IS – Prova Substitutiva – Turma 7

13/09/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

O exercício correspondente a prova que será substituida vale 50 pontos

1 [25] Calcule o volume do sólido formado pela rotação da região entre as curvas

$$y = x^3 \qquad y = 8 \qquad x = 0$$

em torno da reta $x = -2$.

Vamos usar cascas cilíndricas, para isso precisamos encontrar o raio e a altura da casca cilindica

$$r(x) = x - (-2) = x + 2$$

$$h(x) = 8 - x^3$$

O intervalo de integração, $[a, b]$, vai ser entre os pontos onde $y = x^3$ toca $x = 0$ e $y = 8$, ou seja $a = 0$ e

$$b^3 = 8$$
$$b = \sqrt[3]{8} = 2$$

Calculando o volume

$$\begin{aligned}
V &= \int_a^b 2\pi\, r(x)\, h(x)\, dx \\
&= 2\pi \int_0^2 (x+2)(8-x^3) dx \\
&= 2\pi \int_0^2 8x - x^4 + 16 - 2x^3 dx \\
&= 2\pi \int_0^2 16 + 8x - 2x^3 - x^4 dx \\
&= 2\pi \left(16x + 8\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^2 \\
&= 2\pi \left(16x + 4x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \left(16 \times 2 + 4 \times 2^2 - \frac{2^4}{2} - \frac{2^5}{5} \right) \\
&= 2\pi \left(32 + 16 - 8 - \frac{32}{5} \right) \\
&= 2\pi \left(40 - \frac{32}{5} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{200 - 32}{5} \right) \\
&= \frac{2\pi 168}{5} \\
&= \frac{336\pi}{5}
\end{aligned}$$

2 [25] Calcule a integral $\int e^x \operatorname{sen}(x) dx$

Para calcular a primitiva

$$\int e^x \operatorname{sen}(x) dx$$

vamos usar integração por partes com

$$u = \operatorname{sen}(x) \qquad du = \cos(x) dx \qquad\qquad dv = e^x dx \qquad v = e^x$$

obtendo

$$\int e^x \operatorname{sen}(x) dx = \operatorname{sen}(x) e^x - \int e^x \cos(x) dx$$

Usando integração por partes mais uma vez, agora com

$$u = \cos(x) \qquad du = -\operatorname{sen}(x) dx \qquad\qquad dv = e^x dx \qquad v = e^x$$

temos

$$\begin{aligned} \int e^x \operatorname{sen}(x) dx &= \operatorname{sen}(x) e^x - \left(\cos(x) e^x - \int e^x (-\operatorname{sen}(x)) dx \right) \\ &= \operatorname{sen}(x) e^x - \cos(x) e^x - \int e^x \operatorname{sen}(x) dx \end{aligned}$$

$$2 \int e^x \operatorname{sen}(x) dx = \operatorname{sen}(x) e^x - \cos(x) e^x + C$$

$$\int e^x \operatorname{sen}(x) dx = \frac{e^x}{2} \big(\operatorname{sen}(x) - \cos(x) \big) + C$$

3 [25] Encontre a série de Taylor, centrada em zero, da função xe^x

Calculando as derivadas de f

$f^{(0)}(x) = xe^x$	$f^{(0)}(0) = 0e^0 = 0$
$f^{(1)}(x) = e^x + xe^x$	$f^{(1)}(0) = e^0 + 0e^0 = 1$
$f^{(2)}(x) = 2e^x + xe^x$	$f^{(2)}(0) = 2e^0 + 0e^0 = 2$
$f^{(3)}(x) = 3e^x + xe^x$	$f^{(3)}(0) = 3e^0 + 0e^0 = 3$
$f^{(4)}(x) = 4e^x + xe^x$	$f^{(4)}(0) = 4e^0 + 0e^0 = 4$

Identificamos o padrão

$$f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x \qquad\qquad f^{(n)}(0) = ne^0 + 0e^0 = n$$

A série de Taylor de $f(x) = xe^x$ é

$$\begin{aligned}
T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}x^n && \text{Note que a soma começa em } n = 1 \text{ pois } f^{(0)}(0) = 0 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} && \text{Se a soma começasse em } n = 0 \text{ teriamos } (-1)!
\end{aligned}$$