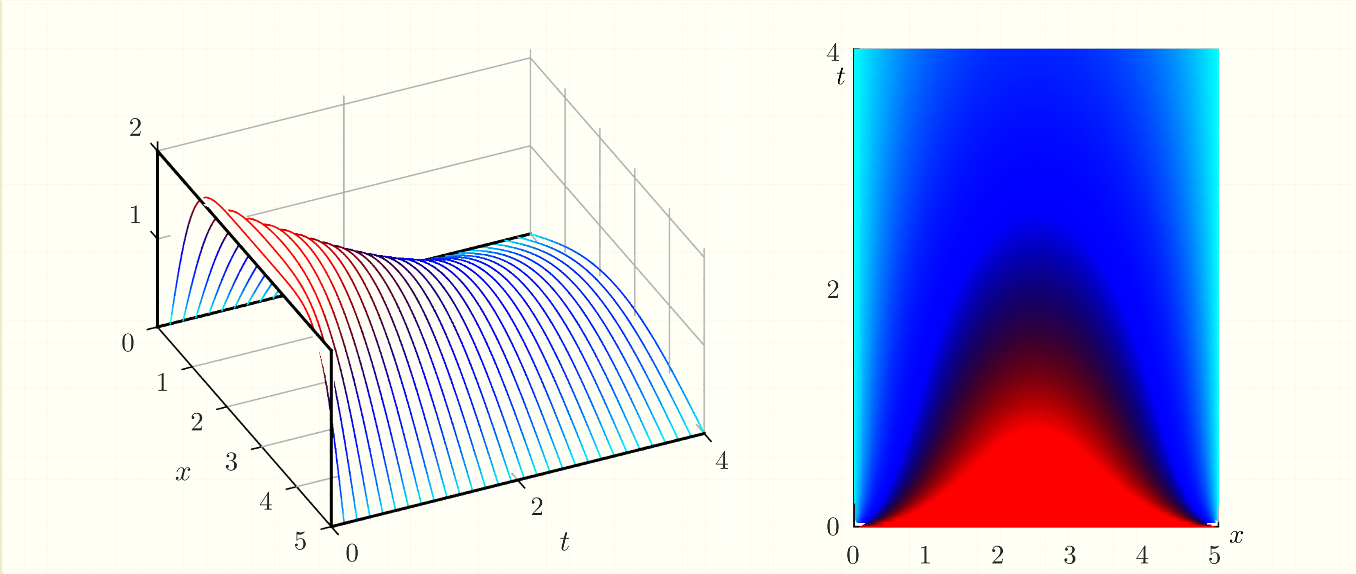
Depois usamos que

$$
c_{2p} = \frac{8}{2p\pi} = \frac{4}{p\pi}
$$

obtendo a solução do problema

$$
u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \exp\left(-\left(\frac{2\pi p}{5}\right)^2 t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\, px\right)\ .
$$

A figura a seguir mostra a solução de duas formas alternativas.



6.4.2 Condição de Dirichlet Não Homogênea

Vamos agora buscar a solução para o problema de propagação do calor em uma barra onde os extremos são mantidos a temperaturas constantes diferentes de zero. A definição a seguir apresenta os detalhes de problema e a Figura 6.7 ilustra seu domínio e condições de fronteira e inicial.

Definição 6.4: Problema do Calor com Fronteira de Dirichlet Não Homogênea

O problema de propagação de calor com fronteira de Dirichlet não homogênea consiste da equação do calor com as seguintes condições inicial e de fronteira

$$\begin{aligned}
&u_t = \alpha^2 u_{xx} && 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < t\\
&u(x,0) = f(x) && 0 \le x \le L\\
&u(0,t) = u_1 && 0 < t\\
&u(L,t) = u_2 && 0 < t
\end{aligned}$$

onde $L > 0$, enquanto u_1 e u_2 são os valores da temperatura fixos nos extremos da barra.

Como os valores impostos nos extremos do intervalo não são zero, se aplicarmos o mesmo procedimento usado para o problema com condição de Dirichlet homogênea não poderemos somar as soluções fundamentais para obter a solução geral. Precisamos, então, transformar esse problema de alguma forma que nos permita somar as soluções

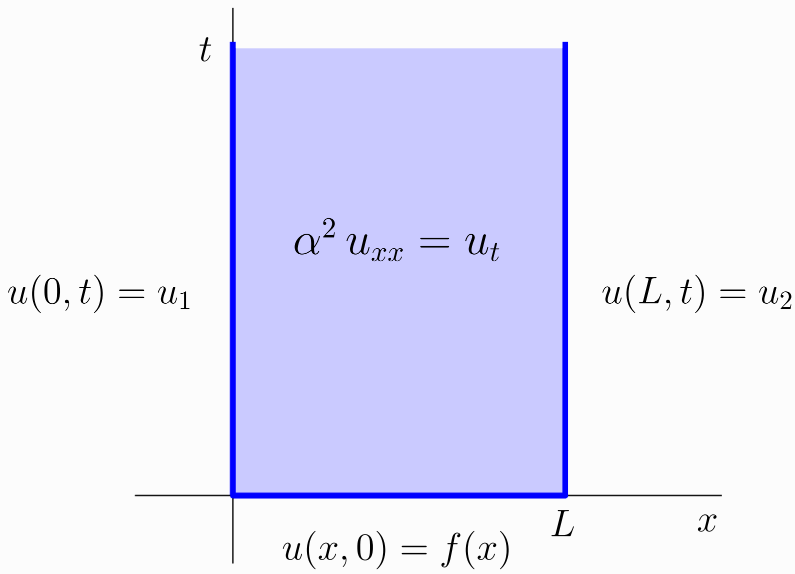


Figura 6.7: Domínio e condições do problema de dissipação do calor com fronteiras de Dirichlet não homogêneas.

fundamentais. Nossa abordagem será separar a solução em duas partes

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t) \tag{6.29}$$

onde a função w é a solução do problema com condições homogêneas 6.2 enquanto v faz o ajuste para atender as condições não homogêneas.

Para determinar v impomos a equação diferencial ordinária e as condições de fronteira não homogêneas

$$\begin{aligned} &v_{xx} = 0 \\ &v(0) = u_1 \\ &v(L) = u_2 \end{aligned} \tag{6.30}$$

a solução para esse problema de valores de contorno é

$$v(x) = \frac{u_2 - u_1}{L}\, x + u_1 \,.$$

Calculada dessa forma v é a solução estacionária do problema satisfazendo as condições não homogêneas. Precisamos agora determinar a função w, para isso substituímos (6.29) no Problema 6.4. Começamos pela equação diferencial

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

$$\begin{aligned} v_t + w_t &= \alpha^2 \left(v_{xx} + w_{xx}\right) \\ w_t &= \alpha^2 w_{xx} \end{aligned}$$

onde usamos que v não depende de t e é solução de (6.29). As condições de fronteira podem ser escritas como

$$\begin{aligned} w(0,t) &= u(0,t) - v(0) = u_1 - u_1 = 0 \\ w(L,t) &= u(L,t) - v(L) = u_2 - u_2 = 0 \end{aligned}$$

que como desejado são homogêneas. Falta apenas calcularmos a nova condição inicial

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x) = f(x) - \frac{u_2 - u_1}{L}\, x - u_1\ .$$

Agrupando a equação e as condições para w obtemos o problema

$$\begin{array}{ll} w_t = \alpha^2 w_{xx} & 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < t \\ w(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq L \\ w(0,t) = 0 & 0 < t \\ w(L,t) = 0 & 0 < t \end{array}$$

que é um problema de propagação do calor com fronteira de Dirichlet homogênea 6.2 com a condição inicial dada por

$$g(x) = f(x) - \frac{u_2 - u_1}{L}\, x - u_1\ .$$

Usando o resultado da Proposição 6.3 sabemos que w é dado por

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\, t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\, x\right)$$

com os coeficientes c_n determinados por

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx \\ &= \frac{2}{L}\int_0^L \left(f(x) - \frac{u_2 - u_1}{L}\, x - u_1\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx\ . \end{aligned} \tag{6.31}$$

Podemos agora retornar ao problema original 6.4 e escrever sua solução

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t)$$

$$= \frac{u_2 - u_1}{L}\, x + u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\, t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\, x\right) \tag{6.32}$$

onde os coeficientes c_n são dados por (6.31).

Proposição 6.5: Solução do Problema do Calor com Fronteira de Dirichlet Não Homogênea

A solução do Problema 6.4 é dada pela solução geral (6.32)

$$u(x,t) = \frac{u_2 - u_1}{L}\, x + u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\, t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\, x\right)$$

com os coeficientes c_n determinados pela Série de Fourier da expansão ímpar da função g

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left(f(x) - \frac{u_2 - u_1}{L} x - u_1\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\, x\right)\, dx\ .$$

O próximo exemplo ilustra a aplicação dessa proposição para obter a solução de um problema envolvendo a equação do calor.

6.4.3 Condição de Neumann

Nas subseções anteriores resolvemos o problema da propagação do calor fixando o valor da temperatura nos extremos da barra, agora vamos impor que não haja variação de temperatura no extremo da barra, isso é o fluxo de calor é zero. Fazemos isso impondo que as derivadas de u por x sejam zero na fronteira, como descrito no problema a seguir. A Figura 6.8 ilustra o domínio e condições desse problema.

Definição 6.6: Problema do Calor com Fronteira de Neumann Homogênea

O problema de propagação de calor com fronteira de Neumann consiste da equação do calor com as seguintes condições iniciais e de fronteira

$$\begin{array}{ll}
u_t = \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < t \\
u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq L \\
u_x(0,t) = 0 & 0 < t \\
u_x(L,t) = 0 & 0 < t
\end{array}$$

onde $L > 0$ e f não é identicamente nula no intervalo $[0, L]$.

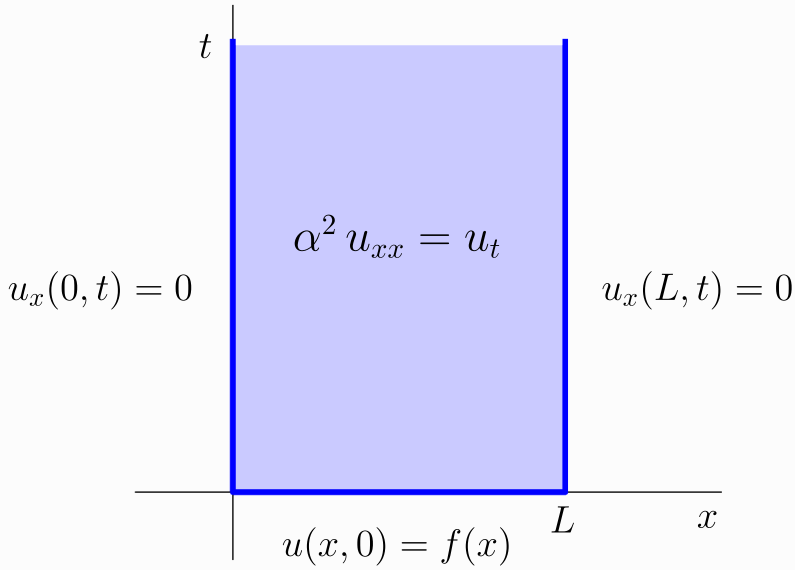


Figura 6.8: Domínio e condições do problema de dissipação do calor com fronteiras de Neumann homogêneas.

Para resolver esse problema aplicamos diretamente o método de separação de variáveis supondo que $u(x,t) = X(x)T(t)$ e transformando a equação do calor nas equações diferenciais ordinárias

$$X'' + \lambda X = 0 \ , \qquad (6.33)$$
$$T' + \alpha^2 \lambda T = 0 \ . \qquad (6.34)$$

Como antes precisamos aplicar as condições de fronteira em u para obtermos

$$X'(0)T(t) = 0 = X'(L)T(t)$$

como a solução identicamente nula é incompatível com a condição inicial, segue que $T(t) \neq 0$, e portanto

$$X'(0) = X'(L) = 0$$

Temos agora um problema de autovalores para X

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad (6.35)$$
$$X'(0) = 0$$
$$X'(L) = 0 \ .$$

Porém as condições de contorno são diferentes do problema que resolvemos da Seção 6.2, dessa forma precisamos reproduzir os passos e obter a solução para esse novo problema. Como antes, vamos considerar os três casos onde λ é menor, igual ou maior do que zero buscando pelas soluções não triviais do problema (6.35).

No caso $\lambda < 0$ definimos $\sigma^2 = -\lambda$ e usamos a solução geral

$$X(x) = c_1 \exp(\sigma x) - c_2 \exp(-\sigma x) \ .$$

Para impor as condições do problema (6.35) derivamos a solução geral obtendo

$$X'(x) = c_1 \sigma \exp(\sigma x) - c_2 \sigma \exp(-\sigma x) \ .$$

Calculando a derivada em zero e L temos as condições

$$\begin{aligned} &c_1 \sigma - c_2 \sigma = 0 \\ &c_1 \sigma \exp(\sigma L) - c_2 \sigma \exp(-\sigma L) = 0 \ . \end{aligned}$$

Dividindo a primeira equação por σ e a segunda por $\sigma \exp(\sigma L)$, obtemos

$$\begin{aligned} &c_1 - c_2 = 0 \\ &c_1 - c_2 \exp(-2\sigma L) = 0 \ . \end{aligned}$$

A primeira condição determina que $c_1 = c_2$ substituindo na segunda equação temos

$$c_2 \big[1 - \exp(-2\sigma L) \big] = 0 \ .$$

Como $L \neq 0$ e $\sigma \neq 0$ a exponencial não pode ser 1 e portanto c_2 precisa ser zero. Consequentemente c_1 também é zero e não temos nenhuma solução não trivial.

Consideramos agora o segundo caso $\lambda = 0$ que tem solução geral

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

cuja derivada é

$$X'(x) = c_2 \ .$$

Assim as condições do problema (6.35) impõem que $c_2 = 0$, mas deixam o coeficiente c_1 livre. Portanto temos uma autofunção constante $X(x) = c_1$. Nesse caso a equação (6.34) se reduz a

$$T'(t) = 0$$

cuja solução também é uma função constante. Com isso temos o primeiro autovalor, $\lambda = 0$, e sua solução fundamental

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2} \, .$$

Essa função poderia ser igual a qualquer constante, escolhemos $1/2$ por motivos que ficarão evidentes em breve.

No terceiro caso temos $\lambda > 0$ e definimos $\sigma^2 = \lambda$, assim a solução geral é

$$X(t) = c_1 \operatorname{sen}(\sigma x) + c_2 \cos(\sigma x)$$

derivando temos

$$X'(t) = c_1\sigma \cos(\sigma x) - c_2\sigma \operatorname{sen}(\sigma x) \ .$$

Avaliando a derivada nos extremos do intervalo e impondo as condições de contorno, obtermos o sistema

$$\begin{aligned} c_1\sigma \cos(0) \quad &- c_2\sigma \operatorname{sen}(0) \quad = 0 \\ c_1\sigma \cos(\sigma L) &- c_2\sigma \operatorname{sen}(\sigma L) = 0 \ . \end{aligned}$$

A primeira condição determina que $c_1 = 0$, substituindo na segunda temos

$$-c_2\sigma \operatorname{sen}(\sigma L) = 0 \ .$$

Como $c_2 = 0$ produz a solução trivial precisamos impor que

$$\operatorname{sen}(\sigma L) = 0$$

que será verdade quando σL for um múltiplo inteiro de π, portanto

$$\sigma_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

que produz os autovalores

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo esses valores na solução geral da EDO temos suas autofunções

$$X_n(x) = \cos(\sigma_n x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{6.36}$$

Precisamos agora das soluções associadas para a equação do tempo (6.34), substituindo λ temos as equações

$$T' + \alpha^2 \sigma_n^2 T = 0 \ .$$

As soluções dessa EDO são as funções

$$T_n(t) = e^{-\alpha^2 \sigma_n^2 t} = \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \ . \tag{6.37}$$

Temos assim as soluções fundamentais

$$u_n(x,t) = \exp\left(-\alpha^2 \sigma_n^2 t\right) \cos\left(\sigma_n x\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Tendo construído todas as soluções fundamentais do Problema 6.6 e usando o fato que a equação do calor é linear e as condições de fronteira são homogêneas podemos escrever a solução geral como a combinação linear

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x{,}t) \\ &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\alpha^2 \sigma_n^2 t\right) \cos\left(\sigma_n x\right) \ . \end{aligned} \tag{6.38}$$

Falta impor a condição inicial, primeiro calculamos a solução geral em $t = 0$ e impomos $u(x,0) = f(x)$

$$f(x) = u(x,0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\sigma_n x\right) \qquad x \in [0, L] \ .$$

Note que do lado direito temos uma Série de Fourier em cossenos, assim, segundo o Teorema 5.14 os coeficientes c_n são determinados pelas fórmulas

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\sigma_n x\right) dx \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

A proposição a seguir resume o resultado desenvolvido nessa subseção.

Proposição 6.7: Solução do Problema do Calor com Fronteira de Neumann Homogênea

A solução do Problema 6.6 é dada pela solução geral (6.38)

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

com os coeficientes c_n determinados pela Série de Fourier de cossenos da função f

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

O próximo exemplo ilustra a aplicação dessa proposição para obter a solução de um problema envolvendo a equação do calor.

Exercícios Seção 6.4

1) Encontre a solução do problema de condução de calor

$$\begin{aligned} &100u_{xx} = u_t, && 0 < x < 1 \text{ e } 0 < t \\ &u(x,0) = f(x), && 0 \leq x \leq 1 \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0, && 0 < t \end{aligned}$$

$$f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x) - \operatorname{sen}(5\pi x)$$

2) Encontre a solução do problema de condução de calor

$$\begin{aligned} &u_{xx} = 4u_t, && 0 < x < 2 \text{ e } 0 < t \\ &u(x,0) = f(x), && 0 \leq x \leq 2 \\ &u(0,t) = u(2,t) = 0, && 0 < t \end{aligned}$$

$$f(x) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \operatorname{sen}(\pi x) + 4\operatorname{sen}(2\pi x)$$

3) Para cada condição inicial descrita, resolva o problema de condução do calor em uma barra com 40 cm de comprimento e composta de um material com difusibilidade térmica $\alpha^2 = 1\,\text{cm/s}^2$. Além disso, as extremidades da barra são mantidas à temperatura constante de 0 °C.

a) $u(x,0) = 50, \qquad 0 < x < 40$

b) $u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$

c) $u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 10 \\ 50, & 10 \leq x \leq 30 \\ 0, & 30 < x \leq 40 \end{cases}$

d) $u(x,0) = x, \qquad 0 < x < 40$

4) (Problema de Dirichlet homogêneo) Considere uma função $u(x,t)$, duas vezes diferenciável, com domínio $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$, onde $L > 0$. Resolva a Equação do Calor

$$u_t = K u_{xx} \qquad K > 0$$

para cada uma das condições iniciais e de fronteira dadas.

a) $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 \leq x < L \end{cases}$$

b) $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$, $u(x,0) = x(L - x)$

c) $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = x$, com $0 \leq x \leq \pi$

5) (Problema de Dirichlet não homogêneo) Considere uma função $u(x,t)$, duas vezes diferenciável, com domínio $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$, onde $L > 0$. Resolva a Equação do Calor

$$u_t = K u_{xx} \qquad K > 0$$

para cada uma das condições iniciais e de fronteira dadas.

a) $u(0{,}t) = 100$, $u(1{,}t) = 100$, $u(x{,}0) = 0$

b) $u(0{,}t) = 0$, $u(10{,}t) = 100$

$$u(x{,}0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 5 \\ 100, & 5 \leq x < 10 \end{cases}$$

6) (Problema de Neumann homogêneo) Considere uma função $u(x{,}t)$, duas vezes diferenciável, com domínio $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$, onde $L > 0$. Resolva a Equação do Calor

$$u_t = K u_{xx} \qquad K > 0$$

para cada uma das condições iniciais e de fronteira dadas.

a) $u_x(0{,}t) = 0$, $u_x(2{,}t) = 0$

$$u(x{,}0) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

7) Para cada condição inicial $u(x, 0) = f(x)$. Resolva o problema de condução do calor em uma barra de comprimento L cujas extremidades são mantidas à temperatura constante igual a zero.

a) $L = 3 \qquad f(x) = 3 - x$

b) $L = 2 \qquad f(x) = x - 2$

c) $L = 2 \qquad f(x) = x$

d) $L = \pi \qquad f(x) = \operatorname{sen}(x)$

e) $L = \pi \qquad f(x) = 4\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(4x)$

f) $L = 2a \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & a \leq x < 2a \end{cases}$

g) $L = 4 \qquad f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

h) $L = 2 \qquad f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

6.5 Equação da Onda

Vamos analisar o problema de propagação da onda em uma corda elástica tensionada de comprimento L com os extremos em $x = 0$ e $x = L$ fixos, isso é, com condições de Dirichlet homogêneas. A constante a representa a velocidade de propagação da onda ao longo da corda, como essa equação modela uma onda perfeitamente elástica todas as frequências propagam a mesma velocidade e não precisamos distinguir entre a velocidade de fase e velocidade de grupo, ambas são iguais a a. No instante inicial, $t = 0$, a posição da corda é descrita pela função f e sua velocidade pela função g. A Figura 6.9 ilustra o domínio e as condições para esse problema.

Como a condição inicial $f(x) = g(x) = 0$ para $x \in [0, L]$ produz uma solução trivial, $u(x, t) = 0$, vamos desconsiderar esse caso. Para isso impomos que pelo menos uma das condições iniciais não seja identicamente nula, ou seja, $f(x) \neq 0$ ou $g(x) \neq 0$ para algum $x \in [0, L]$. A definição a seguir apresenta os detalhes desse problema.

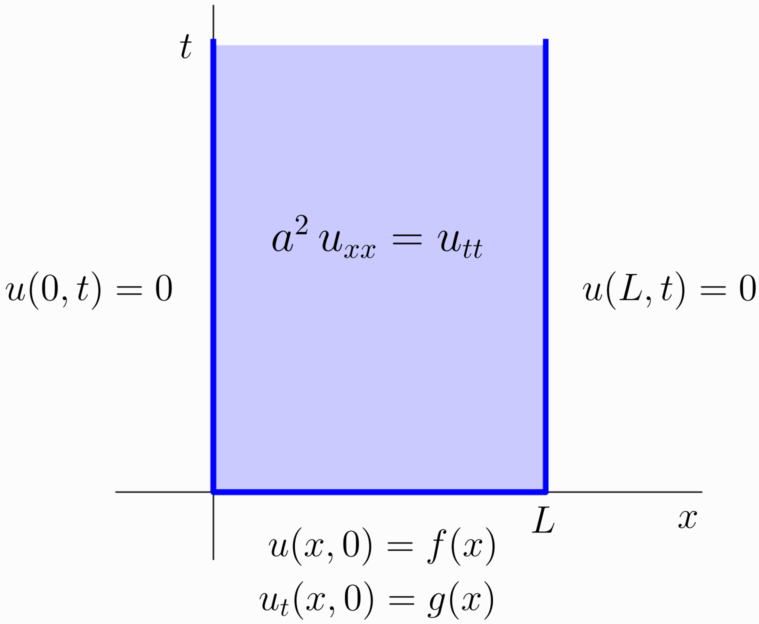


Figura 6.9: Domínio e condições do problema de propagação da onda com fronteiras de Dirichlet homogêneas.

Definição 6.8: Problema de Propagação da Onda

O problema de Propagação da Onda com condição homogênea de Dirichlet consiste da equação da onda com as seguintes condições iniciais e de fronteira

$$
\begin{array}{ll}
u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < t \\
u\,(x,0) = f(x) & 0 \le x \le L \\
u_t(x,0) = g(x) & 0 \le x \le L \\
u\,(0,t\,) = 0 & 0 < t \\
u\,(L,t\,) = 0 & 0 < t
\end{array}
$$

onde $L > 0$ e f e g não são simultaneamente nulas no intervalo $[0, L]$.

Note ainda que, por uma questão de compatibilidade entre as condições iniciais e as de fronteira, o problema só está bem posto se f e g forem nulas nas extremidades da corda

$$f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0\,. \tag{6.39}$$

Como no caso da Equação do Calor, para resolver este problema aplicamos o método de Separação de Variáveis, supondo que $u(x,t) = X(x)T(t)$. Substituindo essa expressão para u na equação da onda

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

obtemos

$$XT'' = a^2 X'' T$$

que pode ser rearranjada como

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} \ .$$

Como o lado esquerdo da igualdade só depende de x e o lado direito só depende de t, é necessário que exista uma constante λ tal que

$$X'' + \lambda X = 0 \ , \tag{6.40}$$
$$T'' + a^2 \lambda T = 0 \ . \tag{6.41}$$

Tendo separado a equação diferencial parcial em duas equações diferenciais ordinárias, podemos impor as Condições de Fronteira $u(0,t) = u(L,t) = 0$, que determinam

$$\begin{aligned} u(0,t) &= X(0)T(t) &= 0 \ , \\ u(L,t) &= X(L)T(t) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Como $T(t)$ não pode ser identicamente nula, essas condições impõem que

$$X(0) = X(L) = 0 \ . \tag{6.42}$$

Obtemos então exatamente o mesmo problema de autovalores que havíamos encontrado ao resolver a Equação do Calor com fronteiras de Dirichlet (6.22)

$$\begin{aligned} & X'' + \lambda X = 0 \\ & X(0) = 0 \\ & X(L) = 0 \ . \end{aligned} \tag{6.43}$$

Reproduzindo os mesmos passos, determinamos que não existem soluções não triviais para $\lambda \leq 0$. Além disso, sabemos que quando $\lambda > 0$ podemos fazer $\sigma^2 = \lambda$ e a solução geral da EDO (6.43) é

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sigma x) + c_2 \cos(\sigma x) \ .$$

Impondo a condição $X(0) = 0$ temos que $c_2 = 0$. Porém, ao impor $X(L) = 0$

precisamos garantir que c_1 não seja nulo também, assim precisamos impor que $\text{sen}(\sigma L) = 0$ e consequentemente temos que $\sigma L = n\pi$. Concluímos então que os autovalores e autofunções do problema (6.43) são

$$\lambda_n = \sigma_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.44}$$

$$X_n(x) = \text{sen}(\sigma_n x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.45}$$

Vamos agora resolver a equação no tempo (6.41). Cada autovalor λ_n determina uma equação diferencial ordinária para a função $T(t)$

$$T'' + a^2\sigma_n^2 T = 0$$

cuja solução geral é

$$T_n(t) = p\,\text{sen}\,(a\sigma_n t) + q\cos\,(a\sigma_n t) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.46}$$

onde p e q são constantes arbitrárias.

Conhecendo as autofunções (6.45) do problema de autovalores em x e a solução geral (6.46) da equação no tempo podemos escrever as soluções fundamentais do Problema da Propagação de Onda 6.8

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= \text{sen}\,(\sigma_n x)\,\big[p\,\text{sen}\,(a\sigma_n t) + q\cos\,(a\sigma_n t)\big] \\ &= p\,\text{sen}\,(\sigma_n x)\,\text{sen}\,(a\sigma_n t) + q\,\text{sen}\,(\sigma_n x)\cos\,(a\sigma_n t)\ . \end{aligned}$$

Cada função u_n é solução da equação da onda e atende as condições de fonteiras de Dirichlet. Como a equação é linear e as condições são homogêneas qualquer combinação linear das soluções fundamentais também satisfaz a equação e as condições. Assim podemos escrever a solução geral do Problema 6.8 como a série

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n\,\text{sen}\,(\sigma_n x)\,\text{sen}\,(a\sigma_n t) + Q_n\,\text{sen}\,(\sigma_n x)\cos\,(a\sigma_n t) \end{aligned} \tag{6.47}$$

onde fizemos $P_n = c_n p$ e $Q_n = c_n q$.

Falta agora impor as condições iniciais

$$\begin{aligned} u\,(x,0) &= f(x) \\ u_t(x,0) &= g(x) \end{aligned}$$

para todo x no intervalo $[0, L]$. Começando com a condição no valor da função, $u(x, 0) = f(x)$, temos

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) \operatorname{sen}(0) + Q_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) \cos(0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) \ . \end{aligned}$$

Portanto a condição $u(x, 0) = f(x)$ corresponde a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) \ .$$

Podemos agora determinar os coeficientes Q_n considerando a extensão ímpar de f e calculando os coeficientes da série de Fourier de senos

$$Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(\sigma_n x) \ dx \ . \tag{6.48}$$

Temos também que impor a condição no valor da derivada da função, $u_t(x, 0) = g(x)$, para isso precisamos avaliar sua derivada. Lembrando que a solução geral é a soma das soluções fundamentais e assumindo que seja possível derivar a série termo a termo temos

$$u_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) \ .$$

O próximo passo é derivar as soluções fundamentais u_n

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial t} &= p \operatorname{sen}(\sigma_n x) \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{sen}(a\sigma_n t) + q \operatorname{sen}(\sigma_n x) \frac{\partial}{\partial t} \cos(\sigma_n t) \\ &= p \operatorname{sen}(\sigma_n x)\, a\sigma_n \cos(a\sigma_n t) - q \operatorname{sen}(\sigma_n x)\, a\sigma_n \operatorname{sen}(a\sigma_n t) \ . \end{aligned}$$

Avaliando cada uma dessas derivadas em $t = 0$ temos

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = pa\sigma_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) \cos(0) - qa\sigma_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) \operatorname{sen}(0)$$

$$= pa\sigma_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) \ .$$

Podemos agora avaliar $u_t(x,0)$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n a\sigma_n \operatorname{sen}(\sigma_n x)$$

onde novamente fizemos $P_n = c_n p$. Assim a condição $u_t(x,0) = g(x)$ é escrita como

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n a\sigma_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) \ .$$

Como antes, usamos a série de Fourier da expansão ímpar da função g para determinar os coeficientes P_n, porém, nesse caso os coeficientes de Fourier são $P_n a\sigma_n$ o que nos leva a

$$P_n a\sigma_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}(\sigma_n x) \ dx$$

isolando P_n temos

$$P_n = \frac{2}{a\sigma_n} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}(\sigma_n x) \ dx \ . \tag{6.49}$$

Temos agora a solução geral para o problema da propagação da onda e fórmulas para determinar os coeficientes envolvidos. A proposição a seguir resume esses resultados.

Proposição 6.9: Solução do Problema de Propagação da Onda

A solução do Problema 6.8 é dada pela solução geral (6.47)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L} t\right) + Q_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{an\pi}{L} t\right) \right]$$

com os coeficientes P_n e Q_n determinados pelas séries de Fourier em senos da função f, equação (6.48), e da função g, equação (6.49),

$$Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \ dx \ ,$$

$$P_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \ dx \ .$$

Essa proposição apresenta a solução para o problema completo, mas é comum que uma das condições iniciais seja nula. Por exemplo, se considerarmos o caso onde a velocidade inicial é nula, $g(x) = 0$, os coeficientes P_n são todos automaticamente zero e a solução é dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) \tag{6.50}$$

$$Q_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, dx \tag{6.51}$$

Por outro lado se o deslocamento inicial for nulo, $f(x) = 0$, os coeficientes Q_n são zero e a solução pode ser escrita como

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}t\right) \tag{6.52}$$

$$P_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, dx \tag{6.53}$$

A Figura 6.10 apresenta as funções T_n em cada um desses casos. Os gráficos do lado esquerdo mostram as funções T_n quando impomos que a velocidade inicial é nula, observe que todas essas funções tem derivada zero quando $t = 0$. Os gráficos do lado direito apresentam as funções T_n quando impomos que o deslocamento inicial é nulo, observe que todas essas funções valem zero quando $t = 0$.

A Figura 6.11 mostra as soluções fundamentais para a equação da onda quando a velocidade inicial for nula. A Figura 6.12 mostra as soluções fundamentais para a equação da onda quando o deslocamento inicial for nulo.

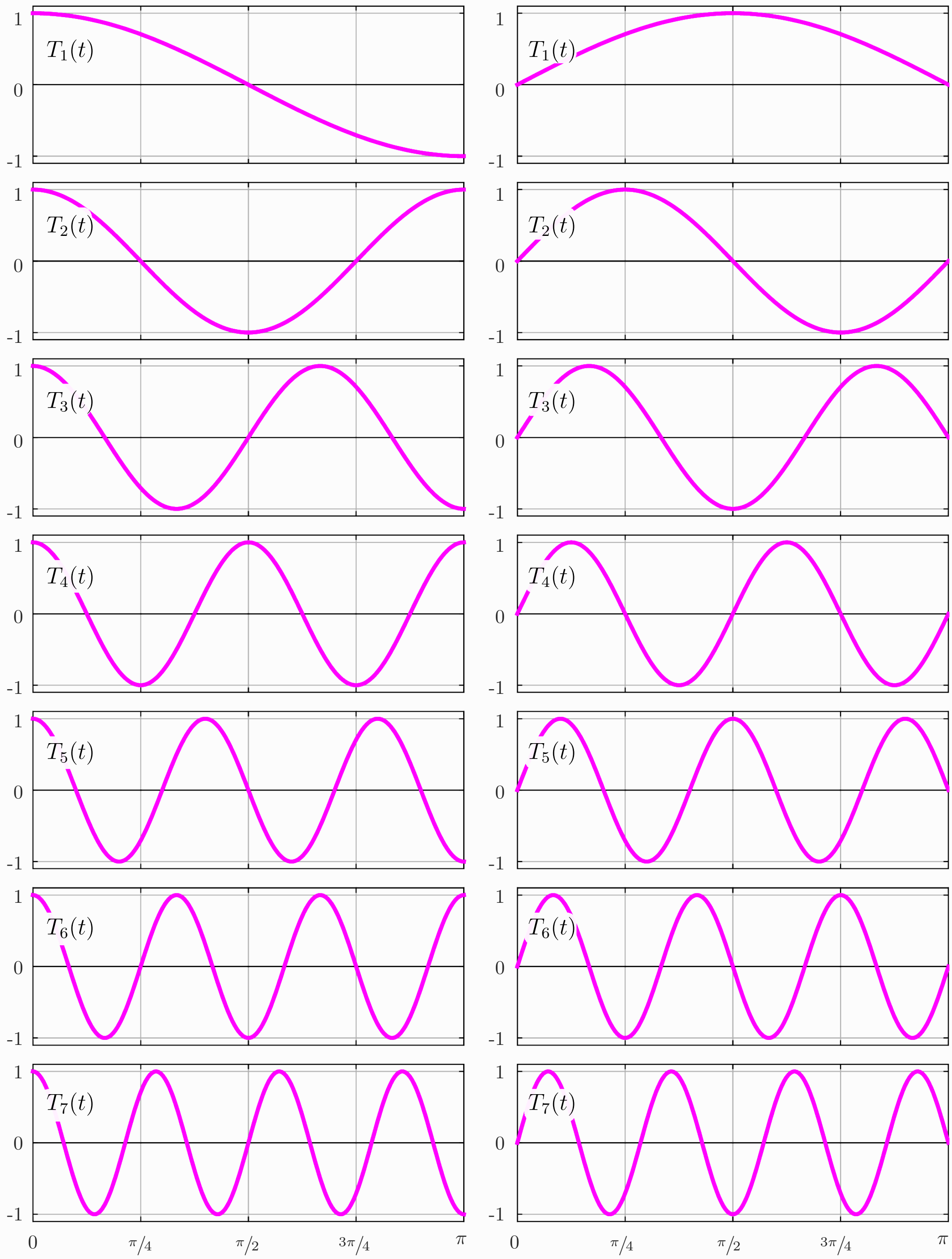


Figura 6.10: Funções T_n da equação da onda com velocidade inicial nula (esquerda) e com deslocamento inicial nulo (direita).

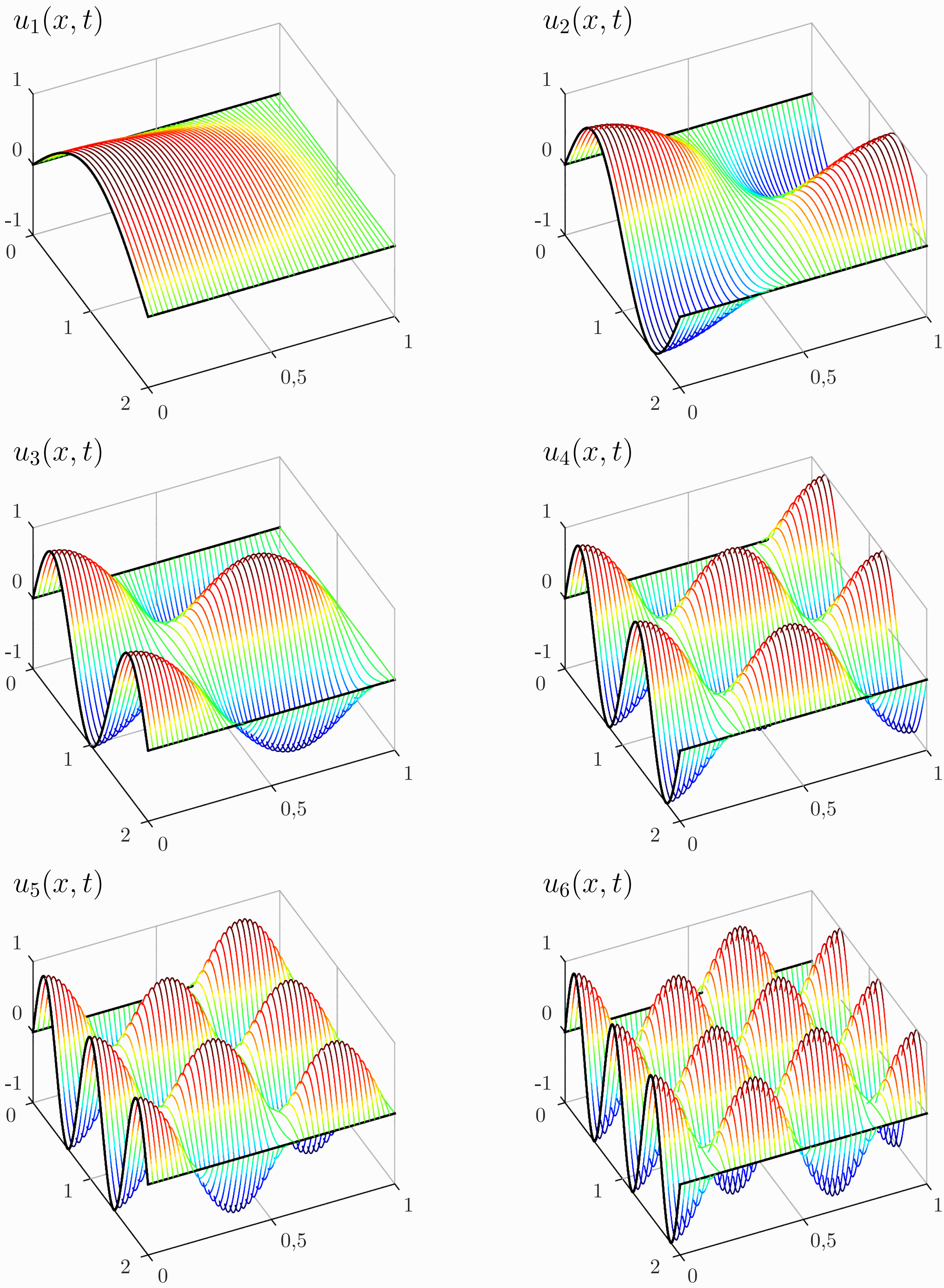


Figura 6.11: Soluções fundamentais da equação da onda com condições de Dirichlet e velocidade inicial nula (6.50).

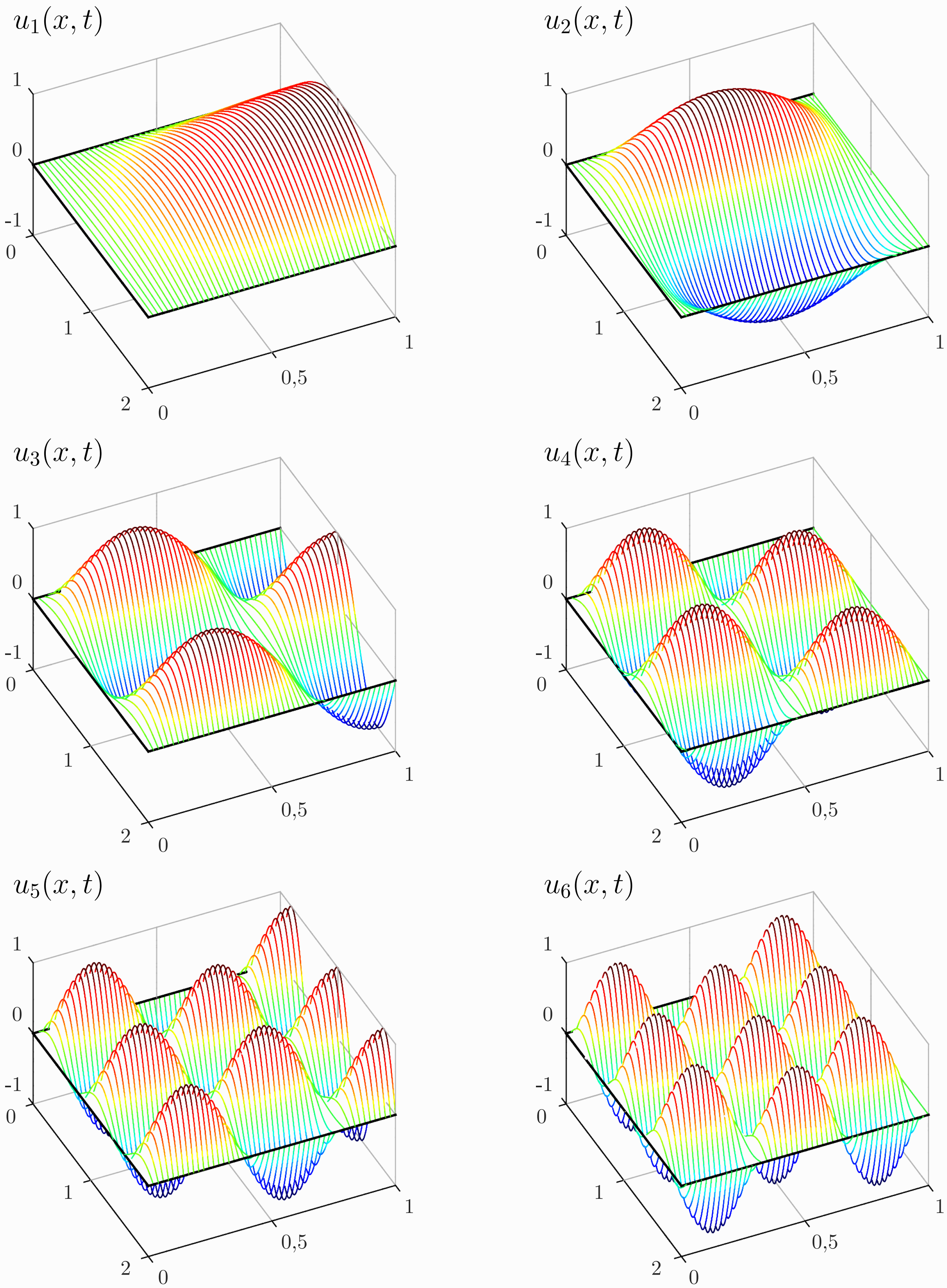


Figura 6.12: Soluções fundamentais da equação da onda com condições de Dirichlet e deslocamento inicial nulo (6.52).

O próximo exemplo ilustra a utilização dos resultados dessa seção.

Exemplo 6.5.1:

Considere uma corda elástica de comprimento $L = 10$ cujas extremidades são mantidas fixas, com $T = \rho$, onde T é a tensão e ρ a densidade de massa da corda, ou seja, $a^2 = {}^T\!/\!_\rho = 1$. Suponha que a velocidade inicial da corda é zero e que a posição inicial é dada por

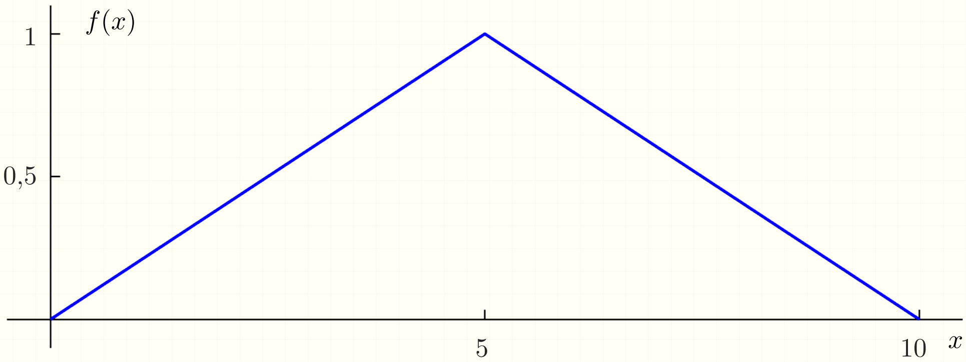
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{5}, & 0 \leq x \leq 5\,, \\ \dfrac{10-x}{5}, & 5 \leq x \leq 10\,. \end{cases}$$

Encontre o deslocamento da corda ao longo do tempo em cada posição $u(x,t)$.

O primeiro passo é reconhecer que a oscilação na corda é modelada pela equação da onda, também sabemos que $a^2 = 1$, que o comprimento da corda é $L = 10$ e que nas extremidades $u(0,t)$ e $u(10,t)$ são zero. Portanto o comportamento da corda é modelado pelo Problema 6.8, que, nesse caso, assume a forma

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < 10 \quad \text{e} \quad 0 < t \\ u\,(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq 10 \\ u_t(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq 10 \\ u\,(0,t) = 0 & 0 < t \\ u\,(10,t) = 0 & 0 < t \end{array}$$

onde f é dada no enunciado e seu gráfico é mostrado na figura a seguir.



A Proposição 6.9 nos dá a solução desse problema, mas como $g(x) = 0$ o problema se simplifica e sua solução geral é dada por (6.50)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)\cos\left(\frac{an\pi}{L}\,t\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}\, x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{10}\, t\right) \ .$$

Enquanto que, os coeficientes Q_n são dados por (6.51)

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\, x\right)\, dx \\ &= \frac{1}{5}\int_0^{10} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}\, x\right)\, dx \ . \end{aligned}$$

Substituindo a expressão da função f temos

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{1}{5}\left[\int_0^5 \frac{x}{5} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}\, x\right)\, dx + \int_5^{10} \frac{10-x}{5} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}\, x\right)\, dx\right] \\ &= \frac{1}{25}\left[\int_0^5 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}\, x\right)\, dx \right. \\ &\qquad + 10\int_5^{10} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}\, x\right)\, dx \\ &\qquad \left. - \int_5^{10} x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}\, x\right)\, dx \right] . \end{aligned}$$

Precisamos agora calcular as três integrais. Começamos encontrando as primitivas, note que a integral do seno é

$$\int \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}\, x\right)\, dx = -\frac{10}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{10}\, x\right) \ .$$

Para encontrar a primitiva do produto do seno por x, usamos a integral por partes

$$u = x \qquad \text{e} \qquad dv = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}\, x\right) dx$$

de modo que

$$H(x) = \int x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}\, x\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int u dv = uv - \int v du \\
&= -\frac{10}{n\pi} x \cos\left(\frac{n\pi}{10} x\right) + \frac{10}{n\pi} \int \cos\left(\frac{n\pi}{10} x\right) dx \\
&= \frac{100}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10} x\right) - \frac{10}{n\pi} x \cos\left(\frac{n\pi}{10} x\right) .
\end{aligned}
$$

Precisamos agora calcular as integrais definidas, começamos pela integral do seno, que vamos denominar S

$$
\begin{aligned}
S &= \int_5^{10} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10} x\right) dx \\
&= -\frac{10}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{10} x\right) \Big|_5^{10} \\
&= -\frac{10}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{10} 10\right) + \frac{10}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{10} 5\right) \\
&= \frac{10}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right] .
\end{aligned}
$$

Calculamos agora as integrais do produto de x pelo seno, que vamos denotar R

$$
\begin{aligned}
R &= \int_0^{5} x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10} x\right) dx - \int_5^{10} x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10} x\right) dx \\
&= H(5) - H(0) - \big(H(10) - H(5)\big) \\
&= 2H(5) - H(0) - H(10) \\
&= 2\left[\frac{100}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10} 5\right) - \frac{10 \cdot 5}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{10} 5\right)\right] \\
&\quad - \left[\frac{100}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10} 0\right) - \frac{10 \cdot 0}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{10} 0\right)\right] \\
&\quad - \left[\frac{100}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10} 10\right) - \frac{10 \cdot 10}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{10} 10\right)\right] \\
&= 2\left[\frac{100}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{50}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] - \left[-\frac{100}{n\pi} \cos(n\pi)\right]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{200}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{100}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{100}{n\pi}\cos(n\pi)\ .$$

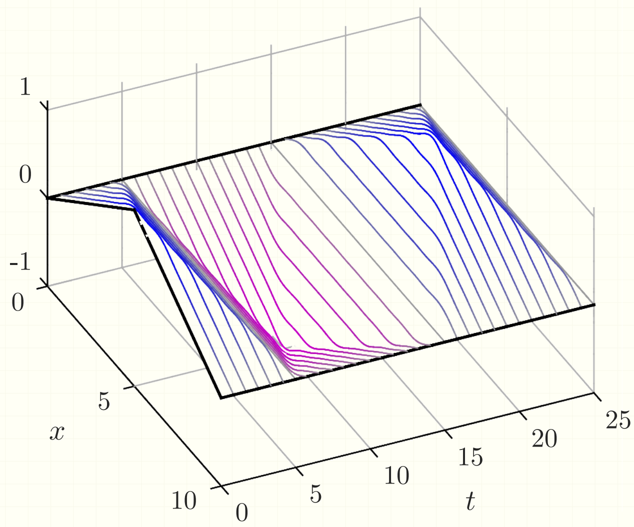
Podemos agora calcular os coeficientes Q_n

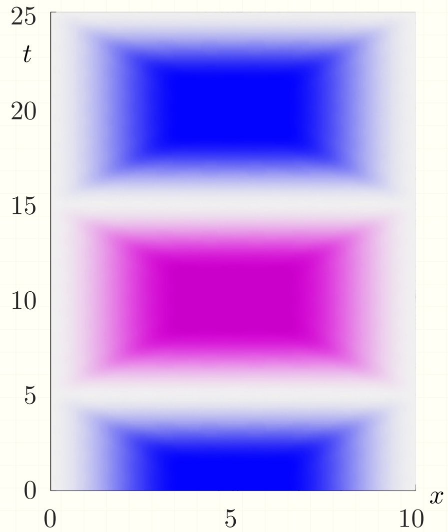
$$\begin{aligned}
Q_n &= \frac{1}{25}(10S + R) \\
&= \frac{2}{5}S + \frac{1}{25}R \\
&= \frac{2}{5}\frac{10}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right] \\
&+ \frac{1}{25}\left[\frac{200}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{100}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{100}{n\pi}\cos(n\pi)\right] \\
&= \frac{4}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{n\pi}\cos(n\pi) \\
&+ \frac{8}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n\pi}\cos(n\pi) \\
&= \frac{8}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\ .
\end{aligned}$$

Concluímos então que

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{10}t\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{10}t\right) \\
&= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{10}t\right)\ .
\end{aligned}$$

A figura a seguir mostra dois gráficos dessa solução. Note que nesse caso temos uma onda estacionária oscilando entre os extremos fixos do domínio.





Exercícios Seção 6.5

1) Em cada caso, escreva o problema que modela a situação e determine:

i) as equações diferenciais ordinárias produzidas pela separação de variáveis;

ii) o problema de autovalores, assim como seus autovalores e autofunções;

iii) as soluções fundamentais;

iv) a solução geral;

v) as fórmulas para os coeficientes que determinam a solução, basta explicitar a fórmula não é necessário calcular as integrais.

a) Propagação da onda em uma corda elástica tensionada, com as extremidades fixas, de comprimento 5 m, deslocamento inicial de $f(x) = 5x - x^2$, velocidade inicial nula e onde a velocidade de propagação é igual 2 m/s.

b) Propagação da onda em uma corda elástica tensionada, com as extremidades fixas, de comprimento π metros, deslocamento inicial de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, velocidade inicial $g(x) = -\operatorname{sen}(x)$ metros por segundo e onde a velocidade de propagação é igual 1 m/s.

c) Propagação da onda em uma corda elástica tensionada, com as extremidades fixas, de comprimento 1 m, deslocamento inicial de $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x)$, velocidade inicial $g(x) = \cos(4\pi x)$ e onde a velocidade de propagação é igual 2 m/s.

2) Calcule a solução do problema de propagação da onda

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < 2 \text{ e } 0 < t \\ u\,(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq 2 \\ u_t(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq 2 \\ u\,(0,t) = 0 & 0 < t \\ u\,(2,t) = 0 & 0 < t \end{array}$$

onde $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

3) Ignorando a condição de compatibilidade (6.39), calcule a solução para o problema de propagação da onda

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < 2 \text{ e } 0 < t \\ u\,(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq 2 \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq 2 \\ u\,(0,t) = 0 & 0 < t \\ u\,(2,t) = 0 & 0 < t \end{array}$$

para cada condição inicial.

a) $f(x) = x \qquad g(x) = x$

b) $f(x) = x \qquad g(x) = x - 2$

c) $f(x) = x - 2 \qquad g(x) = x$

d) $f(x) = x - 2 \qquad g(x) = x - 2$

e) $f(x) = x \qquad g(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

f) $f(x) = x - 2 \quad g(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad g(x) = x$

h) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad g(x) = x - 2$

6.6 Equação de Laplace

Nessa seção vamos estudar a Equação de Laplace (6.4)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{6.54}$$

que é um exemplo de uma equação diferencial linear de segunda ordem elíptica, e portanto, representa situações de equilíbrio ou estacionárias. Dessa forma, interpretamos as variáveis como dimensões espaciais e todas as condições são de fronteiras.

O Problema de Laplace consiste em encontrar uma função $u\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que resolva a equação de Laplace (6.54) no interior do domínio D e que atenda condições adequadas na fronteira do domínio, que denotamos por ∂D. Nesse capítulo vamos impor Condições de Dirichlet, isso é, vamos fixar o valor da função u na fronteira do domínio ∂D.

A forma de resolução para a equação depende da geometria do domínio e das condições de fronteira. Na Subseção 6.6.1 apresentamos a solução para o problema de Laplace em uma região retangular. Na Subseção 6.6.2 calculamos a equação de Laplace em coordenadas polares e usamos esse resultado na Subseção 6.6.3 para resolver o problema de Laplace em um disco.

6.6.1 Condição de Dirichlet no Retângulo

Queremos resolver a equação de Laplace (6.54) com condições de Dirichlet em um domínio retangular com a forma

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ / \ \ 0 < x < a \ \text{ e } \ 0 < y < b \right\} .$$

Nesse caso as condições sobre a fronteira são

$$u(x,0) = f_0(x), \qquad u(x,b) = f_1(x), \qquad u(0,y) = g_0(y), \qquad u(a,y) = g_1(y),$$

onde f_0, f_1, g_0 e g_1 são funções contínuas. Para que o problema seja bem posto queremos que a junção dessas condições seja contínua, assim devemos impor a condição de compatibilidade entre elas

$$f_0(0) = g_0(0), \qquad f_0(a) = g_1(0), \qquad g_0(b) = f_1(0), \qquad g_1(b) = f_1(a).$$

A Figura 6.13 ilustra o domínio do problema de Laplace no retângulo e suas condições de fronteira.

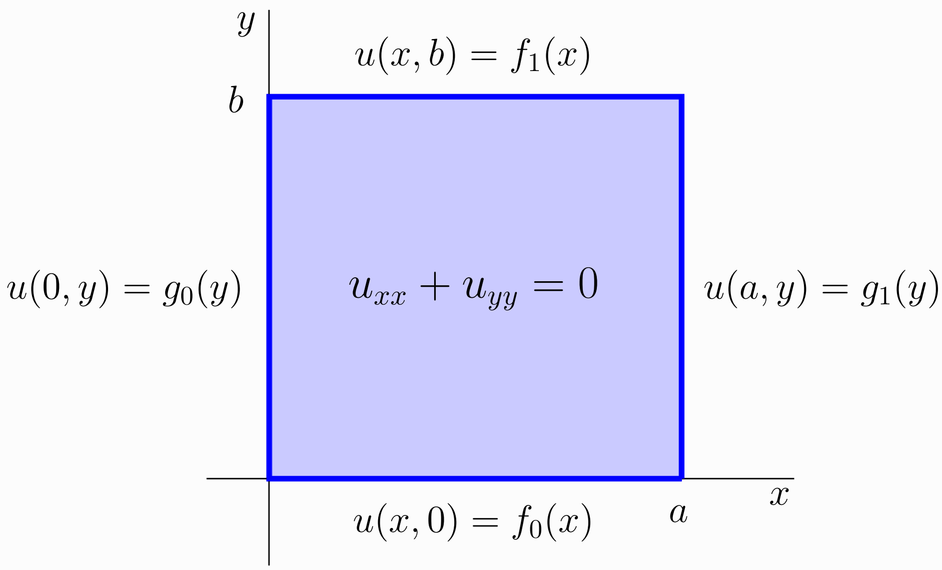


Figura 6.13: Domínio e condições do problema de Laplace com fronteiras de Dirichlet.

A estratégia para resolver esse problema consiste em decompô-lo em quatro problemas, onde escolhemos condições de fronteira nula em três lados e uma condição não homogênea no lado restante. A solução para o problema original será construída com soma das quatro soluções obtidas. Dessa forma, vamos começar buscando a solução para um desses problemas reduzidos, isso é, vamos escolher

$$f_0(x) = f(x), \qquad f_1(x) = 0, \qquad g_0(y) = 0, \qquad g_1(y) = 0.$$

Como queremos excluir a solução trivial vamos supor que f não seja identicamente nula no intervalo $[0, a]$. A definição a seguir apresenta esse problema.

Definição 6.10: Problema de Laplace no Retângulo

O Problema de Laplace no Retângulo consiste da equação de Laplace com as seguintes condições de fronteira

$$\begin{array}{ll} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (x, y) \in D \\ u(x, 0) = f(x) & x \in [0, a] \\ u(x, b) = 0 & x \in [0, a] \\ u(0, y) = 0 & y \in [0, b] \\ u(a, y) = 0 & y \in [0, b] \end{array}$$

onde escolhemos a fronteira em $y = 0$ para a condição de Dirichlet não homogênea. A função f não pode ser identicamente nula no intervalo $[0, a]$ e D representa o domínio retangular

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; / \;\; 0 < x < a \;\; \text{e} \;\; 0 < y < b \right\} .$$

A Figura 6.14 ilustra o domínio e as condições do problema de Laplace no retângulo com condições de Dirichlet homogêneas em três lados, descrito na Definição 6.10. Note que esse é um dos quatro casos com três lados com condição de Dirichlet homogêneas. No final dessa seção apresentamos outro caso como um exemplo, os demais casos são explorados nos exercícios.

Como nas equações anteriores, aplicamos o método de Separação de Variáveis, supondo que $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Assim, a equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

se transforma em

$$X''Y + XY'' = 0 .$$

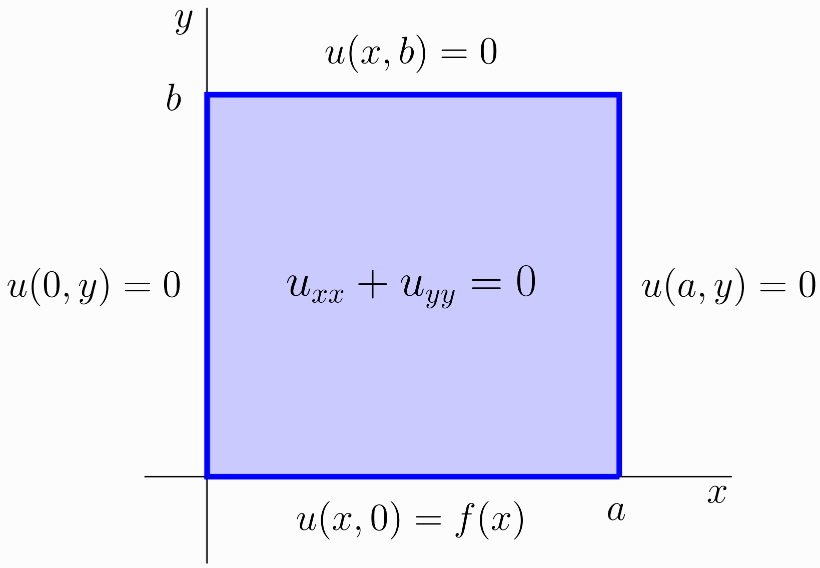


Figura 6.14: Domínio e condições do problema de Laplace com fronteiras de Dirichlet, homogêneas em três lados.

Portanto, deve existir uma constante λ tal que

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

assim, podemos desmembrar a equação parcial nas equações ordinárias

$$X'' + \lambda X = 0\ , \tag{6.55}$$
$$Y'' - \lambda Y = 0\ . \tag{6.56}$$

Precisamos agora aplicar as condições de fronteira e começamos pelas condições homogêneas

$$u(x,b) = u(0,y) = u(a,y) = 0$$

que podem ser escritas como

$$X(x)Y(b) = X(0)Y(y) = X(a)Y(y) = 0\ .$$

Como não estamos interessados no problema trivial, $u(x,y) = 0$, não queremos que as funções X ou Y sejam nulas, portanto essas condições implicam em

$$Y(b) = 0\ , \tag{6.57}$$

$$X(0) = X(a) = 0 \; . \tag{6.58}$$

Podemos agora escrever o Problema de Autovalores para x, com a equação diferencial ordinária (6.55) e as condições de contorno obtidas para X

$$\begin{aligned} &X'' + \lambda X = 0 \; , \\ &X(0) = X(a) = 0 \; . \end{aligned} \tag{6.59}$$

Esse é exatamente o mesmo problema de autovalores obtido ao resolvermos o problema de dissipação do calor com condição de Dirichlet homogênea na Subseção 6.4.1. Nesse problema verificamos que não existem autovalores menores ou iguais a zero e podemos nos restringir a $\lambda > 0$ onde fazemos $\sigma^2 = \lambda$. Além disso, sabemos que a solução da equação diferencial ordinária é

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sigma x) + c_2 \cos(\sigma x) \; .$$

Consequentemente, as condições de contorno impõem que σ assuma os valores

$$\sigma_n = \frac{n\pi}{a} \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Podemos agora escrever os autovalores e autofunções do problema (6.59)

$$\lambda_n = \sigma_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$$

$$X_n(x) = \operatorname{sen}(\sigma_n x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Os gráficos do lado esquerdo da Figura 6.15 mostram as primeiras funções X_n. Note que, todas essas funções valem zero nos extremos do intervalo, $x = 0$ e $x = a$ atendendo as condições de fronteira de Dirichlet homogêneas. Além disso, podemos ver que o valor de n determina o número de oscilações dentro do intervalo.

Passamos agora a buscar as soluções da equação para Y (6.56) para os valores de λ_n encontrados

$$Y'' - \sigma_n^2 Y = 0 \; .$$

Como vimos na Seção 6.2 a solução geral para essa equação diferencial ordinária tem a forma

$$Y(y) = c_1 \exp(\sigma_n y) + c_2 \exp(-\sigma_n y)$$

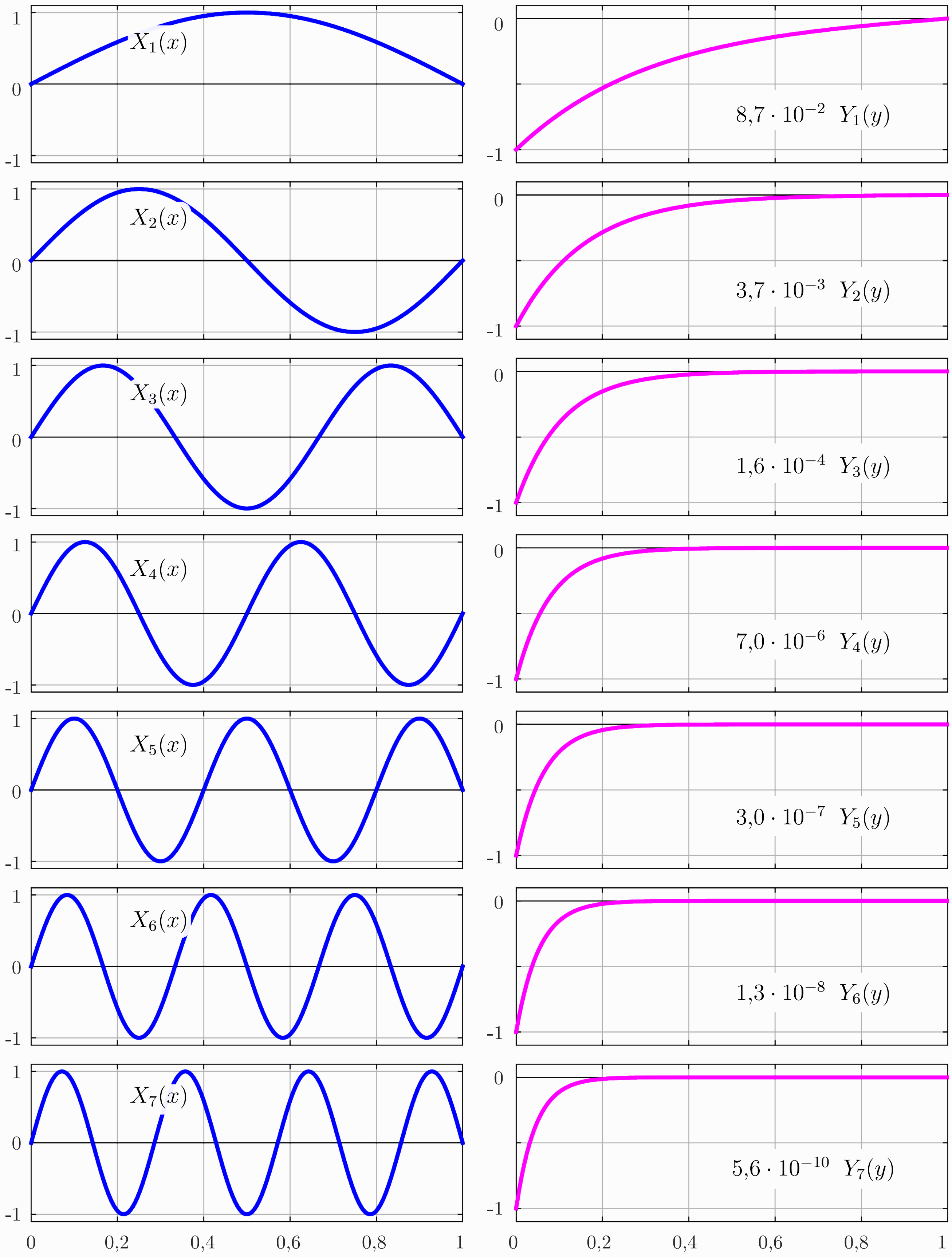


Figura 6.15: Autofunções, X_n, e soluções da EDO em y, Y_n, da equação de Laplace.

onde c_1 e c_2 são constantes. Impondo a condição (6.57), $Y(b) = 0$, temos que

$$Y(b) = c_1 \exp(\sigma_n b) + c_2 \exp(-\sigma_n b) = 0$$

que podemos reescrever como

$$c_2 \exp(-\sigma_n b) = -c_1 \exp(\sigma_n b)$$

multiplicando os dois lados por $\exp(\sigma_n b)$ temos

$$c_2 = -c_1 \exp(2\sigma_n b) \ .$$

Substituindo c_2 na solução geral para Y temos

$$\begin{aligned} Y(y) &= c_1 \exp(\sigma_n y) + c_2 \exp(-\sigma_n y) \ , \\ &= c_1 \exp(\sigma_n y) - c_1 \exp(2\sigma_n b) \exp(-\sigma_n y) \ . \end{aligned}$$

colocando $\exp(\sigma_n b)$ em evidência essa expressão assume a forma

$$Y(y) = c_1 \exp(\sigma_n b) \big[\exp(-\sigma_n b) \exp(\sigma_n y) - \exp(\sigma_n b) \exp(-\sigma_n y) \big]$$

aplicando propriedades da exponencial reescrevemos $Y(y)$ como

$$Y(y) = c_1 \exp(\sigma_n b) \big[\exp\big(\sigma_n(y-b)\big) - \exp\big(-\sigma_n(y-b)\big)\big] \ .$$

Notando a semelhança da expressão entre colchetes com a definição do seno hiperbólico (A.2) podemos escrever

$$Y(y) = 2c_1 \exp(\sigma_n b) \operatorname{senh}\big(\sigma_n(y-b)\big) \ .$$

Desprezando a constante $2c_1 \exp(\sigma_n b)$ temos as soluções para a equação (6.56) e a condição (6.57)

$$Y_n(y) = \operatorname{senh}\big(\sigma_n(y-b)\big) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Os gráficos do lado direito da Figura 6.15 mostram as primeiras funções Y_n. Como essas funções assumem valores muito altos em módulo, elas foram escaladas para assumir o valor -1 em zero, observe os fatores de escala multiplicando dada uma. Como o seno hiperbólico é uma combinação de exponenciais podemos dizer que essas funções decaem exponencialmente com grande rapidez para zero, o valor de n controla essa rapidez.

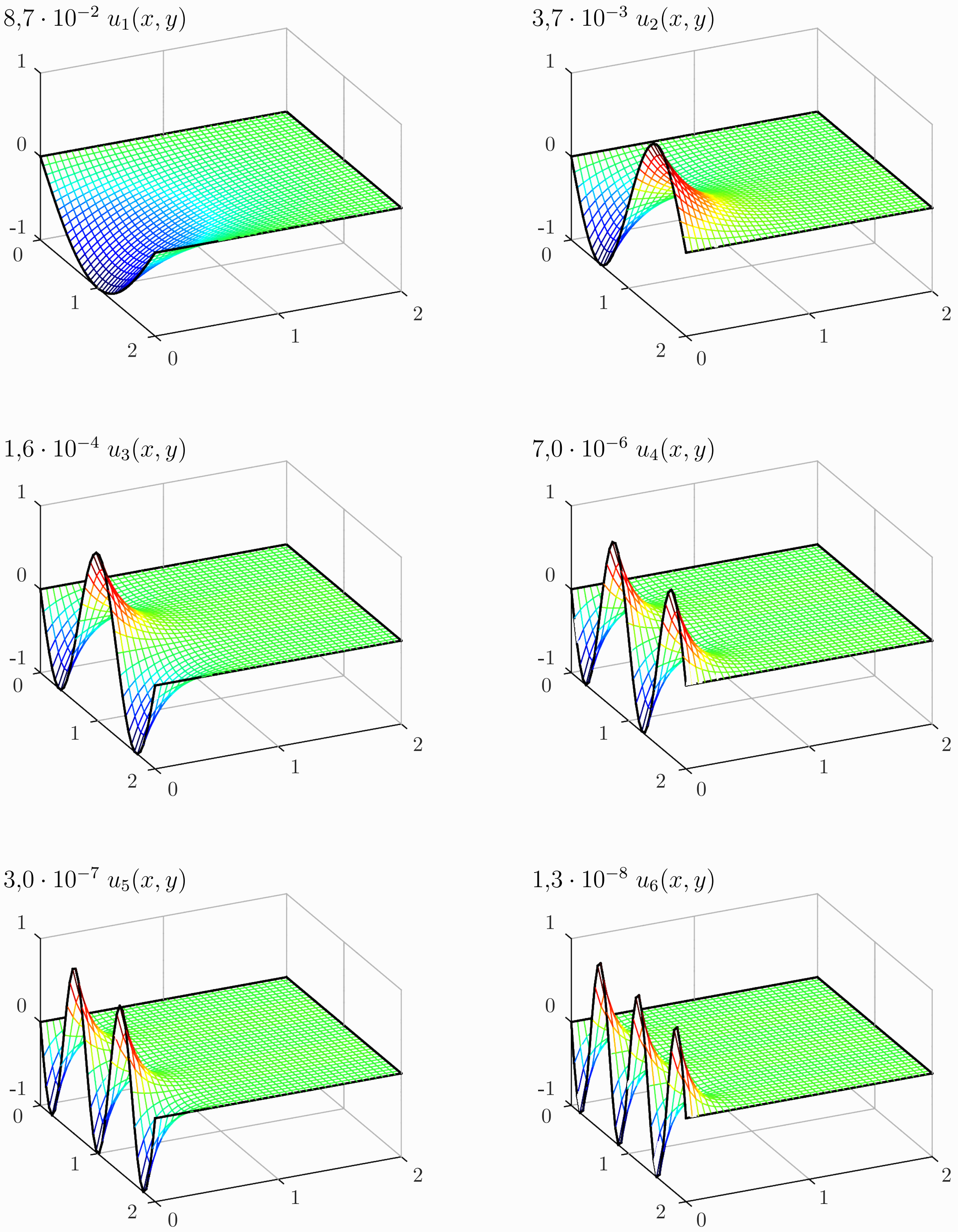


Figura 6.16: Soluções fundamentais (6.60) da equação de Laplace com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas em três lados.

Podemos agora escrever as Soluções Fundamentais do Problema 6.10

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \operatorname{sen}(\sigma_n x)\operatorname{senh}\big(\sigma_n(y-b)\big)\ . \tag{6.60}$$

A Figura 6.16 exibe as seis primeiras soluções fundamentais para a equação de Laplace com $a = b = 2$. Observe que como essas funções assumem valores muito altos elas foram escaladas para que seu valor máximo seja 1, os fatores de escala estão escritos em cada gráfico.

Pelo princípio da superposição, podemos escrever a Solução Geral como a combinação linear das soluções fundamentais

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(\sigma_n x)\operatorname{senh}\big(\sigma_n(y-b)\big)\ . \tag{6.61}$$

Qualquer escolha das constantes c_n nos fornece uma função que é solução da equação de Laplace e que atende as condições homogêneas

$$u(x,b) = u(0,y) = u(a,y) = 0\ .$$

Temos agora que impor a condição de Dirichlet não homogênea, $u(x,0) = f(x)$. Começamos avaliando $u(x,0)$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(\sigma_n x)\operatorname{senh}(-\sigma_n b)$$

que nos leva a condição

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}(-\sigma_n b)\operatorname{sen}(\sigma_n x)\ \ .$$

Observando que $c_n \operatorname{senh}(\sigma_n b)$ são constantes com relação a x percebemos que essa expressão é exatamente a série de Fourier de senos da função $f(x)$ e podemos escrever

$$c_n \operatorname{senh}(-\sigma_n b) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}(\sigma_n x)\ dx$$

isolando os coeficientes c_n temos

$$c_n = \frac{2}{a\operatorname{senh}(-\sigma_n b)}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}(\sigma_n x)\ dx\ . \tag{6.62}$$

Com isso temos que a solução para o Problema 6.10 é dada pela função (6.61) com os coeficientes calculados por (6.62), a proposição a seguir apresenta essa solução.

Proposição 6.11: Solução do Problema de Laplace no Retângulo

A solução do Problema 6.10 é dada pela solução geral (6.61)

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)$$

com os coeficientes c_n determinados pela Série de Fourier (6.62) da expansão ímpar da função f

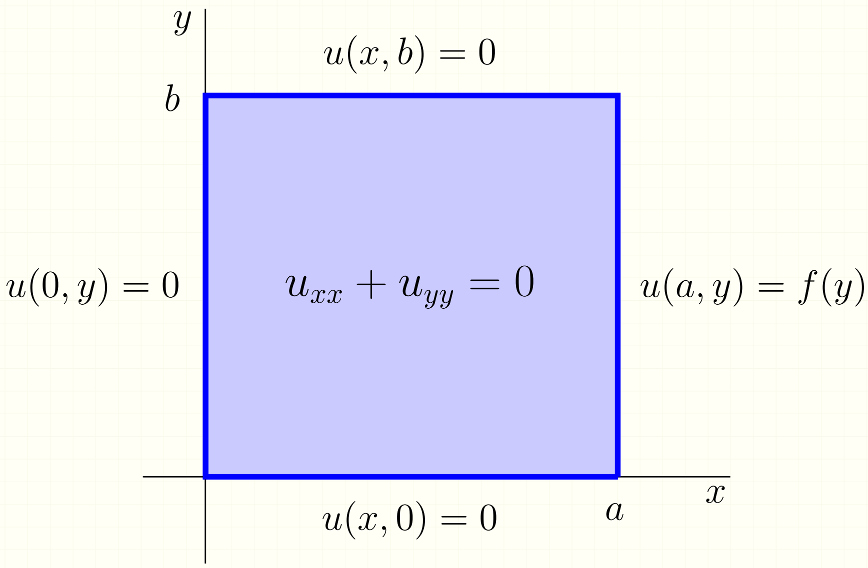
$$c_n = \frac{2}{a}\left[\operatorname{senh}\left(-\frac{n\pi}{a}b\right)\right]^{-1} \int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, dx \, .$$

Esse resultado corresponde a escolha que a condição não homogênea seja a fronteira em $y = 0$, o próximo exemplo ilustra como o mesmo procedimento pode ser utilizado para obter a solução geral para o caso onde a condição não homogênea está na fronteira $x = a$.

Exemplo 6.6.1:
Encontrar a solução geral para o problema

$$\begin{array}{ll} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < a \text{ e } 0 < y < b \\ u(x,0) = 0 & x \in [0,a] \\ u(x,b) = 0 & x \in [0,a] \\ u(0,y) = 0 & y \in [0,b] \\ u(a,y) = f(y) & y \in [0,b] \, . \end{array}$$

Como em todos os exercícios que buscam a solução de uma equação diferencial parcial, começamos identificando a equação, que nesse caso é a equação de Laplace. Para esse caso particular, temos que verificar a formado do domínio que é um retângulo. Em seguida analisamos as condições de fronteira impostas e identificamos que se trata de condições de Dirichlet nos quatro lados e que essas condições são homogêneas (iguais a zero) em três desses lados. Comparando com o Problema 6.10 observamos que nosso problema é muito similar, mas que a condição não homogênea, $u(a, y) = f(y)$, está em outro lado do retângulo, como mostra o seguinte gráfico. Compare-o com o domínio na Figura 6.14.



Como estamos diante de um novo caso precisamos reproduzir todos os passos para a obter a solução do problema, isso é, devemos aplicar a técnica de separação de variáveis, encontrar os autovalores e autofunções, as soluções fundamentais e a solução geral.

Aplicando a Separação de Variáveis $u(x,y)=X(x)\,Y(y)$ obtemos a condição

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda$$

onde podemos escolher o sinal da constante λ que for mais conveniente. Temos também que usar as condições de fronteira homogêneas do problema original para obter as condições de contorno para as EDOs. Obtemos então os problemas para as funções X e Y

$$\begin{array}{lll} X''-\lambda X=0 & X(0)=0 & \\ Y''+\lambda Y=0 & Y(0)=0 & Y(b)=0\ . \end{array}$$

Identificamos que o problema de autovalores está na equação para Y, pois essa é a equação que possui as duas condições necessárias. A escolha do sinal de λ vai determinar qual dessas duas EDOs será uma soma e qual uma subtração. Tendo escolhido o sinal para que o prolema de autovalores fosse uma soma obtemos exatamente o mesmo problema que foi resolvido anteriormente, cuja solução é

$$\lambda_n=\sigma_n^2=\frac{n^2\pi^2}{b^2}\ ,$$

$$Y_n(y)=\operatorname{sen}(\sigma_n y)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}\,y\right)\ .$$

Vamos agora resolver o problema para X para cada autovalor λ_n

$$X'' - \sigma_n^2 X = 0 \ .$$

Essa também é uma EDO conhecida cuja solução geral é

$$X(x) = k_1 \cosh(\sigma_n x) + k_2 \operatorname{senh}(\sigma_n x) \ .$$

Impondo a condição $X(0) = 0$ verificamos que $k_1 = 0$ e portanto

$$X(x) = k_2 \operatorname{senh}(\sigma_n x) \ .$$

Podemos agora escrever as Soluções Fundamentais para o problema original

$$u_n(x, y) = \operatorname{senh}(\sigma_n x) \operatorname{sen}(\sigma_n y) \ .$$

Cada solução fundamental resolve a equação diferencial e atende as condições homogêneas

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad u(x,0) = 0, \qquad u(x,b) = 0, \qquad u(0,y) = 0.$$

A Solução Geral será a combinação linear de todas as soluções fundamentais

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}(\sigma_n x) \operatorname{sen}(\sigma_n y) \ .$$

O último passo consiste na imposição da Condição Não Homogênea $u(a, y) = f(y)$ que nos leva a

$$u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}(\sigma_n a) \operatorname{sen}(\sigma_n y) = f(y) \ .$$

Comparando a série obtida com a série de senos da função $f(y)$ com período $2b$, concluímos que que os coeficientes c_n são obtidos da relação

$$c_n \operatorname{senh}(\sigma_n a) = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen}(\sigma_n y) \ dy \ .$$

Existem mais duas possibilidades para o lado onde impomos a condição não homogênea no problema de Laplace no retângulo. Esses casos são trabalhados nos exercícios e são resolvidos aplicando exatamente os mesmos passos. O próximo exemplo ilustra o uso dos resultados dessa seção para obter a solução de um problema específico.

Exemplo 6.6.2:
Resolver o Problema

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0 && 0 < x < 3 \text{ e } 0 < y < 2 \\ &u(x,0) = 0 && x \in [0,3] \\ &u(x,2) = 0 && x \in [0,3] \\ &u(0,y) = 0 && y \in [0,2] \\ &u(3,y) = f(y) && y \in [0,2] \end{aligned}$$

onde

$$f(y) = \begin{cases} y & 0 \leq y \leq 1\,, \\ 2-y & 1 < y \leq 2\,. \end{cases}$$

Começamos identificando que se trata de uma equação de Laplace com domínio retangular, além disso verificamos que as dimensões do retângulo são $a = 3$ e $b = 2$. Verificamos também que as condições do problema são de Dirichlet e que em três lados elas são homogêneas. Comparando com os problemas já resolvidos percebemos que esse problema é equivalente ao problema do Exemplo 6.6.1, sabemos então que a Solução Geral é dada por

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

com os coeficientes dados por

$$c_n = \frac{2}{b}\left[\operatorname{senh}\left(\frac{an\pi}{b}\right)\right]^{-1} \int_0^b f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\,dy\,.$$

Substituindo os valores $a = 3$ e $b = 2$ temos

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}y\right)$$

$$c_n = \left[\operatorname{senh}\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right]^{-1} \int_0^2 f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}y\right)\,dy\,.$$

O último passo consiste em calcular os coeficientes c_n para a função f dada.

Começamos calculando os coeficientes da série de Fourier de senos e obtemos

$$b_n = \int_0^2 f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\, y\right)\, dy = \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) .$$

Agora aplicamos a fórmula para c_n

$$c_n = \frac{b_n}{\operatorname{senh}\left(\dfrac{3n\pi}{2}\right)} = \frac{8 \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2 \operatorname{senh}\left(\dfrac{3n\pi}{2}\right)} .$$

Podemos escrever agora a solução completa para o problema

$$u(x,y) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)}{n^2 \operatorname{senh}\left(\dfrac{3n\pi}{2}\right)} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}\, x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}\, y\right) .$$

6.6.2 Equação de Laplace em Coordenadas Polares

Para resolver a equação de Laplace em um disco de raio L, podemos definir o domínio como

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle/\ \sqrt{x^2+y^2} \leq L\right\} .$$

Porém, as técnicas que estamos usando não se adequam a esse domínio, a solução é mudarmos nosso sistema de coordenadas para Coordenadas Polares

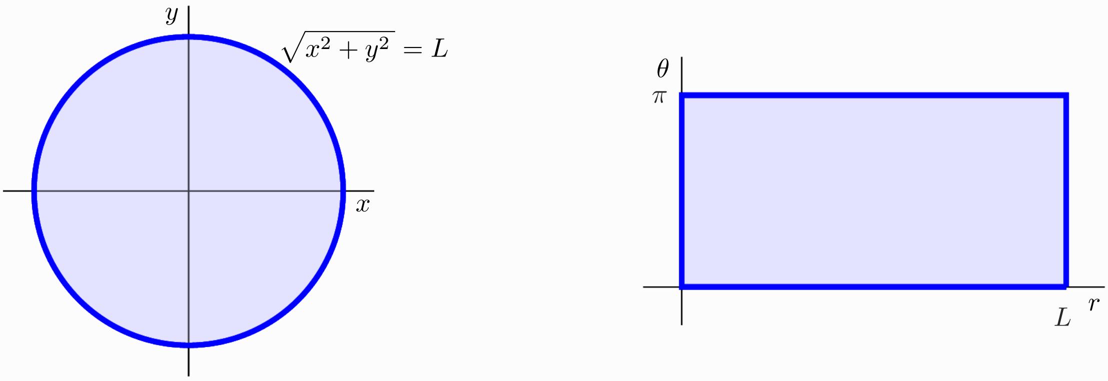
$$x = r\cos(\theta) ,$$
$$y = r\operatorname{sen}(\theta) .$$

Nesse novo sistema o domínio passa a ser a região

$$D = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ \middle/\ 0 < r < L \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi\right\}$$

que é melhor adaptada a técnica de separação de variáveis. A Figura 6.17 representa o domínio nos dois sistemas de coordenadas. Mais informações sobre as coordenadas polares podem ser encontradas na Seção A.5.

A mudança e coordenadas transforma também a equação pois as derivadas precisam respeitar a regra da cadeia. Assim precisamos determinar a forma que a equação



(a) Disco de raio L em coordenadas cartesianas (b) Disco de raio L em coordenadas polares

Figura 6.17: Domínio em forma de disco representado em coordenadas cartesianas e polares.

de Laplace assume em coordenadas polares. Começamos escrevendo a relação entre uma função escrita em coordenadas cartesianas, $u(x,y)$, e sua correspondente em coordenadas polares, $v(r,\theta)$

$$u(x,y)=v(r,\theta)=v\big(r(x,y),\theta(x,y)\big)\ .$$

Como a equação de Laplace envolve as derivadas segundas de u em x e em y precisamos encontrar as derivadas correspondentes em coordenadas polares. Vamos calcular essas derivadas usando a regra da cadeia. Derivando u por x temos

$$u_x=v_r r_x+v_\theta\theta_x\ .$$

Aplicando novamente a regra da cadeia, segue que

$$\begin{aligned}
u_{xx}&=\big(v_r r_x+v_\theta\theta_x\big)_x\\
&=(v_r)_x r_x+v_r r_{xx}+(v_\theta)_x\theta_x+v_\theta\theta_{xx}\\
&=(v_{rr}r_x+v_{r\theta}\theta_x)r_x+v_r r_{xx}+(v_{\theta r}r_x+v_{\theta\theta}\theta_x)\theta_x+v_\theta\theta_{xx}\\
&=v_{rr}(r_x)^2+v_{r\theta}\theta_x r_x+v_r r_{xx}+v_{\theta r}r_x\theta_x+v_{\theta\theta}(\theta_x)^2+v_\theta\theta_{xx}\\
&=v_{rr}(r_x)^2+v_{\theta\theta}(\theta_x)^2+2v_{r\theta}\theta_x r_x+v_r r_{xx}+v_\theta\theta_{xx}\ .
\end{aligned}$$

Repetindo os mesmos cálculos para as derivadas em y obtemos

$$u_{yy}=v_{rr}(r_y)^2+v_{\theta\theta}(\theta_y)^2+2v_{r\theta}\theta_y r_y+v_r r_{yy}+v_\theta\theta_{yy}\ .$$

Podemos agora escrever a equação de Laplace somando as duas derivadas

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} = {} & v_{rr}\big((r_x)^2 + (r_y)^2 \big) + v_{\theta\theta}\big((\theta_x)^2 + (\theta_y)^2 \big) \\ & + 2v_{r\theta}(\theta_x r_x + \theta_y r_y) + v_r(r_{xx} + r_{yy}) + v_\theta(\theta_{xx} + \theta_{yy}) \end{aligned} \tag{6.63}$$

Para simplificar essa equação, usamos as fórmulas da transformação

$$x = r\cos(\theta) \qquad \text{e} \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$$

e verificamos que

$$r^2 = x^2 + y^2 \; .$$

Derivando essa relação em x e depois em y obtemos

$$(r^2)_x = 2rr_x = 2x \qquad \text{e} \qquad (r^2)_y = 2rr_y = 2y \; .$$

Isolando as derivadas de r temos

$$r_x = \frac{x}{r} \qquad \text{e} \qquad r_y = \frac{y}{r} \; .$$

Agora somando seu quadrados encontramos

$$(r_x)^2 + (r_y)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1 \; .$$

Substituindo essa expressão em (6.63) obtemos

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} = {} & v_{rr} + v_{\theta\theta}\big((\theta_x)^2 + (\theta_y)^2 \big) \\ & + 2v_{r\theta}(\theta_x r_x + \theta_y r_y) + v_r(r_{xx} + r_{yy}) + v_\theta(\theta_{xx} + \theta_{yy}) \; . \end{aligned} \tag{6.64}$$

Continuando o processo de simplificação da equação somamos as derivadas segundas de r por x e y

$$\begin{aligned} r_{xx} + r_{yy} &= \left(\frac{x}{r}\right)_x + \left(\frac{y}{r}\right)_y \\ &= \frac{r - xr_x}{r^2} + \frac{r - yr_y}{r^2} \\ &= \frac{1}{r} - \frac{xr_x}{r^2} + \frac{1}{r} - \frac{yr_y}{r^2} \\ &= \frac{2}{r} - \frac{xr_x + yr_y}{r^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{r} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r}\right)$$
$$= \frac{2}{r} - \frac{1}{r^2}\frac{r^2}{r}$$
$$= \frac{1}{r}\ .$$

Substituindo essa expressão em (6.64) obtemos

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} &+ v_{\theta\theta}\big((\theta_x)^2 + (\theta_y)^2\big) \\ &+ 2v_{r\theta}(\theta_x r_x + \theta_y r_y) \\ &+ \frac{v_r}{r} \\ &+ v_\theta(\theta_{xx} + \theta_{yy})\ . \end{aligned} \tag{6.65}$$

Podemos ainda simplificar as derivadas de θ, para isso vamos usar a relação

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\ .$$

Derivando essa relação por x e y e somando seus quadrados temos

$$\begin{aligned} (\theta_x)^2 + (\theta_y)^2 &= \left(\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{-y}{x^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x}\right)^2 \\ &= \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 \\ &= \frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{1}{r^2}\ . \end{aligned}$$

Novamente, substituímos na equação (6.65)

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{v_{\theta\theta}}{r^2} + 2v_{r\theta}(\theta_x r_x + \theta_y r_y) + \frac{v_r}{r} + v_\theta(\theta_{xx} + \theta_{yy})\ . \tag{6.66}$$

Os próximos passos são calcular a soma das derivadas segundas de θ

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)_x + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)_y$$

$$= \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= 0 \ .$$

e a soma das derivadas de r e θ

$$\theta_x r_x + \theta_y r_y = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\frac{x}{r} + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\frac{y}{r}$$
$$= \frac{xy - yx}{r^4}$$
$$= 0 \ .$$

Substituímos essas duas últimas relações na equação (6.66) temos a Equação de Laplace em Coordenadas Polares

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} + \frac{1}{r}v_r \ . \tag{6.67}$$

Na próxima subseção vamos usar essa equação para resolver um problema de Laplace em um disco.

6.6.3 No Disco com Fronteira de Dirichlet

Vamos agora resolver o problema de Laplace com fronteira de Dirichlet no disco. Já verificamos que devemos usar coordenadas polares onde o domínio tem a forma

$$D = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < r < L \text{ e } 0 \le \theta < 2\pi\right\} ,$$

a equação de Laplace é escrita como

$$v_{rr} + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} + \frac{1}{r}v_r = 0$$

e a condição de fronteira será aplicada na circunferência de raio Ls impondo que

$$v(L,\theta) = f(\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

onde, para eliminarmos a solução trivial, determinamos que $f(\theta) \ne 0$ para algum $\theta \in [0, 2\pi]$. Além dessas, precisamos impor algumas condições para que o problema seja bem posto no sistema de coordenadas polares. A solução v precisa ser periódica de período 2π na variável θ e ser limitada na variável r, especialmente quando r se aproxima de zero. O ponto $r = 0$ é uma singularidade do sistema de coordenadas, mas é um ponto normal para o problema de Laplace. A Figura 6.18 ilustra o domínio e as condições desse problema e a definição a seguir apresenta todos os detalhes.

Definição 6.12: Problema de Laplace no Disco com Fronteira de Dirichlet

O problema de Laplace no disco com condição de Dirichlet consiste em resolver a equação

$$v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + \frac{1}{r} v_r = 0 \qquad (r, \theta) \in D$$

$$v(L, \theta) = f(\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

onde $f(\theta) \neq 0$ para algum $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$D = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \ \middle/ \ 0 < r < L \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

e a função v é limitada em r e periódica com período 2π em θ.

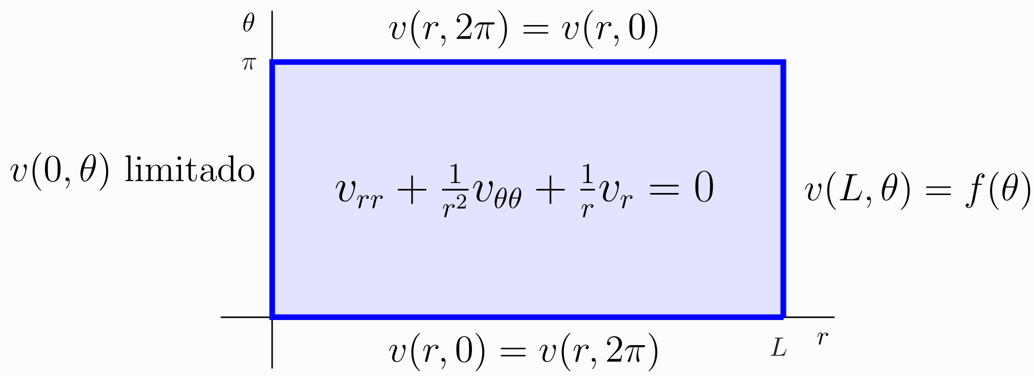


Figura 6.18: Domínio e condições do problema de Laplace no Disco com condições de Dirichlet.

Para resolver esse problema vamos seguir os mesmos passos que empregamos para os casos anteriores. Começamos aplicando o método de Separação de Variáveis, supondo que $v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ e substituindo na equação diferencial parcial

$$R''\Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'' + \frac{1}{r} R'\Theta = 0 \ .$$

Rearranjando podemos isolar os termos que dependem de r dos que dependem de θ

$$\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right)\Theta = -\frac{1}{r^2}R\Theta'' ,$$

$$\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right)\frac{r^2}{R} = \frac{-\Theta''}{\Theta} .$$

Então, existe uma constante λ tal que a equação diferencial parcial pode ser escrita como duas equações diferenciais ordinárias

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 ,$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0 .$$

Vamos tomar a equação para Θ com a condição de periodicidade como nosso Problema de Autovalores, note que temos exatamente a mesma EDO do problema do calor com a condição de periodicidade como condição de fronteira.

Nesse caso, se $\lambda < 0$ a solução geral é

$$\Theta(\theta) = pe^{\sigma\theta} + qe^{-\sigma\theta}$$

onde $\sigma^2 = -\lambda$. Como essa função só será periódica se for nula, $p = q = 0$, ela não é compatível com as condições do problema.

Para $\lambda = 0$ a solução geral é

$$\Theta(\theta) = p + q\theta ,$$

que será periódica se $q = 0$. Temos então o autovalor $\lambda_0 = 0$ e escolhemos a autofunção

$$\Theta_0(\theta) = 1 .$$

Para $\lambda > 0$ a solução geral é

$$\Theta(\theta) = p\cos(\sigma\theta) + q\,\mathrm{sen}\,(\sigma\theta)$$

onde $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Como essa função precisa ter período igual a 2π, impomos a condição $\sigma_n = n$ e os autovalores e autofunções são

$$\lambda_n = \sigma_n^2 = n^2 \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Theta_n(\theta) = p\cos(n\theta) + q\,\mathrm{sen}\,(n\theta) \ .$$

Vamos agora resolver a equação em R para cada valor de λ_n

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0 \ .$$

Essa é uma Equação de Euler que podemos resolver buscamos uma solução na forma $R(r) = r^s$, que substituindo na equação produz

$$r^2s(s-1)r^{s-2} + rsr^{s-1} - n^2r^s = 0 \ .$$

Colocando r^s em evidência e simplificando temos

$$r^s\big(s(s-1) + s - n^2\big) = r^s\left(s^2 - n^2\right) = 0 \ .$$

Como r^s não é uma função nula concluímos que

$$s^2 - n^2 = 0$$

obtendo as soluções $s = \pm n$, que produzem

$$R_+(r) = r^n \ ,$$
$$R_-(r) = r^{-n} \ .$$

Porém, as funções $R_-(r)$ não são limitadas quando $r \to 0$, temos então que eliminá-las.

Podemos agora construir as Soluções Fundamentais associadas aos autovalores e autofunções do problema em θ. Começando pelo caso $\lambda > 0$ temos

$$\begin{aligned} v_n(r,\theta) &= R_n(x)\Theta_n(\theta) \\ &= r^n\big(p\cos(n\theta) + q\,\mathrm{sen}\,(n\theta)\big) \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$

No caso $\lambda = 0$, com a autofunção $\Theta_0(\theta) = 1$, precisamos substituir o valor de λ na equação para R, obtendo

$$r^2R'' + rR' = 0 \ .$$

Para resolver essa EDO fazemos a mudança de variável $S(r) = R'(r)$, que leva à equação separável

$$r^2 S' + rS = 0$$

que reescrevemos como

$$\frac{S'}{S} = -\frac{1}{r}$$

e resolvemos integrando os dois lados

$$\int \frac{dS}{S} = -\int \frac{dr}{r}$$

$$\ln(S) = -\ln(r) + c\,.$$

Isolando S e usando a relação $R' = S$, encontramos

$$\begin{aligned} R'(r) &= S(r) \\ &= \exp\big(-\ln(r) + c\big) \\ &= \exp\big(-\ln(r)\big)\exp(c) \\ &= \frac{e^c}{r} = \frac{p}{r} \end{aligned}$$

onde $p = e^c$. Integrando temos

$$R(r) = p\ln(r) + q\,.$$

Como R deve ser limitada, segue que $p = 0$ e portanto R é constante. Assim a Solução Fundamental associada com $\lambda = 0$ é uma função constante

$$v_0(r,\theta) = \frac{1}{2}\,.$$

Escolhemos a constante igual a $1/2$ para ajustá-la as fórmulas da Série de Fourier que usaremos.

Podemos agora escrever a Solução Geral para o problema de Laplace no disco

$$\begin{aligned} v(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n v_n(r,\theta) && (6.68) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\big(a_n\cos(n\theta) + b_n\,\mathrm{sen}(n\theta)\big) \end{aligned}$$

onde denotando $a_n = c_n p$ e $b_n = c_n q$. Qualquer escolha dos coeficientes a_n e b_n produz uma função que é solução da equação diferencial, é limitada em $r = 0$ e periódica em θ.

Falta apenas impor a Condição de Fronteira $v(L,\theta) = f(\theta)$ que escrevemos como

$$f(\theta) = v(L,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L^n \big(a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta) \big) .$$

Note que essa é uma série de Fourier de período 2π. Desse modo, estendendo f periodicamente, os coeficientes da série são dados pelas fórmulas de Euler-Fourier

$$L^n a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$L^n b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen}(n\theta)\, d\theta \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como a expressão de f é dada no intervalo $[0, 2\pi]$, podemos reescrever as fórmulas acima de maneira mais conveniente usando o fato que a integral de uma função periódica em um intervalo cujo comprimento é o período da função independe do início do intervalo

$$a_n = \frac{1}{\pi L^n} \int_{0}^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{6.69}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi L^n} \int_{0}^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen}(n\theta)\, d\theta \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.70}$$

A proposição a seguir resume os resultados obtidos nessa subseção.

Proposição 6.13: Solução do Problema de Laplace no Disco com Fronteira de Dirichlet

A solução do Problema 6.12 é dada pela solução geral (6.68)

$$v(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \big(a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta) \big)$$

com os coeficientes determinados pelas fórmulas (6.69) e (6.70) baseadas na

Série de Fourier da função f

$$a_n = \frac{1}{\pi L^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi L^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen}(n\theta)\, d\theta \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Exercícios Seção 6.6

1) Para cada conjunto de condições de fronteira, obtenha os itens solicitados para a solução da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$.

i) As equações diferenciais ordinárias produzidas pela separação de variáveis.

ii) O problema de autovalores, assim como seus autovalores e autofunções.

iii) As soluções fundamentais.

iv) A solução geral.

v) As fórmulas para os coeficientes que determinam a solução.

a) $$\begin{array}{lll} u(x,0) = f(x) & u(x,b) = 0 & 0 \le x \le a \\ u(0,y) = 0 & u(a,y) = 0 & 0 < y < b \end{array}$$

b) $$\begin{array}{lll} u(x,0) = 0 & u(x,b) = g(x) & 0 \le x \le a \\ u(0,y) = 0 & u(a,y) = 0 & 0 < y < b \end{array}$$

c) $$\begin{array}{lll} u(x,0) = 0 & u(x,b) = 0 & 0 \le x \le a \\ u(0,y) = r(y) & u(a,y) = 0 & 0 < y < b \end{array}$$

d) $$\begin{array}{lll} u(x,0) = 0 & u(x,b) = 0 & 0 \le x \le a \\ u(0,y) = 0 & u(a,y) = s(y) & 0 < y < b \end{array}$$

2) Encontre a solução para a equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$ que satisfaz as condições

$$\begin{array}{lll} u(x,0) = 0 & u(x,b) = g(x) & 0 \le x \le a \\ u(0,y) = 0 & u(a,y) = 0 & 0 < y < b \end{array}$$

onde

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < a/2 \\ a - x & a/2 \le x \le a \end{cases}$$

3) Calcule a solução da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$ com as condições dadas.

a) $$\begin{array}{lll} u(x,0) = 0 & u(x,1) = 0 & a = 1 \\ u(0,y) = 0 & u(1,y) = \operatorname{sen}(\pi y) & b = 1 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{lll} u(x,0) = 0 & u(x,1) = \operatorname{sen}(\pi x) & a = 1 \\ u(0,y) = 0 & u(1,y) = 0 & b = 1 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{lll} u(x,0) = 0 & u(x,1) = \operatorname{sen}(5\pi x) & a = 1 \\ u(0,y) = 0 & u(1,y) = 0 & b = 1 \end{array}$$

d) $$\begin{array}{lll} u(x,0) = 0 & u(x,\pi) = 0 & a = 2 \\ u(0,y) = 0 & u(2,y) = y(y-\pi) & b = \pi \end{array}$$

e) $$\begin{array}{lll} u(x,0) = 0 & u(x,\pi) = 0 & a = 2 \\ u(0,y) = y(y-\pi) & u(2,y) = 0 & b = \pi \end{array}$$

f) $$\begin{array}{lll} u(x,0) = x^2 - x & u(x,2) = 0 & a = 1 \\ u(0,y) = 0 & u(1,y) = 0 & b = 2 \end{array}$$

g) $$\begin{array}{lll} u(x,0) = 0 & u(x,2) = x^2 - x & a = 1 \\ u(0,y) = 0 & u(1,y) = 0 & b = 2 \end{array}$$

6.7 Revisão

1) [resp] (Calor em um fio) Considere um fio reto uniforme, de material homogêneo, com comprimento $L = \pi$ metros. A temperatura na posição x, em metros, do fio no instante t, em segundos, é dada por uma função $u(x,t)$, em graus Celsius, com $0 \le x \le \pi$ e $t \ge 0$. Sabe-se que a evolução do calor nesse fio satisfaz a EDP

$$u_t = u_{xx}$$

Sabe-se também que a temperatura nas extremidades do fio são mantidas constantes em 0 °C e que a temperatura no fio no instante inicial é dada por

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad 0 \le x \le \pi$$

Com base nessas informações:

a) Apresente as condições de fronteira e condição inicial para esse problema, em termos da função u.

b) Obtenha a função u que é solução para esse problema.
Dica: $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = 1/2\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$

2) [resp] (Equação de Laplace) Seja $u = u(x,y)$ função definida no retângulo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Considere a equação de Laplace com as condições de fronteira

$$(I) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(0,y) = 0 \\ u(1,y) = 0 \\ u_y(x,0) = \ell(x) \\ u_y(x,1) = 0 \end{cases}$$

onde ℓ é definida em $0 \le x \le 1$.

a) Supondo a separação de variáveis $u(x,y) = F(x)G(y)$, apresente os PVI's que as funções F e G satisfazem (não é necessário resolvê-los).

b) Sejam $u_n(x,y) = \operatorname{sen}(n\pi x)\cosh[n\pi(1-y)]$, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, as soluções fundamentais baseadas nos PVI's do item anterior. Apresente a solução em série para o problema (I), explicitando as fórmulas para os coeficientes.

3) [resp] Considere o seguinte problema de valor inicial e de contorno:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx} && 0 < x < 2 \quad t > 0 \\ &u(0,t) = 0 = u(2,t) && t > 0 \\ &u(x,0) = 5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 2\operatorname{sen}(2\pi x) && 0 \le x \le 2 \\ &u_t(x,0) = 0 && 0 \le x \le 2 \end{aligned}$$

a) Mostre que se existe uma solução do problema na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, então existe uma constante λ tal que

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad X(0) = X(2) = 0$$

$$T'' + 4\lambda T = 0 \qquad T'(0) = 0$$

b) Admita que apenas $\lambda > 0$ gera soluções admissíveis para o problema. Neste caso, qual a solução geral do problema $X'' + \lambda X = 0$? Utilize as condições iniciais para mostrar que apenas $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{4}$.

c) Mostre que

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\cos(n\pi t) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

são as soluções fundamentais do problema.

d) Use o item anterior e a condição inicial para encontrar a solução $u(x,t)$.

4) Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \pi^2 u & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = 1,\ u(1,t) = -1 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

a) Suponha que $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, onde v é a solução do problema estacionário

$$v_{xx} + \pi^2 v = 0, \quad v(0) = 1 \quad \text{e} \quad v(1) = -1$$

Mostre que para toda constante c,

$$v(x) = c\operatorname{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)$$

é solução do problema estacionário.

b) Mostre que w satisfaz o problema homogêneo com condição inicial

$$w(x,0) = c\operatorname{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)$$

c) Use os itens anteriores e os resultados da questão anterior para encontrar a solução $u(x,t)$.
Dica: *lembre que as funções* $\operatorname{sen}(n\pi x)$ *e* $\cos(m\pi x)$ *são ortogonais.*

5) Mostre que a equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

em coordenadas polares é

$$v_{rr} + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} + \frac{1}{r}v_r = 0$$

onde $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$.

6) [resp] Considere o seguinte problema de valor inicial e de contorno:

$$u_t = u_{xx} + \pi^2 u 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u(0,t) = 0 = u(1,t), t > 0$$
$$u(x,0) = -\operatorname{sen}(\pi x) + 2\operatorname{sen}(3\pi x), 0 \le x \le 1$$

a) Mostre que se existe uma solução do problema na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, então existe uma constante λ tal que

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + (\lambda - \pi^2)T = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

b) Admita que apenas $\lambda > 0$ gera soluções admissíveis para o problema. Neste caso, qual a solução geral do problema $X'' + \lambda X = 0$? Utilize as condições iniciais para mostrar que apenas $\lambda = n^2\pi^2$.

c) Mostre que $u_n(x,t) = e^{\pi^2(1-n^2)t}\operatorname{sen}(n\pi x)$, $n = 1,2,3,\dots$, são as soluções fundamentais do problema.

d) Use o item anterior e a condição inicial para encontrar a solução $u(x,t)$.

7) Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \pi^2 u, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = 1,\ u(1,t) = -1, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

a) Suponha que $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, onde v é a solução do problema estacionário

$$v_{xx} + \pi^2 v = 0,\ \ v(0) = 1 \text{ e } \ v(1) = -1$$

Mostre que para toda constante c, $v(x) = c\operatorname{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)$ é solução do problema estacionário.

b) Mostre que w satisfaz o problema homogêneo com condição inicial

$$w(x,0) = c\operatorname{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)$$

c) Use os itens anteriores e os resultados da questão anterior para encontrar a solução $u(x,t)$.

Dica: *Lembre que as funções* $\operatorname{sen}(n\pi x)$ *e* $\cos(m\pi x)$ *são ortogonais.*

8) Considere o problema

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{4}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

a) Admita que a solução do problema tem transformada de Fourier e que

$$\lim_{w \to \pm\infty} \widehat{u}(w,y) = 0$$

Mostre que

$$\widehat{u}(w,t) = e^{-w^2}e^{-|w|y}$$

b) Mostre que

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}(w,t))(x) \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{4}} \frac{y}{z^2 + y^2}\,dz \end{aligned}$$

c) Mostre que

$$\lim_{y \to 0^+} u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

9) Considere o seguinte problema de valor inicial e de contorno:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(1,t), & t > 0 \\ u(x,0) = 3 - \cos(\pi x) + 2\cos(3\pi x), & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

a) Mostre que se existe uma solução do problema na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, então existe uma constante λ tal que

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + \lambda T = 0 \\ X'(0) = X'(1) = 0 \end{cases}$$

b) Admita que apenas $\lambda \ge 0$ gera soluções admissíveis para o problema. Para $\lambda > 0$, qual a solução geral do problema $X'' + \lambda X = 0$? Utilize as condições iniciais para mostrar que, neste caso, apenas $\lambda = n^2\pi^2$.

c) Use o item anterior e o fato que $\lambda = 0$ gera apenas soluções constantes para mostrar que $u_n(x,t) = e^{-\pi^2 n^2 t}\cos(n\pi x)$, $n = 0,1,2,3,\ldots$, são as soluções fundamentais do problema.

d) Use o item anterior e a condição inicial para encontrar a solução $u(x,t)$.

10) Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \pi^2 u, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = 1,\ u(1,t) = -1, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Suponha que $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, onde v é a solução do problema estacionário

$$v_{xx} + \pi^2 v = 0,\ v(0) = 1 \text{ e } v(1) = -1$$

Mostre que para toda constante c, $v(x) = c\,\mathrm{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)$ é solução do problema estacionário.

b) Mostre que w satisfaz o problema homogêneo com condição inicial

$$w(x,0) = c\,\mathrm{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)$$

c) Use os itens anteriores e os resultados da questão anterior para encontrar a solução $u(x,t)$. Dica: *lembre que as funções* $\mathrm{sen}(n\pi x)$ *e* $\cos(m\pi x)$ *são ortogonais.*

7

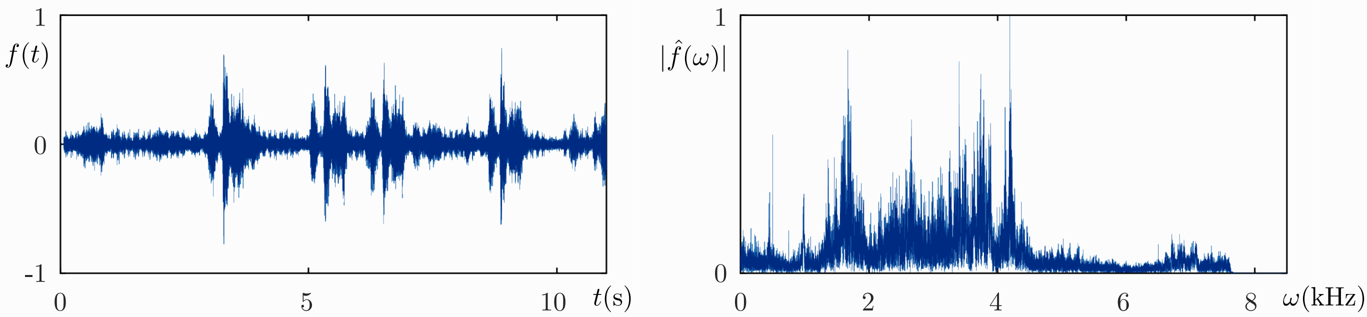
Transformada de Fourier

7.1 Introdução 309
7.2 Série de Fourier Complexa 312
7.3 Transformada de Fourier 317
7.4 Equação do Calor em uma Barra Infinita 322
7.5 Convergência da Transformada de Fourier 327
7.6 Teorema da Convolução 331
7.7 Propriedades da Transformada de Fourier 333
7.8 Calculando a Transformada de Fourier 337
7.9 Tabelas de Transformadas de Fourier 345
7.10 Revisão 348

7.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos a Transformada de Fourier que é uma generalização da Série de Fourier para funções não periódicas. A principal consequência dessa generalização é que as frequências passam a assumir valores reais. Isso ocorre porque para representar funções periódicas a série utilizava um conjunto contável de frequências, isso é, as frequências assumiam valores ω_n para $n \in \mathbb{N}$ e a função era descrita pelo conjunto de coeficientes a_n e b_n. Porém, para representar funções não periódicas a transformada precisará de frequências assumindo valores reais $\omega \in \mathbb{R}$. Dessa forma o somatório em n para as frequências ω_n se transforma em uma integral em ω e as funções passam a ser representadas por uma nova função em ω. Como podemos ver na expressão que define a Transformada de Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\big[f(t)\big](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\,.$$



(a) Amplitude do áudio, $f(t)$, ao longo do tempo em segundos.

(b) Espectro de frequências, isso é, o módulo da Transformada de Fourier $|\hat{t}(\omega)|$

Figura 7.1: Áudio do piado do Bem-Te-Vi no domínio do tempo e da frequência.

A Transformada de Fourier pode ser interpretada como uma decomposição de uma função, ou sinal, em suas componentes senoidais, dessa forma ela transforma uma função no tempo, $f(t)$, em sua representação em frequências, $\hat{f}(\omega)$. Essa mudança da forma de representar a função sem perder sua informação original se mostrou uma ferramenta extremamente poderosa e possui inúmeras aplicações. Quando aliamos o poder da transformada com a existência de um algoritmo extremamente eficiente para calculá-la computacionalmente, a FFT (Fast Fourier Transform) implementada em praticamente qualquer linguagem de programação existente, temos uma das ferramentas matemáticas mais aplicadas. A Figura 7.1 é um exemplo do uso da Transformada de Fourier, a Figura 7.1a representa a amplitude do áudio como função do tempo do piado do Bem-Te-Vi [21], enquanto a Figura 7.1b mostra a distribuição de amplitudes por frequências.

Como a Transformada de Fourier e sua inversa nos permitem ir e voltar da função original $f(t)$ para sua transformada $\hat{f}(\omega)$ é comum pensarmos que essas são duas representações distintas da mesma função. Dessa forma dizemos que $f(t)$ é a representação da função no Domínio do Tempo e $\hat{f}(\omega)$ é a representação da mesma função no Domínio da Frequência.

Para fazer a transição da Série para a Transformada de Fourier precisamos primeiro reescrever a série em um novo formato que chamamos de Série de Fourier Complexa. A Seção 7.2 apresenta os cálculos que transformam os coeficientes a_n e b_n reais em coeficientes c_n complexos, além de substituir as funções seno e cosseno pela função exponencial complexa. A Seção A.6, dos apêndices, faz uma introdução aos números complexos e apresenta resultados necessários para a compreensão deste capítulo. Com a Série de Fourier Complexa em mãos vamos definir a Transformada de Fourier e sua inversa na Seção 7.3.

A Seção 7.4 ilustra como podemos chegar a definição da Transformada de Fourier buscando a solução para o problema de dissipação do calor em uma barra infinita. O principal objetivo dessa seção é mostrar como a Transformada de Fourier surge como uma ferramenta para a solução desse tipo de problema. A parte inicial desses cálculos também é utilizada para a construção da Formulação Fraca da equação, necessária para o emprego do Método de Elementos Finitos, muito utilizado na engenharia para resolver equações diferencias, especialmente em domínios geometricamente complexos.

Durante a construção da solução para o problema do calor na barra infinita surge a necessidade de calcular a inversa da Transformada de Fourier de um produto de funções. Essa operação está ligada ao importante Teorema da Convolução 7.8. A convolução é uma operação muito utilizada em tratamento de sinais e imagens, sendo base para muitos filtros. Um fato importante é que computacionalmente é mais eficiente calcular a Transformada de Fourier dos sinais de entrada, calcular a convolução nos sinais transformados e aplicar transformada a inversa para obter o resultado do que calcular a convolução diretamente nos sinais originais. Na Seção 7.6 definimos a convolução, apresentamos suas propriedades e apresentamos o Teorema da Convolução que a relaciona com a Transformada de Fourier.

A Seção 7.5 discute a convergência da Transformada e a necessidade de usarmos funções generalizadas como o Delta de Dirac. A Seção 7.7 apresenta as principais propriedades da transformada e a Seção 7.8 apresenta os exemplos do cálculo da transformada de algumas funções importantes. As Tabelas 7.1 e 7.2 resumem esses resultados.

7.2 Série de Fourier Complexa

Apresentamos nessa seção a Série de Fourier Complexa que é uma forma alternativa para a Série de Fourier, definida em 5.7, onde substituímos as funções seno e cosseno reais por uma exponencial complexa. Escrita dessa forma fica mais fácil comparar a Série com a Transformada de Fourier. Observe que a versão complexa da série tem exatamente as mesmas propriedades da série escrita na sua forma original, estamos apenas fazendo uma transformação sem alterar a série.

Começamos com as expressões para a Série de Fourier e as fórmulas para o cálculo dos seus coeficientes. Usamos aqui $t \in \mathbb{R}$ como variável independente pois uma das principais aplicações da transformada de Fourier é a conversão de sinais no tempo para seu espectro de frequências

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) , \tag{7.1}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\, dt , \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{7.2}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\, dt , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{7.3}$$

Usamos a Identidade de Euler para escrever as funções seno e cosseno em termos da exponencial. Primeiro calculamos a exponencial de it e de $-it$

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos(t) + i \operatorname{sen}(t) , \\ e^{-it} &= \cos(t) - i \operatorname{sen}(t) . \end{aligned}$$

Somando e subtraindo essas expressões obtemos duas novas relações

$$\begin{aligned} e^{it} + e^{-it} &= 2\cos(t) , \\ e^{it} - e^{-it} &= 2i \operatorname{sen}(t) . \end{aligned}$$

Agora basta isolarmos o seno e o cosseno em cada relação

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} , \tag{7.4}$$

$$\operatorname{sen}(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} . \tag{7.5}$$

Note a semelhança com as definições das funções $\operatorname{senh}(t)$ e $\cosh(t)$, equações (A.2) e (A.3).

Combinando as funções seno e cosseno com mesma frequência podemos escrever

$$\begin{aligned} a\cos(kt) + b\operatorname{sen}(kt) &= a\,\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} + b\,\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i} \\ &= \left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2i}\right)e^{ikt} + \left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2i}\right)e^{-ikt} \\ &= \frac{a-bi}{2}\,e^{ikt} + \frac{a+bi}{2}\,e^{-ikt}\,. \end{aligned}$$

Criando a constante complexa $c = {}^{(a-bi)}\!/_{2}$, temos que

$$a\cos(kt) + b\operatorname{sen}(kt) = c\,e^{ikt} + \bar{c}\,e^{-ikt} \tag{7.6}$$

onde $\bar{c}$ é o complexo conjugado de c (veja a Definição A.2).

Podemos então reescrever os termos do somatório (7.1) como exponenciais, nesse processo escolhemos usar

$$\omega = \frac{\pi}{L}$$

e obtemos

$$a_n\cos(n\omega t) + b_n\operatorname{sen}(n\omega t) = c_n\exp(in\omega t) + \bar{c}_n\exp(-in\omega t)\;.$$

Substituindo em (7.1) temos

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\operatorname{sen}(n\omega t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\exp(in\omega t) + \bar{c}_n\exp(-in\omega t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\exp(in\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n\exp(-in\omega t)\;. \end{aligned}$$

Na última passagem assumimos que todos os limites convergem e separamos a série em duas partes. Vamos agora reorganizar os termos para escrever as duas séries com índices entre um e infinito em uma única série com índices entre menos e mais infinito. Começamos trocando o índice da segunda série de n para $-n$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(in\omega t\right) + \sum_{n=-1}^{-\infty} \bar{c}_{-n} \exp\left(in\omega t\right)$$

Note que para $n > 0$ os valores de c_n são definidos pelas fórmulas dos coeficientes da Série de Fourier. Para os índices $n < 0$ definimos que

$$c_n = \bar{c}_{-n} \qquad\qquad \forall\; n < 0$$

e podemos escrever a série como

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(in\omega t\right) + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n \exp\left(in\omega t\right) \, .$$

Fazendo $c_0 = {a_0}/{2}$, podemos agrupar todos os termos em um único somatório construindo a Série de Fourier Complexa

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(in\omega t\right) \, .$$

Vamos agora ajustar as fórmulas dos coeficientes reais, a_n e b_n, para o cálculo direto dos coeficientes complexos c_n. Para $n \geq 0$ temos

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(n\omega t)\; dt - \frac{i}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega t)\; dt\right) \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\Big[\cos(n\omega t) - i\,\mathrm{sen}(n\omega t)\Big]\; dt \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\exp\left(-in\omega t\right)\; dt \, .
\end{aligned}$$

A proposição a seguir resume os resultados dessa seção.

Proposição 7.1: Série de Fourier Complexa

A Série de Fourier Complexa é uma série da forma

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\omega t}\,, \tag{7.7}$$

onde os coeficientes c_n são calculados por

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt & n \geq 0\,, \\ \bar{c}_{-n} & n < 0\,. \end{cases} \tag{7.8}$$

Observe que, a Série de Fourier só pode ser usada para representar funções periódicas, com período $2L$, e que as senoides somadas tem frequências discretas nw para $n = 0, 1, 2, \ldots$

Exemplo 7.2.1:
Calcule a Série de Fourier Complexa da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0\,, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1\,, \end{cases} \qquad f(x+2) = f(x)\,.$$

Note que já calculamos a Série de Fourier dessa função no exemplo 5.3.3, onde encontramos que

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 0\,, \\ 0 & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par}, \\ \dfrac{2}{n\pi} & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Como conhecemos os coeficientes reais podemos calcular diretamente os coeficientes complexos. Para $n = 0$ temos

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Para $n > 0$ e ímpar vamos fazer a mudança de índices $n = 2k - 1$ para escrever

$$c_n = c_{2k-1} = \frac{a_{2k-1} + ib_{2k-1}}{2} = \frac{ib_{2k-1}}{2} = \frac{2i}{(2k-1)\pi} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Enquanto que para $n < 0$ e ímpar temos

$$c_n = \overline{c}_{-n} = \overline{c}_{2k-1} = \frac{-2i}{(2k-1)\pi} \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

Vamos agora escrever a série

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\omega t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n\, e^{in\omega t} + c_0 e^0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{in\omega t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c}_n\, e^{-in\omega t} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{in\omega t}\,. \end{aligned}$$

Removendo todos os termos pares e fazendo a mudança de índices $n = 2k-1$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c}_{2k-1}\, e^{-i(2k-1)\omega t} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1}\, e^{i(2k-1)\omega t} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2i}{(2k-1)\pi}\, e^{-i(2k-1)\omega t} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i}{(2k-1)\pi}\, e^{i(2k-1)\omega t}\,. \end{aligned}$$

Retornamos os índices do primeiro somatório para valores negativos fazendo a transformação $k = -p$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{p=-\infty}^{-1} \frac{-2i}{(-2p-1)\pi}\, e^{-i(-2p-1)\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i}{(2k-1)\pi}\, e^{i(2k-1)\omega t} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{p=-\infty}^{-1} \frac{2i}{(2p+1)\pi}\, e^{i(2p+1)\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i}{(2k-1)\pi}\, e^{i(2k-1)\omega t}\,. \end{aligned}$$

Para agruparmos todos os termos em um único somatório mudamos mais uma vez o índice do primeiro somatório fazendo $p = k-1$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{2i}{(2k-1)\pi}\, e^{i(2k-1)\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i}{(2k-1)\pi}\, e^{i(2k-1)\omega t}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2i}{(2k-1)\pi} e^{i(2k-1)\omega t}.$$

Exercícios Seção 7.2

1) Encontre a Série de Fourier complexa de cada função.

a) $f(x) = -x \quad -L \leq x < L$
$f(x+2L) = f(x)$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & -L \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < L \end{cases}$
$f(x+2L) = f(x)$

c) $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$
$f(x+2\pi) = f(x)$

d) $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$
$f(x+2) = f(x)$

e) $f(x) = \begin{cases} x+L, & -L \leq x \leq 0 \\ L, & 0 < x < L \end{cases}$
$f(x+2L) = f(x)$

f) $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq -1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$
$f(x+4) = f(x)$

g) $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$
$f(x+4) = f(x)$

h) $f(x) = x \quad -1 \leq x < 1$
$f(x+2) = f(x)$

i) $f(x) = \frac{x^2}{2} \quad -2 \leq x < 2$
$f(x+4) = f(x)$

j) $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x < 0 \\ 2-2x, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$
$f(x+4) = f(x)$

k) $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & -2 \leq x < 0 \\ 2x - \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$
$f(x+4) = f(x)$

l) $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leq x \leq 0 \\ x^2(3-x), & 0 < x < 3 \end{cases}$
$f(x+6) = f(x)$

7.3 Transformada de Fourier

Quando usamos a Série de Fourier estamos considerando valores discretos para a frequência, isso é, a série só representa frequências associadas aos coeficientes

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Essa restrição é aceitável em algumas aplicações mas em algumas situações precisamos levar em conta todas as frequências possíveis. Para esses casos usamos a Transformada de Fourier que é definida a seguir.

Definição 7.2: Transformada de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definimos a Transformada de Fourier de f por

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\big[f(t)\big](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

desde que a integral convirja.

Note que f é uma função complexa, nesse contexto não há razão para introduzirmos essa definição apenas para funções reais. Mesmo porque, independentemente de f ser ou não uma função real, o que aparece dentro do integrando na definição da transformada será necessariamente uma função complexa, já que envolve $e^{-i\omega t}$.

Usamos $\mathcal{F}$ para denotar a aplicação da transformada em uma função e o chapéu para indicar a função representada no domínio da frequência.

Exemplo 7.3.1:
Calcular da Transformada de $f(t)$ data por

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -a \leq t \leq a\,, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usando a definição temos

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \exp(-i\omega t)\, dt \\ &= \int_{-a}^{a} \exp(-i\omega t)\, dt\,. \end{aligned}$$

Calculando primeiro para $\omega = 0$ temos

$$\hat{f}(0) = \int_{-a}^{a} \exp(0)\, dt = \int_{-a}^{a} dt = 2a\,.$$

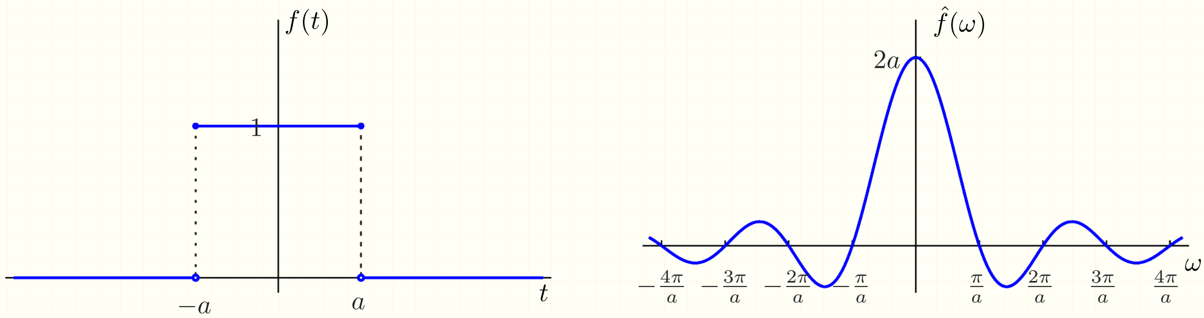
Calculando agora para $\omega \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-a}^{a} \exp(-i\omega t)\, dt \\
&= \frac{\exp(-i\omega a)}{-i\omega} - \frac{\exp(i\omega a)}{-i\omega} \\
&= \frac{1}{i\omega}\big(\exp(i\omega a) - \exp(-i\omega a)\big) \\
&= \frac{1}{i\omega}\big(\cos(\omega a) + i\,\mathrm{sen}(\omega a) - \cos(\omega a) + i\,\mathrm{sen}(\omega a)\big) \\
&= \frac{2}{\omega}\,\mathrm{sen}(a\omega)\,.
\end{aligned}$$

Encontramos assim a transformada de Fourier de $f(t)$ que é dada por

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 2a\,, & \omega = 0\,, \\ \dfrac{2\,\mathrm{sen}(a\omega)}{\omega}\,, & \omega \neq 0\,. \end{cases}$$

Os gráficos a seguir mostram a função $f(x)$ e sua transformada $\hat{f}(\omega)$.



Usando a função função seno cardinal (A.4)

$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x} & x \neq 0\,, \\ 1 & x = 0\,. \end{cases}$$

podemos escrever que a Transformada de Fourier da função f do último exemplo como

$$\hat{f}(\omega) = 2a\,\mathrm{sinc}(a\omega)\,.$$

Na próxima seção apresentamos como essa definição surge ao resolvermos o problema de dissipação do calor em uma barra infinita. Nas seções seguintes exploramos as propriedades da convergência dessa transformada e a Seção 7.8 traz outros exemplos do cálculo da Transformadas de Fourier.

Uma característica fundamental da Transformada de Fourier é que podemos desfazê-la retornando a função original. A definição a seguir apresenta Transformada Inversa de Fourier.

Definição 7.3: Transformada Inversa de Fourier

Se f é seccionalmente contínua e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty\,,$$

então $\hat{f}$ tem Transformada Inversa de Fourier e

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(\omega)\big](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega\,.$$

No próximo exemplo calculamos a transformada inversa de uma função dada no domínio da frequência.

Exemplo 7.3.2:
Calcular da transformada inversa de $2\,\mathrm{sinc}(\omega)$.

Nesse caso temos a função no espaço transformado $\hat{f}(\omega) = 2\,\mathrm{sinc}(\omega)$ e queremos encontrar a função no tempo $f(t)$. Para isso podemos utilizar a definição da transformada inversa e calcular a integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\,\mathrm{sinc}(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega\,.$$

Porém, essa não é a melhor abordagem. Neste caso vale a pena observar que o último exemplo nos diz que $\hat{h}_a(\omega) = 2a\,\mathrm{sinc}(a\omega)$ é a transformada da função

$$h_a(t) = \begin{cases} 1, & -a \le t \le a\,, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $\hat{f}(\omega) = \hat{h}_1(\omega)$, podemos afirmar diretamente que

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq 1\,, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O fato de podemos transformar uma função definida no tempo para uma equivalente definida na frequência e invertermos a transformação, nos permite dizer que as duas funções representam a mesma informação ou o mesmo sinal. Podemos pensar que f e sua transformada $\hat{f}$ são a mesma "função" representada em domínios diferentes.

Formas Alternativas da Transformada de Fourier

Nesse texto definimos a transformada de Fourier e sua inversa como

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad \text{e} \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega\,.$$

Porém, dependendo da área de conhecimento e do material utilizado a transformada pode ser definida de formas equivalentes mas distintas. Em geral são usados casos particulares da fórmula

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ib\omega t}\, dt\,.$$

Aqui optamos por utilizar $a = 1$ e $b = -1$. Seguem alguns exemplos de outras opções comumente utilizadas e as respectivas fórmulas para a transformada e sua inversa.

Forma normal ou unitária onde $a = 0$ e $b = -1$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad \text{e} \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega\,.$$

Invertendo o sinal na exponencial onde $a = 0$ e $b = 1$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt \qquad \text{e} \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega\,.$$

Mudando de frequência angular para frequência onde $a = 1$ e $b = -2\pi$

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i\nu t}\, dt \qquad \text{e} \qquad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i\nu t}\, d\nu\,.$$

onde $\nu = \dfrac{1}{\text{período}} = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

Todas essas formas são equivalentes, porém, é necessário estar atendo a qual forma está sendo utilizada em cada contexto e fixar-se a ela.

Exercícios Seção 7.3

1) Determine a transformada de Fourier das funções

a) $f(t) = 1$

2) Determine a transformada inversa de Fourier das funções

a) $\hat{f}(\omega) = 1$

7.4 Equação do Calor em uma Barra Infinita

Queremos, nessa seção, justificar a definição da Transformada de Fourier dada na seção anterior. Para isso vamos apresentar um método para resolver o problema de dissipação do calor em uma barra infinita

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \qquad t > 0\,, \tag{7.9}$$

com a condição inicial

$$u(x,0) = f(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \tag{7.10}$$

Vamos proceder formalmente, isso é, sem muito rigor, tentando fazer com que a transformada de Fourier apareça de modo relativamente natural como solução para o problema.

O método utilizado para encontrar a solução de uma equação diferencial parcial pela Transformada de Fourier é muito semelhante à utilização da Transformada de Laplace para a solução de equações diferenciais ordinárias. Em ambos os casos, aplicamos a transformada para modificar o problema em outro mais simples, encontramos a solução do problema mais simples e calculamos a transformada inversa para encontrar a solução do problema original. Muitos passos que realizaremos parecem artificiais e estranhos a primeira vista. Eles só vão realmente fazer sentido quando concluirmos todo o processo.

Iniciamos multiplicamos a equação (7.9) por uma função arbitrária $\phi = \phi(x, \omega)$ que depende de x e de uma nova variável que queremos introduzir

$$u_t(x,t)\,\phi(x,\omega) = \alpha^2 u_{xx}(x,t)\,\phi(x,\omega)\,.$$

Agora integramos o resultado em todos os valores reais da variável x

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\,\phi(x,\omega)\,dx = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)\,\phi(x,\omega)\,dx\,.$$

Note que essa operação tem uma certa imprecisão, uma vez que, dependendo da função ϕ escolhida, as integrais acima podem não existir, mas estamos fazendo apenas contas formais com o objetivo de induzir uma boa candidata para a função ϕ.

Observe que, como ϕ não depende de t podemos passar a derivação em t para fora da integral do lado esquerdo da equação

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,\phi(x,\omega)\,dx = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)\,\phi(x,\omega)\,dx\,. \tag{7.11}$$

Aplicando o Teorema de Integração por Partes A.27

$$\int_{-\infty}^{\infty} p\,dq = pq\,\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} q\,dp$$

com $p = \phi(x,\omega)$ e $dq = u_{xx}(x,t)\,dx$, na integral do lado direito da equação (7.11) temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}\,\phi\,dx = u_x\,\phi\,\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u_x\,\phi_x\,dx\,.$$

Repetindo o processo com $p = \phi_x(x,\omega)$ e $dq = u_x(x,t)\,dx$ temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}\,\phi\,dx = u_x\,\phi\,\Big|_{-\infty}^{\infty} - u\,\phi_x\,\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} u\,\phi_{xx}\,dx\,.$$

Dessa forma a equação (7.11) se torna

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u\,\phi\,dx = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} u\,\phi_{xx}\,dx + \alpha^2 u_x\,\phi\,\Big|_{-\infty}^{\infty} - \alpha^2 u\,\phi_x\,\Big|_{-\infty}^{\infty}\,. \tag{7.12}$$

Aparentemente estamos complicando o problema, porém, não estamos interessados em todas as funções u e ϕ existentes. Estamos interessados em resolver a equação do calor, ou seja, devemos impor restrições compatíveis com o problema. Primeiro vamos impor que ϕ seja uma função limitada com relação a variável x, isso é, que ϕ não vai para o infinito quando variamos x. Vamos também impor que a função u, e sua derivada com relação a x, sejam zero no infinito,

$$\lim_{x\to\pm\infty} |u| = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| = 0\,.$$

Fisicamente, isso equivale a dizer que u possui energia finita, o que é uma hipótese bastante razoável.

Essas restrições implicam que os dois últimos termos da equação (7.12) sejam nulos, ou seja

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u\,\phi\,dx = \alpha^2\int_{-\infty}^{\infty} u\,\phi_{xx}\,dx\,. \tag{7.13}$$

Para podermos continuar manipulando a equação (7.13) precisamos que as integrais em ambos os lados da equação sejam iguais, isso é, queremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\,\phi\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} u\,\phi_{xx}\,dx\,.$$

Para isso vamos impor que ϕ satisfaça a equação

$$\phi_{xx} = -\omega^2\phi(x,\omega)\,,$$

essa equação pode ser facilmente resolvida, obtendo

$$\phi(x,\omega) = e^{-i\omega x}\,.$$

Calculando a derivada segunda dessa solução e substituindo em (7.13) temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u\,e^{-i\omega x}\,dx = \alpha^2\int_{-\infty}^{\infty} u\,(-\omega^2)e^{-i\omega x}\,dx\,,$$

que podemos simplificar para

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u\,e^{-i\omega x}\,dx = -\alpha^2\omega^2\int_{-\infty}^{\infty} u\,e^{-i\omega x}\,dx\,. \tag{7.14}$$

Note que, como temos a mesma integral dos dois lados, podemos escreve-la como

$$\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, e^{-i\omega x}\, dx \tag{7.15}$$

e a equação (7.14) torna-se

$$\frac{d}{dt}\, \hat{u}(\omega, t) = -\alpha^2 \omega^2\, \hat{u}(\omega, t)\,.$$

que é a Equação do Calor no Domínio da Frequência. Nesse momento transformamos a equação diferencial parcial (7.9) com derivadas em x e t em uma equação diferencial ordinária com derivada em t para cada valor de ω.

Compare a equação (7.15) com a Definição 7.2, observe que temos exatamente a mesma transformação escrita com variáveis diferentes. Essa diferença ocorre porque nesta seção escrevemos a Transformada de Fourier para a função u que é candidata a solução da equação (7.9), entretanto, a variável t não tem papel algum na transformação.

Voltando para o problema da condução do calor, precisamos agora aplicar a Transformada de Fourier na condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, obtendo assim o seguinte problema de valor inicial, para cada valor de ω,

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(\omega, t) &= -\alpha^2 \omega^2\, \hat{u}(\omega, t)\,, \\ \hat{u}(\omega, 0) &= \hat{f}(\omega)\,. \end{aligned}$$

Para resolver esse problema, buscamos uma solução da forma

$$\hat{u}(\omega, t) = C(\omega) e^{-\alpha^2 \omega^2 t}\,.$$

Como $C(\omega)$ é uma constante na variável t, temos que

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(\omega, t) &= \frac{d}{dt} C(\omega) e^{-\alpha^2 \omega^2 t} \\ &= C(\omega) \frac{d}{dt} e^{-\alpha^2 \omega^2 t} \\ &= C(\omega) e^{-\alpha^2 \omega^2 t} \frac{d}{dt} \left(-\alpha^2 \omega^2 t\right) \\ &= C(\omega) e^{-\alpha^2 \omega^2 t} \left(-\alpha^2 \omega^2\right) \\ &= \hat{u}_t(\omega, t) \left(-\alpha^2 \omega^2\right) \\ &= -\alpha^2 \omega^2\, \hat{u}_t(\omega, t)\,. \end{aligned}$$

Avaliando $\hat{u}$ para $t = 0$ temos

$$\hat{u}(\omega, 0) = C(\omega)e^{-\alpha^2\omega^2\times 0} = C(\omega)$$

portanto, a condição inicial se torna

$$C(\omega) = \hat{f}(\omega)\,.$$

Isso determina a solução do problema transformado

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega)\, e^{-\alpha^2\omega^2 t}\,. \tag{7.16}$$

O último passo é retornar ao domínio original desfazendo a Transformada de Fourier, isso é, usando a Transformada Inversa de Fourier para calcular a solução $u(x, t)$ a parir de $\hat{u}(\omega, t)$

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\big[\hat{u}\big](x, t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\omega)\, e^{-\alpha^2\omega^2 t}\right] \tag{7.17}$$

Desse modo, se soubermos calcular a transformada inversa que aparece na equação (7.17), temos o resultado desejado, ou seja, a solução da equação do calor em uma barra infinita. Sabemos que a transformada inversa de $\hat{f}$ é f e como o termo $e^{-\alpha^2\omega^2 t}$ é sempre o mesmo podemos calcular sua inversa de registrá-la em uma tabela (veja a Seção 7.8). Porém, a transformada inversa do produto não é o produto das funções. Nesse caso, vamos utilizar um resultado muito útil, o Teorema da Convolução, que estabelece o resultado da transformada inversa do produto de duas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)\right](x) = \big(f * g\big)(x) \tag{7.18}$$

onde $f * g$ é a convolução entre as funções que é definida como

$$\big(f * g\big)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)\, dy \tag{7.19}$$

Agora podemos voltar na equação (7.17) e aplicar esse resultado.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega)\right] \\ &= \big(f * g\big)(x) \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy$$

onde escrevemos $\hat{g}(\omega, t) = e^{-\alpha^2\omega^2 t}$. Note que $\hat{g}$ é uma gaussiana na variável ω, como veremos na Seção 7.8 sua transformada inversa g também será uma gaussiana em x.

Essa seção mostrou a aplicação da transformada de Fourier como ferramenta para a solução de equações diferenciais parciais. Esse exemplo foi utilizado para justificar a definição da transformada e ilustrar seu uso. Nas próximas seções serão trabalhados cuidadosamente os resultados utilizados aqui.

7.5 Convergência da Transformada de Fourier

Uma discussão completa sobre a convergência da transformada de Fourier demanda recursos matemáticos mais avançados do que o disponível para um curso de Cálculo. Apresentamos a seguir um teorema que nos dá uma condição na qual podemos garantir a convergência, porém como veremos, ele não abrange todos os casos necessários para o nosso estudo.

Teorema 7.4: Convergência da Transformada de Fourier

Se $f(t)$ é seccionalmente contínua em todo intervalo finito $[-a, a]$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty\,.$$

Então as integrais impróprias convergem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(\omega t)\,dt\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\,dt$$

e portanto a Transformada de Fourier converge.

Note que a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$$

implica que

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0\,,$$

isso é, a função $f(t)$ precisa tender a zero no infinito para que sua transformada seja convergente. Porém, muitas funções importantes como o seno e o cosseno não convergem para zero no infinito. Para calcularmos a transformada de Fourier dessas funções precisamos redefinir o conceito de função e trabalhar com Funções Generalizadas. Um exemplo, muito utilizado, é a Delta de Dirac, $\delta(t-a)$, que representa um Impulso Unitário Instantâneo em $t = a$ definida a seguir.

Definição 7.5: Delta de Dirac

A função generalizada Delta de Dirac centrada em $t = a$ é definida pela propriedade de que para qualquer $f(x)$ adequada vale a propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, f(t)\, dt \;=\; f(a)\,.$$

Cuidado com a delta pois ela não é uma função, isso é, ela não atende a definição utilizada no Cálculo A.14. Como as ferramentas de que dispomos aqui, seu significado fora da integral é impreciso. Mesmo assim, podemos obter uma interpretação para ela usando as funções

$$d_h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h} & -h \le t \le h\,, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

para um número real positivo h.

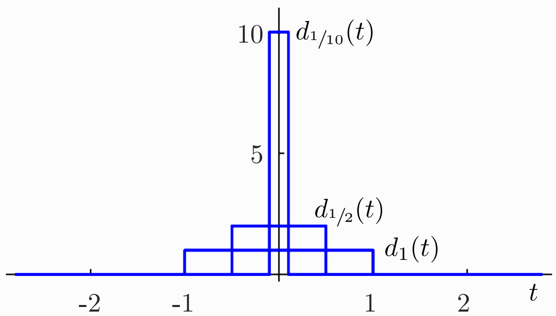


Figura 7.2: Gráficos de três funções d_h indicando o limite $h \to 0^+$

A Figura 7.2 mostra três dessas funções. Note que, por construção, para qualquer h a integral de d_h ao longo da reta real é sempre um. Vamos agora calcular a integral do produto de d_h com uma função f

$$I_h = \int_{-\infty}^{\infty} d_h(t) f(t)\, dt = \int_{-h}^{h} \frac{f(t)}{2h}\, dt = \frac{F(h) - F(-h)}{2h}\,,$$

onde F é a primitiva de f. Calculamos agora o limite de I_h quando $h \to 0$ por valores positivos

$$I = \lim_{h \to 0^+} I_h = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(h) - F(-h)}{2h}\,.$$

Note que essa expressão é uma variação da definição da derivada de F em zero, portanto

$$I = \left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=0} = f(0)\,.$$

Porém, o limite de d_h quando h tende a zero não existe no conjunto das funções reais, como definidas no Cálculo, pois

$$\lim_{h \to 0^+} d_h(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h} = \infty \quad \notin \mathbb{R}\,.$$

Mesmo assim, baseados em uma teoria mais elaborada, escrevemos informalmente

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0^+} d_h(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0\,, \\ \infty & t = 0\,. \end{cases}$$

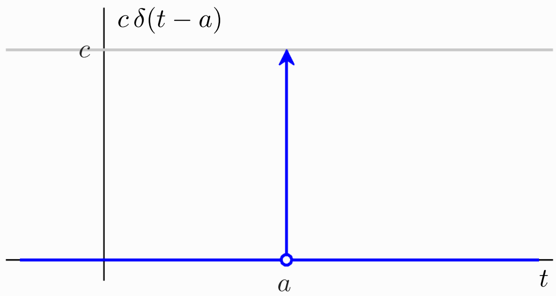


Figura 7.3: Representação da Delta de Dirac centrada em a e multiplicada por c

A Figura 7.3 é a representação gráfica da Delta de Dirac, note que não podemos dizer que esse seja o gráfico dela. A seta indica que o valor da delta, no ponto onde ela está centrada, não é um número real e a altura da seta indica o valor que a multiplica, nesse caso c.

Uma propriedade interessante da Delta de Dirac é que ela nos permite derivar funções com descontinuidades do tipo salto. Como a demonstração dessa propriedade pedente de resultados mais avançados, vamos apresentar apenas uma justificativa baseada no Teorema Fundamental do Cálculo A.28. Segundo esse teorema, para uma função f com condições adequadas e sua derivada f', podemos escrever

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f'(t)\, dt\,.$$

Ignorando as sutilezas matemáticas, aplicamos esse teorema na Delta de Dirac

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(t)\, dt\,.$$

Note que, para todo $x < 0$ a integral vale zero, pois $\delta(t)$ é sempre zero para todo $t < 0$. Porém, para $x > 0$ o intervalo de integração passa pelo centro da Delta de Dirac $t = 0$, nesse caso aplicamos a Definição 7.5, considerando que a delta está sendo multiplicada pela função contante igual a um. Portanto, para todo $x > 0$ a integral vale um.

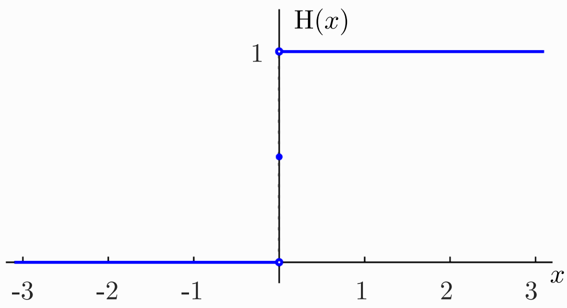


Figura 7.4: Gráfico da função de Heaviside

A função que vale zero para x negativo e um para x positivo é chamada de Função de Heaviside ou Degrau Unitário, $\mathrm{H}(x)$. Neste contexto o valor da função em $x = 0$ não é importante, mas uma escolha comum é defini-lo como $1/2$. O gráfico dessa função está na Figura 7.4 e ela pode ser escrita como

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0\,, \\ 1/2 & x = 0\,, \\ 1 & x > 0\,. \end{cases} \tag{7.20}$$

Podemos agora escrever que

$$H'(x) = \delta(x)\,. \tag{7.21}$$

7.6 Teorema da Convolução

Assim como na derivação e na integração, a transformada do produto de funções não é o produto das transformadas. No caso da Transformada Inversa de Fourier o produto de duas funções no domínio da frequência é levado na convolução das funções no domínio do tempo. Esse é o resultado que vamos apresentar nessa seção, começamos definindo a operação de convolução entre duas funções.

Definição 7.6: Convolução de Duas Funções

A Convolução de duas funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, seccionalmente contínuas, limitadas e tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt < \infty$$

é definida por

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$$

A proposição a seguir apresenta algumas propriedades da convolução.

Proposição 7.7: Propriedades da Convolução

Se a convolução entre as funções f e g existem, então

1. $f * g = g * f$ a convolução é comutativa
2. $f(t) * \delta(t-a) = f(t-a)$ propriedade de deslocamento
3. $f(t) * \delta(t) = f(t)$ δ é a identidade

A seguir apresentamos o Teorema da Convolução.

Teorema 7.8: Teorema da Convolução – Transformada Inversa do Produto

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ seccionalmente contínuas, limitadas e tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt < \infty$$

Então, $\quad \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega)\right](t) = \big(f * g\big)(t)$

onde $\quad \big(f * g\big)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$

Demonstração

Veja que o resultado fica demonstrado se provarmos que

$$\mathcal{F}\left[\big(f * g\big)(t)\right](\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

Isso de fato ocorre, pois

$$\mathcal{F}\left[\big(f * g\big)(t)\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Aqui, apesar de precisar de alguns argumentos mais técnicos que passam pelo teorema de Fubini, podemos trocar a ordem de integração e então fazer a mudança de variável $t - \tau = z$, de modo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\big(f * g\big)(t)\right](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) e^{-i\omega t}\, dt\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-i\omega(\tau+z)}\, dz\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-i\omega z}\, dz \\
&= \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)
\end{aligned}$$

7.7 Propriedades da Transformada de Fourier

Supondo que as condições adequadas sejam atendidas, podemos listar várias propriedades da Transformada de Fourier.

Proposição 7.9: A Transformada de Fourier é Linear

$$\mathcal{F}\big[\,\alpha\, f(t) + \beta\, g(t)\,\big] \;=\; \alpha\, \hat{f}(\omega) + \beta\, \hat{g}(\omega)$$

Demonstração

A linearidade da transformada de Fourier segue direto da definição e da linearidade da integração.

Normalmente, a transformada de Fourier assumirá valores complexos, mesmo para funções reais, temos então que $\operatorname{Re}\big(\hat{f}(\omega)\big)$ é a parte real da transformada e $\operatorname{Im}\big(\hat{f}(\omega)\big)$ é a parte imaginária. Podemos então escrever

$$\hat{f}(\omega) = \operatorname{Re}\big(\hat{f}(\omega)\big) + \operatorname{Im}\big(\hat{f}(\omega)\big)i$$

Proposição 7.10: Partes real e imaginária da Transformada de Fourier

$$\operatorname{Re}\big(\hat{f}(\omega)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt$$

$$\operatorname{Im}\big(\hat{f}(\omega)\big) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(\omega t)\,dt$$

Demonstração

Essas fórmulas seguem da definição da exponencial complexa

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(\cos(\omega t) - i\operatorname{sen}(\omega t)\big)\,dt\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(\omega t)\, dt$$

PROPOSIÇÃO 7.11: PROPRIEDADES DAS PARTES REAL E IMAGINÁRIA

Aproveitando a paridade das funções seno e cosseno

$$\begin{aligned} \hat{f}(-\omega) &= \mathrm{Re}\left(\hat{f}(-\omega)\right) + \mathrm{Im}\left(\hat{f}(-\omega)\right) i \\ &= \mathrm{Re}\left(\hat{f}(\ \ \omega)\right) - \mathrm{Im}\left(\hat{f}(\ \ \omega)\right) i \end{aligned}$$

Consequências da paridade da função $f(t)$

- Se $f(t)$ é par $\quad \hat{f}(\omega)$ é real, $\quad$ isso é, $\mathrm{Im}\left(\hat{f}(\omega)\right) = 0$
- Se $f(t)$ é impar $\quad \hat{f}(\omega)$ é imaginário, $\quad$ isso é, $\mathrm{Re}\left(\hat{f}(\omega)\right) = 0$

Quando fazemos algumas manipulações especificas com as variáveis a transformada é alterada de formas previsíveis.

PROPOSIÇÃO 7.12: TRANSFORMAÇÕES NAS VARIÁVEIS

Mudando a escala no tempo

$$\mathcal{F}\big[f(at)\big](\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{7.22}$$

Mudando o sinal do tempo

$$\mathcal{F}\big[f(-t)\big](\omega) = \hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)} \tag{7.23}$$

Aplicando uma translação no tempo

$$\mathcal{F}\big[f(t-a)\big](\omega) = \hat{f}(\omega)\, e^{-ia\omega} \tag{7.24}$$

Aplicando uma translação na frequência

$$\hat{f}(\omega - a) = \mathcal{F}\big[\, f(t)\, e^{iat}\,\big](\omega) \tag{7.25}$$

Demonstração

Translação no tempo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\big[f(t-a)\big](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u+a)}\,du \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du\right) e^{-i\omega a} \\
&= \hat{f}(\omega)\,e^{-ia\omega}
\end{aligned}
$$

Translação na frequência

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\big[\,f(t)\,e^{iat}\,\big](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{iat}\,e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i(\omega-a)t}\,dt \\
&= \hat{f}(\omega-a)
\end{aligned}
$$

Existe uma simetria entre a transformada de Fourier e sua inversa, quando aplicamos a transformada duas vezes voltamos para uma função similar a função original.

Proposição 7.13: Simetria da Transformada de Fourier

Ao calcularmos a transformada da transformada retornamos para uma função equivalente a função original

$$\mathcal{F}\big[\mathcal{F}[\,f(t)\,]\big](\omega) = 2\pi f(-\omega)$$

Demonstração

Sabemos que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega$$

substituindo t por $-\omega$ temos

$$2\pi f(-\omega) = 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{i(-\omega)t}\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left[\, f(t) \,\right] e^{-i\omega t}\, dt$$
$$= \mathcal{F}\Big[\mathcal{F}\left[\, f(t) \,\right]\Big](\omega)$$

As operações de derivação e integração no tempo correspondem a produtos e divisões na frequência.

Proposição 7.14: Derivação e Integração

Transformada da derivada de $f(t)$

$$\mathcal{F}\left[\, f'(t) \,\right](\omega) = i\omega\, \hat{f}(\omega)$$

Transformada da primitiva de $f(t)$

$$\mathcal{F}\left[\int f(t)dt\right](\omega) = \frac{1}{i\omega}\, \hat{f}(\omega)$$

Podemos repetir essas operações para encontrar relações para as derivadas e integrais de maior ordem, por exemplo

$$\mathcal{F}\left[\, f''(t) \,\right](\omega) = (i\omega)^2\, \hat{f}(\omega) = -\omega^2\, \hat{f}(\omega)$$

Além disso, usando a linearidade das operações podemos transformar expressões inteiras

$$\mathcal{F}\left[\, af''(t) + bf'(t) + cf(t) \,\right](\omega) = \big(-a\omega^2 + b\omega i + c\big)\, \hat{f}(\omega)$$

Em muitos casos desejamos modelar os efeitos após uma causa inicial, por exemplo, o comportamento de um circuito após ele ser ligado. A seguinte propriedade da transformada de Fourier pode ser empregada nesse contexto.

Proposição 7.15: Causalidade

Se $f(t) = 0$ para todo $t < 0$ então temos que

$$\mathcal{F}\left[\, f'(t) \,\right](\omega) = i\omega\, \hat{f}(\omega) - f(0^+)$$
$$\mathcal{F}\left[\, f''(t) \,\right](\omega) = -\omega^2\, \hat{f}(\omega) - i\omega f(0^+) - f'(0^+)$$

onde

$$g(0^+) = \lim_{t \to 0^+} g(t)$$

7.8 Calculando a Transformada de Fourier

Nessa seção apresentamos os cálculos para a obtenção das transformadas de Fourier de algumas funções.

Vamos começar pela função característica (A.5) em um intervalo entre zero e $a > 0$.

Exemplo 7.8.1:
Calcular a transformada de Fourier da função característica $\chi_{[0,a]}(t)$ com $a > 0$

A função característica de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é definida pela expressão (A.5), para o caso $A = [0, a]$ ela assume a forma

$$\chi_{[0,a]}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le a \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Começamos aplicando a definição da transformada de Fourier

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_{[0,a]}(\omega) &= \mathcal{F}\left[\chi_{[0,a]}(t)\right](\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,a]}(t)\, \exp(-i\omega t)\, dt \\ &= \int_{0}^{a} \exp(-i\omega t)\, dt\end{aligned}$$

Se $\omega = 0$ temos que

$$\hat{\chi}_{[0,a]}(0) = \int_0^a \exp(-i\omega t)\, dt = \int_0^a dt = a$$

Para $\omega \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_{[0,a]}(\omega) &= \int_0^a \exp(-i\omega t)\, dt \\ &= \left.\frac{\exp(-i\omega t)}{-i\omega}\right|_0^a \\ &= \frac{1 - \exp(-ia\omega)}{i\omega}\end{aligned}$$

Concluímos então que

$$\hat{\chi}_{[0,a]}(\omega) = \begin{cases} a & \omega = 0 \\ \dfrac{1 - \exp(-ia\omega)}{i\omega} & \omega \neq 0 \end{cases}$$

Uma função particularmente importante é a Delta de Dirac.

Exemplo 7.8.2:
Calcular a transformada de Fourier da Delta de Dirac.

Substituindo a delta na definição da transformada de Fourier temos

$$\mathcal{F}\big[\, \delta(t-a) \,\big] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, \exp(-i\omega t)\, dt$$

agora calculamos a integral usando a definição da delta obtendo

$$\mathcal{F}\big[\, \delta(t-a) \,\big] = \exp(-ia\omega)$$

Um caso particular relevante é a delta centrada na origem, isso é, $a = 0$, nesse caso sua transformada é a função constante igual a 1

$$\hat{\delta}(\omega) = \mathcal{F}\big[\, \delta(t) \,\big] = 1$$

Isso significa que a delta composta pela soma de todas as frequências.

Exemplo 7.8.3:
Calcular a transformada inversa da função $\hat{f}(\omega) = 1$

Substituindo da fórmula para a transformada inversa temos

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\,1\,] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t)\, d\omega$$

Observando que $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ podemos escrever uma fórmula alternativa para a Delta de Dirac

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t)\, d\omega$$

Exemplo 7.8.4:
Calcular a transformada da função $f(t) = 1$

Substituindo na definição temos

$$\mathcal{F}[1](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t)\, dt$$

No exemplo anterior verificamos que

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t)\, d\omega$$

Isolando a integral e trocando as variáveis t por ω temos

$$2\pi\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t)\, dt$$

Comparando essa expressão com $\mathcal{F}[1](\omega)$ verificamos que

$$\mathcal{F}[1](\omega) = 2\pi\delta(-\omega)$$

Como o sinal de ω não interfere na delta podemos escrever

$$\mathcal{F}[1](\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

Exemplo 7.8.5:
Calcular a transformada da função gaussiana $f(t) = e^{-at^2}$

Substituindo na definição temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-at^2)\exp(-i\omega t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(-(at^2+i\omega t)\big)\,dt \qquad (7.26)\end{aligned}$$

A função dentro da integral também é uma gaussiana para verificarmos esse fato primeiro vamos reescrever a expressão $at^2+i\omega t$ em uma forma mais conveniente. Começamos completando o quadrado

$$\begin{aligned}at^2+i\omega t &= \left(at^2+i\omega t+B^2\right)-B^2 \\ &= (A^2+2AB+B^2)-B^2 \\ &= (A+B)^2-B^2\end{aligned}$$

onde

$$A^2 = at^2 \qquad \text{e} \qquad 2AB = i\omega t$$

portanto

$$A = \sqrt{a}|t| \qquad \text{e} \qquad B = \frac{i\omega t}{2\sqrt{a}|t|}$$

Podemos agora escrever

$$\begin{aligned}at^2+i\omega t &= (A+B)^2-B^2 \\ &= \left(\sqrt{a}|t|+\frac{i\omega t}{2\sqrt{a}|t|}\right)^2-\left(\frac{i\omega t}{2\sqrt{a}|t|}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{a}\,t+\frac{i\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2+\frac{\omega^2}{4a}\end{aligned}$$

Voltando para o cálculo da transformada (7.26) temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(-(at^2+i\omega t)\big)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\sqrt{a}|t|+\frac{i\omega t}{2\sqrt{a}|t|}\right)^2-\frac{\omega^2}{4a}\right)dt\end{aligned}$$

$$= \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\left(\sqrt{a}\,t+\frac{i\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2\right)dt \tag{7.27}$$

Precisamos agora que calcular a integral, para isso utilizamos a mudança de variáveis

$$x = \sqrt{a}\,t + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}} \qquad\qquad dt = \frac{dx}{\sqrt{a}}$$

temos então

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\left(\sqrt{a}\,t+\frac{i\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2\right)dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx \tag{7.28}$$

Para obtermos o valor dessa integral dependemos de manipulação cuidadosamente escolhidas. Primeiro vamos indicar o valor da integral por I

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx$$

Agora buscaremos o valor do quadrado de i, pois isso nos permitirá realizar as manipulações necessárias

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \end{aligned}$$

mudando para coordenadas polares temos

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-r^2}\,rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}e^{-r^2}\,rdr \\ &= 2\pi\int_0^{\infty}e^{-r^2}\,rdr \end{aligned}$$

Para calcular essa última integral usamos a mudança de variáveis

$$v = r^2 \qquad\qquad dv = 2rdr$$

que nos leva a

$$I^2 = 2\pi \int_0^\infty e^{-v}\,\frac{dv}{2} = \pi\left(-e^{-v}\right)\Big|_0^\infty = \pi$$

Obtemos então que $I = \sqrt{\pi}$ e portando a integral (7.28) é

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\sqrt{a}\,t + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2\right)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Retornando ao cálculo da transformada (7.27) temos

$$\mathcal{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)$$

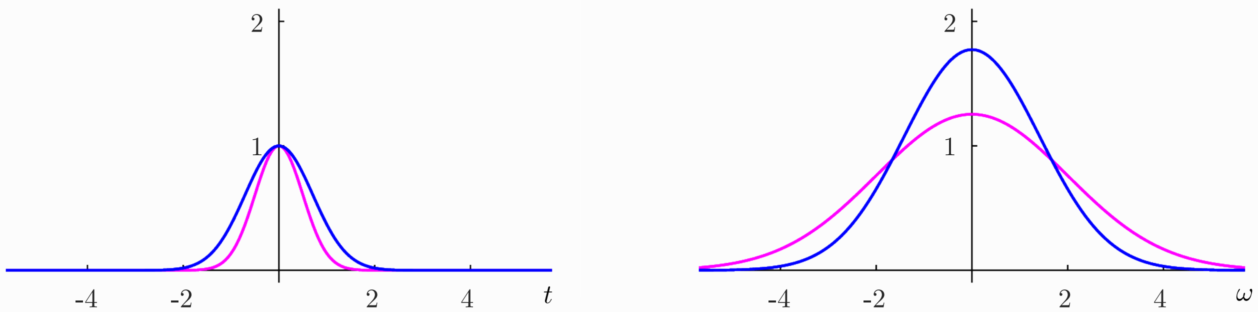
Nesse exemplo, verificamos que a transformada de uma gaussiana é outra gaussiana. Para visualizarmos melhor o resultado do último exemplo podemos fixar valores para a e construir as gaussianas para esses casos. Começando com $a = 1$ temos que

$$f(x) = e^{-t^2} \qquad \text{e} \qquad \hat{f}(\omega) = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right)$$

para $a = 2$ temos

$$f(x) = e^{-2t^2} \qquad \text{e} \qquad \hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left(-\frac{\omega^2}{8}\right)$$

A Figura 7.5 apresenta os gráficos dessas funções gaussianas e suas transformadas de Fourier.



(a) Funções gaussianas com $a = 1$, azul, e $a = 2$, magenta

(b) Transformadas das funções gaussianas com $a = 1$, azul, e $a = 2$, magenta

Figura 7.5: Gráficos da gaussiana e sua transformada

Queremos agora calcular a transformada das funções senoidais, vamos começar pela exponencial complexa e depois calculamos a transformada da função seno.

Exemplo 7.8.6:
Calcular a transformada de Fourier da senoide complexa e^{iat}

Queremos calcular a transformada de $f(t) = e^{iat}$ isso é

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\big[\, \exp(iat) \,\big](\omega)$$

Ao invés de aplicarmos a definição diretamente, usaremos o fato que

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t)\, d\omega$$

permutando ω e t temos

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t)\, dt$$

Agora fazendo a mudança de variáveis de t para $-t$ na integral, obtemos

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\big[1\big](\omega)$$

Isolando $\mathcal{F}[1]$ temos

$$\mathcal{F}\big[1\big](\omega) = 2\pi\, \delta(\omega)$$

Usando a propriedade de translação na frequência (7.25) essa expressão se torna

$$\mathcal{F}\big[1\big](\omega - a) \;=\; \mathcal{F}\big[\,1\, \exp(iat)\,\big](\omega) \;=\; \mathcal{F}\big[\, \exp(iat)\,\big](\omega)$$

O que nos dá a transformada de Fourier da função e^{iat}

$$\mathcal{F}\big[\, e^{iat} \,\big](\omega) = 2\pi\, \delta(\omega - a)$$

Vemos então que a transformada de Fourier da senoide complexa contem uma única frequência descrita pelo impulso δ em $\omega = a$.

Usamos a transformada da exponencial complexa para calcular a transformada do seno como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 7.8.7:
Calcular a transformada da função seno $\operatorname{sen}(at)$

Usamos aqui a identidade que relaciona a função seno com a exponencial (7.5)

$$\operatorname{sen}(at) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$$

e escrevemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big[\operatorname{sen}(at)\big] &= \mathcal{F}\left[\frac{\exp(iat) - \exp(-iat)}{2i}\right] \\ &= \frac{1}{2i}\Big(\mathcal{F}\big[\exp(iat)\big] - \mathcal{F}\big[\exp(-iat)\big]\Big)\end{aligned}$$

onde usamos a linearidade da transformada. O próximo passo é usar a transformada da função exponencial.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big[\operatorname{sen}(at)\big] &= \frac{1}{2i}\left[2\pi\,\delta(\omega - a) - 2\pi\,\delta(\omega + a)\right] \\ &= \frac{\pi}{i}\big[\,\delta(\omega - a) - \delta(\omega + a)\,\big] \\ &= i\pi\big[\,\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)\,\big]\end{aligned}$$

Assim como a transformada da senoide complexa a transformada do seno é composta por impulsos associados a frequência $\omega = a$, porém, o seno contém dois impulsos com sinais trocados nas frequências a e $-a$.

Exercícios Seção 7.8

1) Determine a transformada de Fourier das funções

a) $f(t) = \left(1 - \dfrac{|t|}{a}\right)\chi_{[-a,a]}(t)$

b) $f(t) = \operatorname{sen}(at)\,\chi_{[-b,b]}(t)$

c) $f(t) = te^{-t^2}$

d) $f(t) = t^2e^{-t^2}$

e) $f(t) = e^{-(a+ib)t}\ \mathrm{H}(t)$

f) $f(t) = e^{(a+ib)t}\ \mathrm{H}(-t)$

7.9 Tabelas de Transformadas de Fourier

A Tabela 7.1 apresenta a transformada de Fourier de algumas funções, nessa tabela $a > 0$ em todas as fórmulas. A Tabela 7.2 resume as principais propriedades da transformada.

Tabela 7.1: Transformadas de Fourier

$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(\omega)\big](t)$	$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\big[f(t)\big](\omega)$
$f(t) = \begin{cases} 1, & -a \leq t \leq a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\hat{f}(\omega) = 2a\,\text{sinc}(a\omega)$
$f(t) = \delta(t)$	$\hat{f}(\omega) = 1$
$f(t) = \delta(t-a)$	$\hat{f}(\omega) = e^{-ia\omega}$
$f(t) = 1$	$\hat{f}(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$
$f(t) = e^{iat}$	$\hat{f}(\omega) = 2\pi\delta(\omega - a)$
$f(t) = \text{sen}(at)$	$\hat{f}(\omega) = i\pi[\delta(\omega+a) - \delta(\omega-a)]$
$f(t) = \cos(at)$	$\hat{f}(\omega) = \pi[\delta(\omega-a) + \delta(\omega+a)]$
$\chi_{[0,a]}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < a \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\dfrac{1 - e^{-ia\omega}}{i\omega}$
$e^{-at}\,\text{H}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-at} & t \geq 0 \end{cases}$	$\dfrac{1}{a + i\omega}$
$\dfrac{1}{t^2 + a^2}$	$\dfrac{\pi}{a} e^{-a\lvert\omega\rvert}$
e^{-at^2}	$e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$

Tabela 7.2: Propriedades da Transformadas de Fourier

$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)](t)$	$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)$
$f(at) \qquad a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$t f(t)$	$i\,\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega)$
$f'(t)$	$i\omega\hat{f}(\omega)$
$f''(t)$	$-\omega^2\hat{f}(\omega)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{i\omega}\hat{f}(\omega)$
$f(t-a)$	$e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$
$e^{iat}f(t)$	$\hat{f}(\omega - a)$
$\hat{f}(t)$	$f(-\omega)$
$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$	$2\pi\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$

7.10 Revisão

1) [resp] (Transformada de Fourier) Usando a definição da transformada de Fourier, verifique as igualdades abaixo.

a) Se

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & x \leq 0,\ x \geq 2 \end{cases}$$

verifique que

$$\mathcal{F}\big[g(x)\big] = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i2\omega} - 1}{\omega}$$

b) Verifique que, se $a \in \mathbb{R}$ e

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\big[f(x)\big]$$

então

$$\mathcal{F}\big[e^{iax} f(x)\big] = \widehat{f}(\omega - a)$$

2) [resp] (Equação de corda infinita em repouso) Seja $u = u(x,t)$ função definida em $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Considere então a equação da onda com suas condições iniciais

$$(I) \qquad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

onde $v_0(x)$ é definida em $x \in \mathbb{R}$. Denote por $\widehat{u}(\omega,t)$ e $\widehat{v_0}(\omega)$ as transformadas de Fourier de $u(x,t)$ e $v_0(x)$, em relação à variável x.

a) Aplicando a transformada de Fourier, obtenha o PVI correspondente para $\widehat{u}$ em relação à variável t.

b) Resolvendo o PVI do item anterior, mostre que

$$\widehat{u}(\omega,t) = \frac{\widehat{v_0}(\omega)}{\omega} \operatorname{sen} \omega t$$

c) Obtenha a solução $u(x,t)$ para o problema (I) (em forma integral).

3) Considere o problema

$$\begin{cases} u_x + u_y = f(x), & x \in \mathbb{R}, \quad y > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a) Admita que f e a solução do problema têm transformada de Fourier. Mostre que

$$\widehat{u}(w,y) = \widehat{f}(w) \left(\frac{1 - e^{-iwy}}{iw} \right)$$

b) Use a tabela para encontrar

$$u(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\big[\widehat{u}(w,t)\big](x)$$

em função de f.

c) Tome o caso particular $f(x) = x$ e mostre (diretamente) que neste caso a solução encontrada no item anterior é uma solução do problema

$$\begin{cases} u_x + u_y = x, & x \in \mathbb{R}, \quad y > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

4) Considere o problema

$$\begin{cases} u_x + u_y = 0, & x \in \mathbb{R},\ y > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a) Admita que a solução do problema e f têm transformada de Fourier. Mostre que

$$\widehat{u}(w,y) = \widehat{f}(w) e^{-iwy}$$

b) Use a tabela para encontrar

$$u(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\big[\widehat{u}(w,y)\big](x)$$

em função de f.

c) Tome em particular $f(x) = x^2 + e^x$ e verifique (diretamente) que a solução obtida no item anterior satisfaz:

$$\begin{cases} u_x + u_y = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad y > 0 \\ u(x,0) = x^2 + e^x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = -2xf(x)$. Suponha que $\widehat{f}(0) = 1$. Mostre que $f(x) = e^{-x^2}$.

A

Conteúdo Complementar

A.1 Notação Matemática . . . 350
A.2 Revisão de Alguns Conceitos de Álgebra . . . 353
A.3 Revisão de Algumas Funções . . . 355
A.4 Indução Finita . . . 365
A.5 Sistemas de Coordenadas . . . 367
A.6 Números Complexos . . . 369
A.7 Álgebra Linear . . . 374
A.8 Cálculo de Funções Reais . . . 380

A.1 Notação Matemática

Símbolos Matemáticos

A lista a seguir inclui vários símbolos matemáticos comumente utilizados e seus significados

- ∞ Indica uma quantidade infinita. Observe que ∞ não é um número e portanto não podemos realizar operações algébricas com ele.
- $\forall$ Para todo
- $\exists$ Existe
- $\rightarrow$ Esse símbolo pode indicar um limite, $x \to 0$, ou ser usado na definição de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ele não pode substituir outros símbolos como a igualdade e também não deve ser usado para indicar o sentido de leitura.

A seguir apresentamos símbolos que indicam relações. Note que cada um tem um significado específico, um não pode substituir o outro.

- $=$ Símbolo de igualdade, ele indica que as duas expressões são completamente equivalentes.
- $\Leftrightarrow$ Esse símbolo significa "se, e somente se". Ele só pode ser utilizado entre duas afirmações lógicas, isso é, que podem ser verdadeiras ou falsas, e indica que ambas são simultaneamente verdadeiras ou simultaneamente falsas.
- $\Rightarrow$ Assim como $\Leftrightarrow$, esse símbolo indica uma relação lógica entre duas afirmações. Porém, seu significado é mais sutil, ele indica que se a primeira afirmação for verdadeira a segunda também precisa ser. Se a primeira afirmação for falsa não sabemos nada sobre a segunda.
- $\Leftarrow$ Tem o mesmo significado que $\Rightarrow$, porém com os papeis trocados para as afirmações.

Conjuntos e Intervalos

Os conjuntos numéricos mais utilizados são:

$\mathbb{N}$	Números naturais	$\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Números inteiros	$\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	Números racionais	Razões, ou frações, de números inteiros
$\mathbb{R}$	Números reais	A caracterização dos reais é mais complexa, para o Cálculo, podemos pensar que eles correspondem aos pontos da reta e que não há buracos entre eles
$\mathbb{C}$	Números complexos	Extensão dos reais para incluir raízes de números negativos

As operações com conjuntos mais comuns são

- $\in$ Indica que um elemento pertence a um conjunto
- $\cup$ União de conjuntos, representa os elementos que pertencem a um ou outro conjunto
- $\cap$ Intersecção de conjuntos, representa os elementos que pertencem a ambos conjuntos
- $\subset$ Subconjunto, indica que todos os elementos do conjunto da esquerda pertencem também ao conjunto da direita.

Intervalos são um caso particular de subconjuntos dos números reais, eles indicam um conjunto de números reais "consecutivos" e "sem buracos". Normalmente os intervalos são definidos por desigualdades

$$\begin{aligned} I &= \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ 3 < x < 5 \right\} \\ J &= \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ -1 \leq x \leq 2 \right\} \\ K &= \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ |x| < 2 \right\} \end{aligned}$$

Como esses conjuntos são muito utilizados no Cálculo existe uma notação específica para eles. A notação para intervalos precisa indicar quais são seus extremos e se esses extremos pertencem ou não ao intervalo, um colchete [ou] indica que o extremo correspondente pertence ao intervalo enquanto que um parenteses (ou) indica que os extremos não pertence ao intervalo

$$\begin{aligned} (3,5) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ 3 < x < 5 \right\} \\ [-1,2] &= \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ -1 \leq x \leq 2 \right\} \\ [-2,2] &= \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ |x| < 2 \right\} \\ (a,b] &= \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b \right\} \\ [a,b) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b \right\} \end{aligned}$$

Quando ambos extremos pertencem ao intervalo dizemos que ele é um Intervalo Fechado quando nenhum extremo pertence ao intervalo dizemos que ele é um Intervalo Aberto.

Um intervalo aberto que contém um ponto a é chamado de Vizinhança de a.

Definição A.1: Ínfimo e Supremo

O Ínfimo de $A \subset \mathbb{R}$, $\inf(A)$, é o maior número real menor ou igual a todos os elementos de A.

O Supremo de $A \subset \mathbb{R}$, $\sup(A)$, que é o menor número real maior ou igual a todos os elementos de A.

Para observamos a diferença entre o ínfimo e o mínimo considere o intervalo aberto entre zero e um, $A = (0, 1)$. Nenhum elemento $x \in A$ pode ser o mínimo de A, pois $x/2$ é menor do que x e pertence a A, portanto, esse conjunto não possui um menor elemento. O zero seria o candidato para ser o mínimo, mas ele não pertence a A, nesse caso dizemos que zero é o ínfimo de A. Uma análise equivalente vai nos mostrar que A também não possui um máximo e que 1 é seu supremo. Podemos escrever em tão que

$$\begin{aligned} \inf\big((0,1)\big) &= 0 & \qquad \min\big((0,1)\big) &\quad \text{não existe} \\ \sup\big((0,1)\big) &= 1 & \qquad \max\big((0,1)\big) &\quad \text{não existe} \end{aligned}$$

Em um intervalo fechado o ínfimo coincide com o mínimo e o supremo coincide com o máximo, por exemplo, considere $[0, 1]$

$$\begin{aligned} \inf\big([0,1]\big) &= \min\big([0,1]\big) = 0 \\ \sup\big([0,1]\big) &= \max\big([0,1]\big) = 1 \end{aligned}$$

A.2 Revisão de Alguns Conceitos de Álgebra

Incluímos aqui uma pequena revisão de alguns conceitos de álgebra que são necessários para a compreensão do texto.

Operações Aritméticas

Para números a, b, c e d, reais ou complexos, valem as propriedades das operações aritméticas, desde as divisões sejam possíveis.

$$a(b+c) = ab + ac \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Expoentes e Radicais

Para números x, y, m e n, reais, valem as propriedades de expoentes e raízes, desde as divisões e raízes sejam possíveis.

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Desigualdades e Módulo

Ao manipular desigualdades vales as seguintes regras

1. Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$
2. Se $a < b$, então $a + c < b + c$
3. Se $a < b$ e $c > 0$, então $ca < cb$
4. Se $a < b$ e $c < 0$, então $ca < cb$

Para $a > 0$

$$|x| = a \quad \text{significa que} \quad x = a \text{ ou } x = -a$$

$$\begin{array}{lll} |x| < a & \text{significa que} & -a < x < a \\ |x| > a & \text{significa que} & x < -a \text{ ou } a < a \end{array}$$

Note que os complexos não são ordenados, isso é, não existem as relações > ou < entre números complexos.

A.3 Revisão de Algumas Funções

Incluímos aqui uma pequena revisão de algumas funções que são importantes para o estudo dos tópicos desse trabalho.

Funções Exponencial e Logarítmica

A Função Exponencial pode ser definida de diversas formas, por exemplo, pela sua série de Taylor

$$e^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para todo x real. Consequentemente, o número e é a soma da série

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

e tem o valor

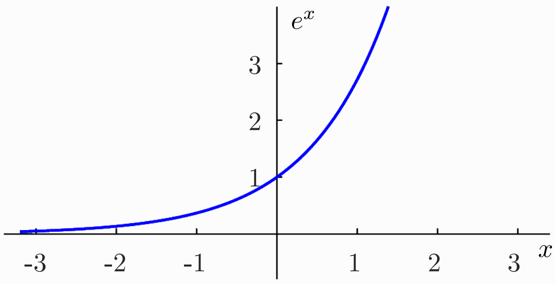
$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ 69995\ldots$$

A imagem da função exponencial é o conjunto dos números reais positivos. O gráfico dessa função pode ser visto na Figura A.1. Alternativamente podemos definir essa função pelo limite

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{A.1}$$

A derivada e a integral da função exponencial são

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \qquad\qquad \int e^x \, dx = e^x + C$$



(a) Gráfico da função e^x (b) Gráfico da função e^{-x}

Figura A.1: Gráficos da função exponencial

A Função Logaritmo Natural é a função inversa da exponencial e é o valor y tal que

$$y = \ln(x) \qquad \Rightarrow \qquad e^y = x$$

o domínio dessa função são os números reais positivos e sua imagem são todos os reais. A Figura A.2 mostra o gráfico dessa função calculada em $|x|$ estendendo assim o domínio para valores negativos de x.

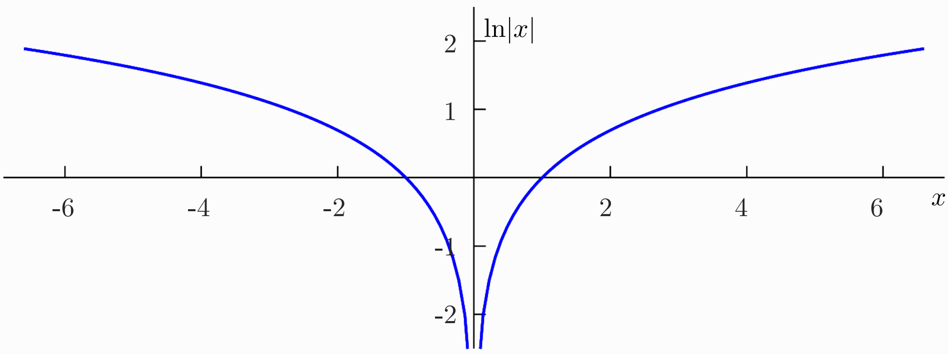


Figura A.2: Gráfico da função $\ln|x|$

A série de Taylor da função logaritmo normalmente é escrita como

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

e tem raio de convergência $R = 1$. A derivada e a integral da função exponencial são

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} \qquad\qquad \int \ln(x)\,dx = x\big(\ln(x) - 1\big) + C$$

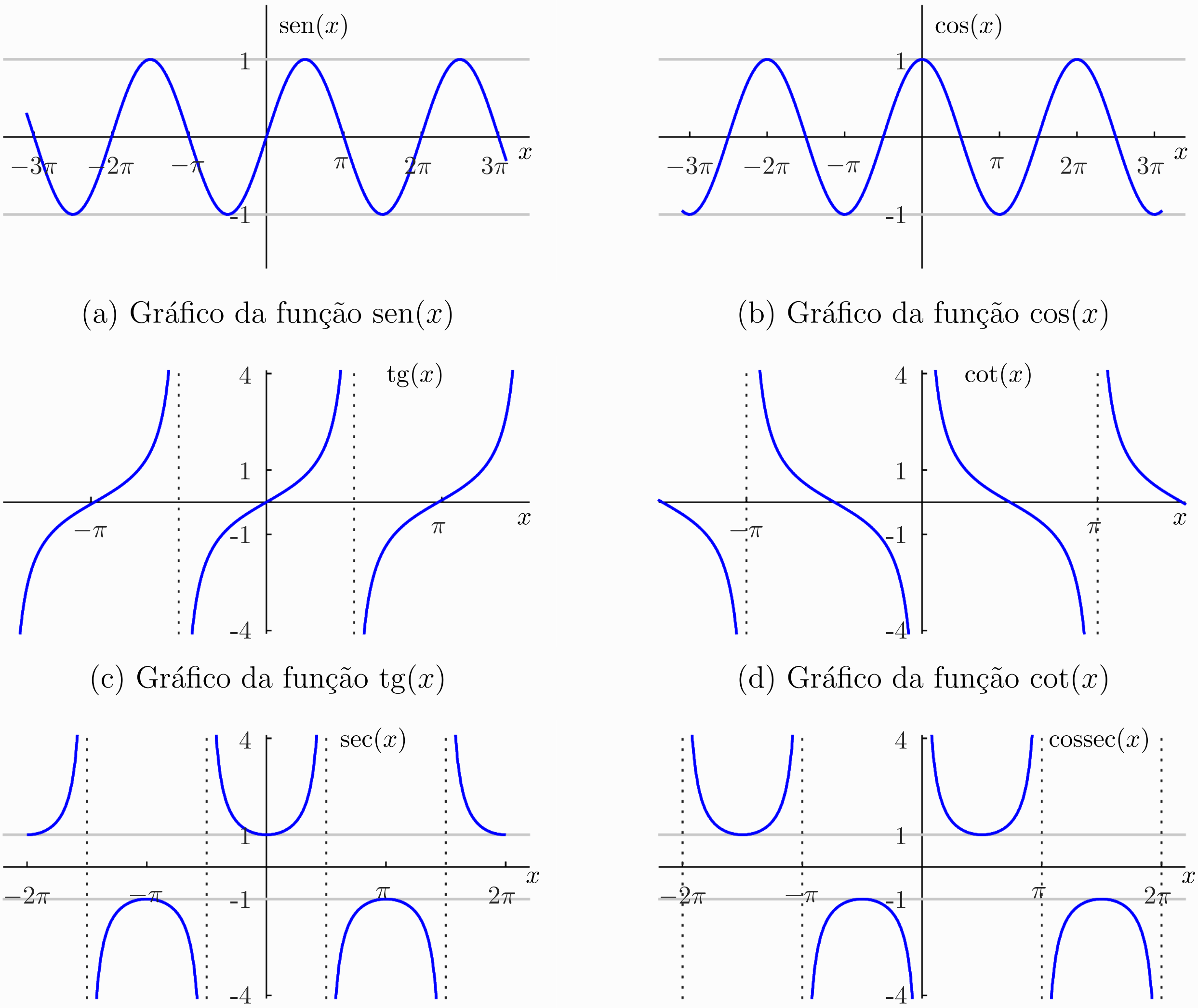
Funções Trigonométricas

Tradicionalmente pensamos nas funções trigonométricas como combinações das funções seno e cosseno

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \operatorname{cossec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

Os gráficos dessas funções podem ser vistos na Figura A.3.



(a) Gráfico da função $\operatorname{sen}(x)$

(b) Gráfico da função $\cos(x)$

(c) Gráfico da função $\operatorname{tg}(x)$

(d) Gráfico da função $\cot(x)$

(e) Gráfico da função $\sec(x)$

(f) Gráfico da função $\operatorname{cossec}(x)$

Figura A.3: Gráficos das funções trigonométricas

Identidade Pitagórica

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad 1 + \operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) \qquad 1 + \cot^2(x) = \operatorname{cossec}^2(x)$$

Algumas identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x) \qquad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}(x) \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$$

Fórmulas de soma e subtração

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)\\
\operatorname{sen}(x-y) &= \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\cos(x)\\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)
\end{aligned}$$

Fórmulas de ângulo duplo

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\\
&= 2\cos^2(x) - 1\\
&= 1 - 2\operatorname{sen}^2(x)
\end{aligned} \qquad \operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

Fórmulas de metade do ângulo

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{2} \qquad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{2}$$

Funções Trigonométricas Inversas

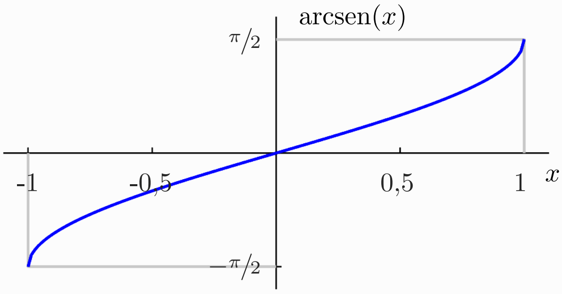
Os gráficos dessas funções podem ser vistos na Figura A.4.

Derivadas as funções trigonométricas inversas

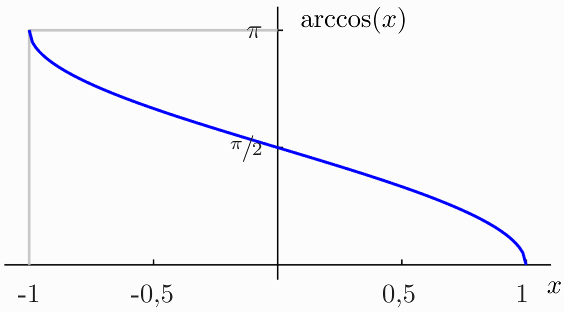
$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1-x^2}$$

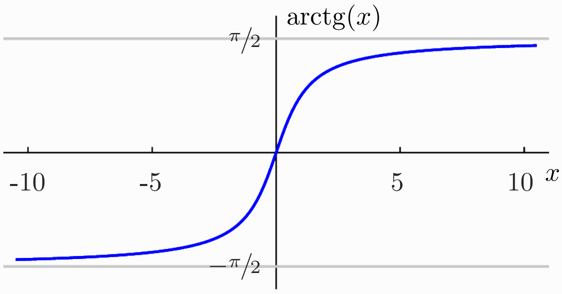
$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec}(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{arccossec}(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$



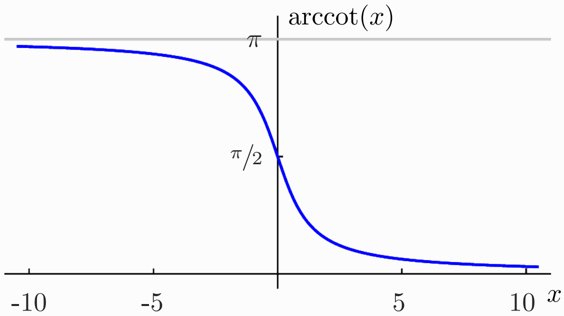
(a) Gráfico da função arcsen(x)



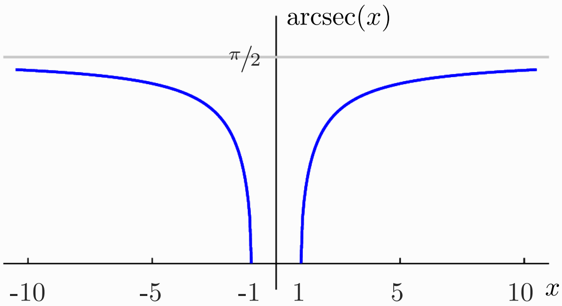
(b) Gráfico da função arccos(x)



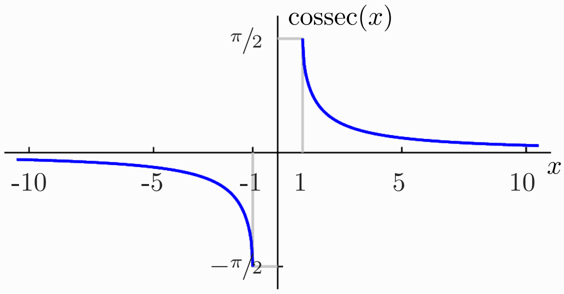
(c) Gráfico da função arctg(x)



(d) Gráfico da função arccot(x)



(e) Gráfico da função arcsec(x)



(f) Gráfico da função arccossec(x)

Figura A.4: Gráficos das funções trigonométricas inversas

Funções Hiperbólicas

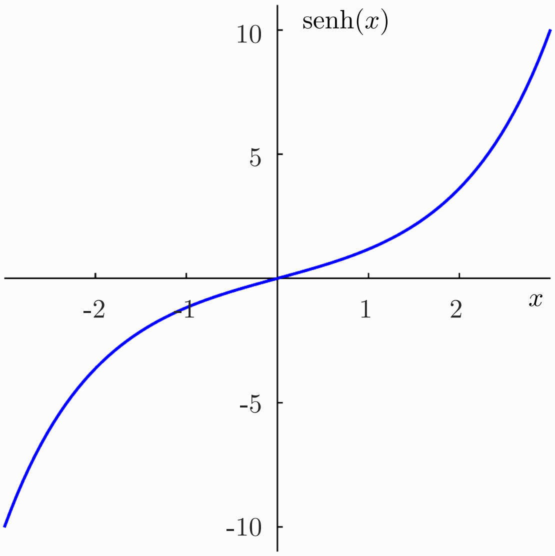
As funções hiperbólicas são funções análogas às funções trigonométricas ordinárias, que recebem esse nome por estarem relacionadas às hipérboles de modo similar a relação entre as funções trigonométrica e a circunferência. Porém, em nosso contexto essa interpretação geométrica não será utilizada. Aqui elas são importantes por representarem funções exponenciais em um arranjo similar às trigonométricas.

Definição do seno e cosseno hiperbólicos

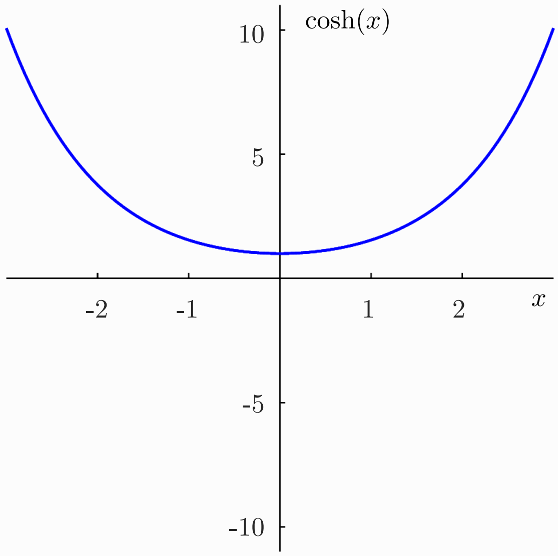
$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{A.2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{A.3}$$

Os gráficos dessas funções podem ser vistos na Figura A.5.



(a) Gráfico da função senh(x)



(b) Gráfico da função cosh(x)

Figura A.5: Gráficos das funções hiperbólicas

Também podemos definir essas funções com o uso de expressões envolvendo números complexos

$$\operatorname{senh}(x) = -i\,\operatorname{sen}(ix) \qquad \cosh(x) = \cos(ix)$$

Derivadas das funções hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh}(x) = \cosh(x) \qquad \frac{d}{dx}\cosh(x) = \operatorname{senh}(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\operatorname{senh}(x) = \operatorname{senh}(x) \qquad \frac{d^2}{dx^2}\cosh(x) = \cosh(x)$$

essas derivadas podem ser calculadas de modo simples apenas substituindo a definição da função, por exemplo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{senh}(x) &= \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{de^x}{dx} - \frac{de^{-x}}{dx}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\
&= \cosh(x)
\end{aligned}$$

Algumas relações úteis

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x) \qquad\qquad \cosh(-x) = \cosh(x)$$

Relação com a exponencial e Fórmula de Euler

$$\begin{aligned} e^{x} &= \cosh(x) + \operatorname{senh}(x) \\ e^{-x} &= \cosh(x) - \operatorname{senh}(x) \\ e^{-ix} &= \cos(x) + i\operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

Identidade similar a relação pitagórica

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^1(x) = 1$$

Somando e subtraindo os argumentos

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(x+y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y) \\ \operatorname{senh}(x-y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) - \cosh(x)\operatorname{senh}(y) \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y) \\ \cosh(x-y) &= \cosh(x)\cosh(y) - \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y) \end{aligned}$$

Séries de Taylor

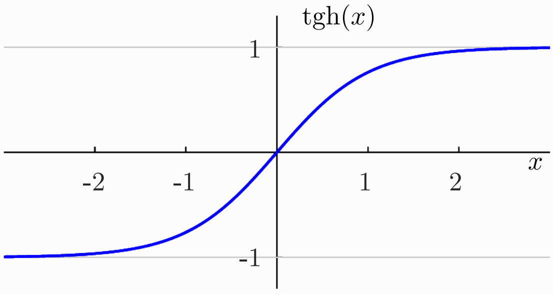
$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cosh(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Da mesma forma como as funções trigonométricas podem ser definidas a partir do seno e cosseno, podemos definir as seguintes funções hiperbólicas

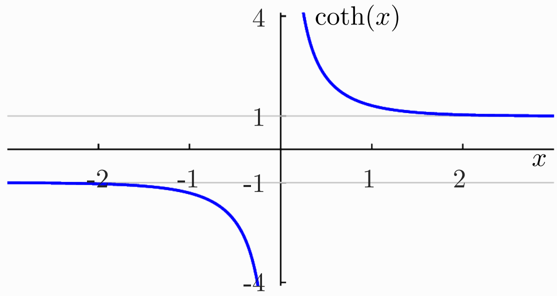
$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} \qquad\qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{1}{\operatorname{tgh}(x)}$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \qquad\qquad \operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}$$

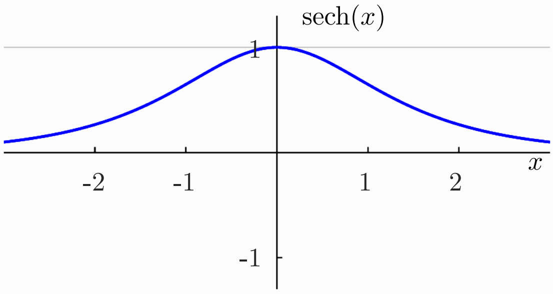
Os gráficos dessas funções podem ser vistos na Figura A.6.



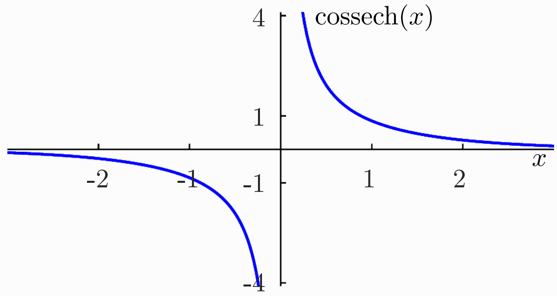
(a) Gráfico da função tgh(x)



(b) Gráfico da função coth(x)



(c) Gráfico da função sech(x)



(d) Gráfico da função cossech(x)

Figura A.6: Gráficos das funções hiperbólicas compostas

Função sinc

O termo sinc é uma contração do nome da função em latim *sinus cardinalis* (seno cardinal), essa função é definida como

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \tag{A.4}$$

Porém, por simplicidade, é comum escrevermos apenas

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

O gráfico dessa função pode ser visto na Figura A.7.

Derivada da sinc

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sinc}(x) = \frac{\cos(x) - \operatorname{sinc}(x)}{x}$$

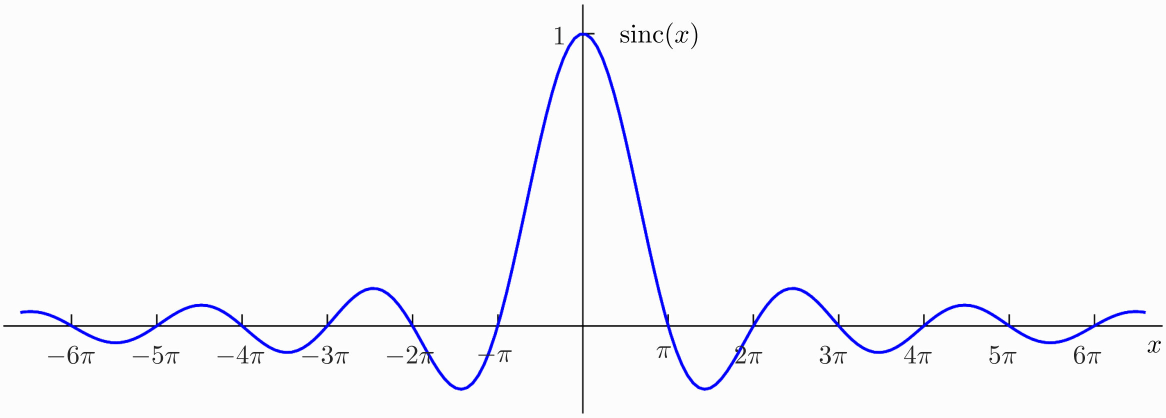


Figura A.7: Gráfico da função sinc(x)

Série de Taylor da sinc

$$\operatorname{sinc}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Cuidado para não confundir a definição utilizada aqui com uma definição alternativa comumente utilizada no processamento digital de sinais, da função sinc normalizada

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}$$

Outras Funções

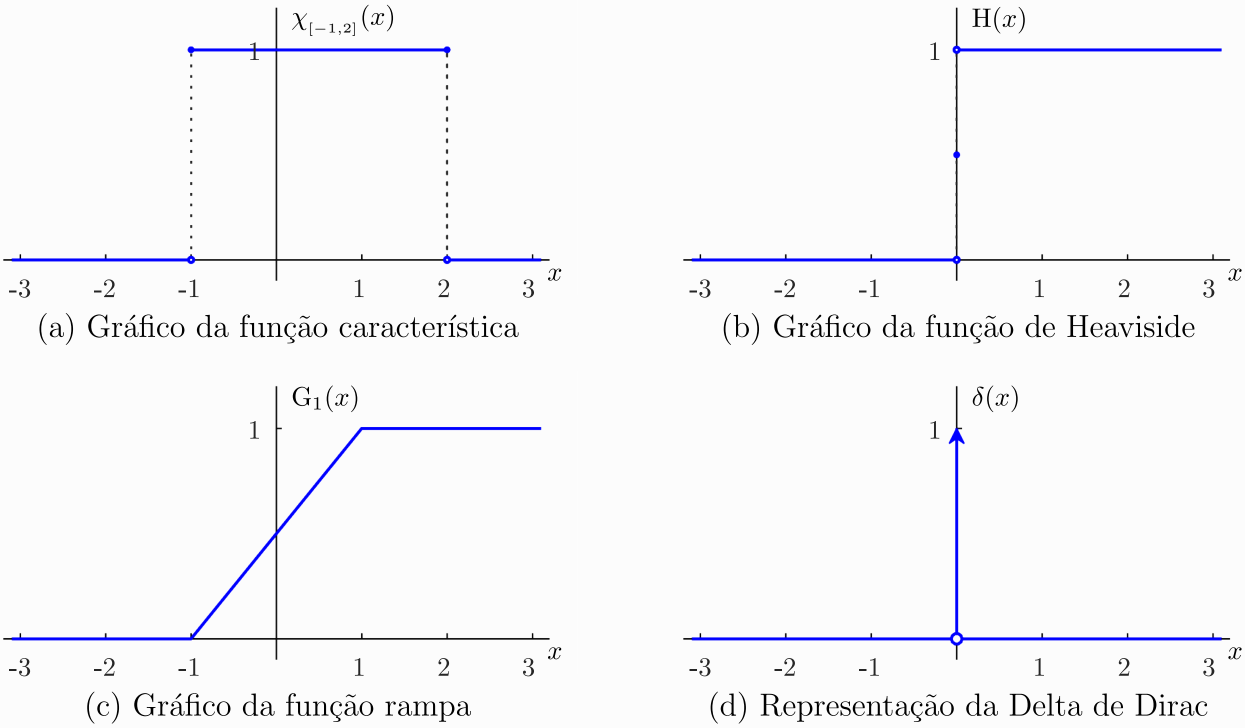
Definimos a Função Característica de um subconjunto A dos números reais $\mathbb{R}$ como a função χ_A que vale 1 em A e zero fora dele

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{A.5}$$

A Função de Heaviside ou Degrau Unitário $\mathrm{H}(x)$, vale 1 para x positivo, zero para x negativo.

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \tag{A.6}$$

Essa função não precisa ser definida em $x = 0$, mas dependendo do contexto ela pode



(a) Gráfico da função característica

(b) Gráfico da função de Heaviside

(c) Gráfico da função rampa

(d) Representação da Delta de Dirac

Figura A.8: Gráficos das funções característica, Heaviside, rampa e Delta de Dirac

assumir algum valor específico nesse ponto. Um exemplo é escolher o valor $1/2$

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Também podemos escrever essa função como $\mathrm{H}(t) = \chi_{[0,\infty)}(t)$.

A Função Rampa é uma aproximação contínua para a função de Heaviside, que é definida por

$$\mathrm{G}_\varepsilon = \begin{cases} 0 & x < -\varepsilon \\ \dfrac{t}{2\varepsilon} + \dfrac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > \varepsilon \end{cases} \tag{A.7}$$

A Delta de Dirac, $\delta(t)$, que representa um Impulso Unitário Instantâneo em $t = 0$.

Ela é definida pela propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, f(t)\, dt \;=\; f(0) \tag{A.8}$$

Cuidado com o delta pois ele não é uma função segundo a definição empregada no Cálculo. Esclarecer seu significado preciso demanda a teoria de distribuições. Mesmo assim, baseados em uma teoria matemática mais elaborada, escrevemos informalmente que

$$\delta(t) = \lim_{h\to 0^+} d_h(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

A Seção 7.5 discute um pouco mais sobre essa função.

A Figura A.8 mostra o gráfico dessas funções. Porém, não podemos dizer que a Figura A.8d seja o gráfico do Delta de Dirac. Essa é uma representação onde a seta indica que a função não assume um valor real nesse ponto. Normalmente o valor y onde a seta aponta indica a constante multiplicando o delta.

A.4 Indução Finita

Demonstração por Indução Finita ou Indução Matemática é uma técnica para demonstrar afirmações que dependem de um índice que segue para o infinito, por exemplo $n \in \mathbb{N}$.

Para mostrar que uma afirmação, P_n, é verdadeira para todo n devemos provar que:

1. ela é verdadeira para o primeiro n, por exemplo se o índice começa em $n = 1$ temos que mostrar que P_1 é verdade;
2. se ela for verdadeira para n então também será verdadeira para o próximo índice, $n + 1$, isso é

$$P_n \Rightarrow P_{n+1}\,.$$

O exemplo a seguir ilustra a técnica provando a Desigualdade de Bernoulli.

Exemplo A.4.1:
Demonstrar a Desigualdade de Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

para todo $x > -1$ e n inteiro não negativo.

Primeiro vamos identificar qual é o índice envolvido e qual a afirmação que deve ser verificada para cada valor do índice

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$P_n\colon (1+x)^n \geq 1+nx$$

Provamos agora o primeiro caso, $n = 0$, por simples substituição

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1+0x = 1$$

O próximo passo é assumir que a afirmação é verdadeira para P_n, que chamamos de Hipótese de Indução, e provar que ela é verdadeira para P_{n+1}. Neste exemplo queremos provar que

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \Rightarrow \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

Começamos manipulando o lado esquerdo da desigualdade que queremos demonstrar

$$(1+x)^{(n+1)} = (1+x)^n(1+x)$$

Como $(1+x) > 0$, pois por hipótese $x > -1$, podemos usar a hipótese de indução, $(1+x)^n \geq 1+nx$, para escrever

$$(1+x)^{(n+1)} \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2$$

Rearranjando temos

$$(1+x)^{(n+1)} \geq 1+(1+n)x+nx^2$$

Como nx^2 é sempre não negativo, podemos remove-lo mantendo a relação de desigualdade

$$(1+x)^{(n+1)} \geq 1+(1+n)x$$

Provamos assim que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, o que completa a prova por indução finita e garante que a desigualdade é verdadeira para todo $n \geq 0$.

A.5 Sistemas de Coordenadas

O sistema de Coordenadas Polares é definido a partir do sistema de coordenadas cartesiano (x, y) pela transformação de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{aligned} \tag{A.9}$$

onde um ponto P com coordenadas (x, y) pode ser representado também pelas coordenadas (r, θ), como mostra a Figura A.9. A transformação inversa é dada por

$$\begin{aligned} \theta &= \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \tag{A.10}$$

Note que todo o plano cartesiano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é mapeado na região

$$\begin{aligned} r &\in [0, \infty) \\ \theta &\in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

onde o intervalo para θ pode ser substituído por qualquer outro intervalo de comprimento 2π. Apesar da origem $(0, 0)$ ser um ponto ordinário no plano, sua representação em coordenadas polares é singular, pois se $r = 0$ todos os valores de θ representam o mesmo ponto.

As derivadas de uma função em coordenadas cartesianas e polares estão ligadas pela regra da cadeia. Considere a função

$$g(x, y) = f\big(r(x, y), \theta(x, y)\big)$$

pela regra da cadeia em duas dimensões sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned}$$

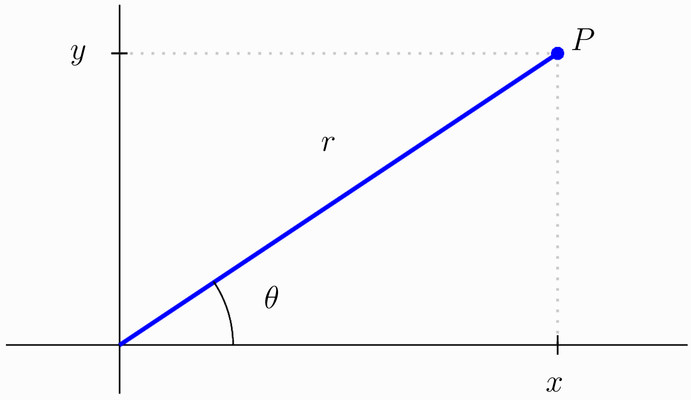


Figura A.9: Sistema de coordenadas polares

Calculando as derivadas da transformação (A.10) temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\end{aligned} \tag{A.11}$$

Note que nessas expressões r e θ são pensados como funções de x e y, isso é, $r = r(x, y)$ e $\theta = \theta(x, y)$. Podemos reproduzir esses cálculos para obter relação recíproca

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial g}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= -r\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial g}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial y}\end{aligned} \tag{A.12}$$

Uma aplicação das coordenadas polares é a integração em regiões que são mais facilmente descritas nessas coordenadas. Por exemplo, o disco de raio ρ centrado na origem, D, é descrito em coordenadas cartesianas como

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\;/\;\; -\rho \leq x \leq \rho \quad \text{e} \quad -\sqrt{\rho^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{\rho^2 - x^2}\right\}$$

enquanto que em coordenadas polares ele pode ser descrito como

$$D = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \;\;/\;\; 0 \leq x \leq \rho \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta < 2\pi\right\}$$

Assim a integral de uma função f nessa região assume a forma

$$I = \int_D f ds = \int_{-\rho}^{\rho}\int_{-\sqrt{\rho^2-x^2}}^{\sqrt{\rho^2-x^2}} f(x, y)\, dydx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} f(r, \theta)\, r\, drd\theta$$

Cuidado para não esquecer que a mudança de variáveis transforma o diferencial $dxdy$ em $rdrd\theta$.

A.6 Números Complexos

Essa seção introduz o conceito de Números Complexos e apresenta os resultados utilizados nesse material.

Como uma motivação para a criação dos números complexos considere a equação

$$x^2 + 1 = 0$$

manipulando formalmente obtemos a solução

$$x = \sqrt{-1}$$

Porém, para qualquer número real a sabemos que $a^2 \geq 0$ o que implica que não existe o número $\sqrt{-1}$ dentro do conjunto dos números reais e portanto a equação não possui solução.

Uma forma para contornar essa limitação é criar um novo número, denotado por i e que chamamos de Unidade imaginária, de forma que

$$i^2 = -1$$

Além disso, determinamos que as operações com esse número obedecem as mesmas regras das operações com os números reais. Por exemplo, podemos calcular as potências de i

$$\begin{aligned}
&i^2 = -1\\
&i^3 = i^2 i = (-1)i = -i\\
&i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1\\
&i^5 = i^4 i = i\\
&i^6 = i^5 i = i^2 = -1
\end{aligned}$$

Como o número i não pertence aos reais estamos criando um novo conjunto numérico conhecido como o Conjunto dos Números Complexos

$$\mathbb{C} = \left\{ a + bi \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Note que, identificarmos os números reais, a, com os números complexos $(a + 0i)$ e dessa forma entendemos os números reais como um subconjunto dos complexos.

No números complexos as operações de soma e produto são definidas de modo compatível com as operações nos números reais. A soma de dois números complexos $v = a + bi$ e $w = c + di$ é definida por

$$v + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Enquanto o produto é definido por

$$\begin{aligned} vw &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= a \cdot (c + di) + bi \cdot (c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Propriedades das operações de números complexos. Sejam u, v e w números complexos, então

a) $v + w = w + v$

b) $v + (w + u) = (v + w) + u$

c) $v + 0 = 0 + v = v$ sendo que $0 = 0 + 0i$

d) Para todo $v = a + bi \in \mathbb{C}$, o número

$$-v = -a - bi \qquad \text{é tal que} \qquad v + (-v) = 0$$

e) $vw = wv$

f) $v(wu) = (vw)u$

g) $1v = v$ sendo que $1 = 1 + 0i$

h) Se $v = a + bi \neq 0$ então

$$v^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\, i \qquad \text{é tal que} \qquad vv^{-1} = v^{-1}v = 1$$

i) $v(w + u) = vw + vu$

Como as operações de soma e produto nos complexos possui a essas propriedades dizemos que o conjunto dos números complexos, com essas operações, é um corpo. Os números reais, $\mathbb{R}$, e os racionais, $\mathbb{Q}$, também são corpos.

Exemplo A.6.1:
Calculo das raízes da equação quadrática.

Considere a seguinte equação algébrica

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde $a \neq 0$. Sabemos que suas soluções são dadas pela fórmula de Bhaskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Quando os coeficientes a, b e c são reais a função $y(x) = ax^2 + bx + c$ representa uma parábola do plano e as soluções da equação quadrática são as os pontos onde o gráfico cruza o eixo x. Nesse contexto, buscamos soluções reais e quando $\Delta < 0$ dizemos que o gráfico não cruza o eixo x.

Porém, usando os números complexos, podemos calcular a raiz quadrada de números negativos obtendo

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{|\Delta|}\, i$$

e as soluções para a equação quadrática são o par conjugado

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\, i$$

$$x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\, i$$

É possível mostrar que no, conjunto dos números complexos, todo polinômio de grau n possui exatamente n raízes. Além disso, se os coeficientes do polinômio forem números reais então suas raízes serão números reais ou números complexos conjugadas.

Assim como representamos os números reais em uma reta, a Reta Real, representamos os complexos no Plano Complexo. Cada número $u = x + yi$ é associado ao ponto (x, y) do plano. A Figura A.10 ilustra essa associação.

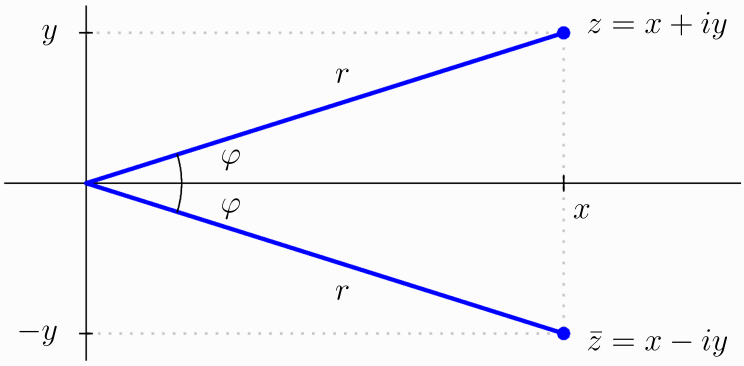


Figura A.10: Representação dos Números Complexos em um Plano

Além das operações de soma e produto, também definimos outras operações para os complexos.

DEFINIÇÃO A.2: OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS

Para um número $z = x + yi \in \mathbb{C}$ definimos as operações:

Parte real	$\mathrm{Re}(z) = x$
Parte imaginária	$\mathrm{Im}(z) = y$
Conjugado	$\overline{z} = x - yi$
Módulo	$\lvert z \rvert = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Argumento	$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

A Figura A.10 mostra a interpretação geométrica dessas operações.

É possível demonstrar as seguintes propriedades desses operações, para os números complexos v e w.

a) $v\overline{v} = \lvert v \rvert^2$
b) $\overline{v + w} = \overline{v} + \overline{w}$
c) $\overline{vw} = \overline{v}\,\overline{w}$

Um estudo do cálculo em variáveis complexas está além do escopo desse texto, porém, para podemos introduzir a Transformada de Fourier, vamos precisar da definição de algumas funções com variáveis complexas.

As funções algébricas, aquelas que utilizam apenas operações como soma, produto, e potências, não precisam de uma definição especial, basta realizar as operações definidas para os complexos. Porém, para as demais funções precisamos de outras técnicas. Para as funções analíticas, isso é, as funções cujas Séries de Taylor convergem para a própria função, podemos usar essa série para definir as funções nos complexos. As funções que vamos utilizar com maior frequência são o seno, cosseno e a exponencial

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \cdots \tag{A.13}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots \tag{A.14}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \tag{A.15}$$

Comparando as séries de Taylor dessas funções podemos demonstrar a Identidade de Euler que associa a exponencial com as funções seno e cosseno

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta) \qquad \forall\, \theta \in \mathbb{R} \tag{A.16}$$

Com essa identidade podemos interpretar a Exponencial Complexa como sendo uma oscilação com decrescimento ou decaimento exponencial, pois

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a \big[\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)\big]$$

Dessa forma e^a determina o crescimento ou decrescimento, enquanto $\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)$ determina a oscilação.

Cálculo com Funções e Variáveis Complexas

Ao longo desse texto diversas vezes utilizamos funções de uma variável real que assumem valores complexos, $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, nesses casos podemos aplicar as técnicas do Cálculo de funções reais considerando a i como uma constante, por exemplo,

$$\frac{d}{dx}\big(ax^2 + ix + 3i\big) = 2ax + i$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(ix) = i\cos(ix)$$

$$\int ax^2 + ix + 3i\, dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{ix^2}{2} + 3ix + C$$

$$\int \operatorname{sen}(ix)\, dx = -\frac{\cos(ix)}{i} = i\cos(ix)$$

Porém, não podemos utilizar as mesmas regras para funções de variáveis complexas, $f : D \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Para esses casos precisamos da teoria própria para as variáveis complexas.

A.7 Álgebra Linear

Apresentamos nessa seção algumas definições e propriedades estudadas na Álgebra Linear. A finalidade destes resultados é generalizar o conceito de vetores, da Geometria Analítica. Em essência dizemos que qualquer entidade matemática que tenha propriedades semelhantes as propriedades dos vetores da geometria também são vetores, com isso podemos utilizar resultados oriundos da geometria em contextos mais abstratos.

Para a Álgebra Linear as propriedades fundamentais dos vetores são as operações que podemos realizar com eles. Assim definimos um espaço vetorial como sendo um conjunto de elementos nos quais podemos realizar operações semelhantes as operações com vetores. O termo espaço é utilizado sempre que tivermos um conjunto onde é possível realizar alguma operação em todos os seus elementos. A definição a seguir explicita o que é um espaço vetorial.

Definição A.3: Espaço Vetorial

Um Espaço Vetorial real é um conjunto V, não vazio, onde as operações de Soma e Produto por Escalar estão definidas. Além disso, para quaisquer u, v e $w \in V$ e α e $\beta \in \mathbb{R}$ é sempre verdade que

1. $v + w \in V$
2. $\alpha v \in V$
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$
4. $v + w = w + v$
5. Existe $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$
6. Existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$
7. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$

8. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
9. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
10. $1v = v$

Não importa a natureza dos elementos ou das operações utilizadas, se as propriedades forem atendidas dizemos que V é um Espaço Vetorial, $v \in V$ é um Vetor e $\alpha \in \mathbb{R}$ é um Escalar. A definição de espaços vetoriais complexos é equivalente substituindo os escalares reais por números complexos. No contexto dessa apostila estamos interessados em espaços vetoriais onde os vetores são funções definidas em um intervalo, que chamaremos de Espaços de Funções.

Uma característica importante dos espaços vetoriais, reais ou complexos, é que novos vetores podem ser construídos pela combinação linear de vetores dados.

Definição A.4: Combinação Linear

Dados os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ o vetor

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

também é um elemento de V e é chamado de Combinação Linear dos vetores v_i.

Uma questão que muitas vezes precisamos responder é se um vetor é ou não gerado por uma combinação linear de outros vetores. Se ele puder ser gerado dessa forma, dizemos que ele é Linearmente Dependente dos vetores que o geram e em geral ele pode ser considerado supérfluo. Se tivermos um conjunto de vetores onde nenhum pode ser gerado pelos demais dizemos que esse conjunto é linearmente independente, como descrito na definição a seguir.

Definição A.5: Independência Linear

Dados os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é Linearmente Independente (LI) se a equação

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Se existir uma solução onde algum escalar não é nulo o conjunto de vetores é Linearmente Dependente (LD).

Uma consequência da propriedade de que vetores podem ser gerados pela combinação de outros é que podemos selecionar um conjunto de vetores para gerar todo o espaço vetorial. O menor conjunto que gera todo o espaço é chamado de base, como descrito na próxima definição.

Definição A.6: Base de um Espaço Vetorial

Um conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vetores em V é uma Base de V se:

1. for um conjunto linearmente independente
2. todo vetor de V pode ser gerado como combinação linear dos vetores do conjunto.

Um tipo de operação que pode ser estudada no contexto da Álgebra Linear são as transformações lineares, que podem ser definidas como segue.

Definição A.7: Transformação Linear

Dados dois espaços vetoriais V e W, uma Transformação Linear é uma função de V em W, $T : V \to W$ que satisfaz:

1. para quaisquer v e $w \in V$

$$T(v + w) = T(v) + T(w)$$

2. Para qualquer escalar α e $v \in V$

$$T(\alpha v) = \alpha T(v)$$

Derivadas e integrais são exemplos de transformações lineares no espaço de funções, assim como, as equações diferenciais lineares. Um problema importante que surge no contexto de transformações lineares é o problema de autovalores e autovetores.

Definição A.8: Autovalores e Autovetores

Dada uma transformação linear de um espaço vetorial V nele mesmo, $T : V \to V$, se existir um vetor não nulo $v \in V$ e um escalar λ tais que

$$T(v) = \lambda v$$

dizemos que λ é um Autovalor de T e v é o Autovetor de T associado a λ.

No contexto dos espaços de função é comum chamar os autovetores de Autofunções.

Além das operações de soma e produto por escalar, a Álgebra Linear também generaliza outros conceitos como comprimento e ângulo entre vetores. Nesse momento é útil fazermos uma comparação com o plano cartesiano, $\mathbb{R}^2$, onde calculamos o produto escalar, ou produto interno, dos vetores $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ como

$$v \cdot w = \langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

Com o produto escalar podemos calcular a norma, ou tamanho, de um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Com a norma podemos calcular a distância entre dois vetores, ou pontos,

$$d(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2}$$

Podemos também calcular o ângulo entre dois vetores usando a relação entre o produto escalar e a norma

$$v \cdot w = \|v\| \, \|w\| \, \cos\theta$$

Finalmente dizemos que os vetores v e w são ortogonais se o ângulo entre eles for $90°$, ou seja, se

$$v \cdot w = 0$$

Vamos agora generalizar essas definições para espaços vetoriais quaisquer.

Definição A.9: Produto Interno

Dado um espaço vetorial real V, um Produto Interno sobre V é uma função, $\langle v, w \rangle$, que associa um número real a cada par de vetores v e $w \in V$, satisfazendo as propriedades

1. $\langle v, v \rangle \geq 0$ para todo $v \in V$
2. $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$
3. $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$ para todo escalar α

4. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
5. $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$

Se o espaço vetorial V possui uma definição de produto interno dizemos que ele é um Espaço Vetorial com Produto Interno. No estudo da transformada de Fourier utilizamos o produto interno

$$\langle v, w\rangle = \int_a^b v(x)\, w(x)\, dx \tag{A.17}$$

para o espaço de funções no intervalo $[a, b]$

Definição A.10: Ortogonalidade

Em um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$, dizemos que dois vetores v e w são Ortogonais se

$$\langle v, w\rangle = 0$$

Para indicar que os vetores v e w são ortogonais podemos utilizar a notação $v \perp w$. A proposição a seguir apresenta as propriedades de vetores ortogonais.

Proposição A.11: Propriedades da Ortogonalidade

Em um espaço vetorial com produto interno, V, valem as propriedades de ortogonalidade

1. $0 \perp v$ para todo $v \in V$
2. $v \perp w$ implica que $w \perp v$
3. Se $v \perp w$ para todo $w \in V$, então $v = 0$
4. Se $u \perp w$ e $v \perp w$, então $(u+v) \perp w$
5. Se $v \perp w$, então $(\lambda v) \perp w$ para todo escalar λ

No caso do espaço de funções a condição de ortogonalidade oriunda do produto interno (A.17) é

$$\langle v, w\rangle = \int_a^b v(x)\, w(x)\, dx = 0$$

No estudo das séries de Fourier usamos o fato de que as funções seno e cosseno com a escolha adequada de frequências são ortogonais.

Se o espaço vetorial possui um produto interno podemos definir uma norma, como descrito na próxima definição

Definição A.12: Norma

Dado um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, definimos a Norma de um vetor $v \in V$ em relação a esse produto interno como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

Se $\|v\| = 1$ para algum vetor v dizemos que ele é um Vetor Unitário.

A norma induzida no espaço de funções pelo produto interno (A.17) é

$$\|v\| = \langle v, v\rangle = \int_a^b v(x)^2\, dx = 0$$

Podemos agora definir a distância entre dois vetores em um espaço vetorial.

Definição A.13: Distância

Dado um espaço vetorial com produto interno $\langle,\rangle$, definimos a Distância entre vetores v e $w \in V$ em relação a esse produto interno como

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

A distância induzida no espaço de funções pelo produto interno (A.17) é

$$d(v, w) = \|v - w\| = \int_a^b \big(v(x) - w(x)\big)^2\, dx = 0$$

Essa definição de distância é usada na Seção 5.6, sobre o fenômeno de Gibbs, para esclarecer o significado apropriado a convergência da série de Fourier.

A.8 Cálculo de Funções Reais

Apresentamos nessa seção algumas definições e propriedades do Cálculo de funções reais que podem ser úteis para o estudo dos conteúdos desse material. Começamos pela definição de uma função real.

Definição A.14: Função

Uma Função f de um conjunto D para um conjunto E é uma regra que associa, sem ambiguidade, um único elemento $y = f(x) \in E$ para cada elemento $x \in D$. Denotamos uma função por

$$f : D \to E$$

Dizemos que D é o Domínio e E o Contra Domínio de f, enquanto o conjunto de todos os valores $y = f(x)$ correspondentes a algum $x \in D$ é a Imagem de f.

Definição A.15: Função Real

Uma Função Real é uma função cujo domínio e contra domínio são subconjuntos dos reais $\mathbb{R}$.

A seguir apresentamos a definição formal do limite de uma função real.

Definição A.16: Limite de Função Real

Seja f uma função definida em intervalo aberto que contém do ponto $a \in \mathbb{R}$, podendo não ser definida em a. Dizemos que o Limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é $L \in \mathbb{R}$ e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para cada $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Essa definição pode ser estendida para o caso em que a é $\pm\infty$. Quando o limite existe ele possui as propriedades descritas na proposição a seguir.

Proposição A.17: Propriedades do Limite de Funções Reais

Supondo que c é uma constante, f e g são funções reais e que os limites

$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} g(x)$$

existem, então valem as Propriedades do Limite

1. $\displaystyle\lim_{x\to a}\Big[f(x)+g(x)\Big] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to a}\Big[f(x)-g(x)\Big] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to a}\Big[f(x)g(x)\Big] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} d(x)}$ desde que $\displaystyle\lim_{x\to a} d(x) \neq 0$

Uma propriedade de algumas funções reais é não possuir buracos ou saltos em seu gráfico. Dizemos que essa funções são contínuas e a próxima definição nos fornece uma caracterização para essas funções.

Definição A.18: Continuidade de Função Real

Uma função real é Contínua em um ponto a se

1. $f(a)$ existe
2. $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ existe
3. $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Um resultado importante sobre funções contínuas é o Teorema do Valor Intermediário.

Teorema A.19: Teorema do Valor Intermediário

Suponha que a função f é contínua em todos os pontos de um intervalo fechado $[a, b]$ e que $f(a) \neq f(b)$. Assuma que p é um valor entre $f(a)$ e $f(b)$ então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = p$.

Com o limite podemos definir a derivada de uma função real que nos fornece o valor da inclinação da reta tangente ao gráfico da função em cada ponto.

Definição A.20: Derivada de Função Real

A Derivada de uma função real $f(x)$ em relação a variável x é a função f' cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista.

Ao calcularmos derivadas usamos as regras de derivação listadas na proposição a seguir.

Proposição A.21: Regras de Derivação

Sejam f e g funções deriváveis, c e r constantes, então temos que

1. $\dfrac{d}{dx} c = 0$
2. $\dfrac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$
3. $\dfrac{d}{dx} e^x = e^x$
4. $\big(cf\big)' = cf'$
5. $\big(f+g\big)' = f' + g'$
6. $\big(f-g\big)' = f' - g'$
7. $\big(fg\big)' = f'g + fg'$
8. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
9. Se $h(x) = f\big(g(x)\big)$ então
$$h'(x) = f'\big(g(x)\big)\, g'(x)$$

Uma propriedade importante de funções deriváveis é o Teorema de Rolle ou Teorema do Valor Médio.

Teorema A.22: Teorema de Rolle

Suponha que f é uma função

1. contínua no intervalo fechado $[a, b]$
2. derivável no intervalo aberto (a, b)
3. e $f(a) = f(b)$

então existe $c \in (a, b)$ onde $f'(c) = 0$.

A operação inversa da derivação e a integração e é apresentadas nos próximos resultados.

Definição A.23: Primitiva de Função Real

A Primitiva, Antiderivada ou Integral Indefinida de uma função f é a função F tal que

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

Denotamos a primitiva por

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

É importante observar que a primitiva não é única, se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ então $F(x) + c$ também será para qualquer constante c. A proposição a seguir apresenta algumas propriedades da primitiva.

Proposição A.24: Propriedades da Primitiva

Dadas funções integráveis f e g e a constante c temos que

1. $\displaystyle\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int f(x) - g(x)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$

Uma operação relacionada é o cálculo da área entre o gráfico da função f e o eixo-x, chamamos essa operação de integral definida como descrito na próxima definição.

Definição A.25: Integral Definida

A Integral Definida de uma função real f é a área, considerando o sinal, entre o gráfico da função e o eixo-x no intervalo $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Essa área é o limite da Soma de Riemman correspondente.

A integral definida possui as propriedades descrita na proposição a seguir.

Proposição A.26: Propriedades da Integral Definida

Dadas funções integráveis f e g e a constante c temos que

1. $\displaystyle\int_a^b c\, dx = c(b-a)$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x) - g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$
4. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx$
5. $\displaystyle\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$

Proposição A.27: Integração por Partes

Dadas funções integráveis p e q, podemos escrever a seguinte relação entre as integrais indefinidas

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du\,.$$

De modo equivalente temos a relação entre as integrais definidas

$$\int_{-\infty}^{\infty} p\, dq = pq\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} q\, dp\,.$$

O Teorema Fundamental do Cálculo é o resultado que determina as relações entre a derivada e as integrais definida e indefinida de uma função.

Teorema A.28: Teorema Fundamental do Cálculo

Parte 1 Se f é uma função contínua em $[a, b]$ então a função F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad\qquad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e

$$F'(x) = f(x)$$

Parte 2 Se f é contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

onde F é qualquer primitiva de f.

As integrais definidas são calculadas em um intervalo finito e a função f não deve ter nenhuma descontinuidade infinita. Porém, mesmo se o intervalo for infinito ou f possuir uma descontinuidade infinita, em alguns casos, é possível calcular a área sob o gráfico usando a integral imprópria.

Definição A.29: Integral Imprópria – Tipo 1

A Integral Imprópria do tipo 1 é a integral definida de uma função f em um intervalo infinito.

Se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ existe para todo $b \geq a$ e o limite existir, temos que

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ existe para todo $a \leq b$ e o limite existir, temos que

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Se $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ são convergentes, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

Definição A.30: Integral Imprópria – Tipo 2

Se f é contínua em $[a,b)$ e descontínua em b, e o limite existir, temos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b}\int_a^t f(x)\,dx$$

Se f é contínua em $(a,b]$ e descontínua em a, e o limite existir, temos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a}\int_t^b f(x)\,dx$$

Tabela A.1: Tabela de Derivadas

Funções exponenciais e logarítmicas	
$\dfrac{d}{dx}\, e^x = e^x$	$\dfrac{d}{dx}\, a^x = a^x \ln(a)$
$\dfrac{d}{dx}\, \ln\lvert x\rvert = \dfrac{1}{x}$	$\dfrac{d}{dx}\, \log_a(x) = \dfrac{1}{x\ln(a)}$
Funções trigonométricas	
$\dfrac{d}{dx}\, \operatorname{sen}(x) = \cos(x)$	$\dfrac{d}{dx}\, \operatorname{tg}(x) = \sec^2(x)$
$\dfrac{d}{dx}\, \sec(x) = \sec(x)\operatorname{tg}(x)$	$\dfrac{d}{dx}\, \cos(x) = -\operatorname{sen}(x)$
$\dfrac{d}{dx}\, \cot(x) = -\operatorname{cossec}^2(x)$	$\dfrac{d}{dx}\, \operatorname{cossec}(x) = -\operatorname{cossec}(x)\cot(x)$
Funções trigonométricas inversas	
$\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{d}{dx}\operatorname{tg}^{-1}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
$\dfrac{d}{dx}\sec^{-1}(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\dfrac{d}{dx}\cot^{-1}(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{d}{dx}\operatorname{cossec}^{-1}(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Funções hiperbólicas	
$\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}(x) = \cosh(x)$	$\dfrac{d}{dx}\operatorname{tgh}(x) = \operatorname{sech}^2(x)$
$\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech}(x) = -\operatorname{sech}(x)\operatorname{tgh}(x)$	$\dfrac{d}{dx}\cosh(x) = \operatorname{senh}(x)$
$\dfrac{d}{dx}\coth(x) = -\operatorname{cossech}^2(x)$	$\dfrac{d}{dx}\operatorname{cossech}(x) = -\operatorname{cossech}(x)\coth(x)$
Funções hiperbólicas inversas	
$\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{d}{dx}\operatorname{tgh}^{-1}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
$\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\dfrac{d}{dx}\coth^{-1}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{d}{dx}\operatorname{cossech}^{-1}(x) = -\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}}$

Tabela A.2: Tabela de Integrais

$\displaystyle\int u\,dv$	$\displaystyle = uv - \int v\,du$	
$\displaystyle\int u^n\,du$	$\displaystyle = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	$n \neq -1$
$\displaystyle\int \frac{du}{u}$	$= \ln\lvert u\rvert + C$	
$\displaystyle\int e^u\,du$	$= e^u + C$	
$\displaystyle\int a^u\,du$	$\displaystyle = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$	
$\displaystyle\int \ln(u)\,du$	$= u\big(\ln(u) - 1\big) + C$	
$\displaystyle\int \operatorname{sen}(u)\,du$	$= -\cos(u) + C$	
$\displaystyle\int \cos(u)\,du$	$= \operatorname{sen}(u) + C$	
$\displaystyle\int \sec^2(u)\,du$	$= \operatorname{tg}(u) + C$	
$\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2(u)\,du$	$= -\cot(u) + C$	
$\displaystyle\int \sec(u)\operatorname{tg}(u)\,du$	$= \sec(u) + C$	

$\int \operatorname{cossec}(u)\cot(u)\,du$	$= -\operatorname{cossec}(u) + C$
$\int \operatorname{tg}(u)\,du$	$= \ln\lvert\sec(u)\rvert + C$
$\int \cot(u)\,du$	$= \ln\lvert\operatorname{sen}(u)\rvert + C$
$\int \sec(u)\,du$	$= \ln\lvert\sec(u) + \operatorname{tg}(u)\rvert + C$
$\int \operatorname{cossec}(u)\,du$	$= \ln\lvert\operatorname{cossec}(u) - \cot(u)\rvert + C$
$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$	$= \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
$\int \frac{du}{a^2 + u^2}$	$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}}$	$= \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
$\int \frac{du}{a^2 - u^2}$	$= \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u+a}{u-a}\right\rvert + C$
$\int \frac{du}{u^2 - a^2}$	$= \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$
$\int u\operatorname{sen}(u)\,du$	$= \operatorname{sen}(u) - u\cos(u) + C$
$\int u\cos(u)\,du$	$= \cos(u) + u\operatorname{sen}(u) + C$

$$\int u^2 \operatorname{sen}(u)\, du = 2\cos(u) + 2u \operatorname{sen}(u) - u^2 \cos(u) + C$$

$$\int u^2 \cos(u)\, du = -2 \operatorname{sen}(u) + 2u \cos(u) + u^2 \operatorname{sen}(u) + C$$

$$\int u^n \operatorname{sen}(u)\, du = -u^n \cos(u) + n \int u^{n-1} \cos(u)\, du$$

$$\int u^n \cos(u)\, du = u^n \operatorname{sen}(u) - n \int u^{n-1} \operatorname{sen}(u)\, du$$

B

Referências e Recursos Online

B.1 Recursos Online . . . 392
B.2 Sequências Numéricas . . . 393
B.3 Séries Numéricas . . . 394
B.4 Séries de Taylor . . . 396
B.5 Séries de Fourier . . . 398
B.6 Equações Diferenciais Parciais . . . 399
B.7 Transformada de Fourier . . . 400

B.1 Recursos Online

Existem muitos recursos *online* que servem como apoio ao estudo de Matemática e Cálculo. Utilizar esses recursos é altamente recomendável, porém lembre-se que apenas assistir vídeos passivamente não é suficiente para aprender Matemática, da mesma forma que, assistir atletas olímpicos não nos torna atletas também.

Alguns recursos *online* que podem ser uteis:

- www.wolframalpha.com
  WolframAlpha é um mecanismo de conhecimento computacional que é capaz de fazer muitos cálculos.

◇ pt.khanacademy.org
A Khan Academy é uma ONG educacional criada e sustentada por Sal Khan. Com a missão de fornecer educação de alta qualidade para qualquer um, em qualquer lugar, oferece uma coleção grátis de vídeos de matemática, medicina e saúde, economia e finanças, física, química, biologia, ciência da computação, entre outras matérias.

◇ www.mathway.com/pt
A Mathway fornece aos alunos ferramentas para compreender e resolver problemas matemáticos. As resoluções são apresentadas passo a passo.

Nas seções desse capítulo indicamos alguns vídeos e atividades relacionados com os conteúdos de cada capítulo dessa apostila. Esses conteúdos podem ser muito úteis como auxilio no estudo de cada tópico. Note, porém, que a organização ou ordem dos tópicos varia de curso para curso. Algumas vezes notações também variam e em casos extremos definições distintas podem ser empregadas.

B.2 Sequências Numéricas

As principais referências para esse tópico são:

1) Stewart, Cálculo Vol. 2 [17] – Capítulo 11, Seção 11-1
2) Thomas, Cálculo Vol. 2 [20] – Capítulo 10, Seção 10-1

Aulas da disciplina de Cálculo 4 do CEFET-MG gravadas pelo professor J. L. Acebal:

1) Aula 1 - Motivação para Sequências
2) Aula 2 - Sequências e Definições
3) Aula 3 - Sequências: limites e propriedades (Parte 1)
4) Aula 3 - Sequências: limites e propriedades (Parte 2)

Aulas e exercícios do Khan Accademy:

1) Revisão sobre progressões
2) Sequências infinitas

Aulas da disciplina Cálculo IV para a Engenharia (MAT-2456) ministrada no segundo semestre de 2014 pelo Prof. Claudio Possani da USP: MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV.

1) Aula 1 - Sequências Numéricas I - Parte 1 de 4

2) Aula 1 - Sequências Numéricas I - Parte 2 de 4
3) Aula 1 - Sequências Numéricas I - Parte 3 de 4
4) Aula 1 - Sequências Numéricas I - Parte 4 de 4
5) Aula 2 - Sequências Numéricas II - Parte 1 de 3
6) Aula 2 - Sequências Numéricas II - Parte 2 de 3
7) Aula 2 - Sequências Numéricas II - Parte 3 de 3

B.3 Séries Numéricas

As principais referências para esse tópico são:

1) Stewart, Cálculo Vol. 2 [17] – Capítulo 11, Seções 11-2 até 11-7
2) Thomas, Cálculo Vol. 2 [20] – Capítulo 10, Seções 10-2 até 10-6

Aulas da disciplina de Cálculo 4 do CEFET-MG gravadas pelo professor J. L. Acebal:

1) Aula 4 - Sequências de Somas Parciais e Séries
2) Aula 5 - Séries importantes, Teste de Divergência
3) Aula 6 - Testes de Comparação
4) Aula 7 - Séries - Testes da Integral, da Razão e da Raiz
5) Aula 8 - Séries de Termos Positivos e Negativos - Convergência Absoluta e Convergência Condicional

Aulas e exercícios do Khan Accademy:

1) Revisão de séries
2) Séries geométricas finitas
3) Somas parciais
4) Séries geométricas infinitas
5) Desafio de noções básicas de série
6) Testes de convergência básica
7) Testes de comparação
8) Testes da razão e da série alternada
9) Como estimar séries infinitas

Aulas da disciplina Cálculo IV para a Engenharia (MAT-2456) ministrada no segundo semestre de 2014 pelo Prof. Claudio Possani da USP: MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV.

Séries numéricas:

1) Aula 2 - Séries Numéricas - Conceitos Básicos

Critérios de convergência:

1) Aula 3 - Critérios de Convergência - Parte 1 de 8
2) Aula 3 - Critérios de Convergência - Parte 2 de 8
3) Aula 3 - Critérios de Convergência - Parte 3 de 8
4) Aula 3 - Critérios de Convergência - Parte 4 de 8
5) Aula 4 - Critérios de Convergência - Parte 5 de 8
6) Aula 4 - Critérios de Convergência - Parte 6 de 8
7) Aula 4 - Critérios de Convergência - Parte 7 de 8
8) Aula 4 - Critérios de Convergência - Parte 8 de 8

Convergência absoluta e condicional:

1) Aula 5 - Convergência Condicional ou Absoluta I
2) Aula 5 - Convergência Condicional ou Absoluta II

Aulas do curso de Cálculo III (MA311) na Unicamp ministrado pela Professora Ketty A. de Rezende: Cursos Unicamp - Cálculo III

Sequências e séries Numéricas:

1) Séries Numéricas; Testes de Convergência - Parte 1
2) Séries Numéricas; Testes de Convergência - Parte 2
3) Testes de Convergência e das Séries Alternadas - Parte 1
4) Testes de Convergência e das Séries Alternadas - Parte 2

B.4 Séries de Taylor

As principais referências para esse tópico são:

1) Stewart, Cálculo Vol. 2 [17] – Capítulo 11, Seções 11-8 até 11-11
2) Thomas, Cálculo Vol. 2 [20] – Capítulo 10, Seções 10-7 até 10-10

Aulas da disciplina de Cálculo 4 do CEFET-MG gravadas pelo professor J. L. Acebal:

1) Aula 9 - Séries de Potências - Raio de Convergência
2) Aula 10 - Séries de Potências - Propriedades Diferenciais e Algébricas
3) Aula 11 - Séries de Potências - Coeficientes de Taylor
4) Aula 12 - Séries de Potências - Polinômio de Taylor, resto de Taylor, erros de aproximação, linearização e convergência
5) Aula 13 - Resolução de EDOs por Séries Potências

Aulas e exercícios do Khan Accademy:

1) Introdução à série de potências
2) Introdução aos polinômios de Taylor e Maclaurin
3) Série de Maclaurin de $\text{sen}(x)$, $\cos(x)$, e e^x
4) Representação de função de série de potência
5) Desafios de séries

Aulas da disciplina Cálculo IV para a Engenharia (MAT-2456) ministrada no segundo semestre de 2014 pelo Prof. Claudio Possani da USP: MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV

Séries de Potências:

1) Aula 5 - Séries de Potências - Introdução I
2) Aula 6 - Séries de Potências - Introdução II
3) Aula 6 - Séries de Potências - Parte 1 de 5
4) Aula 6 - Séries de Potências - Parte 2 de 5 (Continua depois da Aula 7)
5) Aula 7 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Potências - Parte 1 de 7
6) Aula 7 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Potências - Parte 2 de 7
7) Aula 7 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Potências - Parte 3 de 7
8) Aula 7 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Potências - Parte 4 de 7

9) Aula 7 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Potências - Parte 5 de 7
10) Aula 7 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Potências - Parte 6 de 7
11) Aula 7 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Potências - Parte 7 de 7
12) Aula 8 - Séries de Potências - Parte 3 de 5 (Continuação da Aula 6)
13) Aula 8 - Séries de Potências - Parte 4 de 5
14) Aula 8 - Séries de Potências - Parte 5 de 5

Raio de convergência, derivação e integração termo-a-termo, série de Taylor:

1) Aula 9 - Séries de Taylor - Parte 1 de 7
2) Aula 9 - Séries de Taylor - Parte 2 de 7
3) Aula 9 - Séries de Taylor - Parte 3 de 7
4) Aula 9 - Séries de Taylor - Parte 4 de 7
5) Aula 10 - Séries de Taylor - Parte 5 de 7
6) Aula 10 - Séries de Taylor - Parte 6 de 7
7) Aula 10 - Séries de Taylor - Parte 7 de 7

Revisão e Aprofundamento:

1) Aula 13 - Exercícios de Séries de Potências
2) Aula 14 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Taylor - Parte 1 de 4
3) Aula 14 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Taylor - Parte 2 de 4
4) Aula 14 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Taylor - Parte 3 de 4
5) Aula 14 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Taylor - Parte 4 de 4

Aulas do curso de Cálculo III (MA311) na Unicamp ministrado pela Professora Ketty A. de Rezende: Cursos Unicamp - Cálculo III

Séries de Potências e de Taylor:

1) Séries de Potências - Parte 1
2) Séries de Potências - Parte 2
3) Série de Potências em Ponto Ordinário - Parte 1
4) Série de Potências em Ponto Ordinário - Parte 2

B.5 Séries de Fourier

As principais referências para esse tópico são:

1) Boyce, Equações Diferenciais Elementares [3] – Capítulo 10, Seções 10-2 até 10-4

Aulas da disciplina de Cálculo 4 do CEFET-MG gravadas pelo professor J. L. Acebal:

1) Aula 14 - Série de Fourier e Propriedades
2) Aula 15 - Série de Fourier e Espaços Vetoriais de Funções
3) Aula 16 - Série de Fourier - Teorema de Fourier e Simetrias

Aulas do Khan Accademy:

1) Engenharia elétrica - Unidade: Sinais e sistemas

Note que o Khan Academy insere as Séries de Fourier dentro do curso de Engenharia Elétrica, o que mostra sua aplicabilidade. Porém, o enfoque das aulas pode ser diferente do Cálculo 4. Além disso, a notação pode diferir em alguns pontos, por exemplo, o número imaginário na Matemática é denotado por i e na Engenharia Elétrica por j. Isso acontece pois o a Engenharia Elétrica usa i para representar a corrente elétrica.

Aulas da disciplina Cálculo IV para a Engenharia (MAT-2456) ministrada no segundo semestre de 2014 pelo Prof. Claudio Possani da USP: MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV

Séries de Fourier. Convergência pontual:

1) Aula 11 - Séries de Fourier - Parte 1 de 8
2) Aula 11 - Séries de Fourier - Parte 2 de 8
3) Aula 11 - Séries de Fourier - Parte 3 de 8
4) Aula 12 - Séries de Fourier - Parte 4 de 8
5) Aula 12 - Séries de Fourier - Parte 5 de 8
6) Aula 12 - Séries de Fourier - Parte 6 de 8
7) Aula 13 - Séries de Fourier - Parte 7 de 8
8) Aula 13 - Séries de Fourier - Parte 8 de 8

Revisão e Aprofundamento:

1) Aula 15 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Fourier - Parte 1 de 4
2) Aula 15 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Fourier - Parte 2 de 4
3) Aula 15 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Fourier - Parte 3 de 4
4) Aula 15 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Fourier - Parte 4 de 4

Aulas do curso de Cálculo III (MA311) na Unicamp ministrado pela Professora Ketty A. de Rezende: Cursos Unicamp - Cálculo III

Séries de Fourier:

1) Séries de Fourier - Parte 1
2) Séries de Fourier - Parte 2
3) Funções Pares e Ímpares; Extensão Periódica - Parte 1
4) Funções Pares e Ímpares; Extensão Periódica - Parte 2

B.6 Equações Diferenciais Parciais

As principais referências para esse tópico são:

1) Boyce, Equações Diferenciais Elementares [3] – Capítulo 10 – Seções 10-1, 10-5 até 10-8

Aulas da disciplina de Cálculo 4 do CEFET-MG gravadas pelo professor J. L. Acebal:

1) Aula 17 - Problemas de Valor de Contorno - Equações Diferenciais Parciais - Difusão
2) Aula 18 - PVC EDP Propagação Unidimensional de Onda
3) Aula 19 - Problema de valor de Contorno - Equação de Difusão - Condições de Contorno de Isolamento
4) Aula 20 - Equações Diferenciais Parciais Problema de Valor de Contorno não Homogêneo

Aulas do curso de Cálculo III (MA311) na Unicamp ministrado pela Professora Ketty A. de Rezende: Cursos Unicamp - Cálculo III.

Equações Diferencias Parciais:

1) Separação de Variáveis; Equação do Calor - Parte 1
2) Separação de Variáveis; Equação do Calor - Parte 2
3) Equação da Onda e de Laplace - Parte 1
4) Equação da Onda e de Laplace - Parte 2

B.7 Transformada de Fourier

As principais referências para esse tópico são:

1) Introdução aos números complexos do Prof. Reginaldo
2) Apostila sobre Transformada de Fourier do Prof. Reginaldo

Aulas da disciplina de Cálculo 4 do CEFET-MG gravadas pelo professor J. L. Acebal:

1) Aula21 - Uma rota de compreensão das Transformadas de Fourier a partir da Série de Fourier
2) Aula22 - Transformadas de Fourier: tabela, propriedades, teorema de existência
3) Aula23 - Transformadas de Fourier de Funções Especiais e Propriedades
4) Aula24 - Transformadas de Fourier: Aplicações

Respostas

Capítulo 2

Seção 2.2

2)

$$a_1 = \left.\frac{1-n}{n^2}\right|_{n=1} = \frac{1-1}{1^2} = 0$$

$$a_2 = \left.\frac{1-n}{n^2}\right|_{n=2} = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \left.\frac{1-n}{n^2}\right|_{n=3} = \frac{1-3}{3^2} = -\frac{2}{9}$$

$$a_4 = \left.\frac{1-n}{n^2}\right|_{n=4} = \frac{1-4}{4^2} = -\frac{3}{16}$$

4)

$$a_1 = -2$$

$$a_2 = \frac{1a_1}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{2+1} = \frac{2(-1)}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{3a_3}{3+1} = \frac{3(-2/3)}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$a_5 = \frac{4a_4}{4+1} = \frac{4(-1/2)}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$a_6 = \frac{5a_5}{5+1} = \frac{5(-2/5)}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$a_7 = \frac{6a_6}{6+1} = \frac{6(-1/3)}{7} = -\frac{2}{7}$$

$$a_8 = \frac{7a_7}{7+1} = \frac{7(-2/7)}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$a_9 = \frac{8a_8}{8+1} = \frac{8(-1/4)}{9} = -\frac{1}{9}$$

$$a_{10} = \frac{9a_9}{9+1} = \frac{9(-1/9)}{10} = -\frac{1}{10}$$

6)

$$a_n = n^2 - 1$$

Verificando

$$a_1 = (n^2-1)\Big|_{n=1} = 1^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$$

$$a_2 = (n^2-1)\Big|_{n=2} = 2^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

$$a_3 = (n^2-1)\Big|_{n=3} = 3^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$$

$$a_4 = (n^2-1)\Big|_{n=4} = 4^2 - 1 = 4^2 - 1 = 15$$

$$a_5 = (n^2-1)\Big|_{n=5} = 5^2 - 1 = 5^2 - 1 = 24$$

Obs: sem a informação de que a sequência é formada por "Quadrados dos inteiros positivos menos 1", não existe uma solução única para o problema. A expressão polinomial a seguir é outra solução possível para gerar os valores listados

$$a_n = -\frac{1}{3}n^4 + \frac{10}{3}n^3 - \frac{32}{3}n^2 + \frac{50}{3}n - 9$$

8) Os termos dessa sequência assumem os valores 0 e 2

alternadamente, portanto ela não converge.

9) Iniciamos calculando o limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim 1 - \lim \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$$

Tomando os termos pares e impares separadamente temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_{2n} &= \lim_{n\to\infty}\left[(-1)^{2n}\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)\\ &= \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right) = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left[(-1)^{2n+1}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty} -\left(1-\frac{1}{2n}\right)\\ &= \lim_{k\to\infty} -\left(1-\frac{1}{k}\right) = -1\end{aligned}$$

Como cada subsequência converge para um valor diferente e o limite é único quando existe concluímos que a sequência diverge.

10) O método de Newton é usado para encontrar os zeros de funções reais, $f(x) = 0$. Se o valor inicial x_0 estiver próximo o suficiente da raiz temos a garantia de convergência do método.

a) A função usada nesse caso é $f(x) = x^2 - 2$ que possui raízes em $x = \pm\sqrt{2}$, portanto se a sequência convergir deve ser para um desses valores. Calculando os primeiros termos obtemos

n	x_n
0	1,000 000 000
1	1,500 000 000
2	1,416 666 667
3	1,414 215 686
4	1,414 213 562
$\sqrt{2}$	1,414 213 562

Observamos que a sequência converge para 1,414 213 562 $\approx \sqrt{2}$.

b) A função usada nesse caso é $f(x) = \operatorname{tg}(x) - 1$ que possui raízes em $x = \pi/4 + 2\pi k$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$, portanto se a sequência convergir deve ser para um desses valores.

n	x_n
0	1,000 000 000
1	0,837 277 868
2	0,788 180 293
3	0,785 405 918
4	0,785 398 163
$\pi/4$	0,785 398 163

A sequência converge para 0,785 398 1635 $\approx \pi/4$

c) A função usada nesse caso é $f(x) = e^x$ que não possui raízes, portanto a série não pode convergir. A sequência diverge, assumindo os valores
$1{,}0, -1, -2, -3, -4, -5, \ldots$

11) a) 2

b) 1

c) -1

d) Diverge para menos infinito

e) -5

f) 0

g) Diverge para mais infinito

h) Diverge para mais infinito

i) Diverge

j) Diverge

k) $1/2$

l) 6

13) a) 8

b) 2

c) 4

d) 4

e) 5

f) 9

g) $\sqrt{2}$

h) $1+\sqrt{5}/2$

Seção 2.4

2) Para determinar que a sequência é crescente vamos verificar que $a_n < a_{n+1}$

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1}\\ \frac{(2n+3)!}{(n+1)!} &< \frac{(2(n+1)+3)!}{((n+1)+1)!}\\ \frac{(2n+3)!}{(n+1)!} &< \frac{(2n+5)!}{(n+2)!}\\ \frac{(n+2)!}{(n+1)!} &< \frac{(2n+5)!}{(2n+3)!}\\ \frac{(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} &< \frac{(2n+5)(2n+4)(2n+3)!}{(2n+3)!}\\ (n+2) &< (2n+5)(2n+4)\\ n+2 &< 4n^2+8n+10n+20\\ n+2 &< 4n^2+18n+20\\ 0 &< 4n^2+17n+18\end{aligned}$$

Como todas esses desigualdades são equivalentes ($\Leftrightarrow$) concluímos que a sequência é crescente e portanto monótona.
Para verificar se ela é limitada vamos desenvolver a expressão do termo geral

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2n+3)!}{(n+1)!}\\ &= \frac{(2n+3)(2n+2)\cdots(n+2)(n+1)!}{(n+1)!}\end{aligned}$$

$$= (2n+3)(2n+2)\cdots(n+2)$$

Observamos que o termo geral não é limitado.

Seção 2.5

1) Tentando calcular o limite temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim \frac{n+(-1)^n}{n}\\ &= \lim \left[\frac{n}{n} + \frac{(-1)^n}{n}\right]\\ &= \lim \left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right]\end{aligned}$$

A sequência constante igual a 1 converge, temos que verificar se a sequência ${(-1)^n}/{n}$ também converge. Observe que para todo n temos

$$-\frac{1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}$$

Como $-{1}/{n}$ e ${1}/{n}$ convergem para zero, pelo teorema do confronto para sequências temos que ${(-1)^n}/{n}$ também converge para zero. Podemos, então, escrever

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim \left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right]\\ &= \lim 1 + \lim \frac{(-1)^n}{n}\\ &= 1 + 0 = 1\end{aligned}$$

Capítulo 3

Seção 3.1

3) Observamos que os termos da série são

$$a_n = \frac{9}{100^n} = \frac{9}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}$$

ou seja, essa é uma série geométrica com

$$a = \frac{9}{100} \qquad \text{e} \qquad r = \frac{9}{100}$$

a fórmula para as somas parciais de uma série geométrica é

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

substituindo os valores de a e r temos

$$S_n = \frac{\frac{9}{100}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{100}}$$

calculando o limite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim \frac{\frac{9}{100}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{100}}\\ &= \frac{\frac{9}{100}}{\frac{100-1}{100}} = \frac{\frac{9}{100}}{\frac{99}{100}}\\ &= \frac{9}{100}\,\frac{100}{99} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}\end{aligned}$$

5) Denotando a série por S temos

$$\begin{aligned}S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}\\ &= \frac{(-1)^0}{5^0} + \frac{(-1)^1}{5^1} + \frac{(-1)^2}{5^2} + \cdots\\ &= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots\end{aligned}$$

Observamos que essa série é uma série geométrica, com $|r| = {1}/{5} < 1$, podemos então usar a formula da soma, porém precisamos primeiro corrigir as potências e índices

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1}$$

Temos $\alpha = 1$ e $r = -{1}/{5}$ e portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-(-{1}/{5})} = \frac{5}{6}$$

7) Expandindo os temos das somas somas parciais percebemos que esse é uma série telescópica

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots\\ &\quad + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Calculando o limite temos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

portanto a série converge para 1.

Seção 3.3

1) Aplicando o teste da divergência temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}}{x^{-1}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2} = \infty\end{aligned}$$

Como o termo geral não vai para zero a série diverge.

2) Calculando o limite do dos termos da série temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)} &= \lim\frac{n^2+n}{n^2+5n+6}\\ &= \lim\frac{2n+1}{2n+5}\\ &= \lim\frac{2}{2} = 1\end{aligned}$$

em cada passo foi identificado que o limite gerava uma indeterminação do tipo ∞/∞ e usado o método de L'Hôpital. Como o limite do termo geral não é zero a série diverge.

3) a) $2+\sqrt{2}$
b) Diverge
c) 1
d) Diverge
e) Diverge
f) $5/6$
g) e^2/e^2-1
h) Diverge
i) $2/9$
j) $x/x-1$
k) $3/2$
l) Diverge
m) Diverge
n) Diverge
o) 4
p) Diverge
q) Diverge
r) Diverge
s) $\pi/\pi-e$
t) Diverge

Seção 3.4

1) Podemos aplicar o teste da integral pois a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ é positiva, contínua e decrescente para $x \geq 1$. Calculando a integral temos

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_b^1\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1\end{aligned}$$

Como a integral converge a série também converge. Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449 \neq 1$$

2) A função $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ é positiva e contínua para $x \geq 1$. Precisamos verificar se ela é decrescente, para isso calculamos sua derivada

$$f'(x) = \frac{1(x^2+4) - x(2x)}{(x^2+4)^4} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^4}$$

Verificamos que $f'(x) < 0$, e portanto f é decrescente, para todo $x > 2$, note, porém, que essa propriedade não vale para $x = 2$. Como precisamos de um número inteiro N a partir do qual a função seja decrescente escolhemos $N = 3$.
Podemos, agora, aplicar o teste da integral. Primeiro calculamos a primitiva de f usando a substituição

$$u = x^2+4 \qquad \text{e} \qquad du = 2xdx$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{x^2+4}\,dx &= \int\frac{1}{2u}\,du\\ &= \frac{1}{2}\ln u + C\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C\end{aligned}$$

Calculando a integral imprópria temos

$$\begin{aligned}\int_3^\infty\frac{x}{x^2+4}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_3^b\frac{x}{x^2+4}\,dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+4)\right)\Big|_b^3\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{\ln(b^2+4)-\ln(3^2+4)}{2}\right)\\ &= \infty\end{aligned}$$

Como a integral diverge a série também diverge.

4) Esse é uma série convergente pois é uma série geométrica com $r = e^{-1} \approx 0{,}3679$. Sua soma é

$$S = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{e-1} \approx 0{,}5820$$

Alternativamente podemos usar o teste da integral com função $f(x) = e^{-x}$

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}\,dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_b^1\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+e^{1}\right)\\ &= e \approx 2{,}7183\end{aligned}$$

8) Sabemos que a série é convergente e que a função $f(x) = x^{-1,1}$ satisfaz as condições do teste a integral. Nesse caso o erro, ou resto, é limitado por

$$R_n = S - s_n < \int_n^{\infty}\frac{1}{x^{1,1}}dx$$

Calculando a integral temos

$$\begin{aligned}\int_n^{\infty}\frac{1}{x^{1,1}}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_n^b\frac{1}{x^{1,1}}dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{10}{x^{0,1}}\right)\Big|_b^n\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{10}{b^{0,1}}+\frac{10}{n^{0,1}}\right)\\ &= \frac{10}{n^{0,1}}\end{aligned}$$

Impondo a condição

$$\frac{10}{n^{0,1}} < 0{,}000\,01$$

$$n^{0,1} > \frac{10}{0{,}000\,01} = 1\,000\,000$$

$$n > 1\,000\,000^{10} = \left(10^6\right)^{10} = 10^{60}$$

Se um computador somasse um termo a cada nanosegundo (10^{-9} s) ele levaria $2{,}3\cdot 10^{33}$ vezes a idade do universo para concluir essa conta.

Seção 3.5

1) Sabemos que $|\cos x| \le 1$, portanto

$$0 \ \le\ \cos^2 x \ \le\ 1$$

como $n^{3/2}$ é sempre positivo para $n \ge 1$ temos que

$$0 \ \le\ \frac{\cos^2}{n^{3/2}} \ \le\ \frac{1}{n^{3/2}}$$

Analisando a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

percebemos que é uma série p com $p = 3/2 > 1$ e portanto é convergente. Concluímos, assim, que a série original é convergente.

2) Analisando o comportamento dos termos da série para n grande percebemos que eles se comportam como

$$b_n = \sqrt{\frac{\alpha}{n^3}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{n^{3/2}}$$

onde α é uma constante. A série com termos b_n é uma série p com $p = 3/2 > 1$ e portanto convergente. Vamos tentar mostrar que $a_n \le b_n$, o que garantiria a convergência da série original.

$$\begin{aligned} a_n &\le b_n\\ \sqrt{\frac{n+4}{n^4+4}} &\le \sqrt{\frac{\alpha}{n^3}}\\ \frac{n+4}{n^4+4} &\le \frac{\alpha}{n^3}\\ \frac{n^3(n+4)}{n^4+4} &\le \alpha\\ \frac{n^4+4n^3}{n^4+4} &\le \alpha\end{aligned}$$

Temos que verificar se a função

$$f(x) = \frac{x^4+4x^3}{x^4+4}$$

possui limitante superior para $x \ge 1$. Se esse limitante existir escolhemos um valor qualquer maior do que ele para α e teremos demonstrado que $a_n \le b_n$.
Primeiro observamos que a função é contínua para todo x e que $f(0) = 0$ então calculamos o limite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+4x^3}{x^4+4} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+4/x}{1+4/x^4} = 1$$

Como f é contínua para todo $x \ge 0$, $f(0) = 0$ e tem assintota horizontal $y = 1$, concluímos que ela não pode ir para infinito e portanto tem um limitante superior, o que comprova a desigualdade $a_n \le b_n$. Portanto, pelo teste da comparação concluímos que a série converge.

Uma **solução alternativa** é *adivinhar* que a comparação deve ser feita com a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5}}{n^{3/2}}$$

A demonstração de que a_n é menor do que b_n é feita pelo desenvolvimento

$$n^3 \le n^4$$

$$\begin{aligned}
4n^3 &\le 4n^4 \\
n^4 + 4n^3 &\le 5n^4 \\
n^4 + 4n^3 &\le 5n^4 + 20 = 5(n^4+4) \\
\frac{n^4+4n^3}{n^4+4} &\le 5 \\
\frac{(n+4)n^3}{n^4+4} &\le 5 \\
\frac{n+4}{n^4+4} &\le \frac{5}{n^3} \\
\frac{n+4}{n^4+4} &\le \frac{5}{n^3} \\
\sqrt{\frac{n+4}{n^4+4}} &\le \sqrt{\frac{5}{n^3}}
\end{aligned}$$

Com a desigualdade demonstrada podemos concluir que a série converge.

3) Como $\sum \frac{1}{3^n}$ é convergente e

$$\frac{1}{n+3^n} < \frac{1}{3^n}$$

a série converge pelo teste da comparação.

5) A série harmônica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente, pois é uma série p com $p = 1$. Os termos da série original e da série harmônica são sempre positivos para $n \ge 2$. Aplicando o teste da comparação no limite , temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1/x} \\
&= \lim_{x\to\infty} x = \infty
\end{aligned}$$

Concluímos que a série diverge.
Observe que $n = 1$ não pode fazer parte da série pois $\ln 1 = 0$.

6) Os termos da série são calculados por uma função racional cuja maior potência de n no numerador é 3 e a maior no denominador é 5, ou seja, para n suficientemente grande a_n deve se comportar como

$$f(x) = \frac{x^3}{x^5} = \frac{1}{x^2}$$

A série com termos $b_n = f(n)$ é uma série p com $p = 2 > 1$ e portanto convergente. Além disso, a_n e b_n são maiores do que zero para todo n suficientemente grande. Usando o teste da comparação no limite temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n^3-3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}}{\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-3n}{(n-2)(n^2+5)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-3n}{n^3-2n^2+5n-10} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-3x}{x^3-2x^2+5x-10} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{15x^2-3}{3x^2-4x+5} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{30x}{6x-4} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{30}{6} = 5
\end{aligned}$$

Portanto a série original converge.

Seção 3.6

1) Pelo teste da razão

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{3} < 1$$

portanto a série converge.

Seção 3.10

3) a)

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right]^n$

Capítulo 4

Seção 4.1

1) a) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)|x|\right] = |x|$$

portanto $R = 1$. Quando $x = \pm 1$, a série diverge pelo teste do n-ésimo termo, pois $|a_n| = n$. Assim o intervalo de convergência é $(-1, 1)$.

b) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{1+{}^1\!/_n}}|x| = |x|$$

portanto $R = 1$. Quando $x = 1$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

converge pelo teste da série alternada. Quando $x = -1$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

diverge pois é uma série p com $p = {}^1\!/_3$. Assim o intervalo de convergência é $(-1, 1]$.

c) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}|x|\right) = |x|$$

portanto $R = 1$. Quando $x = 1$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$

diverge pelo teste da comparação com a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$$

Quando $x = -1$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$$

converge pelo teste da série alternada. Assim o intervalo de convergência é $[-1, 1)$.

d) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^2|x|\right] = |x|$$

portanto $R = 1$. Quando $x = 1$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

converge pelo teste da série alternada. Quando $x = -1$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$

converge pois é uma série p com $p = 2$. Assim o intervalo de convergência é $[-1, 1]$.

e) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$$

portanto $R = \infty$ e o intervalo de convergência é $(-\infty, \infty)$.

f) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da raiz para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} n|x| = \infty$$

portanto $R = 0$ e o intervalo de convergência é apenas o ponto zero, $\{0\} = [0, 0]$.

g) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{|x|}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right] = \frac{|x|}{2}$$

portanto $R = 2$. Quando $x = \pm 2$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n n^2$$

diverge pelo teste do n-ésimo termo. Assim o intervalo de convergência é $(-2, 2)$.

h) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{10|x|}{(1+{}^1\!/_n)^3} = 10|x|$$

portanto $R = 1/10$. Quando $x = -1/10$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$$

converge pelo teste da série alternada. Quando $x = 1/10$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

converge pois é uma série p com $p = 3$. Assim o intervalo de convergência é $[-1, 1]$.

i) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left[-3x \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3/2}\right] = 3|x|$$

portanto $R = 1/3$. Quando $x = 1/3$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$$

converge pelo teste da série alternada. Quando $x = -1/3$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

converge pois é uma série p com $p = 3/2$. Assim o intervalo de convergência é $[-1/3, 1/3]$.

j) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{3} \left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{|x|}{3}$$

portanto $R = 3$. Quando $x = 3$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge pois é a série harmônica. Quando $x = -3$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge pois é uma série harmônica alternada. Assim o intervalo de convergência é $[-3, 3)$.

k) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \frac{|x|}{4}$$

portanto $R = 4$. Quando $x = -4$ a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

diverge pelo teste da comparação com a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Quando $x = 4$ a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

converge pelo teste da série alternada. Assim o intervalo de convergência é $(-4, 4]$.

l) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0$$

portanto $R = \infty$ e o intervalo de convergência é $(-\infty, \infty)$.

m) Centro da série $a = 2$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= |x-2| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} \\ &= |x-2|\end{aligned}$$

portanto $R = 1$. Quando $x = 1$ a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

converge pelo teste da série alternada. Quando $x = 3$ a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

converge pela comparação com a série p com $p = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Assim o intervalo de convergência é $[1, 3]$.

n) Centro da série $a = 3$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-3| \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = |x-3|$$

portanto $R = 1$. Quando $x = 2$ a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

diverge pela comparação no limite com

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ou pelo teste da integral. Quando $x = 4$ a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

converge pelo teste da série alternada. Assim o intervalo de convergência é $(2, 4]$.

o) Centro da série $a = -4$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3|x+4|\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 3|x+4|$$

portanto $R = 1/3$. Quando $x = -\frac{13}{3}$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

converge pelo teste da série alternada. Quando $x = -\frac{11}{3}$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverge pois é uma série p com $p = 1/2$. Portanto o intervalo de convergência é $[-13/3, -11/3)$.

p) Centro da série $a = -1$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+1|(n+1)}{4n} = \frac{|x+1|}{4}$$

portanto $R = 4$. Quando $x = -5$ ou $x = 3$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n$$

diverge pelo teste do n-ésimo termo. Assim o intervalo de convergência é $(-5, 3)$.

q) Centro da série $a = 2$. Usando o teste da raiz para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-2|}{n} = 0$$

portanto $R = \infty$ e o intervalo de convergência é $(-\infty, \infty)$.

r) Centro da série $a = 1/2$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{|2x-1|}{5} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \\ &= \frac{|2x-1|}{5} \end{aligned}$$

portanto $R = 5/2$. Quando $x = -2$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

converge pelo teste da série alternada. Quando $x = 3$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverge pois é uma série p com $p = 1/2$. Assim o intervalo de convergência é $[-2, 3)$.

s) Centro da série a. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{|x-a|}{b} = \frac{|x-a|}{b}$$

portanto $R = b$. Quando $x = a - b$ ou $x = a + b$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

diverge pelo teste do n-ésimo termo. Assim o intervalo de convergência é $(a - b, a + b)$.

t) Centro da série a. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{b|x-a| \ln n}{\ln(n+1)} = b|x-a|$$

portanto $R = 1/b$. Quando $x = a + 1/b$ a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

diverge pelo teste da comparação com a série p com $p = 1$. Quando $x = a - 1/b$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

converge pelo teste da série alternada. Assim o intervalo de convergência é $[a - 1/b, a + 1/b)$.

u) Centro da série $a = 1/2$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|2n-1| = \infty$$

portanto $R = 0$ e o intervalo de convergência é $\{1/2\} = [1/2, 1/2]$.

v) Reescrevendo o termo da série temos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \\ &= \frac{n^2 x^n}{2^n} \\ &= \frac{n x^n}{2^n (n-1)!} \end{aligned}$$

Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}\frac{|x|}{2} = 0$$

portanto $R = \infty$ e o intervalo de convergência é $(-\infty, \infty)$.

w) Centro da série $a = {}^4/_5$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}|5x-4|\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \\ &= |5x-4|\end{aligned}$$

portanto $R = {}^1/_5$. Quando $x = {}^3/_5$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$$

converge pelo teste da série alternada. Quando $x = 1$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

converge pois é uma série p com $p = 3$. Assim o intervalo de convergência é $[{}^3/_5, 1]$.

x) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} x^2\frac{n(\ln n)^2}{(n+1)[\ln(n+1)]^2} = x^2$$

portanto $R = 1$. Quando $x = \pm 1$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$$

converge pelo teste a integral. Assim o intervalo de convergência é $[-1, 1]$.

y) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{2n+1} = 0$$

portanto $R = \infty$ e o intervalo de convergência é $(-\infty, \infty)$.

z) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|x|}{2n+1} = \frac{|x|}{2}$$

portanto $R = 2$. Quando $x = \pm 2$ a série

$$\begin{aligned}|a_n| &= \frac{n!\,2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)} \\ &= \frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n)2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)} \\ &= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)} > 1\end{aligned}$$

diverge pelo teste do n-ésimo termo. Assim o intervalo de convergência é $(-2, 2)$.

