

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

- 1 [25] Utilize a linearização da função $f(x, y) = e^{x^2-y^2} \cos(xy)$ no ponto $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$, para obter uma estimativa para $f(2, 1)$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2-y^2} (2x \cos(xy) - y \sin(xy))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x^2-y^2} (2y \cos(xy) + x \sin(xy))$$

Avaliando as derivadas parciais no ponto $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) &= e^{\sqrt{\pi}^2 - \sqrt{\pi}^2} (2\sqrt{\pi} \cos(\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}) - \sqrt{\pi} \sin(\sqrt{\pi}\sqrt{\pi})) \\ &= e^0 (2\sqrt{\pi} \cos(\pi) - \sqrt{\pi} \sin(\pi)) \\ &= 2\sqrt{\pi}(-1) - \sqrt{\pi}0 \\ &= -2\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) &= -e^{\sqrt{\pi}^2 - \sqrt{\pi}^2} (2\sqrt{\pi} \cos(\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}) + \sqrt{\pi} \sin(\sqrt{\pi}\sqrt{\pi})) \\ &= -e^0 (2\sqrt{\pi}(-1) + \sqrt{\pi}0) \\ &= 2\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Avaliando a função no ponto $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$

$$\begin{aligned} f(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) &= e^{x^2-y^2} \cos(xy) \\ &= e^{\sqrt{\pi}^2 - \sqrt{\pi}^2} \cos(\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}) \\ &= e^0 \cos(\pi) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Escrevendo a aproximação linear centrada no ponto $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$

$$\begin{aligned}L(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\&= f(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) + f_x(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})(x - \sqrt{\pi}) + f_y(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})(y - \sqrt{\pi}) \\&= -1 - 2\sqrt{\pi}(x - \sqrt{\pi}) + 2\sqrt{\pi}(y - \sqrt{\pi}) \\&= -1 - 2\sqrt{\pi}x + 2\pi + 2\sqrt{\pi}y - 2\pi \\&= 2\sqrt{\pi}(y - x) - 1\end{aligned}$$

Avaliando a estimativa para $f(3, 2)$

$$f(2, 1) \approx L(2, 1) = 2\sqrt{\pi}(1 - 2) - 1 = -2\sqrt{\pi} - 1 \approx -4.54490770181$$

Comparando com o valor exato

$$f(2, 1) = e^3 \cos(2) \approx -8.35853265094$$

os pontos estão muito longe para que a aproximação linear seja adequada

2 [25] Considere que a equação $\operatorname{sen}(xz) + y^2 z = 1$ defina z como função de x e y , encontre $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\operatorname{sen}(xz) + y^2 z = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{sen}(xz) + y^2 z) = 0$$

$$\cos(xz) \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) + y^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$z \cos(xz) + (x \cos(xz) + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$(x \cos(xz) + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} = -z \cos(xz)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-z \cos(xz)}{x \cos(xz) + y^2}$$

3 [25] Seja $f(x, y) = x^2y + \cos(y)$

a) Calcule o gradiente de f

b) Calcule a derivada de f no ponto $(1, \pi)$ na direção do vetor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) Vetor gradiente

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - \text{sen}(y) \end{pmatrix}$$

b) Gradiente no ponto $(1, \pi)$

$$\nabla f(x, y)(1, \pi) = \begin{pmatrix} 2 \times 1 \times \pi \\ 1^2 - \text{sen}(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculando um vetor unitário na direção de v

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Derivada direcional

$$\begin{aligned} D_u f(1, \pi) &= \nabla f(1, \pi) \cdot u \\ &= \begin{pmatrix} 2\pi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}(6\pi + 4) \\ &= \frac{6\pi + 4}{5} \end{aligned}$$

4 [25] Seja $f(x, y, z) = \ln(1 + xy^2 + z^2)$, calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ no ponto $(1, 1, 2)$. Efetue as derivadas na ordem especificada pela notação.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \ln(1 + xy^2 + z^2) \\ &= \frac{1}{1 + xy^2 + z^2} \frac{\partial}{\partial z} (1 + xy^2 + z^2) \\ &= \frac{2z}{1 + xy^2 + z^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2z}{1 + xy^2 + z^2} \right) \\ &= 2z \frac{\partial}{\partial x} (1 + xy^2 + z^2)^{-1} \\ &= 2z(-1) (1 + xy^2 + z^2)^{-2} \frac{\partial}{\partial x} (1 + xy^2 + z^2) \\ &= \frac{-2z}{(1 + xy^2 + z^2)^2} y^2 \\ &= \frac{-2zy^2}{(1 + xy^2 + z^2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1, 1, 2) &= \left. \frac{-2zy^2}{(1 + xy^2 + z^2)^2} \right|_{(1, 1, 2)} \\ &= \frac{-2 \times 2 \times 1^2}{(1 + 1 \times 1^2 + 2^2)^2} \\ &= \frac{-2^2}{6^2} \\ &= \frac{-2^2}{2^2 \times 3^2} \\ &= \frac{-1}{9}\end{aligned}$$