Integrais Definidas

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Fórmulas para o cálculo de áreas

Figuras regulares

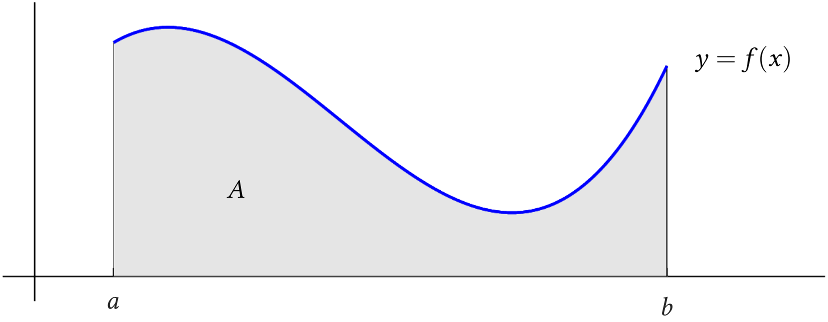
Área de um Retângulo $A = (\text{base}) \times (\text{altura}) = bh$

Área de um Triângulo $A = \dfrac{(\text{base}) \times (\text{altura})}{2} = \dfrac{bh}{2}$

Área de um Círculo $A = \pi(\text{raio})^2 = \pi r^2$

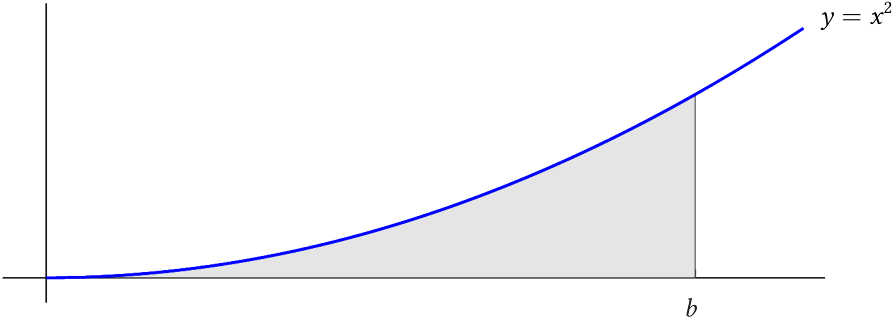
O que fazer com as figuras irregulares?

Área entre o gráfico de uma função e o eixo x

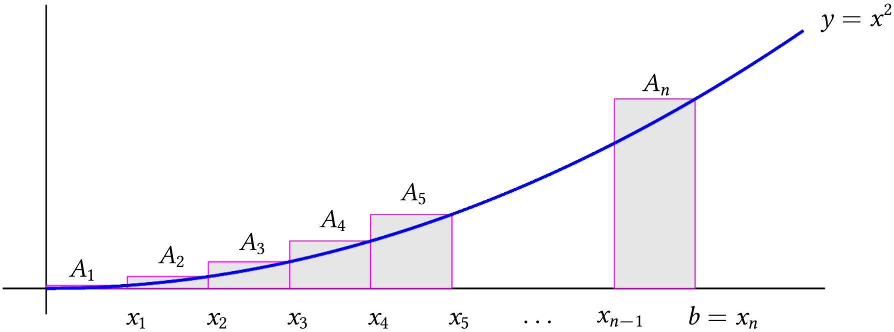


Como calcular a área?

Exemplo: área sob o gráfico de x^2 entre 0 e b



Aproximando a área sob o gráfico



Aproximando a área sob o gráfico

Partição do intervalo $[0, b]$ em n subintervalos iguais

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Tamanho de cada subintervalo

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b}{n}$$

Valor de x_i

$$x_i = i\Delta x = i\frac{b}{n}$$

Área de cada retângulo

$$A_i = x_i^2 \Delta x = \left(i\frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} i^2$$

Somando os Retângulos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} A_i \; = \; \sum_{i=1}^{n} \frac{b^3}{n^3} i^2 \; = \; \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \; \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

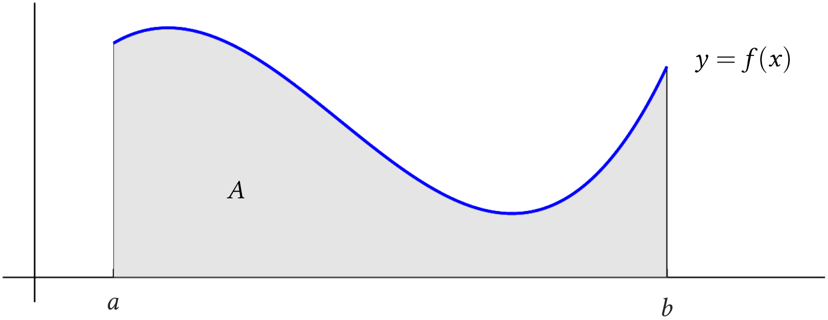
$$= \frac{b^3}{n^3} \; \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{b^3}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

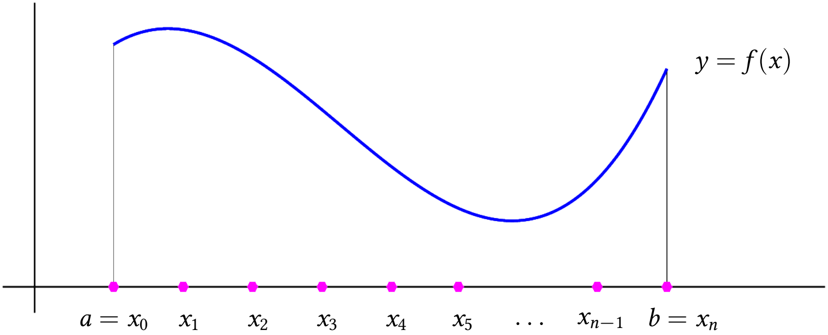
Calculando pelo limite

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} S_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{b^3}{6}\left(2 + 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{b^3}{6}2 \; = \; \frac{b^3}{3}
\end{aligned}
$$

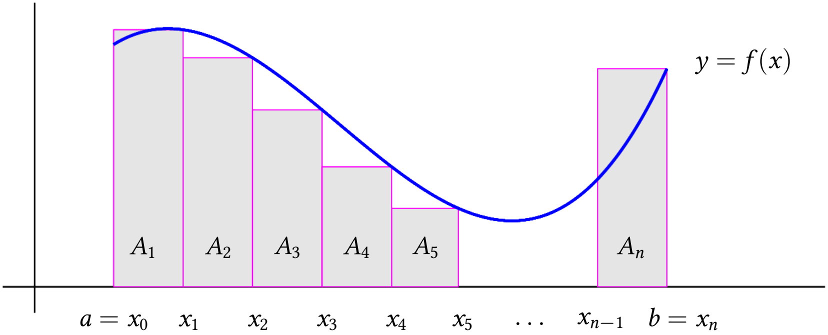
Área entre o gráfico de f e o eixo x no intervalo $[a, b]$



Partição do intervalo $[a, b]$



Aproximação por retângulos



Aproximação por retângulos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$A_i = f(x_i)\Delta x$$

$$\begin{aligned} S_n &= A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n \\ &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \end{aligned}$$

Área via soma de Riemann

A área da região sob o gráfico de uma função contínua f no intervalo $[a, b]$ é dada pelo limite

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x$$

Definição Integral Definida – Soma de Riemann

A Integral Definida da função f no intervalo $[a, b]$ é

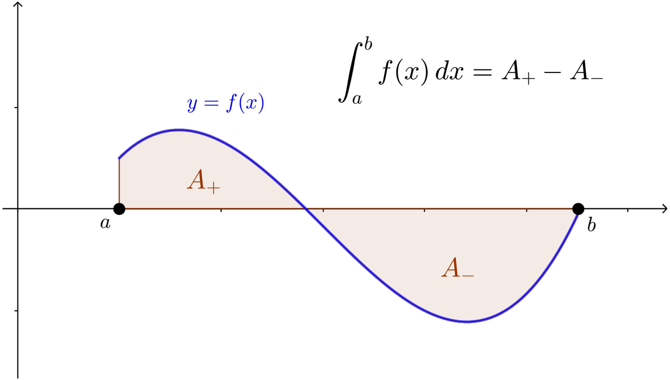
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ são os pontos amostrais

Desde que o limite exista

Consequência da Definição

A área tem o mesmo sinal da função



Conteúdo

Sentido de integração

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Intervalo de comprimento nulo

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Área de um retângulo

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

Para c constante

Soma e subtração de funções

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Multiplicação de função por constante

$$\int_a^b c\, f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$$

Para c constante

Separando o intervalo em dois

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Área positiva

Se $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Comparação entre áreas

Se $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Limitação inferior e superior

Se $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$ então

$$m(b-a) \quad \leq \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad \leq \quad M(b-a)$$

Exemplo 1

Calcule a área abaixo do gráfico da função $f(x) = x + 2$ no intervalo $[0, b]$

Exemplo 1

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^b f(x)\,dx \\
&= \int_0^b x + 2\,dx \\
&= \int_0^b x\,dx + 2\int_0^b dx && \text{(Linearidade)} \\
&= \frac{b^2}{2} + 2b && \text{(Área do triângulo e do retângulo)}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

Cálcule $\displaystyle\int_{-7}^{7} x^3\,dx$

Exemplo 2

$$A = \int_{-7}^{7} x^3\,dx = \int_{-7}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{7} x^3\,dx$$

por simetria

$$\int_{-7}^{0} x^3\,dx = -\int_{0}^{7} x^3\,dx$$

portanto

$$A = 0$$

Exemplo 3

Cálcule $\displaystyle\int_{-2}^{4} |x|\, dx$

Exemplo 3

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{4} |x|dx \\
&= \int_{-2}^{0} |x|dx + \int_{0}^{4} |x|dx \\
&= \int_{-2}^{0} -xdx + \int_{0}^{4} xdx \\
&= \frac{2^2}{2} + \frac{4^2}{2} \\
&= 2 + 8 \\
&= 10
\end{aligned}
$$

Exemplo 4

Calcule a integral da função de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

no intervalo $[-1, 2]$.

Exemplo 4

$$A = \int_{-1}^{2} \mathrm{H}(x)\, dx = \int_{-1}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{2} 1\, dx$$

$$\int_{-1}^{0} 0\, dx = 0$$

$$\int_{0}^{2} 1\, dx \;=\; \text{base} \times \text{altura} \;=\; (2-0) \times 1 \;=\; 2$$

$$A = 0 + 2 = 2$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 2.3 da Apostila

Exercícios: 4, 5

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações