CFVVI – Prova 1 – Turma 7 05/05/2025

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25] Encontre uma parametrização para o movimento de uma partícula que parte do ponto $(a, 0)$ e traça o círculo $x^2 + y^2 = a^2$ duas vezes no sentido horário.

Duas voltas no círculo de raio a centrado na origem
Parametrização do círculo unitário centrado na origem no sentido anti-horário

$$x = \cos(\theta)$$

$$y = \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

Parametrização do círculo de raio a centrado na origem

$$x = a\cos(\theta)$$

$$y = a\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

Realizando duas voltas no círculo

$$x = a\cos(\theta)$$

$$y = a\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\theta \in [0, 4\pi]$$

Invertendo o sentido de rotação

$$x = a\cos(4\pi - \theta) = a\cos(-\theta) = \quad a\cos(\quad \theta)$$

$$y = a\operatorname{sen}(4\pi - \theta) = a\operatorname{sen}(-\theta) = -a\operatorname{sen}(-\theta)$$

$$\theta \in [0, 4\pi]$$

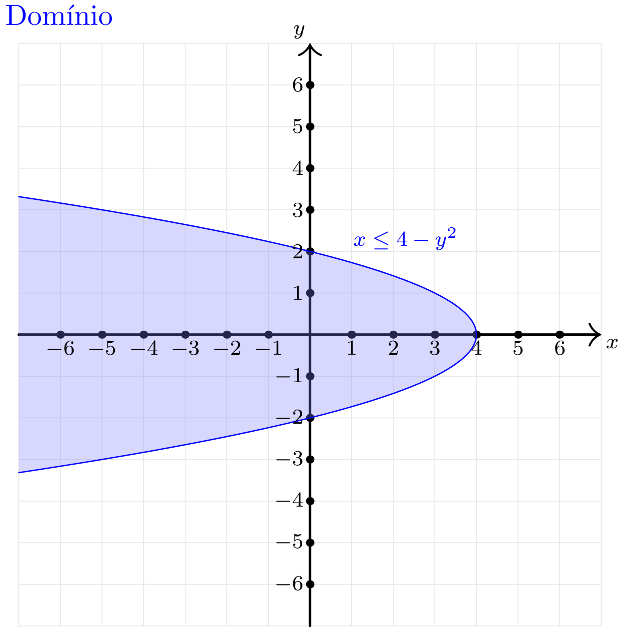
2 [25] Considerando a função $f(x,y) = \sqrt{4 - x - y^2}$

(a) [10] Determine o domínio de f e represente-o graficamente

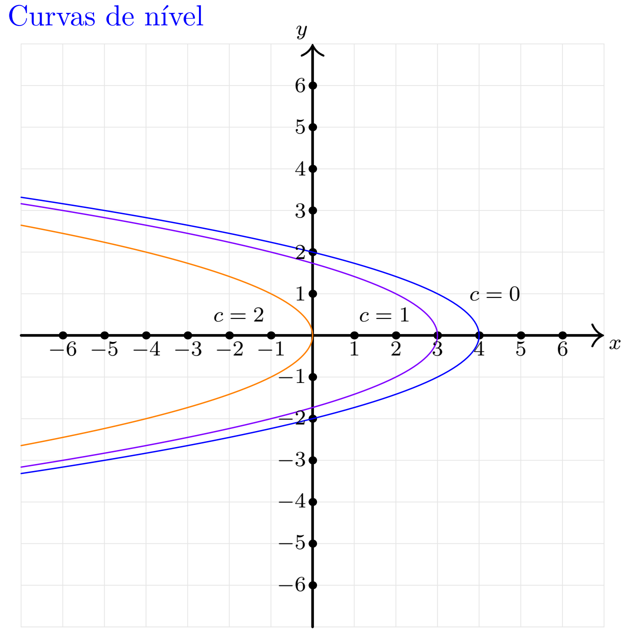
(b) [5] Encontre a imagem de f

(c) [10] Caracterize todas as curvas de nível de f e esboce três delas

Domínio



Curvas de nível



(a) O domínio de f é o conjunto de pontos (x, y) tais que

$$4 - x - y^2 \geq 0$$

$$x \leq 4 - y^2$$

Portanto, o domínio é

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq 4 - y^2\}$$

Geometricamente, corresponde à região à esquerda da parábola $x = 4 - y^2$

(b) Como $4 - x - y^2 \in [0, 4]$ no domínio, temos $\text{Im}(f) = [0, 2]$

(c) As curvas de nível são determinadas por $f(x,y) = c$ para $c \in [0, 2]$:

$$\sqrt{4 - x - y^2} = c$$

$$x = 4 - y^2 - c^2$$

isto é, parábolas voltadas para a esquerda

$c = 0$ $\qquad$ $x = 4 - y^2 - 0^2 = 4 - y^2$

$c = 1$ $\qquad$ $x = 4 - y^2 - 1^2 = 3 - y^2$

$c = 2$ $\qquad$ $x = 4 - y^2 - 2^2 = -y^2$

3 [30] Calcule o limite ou mostre que ele não existe

(a) [15] $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

(b) [15] $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln(y)\,\mathrm{sen}(x)}{x}$

(a) Testando diferentes caminhos

Caminho $x = y^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right|_{x=y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2y^2}{y^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{2y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Caminho $x = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right|_{x=0} = \lim_{y\to 0} \frac{0\times y^2}{0+y^4} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

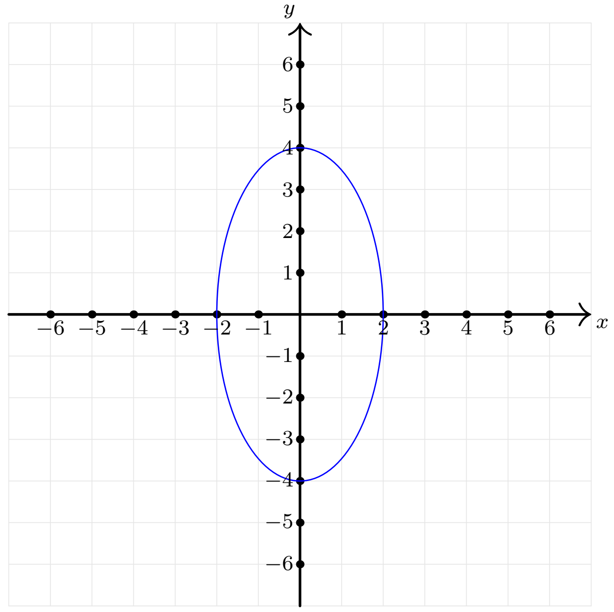
Como os limites são diferentes, o limite **não existe**

(b)

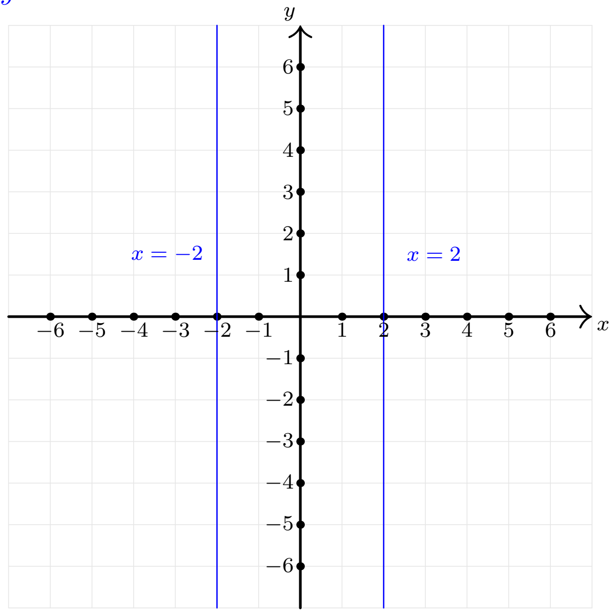
$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln(y)\,\mathrm{sen}(x)}{x} &= \left(\lim_{(x,y)\to(0,1)} \ln(y)\right)\left(\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right) \\ &= \ln(1)\times 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

4 [20] Encontre e esboce as curvas que representam o corte da superfície $4x^2 + y^2 = 16$ pelos planos $z = 0$ e $y = 0$

$z = 0$



$y = 0$



No plano $z = 0$ a equação $4x^2 + y^2 = 16$ permanece inalterada, porém, agora representa a elipse

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

que intercepta o eixo x nos pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ e o eixo y nos pontos $(4, 0)$ e $(-4, 0)$
No plano $y = 0$ a equação $4x^2 + y^2 = 16$ se reduz a

$$4x^2 + 0 = 16$$

$$x^2 = 4$$

$$|x| = 2$$

$$x = \pm 2$$

que representa as retas verticais $x = 2$ e $x = -2$