CFVVI – EXAME ESPECIAL – TURMA 4 28/07/2025

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25] Considerando que a equação $\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(y+z)+\operatorname{sen}(x+z)=0$ define z como função de x e y.

a) Calcule as derivadas $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

b) Encontre os valores de $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em (π,π,π)

c) Construa a aproximação linear da função $z(x,y)$ no ponto (π,π)

a) Considerando $z=z(x,y)$ e derivando por x os dois lados da equação temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(y+z(x,y))+\operatorname{sen}(x+z(x,y))&=0\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(y+z(x,y))+\operatorname{sen}(x+z(x,y))\right)&=0\\
\cos(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y)+\cos(y+z(x,y))\frac{\partial}{\partial x}(y+z(x,y))+\cos(x+z(x,y))\frac{\partial}{\partial x}(x+z(x,y))&=0\\
\cos(x+y)+\cos(y+z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}+\cos(x+z(x,y))\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)&=0\\
\cos(x+y)+\cos(y+z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}+\cos(x+z(x,y))+\cos(x+z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}&=0\\
\left(\cos(y+z(x,y))+\cos(x+z(x,y))\right)\frac{\partial z}{\partial x}&=-\cos(x+y)-\cos(x+z(x,y))\\
\frac{\partial z}{\partial x}&=-\frac{\cos(x+y)+\cos(x+z(x,y))}{\cos(y+z(x,y))+\cos(x+z(x,y))}
\end{aligned}$$

Derivando por y os dois lados da equação temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(y+z(x,y))+\operatorname{sen}(x+z(x,y)) &= 0\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(y+z(x,y))+\operatorname{sen}(x+z(x,y))\right) &= 0\\
\cos(x+y)\frac{\partial}{\partial y}(x+y)+\cos(y+z(x,y))\frac{\partial}{\partial y}(y+z(x,y))+\cos(x+z(x,y))\frac{\partial}{\partial y}(x+z(x,y)) &= 0\\
\cos(x+y)+\cos(y+z(x,y))\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\cos(x+z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y} &= 0\\
\cos(x+y)+\cos(y+z(x,y))+\cos(y+z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y}+\cos(x+z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y} &= 0\\
\left(\cos(y+z(x,y))+\cos(x+z(x,y))\right)\frac{\partial z}{\partial y} &= -\cos(x+y)-\cos(y+z(x,y))\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\cos(x+y)+\cos(y+z(x,y))}{\cos(y+z(x,y))+\cos(x+z(x,y))}
\end{aligned}$$

b) Avaliando as derivadas no ponto (π,π,π)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(\pi,\pi) &= \left(-\frac{\cos(x+y)+\cos(x+z)}{\cos(y+z)+\cos(x+z)}\right)\Bigg|_{(\pi,\pi,\pi)}\\
&= -\frac{\cos(\pi+\pi)+\cos(\pi+\pi)}{\cos(\pi+\pi)+\cos(\pi+\pi)}\\
&= -\frac{2\cos(2\pi)}{2\cos(2\pi)}\\
&= -\frac{2\times 1}{2\times 1} = -1\\
\frac{\partial z}{\partial y}(\pi,\pi) &= \left(-\frac{\cos(x+y)+\cos(y+z)}{\cos(y+z)+\cos(x+z)}\right)\Bigg|_{(\pi,\pi,\pi)}\\
&= -\frac{\cos(\pi+\pi)+\cos(\pi+\pi)}{\cos(\pi+\pi)+\cos(\pi+\pi)}\\
&= -\frac{2\cos(2\pi)}{2\cos(2\pi)}\\
&= -\frac{2\times 1}{2\times 1} = -1
\end{aligned}$$

c) A aproximação linear da função $z(x,y)$ no ponto $(x_0,y_0)=(\pi,\pi)$ é

$$\begin{aligned}
L(x,y) &= z(x_0,y_0)+(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\\
&= z(\pi,\pi)+(x-\pi)\frac{\partial z}{\partial x}(\pi,\pi)+(y-\pi)\frac{\partial z}{\partial y}(\pi,\pi)\\
&= \pi-(x-\pi)-(y-\pi)\\
&= \pi-x+\pi-y+\pi\\
&= 3\pi-x-y
\end{aligned}$$

2 [25] Encontre os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ restrita a região fechada limitada $x^2 + y^2 \leq 9$

Como a função é contínua e a região é fechada e limitada sabemos que f assume um valor máximo e um valor mínimo na região.

Temos que buscar os pontos críticos no interior e aplicar multiplicadores de Lagrange na fronteira.

Gradiente de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 4y^2\right) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 4y^2\right) = 8y$$

Pontos críticos: Impondo $\nabla f = 0$ temos o ponto interior

$$P_1 = (0, 0)$$

Multiplicadores de Lagrange: Temos a restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 9$ e seu gradiente é

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2\right) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2\right) = 2y$$

Precisamos resolver o sistema

$$2x = 2\lambda x$$
$$8y = 2\lambda y$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

Que pode ser simplificado

$$x = \lambda x$$
$$4y = \lambda y$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

Da primeira equação temos que $x = 0$ ou $\lambda = 1$. Se $x = 0$ a terceira equação se reduz a $y^2 = 9$, cujas soluções são $y = 3$ ou $y = -3$. Substituindo qualquer uma delas na segunda equação temos $\lambda = 0$. Encontramos o segundo e terceiro pontos

$$P_2 = (0, -3) \qquad P_3 = (0, 3)$$

Se $\lambda = 1$ a segunda equação se torna $4y = y$ e, portanto, $y = 0$. Substituindo na terceira equação temos $x^2 = 9$, cujas soluções são $x = -3$ ou $x = 3$. Encontramos o quarto e quinto pontos

$$P_4 = (-3, 0) \qquad P_5 = (3, 0)$$

Avaliando a função nos pontos encontrados

$$f(0, 0) = 0^2 + 4 \times 0^2 = 0$$
$$f(0, -3) = 0^2 + 4 \times (-3)^2 = 36$$
$$f(0, 3) = 0^2 + 4 \times 3^2 = 36$$
$$f(-3, 0) = (-3)^2 + 4 \times 0^2 = 9$$
$$f(3, 0) = 3^2 + 4 \times 0^2 = 9$$

O valor mínimo de f é 0 e o valor máximo é 36

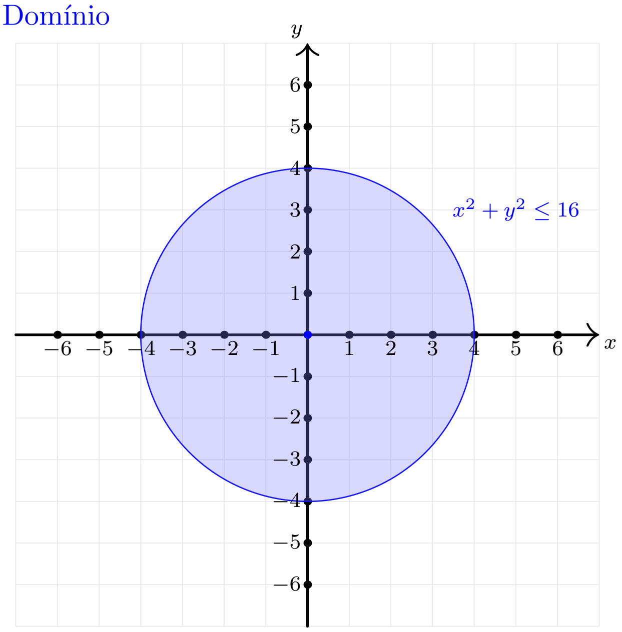
3 [25] Considerando a função $f(x,y) = 4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

a) Determine e esboce o domínio de f

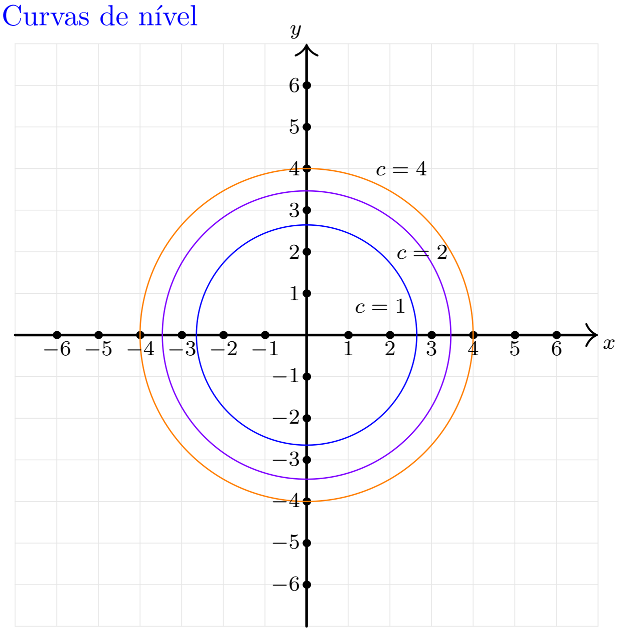
b) Caracterize todas as curvas de nível de f e esboce três delas

c) Calcule o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{f(x,y)}$ ou mostre que ele não existe

Domínio



Curvas de nível



a) O domínio de f consiste dos pontos onde é possível avaliar a raiz quadrada, isto é, os pontos que satisfazem $16 - x^2 - y^2 \geq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} 16 - x^2 - y^2 &\geq 0 \\ -x^2 - y^2 &\geq -16 \\ x^2 + y^2 &\leq 16 = 4^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 16\right\},$$

que corresponde a um disco de raio 4, centrado na origem.

b) As curvas de nível de f são compostas pelos pontos onde $f(x,y) = c$ para alguma constante c na imagem de f.
Para determinar a imagem de f observamos que x^2+y^2 só pode assumir valores no intervalo $[0,16]$. Portanto, $16 - x^2 - y^2$ está limitado ao mesmo intervalo. Consequentemente $\sqrt{16 - x^2 - y^2}$ está em $[0,4]$. Concluímos que os valores de f estão em $[0,4]$, isto é, $\text{Im}(f) = [0,4]$
Para qualquer $c \in \text{Im}(f) = [0,4]$, temos a curva de nível

$$\begin{aligned} f(x,y) &= c \\ 4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2} &= c \\ \sqrt{16 - x^2 - y^2} &= 4 - c \\ 16 - x^2 - y^2 &= (4-c)^2 \\ -x^2 - y^2 &= (4-c)^2 - 16 \\ x^2 + y^2 &= 16 - (4-c)^2 \end{aligned}$$

Que corresponde a uma circunferência centrada na origem de raio

$$r = \sqrt{16 - (4-c)^2}$$

Escolhendo os valores $c = 1$, $c = 2$ e $c = 4$, temos as curvas de nível

$$\gamma_1 : x^2 + y^2 = 16 - (4-1)^2 = 16 - 9 = 7$$

$$\gamma_2 : x^2 + y^2 = 16 - (4-2)^2 = 16 - 4 = 12$$
$$\gamma_3 : x^2 + y^2 = 16 - (4-4)^2 = 16 - 0 = 16$$

c) Calculando o limite

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{f(x,y)}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{4-\sqrt{16-x^2-y^2}}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{4-\sqrt{16-x^2-y^2}} \times \frac{4+\sqrt{16-x^2-y^2}}{4+\sqrt{16-x^2-y^2}}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(4+\sqrt{16-x^2-y^2}\right)}{4^2-\left(\sqrt{16-x^2-y^2}\right)^2}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(4+\sqrt{16-x^2-y^2}\right)}{16-(16-x^2-y^2)}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\left(4+\sqrt{16-x^2-y^2}\right)$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(4+\sqrt{16-x^2-y^2}\right)$$
$$= 4+\sqrt{16-0^2-0^2}$$
$$= 4+4 = 8$$

4 [25] Dado $z = \dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i}{2+2i}$, calcule

a) a parte real de z,

b) a parte imaginária de z,

c) o módulo de z,

d) o argumento de z

Avaliando z

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i}{2+2i} \\
&= \frac{\left[\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i\right](2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} \\
&= \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)(2-2i)+\left(1+\sqrt{3}\right)(2i+2)}{2^2+2^2} \\
&= \frac{2-2i-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i+2i+2+2\sqrt{3}i+2\sqrt{3}}{8} \\
&= \frac{4+4\sqrt{3}i}{8} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}
$$

Parte real de z

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$$

Parte imaginária de z

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Módulo de z

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1+3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Argumento de z, $\varphi = \arg(z)$

$$\mathrm{sen}(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos(\varphi) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{1}{2}$$

$$\arg(z) = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$