Seção 4.3

1) a) Calculando as derivadas

$$\begin{aligned}f^{(0)}(x) &= (1-x)^{-2} \\ f^{(1)}(x) &= 2(1-x)^{-3} \\ f^{(2)}(x) &= 2\cdot 3(1-x)^{-4} \\ f^{(3)}(x) &= 2\cdot 3\cdot 4(1-x)^{-5} \\ f^{(n)}(x) &= (n+1)!(1-x)^{-n-2}\end{aligned}$$

Avaliando as derivadas em zero

$$\begin{aligned}f^{(0)}(0) &= 1 \\ f^{(1)}(0) &= 2! \\ f^{(2)}(0) &= 3! \\ f^{(3)}(0) &= 4! \\ f^{(n)}(0) &= (n+1)!\end{aligned}$$

Série de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)!x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(|x|\frac{n+2}{n+1}\right) = |x|$$

portanto $R = 1$.

b) Calculando as derivadas

$$\begin{aligned}f^{(0)}(x) &= \ln(1+x) \\ f^{(1)}(x) &= (1+x)^{-1} \\ f^{(2)}(x) &= -(1+x)^{-2} \\ f^{(3)}(x) &= 2(1+x)^{-3} \\ f^{(4)}(x) &= -2\cdot 3(1+x)^{-3} \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}\end{aligned}$$

Avaliando as derivadas em zero

$$\begin{aligned}f^{(0)}(0) &= 0 \\ f^{(1)}(0) &= 1 \\ f^{(2)}(0) &= -1 \\ f^{(3)}(0) &= 2 \\ f^{(4)}(0) &= -6\end{aligned}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Série de Maclaurin

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{(n-1)}(n-1)!\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \end{aligned}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|}{1+{}^1\!/_n}\right) = |x|$$

portanto $R = 1$.

c) Calculando as derivadas

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \operatorname{sen}(\pi x) \\ f^{(1)}(x) &= \pi\cos(\pi x) \\ f^{(2)}(x) &= -\pi^2\operatorname{sen}(\pi x) \\ f^{(3)}(x) &= -\pi^3\cos(\pi x) \end{aligned}$$

Avaliando as derivadas em zero

$$\begin{aligned} f^{(0)}(0) &= 0 \\ f^{(1)}(0) &= \pi \\ f^{(2)}(0) &= 0 \\ f^{(3)}(0) &= -\pi^3 \end{aligned}$$

Série de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi^2x^2}{(2n+3)(2n+2)}\right) = 0$$

portanto $R = \infty$.

d) Calculando as derivadas

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= e^{-2x} \\ f^{(1)}(x) &= -2e^{-2x} \\ f^{(2)}(x) &= 4e^{-2x} \\ f^{(3)}(x) &= -8e^{-2x} \\ f^{(4)}(x) &= 16e^{-2x} \end{aligned}$$

Avaliando as derivadas em zero

$$\begin{aligned} f^{(0)}(0) &= 1 \\ f^{(1)}(0) &= -2 \\ f^{(2)}(0) &= 4 \\ f^{(3)}(0) &= -8 \\ f^{(n)}(0) &= 16 \end{aligned}$$

Série de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}x^n$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2|x|}{n+1}\right) = 0$$

portanto $R = \infty$.

e) Calculando as derivadas

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= 2^x \\ f^{(1)}(x) &= 2^x(\ln 2) \\ f^{(2)}(x) &= 2^x(\ln 2)^2 \\ f^{(3)}(x) &= 2^x(\ln 2)^3 \\ f^{(n)}(x) &= 2^x(\ln 2)^n \end{aligned}$$

Avaliando as derivadas em zero

$$\begin{aligned} f^{(0)}(0) &= 1 \\ f^{(1)}(0) &= \ln 2 \\ f^{(2)}(0) &= (\ln 2)^2 \\ f^{(3)}(0) &= (\ln 2)^3 \\ f^{(n)}(0) &= (\ln 2)^n \end{aligned}$$

Série de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\ln 2)^n\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{n!}x^n$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\ln 2)|x|}{n+1}\right) = 0$$

portanto $R = \infty$.

f) Calculando as derivadas

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x\cos(x) \\ f^{(1)}(x) &= -x\operatorname{sen}x + \cos x \\ f^{(2)}(x) &= -x\cos x - 2\operatorname{sen}x \\ f^{(3)}(x) &= x\operatorname{sen}x - 3\cos x \\ f^{(4)}(x) &= x\cos x + 4\operatorname{sen}x \\ f^{(5)}(x) &= -x\operatorname{sen}x + 5\cos x \\ f^{(6)}(x) &= -x\cos x - 6\operatorname{sen}x \\ f^{(7)}(x) &= x\operatorname{sen}x - 7\cos x \end{aligned}$$

Avaliando as derivadas em zero

$$f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(0) = 1$$
$$f^{(2)}(0) = 0$$
$$f^{(3)}(0) = -3$$
$$f^{(4)}(0) = 0$$
$$f^{(5)}(0) = 5$$
$$f^{(6)}(0) = 0$$
$$f^{(7)}(0) = -7$$

Série de Maclaurin

$$f(x)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}\right) = 0$$

portanto $R = \infty$.

g) Calculando as derivadas

$$f^{(0)}(x) = \text{senh}(x)$$
$$f^{(1)}(x) = \cosh(x)$$
$$f^{(2)}(x) = \text{senh}(x)$$
$$f^{(3)}(x) = \cosh(x)$$

Avaliando as derivadas em zero

$$f^{(0)}(0) = 0$$
$$f^{(1)}(0) = 1$$
$$f^{(2)}(0) = 0$$
$$f^{(3)}(0) = 1$$
$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ 1 & n \text{ impar} \end{cases}$$

Série de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{(3n+3)(2n+2)}\right) = 0$$

portanto $R = \infty$.

h) Calculando as derivadas

$$f^{(0)}(x) = \cosh(x)$$
$$f^{(1)}(x) = \text{senh}(x)$$
$$f^{(2)}(x) = \cosh(x)$$
$$f^{(3)}(x) = \text{senh}(x)$$

Avaliando as derivadas em zero

$$f^{(0)}(0) = 1$$
$$f^{(1)}(0) = 0$$
$$f^{(2)}(0) = 1$$
$$f^{(3)}(0) = 0$$
$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$$

Série de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}\right) = 0$$

portanto $R = \infty$.

2) a) Calculando as derivadas no centro da série

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x^4 - 3x^2 + 1 & f^{(0)}(1) &= -1 \\ f^{(1)}(x) &= 4x^3 - 6x & f^{(1)}(1) &= -2 \\ f^{(2)}(x) &= 12x^2 - 6 & f^{(2)}(1) &= 6 \\ f^{(3)}(x) &= 24x & f^{(3)}(1) &= 24 \\ f^{(4)}(x) &= 24 & f^{(4)}(1) &= 24 \\ f^{(n)}(x) &= 0 & f^{(n)}(1) &= 0 \quad n \geq 5 \end{aligned}$$

Série de Taylor

$$\begin{aligned} f(x) = -1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 \\ + 4(x-1)^3 + (x-1)^4 \end{aligned}$$

portanto $R = \infty$.

b) Calculando as derivadas no centro da série

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x - x^3 & f^{(0)}(-2) &= 6 \\ f^{(1)}(x) &= 1 - 3x^2 & f^{(1)}(-2) &= -11 \\ f^{(2)}(x) &= -6x & f^{(2)}(-2) &= 21 \\ f^{(3)}(x) &= -6 & f^{(3)}(-2) &= -6 \\ f^{(n)}(x) &= 0 & f^{(n)}(-2) &= 0 \quad n \geq 4 \end{aligned}$$

Série de Taylor

$$f(x) = 6 - 11(x+2) + 6(x+2)^2 - (x+2)^3$$

portanto $R = \infty$.

c) Calculando as derivadas no centro da série

$$f^{(0)}(x) = \ln x$$
$$f^{(1)}(x) = 1/x$$

$f^{(2)}(x) = -1/x^2$
$f^{(3)}(x) = 2/x^3$
$f^{(4)}(x) = -6/x^4$
$f^{(5)}(x) = 24/x^5$
$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n \quad n \geq 1$

$f^{(0)}(2) = \ln 2$
$f^{(1)}(2) = 1/2$
$f^{(2)}(2) = -1/2^2$
$f^{(3)}(2) = 2/2^3$
$f^{(4)}(2) = -6/2^4$
$f^{(5)}(2) = 24/2^5$
$f^{(n)}(2) = (-1)^{n-1}(n-1)!/2^n \quad n \geq 1$

Série de Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(x-2)^n}{2^n n!} \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{2^n n} \end{aligned}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{|x-2|}{2} = \frac{|x-2|}{2}$$

portanto $R = 2$.

d) Calculando as derivadas no centro da série

$f^{(0)}(x) = 1/x \qquad f^{(0)}(-3) = -1/3$
$f^{(1)}(x) = -1/x^2 \qquad f^{(1)}(-3) = -1/3^2$
$f^{(2)}(x) = 2/x^3 \qquad f^{(2)}(-3) = -2/3^3$
$f^{(3)}(x) = -6/x^4 \qquad f^{(3)}(-3) = -6/3^4$
$f^{(4)}(x) = 24/x^5 \qquad f^{(4)}(-3) = -24/3^5$
$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!/x^n \qquad f^{(n)}(-3) = -n!/3^n$

Série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n!(x+3)^n}{3^n n!} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^n}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+3|}{3} = \frac{|x+3|}{3}$$

portanto $R = 3$.

e) Calculando as derivadas no centro da série

$f^{(0)}(x) = e^{2x} \qquad f^{(0)}(3) = e^6$
$f^{(1)}(x) = 2e^{2x} \qquad f^{(1)}(3) = 2e^6$
$f^{(2)}(x) = 2^2 e^{2x} \qquad f^{(2)}(3) = 2^2 e^6$
$f^{(3)}(x) = 2^3 e^{2x} \qquad f^{(3)}(3) = 2^3 e^6$
$f^{(4)}(x) = 2^4 e^{2x} \qquad f^{(4)}(3) = 2^4 e^6$
$f^{(5)}(x) = 2^5 e^{2x} \qquad f^{(5)}(3) = 2^5 e^6$
$f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x} \qquad f^{(n)}(3) = 2^n e^6$

Série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^6 (x-3)^n}{n!}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2|x-3|}{n+1} = 0$$

portanto $R = \infty$

f) Calculando as derivadas no centro da série

$f^{(0)}(x) = \operatorname{sen} x \qquad f^{(0)}(\pi/2) = 1$
$f^{(1)}(x) = \cos x \qquad f^{(1)}(\pi/2) = 0$
$f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f^{(2)}(\pi/2) = -1$
$f^{(3)}(x) = -\cos x \qquad f^{(3)}(\pi/2) = 0$
$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x \qquad f^{(4)}(\pi/2) = 1$
$f^{(5)}(x) = \cos x \qquad f^{(5)}(\pi/2) = 0$

Série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-\pi/2)^{2n}}{(2n)!}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x-\pi/2|^2}{(2n+2)(2n+1)}\right) = 0$$

portanto $R = \infty$

g) Calculando as derivadas no centro da série

$f^{(0)}(x) = \cos x \qquad f^{(0)}(\pi) = -1$
$f^{(1)}(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f^{(1)}(\pi) = 0$
$f^{(2)}(x) = -\cos x \qquad f^{(2)}(\pi) = 1$
$f^{(3)}(x) = \operatorname{sen} x \qquad f^{(3)}(\pi) = 0$
$f^{(4)}(x) = \cos x \qquad f^{(4)}(\pi) = -1$

Série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x-pi|^2}{(2n+2)(2n+1)}\right) = 0$$

portanto $R = \infty$

h) Calculando as derivadas no centro da série

$$\begin{aligned}
&f^{(0)}(x) = x^{1/2} && f^{(0)}(16) = 4\\
&f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} && f^{(1)}(16) = \frac{1}{2}\frac{1}{4}\\
&f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} && f^{(2)}(16) = -\frac{1}{4}\frac{1}{4^3}\\
&f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2} && f^{(3)}(16) = \frac{3}{8}\frac{1}{4^5}\\
&f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-7/2} && f^{(4)}(16) = -\frac{15}{16}\frac{1}{4^7}
\end{aligned}$$

Série de Taylor

$$\begin{aligned}
f(x) = 4 &+ \frac{1}{8}(x-16)\\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{5n-5}}\frac{(x-16)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x-16|(2n-1)}{2^5(n+1)}\right)\\
&= \frac{|x-16|}{16}
\end{aligned}$$

portanto $R = 16$

Seção 4.5

1) a) Calculando as derivadas de f

$$\begin{aligned}
&f^{(0)}(x) = x^{1/2} && f^{(0)}(4) = 2\\
&f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} && f^{(1)}(4) = \frac{1}{4}\\
&f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} && f^{(2)}(4) = -\frac{1}{32}\\
&f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}
\end{aligned}$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \le \frac{M}{3!}|x-4|^3$$

Majorando o módulo

$$4 \le x \le 4{,}2$$

$$|x-4| \le 0{,}2 = \frac{2}{10}$$

$$|x-4|^3 \le \frac{2^3}{10^3}$$

Precisamos de M tal que

$$\left|\frac{3}{8}x^{-5/2}\right| \le M \qquad \forall x \in \mathcal{I}$$

Como $\frac{3}{8}x^{-5/2}$ é decrescente em $\mathcal{I}$

$$M = \frac{3}{8}4^{-5/2} = \frac{3}{8\cdot 2^5} = \frac{3}{2^8}$$

portanto

$$\begin{aligned}
|R_2(x)| &\le \frac{3}{2^8}\frac{1}{3\cdot 2}\frac{2^3}{10^3}\\
&= \frac{1}{2^6 10^3}\\
&\approx 0{,}000\,016
\end{aligned}$$

b) Calculando as derivadas de f

$$\begin{aligned}
&f^{(0)}(x) = x^{-2} && f^{(0)}(1) = 1\\
&f^{(1)}(x) = -2x^{-3} && f^{(1)}(1) = -2\\
&f^{(2)}(x) = 6x^{-4} && f^{(2)}(1) = 6\\
&f^{(3)}(x) = -24x^{-5}
\end{aligned}$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_2(x) = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \le \frac{M}{3!}|x-1|^3$$

Majorando o módulo

$$0{,}9 \le x \le 1{,}1$$

$$|x-1| \le 0{,}1$$

$$|x-1|^3 \le \frac{1}{10^3}$$

Precisamos de M tal que

$$M \ge \left|-24x^{-5}\right| \qquad \forall x \in \mathcal{I}$$

como $\left|f^{(3)}(x)\right|$ é decrescente em $\mathcal{I}$

$$M = \frac{24}{(0{,}9)^5} = \frac{2^3\cdot 3\cdot 10^5}{9^5}$$

portanto

$$
\begin{aligned}
|R_2(x)| &\le \frac{2^3 \cdot 3 \cdot 10^5}{9^5}\frac{1}{3 \cdot 2}\frac{1}{10^3} \\
&= \frac{2^2 10^2}{9^5} \\
&\approx 0{,}006\,774
\end{aligned}
$$

c) Calculando as derivadas de f

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= x^{2/3} & f^{(0)}(1) &= 1 \\
f^{(1)}(x) &= \frac{2}{3}x^{-1/3} & f^{(1)}(1) &= \frac{2}{3} \\
f^{(2)}(x) &= -\frac{2}{9}x^{-4/3} & f^{(2)}(1) &= -\frac{2}{9} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{8}{27}x^{-7/3}
\end{aligned}
$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_3(x) = 1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \le \frac{M}{3!}|x-1|^3$$

Majorando o módulo

$$0{,}8 \le x \le 1{,}2$$

$$|x-1| \le 0{,}2$$

$$|x-1|^3 \le \left(\frac{2}{10}\right)^3 = \frac{2^3}{10^3}$$

Precisamos de M tal que

$$M \ge \left|\frac{8}{27}x^{-7/3}\right| \qquad \forall x \in \mathcal{I}$$

como $\left|f^{(3)}(x)\right|$ é decrescente em $\mathcal{I}$

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{8}{27}(0{,}8)^{-7/3} \\
&= \frac{8}{27}\left(\frac{10}{8}\right)^{7/3} \\
&= \frac{10^{7/3}}{3^3 \cdot 8^{4/3}} \\
&= \frac{10^{7/3}}{3^3 \cdot 2^4}
\end{aligned}
$$

portanto

$$
\begin{aligned}
|R_2(x)| &\le \frac{10^{7/3}}{3^3 \cdot 2^4}\frac{1}{3 \cdot 2}\frac{2^3}{10^3} \\
&= \frac{1}{3^4\, 2^2\, 10^{2/3}} \\
&\approx 0{,}000\,665
\end{aligned}
$$

d) Calculando as derivadas de f

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \operatorname{sen}(x) & f^{(0)}(\pi/6) &= 1/2 \\
f^{(1)}(x) &= \cos(x) & f^{(1)}(\pi/6) &= \sqrt{3}/2 \\
f^{(2)}(x) &= -\operatorname{sen}(x) & f^{(2)}(\pi/6) &= -1/2 \\
f^{(3)}(x) &= -\cos(x)
\end{aligned}
$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \le \frac{M}{3!}\left|x - \frac{\pi}{6}\right|^3$$

Majorando o módulo

$$0 \le x \le \frac{\pi}{3}$$

$$\left|x - \frac{\pi}{6}\right| \le \frac{\pi}{6}$$

$$\left|x - \frac{\pi}{6}\right|^3 \le \frac{\pi^3}{6^3}$$

Precisamos de M tal que

$$M \ge |-\cos(x)| \qquad \forall x \in \mathcal{I}$$

como $|-\cos(x)|$ é decrescente em $\mathcal{I}$

$$M = \cos(0) = 1$$

portanto

$$|R_2(x)| \le \frac{1}{6}\frac{\pi^3}{6^3} \approx 0{,}023\,925$$

e) Calculando as derivadas de f

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \sec(x) \\
f^{(1)}(x) &= \sec(x)\operatorname{tg}(x) \\
f^{(2)}(x) &= \sec(x)(2\sec^2(x) - 1) \\
f^{(3)}(x) &= \sec(x)\operatorname{tg}(x)(6\sec^2(x) - 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(0) &= 1 \\
f^{(1)}(0) &= 0 \\
f^{(2)}(0) &= 1
\end{aligned}
$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \le \frac{M}{3!}|x|^3$$

Majorando o módulo

$$-0{,}2 \leq x \leq 0{,}2$$

$$|x| \leq 0{,}2$$

$$|x|^3 \leq \frac{2^3}{10^3}$$

Precisamos de M tal que

$$M \geq \left|\sec(x)\,\mathrm{tg}(x)(6\sec^2(x) - 1)\right| \quad \forall x \in \mathcal{I}$$

Como $f^{(3)}$ é uma função impar e crescente on intervalo $[0; 0{,}2]$

$$M = f^{(3)}(0{,}2)$$

portanto

$$|R_2(x)| \leq$$

f) Calculando as derivadas de f

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \ln(1+2x) & f^{(0)}(1) &= \ln 3 \\ f^{(1)}(x) &= 2/(1+2x) & f^{(1)}(1) &= 2/3 \\ f^{(2)}(x) &= -4/(1+2x)^2 & f^{(2)}(1) &= -4/9 \\ f^{(3)}(x) &= 16/(1+2x)^3 \end{aligned}$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_2(x) = \ln(3) + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x-1|^3$$

Majorando o módulo

$$0{,}5 \leq x \leq 1{,}5$$

$$|x-1| \leq 0{,}5$$

$$|x-1|^3 \leq \frac{1}{2^3}$$

Precisamos de M tal que

$$M \geq \left|\frac{16}{(1+2x)^3}\right| \quad \forall x \in \mathcal{I}$$

como $f^{(3)}$ é uma função decrescente em $\mathcal{I}$

$$M = \frac{16}{(1+2\cdot 0{,}5)^3} = 2$$

portanto

$$|R_2(x)| \leq \frac{2}{3\cdot 2}\frac{1}{2^3} = \frac{1}{3\cdot 2^3} \approx 0{,}041\,667$$

g) Calculando as derivadas de f

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= e^{x^2} & f^{(0)}(0) &= 1 \\ f^{(1)}(x) &= e^{x^2}(2x) & f^{(1)}(0) &= 0 \\ f^{(2)}(x) &= e^{x^2}(2+4x^2) & f^{(2)}(0) &= 2 \\ f^{(3)}(x) &= e^{x^2}(12x+8x^3) \end{aligned}$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x|^3$$

Majorando o módulo

$$0 \leq x \leq 0{,}1 \;\Rightarrow\; |x| \leq 0{,}1 \;\Rightarrow\; |x|^3 \leq \frac{1}{10^3}$$

Precisamos de M tal que

$$M \geq \left|e^{x^2}(12x+8x^3)\right| \quad \forall x \in \mathcal{I}$$

como $f^{(3)}$ é uma função crescente em $\mathcal{I}$

$$\begin{aligned} M &= f^{(3)}(0{,}1) \\ &= e^{0{,}1^2}(12\cdot 0{,}1 + 8\cdot(0{,}1)^3) \\ &\approx 1{,}2201 \end{aligned}$$

portanto

$$|R_2(x)| \leq \frac{1{,}2201}{6\cdot 10^3} \approx 0{,}000\,203$$

h) Calculando as derivadas de f

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x\ln(x) & f^{(0)}(1) &= 0 \\ f^{(1)}(x) &= \ln(x)+1 & f^{(1)}(1) &= 1 \\ f^{(2)}(x) &= 1/x & f^{(2)}(1) &= 1 \\ f^{(3)}(x) &= -1/x^2 \end{aligned}$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_2(x) = (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2}$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x-1|^3$$

Majorando o módulo

$$0{,}5 \leq x \leq 1{,}5$$

$$|x-1| \leq 0{,}5$$

$$|x-1|^3 \leq \frac{1}{2^3}$$

Precisamos de M tal que

$$M \geq \left|-1/x^2\right| \quad \forall x \in \mathcal{I}$$

como $\left|f^{(3)}\right|$ é uma função decrescente em $\mathcal{I}$

$$M = \left|f^{(3)}(0{,}5)\right| = \frac{1}{0{,}5^2} = 2^2$$

portanto

$$|R_2(x)| \leq \frac{2^2}{3 \cdot 2}\frac{1}{2^3} = \frac{1}{3 \cdot 2^2} \approx 0{,}083\,333$$

i) Calculando as derivadas de f

$$f^{(0)}(x) = x\,\text{sen}(x)$$
$$f^{(1)}(x) = \text{sen}(x) + x\cos(x)$$
$$f^{(2)}(x) = 2\cos(x) - x\,\text{sen}(x)$$
$$f^{(3)}(x) = -3\,\text{sen}(x) - x\cos(x)$$

$$f^{(0)}(0) = 0$$
$$f^{(1)}(0) = 0$$
$$f^{(2)}(0) = 2$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_2(x) = x^2$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x|^3$$

Majorando o módulo

$$-1 \leq x \leq 1 \;\Rightarrow\; |x| \leq 1 \;\Rightarrow\; |x|^3 \leq 1$$

Precisamos de M tal que

$$M \geq |-3\,\text{sen}(x) - x\cos(x)| \qquad \forall x \in \mathcal{I}$$

Após alguns cálculos elaborados obtemos

$$M = 3{,}065$$

portanto

$$|R_2(x)| \leq 3{,}065$$

j) Calculando as derivadas de f

$$f^{(0)}(x) = \text{senh}(2x) \qquad f^{(0)}(0) = 0$$
$$f^{(1)}(x) = 2\cosh(2x) \qquad f^{(1)}(0) = 2$$
$$f^{(2)}(x) = 4\,\text{senh}(2x) \qquad f^{(2)}(0) = 0$$
$$f^{(3)}(x) = 8\cosh(2x)$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_2(x) = 2x$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x|^3$$

Majorando o módulo

$$-1 \leq x \leq 1 \;\Rightarrow\; |x| \leq 1 \;\Rightarrow\; |x|^3 \leq 1$$

Precisamos de M tal que

$$M \geq |8\cosh(2x)| \qquad \forall x \in \mathcal{I}$$

$$M = 8\cosh(2) \approx 30.098$$

portanto

$$|R_2(x)| \leq \frac{30{,}098}{6} \approx 5{,}0163$$

Seção 4.7

1) a) Pela série geométrica (razão $= x - 4$):

$$q(x) = \frac{1}{5-x} = \frac{1}{1-(x-4)} = \sum (x-4)^n$$

para $|x-4| < 1$

b) Pela série de Taylor da exponencial, substituindo $x \to -x^2$ e integrando a série (não afetam o raio, por ser infinito):

$$\begin{aligned} E(x) &= \int \left(\sum \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}\right) dx \\ &= C + \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}x^{2n+1} \end{aligned}$$

para $x \in \mathbb{R}$.

c) Pela série de Taylor do cosseno, substituindo $x \to 2x$ (não afeta o raio, por ser infinito):

$$d(x) = \cos(2x) = \sum \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$$

para $x \in \mathbb{R}$.

2) a) Por cálculo direto, $x = 1/3$ e $x = 1/2$, respectivamente.

b) Pela série de potências do logaritmo, substituindo $x \to -x$ e somando as séries (não afetam o raio):

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum \frac{1}{n}x^n - \sum \frac{(-1)^n}{n}x^n \\ &= 2\sum \frac{1}{(2n+1)}x^{2n+1} \end{aligned}$$

para $|x| < 1$.

c) Substituindo os valores obtidos no item (a) na série do item (b):

$$\ln 2 = \sum \frac{2}{(2n+1)3^{2n+1}}$$

$$\ln 3 = \sum \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$$

Capítulo 5

Seção 5.7

1) a) Função sem simetria, $L = \pi$. Assim,

$$q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right)$$

onde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0} 2\,dx + \int_0^{\pi} 1\,dx\right) \\ &= -1 \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0} 2\cos nx\,dx + \int_0^{\pi} \cos nx\,dx\right) \\ &= 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0} 2\operatorname{sen} nx\,dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx\right) \\ &= \frac{3}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} q(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \operatorname{sen} nx \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)x \end{aligned}$$

Solução alternativa: Considerar a função $\overline{q}(x) = q(x) + \frac{1}{2}$, que tem simetria ímpar.

b) Função ímpar, $L = 2$. Portanto, $a_n = 0$, para todo n e

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} x$$

onde

$$b_n = -\int_0^2 x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} x\,dx = \frac{4(-1)^n}{n\pi}$$

Logo

$$g(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} x$$

2) a) É par, uma vez que só apresenta os coeficientes a_n, ou pois é uma série de constante e cossenos, todas funções pares.

b) Como o argumento do cosseno é nx, temos $L = \pi$ e portanto o período é 2π.

c) Nas condições dadas, a série de Fourier de f converge para f em todo x. Assim, o valor de $f(\pi)$ pode ser obtido aplicando $x = 0$ na série de Fourier, resultando na série numérica

$$f(\pi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

que é uma série geométrica de soma $\dfrac{1}{1-(1/2)} = 2$.

d) *Conhecimento extra requerido*: Nas condições dadas sobre f, a série de Fourier para (a extensão periódica de) f' é obtida pela derivação termo a termo da série de f. Assim

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^n} \operatorname{sen} nx$$

Como $\operatorname{sen} nx$ se anula se x é múltiplo de π, temos que $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, são zeros de f' e portanto, pontos críticos de f.

Capítulo 6

Seção 6.2

1) $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$

2) $y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$

3) $y(t) = -\frac{1}{2} e^{3t/2} + \frac{5}{2} e^{t/2}$

Seção 6.7

1) a) Condições de fronteira são $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$ e a condição inicial: $u(x,0) = \operatorname{sen} x$.

b) Com $K = 1$ e $L = \pi$, a solução é da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx$$

Para calcular c_n temos várias alternativas

i) *Pela série de Fourier de f*: Como a função $\operatorname{sen} x$ já é ímpar de período 2π, sua série de Fourier é trivial, com $a_n = 0$, para todo n, $b_n = 0$, para $n \geq 2$ e $b_1 = 1$. Lembrando que $c_n = b_n$

ii) *Por relação de ortogonalidade*: Sendo a função seno ímpar, e tomando $m = 1$ nas relações de ortogonalidade, vale

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} nx\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} nx\, dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

se $n = 1$ e 0, caso contrário.

iii) *Por cálculo direto, usando a identidade fornecida*:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} nx\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(1-n)x - \cos(1+n)x]\, dx \end{aligned}$$

Calculando explicitamente temos $c_n = 0$, se $n \neq 1$ e $c_1 = 1$.

iv) *Por cálculo direto*: aplicando integração por partes, duas vezes

De qualquer modo, concluímos que $u(x,t) = e^{-t} \operatorname{sen} x$.

2) a) Substituindo u na EDP

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)} = \sigma \ \in \mathbb{R}$$

Substituindo nas condições de fronteira

$$\begin{aligned} 0 &= u(0,y) = F(0)G(y) &&\Rightarrow F(0) = 0 \\ 0 &= u(1,y) = F(1)G(y) &&\Rightarrow F(1) = 0 \\ 0 &= u_y(x,1) = F(x)G'(1) &&\Rightarrow G'(1) = 0 \end{aligned}$$

Assim temos as EDO's com as condições

$$(i) \quad \begin{cases} F''(x) - \sigma F(x) = 0 \\ F(0) = 0 \\ F(1) = 0 \end{cases}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} G''(y) + \sigma G(y) = 0 \\ G'(1) = 0 \end{cases}$$

b) Pelo princípio da superposição (combinação linear das soluções fundamentais), temos

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(n\pi x) \cosh[n\pi(1-y)]$$

Para obter c_n, usamos a condição de contorno

$$\ell(x) = u_y(x,0) = -\sum_{n=1}^{\infty} n\pi c_n \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{senh}(n\pi)$$

e pela série de Fourier (da extensão ímpar) de ℓ

$$c_n = -\frac{2}{n\pi \operatorname{senh}(n\pi)} \int_0^1 \ell(x) \operatorname{sen}(n\pi x)\, dx$$

3) A solução do problema é

$$u(x,t) = -\operatorname{sen}(\pi x) + 2e^{-8\pi^2 t} \operatorname{sen}(3\pi x)$$

6) A solução do problema é

$$u(x,t) = -\operatorname{sen}(\pi x) + 2e^{-8\pi^2 t} \operatorname{sen}(3\pi x)$$

Capítulo 7

Seção 7.10

1) a) Por definição

$$\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\{g(x)\} = \int_0^2 e^{-i\omega x}\, dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\Big|_{x=0}^{x=2} \\ &= i\,\frac{e^{-i2\omega} - 1}{\omega} \end{aligned}$$

b) Por definição

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^{iax}f(x)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)e^{-i\omega x}\,dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega-a)x}\,dx\\ &= \widehat{f}(\omega-a)\end{aligned}$$

2) a) Aplicando $\mathcal{F}$ na EDP, usando a linearidade e a transformada das derivadas, temos

$$\widehat{u}_{tt} = -\omega^2\widehat{u}$$

Aplicando $\mathcal{F}$ nas condições iniciais

$$\widehat{u}(\omega,0) = 0$$

$$\widehat{u}_t(\omega,0) = \widehat{v}_0(\omega)$$

b) Como as raízes da equação característica da EDO linear são $r = \pm i\omega$, temos

$$\widehat{u}(\omega,t) = c_1(\omega)\cos\omega t + c_2(\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

e pelas condições iniciais obtemos

$$c_1(\omega) \equiv 0 \text{ e } c_2(\omega) = \frac{\widehat{v}_0(\omega)}{\omega}$$

c) Aplicando $\mathcal{F}^{-1}$, temos

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{v}_0(\omega)}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t\cdot e^{i\omega x}\,d\omega$$

Referências

1 APOSTOL, T. M. A proof that Euler missed: evaluating $\zeta(2)$ the easy way. *Tht Mathematical Intelligencer*, v. 5, n. 3, 1983. DOI: 10.1007/bf03026576.

2 BOLDRINI, J. L. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo, 1986.

3 BOYCE, W.; DIPRIMA, R. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 10. ed.: LTC, 2015.

4 BUTKOV, E. *Física matemática*. LTC, 1988.

5 CHURCHILL, R. *Series de Fourier e problemas de valores de contorno*. Guanabara Dois, 1978.

6 HSU, H. *Analise de Fourier*. LTC, 1973.

7 JESUS SANTOS, R. DE. *Convergência Pontual da Série de Fourier*. 10 jul. 2010. Disponível em: <https://regijs.github.io/eqdif/teofourier.pdf>. Acesso em: 10 out. 2021.

8 JESUS SANTOS, R. DE. *Propriedades de Séries de Potências*. 2 out. 2011. Disponível em: <https://regijs.github.io/eqdif/propserpot.pdf>. Acesso em: 10 out. 2021.

9 JESUS SANTOS, R. DE. *Séries de Fourier*. 23 abr. 2002. Disponível em: <https://regijs.github.io/eqdif/sfourier.pdf>. Acesso em: 10 out. 2021.

10 JESUS SANTOS, R. DE. *Séries de Fourier de Senos e de Cossenos de Índices Ímpares*. 17 ago. 2010. Disponível em: <https://regijs.github.io/eqdif/serfourespec.pdf>. Acesso em: 10 out. 2021.

11 JESUS SANTOS, R. DE. *Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 16 out. 2007. Disponível em: <https://regijs.github.io/eqdif/sfouriereqparc.pdf>. Acesso em: 10 out. 2021.

12 JESUS SANTOS, R. DE. *Transformada de Fourier*. 15 out. 2010. Disponível em: <https://regijs.github.io/eqdif/transfourier.pdf>. Acesso em: 10 out. 2021.

13 NAGLE, R. K.; SAFF E. B.AND SNIDER, A. D. *Equações Diferenciais*. 8. ed.: Pearson, 2012.

14 PENNEY, D.; EDWARDS, H. *Equações diferenciais elementares: com problemas de contorno*. LTC.

15 ROJAS, M. R. A. *Introdução às equações diferenciais parciais*. InterSaberes, 2020.

16 STEWART, J. *Cálculo: Volume I*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. v. 1.

17 STEWART, J. *Calculo: Volume II*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. v. 2.

18 THIM, J. *Continuous Nowhere Differentiable Functions*. 2003. 94 f. Diss. (Mestrado) – Luleå University of Technology, Luleå, Sweden. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/255669824_Continuous_Nowhere_Differentiable_Functions_MS_Thesis>. Acesso em: 1 out. 2001.

19 THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo Volume 1*. 12. ed. São Paulo, 2012. v. 1.

20 THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo Volume 2*. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. v. 2.

21 WIKIMEDIA COMMONS. *File:Pitangus-3.ogg — Wikimedia Commons, the free media repository*. 2020. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Pitangus-3.ogg&oldid=426366139>. Acesso em: 10 out. 2021.

[heading=bibintoc]

Índice Remissivo

Amplitude, 182, 185
Antiderivada, 383
Autofunção, 243, 377
Autovalor, 241, 243, 377
Autovetor, 241, 377

Base, 376
Bernoulli
desigualdade, 365
Binômio de Newton, 139

Combinação Linear, 375
Condição
Dirichlet, 250, 267, 281, 283, 299
homogênea, 249
não homogênea, 249, 257
fronteira, 228, 249, 257, 267, 268, 283, 284
inicial, 228, 237
Neumann, 249, 260
Contra Domínio, 380
Convergência
transformada de Fourier, 327
trivial, 121
Convolução, 326, 331
Coordenadas polares, 294, 367
Corpo, 370
Cosseno hiperbólico, 359

Delta de Dirac, 328, 338, 364
Derivada, 382
Desigualdade
Bernoulli, 365
Taylor, 155
Dirichlet
condição, 250, 299
homogênea, 249
não homogênea, 249, 257
Distância, 379
Domínio, 380
da frequência, 310
do tempo, 310

EDO, 227, 232
EDP, 227
Equação
calor, 229, 247
característica, 232
diferencial
linear, 228
não-linear, 229
ordinária, 227, 232
parcial, 227
primeira ordem, 228
segunda ordem, 228
elíptica, 230, 281
Euler, 301
hiperbólica, 229
homogênea, 229
Laplace, 230, 281, 283
onda, 229, 267
parabólica, 229
Equação de Laplace em Coordenadas Polares, 298
Escalar, 375
Espaço de Funções, 375
Espaço Vetorial, 187, 374
com produto interno, 378
Estimativa de erro
teste integral, 81
teste Leibniz, 108
Euler
identidade, 170
Exponencial Complexa, 373

Fase, 182, 185
Fenômeno de Gibbs, 223, 224
Fibonacci, 8
Fourier
série, 191, 197
complexa, 312
cossenos, 216
senos, 217
transformada, 309, 318
transformada inversa, 320, 326
Frequência, 182, 184
Função, 380
analítica, 150
característica, 363
contínua, 381
contínua por partes, 206
de Bessel, 167
de Weierstrass, 194
degrau unitário, 330, 363
exponencial, 355
Heaviside, 330, 363
hiperbólica, 233, 359
impar, 212
coeficiente Fourier, 216
integral, 215
logaritmo, 356
ortogonal, 188
par, 212
coeficiente Fourier, 216
integral, 214
periódica, 185
potência, 144
rampa, 364
real, 380

seccionalmente contínua, 206
seno cardinal, 319
senoidal, 182, 184
sinc, 319
trigonométrica, 188
Fórmula
Bhaskara, 25
Euler, 361
Euler-Fourier, 195

Hipótese de indução, 50, 366

Identidade de Euler, 170, 312, 373
Imagem, 380
Impulso unitário instantâneo, 328, 364
Indução
finita, 50, 365
matemática, 365
Ínfimo, 37, 353
Integral
definida, 383
imprópria, 385
indefinida, 383
Intervalo, 352
aberto, 352
convergência, 124
fechado, 352

L'Hôpital
regra, 31
Limite
função real, 380
lateral, 206
sequência, 14
Linearmente
dependente, 375
independente, 375

Maclaurin
série, 137
Mapa logístico, 20
Método
Newton, 5

Neumann
condição, 249, 260
Newton
binômio, 139
Método, 5
Norma, 379
1, 225
2, 225
infinito, 224
Número complexo, 369
argumento, 372
conjugado, 372
conjunto, 369
módulo, 372
parte imaginária, 372
parte real, 372
produto, 370
soma, 370
Número de combinações, 139

Ortogonalidade, 378

Período, 183, 185
fundamental, 185
Plano complexo, 372
Polinômio
Taylor, 136
Primitiva, 383
Problema
autovalores, 241
Basileia, 174
Laplace, 281
Laplace n disco, 299
valor inicial, 237
valores de contorno, 238
homogêneo, 239
Produto
interno, 377
por escalar, 374
Progressão
aritmética, 9
geométrica, 9, 52

Raio de convergência, 125
Relação de recorrência, 8

Seno hiperbólico, 359
Senoide, 182
Separação de variáveis, 246, 267, 283
Sequência
convergente, 14
crescente, 36
decrescente, 36
divergente, 20
Fibonacci, 8
limitada, 35
limitada inferiormente, 35
limitada superiormente, 35
limite, 14
monótona, 36
numérica, 7
propriedades, 23
recursiva, 8, 24
somas parciais, 47
termo, 7
índice, 7
sinc, 362
normalizada, 363
Solução
fundamental, 233, 253, 269
geral, 233, 253, 302
trivial, 239
Soma, 374
Soma da série, 47
Somas parciais, 47
Subsequência, 21
Supremo, 353
Série
p, 77
p alternada, 105
alternada, 103
binomial, 140
convergência, 47
convergência absoluta, 110
convergência condicional, 110
estimativa de erro
teste integral, 81
teste Leibniz, 108
Fourier, 191, 197
coeficientes, 195
complexa, 312, 315
convergência, 207

cossenos, 216
senos, 217
geométrica, 52
harmônica, 67
inverso do fatorial, 57, 71, 157
inverso do quadrado, 57, 70
Maclaurin, 137
notação, 48
numérica, 47
potências, 119
convergência, 122, 125
intervalo de convergência, 124
raio de convergência, 125
propriedades, 59
resto, 79
Taylor, 136
telescópica, 54
termo geral, 47
termos não negativos, 69

Taylor
desigualdade, 155
polinômio, 136
série, 136
teorema, 153
Teorema
confronto, 41
convolução, 326
de Rolle, 382
fundamental do Cálculo, 385
função contínua, 30
Taylor, 153
valor intermediário, 381
valor médio, 382
Teste
comparação, 84
comparação no limite, 87
convergência absoluta, 110
divergência, 65
integral, 73
Leibniz, 103
raiz, 99
razão, 93
termo geral, 65
Transformada de Fourier, 309, 318
convergência, 327
inversa, 320, 326
Transformação Linear, 376

Unidade Imaginária, 369

Vetor, 375
unitário, 379
Vizinhança, 352

Cálculo IV

Luis Alberto D'Afonseca

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG

19 de junho de 2023

Essa apostila foi escrita para agrupar de forma integrada todo o conteúdo da ementa da disciplina de Cálculo IV ministrada no CEFET-MG.

Apostila escrita em LaTeX com a classe `nice-booklet` criada por Luis Alberto D'Afonseca

A versão mais recente desta apostila pode ser baixada clicando ou escaneando o código QR.

Arte da capa: Fotografia de Pixabay baixada de Pexels