

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25] Encontre uma parametrização para o círculo definido pela equação $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$

Círculo de raio 2 centrado no ponto $(3, -1)$

Parametrização do círculo unitário centrado na origem

$$x = \cos(\theta)$$

$$y = \sin(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Parametrização do círculo de raio 2 centrado na origem

$$x = 2 \cos(\theta)$$

$$y = 2 \sin(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Parametrização do círculo de raio 2 centrado no ponto $(3, -1)$

$$x = 2 \cos(\theta) + 3$$

$$y = 2 \sin(\theta) - 1$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

2 [25] Considerando a função $f(x,y) = \sqrt{16 - (x-1)^2 - (y-1)^2}$

(a) [10] Determine o domínio de f e represente-o graficamente

(b) [5] Encontre a imagem de f

(c) [10] Caracterize todas as curvas de nível de f e esboce três delas

(a) O domínio de f é o conjunto de todos os pontos (x,y) tais que:

$$16 - (x-1)^2 - (y-1)^2 \geq 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4^2$$

ou seja, os pontos do círculo centrado em $(1,1)$ de raio 4. Portanto, o domínio é

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4^2\}$$

(b) A imagem de f é o conjunto de valores que f pode assumir. Como $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 16$, temos:

$$0 \leq \sqrt{16 - (x-1)^2 - (y-1)^2} \leq 4$$

Logo, a imagem é:

$$\text{Im}(f) = [0, 4]$$

(c) As curvas de nível são definidas por $f(x,y) = c$ para $c \in [0, 4]$.

$$\sqrt{16 - (x-1)^2 - (y-1)^2} = c$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 16 - c^2$$

Cada curva de nível é uma circunferência com centro em $(1,1)$ e raio $\sqrt{16 - c^2}$

$$r = 4 \qquad c = \sqrt{16 - r^2} = 0 \qquad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$$

$$r = 2 \qquad c = \sqrt{16 - r^2} = \sqrt{12} \qquad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

$$r = 1 \qquad c = \sqrt{16 - r^2} = \sqrt{15} \qquad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

3 [30] Calcule o limite ou mostre que ele não existe

(a) [15] $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

(b) [15] $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$

(a) Testando diferentes caminhos

Caminho $y = x$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \Big|_{y=x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xx}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Caminho $y = -x$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \Big|_{y=-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-x)}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Como os limites são diferentes, o limite **não existe**

(b) Multiplicando pelo conjugado

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} \times \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1} \\ &= \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1} + 1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4 [20] Encontre e esboce as curvas que representam os cortes da superfície $y^2 - x^2 = z$ pelos planos $z = 0$ e $y = 0$

No plano $z = 0$ a equação $y^2 - x^2 = z$ se reduz a

$$y^2 - x^2 = 0$$

$$y^2 = x^2$$

$$|y| = |x|$$

$$y = \pm x$$

que corresponde as retas $y = x$ e $y = -x$

No plano $y = 0$ a equação $y^2 - x^2 = z$ se reduz a

$$0 - x^2 = z$$

$$z = -x^2$$

que corresponde uma parábola com vértice na origem e apontando para baixo no plano zx