

Funções de Várias Variáveis

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/cfvv1>

Conteúdo

Funções

Funções de Várias Variáveis

Lista Mínima

$$f: A \rightarrow B$$

- ▶ A domínio
- ▶ B contradomínio
- ▶ f relação que associa elementos do domínio a elementos do contradomínio
- ▶ Cada elemento do domínio deve estar associado a um único elemento do contradomínio
- ▶ A imagem é um subconjunto de B composto dos elementos que são imagem de algum elemento de A

- ▶ Precisa ser dado a priori
- ▶ Geralmente é determinado pela aplicação
- ▶ Se nada for dito, assumimos o domínio “natural”,
ie, todos os valores onde podemos efetuar as contas

Imagem

- ▶ Subconjunto do contradomínio
- ▶ O contradomínio é definido a priori
- ▶ Pode ser difícil identificar a imagem de uma função
- ▶ Dada uma função $f: D \rightarrow C$
 y pertence a imagem de f , se existe $x \in D$ tal que

$$y = f(x)$$

Nomenclatura – Curiosidade

Função real

$$f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Função de várias variáveis

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Função vetorial ou paramétrica

$$f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Campo vetorial

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Conteúdo

Funções

Funções de Várias Variáveis

Lista Mínima

Funções de Várias Variáveis

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = x + y$$

$$f(\vec{r}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n r_k^2}$$

Funções de Várias Variáveis

Suponha que D seja um conjunto de n -uplas de números reais (x_1, x_2, \dots, x_n)

Uma **função** a valores reais f em D é uma regra que associa **um único número real**

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a cada elemento em D

O conjunto D é o **domínio** da função

O conjunto de valores de w assumidos por f é a **imagem** da função

O símbolo w é a variável **dependente** de f , e dizemos que f é função de n variáveis **independentes** x_1 a x_n

Também chamamos os x_j de variáveis de **entrada** da função e denominamos w a variável de **saída** da função

Intervalos

Subconjuntos contínuos de \mathbb{R}

Intervalo fechado

$$[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

Intervalo aberto

$$(-2, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$$

Aberto a esquerda e fechado a direita

$$(1, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$$

Interior e Fronteira de um Conjunto

Um ponto (x_0, y_0) em uma região (conjunto) R no plano xy é um **ponto interior** de R se é o centro de um disco de raio positivo que está inteiramente em R

Um ponto (x_0, y_0) é um **ponto de fronteira** de R se todo disco centrado em (x_0, y_0) contém ao mesmo tempo pontos que estão em R e fora de R

O ponto de fronteira não precisa pertencer a R

Interior e Fronteira de um Conjunto

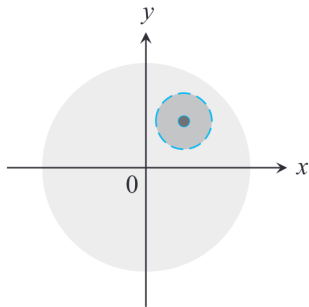
Os pontos interiores de uma região, como um conjunto, formam o **interior** da região

Os pontos de fronteira da região formam sua **fronteira**

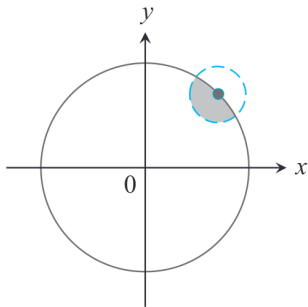
Uma região é **aberta** se consiste apenas de pontos interiores

Uma região é **fechada** se contem todos os seus pontos de fronteira

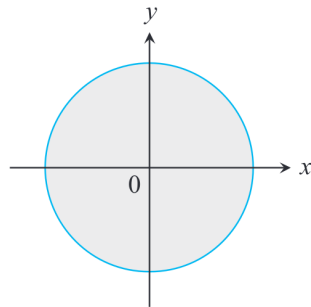
Regiões no Plano



$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$
Disco unitário aberto.
Todo ponto é um ponto interior.



$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$
Fronteira do disco unitário. (Círculo unitário.)



$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
Disco unitário fechado.
Contém todos os pontos de fronteira.

Regiões Limitadas

Uma região do plano é limitada se está dentro de um disco de raio fixo

Caso contrário ela é ilimitada

Exemplo 1

Descreva o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$

1. Qual a condição que os pontos do domínio deve satisfazer?
2. Que região é essa? Represente-a graficamente.
3. Qual o interior da região?
4. Qual a fronteira da região?
5. A região é aberta ou fechada?
6. A região é limitada?

Exemplo 1 – Solução

Condição que deve ser satisfeita para um ponto estar no domínio

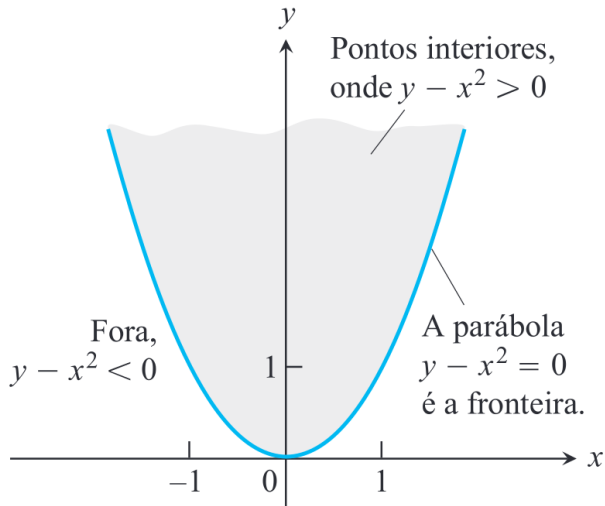
$$y - x^2 \geq 0$$

$$y \geq x^2$$

Domínio

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$$

Exemplo 1 – Representação Gráfica



Exemplo 1 – Solução

1. Interior da região

$$y > x^2$$

2. Fronteira da região

$$y = x^2$$

3. A região é aberta ou fechada?

Fechada, pois $y = x^2$ pertence ao domínio

4. A região é limitada?

Ilimitada, pois dado qualquer disco sempre teremos um ponto fora dele

Exemplo 2

Encontre e esboce o domínio da função

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$$

Exemplo 2 – Solução

Condição

$$x^2 + y^2 - 4 > 0$$

$$x^2 + y^2 > 4$$

Pontos exteriores ao círculo centrado na origem e raio 2

Domínio

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$$

Exemplo 3

Encontre e esboce o domínio da função $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\ln(y - 1)}$

Exemplo 3 – Solução

Condições para avaliar a função $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\ln(y - 1)}$

1. $x^2 - 4 \geq 0$
2. $\ln(y - 1) \neq 0$
3. $y - 1 > 0$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Condição 2

$$\ln(y - 1) \neq 0$$

$$y - 1 \neq 1$$

$$y \neq 2$$

Condição 3

$$y - 1 > 0$$

$$y > 1$$

Exemplo 3 – Solução

Domínio

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq 2 \text{ e } y > 1 \text{ e } y \neq 2\}$$

Conteúdo

Funções

Funções de Várias Variáveis

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 14.1

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 1-2, 5-9

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações