Séries Numéricas com Termos Gerais

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Séries Alternadas

Os termos trocam de sinal alternando entre um positivo e um negativo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

com $a_n > 0$ para todo n

Exemplo, Série Harmônica Alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Teste da Série Alternada – Teste de Leibniz

Seja a_n tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

1. $a_n > 0$ — a_n são os módulos dos termos da série
2. $a_n \geq a_{n+1}$ — os termos são decrescentes em módulo
3. $a_n \to 0$ — os termos tendem a zero

Então, a série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge

Exemplo 1

Vamos analisar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Percebemos que

- a série é alternada
- o módulo do termo geral é $\quad a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$
- $a_n \geq a_{n+1}$
- $a_n \to 0$

Portanto a série converge pelo Teste da Série Alternada

Exemplo 1

Por outro lado

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Série geométrica com $a = 1$ e $r = -\dfrac{1}{2}$

Como $|r| < 1$ ela converge

sua soma é $\quad S = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1}{1+{}^1\!/_2} = \dfrac{2}{3}$

Conteúdo

Estimativa do Erro

Dada uma série que satisfaz as condições do teste da série alternada

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n$$

converge para a soma da série S

- $|R_n| < a_{n+1}$
- S está entre S_n e S_{n+1}
- $R_n = S - S_n$ tem o mesmo sinal do primeiro termo não utilizado

Conteúdo

Convergência Absoluta

Uma série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

converge absolutamente, ou é absolutamente convergente,

se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge

Convergência Condicional

Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

mas $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge

a série é condicionalmente convergente

Exemplo: Série Harmônica Alternada

Teste da Convergência Absoluta

Uma série absolutamente convergente é convergente.

Séries com termos não negativos e convergentes são absolutamente convergentes

Teorema do Rearranjo

Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente

dado qualquer rearranjo (b_k) da sequência (a_n)

a série $\sum b_k$ converge e

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Conteúdo

Exemplo 2

Use o Teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Exemplo 2 – Condição 1: $a_n > 0$

Como $1 + \frac{1}{n} > 1$ para todo $n \geq 1$

Podemos escolher

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

que garante $a_n > 0$

Exemplo 2 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Considerando a função

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 + x^{-1}\right)$$

temos

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^{-1}}\left(-x^{-2}\right) = \frac{-1}{\left(1 + x^{-1}\right)x^2} = \frac{-1}{x^2 + x} < 0 \qquad \forall x \geq 1$$

Portanto a_n é decrescente $a_n > a_{n+1}$

Exemplo 2 – Condição 3: $a_n \to 0$

Observando que

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

e a função $\ln(x)$ é contínua em 1

$$\lim a_n = \lim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$$

O Teste de Leibniz garante que a série converge

Exemplo 3

Use o Teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{(\ln n)^2}$$

Exemplo 3 – Condição 1: $a_n > 0$

Vemos que $a_n = \dfrac{4}{(\ln n)^2} > 0$ para todo $n \geq 2$

Exemplo 3 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Como $\ln n$ é crescente,

$$a_n = \frac{4}{(\ln n)^2}$$

é decrescente

Exemplo 3 – Condição 3: $a_n \to 0$

$a_n \to 0$, pois

$$(\ln n)^2 \to \infty$$

O teste de Leibniz garante que a série converge

Exemplo 4

Use o teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10^n}{(n+1)!}$$

Exemplo 4 – Condição 1: $a_n > 0$

$$a_n = \frac{10^n}{(n+1)!} \text{ é positivo para } n \geq 1$$

Exemplo 4 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

$$n \geq 8$$

$$n + 2 \geq 10$$

$$1 \geq \frac{10}{n+2}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{10^{n+1}}{(n+2)!} \\ &= \frac{10}{(n+2)} \frac{10^n}{(n+1)!} \\ &\leq \frac{10^n}{(n+1)!} \\ &= a_n \end{aligned}$$

Portanto, a_n é decrescente para $n \geq 8$

Exemplo 4 – Condição 3: $a_n \to 0$

Para $n > 10$

$$
\begin{aligned}
(n+1)! &= 1 \times 2 \times \cdots \times 9 \times 10 \times 11 \times \cdots \times n \times (n+1) \\
&\geq 10!\ 10^{n-10}\,(n+1)
\end{aligned}
$$

Dessa forma

$$\frac{10^n}{(n+1)!} \leq \frac{10^n}{10!\ 10^{n-10}\,(n+1)} = \frac{10^{10}}{10!}\,\frac{1}{(n+1)} \to 0$$

Como $0 < \dfrac{10^n}{(n+1)!} \leq \dfrac{10^{10}}{10!}\,\dfrac{1}{(n+1)}$

o Teorema do Confronto garante que $a_n \to 0$

Exemplo 4

O teste de Leibniz garante que a série converge

Exemplo 5

Estime o erro cometido quando aproximamos o valor da soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

pela soma dos seus quatro primeiros termos

Exemplo 5

A série converge pelo teste da série alternada, portanto

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Como somamos quatro quatro termos (S_4), temos que

$$|R_4| < a_5 = \frac{1}{5}$$

Exemplo 6

Determine quantos termos devem ser somados para aproximar a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 3}$$

com erro menor do que 0,0001

Exemplo 6

A série converge pelo teste da série alternada, portanto

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Para garantir que o erro é menor do que 0,001 devemos impor que

$$a_{n+1} < 10^{-4}$$

$$\frac{1}{n^2+3} < 10^{-4}$$

$$\frac{1}{10^{-4}} < n^2 + 3$$

$$n^2 > 10^4 - 3$$

$$n^2 > 10^4$$

$$n > 10^2$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção ? da Apostila

Exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações