CFVVI – Prova 3 – Turma 2 14/07/2025

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [20] Calcule raízes cúbicas do número complexo $z = 1 + i\sqrt{3}$

Converter para forma polar

$$x = \mathrm{Re}(z) = 1 \qquad y = \mathrm{Im}(z) = \sqrt{3} \qquad |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\varphi = \arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2e^{i\pi/3}$$

Aplicar a fórmula de De Moivre para as raízes cúbicas

$$u_k = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/3 + 2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi/3 + 2k\pi}{3}\right)\right] \qquad k = 0{,}1{,}2$$

Calculando os argumentos das raízes

$$\varphi_0 = \frac{\pi/3 + 2\times 0\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi/3 + 2\times 1\pi}{3} = \frac{\pi/3 + 6\pi/3}{3} = \frac{7\pi}{9}$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi/3 + 2\times 2\pi}{3} = \frac{\pi/3 + 12\pi/3}{3} = \frac{13\pi}{9}$$

As raízes são

$$u_0 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right)\right] = \sqrt[3]{2}e^{i\pi/9}$$

$$u_1 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{9}\right)\right] = \sqrt[3]{2}e^{7i\pi/9}$$

$$u_2 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{9}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{13\pi}{9}\right)\right] = \sqrt[3]{2}e^{13i\pi/9}$$

2 [20] Converta a equação para coordenadas cartesianas e mostre que a solução é uma cônica

$$r = \frac{10}{4 + \operatorname{sen}\theta}$$

Queremos mostrar que a equação, escrita em coordenadas cartesianas, (x, y), é uma expressão com termos de segundo grau em x e y

$$\begin{aligned}
r &= \frac{10}{4 + \operatorname{sen}\theta} \\
r(4 + \operatorname{sen}\theta) &= 10 \\
4r + r\operatorname{sen}\theta &= 10 \\
4r + y &= 10 \\
4r &= 10 - y \\
16\left(x^2 + y^2\right) &= 100 - 20y + y^2 \\
16x^2 + 16y^2 &= 100 - 20y + y^2
\end{aligned}$$

$$16x^2 + 15y^2 + 20y - 100 = 0$$

3 [30] Encontre e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$ na região aberta $-\pi < x < \pi$ e $-\pi < y < \pi$

Calculando as **derivadas primeiras** de f

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sen}(x)\right)\operatorname{sen}(y)\\ &= \cos(x)\operatorname{sen}(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\right)\\ &= \operatorname{sen}(x)\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{sen}(y)\right)\\ &= \operatorname{sen}(x)\cos(y)\end{aligned}$$

Encontrando os **pontos críticos**. As derivadas parciais de f existem em todo o plano, temos então que resolver o sistema $\nabla f = 0$

$$\begin{aligned}\cos(x)\operatorname{sen}(y) &= 0\\ \operatorname{sen}(x)\cos(y) &= 0\end{aligned}$$

Da primeira equação temos que

$$\cos(x) = 0 \qquad x = \pm\frac{\pi}{2}$$

ou

$$\operatorname{sen}(y) = 0 \qquad y = 0$$

Se $y = 0$ a segunda equação se torna

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x)\cos(0) &= 0\\ \operatorname{sen}(x) &= 0\\ x &= 0\end{aligned}$$

Então o primeiro ponto é

$$P_1 = (0,0)$$

Se $x = \pi/2$ a segunda equação se torna

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(y) &= 0\\ \cos(y) &= 0\\ y &= \pm\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Temos então os pontos

$$P_2 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad P_3 = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$$

Se $x = -\pi/2$ a segunda equação se torna

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(y) &= 0\\ -\cos(y) &= 0\\ y &= \pm\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Temos então os pontos

$$P_4 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad P_5 = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$$

Para **classificar** os pontos críticos precisamos do determinante da Hessiana

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(x)\operatorname{sen}(y)\right) = -\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{sen}(x)\cos(y)\right) = -\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sen}(x)\cos(y)\right) = \cos(x)\cos(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(x,y) &= f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2\\ &= \left(-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\right)\\ &\quad \times \left(-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\right)\\ &\quad - \left(\cos(x)\cos(y)\right)^2\\ &= \operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}^2(y) - \cos^2(x)\cos^2(y)\end{aligned}$$

Classificando o ponto P_1

$$\begin{aligned}D(0,0) &= \operatorname{sen}^2(0)\operatorname{sen}^2(0) - \cos^2(0)\cos^2(0)\\ &= 0 \times 0 - 1 \times 1 = -1 < 0\end{aligned}$$

O ponto P_1 é um ponto de sela

Classificando o ponto P_2

$$\begin{aligned} D\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &= \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 \times 1 - 0 \times 0 \\ &= 1 > 0 \\ f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -1 \times 1 \\ &= -1 < 0 \end{aligned}$$

O ponto P_2 é um máximo local

Classificando o ponto P_3

$$\begin{aligned} D\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) &= \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 \times (-1)^2 - 0 \times 0 \\ &= 1 > 0 \\ f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) &= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -1 \times (-1) \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

O ponto P_3 é um mínimo local

Classificando o ponto P_4

$$\begin{aligned} D\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &= \operatorname{sen}^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= (-1)^2 \times 1 - 0 \times 0 \\ &= 1 > 0 \\ f_{xx}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &= -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -(-1) \times 1 \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

O ponto P_4 é um mínimo local

Classificando o ponto P_5

$$\begin{aligned} D\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) &= \operatorname{sen}^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= (-1)^2 \times (-1)^2 - 0 \times 0 \\ &= 1 > 0 \\ f_{xx}\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) &= -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -(-1) \times (-1) \\ &= -1 < 0 \end{aligned}$$

O ponto P_5 é um máximo local

4 [30] Encontre o valor mínimo de $x^2 + y^2$ sujeito a $xy = 1$

Queremos encontrar os valores máximo e mínimo da função

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

sujeitos a restrição

$$g(x,y) = xy = 1$$

Gradiente de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2\right) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2\right) = 2y$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Gradiente de g

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x$$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Precisamos resolver o sistema

$$2x = \lambda y$$
$$2y = \lambda x$$
$$xy = 1$$

Pela terceira equação sabemos que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Isolando λ na primeira, $\lambda = \dfrac{2x}{y}$, e substituindo na segunda, temos

$$2y = \lambda x$$
$$2y = \frac{2x}{y}x$$
$$y^2 = x^2$$
$$y = \pm x$$

Se $y = x$, da terceira equação temos

$$xy = 1$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

Temos, então, os pontos

$$P_1 = (1,1) \qquad \text{e} \qquad P_2 = (-1,-1)$$

Se $y = -x$, da terceira equação temos

$$xy = 1$$
$$x(-x) = 1$$
$$-x^2 = 1$$
$$x^2 = -1$$

Não existe solução neste caso.
Avaliando f nos pontos encontrados, temos

$$f(1,1) = 1^2 + 1^2 = 2$$
$$f(-1,-1) = (-1)^2 + (-1)^2 = 2$$

Os dois pontos são pontos de mínimo e o valor mínimo da função é 2