IS – Prova Substitutiva – Turma 8

13/09/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

O exercício correspondente a prova que será substituida vale 50 pontos

1 [25] Calcule o volume do sólido formado pela rotação da região entre as curvas

$$y = x + 2 \qquad y = x^2$$

em torno da reta $x = -1$.

Vamos usar cascas cilíndricas, para isso precisamos encontrar o raio e a altura da casca cilindica

$$r(x) = x - (-1) = x + 1$$

$$h(x) = (x + 2) - x^2 = 2 + x - x^2$$

O intervalo de integração, $[a, b]$, vai ser entre os pontos comuns entre as curvas $y = x + 2$ e $y = x^2$, ou seja $a = 0$ e

$$(x + 2) = x^2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 9 \qquad \sqrt{\Delta} = 3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm 3}{2 \times 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

portanto

$$x_1 = \frac{1 - 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad x_2 = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

O intervalo de integração é $[-1, 2]$

Calculando o volume

$$V = \int_a^b 2\pi \; r(x) \; h(x) \; dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{2} (x + 1)(2 + x - x^2) dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{2} 2x + x^2 - x^3 + 2 + x - x^2 dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{2} 2 + 3x - x^3 dx$$

$$= 2\pi \left(2x + 3\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-1}^{2}$$

$$= 2\pi \left(\left[2 \times 2 + 3\frac{2^2}{2} - \frac{2^4}{4} \right] - \left[2(-1) + 3\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^4}{4} \right] \right)$$

$$= 2\pi \left([4 + 6 - 4] - \left[-2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right] \right)$$

$$= 2\pi \left(6 - \frac{-8 + 6 - 1}{4} \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{24 + 3}{4} \right)$$

$$= \frac{27 \times 2\pi}{4}$$

$$= \frac{27\pi}{2}$$

2 [25] Calcule a integral $\displaystyle\int_1^e x^3 \ln(x) dx$

Para calcular a primitiva

$$F(x) = \int x^3 \ln(x) dx$$

vamos usar integração por partes com

$$u = \ln(x) \qquad du = \frac{dx}{x} \qquad\qquad dv = x^3 dx \qquad v = \frac{x^4}{4}$$

obtendo

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x^3 \ln(x) dx \\ &= \ln(x)\frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4}\frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^4 \ln(x)}{4} - \frac{1}{4}\int x^3 dx \\ &= \frac{x^4 \ln(x)}{4} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} + C \\ &= \frac{x^4}{4}\left(\ln(x) - \frac{1}{4}\right) + C \end{aligned}$$

Agora podemos calcular

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e x^3 \ln(x) dx \\ &= F(x)\Big|_1^e \\ &= \left(\frac{x^4}{4}\left(\ln(x) - \frac{1}{4}\right)\right)\Big|_1^e \\ &= \left(\frac{e^4}{4}\left(\ln(e) - \frac{1}{4}\right)\right) - \left(\frac{1^4}{4}\left(\ln(1) - \frac{1}{4}\right)\right) \\ &= \frac{e^4}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(0 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{e^4}{4}\,\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} \\ &= \frac{3e^4 + 1}{16} \end{aligned}$$

3 [25] Encontre a série de Taylor, centrada em zero, da função e^{-x}