INTEGRAIS E SÉRIES – PROVA 4 – TURMA 6 12/12/2023

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25] Escreva o polinômio de Taylor de terceiro grau, centrado no zero, da função seno hiperbólico $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

O polinômio de Taylor de terceiro grau, centrado em zero, é

$$P_3(x) = \operatorname{senh}(0) + \operatorname{senh}'(0)x + \frac{\operatorname{senh}''(0)}{2}x^2 + \frac{\operatorname{senh}^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

Calculando as derivadas

$$\operatorname{senh}^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$
$$\operatorname{senh}^{(2)}(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$
$$\operatorname{senh}^{(3)}(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

Avaliando as derivadas em zero

$$\operatorname{senh}^{(0)}(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$
$$\operatorname{senh}^{(1)}(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$
$$\operatorname{senh}^{(2)}(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$
$$\operatorname{senh}^{(3)}(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Portanto

$$P_3(x) = x + \frac{x^3}{6}$$

2 [25] Seja $f(x) = \dfrac{2}{1+x}$

a) [10] encontre um padrão para $f^{(n)}(x)$

b) [15] usando o padrão do item anterior, encontre a Serie de Taylor de $f(x)$, centrada em zero

a) Calculando as primeiras derivadas

$$f^{(0)}(x) = \frac{2}{1+x} = 2(1+x)^{-1}$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}\left[2(1+x)^{-1}\right] = 2(-1)(1+x)^{-1-1}(1+x)' = -2(1+x)^{-2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left[2(1+x)^{-1}\right] = \quad 2\cdot 2(1+x)^{-3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^3}{dx^3}\left[2(1+x)^{-1}\right] = -2\cdot 2\cdot 3(1+x)^{-4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4}{dx^4}\left[2(1+x)^{-1}\right] = \quad 2\cdot 2\cdot 3\cdot 4(1+x)^{-5}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{d^5}{dx^5}\left[2(1+x)^{-1}\right] = -2\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5(1+x)^{-6}$$

Por inspeção, vemos que

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[2(1+x)^{-1}\right] = 2(-1)^n n!(1+x)^{-n-1} = \frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

b) Os coeficientes da série de Taylor são

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{2(-1)^n n!}{(1-0)^{n+1} n!} = 2(-1)^n$$

Montando a série temos

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n$$

3 [25] Considerando a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n$

a) [15] determine seu raio de convergência;

b) [10] calcule sua primitiva.

a) **Solução 1** Reescrevendo a série temos

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n$$

que é uma série geométrica com $\alpha = 1$ e $r = -2x$, portanto, convergente apenas quando

$$\begin{aligned} |r| &< 1 \\ |-2x| &< 1 \\ 2|x| &< 1 \\ |x| &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Portando o raio de convergência é $R = 1/2$

Solução 2 Usando o teste da razão

$$\begin{aligned} a_n &= (-2)^n x^n & \qquad |a_n| &= 2^n |x|^n \\ a_{n+1} &= (-2)^{n+1} x^{n+1} & \qquad |a_{n+1}| &= 2^{n+1} |x|^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}|x|^{n+1}}{2^n|x|^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2|x| \\ &= 2|x| \end{aligned}$$

A série converge quando $\rho < 1$, ou seja, $|x| < 1/2$, portanto, o raio é $R = 1/2$

b)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n \int x^n \, dx \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} x^{n+1} \end{aligned}$$

4 [25] Escreva uma aproximação para $\cos(\pi/8)$ utilizando o polinômio de Taylor de quarto grau e estime o erro dessa aproximação. Não é necessário encontrar a representação decimal dos valores numéricos.

Polinômio de Taylor

$$P_4(x) = \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Calculando as derivadas do cosseno e as avaliando em zero

$$\begin{aligned}
\cos^{(1)}(x) &= -\operatorname{sen}(x) & \cos^{(1)}(0) &= -\operatorname{sen}(0) = 0\\
\cos^{(2)}(x) &= -\cos(x) & \cos^{(2)}(0) &= -\cos(0) = -1\\
\cos^{(3)}(x) &= \operatorname{sen}(x) & \cos^{(3)}(0) &= \operatorname{sen}(0) = 0\\
\cos^{(4)}(x) &= \cos(x) & \cos^{(4)}(0) &= \cos(0) = 1
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= \cos(0) - \operatorname{sen}(0)\, x - \cos(0)\, x^2 + \operatorname{sen}(0)\, x^3 + \cos(0)\, x^4\\
&= 1 - x^2 + x^4
\end{aligned}$$

Em $x = \pi/8$ temos

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx P_4\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{8^2} + \frac{\pi^4}{8^4}$$

Pelo **Teorema de Taylor**, sabemos que o erro cometido ao aproximarmos $\cos(x)$ pelo seu polinômio de Taylor centrado em zero de grau 4 é

$$R_4(x) = \frac{\cos^{(5)}(c)}{(5)!} x^5 = -\frac{\operatorname{sen}(c)}{120} x^5$$

para algum c entre zero e x. Avaliando o erro em $x = \dfrac{\pi}{8}$ temos

$$\left|R_4\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| = \left|-\frac{\operatorname{sen}(c)}{120}\left(\frac{\pi}{8}\right)^5\right| = \frac{|\operatorname{sen}(c)|}{120}\left(\frac{\pi}{8}\right)^5$$

Como para c entre zero e $\pi/8$ o máximo do seno será em $\pi/8$, portanto

$$\left|R_4\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| \le \frac{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right|}{120}\left(\frac{\pi}{8}\right)^5$$