Fórmula de Euler

Luis Alberto D’Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Cálculo com Números Complexos

Funções de Números Complexos

Exponencial Complexa

Lista Mínima

Derivadas e Integrais

Quando derivamos ou integramos por uma variável real, $x \in \mathbb{R}$

- A constante i se comporta como uma constante

Para derivar ou integrar por uma variável complexa

- Precisamos de uma nova teoria – Variáveis Complexas

Conteúdo

Cálculo com Números Complexos

Funções de Números Complexos

Exponencial Complexa

Lista Mínima

Conhecemos as Séries de Taylor das funções em $\mathbb{R}$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Podemos estender a definições das funções para $\mathbb{C}$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

Conteúdo

Cálculo com Números Complexos

Funções de Números Complexos

Exponencial Complexa

Lista Mínima

Justificativa

Escolhendo $z = i\theta$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \cdots \\ &= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

"Todas as Constantes da Matemática"

$$e^{i\pi} \;=\; \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi \;=\; -1 + i0 \;=\; -1$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Exponencial Complexa

$$e^z = e^{a+bi} = e^a\, e^{bi} = e^a \left[\cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b) \right]$$

- e^a crescimento ou decrescimento
- $\cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b)$ oscilação

Conteúdo

Cálculo com Números Complexos

Funções de Números Complexos

Exponencial Complexa

Lista Mínima

Lista Mínima

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações