CFVVI – PROVA 2 – TURMA 6 12/08/2024

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [20] Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial v}(-2,\pi)$ sabendo que $z = \ln\left(x^2+y^2\right)$, $x = ue^v \operatorname{sen}(u)$ e $y = ue^v\cos(u)$.

Vamos usar a regra da cadeia

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Calculando as derivadas necessárias

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right) = \frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right) = \frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(ue^v \operatorname{sen}(u)\right) = ue^v \operatorname{sen}(u)$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(ue^v \cos(u)\right) = ue^v \cos(u)$$

Portanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\\ &= \frac{2x}{x^2+y^2}\times ue^v\operatorname{sen}(u) + \frac{2y}{x^2+y^2}\times ue^v\cos(u)\\ &= \frac{2ue^v}{x^2+y^2}\left(x\operatorname{sen}(u) + y\cos(u)\right)\end{aligned}$$

Avaliando no ponto $(u,v) = (-2,\pi)$

$$x\,(-2,\pi) = \left(ue^v\operatorname{sen}(u)\right)\Big|_{(-2,\pi)} = -2e^\pi\operatorname{sen}(-2)$$

$$y\,(-2,\pi) = \left(ue^v\cos(u)\right)\Big|_{(-2,\pi)} = -2e^\pi\cos(-2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left[\frac{2ue^v}{x^2+y^2}\left(x\operatorname{sen}(u)+y\cos(u)\right)\right]\Bigg|_{(-2,\pi)}$$

$$= \frac{2(-2)e^{\pi}}{[-2e^{\pi}\operatorname{sen}(-2)]^2 + [-2e^{\pi}\cos(-2)]^2}\big[[-2e^{\pi}\operatorname{sen}(-2)]\operatorname{sen}(-2) + [-2e^{\pi}\cos(-2)]\cos(-2)\big]$$

$$= \frac{-4e^{\pi}}{4e^{2\pi}\operatorname{sen}^2(-2) + 4e^{2\pi}\cos(-2)}\big[-2e^{\pi}\operatorname{sen}^2(-2) - 2e^{\pi}\cos^2(-2)\big]$$

$$= \frac{-4e^{\pi}}{4e^{2\pi}[\operatorname{sen}^2(-2) + \cos(-2)]}\big[-2e^{\pi}[\operatorname{sen}^2(-2) + \cos^2(-2)]\big]$$

$$= \frac{-4e^{\pi}}{4e^{2\pi}}[-2e^{\pi}]$$

$$= 2$$

2 [25] Calcule a derivada da função $f(x,y)=\dfrac{x-y}{xy+2}$ na direção $v=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$ no ponto $(1,-1)$.

Precisamos do vetor unitário na direção do vetor

$$v=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

ou seja

$$u=\frac{v}{|v|}=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{25}}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}$$

Precisamos também do gradiente de f

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-y}{xy+2}\right)\\&=\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x-y)(xy+2)-(x-y)\frac{\partial}{\partial x}(xy+2)}{(xy+2)^2}\\&=\frac{(1)(xy+2)-(x-y)(y)}{(xy+2)^2}\\&=\frac{xy+2-xy+y^2}{(xy+2)^2}\\&=\frac{2+y^2}{(xy+2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-y}{xy+2}\right)\\&=\frac{\frac{\partial}{\partial y}(x-y)(xy+2)-(x-y)\frac{\partial}{\partial y}(xy+2)}{(xy+2)^2}\\&=\frac{(-1)(xy+2)-(x-y)(x)}{(xy+2)^2}\\&=\frac{-xy-2-x^2+xy}{(xy+2)^2}\\&=\frac{-2-x^2}{(xy+2)^2}\end{aligned}$$

$$\nabla f=\begin{pmatrix}\dfrac{2+y^2}{(xy+2)^2}\\[2ex]\dfrac{-2-x^2}{(xy+2)^2}\end{pmatrix}=\frac{1}{(xy+2)^2}\begin{pmatrix}2+y^2\\-2-x^2\end{pmatrix}$$

Avaliando o gradiente no ponto $(1,-1)$

$$\nabla f(1,-1) = \frac{1}{(xy+2)^2}\begin{pmatrix} 2+y^2 \\ -2-x^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,-1)}$$

$$= \frac{1}{(1(-1)+2)^2}\begin{pmatrix} 2+(-1)^2 \\ -2-1^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1)^2}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Derivada direcional

$$D_u = u \cdot \nabla f(1,-1) = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}3 + \frac{4}{5}(-3) = \frac{9-12}{5} = \frac{-3}{5}$$

3 [25] Encontre linearização da função $f(x,y) = x^2 - xy - y^2$ no ponto $(1,1)$.

A linearização de f no ponto $(1,1)$ é a função

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &= f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) \end{aligned}$$

Precisamos das derivadas parciais de f

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 - xy - y^2\right] = 2x - y$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 - xy - y^2\right] = -x - 2y$$

Avaliando f e suas derivadas no ponto $(1,1)$

$$f(1,1) = \left(x^2 - xy - y^2\right)\Big|_{(1,1)} = 1^2 - 1 \times 1 - 1^2 = -1$$

$$f_x(1,1) = (2x - y)\Big|_{(1,1)} = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$f_y(1,1) = (-x - 2y)\Big|_{(1,1)} = -1 - 2 \times 1 = -3$$

Assim

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) \\ &= -1 + 1(x-1) - 3(y-1) \\ &= -1 + x - 1 - 3y + 3 \\ &= x - 3y + 1 \end{aligned}$$

4 [30] Considerando a função $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$.

a) [5] Calcule o gradiente de f.

b) [5] Calcule a hessiana de f.

c) [10] Encontre todos os pontos críticos de f.

d) [10] Classifique cada ponto crítico de f.

a)
Precisamos das derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^3 + 3xy + y^3\right] = 3x^2 + 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^3 + 3xy + y^3\right] = 3x + 3y^2$$

então

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y \\ 3x + 3y^2 \end{pmatrix}$$

b)
Precisamos das derivadas parciais de segunda ordem de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[3x^2 + 3y\right] = 6x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[3x + 3y^2\right] = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[3x + 3y^2\right] = 3$$

então

$$H = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}$$

c)
A função é um polinômio, então possui derivadas em todos os pontos do plano. Assim os pontos críticos são apenas os pontos onde as derivadas parciais são zero, $\nabla f = 0$

$$3x^2 + 3y = 0 \qquad \text{e} \qquad 3x + 3y^2 = 0$$

ou, simplificando,

$$x^2 + y = 0 \qquad \text{e} \qquad x + y^2 = 0$$

Isolando y na primeira equação, $y = -x^2$, e substituindo na segunda, temos

$$x + y^2 = 0$$

$$
\begin{aligned}
x + \left(-x^2\right)^2 &= 0 \\
x + x^4 &= 0 \\
x(1 + x^3) &= 0
\end{aligned}
$$

As soluções dessa equação são $x = 0$ ou $x - 1$. Se $x = 0$ temos $y = 0$ e se $x = -1$ temos $y = -1$. Portanto, os pontos críticos são

$$(x_1, y_1) = (0, 0) \qquad \text{e} \qquad (x_2, y_2) = (-1, -1)$$

d)

Para classificar os pontos críticos precisamos avaliar o discriminante nos pontos críticos.
Considerando o ponto $(x_1, y_1) = (0, 0)$

$$f_{xx}(0, 0) = 0$$

$$f_{yy}(0, 0) = 0$$

$$f_{xy}(0, 0) = 3$$

$$D_1 = f_{xx}(0, 0) f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 0 \times 0 - 3^2 = -9 < 0$$

Portanto, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela.
Considerando o ponto $(x_2, y_2) = (-1, -1)$

$$f_{xx}(-1, -1) = -6$$

$$f_{yy}(-1, -1) = -6$$

$$f_{xy}(-1, -1) = 3$$

$$D_2 = f_{xx}(-1, -1) f_{yy}(-1, -1) - f_{xy}^2(-1, -1) = (-6)(-6) - 3^2 = 36 - 9 = 25 > 0$$

Portanto, o ponto $(-1, -1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0$ o ponto é um ponto de máximo local.