## **GABARITO**

- 1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
- 2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
- 3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
- 4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
- 5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
- 1 [30] Calcule a Série de Taylor da função  $f(x) = \int e^{-x^2} dx$

Sabemos que a Série de Taylor da função exponencial é

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Primeiro calculamos a Série de Taylor da função

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

Agora integramos

$$f(x) = \int e^{-x^2} dx$$

$$= \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int x^{2n} dx$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

- **2** [40] Seja  $f(x) = \ln(x+1)$
- a) [12] Encontre um padrão para  $f^{(n)}(x)$
- b) [14] Usando o padrão do item anterior, encontre a Serie de Taylor de f(x), centrada em zero
- c) [14] Obtenha o raio de convergência da série de potências

a) Calculando as primeiras derivadas

$$f^{(0)}(x) = \ln(x+1)$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{d}{dx} \ln(x+1) = \frac{1}{x+1} (x+1)' = (x+1)^{-1}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{d^2}{dx^2} \ln(x+1) = -(x+1)^{-2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^3}{dx^3} \ln(x+1) = 2(x+1)^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4}{dx^4} \ln(x+1) = -2 \cdot 3(x+1)^{-4}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{d^5}{dx^5} \ln(x+1) = 2 \cdot 3 \cdot 4(x+1)^{-5}$$

Vemos que, para  $n \geq 1$ ,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \ln(x+1) = (-1)^{n+1} (n-1)! (x+1)^{-n} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(x+1)^n}$$

b) O primeiro coeficiente, n=0, da Série de Taylor é

$$c_0 = \frac{\ln(0+1)}{0!} = \frac{0}{1} = 0$$

portanto, a série começa com n=1. Os demais coeficientes,  $n\geq 1,$  são

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(0+1)^n n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Montando a série temos

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

c) Aplicando o Teste da Razão temos

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{n+1} \right| \left| \frac{n}{(-1)^{n+1} x^n} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \frac{n}{|x|^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} |x|$$

$$= |x| \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1}$$

$$= |x|$$

Impondo a condição de convergência  $\rho < 1$  temos

$$\rho = |x| < 1$$

portanto o raio de convergência é R=1

**3** [30] Prove que a série de Maclaurin de  $e^x$  converge para a própria função, para todo  $x \in \mathbb{R}$ 

Pelo **Teorema de Taylor**, sabemos que o erro cometido ao aproximarmos  $e^x$  pelo seu polinômio de Taylor centrado em zero de grau n é

$$R_n(x) = \frac{\exp^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

para algum  $\xi$  entre zero e x. Como  $\exp^{(k)}(x) = e^x$ , para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\left|\exp^{(k)}(t)\right| \le e^{|x|}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $|t| \leq |x|$ . Portanto, para todo  $x \in \mathbb{R}$ 

$$|R_n(x)| = \frac{\left|\exp^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!} |x^{n+1}| \le \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x^{n+1}|$$

Calculando o limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x^{n+1}| = e^{|x|} |x^{n+1}| \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(n+1)!} = e^{|x|} |x^{n+1}| \cdot 0 = 0$$

podemos usar o **Teorema do Confronto** para mostrar que  $R_n(x)$  vai para zero, quando n vai para o infinito. Portanto, a série converge para a função.