Séries de Potências – Definição

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Séries de Potências

Exemplos

Lista Mínima

Séries de Potências

Uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

onde c_n e a são constantes e $x \in \mathbb{R}$ é uma variável

é chamada de Série de Potências centrada em a

Note que o índice começa em zero

Atenção

Séries de Potência e Séries de Taylor não são a mesma coisa

Somas Parciais

As Somas Parciais de uma Série de Potências são Polinômios

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k$$

$$= c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots + c_n (x-a)^n$$

Conteúdo

Séries de Potências

Exemplos

Lista Mínima

Determine a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Essa é uma Série de Potências com a=0 e $c_n=1$, para $n=0,1,2,\ldots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

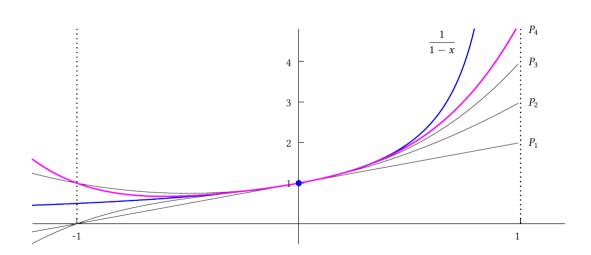
Fixando x, temos uma Série Geométrica com

$$\alpha = 1$$
 $r = x$

converge quando |r| = |x| < 1

Assim no intervalo aberto (-1,1) temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{\alpha}{1-r} = \frac{1}{1-x}$$



Calcule a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x - a)^n$$

a e $\beta \neq 0$ números reais

Série de Potências centrada em a com coeficientes $c_n = \beta^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta(x-a))^n$$

Para cada x fixo, é uma Série Geométrica com $\alpha=1$ e $r=\beta(x-a)$

Converge quando |r| < 1

$$|eta(x-a)| < 1$$
 $-rac{1}{|eta|} < x-a < rac{1}{|eta|}$ $|(x-a)| < rac{1}{|eta|}$ $a-rac{1}{|eta|} < x < a+rac{1}{|eta|}$

A série converge no intervalo

$$I = \left(a - \frac{1}{|eta|}, a + \frac{1}{|eta|}\right)$$

Sua soma é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n = \frac{\alpha}{1-r} = \frac{1}{1-\beta(x-a)}$$

Calcule a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x-1)^n$$

Série de Potências com a=1 e $c_n=\frac{1}{2^n}$

Caso particular do exemplo anterior com $\beta = \frac{1}{2}$ e a = 1

Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = \frac{x-2}{2}$

Série Geométrica com
$$\alpha = 1$$
 e $r = \frac{x-2}{2}$

$$\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$$

$$-1 < \frac{x-2}{2} < 1$$

$$-2 < x - 2 < 2$$

A série converge no intervalo (0,4)

Para
$$x \in (0,4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \frac{\alpha}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{x-2}{2}} = \frac{2}{2-(x-2)} = \frac{2}{4-x}$$

Conteúdo

Séries de Potências

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 7.1 da Apostila

Revisar Séries Geométricas, Seção 6.1 da Apostila

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações