Integração por Substituição Trigonométrica

2 – Substituição pela tangente

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Substituições Trigonométricas

Expressão	Substituição	Intervalo	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\,\mathrm{sen}(\theta)$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \mathrm{sen}^2(\theta) = \cos^2(\theta)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\,\mathrm{tg}(\theta)$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \mathrm{tg}^2(\theta) = \sec^2(\theta)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec(\theta)$	$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2(\theta) - 1 = \mathrm{tg}^2(\theta)$

Conteúdo

Exemplo 1

Encontre $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

Note $\sqrt{x^2+4} = \sqrt{2^2+x^2}$

Substituição inversa

$$x = 2\,\mathrm{tg}(\theta) \qquad dx = 2\sec^2(\theta)\,d\theta \qquad \text{com} \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 1

$$F = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx \qquad\qquad x = 2\operatorname{tg}(\theta)$$

$$= \int \frac{1}{4\operatorname{tg}^2(\theta)\sqrt{4\operatorname{tg}^2(\theta)+4}}\, 2\sec^2(\theta)\,d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2(\theta)}{2\operatorname{tg}^2(\theta)\sqrt{4\left(1+\operatorname{tg}^2(\theta)\right)}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2(\theta)}{4\operatorname{tg}^2(\theta)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\theta)}}\,d\theta \qquad\qquad 1+\operatorname{tg}^2(\theta) = \sec^2(\theta)$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sec^2(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta)\sqrt{\sec^2(\theta)}}\,d\theta$$

Exemplo 1

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{1}{4}\int \frac{\sec^2(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta)\sqrt{\sec^2(\theta)}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\sec(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta)}\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos(\theta)}\left(\frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}\right)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)}\,d\theta
\end{aligned}
$$

Exemplo 1

Integrar $F = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \dfrac{\cos(\theta)}{\mathrm{sen}^2(\theta)}\,d\theta$

Substituição simples

$$u = \mathrm{sen}(\theta) \qquad du = \cos(\theta)\,d\theta$$

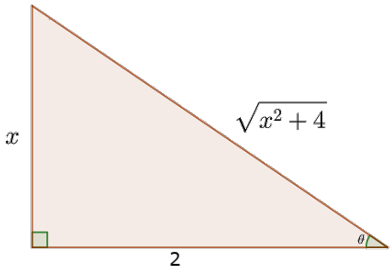
Temos

$$F = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{4}\int u^{-2}du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^{-1}}{-1} + C\right) = \frac{-1}{4\,\mathrm{sen}(\theta)} + C_1$$

Exemplo 1

$$x = 2\,\mathrm{tg}(\theta) \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{tg}(\theta) = \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)} = \mathrm{cossec}(\theta) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$$



$$F = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$$

$$= \frac{-1}{4\,\mathrm{sen}(\theta)} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$$

Conteúdo

Exemplo 2

Encontre $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

~~Substituição trigonométrica $x = 2\operatorname{tg}(\theta)$~~

Substituição simples $u = x^2 + 4 \qquad du = 2xdx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+4} + C$$

Conteúdo

Exemplo 3

Calcule $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$

Completando quadrado temos

$$t^2 - 6t + 13 \;=\; (t-3)^2 - 9 + 13 \;=\; (t-3)^2 + 4$$

$$F = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-3)^2 + 4}}$$

Exemplo 3 – Substituição Simples

$$u = t - 3 \qquad\qquad du = dt$$

$$F = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-3)^2 + 4}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 4}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 2^2}}$$

Exemplo 3 – Substituição Trigonométrica

$$u = 2\,\mathrm{tg}(\theta) \quad \Rightarrow \quad du = 2\sec^2(\theta)\,d\theta$$

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 2^2}} \\ &= \int \frac{2\sec^2(\theta)}{\sqrt{4\,\mathrm{tg}^2(\theta) + 4}}\,d\theta \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Substituição Trigonométrica

$$F = \int \frac{2\sec^2(\theta)}{\sqrt{4\,\mathrm{tg}^2(\theta) + 4}} d\theta$$

$$= \int \frac{2\sec^2(\theta)}{2\sqrt{\mathrm{tg}^2(\theta) + 1}} d\theta$$

$$\mathrm{tg}^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$$

$$= \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sec(\theta)} d\theta$$

$$= \int \sec(\theta) d\theta$$

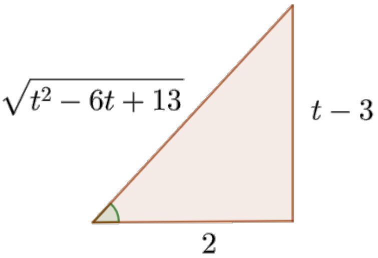
$$= \ln|\sec(\theta) + \mathrm{tg}(\theta)| + K$$

Exemplo 3 – Desfazendo as Transformações

$$u = 2\,\mathrm{tg}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}(\theta) = \frac{u}{2} = \frac{t-3}{2}$$

Hipotenusa

$$\sqrt{(t-3)^2 + 2^2} = \sqrt{t^2 - 6t + 9 + 4}$$
$$= \sqrt{t^2 - 6t + 13}$$



$$\sec(\theta) = \frac{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}{2}$$

Exemplo 3 – Desfazendo as Transformações

$$F = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$$

$$= \ln\left|\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)\right| + K$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}{2} + \frac{t-3}{2}\right| + K$$

$$= \ln\left|\sqrt{t^2 - 6t + 13} + t - 3\right| - \ln(2) + K$$

$$= \ln\left|\sqrt{t^2 - 6t + 13} + t - 3\right| + K_1$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 4.4 da Apostila

Exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações