CFVVI – Prova Substitutiva – Turma 2 21/07/2025

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

O exercício correspondente a prova que será substituída vale 50 pontos

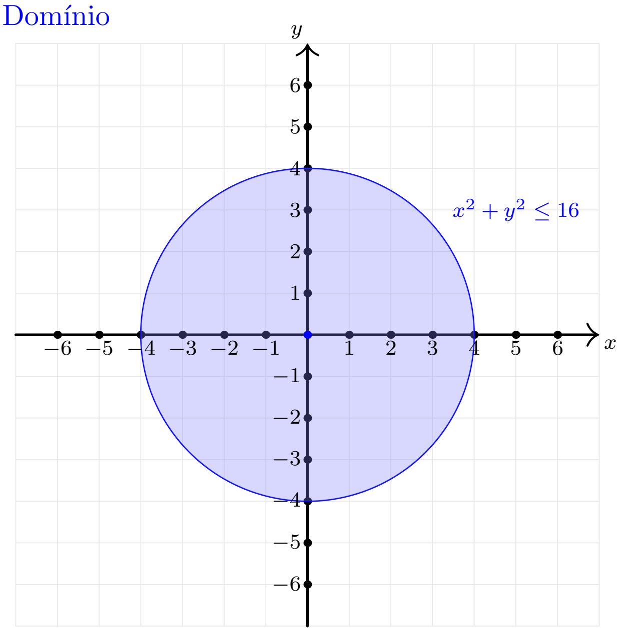
1 [25] Considerando a função $f(x, y) = 4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

a) Determine e esboce o domínio de f

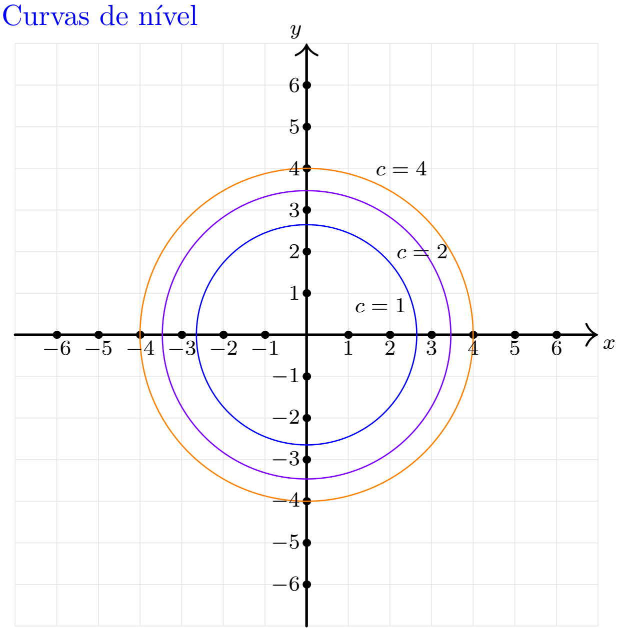
b) Caracterize todas as curvas de nível de f e esboce três delas

c) Calcule o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{f(x, y)}$ ou mostre que ele não existe

Domínio



Curvas de nível



a) O domínio de f consiste dos pontos onde é possível avaliar a raiz quadrada, isto é, os pontos que satisfazem $16 - x^2 - y^2 \geq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} 16 - x^2 - y^2 &\geq 0 \\ -x^2 - y^2 &\geq -16 \\ x^2 + y^2 &\leq 16 = 4^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle/ \ x^2 + y^2 \leq 16\right\},$$

que corresponde a um disco de raio 4, centrado na origem.

b) As curvas de nível de f são compostas pelos pontos onde $f(x,y) = c$ para alguma constante c na imagem de f.

Para determinar a imagem de f observamos que x^2+y^2 só pode assumir valores no intervalo $[0,16]$. Portanto, $16 - x^2 - y^2$ está limitado ao mesmo intervalo. Consequentemente $\sqrt{16 - x^2 - y^2}$ está em $[0,4]$. Concluímos que os valores de f estão em $[0,4]$, isto é, $\operatorname{Im}(f) = [0,4]$

Para qualquer $c \in \operatorname{Im}(f) = [0,4]$, temos a curva de nível

$$\begin{aligned} f(x,y) &= c \\ 4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2} &= c \\ \sqrt{16 - x^2 - y^2} &= 4 - c \\ 16 - x^2 - y^2 &= (4-c)^2 \\ -x^2 - y^2 &= (4-c)^2 - 16 \\ x^2 + y^2 &= 16 - (4-c)^2 \end{aligned}$$

Que corresponde a uma circunferência centrada na origem de raio

$$r = \sqrt{16 - (4-c)^2}$$

Escolhendo os valores $c = 1$, $c = 2$ e $c = 4$, temos as curvas de nível

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: x^2 + y^2 = 16 - (4-1)^2 = 16 - 9 = 7 \\ \gamma_2 &: x^2 + y^2 = 16 - (4-2)^2 = 16 - 4 = 12 \\ \gamma_3 &: x^2 + y^2 = 16 - (4-4)^2 = 16 - 0 = 16 \end{aligned}$$

c) Calculando o limite

$$\begin{aligned} L &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{f(x,y)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}} \times \\ &\qquad\qquad \frac{4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}}{4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}\right)}{4^2 - \left(\sqrt{16 - x^2 - y^2}\right)^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}\right)}{16 - (16 - x^2 - y^2)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\left(4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}\right) \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}\right) \\ &= 4 + \sqrt{16 - 0^2 - 0^2} \\ &= 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

2 [25] Considerando que a equação

$$\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(y+z)+\operatorname{sen}(x+z)=0$$

define z como função de x e y.

a) Calcule as derivadas $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

b) Encontre os valores de $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em (π,π,π)

c) Construa a aproximação linear da função $z(x,y)$ no ponto (π,π)

a) Considerando $z=z(x,y)$ e derivando por x os dois lados da equação temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(y+z(x,y))+\operatorname{sen}(x+z(x,y))&=0\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(y+z(x,y))+\operatorname{sen}(x+z(x,y))\right)&=0\\
\cos(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y)+\cos(y+z(x,y))\frac{\partial}{\partial x}(y+z(x,y))+\cos(x+z(x,y))\frac{\partial}{\partial x}(x+z(x,y))&=0\\
\cos(x+y)+\cos(y+z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}+\cos(x+z(x,y))\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)&=0\\
\cos(x+y)+\cos(y+z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}+\cos(x+z(x,y))+\cos(x+z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}&=0\\
\left(\cos(y+z(x,y))+\cos(x+z(x,y))\right)\frac{\partial z}{\partial x}&=-\cos(x+y)-\cos(x+z(x,y))\\
\frac{\partial z}{\partial x}&=-\frac{\cos(x+y)+\cos(x+z(x,y))}{\cos(y+z(x,y))+\cos(x+z(x,y))}
\end{aligned}$$

Derivando por y os dois lados da equação temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(y+z(x,y))+\operatorname{sen}(x+z(x,y))&=0\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(y+z(x,y))+\operatorname{sen}(x+z(x,y))\right)&=0\\
\cos(x+y)\frac{\partial}{\partial y}(x+y)+\cos(y+z(x,y))\frac{\partial}{\partial y}(y+z(x,y))+\cos(x+z(x,y))\frac{\partial}{\partial y}(x+z(x,y))&=0\\
\cos(x+y)+\cos(y+z(x,y))\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\cos(x+z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y}&=0\\
\cos(x+y)+\cos(y+z(x,y))+\cos(y+z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y}+\cos(x+z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y}&=0\\
\left(\cos(y+z(x,y))+\cos(x+z(x,y))\right)\frac{\partial z}{\partial y}&=-\cos(x+y)-\cos(y+z(x,y))\\
\frac{\partial z}{\partial y}&=-\frac{\cos(x+y)+\cos(y+z(x,y))}{\cos(y+z(x,y))+\cos(x+z(x,y))}
\end{aligned}$$

b) Avaliando as derivadas no ponto (π, π, π)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(\pi,\pi) &= \left(-\frac{\cos(x+y)+\cos(x+z)}{\cos(y+z)+\cos(x+z)}\right)\Bigg|_{(\pi,\pi,\pi)} \\
&= -\frac{\cos(\pi+\pi)+\cos(\pi+\pi)}{\cos(\pi+\pi)+\cos(\pi+\pi)} \\
&= -\frac{2\cos(2\pi)}{2\cos(2\pi)} \\
&= -\frac{2\times 1}{2\times 1} = -1 \\
\frac{\partial z}{\partial y}(\pi,\pi) &= \left(-\frac{\cos(x+y)+\cos(y+z)}{\cos(y+z)+\cos(x+z)}\right)\Bigg|_{(\pi,\pi,\pi)} \\
&= -\frac{\cos(\pi+\pi)+\cos(\pi+\pi)}{\cos(\pi+\pi)+\cos(\pi+\pi)} \\
&= -\frac{2\cos(2\pi)}{2\cos(2\pi)} \\
&= -\frac{2\times 1}{2\times 1} = -1
\end{aligned}$$

c) A aproximação linear da função $z(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0) = (\pi, \pi)$ é

$$\begin{aligned}
L(x,y) &= z(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) \\
&= z(\pi,\pi) + (x-\pi)\frac{\partial z}{\partial x}(\pi,\pi) + (y-\pi)\frac{\partial z}{\partial y}(\pi,\pi) \\
&= \pi - (x-\pi) - (y-\pi) \\
&= \pi - x + \pi - y + \pi \\
&= 3\pi - x - y
\end{aligned}$$

3 [25] Encontre os valores máximo e mínimo da função $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ restrita a região fechada limitada $x^2 + y^2 \leq 9$

Como a função é contínua e a região é fechada e limitada sabemos que f assume um valor máximo e um valor mínimo na região.

Temos que buscar os pontos críticos no interior e aplicar multiplicadores de Lagrange na fronteira.

Gradiente de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 4y^2\right) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 4y^2\right) = 8y$$

Pontos críticos: Impondo $\nabla f = 0$ temos o ponto interior

$$P_1 = (0,0)$$

Multiplicadores de Lagrange: Temos a restrição $g(x,y) = x^2 + y^2 \leq 9$ e seu gradiente é

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2\right) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2\right) = 2y$$

Precisamos resolver o sistema

$$2x = 2\lambda x$$

$$8y = 2\lambda y$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

Que pode ser simplificado

$$x = \lambda x$$

$$4y = \lambda y$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

Da primeira equação temos que $x = 0$ ou $\lambda = 1$. Se $x = 0$ a terceira equação se reduz a $y^2 = 9$, cujas soluções são $y = 3$ ou $y = -3$. Substituindo qualquer uma delas na segunda equação temos $\lambda = 0$. Encontramos o segundo e terceiro pontos

$$P_2 = (0,-3) \qquad P_3 = (0,3)$$

Se $\lambda = 1$ a segunda equação se torna $4y = y$ e, portanto, $y = 0$. Substituindo na terceira equação temos $x^2 = 9$, cujas soluções são $x = -3$ ou $x = 3$. Encontramos o quarto e quinto pontos

$$P_4 = (-3,0) \qquad P_5 = (3,0)$$

Avaliando a função nos pontos encontrados

$$f(0,0) = 0^2 + 4 \times 0^2 = 0$$

$$f(0,-3) = 0^2 + 4 \times (-3)^2 = 36$$

$$f(0,3) = 0^2 + 4 \times 3^2 = 36$$

$$f(-3,0) = (-3)^2 + 4 \times 0^2 = 9$$

$$f(3,0) = 3^2 + 4 \times 0^2 = 9$$

O valor mínimo de f é 0 e o valor máximo é 36