Integração por Substituição Trigonométrica

1 – Substituição pelo seno

Luis Alberto D’Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Substituição Simples

Calculando

$$F = \int x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

substituição $\quad u = a^2 - x^2 \qquad du = -2xdx \qquad xdx = -\dfrac{du}{2}$

$$F = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du$$

Substituição Simples – Problema

Calculando

$$F = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

substituição $\quad u = a^2 - x^2 \quad du = -2x dx \quad dx = -\frac{du}{2x}$

$$F = -\frac{1}{2} \int \sqrt{u}\, \frac{du}{x} = \; ?$$

Segunda Tentativa

Calculando

$$F = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

substituição $\qquad x = a\,\mathrm{sen}(\theta) \qquad\qquad dx = a\cos(\theta)\,d\theta$

$$F = \int \sqrt{a^2 - \big(a\,\mathrm{sen}(\theta)\big)^2}\; a\cos(\theta)\,d\theta$$

Segunda Tentativa

$$F = \int \sqrt{a^2 - \big(a\,\text{sen}(\theta)\big)^2}\; a\cos(\theta)\,d\theta$$

$$= \int \sqrt{a^2\big(1 - \text{sen}^2(\theta)\big)}\; a\cos(\theta)\,d\theta$$

$$= \int a^2\sqrt{\cos^2(\theta)}\;\cos(\theta)\,d\theta \qquad a > 0$$

$$= \int a^2\cos^2(\theta)\,d\theta \qquad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= a^2\int \cos^2(\theta)\,d\theta$$

Segunda Tentativa

$$F = a^2 \int \cos^2(\theta)\, d\theta$$

$$F = \frac{a^2}{2} \int \big(1 + \cos(2\theta)\big)\, d\theta \qquad \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2\alpha)\big)$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \big(\theta + \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\big) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right] + C$$

Justificativa em breve

Transformação Inversa

Substituição simples – a nova variável é função da original

$$u = f(x)$$

Substituição inversa – a variável original é função da nova

$$x = g(u)$$

É necessário inverter g

Substituições Trigonométricas

Expressão	Substituição	Intervalo	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\,\mathrm{sen}(\theta)$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \mathrm{sen}^2(\theta) = \cos^2(\theta)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\,\mathrm{tg}(\theta)$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \mathrm{tg}^2(\theta) = \sec^2(\theta)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec(\theta)$	$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2(\theta) - 1 = \mathrm{tg}^2(\theta)$

Conteúdo

Exemplo 1

Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$

Note $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{3^2-x^2}$

Substituição inversa

$$x = 3\,\mathrm{sen}(\theta) \qquad dx = 3\cos(\theta)\,d\theta \qquad \text{com} \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 1

$$F = \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx \qquad\qquad x = 3\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$= \int \frac{\sqrt{9 - 9\,\mathrm{sen}^2(\theta)}}{9\,\mathrm{sen}^2(\theta)}\, 3\cos(\theta)\, d\theta$$

$$= \int \frac{3 \times 3}{9} \frac{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2(\theta)}}{\mathrm{sen}^2(\theta)} \cos(\theta)\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2(\theta)}}{\mathrm{sen}^2(\theta)} \cos(\theta)\, d\theta$$

Exemplo 1

$$F = \int \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}}{\operatorname{sen}^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta$$

$$1-\operatorname{sen}^2(\theta) = \cos^2(\theta)$$

$$= \int \frac{\sqrt{\cos^2(\theta)}}{\operatorname{sen}^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta$$

$$= \int \frac{\cos^2(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)}d\theta$$

$$= \int \cot^2(\theta)d\theta$$

Exemplo 1

$$F = \int \cot^2(\theta) d\theta \qquad \cot^2(\theta) = \operatorname{cossec}^2(\theta) - 1$$

$$= \int \operatorname{cossec}^2(\theta) - 1 \, d\theta \qquad \big(\cot(\theta)\big)' = -\operatorname{cossec}^2(\theta)$$

$$= -\cot(\theta) - \theta + C$$

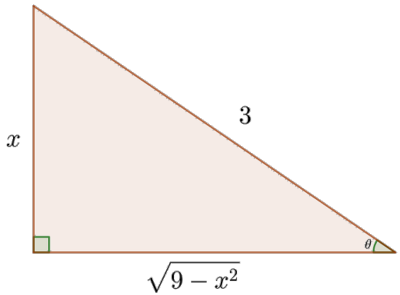
Precisamos voltar para a variável original $x = 3\,\operatorname{sen}(\theta)$

$$\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$F = -\cot\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$ **Forma ruim**

Exemplo 1

$$x = 3\,\text{sen}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(\theta) = \frac{x}{3} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$



Por Pitágoras, o cateto adjacente é $\sqrt{9 - x^2}$

Portanto

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\cot(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$$

Exemplo 1

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = -\cot(\theta) - \theta + C$$

$$= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Conteúdo

Exemplo 2

Calcule $\displaystyle\int x \,\mathrm{arcsen}(x)\, dx$

Vários métodos serão necessários

Exemplo 2 – Integral por Partes

$$F = \int x \operatorname{arcsen}(x) dx$$

Integral por partes

$$u = \operatorname{arcsen}(x) \qquad dv = x dx$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$F = uv - \int v du = \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsen}(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Exemplo 2 – Substituição Trigonométrica

Resolver $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Substituição inversa

$$x = \operatorname{sen}(\theta) \qquad dx = \cos(\theta)d\theta \quad \text{com} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$G = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}}\cos(\theta)d\theta$$

Exemplo 2 – Substituição Trigonométrica

$$
\begin{aligned}
G &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \int \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}} \cos(\theta)\,d\theta \\
&= \int \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\sqrt{\cos^2(\theta)}} \cos(\theta)\,d\theta \\
&= \int \operatorname{sen}^2(\theta)\,d\theta
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Integral Trigonométrica

Calcular $G = \int \operatorname{sen}^2(\theta)d\theta$

Manipulação algébrica

$$\operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2\theta)\big)$$

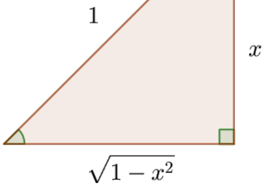
Exemplo 2 – Integral Trigonométrica

$$
\begin{aligned}
G &= \int \operatorname{sen}^2(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int \big(1 - \cos(2\theta)\big)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{2}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\big(\theta - \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\big) + C
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Desfazendo a Transformação Trigonométrica

$$x = \text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \theta = \text{arcsen}(x)$$

$$\cos(\theta) = \sqrt{1 - x^2}$$



$$G = \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\theta - \text{sen}(\theta)\cos(\theta)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{arcsen}(x) - x\sqrt{1 - x^2}\right) + C$$

Exemplo 2 – Retornando a Integral Original

$$F = \int x \operatorname{arcsen}(x) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsen}(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsen}(x) - \frac{1}{4} \left(\operatorname{arcsen}(x) - x\sqrt{1-x^2} \right) + C$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \operatorname{arcsen}(x) + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 4.4 da Apostila

Exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações