Diferenciais

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

Conteúdo

Variação em uma Dimensão

Em uma dimensão podemos estimar o valor da função em um ponto próximo à x_0 usando a derivada em x_0

$$df = f'(x_0)ds$$

$$ds = x - x_0$$

$$df \approx f(x) - f(x_0)$$

Variação em Várias Dimensões

Em várias dimensões usamos a derivada direcional

$$df = \left(D_u f \Big|_{(x_0, y_0)} \right) ds = \left(\nabla f \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot u \right) ds$$

$$ds = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$df \approx f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

Exemplo 1

Calcule quanto

$$f(x, y, z) = y\,\mathrm{sen}(x) + 2yz$$

irá variar se nos movermos 0,1 unidades a partir de $P_0(0, 1, 0)$
na direção do ponto $P_1(2, 2, -2)$

Exemplo 1 – Direção do movimento

$$v = \overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$$

Normalizando o vetor

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}$$

Exemplo 1 – Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y \operatorname{sen}(x) + 2yz\right) = y\cos(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y \operatorname{sen}(x) + 2yz\right) = \operatorname{sen}(x) + 2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(y \operatorname{sen}(x) + 2yz\right) = 2y$$

Exemplo 1 – Gradiente de f

$$\nabla f = (y\cos(x))\boldsymbol{i} + (\operatorname{sen}(x) + 2z)\boldsymbol{j} + (2y)\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} y\cos(x) \\ \operatorname{sen}(x) + 2z \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0,1,0) = (1\cos(0))\boldsymbol{i} + (\operatorname{sen}(0) + 2\times 0)\boldsymbol{j} + (2\times 1)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Derivada direcional

$$
\begin{aligned}
D_u f\Big|_{(0,1,0)} &= \left(\nabla f\Big|_{(0,1,0)} \cdot u\right) = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}\right) \\
&= 1 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Variação

$$df = \left(D_u f \Big|_{(0,1,0)} \right) ds = -\frac{2}{3} \times 0{,}1 = -\frac{2}{3}\frac{1}{10} = -\frac{2}{30} = -\frac{1}{15} \approx -0{,}067$$

Conteúdo

Diferencial em Uma Dimensão

Quando x varia de x_0 para $x_0 + \Delta x$

A variação da função f é $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

A diferencial de f é $df = f'(x_0)\Delta x$

Diferencial em Uma Dimensão

Quando x varia de x_0 para	$x_0 + dx$
A variação da função f é	$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$
A diferencial de f é	$df = f'(x_0)dx$

Diferencial em Duas Dimensão

Quando (x, y) varia de (x_0, y_0) para $(x_0 + dx, y_0 + dy)$

A variação da função f é $\Delta f = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0)$

A diferencial de f é $df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$

As diferenciais dx e dy são variáveis independentes

$$dx = x - x_0 \qquad dy = y - y_0$$

Definição

Se movemos de (x_0, y_0) para um ponto próximo $(x_0 + dx, y_0 + dy)$

A Diferencial Total de f é

$$df \;=\; f_x(x_0, y_0)\,dx \;+\; f_y(x_0, y_0)\,dy$$

Exemplo 2

Uma lata de formato cilíndrico foi projetada para ter um raio de 1 pol. e uma altura de 5 pol., mas o raio tem um erro de $dr = 0{,}03$ e a altura tem um erro de $dh = -0{,}1$.

Qual a variação resultante no volume da lata?

Exemplo 2 – Variação exata

$$
\begin{aligned}
\Delta V &= V(r_0 + dr, h_0 + dh) - V(r_0, h_0) \\
&= V(1 + 0{,}03, 5 - 0{,}1) - V(1, 5) \\
&= V(1{,}03, 4{,}9) - V(1, 5) \\
&= \pi(1{,}03)^2 \times 4{,}9 - \pi 1^2 \times 5 \\
&\approx 16{,}3313 - 15{,}7080 \\
&= 0{,}6233
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Variação usando o diferencial

$$
\begin{aligned}
\Delta V \approx dV &= V_r(r_0, h_0)\,dr + V_h(r_0, h_0)\,dh \\
&= (2\pi r h)\Big|_{(r_0,h_0)} dr + \left(\pi r^2\right)\Big|_{(r_0,h_0)} dh \\
&= (2\pi r h)\Big|_{(1,5)} (0{,}03) + \left(\pi r^2\right)\Big|_{(1,5)} (-0{,}1) \\
&= (2\pi 1 \times 5)\,(0{,}03) - \left(\pi 1^2\right)(0{,}1) \\
&= 0{,}3\pi - 0{,}1\pi \\
&= 0{,}2\pi \\
&\approx 0{,}6283
\end{aligned}
$$

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.6

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações