Derivada Direcional e Vetor Gradiente

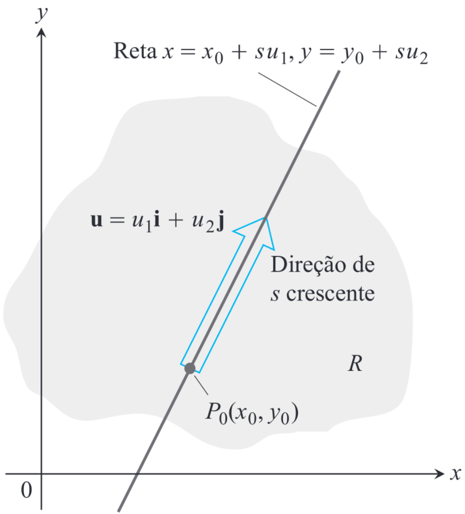
Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Derivada Direcional



Definição

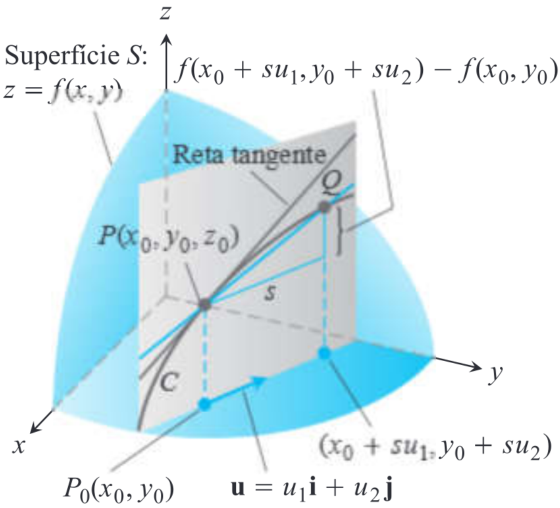
A derivada de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário

$$u = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \|u\| = 1$$

é o número

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Interpretação da Derivada Direcional



Interpretação da Derivada Direcional

A derivada direcional é a taxa de variação da função f na direção do vetor u

$$\text{Se } \; u = \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ então } \; D_u f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\text{Se } \; u = \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ então } \; D_u f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Exemplo 1

Use a definição para calcular a derivada de $f(x, y) = x^2 + xy$
no ponto $(1, 2)$ na direção $u = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$

(Para simplificar os cálculos, ignore o fato desse vetor não ser unitário)

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}
D_u f(1,2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+2h, 2+3h) - f(1,2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left[(1+2h)^2 + (1+2h)(2+3h)\right] - (1^2 + 1\times 2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1+4h+4h^2) + (2+3h+4h+6h^2) - 3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{11h + 10h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (11 + 10h) = 11
\end{aligned}$$

Conteúdo

Vetor Gradiente

O vetor gradiente de $f(x, y)$ é

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

O símbolo ∇ é chamado nabla

Exemplo 2

Calcule o vetor gradiente da função $f(x, y) = \sqrt{2x + 3y}$ no ponto $(-1, 2)$

Exemplo 2 – Solução

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{2x+3y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x+3y\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x+3y\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(2x+3y\right) = \frac{1}{\sqrt{2x+3y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = \frac{1}{\sqrt{2(-1)+3(2)}} = \frac{1}{\sqrt{-2+6}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2 – Solução

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{2x+3y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x+3y)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}(2x+3y)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial y}(2x+3y) = \frac{3}{2\sqrt{2x+3y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = \frac{3}{2\sqrt{2(-1)+3(2)}} = \frac{3}{2\sqrt{-2+6}} = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$$

Exemplo 2 – Solução

O vetor gradiente

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2x+3y}} \\[2ex] \dfrac{3}{2\sqrt{2x+3y}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2x+3y}} \begin{pmatrix} 1 \\[1ex] {}^{3}\!/_{2} \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Solução

O vetor gradiente no ponto $(-1, 2)$

$$\nabla f(-1,2) = \left[\frac{1}{\sqrt{2x+3y}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right] \Bigg|_{(-1,2)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

Conteúdo

Calculando a Derivada Direcional

Considere a reta que passa por (x_0, y_0) na direção de $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$

$$x = x_0 + su_1 \qquad y = y_0 + su_2$$

Restringindo f à reta

$$f(s) = f\big(x(s), y(s)\big)$$

Calculando a Derivada Direcional

$$
\begin{aligned}
D_u f &= \frac{df}{ds} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2 \\
&= \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\
&= \nabla f \cdot u
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

Encontre a derivada de $f(x, y) = xe^y + \cos(xy)$ no ponto $(2, 0)$ na direção $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$

Exemplo 3 – Solução

O vetor v não é unitário, então precisamos dividi-lo pelo seu comprimento

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^y + \cos(xy)\right) = e^y - y\,\mathrm{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = e^0 - 0\,\mathrm{sen}(2 \times 0) = 1$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{y} + \cos(xy)\right) = xe^{y} - x\,\mathrm{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = 2e^{0} - 2\,\mathrm{sen}(2\times 0) = 2$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando a derivada direcional

$$D_u f(2,0) \;=\; \nabla f(2,0) \cdot u \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{3}\!/_{5} \\ -{}^{4}\!/_{5} \end{pmatrix}$$

$$= \; 1\frac{3}{5} + 2\frac{-4}{5} \;=\; \frac{3}{5} - \frac{8}{5} \;=\; -\frac{5}{5} \;=\; -1$$

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.5

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 1-3, 7-9, 11-13

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações