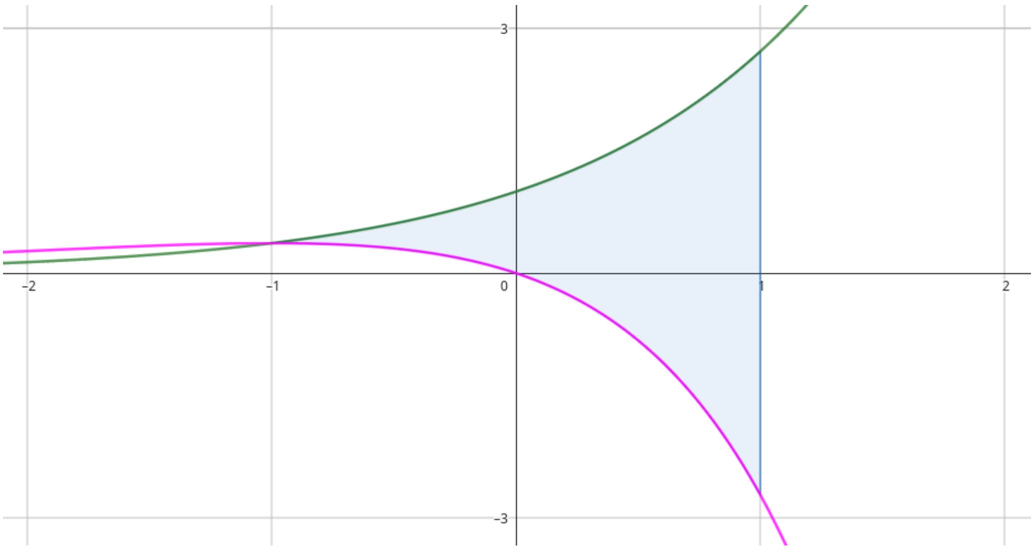
INTEGRAIS E SÉRIES – PROVA 2 – TURMA 8 29/11/24

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [20] Calcule a área entre as curvas $f(x) = -xe^x$, $g(x) = e^x$ e $x = 1$



Encontrando o ponto onde os gráficos das funções f e g se interceptam

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -xe^x &= e^x \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Como no intervalo $[-1, 1]$ a função g é maior do que f a área é dada pela integral

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} g(x) - f(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} e^x + xe^x\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} e^x\, dx + \int_{-1}^{1} xe^x\, dx \end{aligned}$$

Calculando a primitiva de $h(x) = xe^x$ por integral por partes $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$H(x) = \int xe^x\,dx$$

$$u = x \qquad du = dx \qquad dv = e^x\,dx \qquad v = e^x$$

$$\begin{aligned} H(x) &= xe^x - \int e^x\,dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= (x-1)e^x + C \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} e^x\,dx + \int_{-1}^{1} xe^x\,dx \\ &= (e^x)\Big|_{-1}^{1} + \big((x-1)e^x\big)\Big|_{-1}^{1} \\ &= e^1 - e^{-1} + \big((1-1)e^1\big) - \big((-1-1)e^{-1}\big) \\ &= e - \frac{1}{e} + 0 + \frac{2}{e} \\ &= e + \frac{1}{e} \end{aligned}$$

2 [20] Use substituição simples para calcular a integral $\displaystyle\int \frac{a+bx^2}{\sqrt{3ax+bx^3}}dx$

Escolhendo a substituição

$$u = 3ax + bx^2 \qquad du = \left(3a + 3bx^2\right)dx = 3\left(a + bx^2\right)dx$$

portanto

$$\left(a + bx^2\right)dx = \frac{du}{3}$$

então

$$\begin{aligned}
\int \frac{a+bx^2}{\sqrt{3ax+bx^3}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{3ax+bx^3}}\left(a+bx^2\right)dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{3} \\
&= \frac{1}{3}\int u^{-1/2}du \\
&= \frac{1}{3}\frac{u^{1/2}}{1/2} + c \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{u} + c \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{3ax+bx^2} + c
\end{aligned}$$

3 [20] Encontre a primitiva da função $f(x) = \cos^2(x)\,\mathrm{sen}(2x)$

$$\begin{aligned}
F &= \int f(x)dx \\
&= \int \cos^2(x)\,\mathrm{sen}(2x)dx \\
&= \int \cos^2(x)2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)dx \\
&= 2\int \cos^3(x)\,\mathrm{sen}(x)dx
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\qquad u = \cos(x) \qquad du = -\,\mathrm{sen}(x)dx$

$$\begin{aligned}
F &= -2\int u^3 du \\
&= -2\frac{u^4}{4} + c \\
&= -\frac{1}{2}\cos^4(x) + c
\end{aligned}$$

4 [20] Encontre a primitiva da função $h(x) = \dfrac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}$

$$H = \int \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

Fazendo a substituição $x = 2\,\mathrm{sen}(\theta)$ $\quad dx = 2\cos(\theta)d\theta$

$$\begin{aligned}
H &= \int \frac{2^5\,\mathrm{sen}^5(\theta)}{\sqrt{4-4\,\mathrm{sen}^2(\theta)}}2\cos(\theta)d\theta \\
&= 2^5 \int \frac{\mathrm{sen}^5(\theta)}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\theta)}}\cos(\theta)d\theta \\
&= 2^5 \int \frac{\mathrm{sen}^5(\theta)}{\cos(\theta)}\cos(\theta)d\theta \\
&= 2^5 \int \mathrm{sen}^5(\theta)d\theta \\
&= 2^5 \int \left(\mathrm{sen}^2(\theta)\right)^2 \mathrm{sen}(\theta)d\theta \\
&= 2^5 \int \left(1-\cos^2(\theta)\right)^2 \mathrm{sen}(\theta)d\theta
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\quad u = \cos(\theta) \quad du = -\,\mathrm{sen}(\theta)d\theta$

$$\begin{aligned}
H &= -2^5 \int \left(1-u^2\right)^2 du \\
&= -2^5 \int 1 - 2u^2 + u^4\, du \\
&= 2^5 \int 2u^2 - u^4 - 1\, du \\
&= 2^5 \left(\frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 - u\right) + c \\
&= 2^5 \left(\frac{2}{3}\cos^3(\theta) - \frac{1}{5}\cos^5(\theta) - \cos(\theta)\right) + c
\end{aligned}$$

Para calcular $\cos(\theta)$ usamos que $\mathrm{sen}(\theta) = x/2$, portanto a hipotenusa é 2 e o cateto oposto é x assim o cateto adjacente é $a = \sqrt{2^2 - x^2} = \sqrt{4-x^2}$ e o cosseno é

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

Voltando para a integral

$$\begin{aligned}
H &= 2^5 \left[\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^5 - \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right] + c \\
&= 2^5 \left[\frac{2}{3\cdot 2^3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3 - \frac{1}{5\cdot 2^5}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^5 - \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\right] + c \\
&= \sqrt{4-x^2}\left[\frac{2^3}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^4 - 2^4\right] + c
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{4-x^2}\left[\frac{8}{3}\left(4-x^2\right)-\frac{1}{5}\left(4-x^2\right)^2-16\right]+c$$

$$= \sqrt{4-x^2}\left[\frac{32-8x^2}{3}-\frac{16-8x^2+x^4}{5}-16\right]+c$$

$$= \sqrt{4-x^2}\left[\frac{5\cdot 32-5\cdot 8x^2}{15}-\frac{3\cdot 16-3\cdot 8x^2+3x^4}{15}-\frac{16\cdot 15}{15}\right]+c$$

$$= \frac{\sqrt{4-x^2}}{15}\left[16\cdot 5\cdot 2-16\cdot 3-16\cdot 5\cdot 3-5\cdot 8x^2+3\cdot 8x^2-3x^4\right]+c$$

$$= \frac{\sqrt{4-x^2}}{15}\left[-16\cdot 5-16\cdot 3-2\cdot 8x^2-3x^4\right]+c$$

$$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{15}\left[16\cdot 8+2\cdot 8x^2+3x^4\right]+c$$

$$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{15}\left[128+16x^2+3x^4\right]+c$$

5 [20] Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno da reta $x = -1$, da região contida entre as curvas

$$f(x) = \frac{1}{4x - x^2} \qquad y = 0 \qquad x = 1 \qquad x = 3$$

Volume por castas cilíndricas

$$V = \int_a^b 2\pi r(x)h(x)dx$$
$$a = 1$$
$$b = 3$$
$$r = x + 1$$
$$h = \frac{1}{4x - x^2}$$

portanto

$$V = 2\pi \int_1^3 \frac{x+1}{4x - x^2}dx$$

Calculando a integral indefinida

$$F = \int \frac{x+1}{4x - x^2}dx = \int \frac{x+1}{x(4-x)}dx$$

Por frações parciais temos

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x(4-x)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{4-x} \\ x + 1 &= A(4-x) + Bx \\ &= (B - A)x + 4A \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes

$$\begin{cases} -A + B = 1 \\ 4A \qquad = 1 \end{cases}$$

obtemos os valores $A = \frac{1}{4}$ e $B = \frac{5}{4}$ portanto

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{1}{4x} + \frac{5}{4(4-x)}dx \\ &= \frac{1}{4}\ln(x) - \frac{5}{4}\ln(4-x) + c \end{aligned}$$

Voltando ao volume temos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi F(x)\Big|_1^3 \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4}\ln(x) - \frac{5}{4}\ln(4-x)\right]\Big|_1^3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \left[\left(\frac{1}{4} \ln(3) - \frac{5}{4} \ln(4-3) \right) - \left(\frac{1}{4} \ln(1) - \frac{5}{4} \ln(4-1) \right) \right] \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{4} \ln(3) + \frac{5}{4} \ln(3) \right) \\
&= 2\pi \frac{6}{4} \ln(3) \\
&= 3\pi \ln(3)
\end{aligned}
$$