Matemática na Construção Civil

Vilmar Pereira de Jesus
Luis Alberto D'Afonseca

Matemática na Construção Civil

Vilmar Pereira de Jesus
Luis Alberto D'Afonseca

12 de outubro de 2022

Esta apostila é produto do mestrado de Vilmar Pereira de Jesus defendida em 2022 no Profmat do Cefet-MG [12]. O texto completo da dissertação pode ser baixado aqui.

A versão mais recente desta apostila pode ser baixada clicando ou escaneando o código QR.

Arte da capa: Fotografia de Designdrunkard baixado de Pexels

Sumário

Prefácio

Em nosso dia a dia, em qualquer lugar que olhamos, sempre encontramos aplicações da Matemática. Porém, nem sempre isso é facilmente percebido por todos. Essa apostila pretende explicitar essas aplicações apresentando os métodos e técnicas matemáticas empregadas no cálculo de alguns materiais utilizados na Construção Civil. Essa proposta oferece soluções diretas para problemas que muitos indivíduos vão encontrar em sua vida, seja por trabalhando na construção civil ou planejando uma reforma ou construção. Acreditamos que isso seja um motivador que contribui para a aprendizagem do estudante.

Nosso objetivo é conectar a Matemática à realidade do estudante através de situações presentes em seu cotidiano como cálculos de alguns materiais necessários para a construção de uma casa ou edifício. Neste contexto falamos também de algumas partes estruturais como fundações, diferentes tipos de solos e construções.

Além disso a Construção Civil é um ramo da economia que emprega um grande número de trabalhadores com diversos graus de escolaridade e mesmo os indivíduos que não trabalham nesse ramo, muitas vezes, precisam tomar decisões sobre construções ou reformas. Nesse sentido, é importante saber qual a quantidade de material que será utilizado para construir determinada casa ou realizar uma reforma. Mesmo sendo uma atividade tão importante, os métodos e técnicas necessários para o cálculo de quantidades de materiais de construção são desconhecidos de muitos estudantes. Outra dificuldade, que podemos prever, é que nem todos perceberão a conexão entre os conteúdos estudados no ensino básico como: cálculos de perímetros, áreas, volumes, razões e proporções e os cálculos de materiais como quantidade de concreto, tijolos, ferragem entre outros.

Em especial podemos verificar que segundo o Currículo Básico Comum (CBC) é possível abordar esses assuntos nas series do ensino fundamental, como no ensino médio.

Apresentaremos os conceitos matemáticos e sua relação com as construções através de projetos fictícios que mostrarão cada etapa de sua realização, onde aplicamos as técnicas empregadas no cálculo da quantidade de alguns materiais necessários em uma determinada construção, e iremos propor atividades/exemplos didáticas adequadas aos estudantes do ensino básico buscando desenvolver as competências e habilidades relacionadas a BNCC. Buscamos construir um material que possa ser utilizado pelos professores do ensino básico que busquem explorar esse tema com seus alunos. Por esse motivo desenvolvemos um diálogo explicativo sobre cada um dos exemplos calculados. O professor interessado em utilizar esse material tem liberdade para implementar, aplicar e alterar de acordo o nível de maturidade de cada turma.

Ao realizar a construção de uma casa, existe um leque de materiais que podem ser usados. A escolha destes materiais está tecnicamente ligada ao local ou região onde a obra será realizada. Por exemplo, imagine uma construção na região sul do Brasil onde as temperaturas são baixas e outra construção na região norte onde as temperaturas são mais elevadas, ou até mesmo uma casa às margens do rio Amazonas onde em todo período chuvoso existe a possibilidade de elevação do nível do rio. Logo, para realizar uma construção devemos observar tais especificidades e características de cada região, bem como o material a ser utilizado na construção.

Vale ressaltar que os materiais envolvidos em uma construção sofrem ações físico-químicas do ambiente com o qual estão em contato. Estas ações podem, levar a uma perda de desempenho do material e, portanto, podem comprometer a possibilidade de utilização da estrutura em relação as funções para as quais foi projetada (ou seja, sua funcionalidade) ou mesmo a sua segurança estrutural [4].

Além dos aspectos refentes ao desgaste gerado pelo tempo, antes de iniciar qualquer construção, é importante fazer os cálculos dos principais materiais que serão utilizados, podendo assim fazer um prévio orçamento dos mesmos, tanto no quesito material quanto na mão de obra para realização do serviço. Assim será possível analisar sua viabilidade, principalmente referente ao financeiro.

Os cálculos dos materiais que iremos abordar, se baseiam na construção de uma casa com estrutura de concreto e tijolos. Portanto, os materiais que iremos abordar são em sua maioria de caráter construtivo, ou seja, fazem parte da estrutura física da obra. Estes cálculos envolvem basicamente os conceitos de proporcionalidade, perímetro, área e volume que serão especificados nos Capítulos 3, 4, 5 e 6. Logo, é possível aplicar tais técnicas de cálculos de materiais a qualquer série, desde que ela tenha adquirido os conceitos citados. Como estamos abordando algo prático referente as construções, é interessante reservar uma parte do tempo para apresentação sobre as estruturas que compõem uma casa ou construção.

Iniciamos a sequência organizacional falando sobre as construções, seguimos abordando o uso de ferramentas tecnológicas, o cálculo de alguns materiais como ferragens, tijolos e concreto onde utilizamos a ideia de proporcionalidade, perímetro, área e volume. Prosseguindo falamos sobre a ferramenta tecnológica Sweet Home 3D e finalizamos mostrando os valores de alguns serviços da construção.

1

Construções

As construções estão presentes na vida das pessoas deste a antiguidade, pois sempre houve esta busca por lugares de moradia, socialização, culto, entre outras atividades. Iniciaremos este capítulo com uma historia sobre as construções. Seguindo, apresentaremos uma construção com alguns de seus aspectos técnicos que devem ser analisados e conhecidos antes de se iniciar uma obra. Por fim, alertamos sobre alguns cuidados que devemos ter para evitar acidentes no ambiente de trabalho envolvendo construção civil.

1.1 Um pouco de história

No processo de desenvolvimento e evolução histórica sobre os seres humanos, percebemos que existe uma busca constante destes por construções, principalmente de moradia, onde em alguns casos existe a utilização de meios naturais como cavernas, grutas, entre outros, para servir de abrigo. Nestes locais é possível encontrar algumas escritas e marcações, que permitem aos especialistas sobre o assunto tirarem conclusões a respeito de seus comportamentos e meios de comunicação da época.

Nesta seção, vamos mostrar algumas construções, geralmente construídas de acordo com sua realidade e necessidade, onde observamos a utilização de objetos presentes na natureza como capim, até mesmo de blocos de pedras conforme Figura 1.1, onde temos como exemplos as ocas indígenas e os muros de pedra, geralmente construídos em divisões de propriedades rurais ou na construção de currais.

Figura 1.1: Oca indígena [6] e muro de pedra geralmente utilizado em divisões de propriedades rurais.

Juntamente com o processo de adaptação, o homem descobre a capacidade de criar seus materiais e objetos onde passa a desenvolver técnicas de construir ou lapidar blocos de pedras ou cerâmicos para erguer suas construções, que são realizadas intertravando os blocos, como é o caso do muro de pedra ilustrado anteriormente. Diversas construções se destacam até hoje, seja pelo seu aspecto visual, estrutural ou pelos métodos construtivos utilizados. Como exemplo na Figura 1.2, temos as pirâmides do Egito e a muralha da China. Se observarmos essas construções em imagens mais próximas, iremos perceber que os blocos utilizados passavam, por aprimoramentos (modificações), ou seja, foram lapidados a fim de atender as necessidades arquitetônicas da obra executada.

Figura 1.2: Pirâmides do Egito [8] e Muralha da China [15].

Continuando neste sentido de adaptação e aprimoramento, tais práticas são fortalecidas através do cotidiano. Na trajetória das construções, conforme mencionado, não foi diferente. Com o passar dos tempos o homem além de criar suas construções com os objetos já presentes na natureza e lapidá-los, procurou meios e mecanismos para criar seus próprios blocos para utilização na construção das paredes (alvenaria), surgindo assim as construções de alvenaria autoportante, ou seja, a própria alvenaria

Figura 1.3: Burj Khalifa, o prédio mais alto do mundo, localizado em Dubai nos Emirados Árabes [5].

realiza a função estrutural. Como não possui vigas e pilares ou alguma estrutura metálica de sustentação, tal situação limitava a altura das construções, pois com acumulo de muitas camadas (andares) os blocos poderiam não resistir ao peso da estrutura.

Com o passar do tempo o homem percebe que pode utilizar o aço em suas construções e com isso ele cria mecanismos para construção de estruturas de aço que ao serem implantadas na obra, darão mais resistência estrutural. Isso é possível porque o aço juntamente com o concreto podem ser usados nas construções de vigas e pilares fazendo o papel estrutural. Por esse motivo as construções com esse procedimento de construção recebem o nome de alvenaria estrutural, cabendo a alvenaria apenas o papel de vedação do ambiente. Com técnicas e materiais cada vez mais leves e resistentes, se torna possível a construção de edificações cada vez mais altas. Temos como exemplo, conforme Figura 1.3, o prédio mais alto do mundo atualmente, o Burj Khalifa, localizado em Dubai com 828 m de altura.

Além do prédio mais alto do mundo, Dubai se destaca no ramo das grandes construções por suas inovações na maneira de construir e aproveitar espaços antes pouco utilizados para essas características. Conforme Figura 1.4, com o auxilio de grandes máquinas eles construíram ilhas em formato de palmeiras, sobre o oceano, próximo ao litoral, destacando-se pela sua complexidade na execução e em seu aspecto visual e inovador

Com a utilização do aço e do concreto que fazem o papel estrutural de uma construção, foi possível realizar construções que estenderam o padrão preexistente, que eram formas mais planas e retas, proporcionando o surgimento de novas construções com aspectos arquitetônicos curvos. No Brasil, um exemplo dessa modernidade foram as obras desenvolvidas pelo arquiteto Oscar Niemeyer, onde temos a presença de

Figura 1.4: Ilhas artificiais em Dubai [7].

curvas e grandes vão livres. Como ilustração podemos destacar em Belo Horizonte o projeto arquitetônico composto pelo conjunto de quatro obras na orla da lagoa da Pampulha, conforme Figura 1.5 onde temos o Iate Tênis Clube (a), a Casa do Baile (b), a Igreja São Francisco de Assis (c) e o Museu de Arte (d). O autor Ricardo Ohtake [14] destaca a importância da obra, classificando-os como a abertura de um novo caminho da arquitetura moderna, pois essas construções com trassados curvos quebrou o paradigma das construções, rompendo com as linhas retas e os ângulos ortogonais que a rigidez do funcionalismo havia imposto.

Dentre as quatro obras ao entorno da lagoa, a mais conhecida é a igreja, popularmente chamada de igrejinha da Pampulha, ela se destaca por seu formato diferenciado, composto por quatro parábolas, sendo uma em tamanho maior que as outras três que possuem tamanhos iguais.

Existem outras obras do arquiteto espalhadas pela capital mineira, sendo a mais recente inaugurada em março de 2010, a Cidade Administrativa, sede oficial do Governo do Estado, onde novamente temos a presença de curvas e grandes vão livres, conforme Figura 1.6. Observamos novamente a presença da parábola na construção do Auditório JK, ao lado do Palácio Tiradentes (a), que é o maior prédio de concreto suspenso do mundo, com vão livre de 147 m de comprimento e 26 m de largura. As outras duas edificações (b) são curvas e idênticas.

Com os avanços tecnológicos, o homem consegue criar materiais cada vez mais leves e resistentes, aprimorando suas aplicações e utilização nas construções, com aspectos cada vez mais surpreendentes e desafiadores. Ainda assim, as pequenas construções como as casas de moradia da maioria das pessoas, são feitas de alvenaria (paredes)

(a) Iate Clube

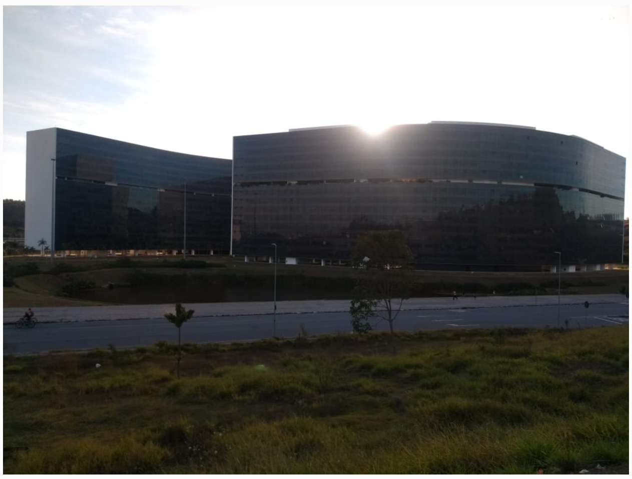
(b) Casa do Baile

(c) Igrejinha da Pampulha

(d) Museu de Arte

Figura 1.5: Orla da lagoa da Pampulha, obras de Oscar Niemeyer.

(a) Auditório JK e Palácio Tiradentes



(b) Dois prédios idênticos em formato curvo

Figura 1.6: Cidade Administrativa.

utilizando tijolos, aços e concreto. Por esse motivo vamos considerar principalmente esse tipo de construção nesse texto.

1.2 Conhecendo uma Construção

Quando falamos em construção, não devemos imaginá-la somente como uma estrutura única e completamente pronta, precisamos nos atentar aos seus detalhes físicos e estruturais. Conforme Maria Cascão [2], uma estrutura é uma composição de uma ou mais partes, ligadas entre si e apesar de receberem forças externas como vento e o próprio peso, conseguem manter o equilíbrio das construções.

Neste capítulo iremos conhecer alguns detalhes que devem ser analisados antes do inicio da construção e as etapas presentes na execução da mesma. Abordaremos sobre terrenos e seu declives e mostraremos algumas partes da estrutura de uma construção como fundações, bloco de fundação, pilar, cintas e vigas.

Terrenos ou lotes

O espaço onde construímos a nossa moradia quando localizado em uma região rural geralmente é chamado de sítio, mas podemos usar a mesma nomenclatura adotada quando a localização é em região urbana e chamarmos de terreno ou lote. Para indicar o tamanho da superfície de cada lote, a unidade de área mais utilizada é o metro quadrado (m^2).

Figura 1.7: Três terrenos com diferentes inclinações.

Um aspecto importante a ser observado em um terreno é a sua topografia (declive e inclinação), pois dois terrenos de mesma metragem, podem apresentar características completamente diferentes. Portanto é necessário ir até o local para verificar suas reais condições de inclinação, conforme Figura 1.7, onde temos respectivamente um terreno plano (com nenhuma inclinação), um terreno não plano com pouca inclinação e um terreno ingrime (com muita inclinação).

Um terreno plano é o que vai gerar menos gastos para deixá-lo pronto para o início do empreendimento. É importante se atentar a outros fatores, como o nível do terreno em relação ao nível da rua, porque geralmente as construções são realizadas em um nível acima do nível da rua, para facilitar o escoamento de água da chuva e principalmente a conexão com a rede de esgoto. Por isso, mesmo se o terreno for plano, mas estiver em um nível abaixo da rua, os gastos irão aumentar significativamente na execução da obra, porque entre tantas soluções, poderá ser feito o aterro até atingir o nível necessário, ou executar estruturas que farão a elevação do mesmo. Em ambos os casos é necessário fazer uma preparação do ambiente. Vale ressaltar que um terreno com um desnível grande pode ser problemático para a construção gerando muitos gastos na realização da obra.

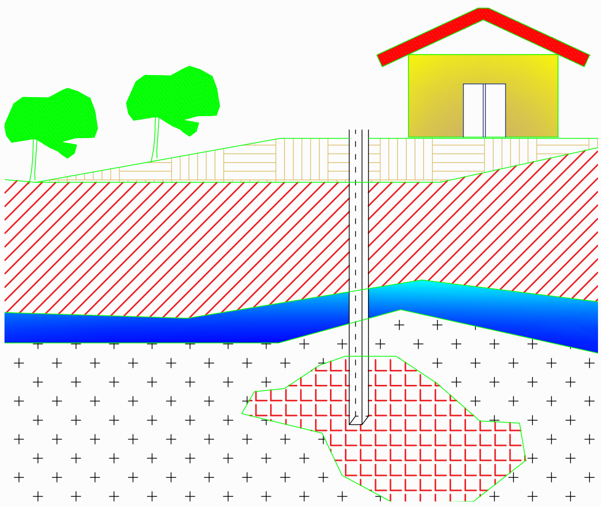


Figura 1.8: Solo com suas diferentes camadas de formação.

Vamos considerar que você encontrou um terreno que julga ser perfeito, pois ele é plano e pouco acima do nível da rua, logo dará início a construção de sua casa. Antes disso, existe a necessidade de fazer o estudo da resistência do solo de seu terreno. Tal estudo deve ser feito para todo e qualquer terreno. Tal estudo pode ser realizado através de perfurações do solo com equipamentos adequados, ou algum outro meio mais tecnológico. Em ambos os casos o estudo consiste em analisar as diferentes camadas do solo, conforme Figura 1.8 e verificar qual é a carga (peso) que ele suporta. Na Seção 4.4 veremos mais especificações sobre o assunto, com um exemplo mostrando a relação entre a área da base de uma estrutura e sua relação com a resistência do solo. Sendo assim toda construção, devido ao peso de suas estruturas, geram forças que são aplicadas diretamente no solo.

Ao construir um empreendimento sem se atentar às devidas análises e aspectos técnicos, existe o risco de todo o trabalho realizado ser perdido, pois no futuro podem surgir problemas, como rachaduras, trincas, deslizamentos, podendo até mesmo levá-lo ao colapso, causando prejuízos financeiros e pondo a vida dos moradores em risco.

Estruturas de uma construção

Apresentamos aqui alguns itens presentes na construção de uma casa. Conforme mencionado no início deste capítulo, uma estrutura é uma composição de uma ou mais partes. Conhecendo as peças que compõem essa estrutura é possível fazer o cálculo e prever a quantidade de materiais que serão gastos, permitindo assim a realização de um orçamento com levantamento do preço dos mesmos. A estrutura a qual iremos analisar é constituída basicamente de concreto (bloco de fundação, pilares, cintas, vigas) e alvenaria. Saber calcular o quantitativo de materiais é importante pois, dentre outras coisas, agilizará no procedimento durante a compra, evitando o desperdício e, consequentemente, reduzindo os riscos e prejuízos com a sobra excessiva ou falta dos mesmos.

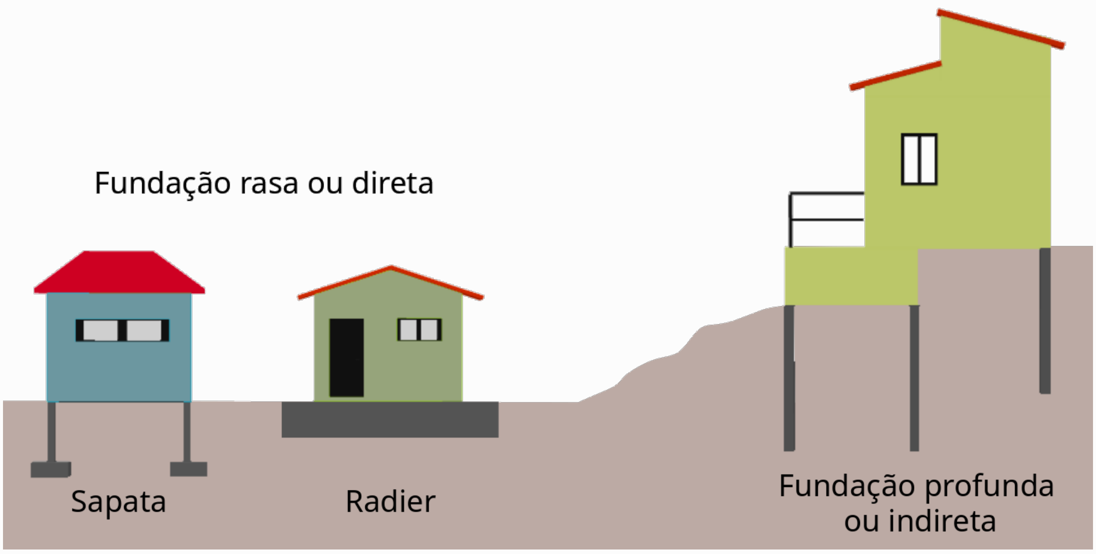


Figura 1.9: Diferentes tipos de fundações.

As construções de forma geral precisam de uma base de sustentação da estrutura. Tal base é chamada de fundação. Existem diferentes tipos de fundações e diferentes nomes para cada umas delas, o nosso objetivo é proporcionar uma compreensão básica sobre a fundação e, portanto, vamos defini-la como sendo a parte estrutural responsável por dar sustentabilidade a obra, tendo como função receber toda a carga (peso) estrutural e distribuí-lo ao terreno onde se apoiam [1]. Geralmente essa parte das construções fica escondida pois normalmente fica abaixo do solo, conforme Figura 1.9.

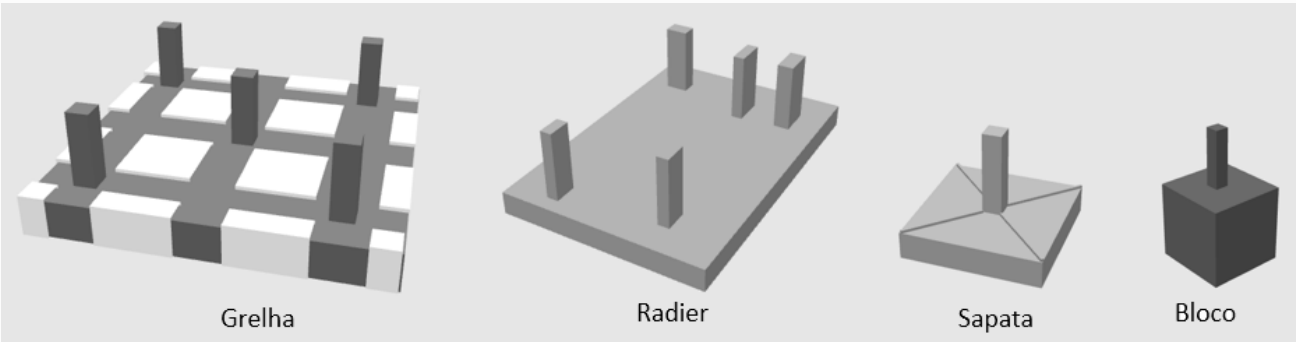


Figura 1.10: Principais tipos de fundações superficiais.

Todo projeto de fundação contempla as cargas aplicadas pela obra e a resposta do solo a estas solicitações. Os solos são constituídos de um conjunto de partículas com água (ou outro líquido) e ar nos espaços intermediários. As partículas, de maneira geral, se encontram livres para se deslocar entre si [11].

A fundação se subdivide em dois tipos; fundações superficiais (ou diretas ou rasas) e fundações profundas. Algumas fundações superficiais mais utilizadas são do tipo grelha, *radier*, sapata e bloco conforme Figura 1.10. Segundo a Norma Brasileira, descrita na NBR 6122, fundações profundas são aquelas cujas bases estão implantadas

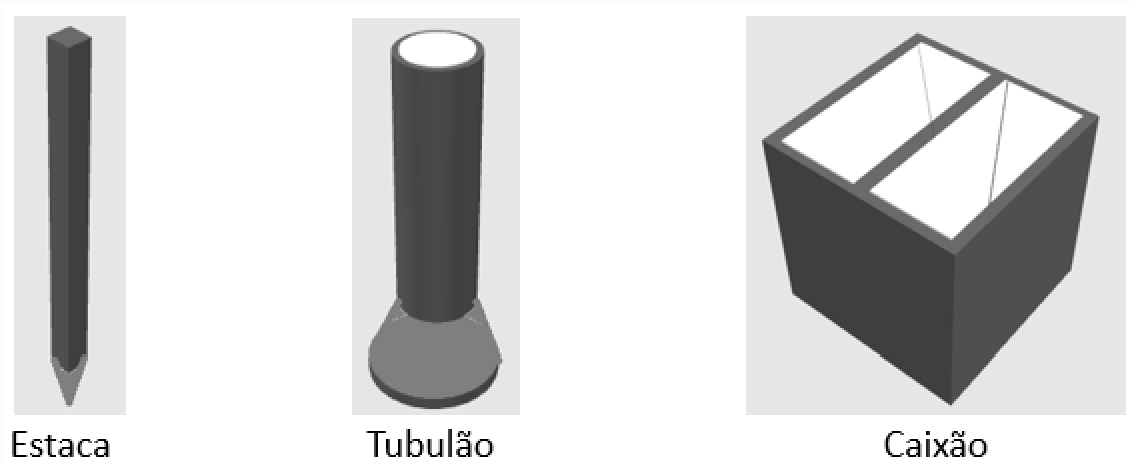


Figura 1.11: Principais tipos de fundações profundas.

a uma profundidade superior a duas vezes sua menor dimensão e a pelo menos 3 m de profundidade [1]. As fundações profundas em geral são do tipo estaca, tubulão e caixão, conforme Figura 1.11.

A fundação que iremos mostrar nos nossos próximos tópicos é constituída por duas estruturas; o mini pilar e o bloco. Veremos que, como cada bloco é a parte mais profunda da fundação, ele é responsável por transmitir as cargas entre a construção e o solo.

Vamos considerar hipoteticamente a casa da Figura 1.12. Começamos apresentando uma planta baixa que é a visão superior da casa, sem considerar os telhados e/ou laje com a locação ou demarcação das partes físicas da construção. A planta nos mostra que a casa possui 2 quartos, 1 cozinha, 1 sala e 1 banheiro, conforme Figura 1.13. As linhas pontilhadas indicam a existência de vigas aérea passando pelo local, ou seja, sem parede construída abaixo da mesma. A espessura/largura das paredes foram consideradas como 15 cm.

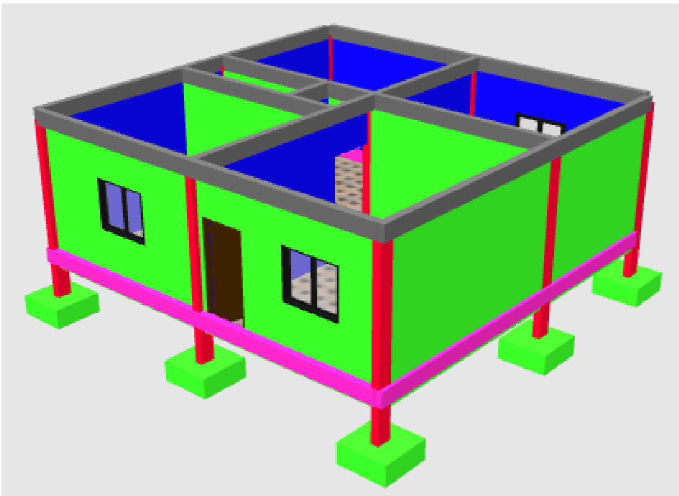


Figura 1.12: Casa de alvenaria e concreto.

Na planta temos as seguintes indicações:

I Os 9 pilares, representados pelas letras A, B, C, D, E, F, G, H e I.

II As 4 janelas J1 que possuem 1,20 m de comprimento por 1 m de altura ou simplesmente indicada por 120×100 e a janela J2 do banheiro que mede 60×40, ou seja 60 centímetros de comprimento por 40 centímetros de altura.

III As 4 portas P1 que possuem 90 cm de largura por 2,2 m de altura ou simplesmente indicada por 90×220 cm e a porta P2 do banheiro que mede 70×220 cm, ou seja, 70 centímetros de largura por 2,20 metros altura.

IV Existem dois vãos livres, sendo um entre a cozinha e a sala e o outro entre a sala e os quartos e banheiro, ambos medindo 100×220 cm, ou seja, 1 metro de largura por 2,20 metros de altura. Estes vãos são considerados como porta de passagem e por esse motivo ficam abertos, logo os mesmos aparecem sem a colocação de uma porta.

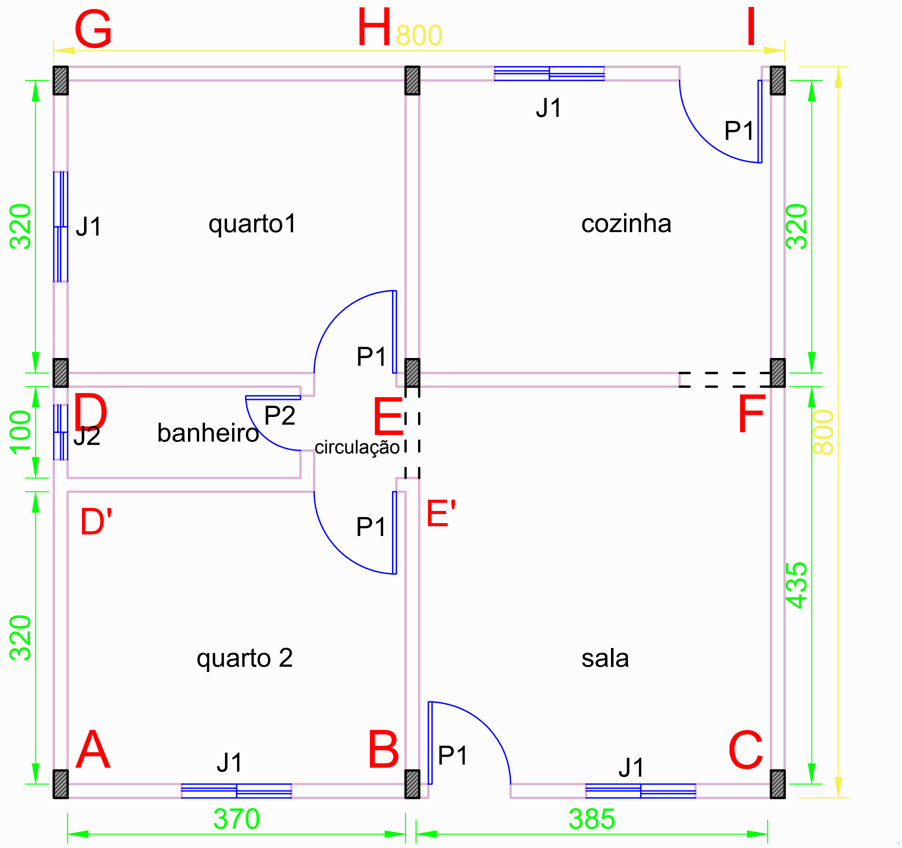


Figura 1.13: Planta baixa da casa que vamos usar como exemplo.

Temos na fundação desta construção, nove blocos de fundação que transmitem as cargas estruturais ao solo. Suponhamos que a carga total da construção da Figura 1.12 seja 90 toneladas. Não se deixe enganar com relação ao recebimento da quantidade de carga que cada bloco de fundação recebe e transmite ao solo. Como temos 90 toneladas, se dividíssemos de maneira igual por cada bloco de fundação, teríamos $90 \div 9 = 10$ toneladas por cada bloco de fundação, mas neste caso por exemplo, não significa que cada bloco de fundação receberá 10 toneladas. Esse valor pode variar em uma mesma construção, um bloco de fundação pode receber uma quantidade maior de carga do que outro bloco. Esses valores dependem do projeto de distribuição de cargas. Geralmente os blocos de fundação do centro da construção são os que recebem maior quantidade de cargas, mas isso pode variar dependendo do projeto estrutural, por isso destacamos aqui a importância de procurarmos um profissional qualificado e com formação na área quando for realizar uma construção.

A Figura 1.12 apresenta uma visão em três dimensões da construção descrita na planta baixa 1.13. Porém, essa não é a melhor representação para analisarmos sua estrutura. Para essa função usamos a Figura 1.14 que apresenta os detalhes ds vigas, cinta da base, fundação (estaca e bloco de fundação) e até mesmo os pilares.

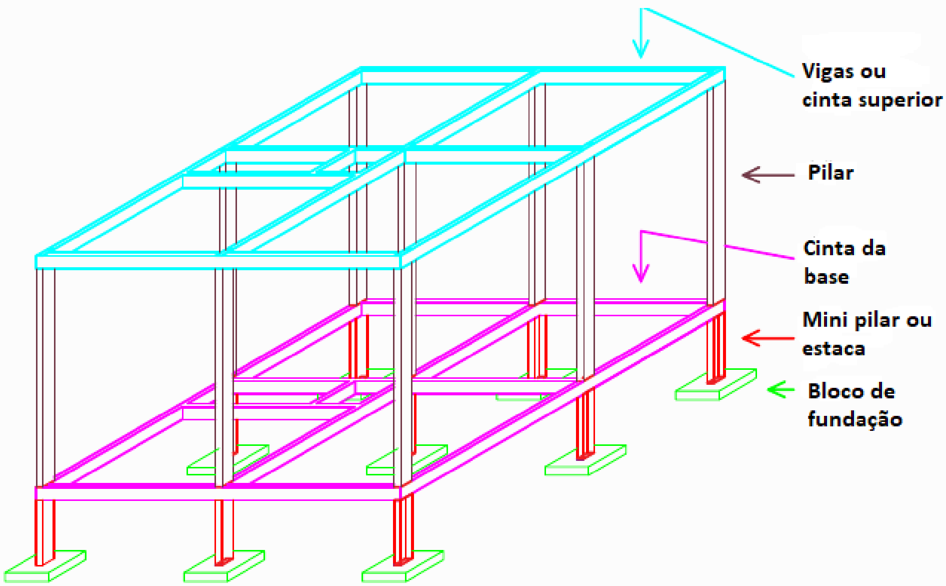


Figura 1.14: Parte estrutural de concreto em toda a casa.

1.3 Cuidado com a segurança nas construções

Além das especificações técnicas envolvidas no desenvolvimento de uma obra, existem outros fatores que devem ser considerados como por exemplo a segurança dos trabalhadores visando evitar acidentes.

Em nosso dia a dia é comum ouvirmos noticiários referentes a acidentes na construção civil e em muitos casos levam a perda de vidas, pois existe a presença de um número significativo de pessoas no desenvolvimento de cada etapa da obra. Independentemente se é uma obra de grande ou pequeno porte o risco é sempre eminente.

Segundo a Associação Nacional de Medicina do Trabalho – ANAMT [10], um dos seguimentos que mais registram acidentes no Brasil é a Construção Civil, sendo segundo em número de morte, perdendo apenas para o transporte terrestre. Enquanto a taxa de mortalidade no trabalho no Brasil é de 5,21 mortes para cada 100 mil vínculos, na Construção Civil a taxa é de 11,76 casos para cada grupo de 100 mil. O Anuário Estatístico de Acidentes de Trabalho (AEAT) aponta que em 2017 ocorreram 549405 acidentes de trabalho em todo o país, dos quais 30025 foram na Construção Civil. Esclarece ainda que Para reduzir os riscos de acidentes de trabalho na Construção Civil existem regras dispostas na Norma Reguladora 18 (NR-18), que trata especificamente da saúde e segurança nesse ramo.

A construção de uma casa de um único pavimento, ou seja, com uma única laje sem uma outra casa por cima, sua altura é de aproximadamente 3 m de pé direito (altura entre o nível do piso e a laje), podendo ter variação para mais ou para menos. Você pode pensar que por ser respectivamente baixa, não existe risco de acidente. Na verdade, o risco existe e devemos tomar todas as medidas de segurança e precauções possíveis para evitar que uma tragédia aconteça. Como exemplo iremos deixar registrado aqui um acidente que aconteceu em Presidente Prudente, no interior de São Paulo, em 16 de julho de 2020, onde uma parede de apenas 3 m de altura por 20 m de comprimento, veio abaixo, matando 4 funcionários como relata o artigo do jornal [17], publicado no site terra.

Até mesmo ao fazer uma pequena escavação, existe o risco de ocorrer o deslizamento de terra causando o soterramento de pessoas, podendo levá-las ao óbito.

São tantos os acidentes em obras que dariam para escrever um livro com diversas páginas falando sobre o assunto, mas para finalizar falaremos do rompimento da barragem de rejeito de minério ocorrido em Brumadinho-MG em 25 de janeiro de 2019, que causou a morte de 259 pessoas e deixou 11 desaparecidos, se tornando o maior acidente de trabalho no Brasil, considerado um dos maiores desastres ambientais da mineração do país, após o rompimento da barragem em Mariana-MG em 05 de novembro de 2015 [18].

Podemos perceber que os acidentes em construções são constantes e muitos desastrosos, levando na maioria das vezes, além de danos ambientais, a perda de vidas humanas. Por isso, independente se a construção é classificada como grande ou pequena, se faz necessário a contratação de um profissional qualificado e com formação na área, visando assim, evitar prejuízos bem maiores no futuro e até mesmo preservar vidas. Em relação a construção de uma casa, um dos responsáveis por esse tipo de empreendimento pode ser o engenheiro civil. Portanto, se for realizar uma construção, é necessário procurar um profissional capacitado e devidamente registrado nos órgãos competentes.

2

Usando o Sweet Home 3D

O uso da tecnologia nos permite fazer diversas coisas como viajar pelo mundo e conhecer lugares sem sair de casa, conhecer objetos, órgãos do nosso corpo, entre outros. Neste sentido, para auxiliar na compreensão e entendimento dos cálculos matemáticos, iremos usá-la para mostrarmos algumas partes das estruturas de uma construção de maneira bem realista.

Iremos fazer as representações em 2D e 3D, ou seja, em duas e três dimensões, inclusive com a criação de vídeos. Para isso, utilizamos o Sweet Home 3D por ser um programa gratuito, leve, além de permitir a instalação em diferentes sistemas operacionais. No Apêndice A apresentamos as informações de como instalá-lo.

Este capítulo tem como objetivo auxiliar na compreensão e utilização do Sweet Home 3D, proporcionando ao professor a possibilidade de elaboração de aulas, onde seja possível mostrar a ilustração de estruturas em formato 3D e a realização de cálculos matemáticos executados pelo mesmo. Temos dicas com o passo a passo de como explorar o programa com suas diversas ferramentas. Construímos uma casa para mostrarmos a funcionalidade e utilização do programa, onde mostramos como inserir telhados e objetos, como elaborar a planta baixa e criar sua visualização em 3D e criação de vídeo que possibilita uma viagem virtual pelo interior da construção.

Iniciaremos o uso da ferramenta mas lembramos que para construir uma planta baixa e aplicar suas características e detalhes técnicos que atendam as normas e legislações vigente, é importante procurar um profissional qualificado, como arquiteto ou engenheiro.

2.1 Conhecendo o programa

Nesta etapa vamos conhecer o programa, seus ícones, suas funções e em seguida iremos criar uma parede e cômodo. Além disso iremos mostrar como mudar a visão do céu e do solo. O Sweet Home 3D, conforme indicado na Figura 2.1, nos permite fazer planta baixa, ter uma visão da construção em três dimensões (3D) e vista do interior da construção. O Sweet Home 3D possibilita ainda a criação de vídeos, fazendo um passeio pela construção realizada.

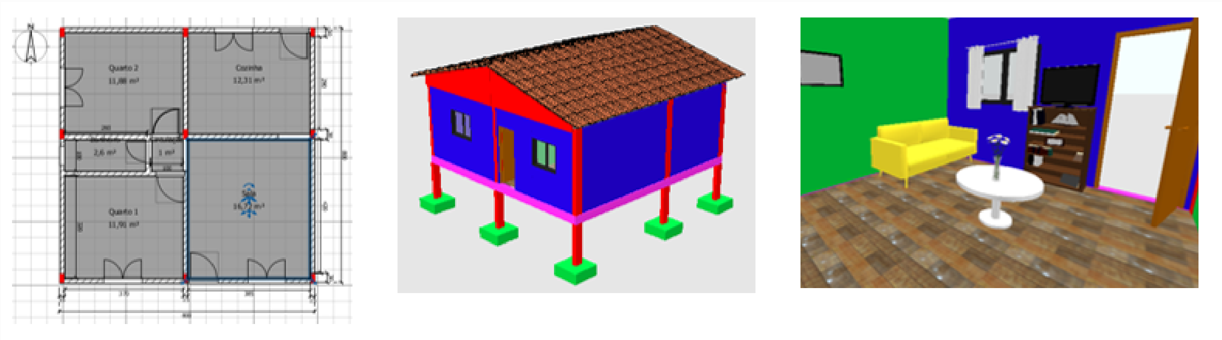


Figura 2.1: Planta baixa, visão 3D e vista interior de uma casa gerados no Sweet Home 3D.

Ao acessar o programa encontraremos o ambiente de trabalho que é dividido em 4 regiões, sendo uma contendo as pastas com diversos objetos que podem ser inseridos na construção (a), outra contendo a visão 2D (b), outra contendo a lista de objetos e itens presentes na construção (c) e outra mostrando a visão 3D (d), conforme Figura 2.2. Além disso, podemos observar na página inicial de trabalho do programa,

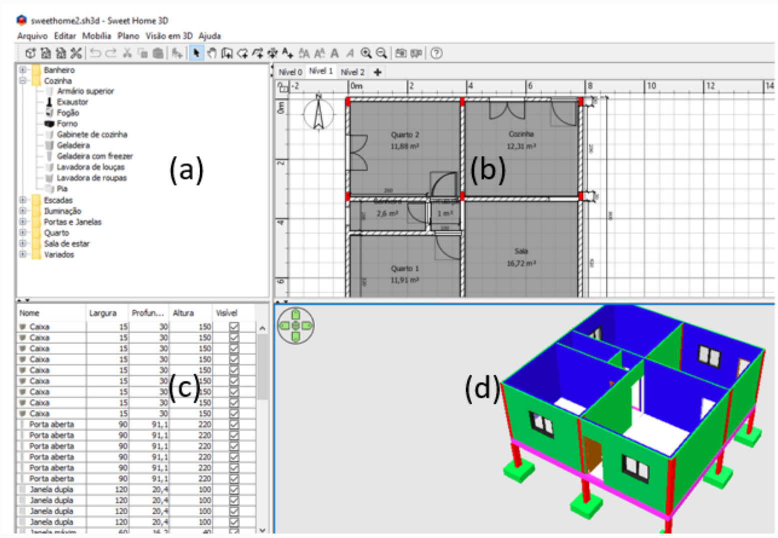


Figura 2.2: Ambiente de trabalho do Sweet Home 3D.

várias ferramentas que são utilizadas para auxiliar na construção, onde ao posicionar o mouse sobre o item aparecerá a descrição de sua função.

Vamos iniciar fazendo a modificação das configurações do céu e do solo, para isso clicamos em: `Visão em 3D - Modificar Visão 3D`. Isso irá abrir uma janela onde podemos escolher as opções desejadas. Quando estiver usando algum comando, por exemplo, quando desejar parar de construir a parede, clique no ícone da setinha, localizado na parte superior do programa.

A seguir iremos explicar o comando sobre a criação geral de uma parede. Para criarmos paredes, clicamos na ferramenta `Criar parede`, que encontra-se na parte superior da área de trabalho logo após o simbolo de uma luva, conforme indicado na Figura 2.3 e seguimos as orientações que aparecem. Após isso clicamos na região de trabalho (b) no ponto inicial onde desejamos iniciar e arrastamos até onde queremos finalizar. Podendo fazer as curvas que desejarmos, para isso é só mudarmos a trajetória do mouse.

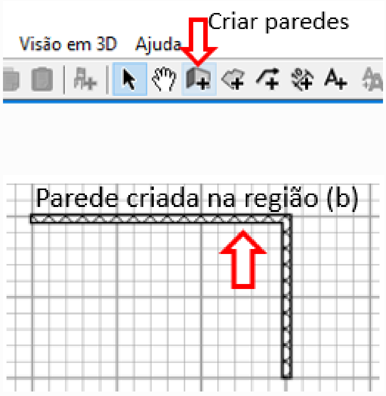


Figura 2.3: Criando uma parede.

Vale ressaltar que após construí-la você pode clicar com o lado esquerdo do mouse sobre a parede, isso fará com que fique selecionada, em seguida clique com o lado direito do mouse e escolha a opção `modificar paredes` para editá-la. Este mesmo procedimento é possível também dando um duplo clique, com o lado esquerdo do mouse sobre a parede, isso fará com que apareça a janela de configuração, conforme Figura 2.4.

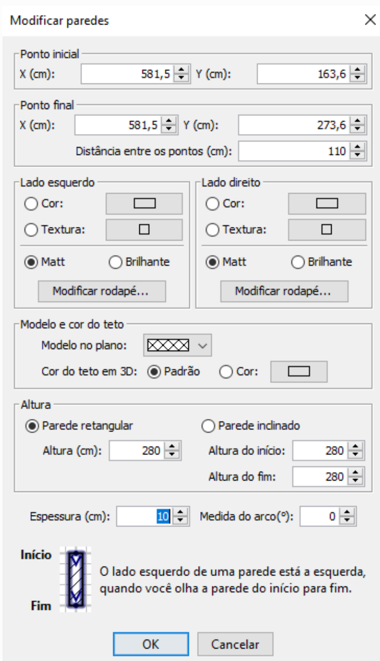


Figura 2.4: Configurando uma parede.

Agora vamos mostrar o caminho onde podemos mudar as espessuras e outros detalhes das paredes que serão adotadas como padrão pelo programa, sendo assim, todas as novas paredes construídas sairão com essa configuração inicial. Para realizarmos este procedimento clicamos em: `Arquivo-Preferências`, conforme indicado na Figura 2.5 e configuramos de acordo o nosso interesse.

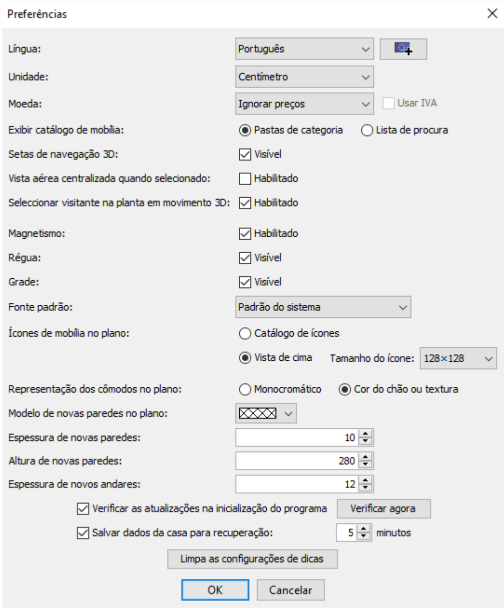


Figura 2.5: Configuração geral das paredes a serem construídas.

Para inserirmos um objeto na construção, tais como móveis, portas, janelas, escadas e outros itens, conforme ilustrado na Figura 2.6, procuramos nas pastas, que estão localizadas na região de trabalho (a) e em seguida clicamos sobre ele, seguramos e arrastamos até o local desejado na construção presente na região de trabalho (b). Conseguiremos uma melhor precisão no posicionamento dos objetos, se usarmos as setas do teclado do computador como controle de posição, para isso é só clicar sobre o objeto desejado e utilizá-las. Para configurarmos qualquer objeto, podemos dar um duplo clique sobre ele, isso fará com que apareça uma janela com as especificações a serem modificadas.

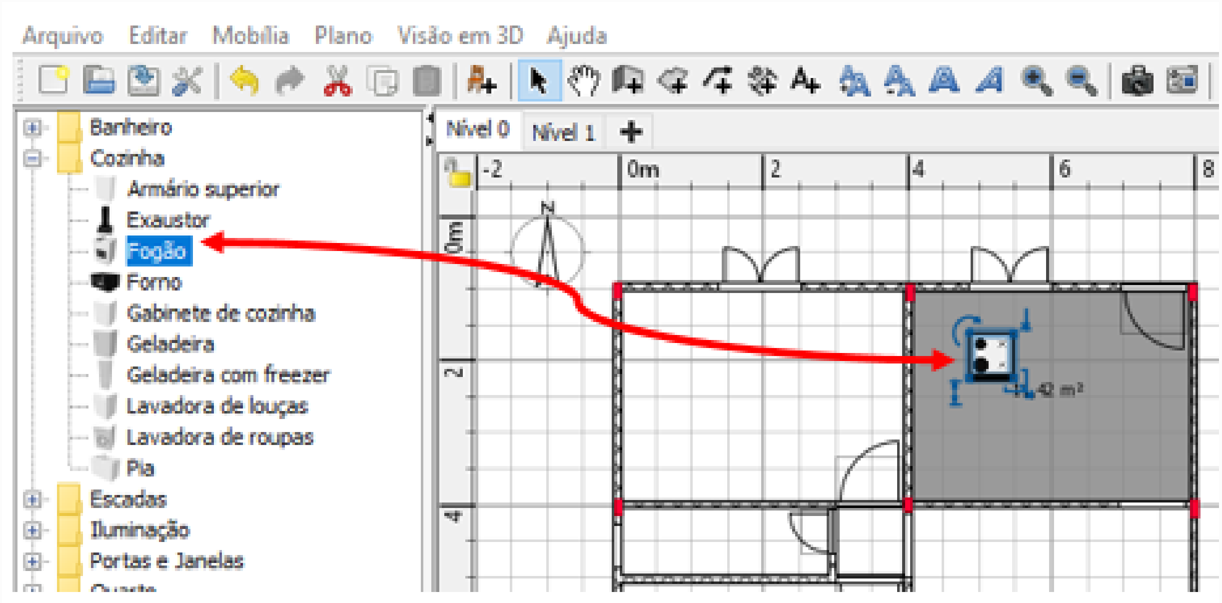


Figura 2.6: Inserindo objetos.

Caso esteja mexendo com vários objetos e eles estejam muito próximos ou um sobre o outro, teremos dificuldade em clicarmos exatamente sobre o objeto que queremos. Para solucionar esse problema, podemos deixar somente o que desejamos mexer visível, essa ação proporcionará mais comodidade para trabalharmos com o objeto desejado. Essa ação de tornar o objeto visível ou invisível está presente na região de trabalho (c) que contém a listagem dos itens utilizados.

2.2 Projetando uma casa

Uma das maneiras de nos familiarizarmos com um determinado programa é a prática, por isso observe o que se pede a seguir e as especificações de algumas informações. O exemplo a seguir tem como objetivo promover a familiarização com o programa.

Exemplo 2.2.1: Observe a planta baixa ilustrada a seguir e construa a casa seguindo as especificações abaixo.

Considere as paredes com 280 cm de altura e espessura de 10 cm. As portas e janelas você pode posicioná-las onde desejar sendo todas as portas com 80 cm de largura por 210 cm de altura e janelas com elevação de 110 cm, altura 100 cm e largura 120 cm, exceto portas e janelas do banheiro que possuem, respectivamente, 60×210 cm e 60×40 cm sendo que a elevação da janela do banheiro é de 170 cm. Em relação aos vãos de passagem (onde não se coloca porta), que geralmente ligam um ambiente a outro, considere 100 cm de largura por 210 cm de altura. Referente as cores dos itens, podem ficar a vontade, escolhendo a de sua preferência.

Podemos iniciar a criação de uma planta baixa no próprio programa ou inserir a imagem de uma planta baixa já existente. Para inserirmos a imagem de uma planta baixa seguimos o seguinte caminho: no menu do programa, clique em: `Plano - Importar imagem de fundo`. Escolha a imagem, clique em abrir e depois em continuar.

Conforme ilustrado na Figura 2.7 (a), para inserirmos a imagem em escala correta, devemos posicionar a medida que aparece em azul em uma região de medida previamente conhecida, sendo assim, colocamos a medida do "comprimento da linha desenhada" no local desejado. Fazendo a ampliação da imagem conseguiremos fazer um posicionamento mais preciso das medidas. Por exemplo, se for 4 m, colocamos 400, pois o programa trabalha em centímetros (cm) e clicamos em continuar. Na janela que se abriu, conforme indicado na Figura 2.7 (b), onde aparece `x` e `y`, podemos deixar 0 e 0 e clicamos em terminar. Após isso a planta baixa será inserida como fundo na imagem e podemos construir as paredes e outros detalhes desejados.

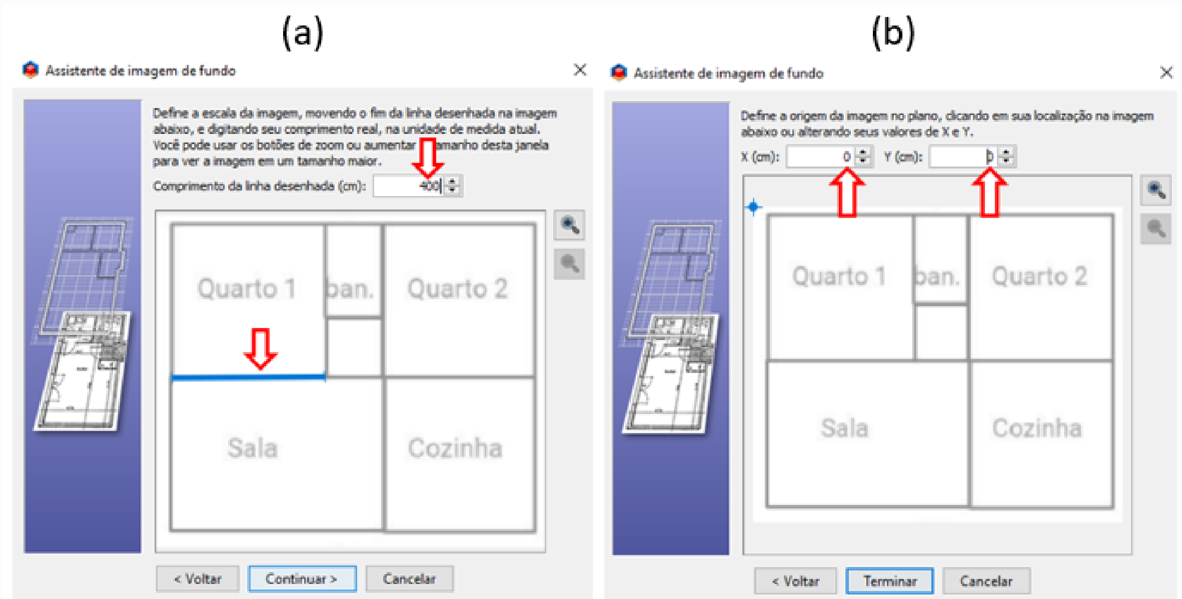


Figura 2.7: Inserindo imagem de planta baixa como plano de fundo.

Após construirmos as paredes, para colocarmos a cerâmica ou piso devemos criar primeiro o cômodo. Para isso clicamos na ferramenta `Criar cômodo`, que encontra-se logo após a ferramenta criar parede que utilizamos anteriormente e vamos clicando em cada ponto contornando a região desejada. Devemos finalizar o contorno da criação de cômodo no mesmo ponto em que iniciamos a construção dele.

Para colocarmos o piso, podemos dar um duplo clique sobre o cômodo criado e escolhermos uma cor ou textura. Vale lembrar que, conforme Figura 2.8 (a), caso o cômodo criado esteja contornado com paredes construídas ao seu redor aparecerá uma janela que permite outras modificações no cômodo como teto, paredes e rodapés, caso contrário surgirá a janela, conforme Figura 2.8 (b). Em ambos os casos, ao clicar em textura, aparecerá uma janela conforme Figura 2.8 (c), onde podemos alterar sua escala, inserir uma textura existente ou importar uma outra imagem.

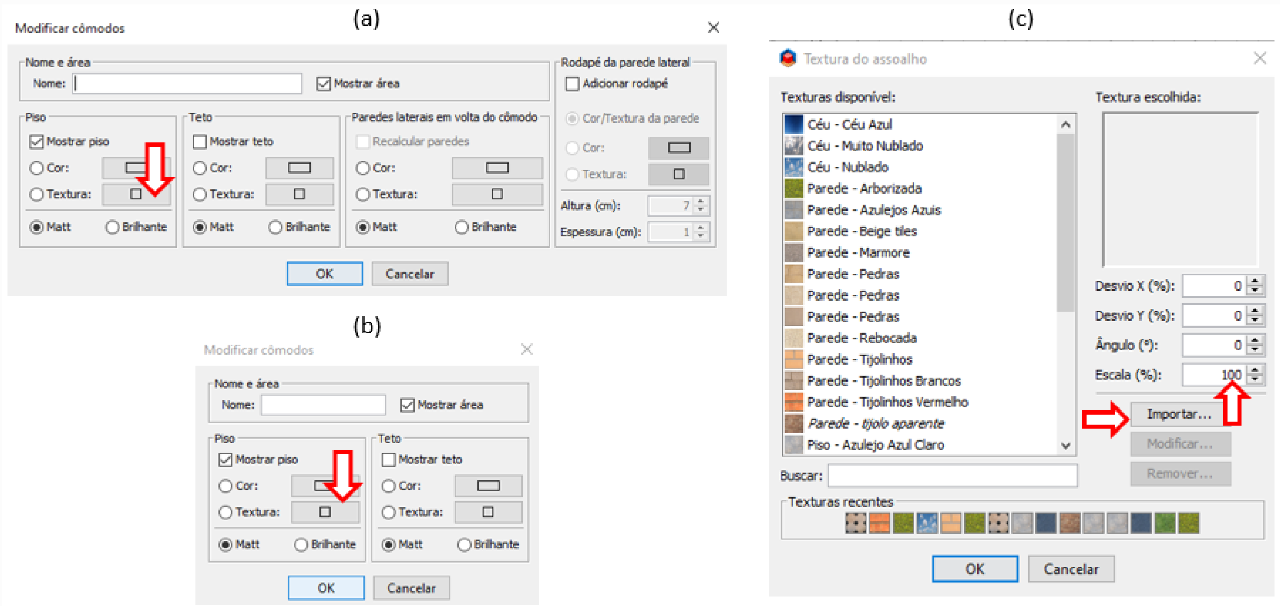


Figura 2.8: Inserindo piso em um cômodo.

Para verificarmos o tamanho da cerâmica usamos a ferramenta: `Criar dimensões`, que está localizada um pouco a frente da ferramenta criar cômodo. Após pegar a ferramenta clicamos sobre o piso na região (b) da área de trabalho do programa e verificamos tais medidas clicando no ponto inicial e no ponto final desejado. Ampliando a visualização, teremos um posicionamento mais preciso sobre as medidas.

2.3 Criando o segundo andar

Nem sempre a construção é constituída de um único pavimento, nesse sentido vamos adicionar um novo pavimento na construção. Para iniciar, na parte superior da área de trabalho do programa, clicamos em: `Plano - Adicionar nível`. Ao adicionarmos o nível, irá surgir uma nova aba, conforme indicado na Figura 2.9. Se clicarmos no ícone indicado pelo sinal de `+` que se encontra à direita da palavra Nível 1, conseguiremos adicionar novos níveis.

Após inserir o `Novo nível`, caso já tenha realizado alguma construção no nível anterior, é possível enxergar de maneira bem transparente o nível abaixo com suas construções, justamente para nos orientarmos na nova construção.

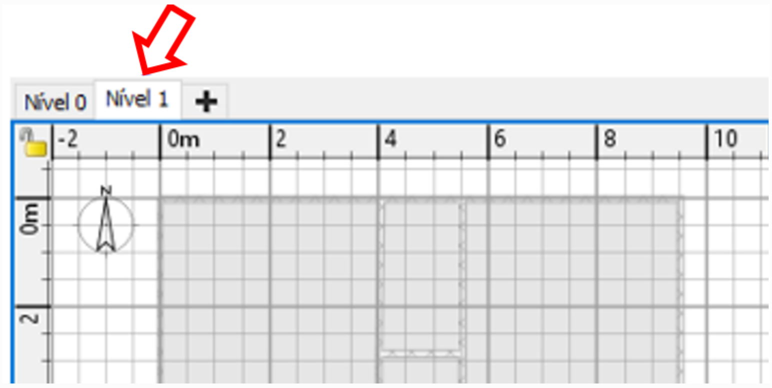


Figura 2.9: Criando um novo nível.

Para aparecer a espessura da laje na visualização 3D, devemos `Criar cômodos` utilizando a ferramenta indicada para tal função, conforme explicado na Seção 2.2.

Iremos deixar aqui uma observação: Se estivermos na `Câmera virtual`, sempre teremos uma visualização do nível em que nos encontramos. Para mostrarmos a construção completa, devemos visualizar o último nível, ou clicarmos em `Visão em 3D - Vista aérea`.

Se dermos um duplo clique sobre o Nível 1, irá aparecer informações técnicas sobre ele, permitindo assim alterar as mesmas. Mas tome cuidado, pois isso interfere nos padrões de construção. Geralmente o programa já insere um nível de acordo com suas configurações de altura da parede e laje.

2.4 Criando o Telhado

Para inserirmos o telhado vamos criar um novo nível superior à região que desejamos cobrir. Com isso você poderá construir paredes inclinadas de acordo com o declive necessário para o telhado.

Ao construirmos a parede para colocar o telhado, como ela deve ser inclinada, devemos construí-la normalmente e em seguida dar um duplo clique sobre ela. Ao aparecer a janela conforme Figura 2.10, você poderá alterar a altura inicial e final de acordo o declive necessário.

Depois das paredes construídas é só inserirmos o telhado e darmos um duplo clique sobre ele para abrir a janela de configuração onde fazemos as modificações técnicas necessárias como inclinação e outras medidas.

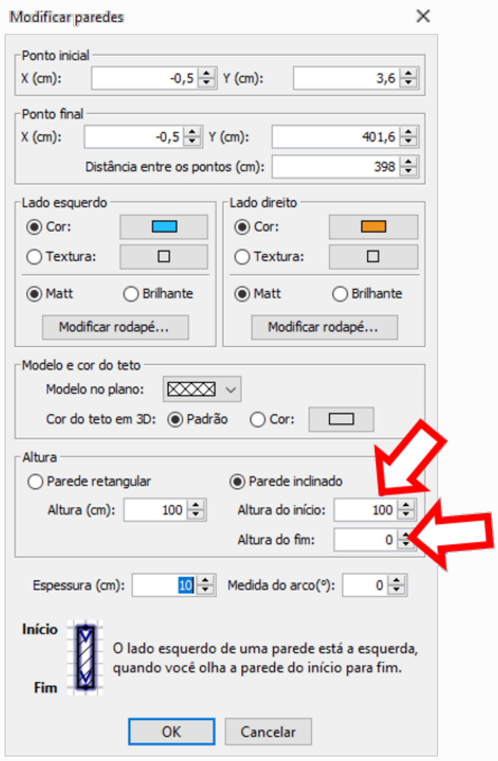


Figura 2.10: Construindo paredes inclinadas especificando a altura final e inicial.

Até esse momento, nas pastas existentes no programa não existe disponível o objeto telhado, não sendo possível inseri-lo na construção. Por este motivo devemos baixar o telhado de algum site. Na Seção A.2 mostraremos como baixar este e outros objetos.

3

Quantidade de ferragens

Neste momento daremos início ao cálculo de materiais, que conforme já mencionamos agilizará no procedimento durante a compra, evitando desperdícios e prejuízos. Iremos considerar um projeto fictício de uma casa com estrutura de concreto e tijolos, onde iremos calcular inicialmente neste capítulo a quantidade de ferragens. Nos outros capítulos que se seguem, faremos o cálculo da quantidade de tijolos, depois a quantidade de piso/cerâmica e finalizaremos a parte de cálculo de materiais determinando a quantidade de concreto.

Para realizar o cálculo dos materiais se faz necessário relembrar alguns conceito matemáticos como perímetro, área e volume e as unidades de medidas utilizadas para representação de cada um deles. Veremos que o perímetro está relacionado a unidade de comprimento, a área está relacionada a superfície e o volume relacionado ao espaço. Veja na Figura 3.1, onde simbolicamente ilustramos nas situações I, II e III, respectivamente, a representação de um cubo, sua planificação e o contorno da planificação.

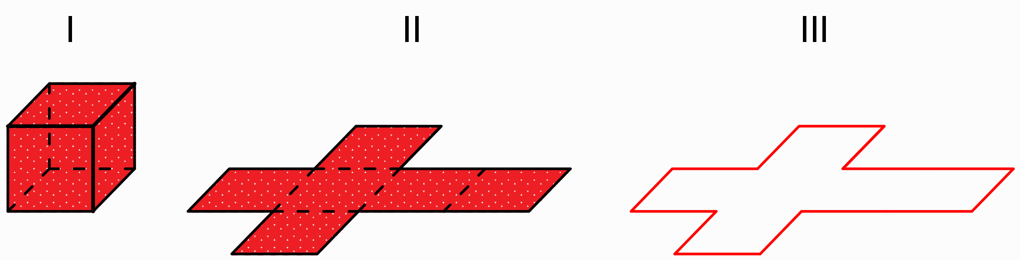


Figura 3.1: As ilustrações I, II e III, mostram respectivamente um cubo, sua planificação e o contorno da planificação, onde I simboliza o volume, II a área lateral e III o perímetro da planificação.

Podemos classificar cada umas das situações como:

I sendo uma representação em 3D, que simbolicamente representa o volume;
II sendo uma representação em 2D, que simbolicamente representa a área;
III sendo uma representação em 1D, que simbolicamente representa o perímetro.

Em cada capítulo referente ao cálculo de materiais, iniciaremos explicando sobre o conceito matemático necessário para realizarmos o cálculo pretendido, indicando suas unidades de medida e suas aplicabilidades em nosso dia a dia.

Vamos iniciar a exploração da aplicação da Matemática no cálculo dos materiais aplicando o conceito de perímetro no cálculo da quantidade de ferragem necessária para uma obra.

3.1 Relembrando perímetro

Para ilustrarmos o conceito de perímetro imagine que você esteja realizando uma viagem através do percurso indicado em seu aparelho eletrônico. Juntamente com outras informações, o caminho a ser percorrido é informado no aparelho. Este caminho representa o tamanho trajeto, ou seja, o comprimento do deslocamento.

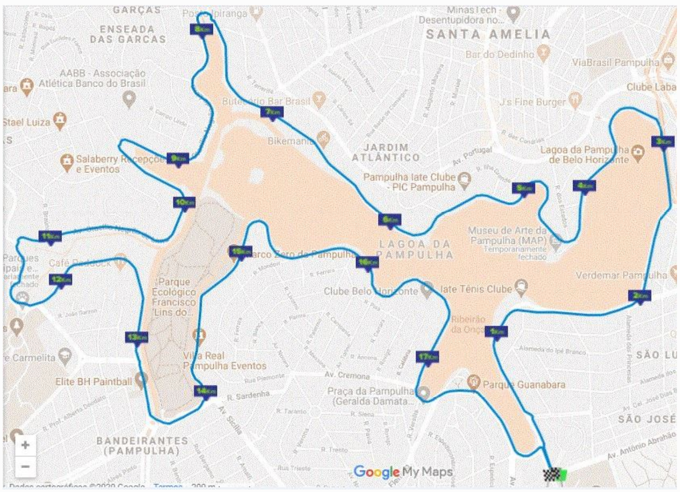


Figura 3.2: Circuito da Volta Internacional da Pampulha, com aproximadamente 18 km de comprimento.

Quando falamos em perímetro, estamos nos referindo a uma medida de comprimento, porém na maioria dos casos, é comum falar em perímetro quando se trata do contorno de uma região fechada, ou seja, com o ponto de partida, coincidindo com o ponto de chegada. Como exemplo podemos citar os circuitos de automobilismo, onde acontecem as disputas de corridas, com os carros dando várias voltas, que iniciam e terminam no mesmo local. Quando se completa uma volta, por exemplo de 4950 metros, na realidade essa distância representa o que chamaremos de perímetro do circuito.

Temos ainda as corridas de rua que acontecem em diferentes ambientes. Em Minas Gerais uma das corridas mais conhecidas é a Volta Internacional da Pampulha. No seu percurso os atletas realizam a prova saindo e chegando no mesmo local, contornando toda a lagoa, conforme Figura 3.2, onde podemos observar o circuito destacando o percurso. O percurso realizado em todo o contorno é o que chamamos de perímetro. Logo o perímetro representa o comprimento ou contorno de algo.

Em nosso dia a dia podemos observar nas construções, a utilização de ferragens, formadas através da amarração de aço, conforme Figura 3.3. A seguir iremos mostrar o desenvolvimento de como calcular a quantidade de ferragem em algumas estruturas da construção.

Figura 3.3: Ferragem armada pronta para ser utilizada em uma construção.

3.2 Perímetro aplicado no cálculo das ferragens

Quando falamos em ferragens, na verdade estamos nos referindo ao aço, também conhecido como vergalhão. Iremos alternar em nosso contexto com as palavras aço e ferragem. A comercialização do aço geralmente é feita em barras de 12 m de comprimento com seções circulares que variam de diâmetro (bitola), tais como: 6,3 mm, 8 mm, 10 mm, 12,5 mm entre outros, conforme a tabela a seguir.

Bitola (polegadas)	Bitola (mm)	Peso da Barra (kg)	Peso por Metro (kg/m)
1/4”	6,30	2,940	0,245
5/16”	8,00	4,740	0,395
3/8”	10,00	7,404	0,617
1/2”	12,50	11,556	0,963
5/8”	16,00	18,936	1,578
3/4”	20,00	29,592	2,466
1”	25,00	46,236	3,853
1 e 1/4”	32,00	75,756	6,313
1 e 9/16”	40,00	118,380	9,865

Fonte: www.idealferros.com.br.

Existe a opção de comprarmos a ferragem já pronta, geralmente formada por barras longitudinal envolvidas por barras na vertical chamados de estribos, conforme indicado na Figura 3.4, onde temos as especificações do estribo, barra longitudinal e espaçamento entre estribos, além de uma ilustração real de uma ferragem pronta com ilustração do detalhe que deve ser considerado a mais na medida dos estribos para proporcionar a amarração.

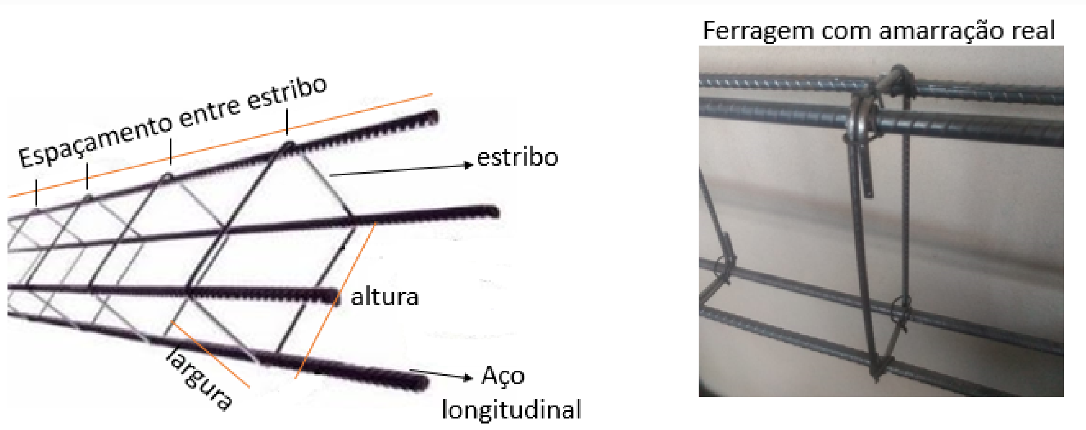


Figura 3.4: Ferragens interna que será colocada em todas as estruturas de concreto como mini pilar, cinta da base, pilar e cinta superior (viga).

A ferragem a ser utilizada na casa que estamos considerando será de 4,2 mm para os estribos e a de 10 mm para as barras longitudinais conhecida popularmente como $3/8$, mas vale ressaltar que os cálculos realizados valem para todos os tipos de aço, bastando para isso mudar a especificação do mesmo. A ferragem de 4,2 mm é cortada em pequenos pedaços que são dobrados e amarrados ou soldados nas medidas desejadas, após esse procedimento de corte e dobra, o objeto formado recebe o nome de estribo. Caso seja amarrado, é conveniente deixar uma sobra de aproximadamente 5 cm em cada extremidade, que é correspondente a dobra para amarração. Ele é distribuído de forma que envolva a ferragem longitudinal com um determinado espaçamento entre eles conforme Figura 3.4.

É importante ressaltar novamente que antes de executar qualquer construção, procure um especialista no assunto que possa fazer os estudos estruturais e seus respectivos cálculos.

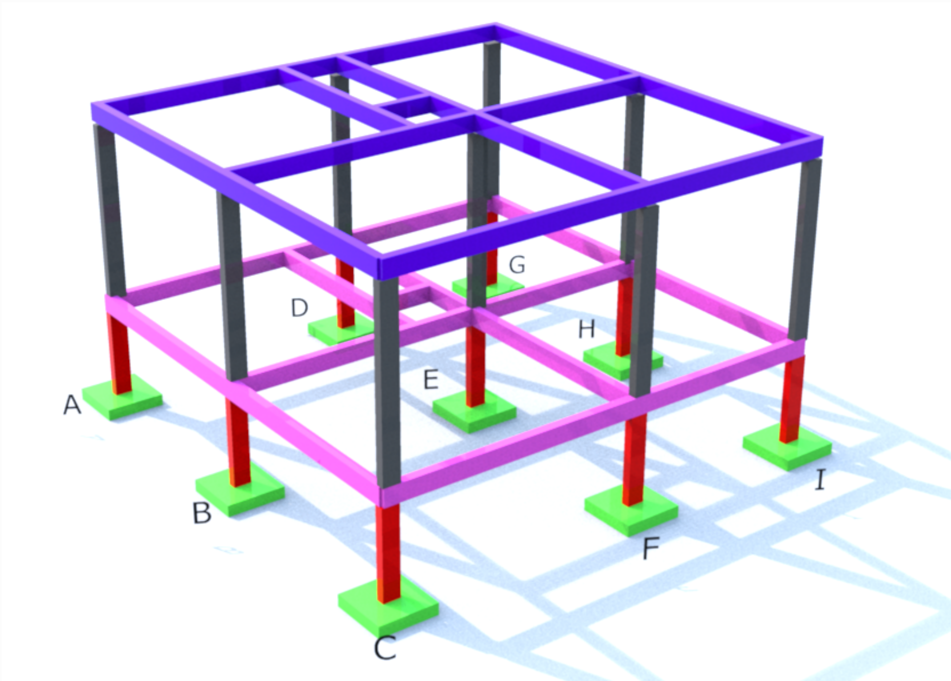


Figura 3.5: Toda estrutura de concreto da construção.

Em nossos cálculos iremos considerar que a ferragem ilustrada será utilizada ao longo das seguintes estruturas: mini pilar da fundação, cinta da base, pilar e cinta superior (viga), conforme Figura 3.5. Para estas aplicações, os estribos serão retangulares.

O proprietário da construção pode optar por comprar a ferragem já pronta, ou seja, já recortada e amarrada nos tamanhos que desejar ou pode comprar as barras de aço de 12 m e preparar os recortes para construir as mesmas. Para construir a armação da ferragem é necessário um certo tempo para recorte e amarração dos aços, logo caso queira agilizar o desenvolvimento da obra é viável adquiri-las prontas. Caso opte pela segunda opção, mesmo assim é necessário saber o comprimento total que será gasto na construção.

Toda a estrutura de concreto, conforme Figura 3.5, deve conter ferragens em sua parte interna, exceto no bloco de fundação que não possui a ferragem em seu interior, ao contrário da sapata. Sendo assim, desconsiderando os blocos de fundação, vamos calcular o comprimento total de ferragem que será gasto em toda a construção, para isso vamos analisar parte a parte cada estrutura e logo em seguida faremos a soma de todas, concluindo o cálculo desejado.

Vamos fazer o cálculo de ferragens individualmente por estruturas, conforme exemplos a seguir. Vale ressaltar que ao fazermos as amarrações das ferragens existe a necessidade de deixar um pedaço a mais chamado de sobra, por isso o cálculo realizado é maior que o perímetro. Caso o cálculo seja realizado sem considerar estas sobras, o mesmo será igual ao perímetro.

Exemplo 3.2.1: **(Mini pilar)** Calcular o comprimento das ferragens necessárias para construir os mini pilares.

Temos conforme especificações na Seção 1.2, que o mini pilar possui comprimento de 1,5 m, porém é necessário deixar uma parte de ferragem a mais, ou seja, uma sobra, para que possa ser amarrada às outras ferragens, como por exemplo, a conexão (amarração) entre o mini pilar e a cinta da base, logo iremos deixar essa sobra como sendo de 50 cm, portanto, teremos um comprimento de cada mini pilar como sendo de 1,5 m mais 0,5 m, ou seja, 2 m de comprimento. Assim, como temos 9 mini pilares, logo o comprimento (C_1) total será

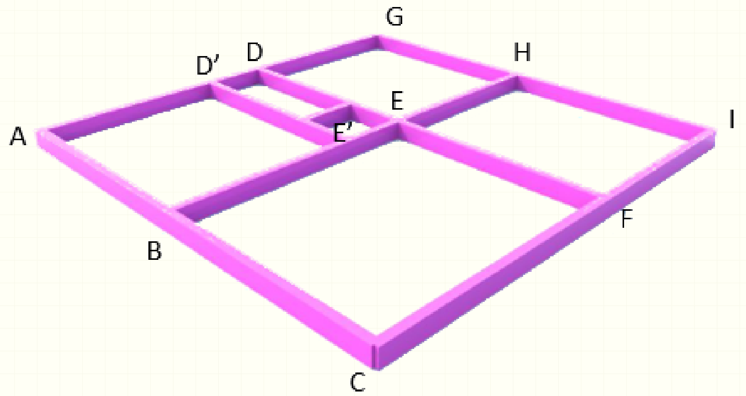
$$\begin{aligned} C_1 &= 2 \times 9 \\ &= 18\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Portanto comprimento da ferragem dos mini pilares é

$$C_1 = 18\,\mathrm{m} \tag{3.1}$$

No cálculo das ferragens, é normal sobrepor ou entrelaçar uma parte da peça com a outra, isso permite uma melhor amarração aumentando o travamento entre elas, logo seu valor será um pouco maior do que o valor que calcularemos na Seção 6 que fala sobre o cálculo da quantidade de concreto. A seguir vamos calcular o comprimento da cinta da base.

Exemplo 3.2.2: **(Cinta da base)** Calcular o comprimento das ferragens necessárias para construir a cinta da base.



Observe que temos as regiões externa e interna. Vamos calcular cada uma dessas regiões separadamente.

Externa: $AC + CI + IG + GA$, conforme ilustração, logo

$$\begin{aligned} C_{\text{ext}} &= 8 + 8 + 8 + 8 \\ &= 32\,\text{m} \end{aligned}$$

O comprimento da ferragem da região externa é de 32 m.

Interna: $DF + BH + D'E' +$ (parede da porta do banheiro) conforme ilustração

$$\begin{aligned} C_{\text{int}} &= 8 + 8 + 4 + 1{,}3 \\ &= 21{,}3\,\text{m} \end{aligned}$$

O comprimento da ferragem da região interna é de 21,3 m. Agora somando as ferragens da região **externa e interna** temos

$$\begin{aligned} C_2 &= C_{\text{ext}} + C_{\text{int}} \\ &= 32 + 21{,}3 \\ &= 53{,}3\,\text{m} \end{aligned}$$

Portando o total de ferragem da cinta da base será

$$C_2 = 53{,}3\,\text{m} \tag{3.2}$$

Exemplo 3.2.3: (Pilares) Calcular o comprimento das ferragens necessárias para construir os pilares.

Assim como nos mini pilares, nos pilares pelo mesmo motivo devem possuir uma armação um pouco maior que o próprio pilar para permitir a fixação (amarração) às outras estruturas, logo vamos considerar as ferragens dos pilares com meio metro a mais em cada parte (superior/inferior), ou seja, como os pilares são de 3 m, iremos considerar uma ferragem com 4 m de comprimento

$$\begin{aligned} C &= 0{,}5 + 3 + 0{,}5 \\ &= 4\,\text{m} \end{aligned}$$

Pela planta apresentada sabemos que são nove pilares logo

$$\begin{aligned} C_3 &= 4 \times 9 \\ &= 36\,\text{m} \end{aligned}$$

O comprimento da ferragem dos pilares é

$$C_3 = 36\,\text{m} \tag{3.3}$$

Agora vamos considerar as vigas.

Exemplo 3.2.4: (Vigas) Calcular o comprimento das ferragens necessárias para construir as vigas.

As ferragens da cinta superior (vigas) são idênticas às da cinta da base, conforme calculamos na equação (3.2), logo:

$$C_4 = C_2 = 53{,}3\,\text{m}$$

Assim o comprimento da ferragem das vigas é

$$C_4 = 53{,}3\,\text{m} \tag{3.4}$$

Para sabermos o total de ferragens é só realizarmos a soma dos valores encontrados em cada um dos exemplos anteriores.

Exemplo 3.2.5: (Total de ferragens) Calcular a quantidade total de ferragens.

Temos portanto que o total de ferragem da construção será igual a somatória utilizado nos mini pilares, cinta da base, pilares e cinta superior (vigas). Somando as equações (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) teremos

$$\begin{aligned} C_t &= C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \\ &= 18 + 53{,}3 + 36 + 53{,}3 \\ &= 160{,}6\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

O comprimento total de ferragem da obra é

$$C_t = 160{,}6\,\mathrm{m} \tag{3.5}$$

O valor encontrado é referente somente ao comprimento da estrutura de aço, composta por 4 barras longitudinais de 10 mm, que serão utilizadas e seus estribos espaçados conforme especificado. A seguir, serão apresentadas algumas considerações sobre as ferragens.

Caso queira comprar a ferragem já pronta (recortada e amarrada com os estribos) é só informar esses total com espaçamento que desejar para os estribos. O valor total informado é somente para questão de cálculo do valor financeiro, pois o proprietário pode informar os tamanho de cada estrutura, para que as mesmas já venham separadas individualmente.

O preço da ferragem depende do diâmetro do aço e espaçamento que será usado entre os estribos. Tais especificações devem ser seguidas de acordo com as orientações e projetos do profissional qualificado pelo órgão regulamentador.

Exemplo 3.2.6: Calculando a quantidade de barras de aço.

Caso o proprietário decida comprar a ferragem para montar as estruturas, ele deve verificar quantas barras serão necessárias, pois o aço é comercializado em barras de 12 m. O valor calculado de 160,6 m, refere-se ao comprimento total da estrutura longitudinal, logo devemos multiplicar esse valor por 4, pois conforme Figura 3.4, observamos que, para montar a estrutura, são necessárias quatro barras no seu interior, logo

$$C = 160{,}6 \times 4$$

$$= 642{,}4\,\text{m}$$

ou seja, aproximadamente 643 metros de aço 10 mm. Portanto neste caso para saber a quantidade de barras de 10 mm, dividimos o comprimento (C) encontrado de 643 por 12 m teremos

$$\begin{aligned} Q &= 643 \div 12 \\ &= 53{,}58 \end{aligned}$$

ou seja, aproximadamente 54 barras de 10 mm.

Note que essa é a quantidade somente da ferragem de 10 mm, ainda estão faltando os estribos.

Exemplo 3.2.7: Calculando a quantidade de estribos.

No nosso cálculo iremos considerar uma ferragem armada de 10 mm e estribos em formato retangular com dimensões de 7×17 cm, ou seja seu perímetro/contorno é de 48 cm, mas acrescentando os 5 cm de sobra em cada extremidade, teremos que o pedaço de aço suficiente para fazer um único estribo é de 58 cm. Além disso iremos considerar o espaçamento entre os estribos de 15 cm. Podemos calcular a quantidade de estribos, pegando o comprimento longitudinal onde eles serão distribuídos e dividimos pelo espaçamento entre eles, em seguida somamos um ao resultado encontrado, essa será a quantidade de estribos que serão utilizados no comprimento considerado. Vamos calcular a quantidade total necessária, que devem ser distribuídos ao longo de 160,6 m de extensão. Para isso, conforme já mencionado é só dividirmos 160,6 m por 15 cm, ou seja, por 0,15 m e somar um ao resultado que encontraremos a quantidade de estribos.

Vamos calcular a quantidade de estribos (Q_e), conforme especificações de espaçamento indicadas acima.

$$\begin{aligned} Q_e &= 160{,}6 \div 0{,}15 + 1 \\ &= 1070{,}67 + 1 \\ &= 1071{,}67 \end{aligned}$$

ou seja, aproximadamente 1072 estribos.

Temos a quantidade de estribos, agora vamos calcular a quantidade de barras de aço.

Exemplo 3.2.8: Calculando a quantidade de barras de aço para produzir os estribos.

Já calculamos a quantidade de estribos, agora vamos determinar a quantidade de barras (Q_b) de aço 4,2 mm necessárias, considerando que a comercialização é feita em barras com 12 m de comprimento.

Vamos dar início analisando o comprimento da ferragem necessária para construir um único estribo. Sabemos que para produzir cada estribo, precisamos de um pedaço de 58 cm, ou seja, 0,58 m de comprimento. Logo o comprimento total (C_t) de todos os 1072 estribos são:

$$\begin{aligned} C_t &= 1072 \times 0.58 \\ &= 621{,}76\,\text{m} \end{aligned}$$

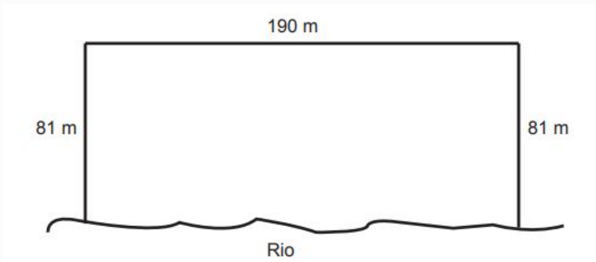
ou seja, aproximadamente 622 metros de aço 4,2 mm. Para concluir o nosso cálculo e determinar a quantidade de barras (Q_b) de aço 4,2 mm necessárias, lembrando que a comercialização é feita em barras com 12 m de comprimento, é só dividirmos 622 metros por 12.

$$\begin{aligned} Q_b &= 622 \div 12 \\ &= 51{,}83 \end{aligned}$$

ou seja, aproximadamente 52 barras de 4,2 mm.

3.3 Exercícios do ENEM

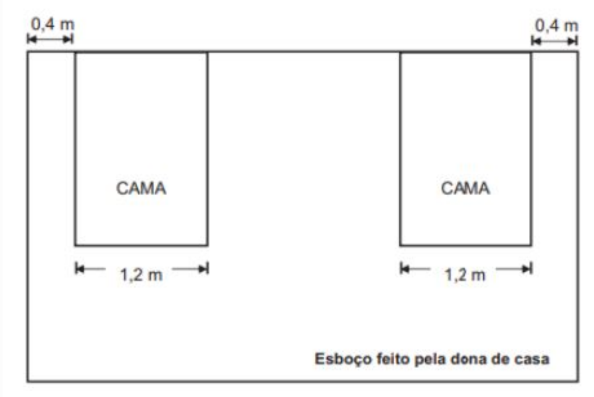
1) [resp] (ENEM/2013) Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.



A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é

a) 6 b) 7 c) 8 d) 11 e) 12

2) [resp] (ENEM-2013) Uma dona de casa pretende comprar uma escrivaninha para colocar entre as duas camas do quarto de seus filhos. Ela sabe que o quarto é retangular, de dimensões 4 m × 5 m, e que as cabeceiras das camas estão encostadas na parede de maior dimensão, onde ela pretende colocar a escrivaninha, garantindo uma distância de 0,4 m entre a escrivaninha e cada uma das camas, para circulação. Após fazer um esboço com algumas medidas, decidirá se comprará ou não a escrivaninha.



Após analisar o esboço e realizar alguns cálculos, a dona de casa decidiu que poderia comprar uma escrivaninha, de largura máxima igual a

a) 0,8 m b) 1,0 m c) 1,4 m d) 1,6 m e) 1,8 m

4

Quantidade de tijolos

A quantidade de tijolos é calculada usando os conceitos de proporcionalidade e de área, logo se faz necessário relembrarmos estes conceitos. Vamos iniciar com proporcionalidade e em seguida abordaremos a área.

4.1 Relembrando proporcionalidade

Desde a antiguidade o homem usa o princípio intuitivo de contagem e apresenta uma ideia de comparação ou proporcionalidade. Essa situação é observada quando o mesmo usa uma pequena pedra para representar um animal, duas para representar dois animais e assim por diante, associando o quantitativo de pedras à quantidade de animais, conforme Figura 4.1.

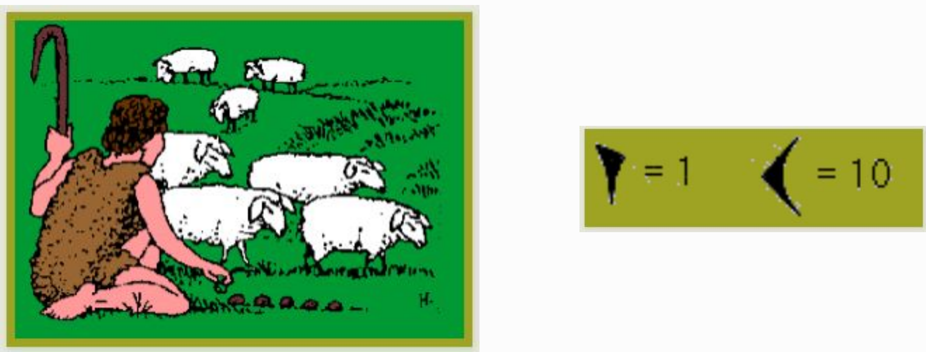


Figura 4.1: Homem contando com pedrinhas e símbolos numéricos.

Como mencionado anteriormente o homem ao longo de sua história sempre procura mecanismos e meios de adaptação, visando facilitar suas ações e atividades do dia a dia. Com o passar do tempo foram surgindo outras ideias e maneiras de comparação e representação. Atualmente usamos os números

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots, n, \ldots$$

para contar, mas conforme Figura 4.1 nem sempre foi assim.

Além da noção de contagem, a ideia de comparação é outra característica de situações problemas que aparecem em nosso dia-a-dia. Por exemplo, se para fazer um bolo utilizam-se 3 ovos, caso queira manter as mesmas propriedades construtivas na produção de dois bolos, deverão ser usados 6 ovos. Essa ideia revela que nos dois casos o quociente entre a quantidade de bolos e a quantidade de ovos, ao qual chamamos de razão, é constante. Dizemos que existe uma proporção entre os itens (bolo e ovos), pois na primeira situação temos que

$$\frac{\text{quantidade de bolo}}{\text{quantidade de ovos}} = \frac{1}{3}$$

e na segunda temos

$$\frac{\text{quantidade de bolo}}{\text{quantidade de ovos}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

O conceito de proporcionalidade se faz presente em diversas situações, onde a ideia de comparação entre quantitativos mantendo a proporcionalidade faz-se presente na matemática, dentre elas podemos destacar o Teorema de Tales.

Teorema 4.1: Teorema de Tales

Sejam r, s, t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, A' \in t$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in r$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois termos de pontos colineares. Então

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

considerando que AB e BC são comensuráveis.

Vamos mostrar este teorema observando a Figura 4.2 onde temos, no mesmo plano, retas paralelas r, s e t, intersectadas pela retas transversais p e q, onde p intersecta r, s e t, respectivamente, em C, B e A e q intersectando r, s e t, respectivamente, em C', B' e A'.

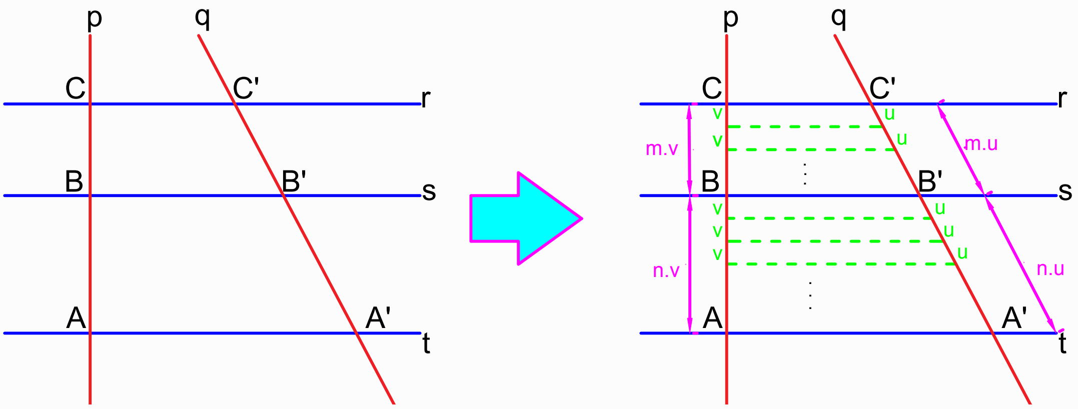


Figura 4.2: Retas paralelas cortadas por transversais.

Se considerarmos os segmentos AB e $A'B'$ e traçarmos $n-1$ retas paralelas e equidistantes a s, subdividimos os segmentos AB e $A'B'$ em n pedaços/segmentos de tamanho v e u respectivamente. Analogamente se considerarmos os segmentos BC e $B'C'$ e traçarmos $m-1$ retas paralelas e equidistantes a s, subdividindo estes segmentos BC e $B'C'$ em m pedaços/segmentos de tamanho v e u respectivamente. Temos que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{nv}{mv} = \frac{n}{m}, \qquad \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{nu}{mu} = \frac{n}{m}.$$

Concluímos portanto que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{n}{m}.$$

Podemos analisar que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{nv}{nu} = \frac{v}{u}, \qquad \frac{BC}{B'C'} = \frac{mv}{mu} = \frac{v}{u}.$$

Concluindo portanto que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{v}{u}.$$

Dizemos que os seguimentos AB e $A'B'$, assim como BC e $B'C'$, são proporcionais. Por isso, muitas vezes o teorema de tales é enunciado como: Um feixe de retas paralelas cortadas por transversais, determinam segmentos correspondentes proporcionais.

Portando, temos que duas grandezas X e Y são ditas proporcionais se existe uma constante $k > 0$ tal que $Y = kX$. A constante k é chamada de constante de proporcionalidade. Vamos supor que uma caixa de lápis de cor venha com 6 unidades, logo em três caixas teremos 18 unidades. O que temos na situação mencionada é a constante de proporcionalidade. Se considerarmos a quantidade de caixas como x e a quantidade de lápis como y temos na primeira situação que $y = kx$, ou seja, $6 = k \times 1$, o que nos diz que $k = 6$. Na segunda situação temos $y = kx$, ou seja, $18 = k \times 3$, onde temos que a constante k continua valendo 6, isto implica que se manteve a proporcionalidade entre a quantidade de lápis e a quantidade de caixas.

A situação mencionada anteriormente, nos remete a ideia de regra de três. A regra de três consiste em uma igualdade entre razões proporcionais, onde geralmente temos quatro termos, sendo três conhecidos e um desconhecido. Vamos reescrever a situação anterior da seguinte maneira: Uma caixa de lápis de cor vem com 6 unidades, se tivermos 3 destas caixas de lápis de cor, qual a quantidade de lápis teremos? Podemos reescrever a situação através da igualdade entre duas razões dadas entre quantidade de lápis pela quantidade de caixas, como sendo:

$$\frac{6}{1} = \frac{x}{3}$$

de onde concluímos que $x = 18$, ou seja, em três caixas teremos um total de 18 lápis.

Vamos ver dois exemplos do nosso dia a dia onde se faz presente a ideia de proporcionalidade e regra de três.

Exemplo 4.1.1: Ao comprar tapetes de grama para colocar em seu quintal, a cliente foi informada que o valor era de R$ 4,00 o metro quadrado. Ela informou que seu quintal possui $30\,\mathrm{m}^2$. Imediatamente o proprietário informou que o valor a ser pago seria de R$ 120,00.

O que o proprietário fez, foi manter a razão entre a quantidade de metros quadrados de grama e o valor em reais a ser pago. Observe que

$$\frac{\text{quantidade de grama } (\mathrm{m}^2)}{\text{valor em reais}} = \frac{1}{4}$$

logo o valor a ser pago pelo cliente deveria manter esta razão. Como eram $30\,\mathrm{m}^2$, portando obteríamos tal razão quando o denominador fosse 120, pois como o numerador foi multiplicado por 30, o denominador também deve ser multiplicado por 30.

Exemplo 4.1.2: Um estabelecimento comercial, utiliza constantemente muitas moedas durante o troco, por isso colocou um cartaz informativo pedindo aos clientes que trouxessem moedas para fazer a troca com o estabelecimento. Em determinado dia, um cliente trouxe uma sacola com uma grande quantidade de moedas de 10 centavos. Caso fossem contar uma a uma cada moeda da sacola, demoraria um tempo considerável, por isso o proprietário pesou uma pequena parte das moedas e verificou quantos reais continha naquela pequena quantidade pesada. Em seguida pesou todas elas juntas e disse ao cliente que lhe pagaria R$ 175,00. Como o cliente pode verificar a veracidade deste valor oferecido a ele?

A verificação da situação apresentada, pode ser solucionada recorrendo ao princípio da proporcionalidade entre os valores que determinam a razão. Veja o procedimento adotado pelo cliente para verificar o valor. Ele pegou 10 moedas, ou seja, R$ 1,00 e pesou, obtendo 47 gramas. Desconsiderando o peso da embalagem, verificou-se que o peso de todas as moedas era de 8,225 kg, ou seja, 8225 g. Temos que a razão entre 10 moedas e seu peso em gramas é de $^{10}/_{47}$, logo para descobrir o quantidade w de moedas presentes na embalagem ele deveria manter a mesma razão, ou seja

$$\frac{w}{8225} = \frac{10}{47}$$

e verificou-se, através da regra de três, que $w = 1750$ moedas de 10 centavos, ou seja, equivalente a 175 reais. Portanto concordou com o proprietário.

O procedimento adotado pelo comerciante para chegar a essa conclusão, foi análogo ao adotado pelo cliente para fazer a verificação do valor oferecido. Portando ambos usaram o princípio da proporcionalidade.

4.2 Relembrando área

Provavelmente você já viu ou ouviu falar algumas das seguintes afirmações:

1. Meu terreno é de 360 metros quadrados.
2. Minha fazenda é de 5 hectares.
3. A sala da minha casa é de 15 metros quadrados.
4. O município de Comercinho-MG possui extensão territorial de 656 km^2.
5. A fazenda do meu pai é de 10 alqueires.

Essas afirmações referem-se à regiões que possuem uma limitação (região fechada). Iremos verificar que no contexto matemático essa região (superfície) é conhecida como área.

Segundo João Lucas Marques Barbosa a noção de área de regiões poligonais é introduzida na geometria através dos seguintes axiomas, [3] páginas 204 e 205.

Axioma 4.2: Axiomas de Área

1. A toda região poligonal corresponde um número maior que zero. O número a que se refere este axioma é chamado de área da região.
2. Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então, sua área é a soma das áreas daquelas regiões.
3. Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.
4. Se $ABCD$ é um retângulo, então, sua área é dada pelo produto: $AB \times BC$

De maneira mais simples, Francisco Dutenhefnaer e Luciana Cadar [9], pag.83, definem a área de uma região limitada (figura no plano) da seguinte forma:

> Dada uma figura no plano, vamos definir a área desta figura como o resultado da comparação da figura dada com uma certa unidade de medida. No caso do conceito de área de figuras planas, a unidade de medida utilizada é um quadrado de lado 1 (uma unidade de comprimento). Assim um quadrado de lado 1 tem, por definição, uma unidade de área.

Podemos observar que a área de determinada região é uma comparação com alguma unidade de medida adotada. A seguir iremos mostrar como se calcula a área de diferentes figuras seguindo, em linhas gerais, as técnicas utilizadas no livro da OBMEP Encontros de Geometria dos autores Francisco Dutenhefner e Luciana Cadar [9].

Área de quadrado e retângulo

O cálculo de área de maneira geral se baseia em uma medida unitária adotada como referência de medida comparativa, onde com o desenvolvimento dessa técnica você consegue chegar a determinadas conclusões (fórmula) que podem ser utilizadas como verdade após essa demonstração inicial.

Para definirmos a área de um quadrado ou retângulo qualquer usaremos um quadrado de lado 1 que possui respectivamente uma unidade de área. Ainda segundo Francisco Dutenhefnaer e Luciana Cadar.

> Por definição o quadrado de lado 1 tem uma unidade de área conforme Figura 4.3 que mostra, respectivamente, quadrados de lados 1, lado 2 e lado 3. Como o quadrado de lado 2 pode ser dividido em 4 quadrados de lado 1, dizemos que o quadrado de lado 2 tem área igual a 4. Do mesmo modo, como o quadrado de lado 3 pode ser dividido em 9 quadrados de lado 1, dizemos que o quadrado de lado 3 tem área igual a 9 [9].

Mesmo se as medidas do lado da figura não forem um número inteiro, continua valendo a propriedade observada e portanto podemos adotar o mesmo critério.

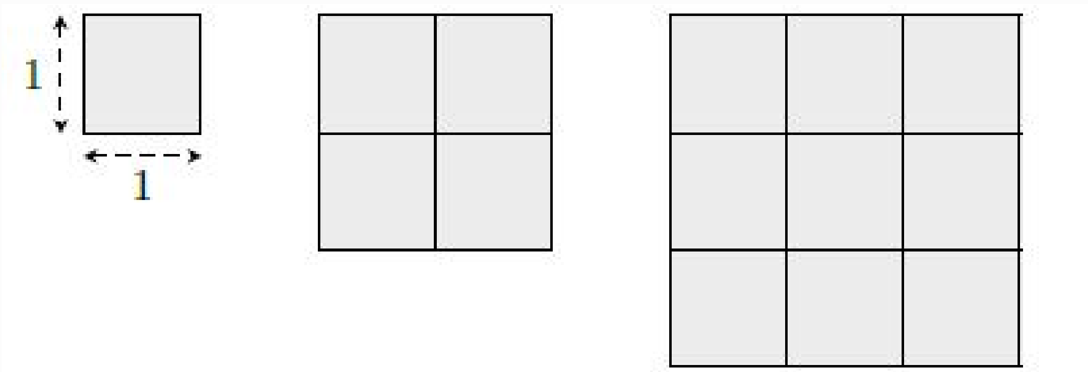


Figura 4.3: Quadrados de lado 1, lado 2 e lado 3.

Portanto a área calculada de determinada região é uma comparação entre a região total desta com uma outra região adotada como unidade de comparação. Percebemos que a área de um quadrado de lado l será,

$$A = l \times l = l^2$$

e a área de um retângulo de comprimento m e largura n será,

$$A = m \times n = mn$$

Costuma-se chamar o comprimento e a largura de um retângulo ou quadrado, respectivamente, de base e altura. Assim, a área tanto do quadrado, quanto do retângulo, é dada pelo "produto da base pela altura".

Área do triângulo retângulo

Dando incio, consideraremos um triângulo retângulo de base b e altura h, onde iremos rotacioná-lo e encaixá-lo sobre o próprio triângulo retângulo inicial, formando assim um retângulo de base b e altura h conforme ilustração da Figura 4.5. Temos, portanto, que cada triângulo equivale a metade do retângulo, logo como a área do retângulo é dada pelo produto da base vezes a altura, a área (A) do triângulo retângulo será dada pela metade do produto da base vezes a altura, ou seja,

$$A = \frac{bh}{2}.$$

Portanto, como consideramos na ilustração um triângulo retângulo de base 4 e altura 2, conforme Figura 4.5, sua área será:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4.$$

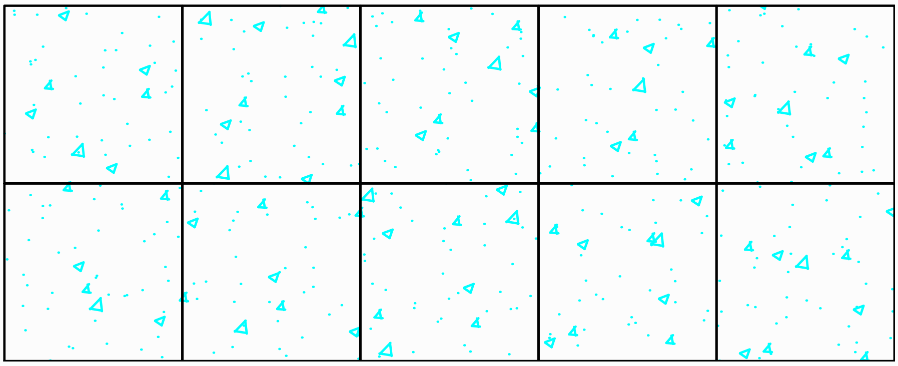


Figura 4.4: Retângulo formado por altura equivalente a 2 quadrados e comprimento de 5 quadrados, totalizando 10 quadrados unitários.

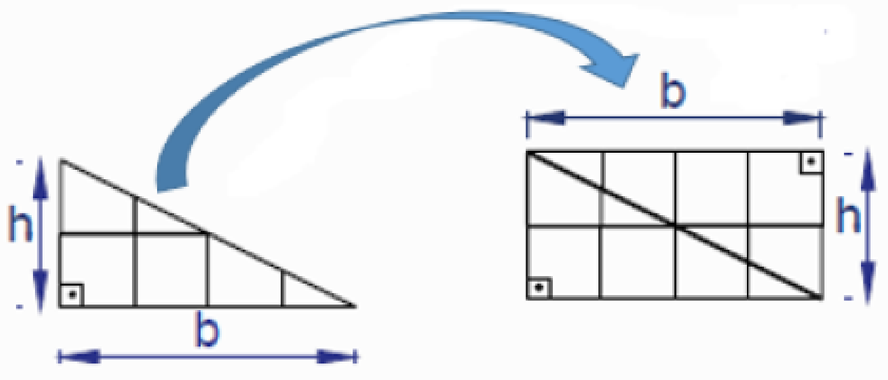


Figura 4.5: Triângulo retângulo de base b e altura h, sendo rotacionado e encaixado sobre se mesmo formando um retângulo de base b e altura h.

Área do paralelogramo

Continuando a explorar o cálculo de área, queremos encontrar a área de um paralelogramo, que é um quadrilátero que possui pares de lados opostos paralelos e de mesma medida. Assim, dado um paralelogramo $ABCD$, conforme Figura 4.6 (a), temos que AB é paralelo a DC ($AB /\!/ DC$), com AB congruente com DC ($AB \cong DC$), portanto, AD é paralelo a BC ($AD /\!/ BC$) com AD congruente com BC ($AD \cong BC$).

Para calcular a área do paralelogramo, iremos através de dois de seus lados (AD e BC) construir o triângulo DPA, retângulo em P, e o triângulo BQC, retângulo em Q, logo DPA e BQC são congruentes por construção, e possuem base de comprimento x e altura igual a altura do paralelogramo, que indicamos por h, obtemos um retângulo de base $m + x$ e altura h), conforme Figura 4.6 (b). A área do paralelogramo, é obtida pegando a área do retângulo $PBQD$ e subtraindo a área dos dois triângulos DPA e BQC. Portanto a área será dada por

$$
\begin{aligned}
A &= (m+x)h - \frac{xh}{2} - \frac{xh}{2} \\
&= mh + xh - \frac{xh}{2} - \frac{xh}{2} \\
&= mh + xh - \frac{2xh}{2} \\
&= mh + xh - xh \\
&= mh
\end{aligned}
$$

e concluímos portanto que a área do paralelogramo também é dada pelo produto da base vezes a altura.

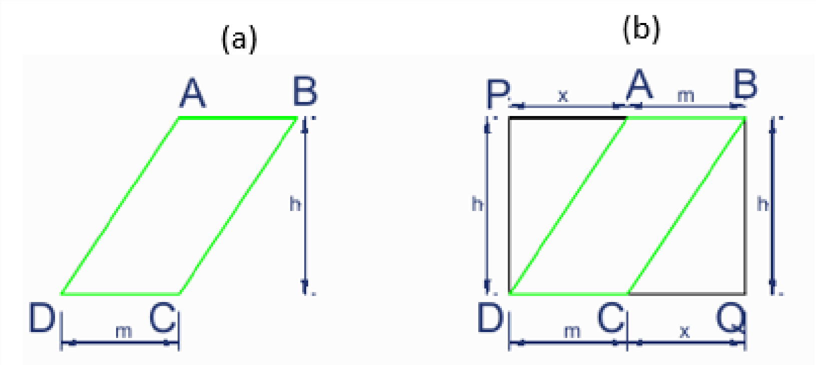


Figura 4.6: Paralelogramo sendo completado com dois triângulos retângulos congruentes, formando assim uma nova figura (retângulo).

Área de um triângulo qualquer

Já mostramos anteriormente como se calcula a área de um triângulo retângulo, agora vamos mostrar como se calcula a área de um triângulo qualquer. Considere um triângulo qualquer de base b e altura h, e construa um outro triângulo idêntico a este, rotacione-o e encaixe-o com o triângulo inicial, conforme Figura 4.7. Obtemos assim, um paralelogramo formado por dois triângulos idênticos, ou seja, a área de um desses triângulos é exatamente a metade da área do paralelogramo, logo

$$A = \frac{bh}{2}.$$

Temos, portanto, que a área de um triângulo qualquer, assim como a área de um triângulo retângulo, é dada por base vezes altura dividido por dois.

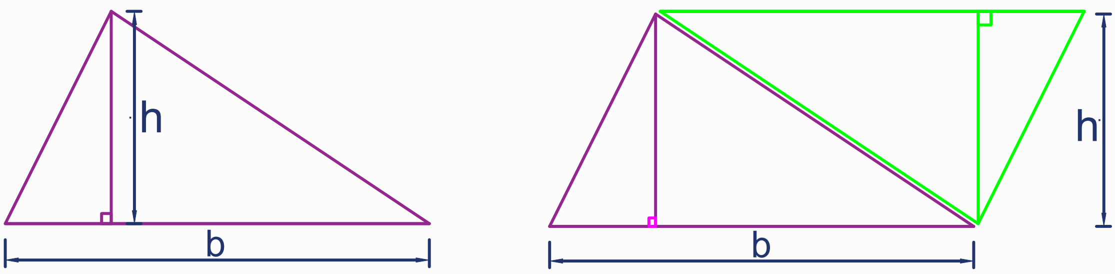


Figura 4.7: Triângulo qualquer de base b e altura h, sendo completado com um triângulo idêntico formando uma nova figura (paralelogramo).

Área do trapézio

Vamos considerar um trapézio de lados paralelos medindo b e B, o segmento perpendicular a estes dois lados de medida h chamado de altura do trapézio conforme Figura 4.8. Criando um outro trapézio idêntico ao citado anteriormente, rotacionando-o e encaixando ambos conforme Figura 4.8, obtemos um paralelogramo de base $B+b$ e altura h. Conforme vimos na realização do cálculo da área do paralelogramo (A_p) sua área é dada pelo produto da base vezes altura, ou seja

$$A_p = (B+b)h.$$

Pela construção observamos que a área do trapézio (A_t) é exatamente a metade da área do paralelogramo, portanto será dada por

$$A_t = \frac{(B+b)h}{2}.$$

Analisando o trapézio observamos que á área é dada pelo produto da soma das bases pela altura, dividido por dois.

4.3 Aplicabilidade e transformações

Apresentamos aqui alguns exemplos do uso do conceito de área em situações do cotidiano que usam o metro quadrado (m^2) como referência. Ao comprar grama para colocar em jardins, seu preço é dado por metro quadrado, ou seja, calcula-se o quantitativo a ser pago através da área ocupada pela grama. Outro exemplo é a quantidade de revestimento utilizado nos pisos das casas, seu preço é cobrado, na maioria das vezes, pelo metro quadrado. Ao anunciar terrenos ou lotes para serem

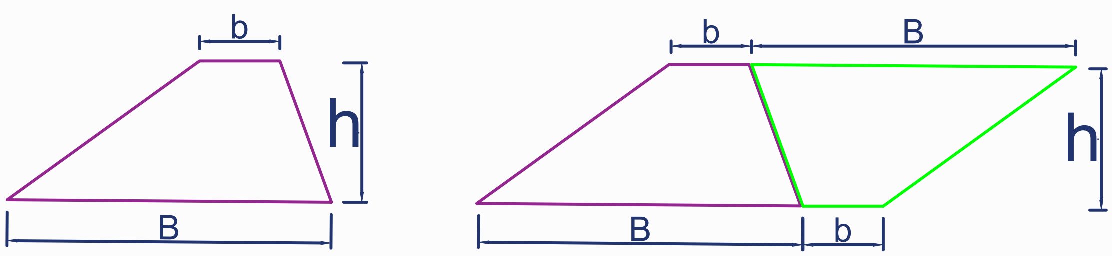


Figura 4.8: Trapézio de altura h e bases B e b, sendo completado com um trapézio de mesmas medidas, porém rotacionado, obtemos um paralelogramo.

vendidos, é usual verificar-se na escrita do anúncio informações sobre seus tamanhos, que são expressas, na maioria das vezes, em metros quadrados.

Temos em nosso dia a dia outras situações de área que adotam o metro quadrado como unidade de referência como: a pintura das paredes de uma casa, os telhados, o gramado de um jardim, entre outros.

Um outro exemplo, mas não diretamente ligado a uma construção, é a contagem de grandes públicos em manifestações ou eventos em espaços públicos divulgado por meios de comunicação. Você já parou para pensar como os órgãos responsáveis calculam a quantidade de pessoas presentes nestes espaços? Será que eles contam um a um? A resposta é não. O que ocorre na verdade é o cálculo aproximado, onde se utiliza o metro quadrado como referência. Para simular como é feito esse cálculo, vamos supor que quando existe uma multidão sem espaço entre as pessoas para fazer a movimentação entre elas, ou seja, é praticamente impossível mover sem se encostar na outra, considera-se que existem 9 pessoas por m^2 para estimar a quantidade de pessoa presentes. Caso a aglomeração seja menor do que a situação citada anteriormente, os especialista usam outras estimativas para o número de pessoas por metro quadrado. A Figura 4.9, mostra três possíveis situações, onde cada círculo indica uma pessoa dentro de um quadrado de um metro quadrado. No caso A, temos 9 pessoas por metro quadrado, no caso B, temos 5 pessoas e no caso C, temos 3 pessoas.

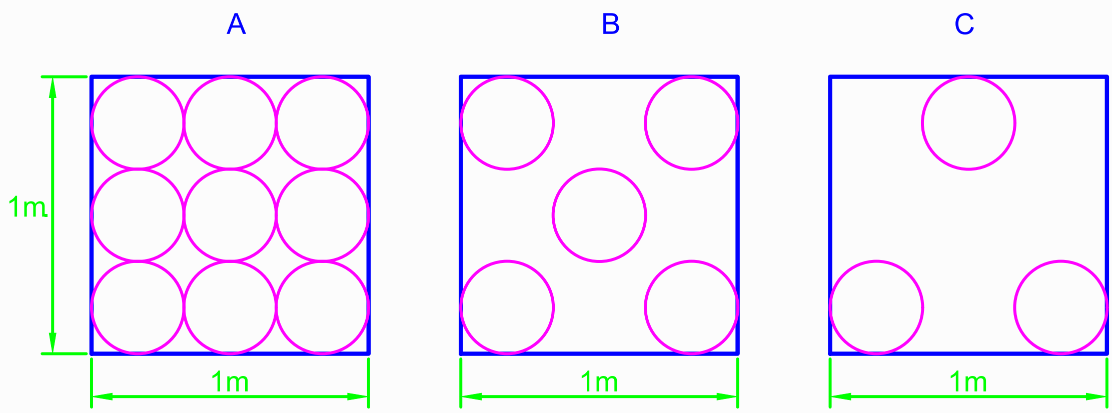


Figura 4.9: Cada circulo dentro do metro quadrado representa uma pessoa, logo na ilustração A, B e C, considera-se respectivamente 9, 5 e 3 pessoas por metro quadrado (m^2).

Quando o evento é fechado e existe uma venda de ingresso, ou um controle de contagem durante o acesso, ai sim é possível contá-los. Mas se tratando de eventos públicos em locais abertos, não existe essa contagem um a um, o que acontece é que, além das informações de referência que temos até o momento é preciso conhecer as medidas do ambiente ocupado. Através dessas duas informações (quantidade de pessoas por cada metro quadrado e medidas do espaço ocupado) é possível fazer uma estimativa da quantidade de pessoas presentes.

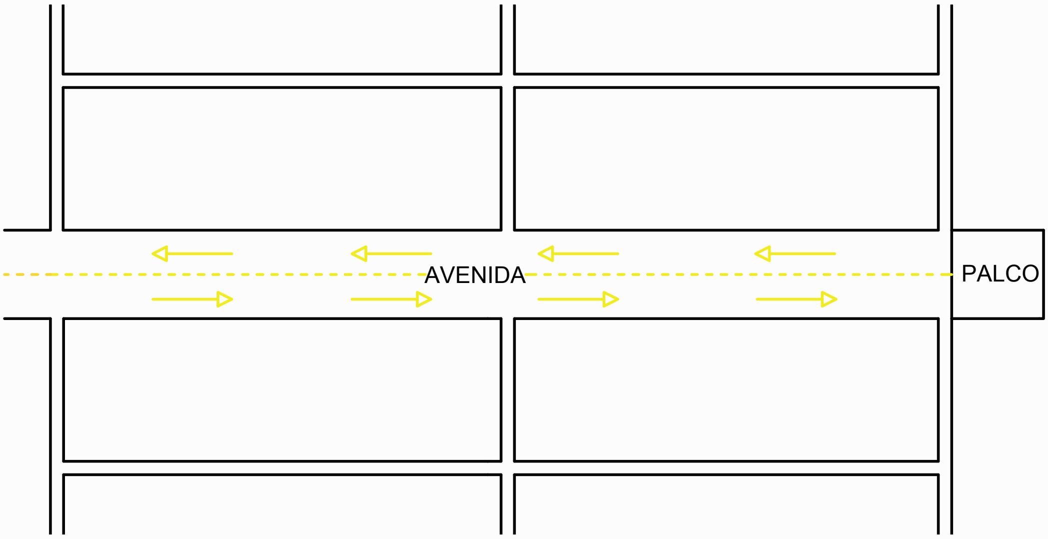


Figura 4.10: Avenida com 800 m de comprimento por 20 m de largura.

Exemplo 4.3.1: Vamos supor que um evento fosse realizado na avenida da Figura 4.10 que possui 800 m de comprimento por 20 m de largura, ou seja, sua área é de 16 000 m^2.

Nesse cenário as quantidades de pessoas em um evento, considerando as situação A, B e C, conforme Figura 4.9 seria, respectivamente, 144 mil, 80 mil e 48 mil. Podemos concluir portanto que a capacidade máxima suportada pelo evento é de 144 mil pessoas, considerando sua realização nesta avenida.

Existem outras unidades de medida de áreas. Cada uma delas são utilizadas de acordo a viabilidade descrita, ou seja, de acordo com o tamanho do ambiente a ser informado. Quando falamos em áreas muito grandes, por exemplo as pertencentes a um município, geralmente usamos o quilometro quadrado (km^2) como unidade de medida de sua área. A Figura 4.11 mostra algumas informações em que o km^2 é utilizado. Temos que a área territorial de Belo Horizonte-MG é de 331,354 km^2 e a densidade demográfica, que é a quantidade de habitantes por superfície ocupada, é de 7167 habitantes por km^2.

Ao falarmos da área das seções das barras de aço utilizadas nas construções, por serem pequenas utiliza-se o centímetro quadrado (cm^2) como unidade comparativa. Além do metro quadrado (m^2), quilometro quadrado (km^2) e centímetro cm^2 citadas, existem

Figura 4.11: Dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE sobre a capital mineira Belo Horizonte.

outras unidades de medidas para representar a área de determinadas superfícies, tais como o milímetro (mm^2), decímetro (dm^2) entre outros, mas vale reforçar que todas usam como referência comparativa um quadrado unitário conforme mencionado na Seção 4.2. A escolha da unidade de medida a ser utilizada para representar a área, é muitas vezes uma questão de bom senso, porque nada impede você de falar por exemplo que o seu lote possui $3\,600\,000\,\mathrm{cm}^2$. Apesar de representarem a medida real da superfície do terreno, essa forma pode dificultar o entendimento do público alvo ao anúncio, pois em seu dia a dia está acostumado a ver as informações do terreno em metro quadrado (m^2).

4.4 Importância da área na relação do solo com o peso das estruturas

Todas as cargas das construções são descarregadas no solo, logo esse é o motivo pelo qual se deve analisar a carga que o solo suporta em uma determinada região sem sofrer alteração (deformação) do seu estado físico (estrutural). Esse valor é o que chamamos de resistência do solo. A unidade de medida de resistência é quilograma força por metro quadrado ($\mathrm{kgf/m}^2$), mas iremos utilizar a unidade simbolicamente na linguagem quilograma por metro quadrado ($\mathrm{kg/m}^2$), por considerarmos que a unidade quilograma é comumente conhecida e utilizada pela maioria da população.

Quando falamos que o solo possui resistência de $30\,000\,\mathrm{kg/m}^2$, isso significa que o solo resiste a uma carga de 30 000 quilogramas por cada metro quadrado. Caso esteja chegando uma carga superior a 30 mil quilos no bloco desta fundação e o mesmo possuir área da base igual a $1\,\mathrm{m}^2$, existe risco de rompimento do solo, causado pelo excesso da quantidade de carga que chega a ele.

A Figura 4.12 mostra a resistências do solo e a carga que está chegando no bloco de fundação. O caso I indica uma situação que atende aos padrões de resistência do solo, logo ele não sofrerá deformações que causem danos a estrutura da obra. Por que a situação I atende? Podemos verificar que o solo resiste a uma carga de 30 000 kg/m^2 e está chegando apenas 25 000 kg em uma área de bloco de fundação/sapata que é exatamente 1 m^2. Já a situação II indica que está chegando uma carga superior aos padrões que o solo resiste, logo se for realizada, a obra estará em risco pois o solo pode se romper gerando seu colapso (queda, destruição).

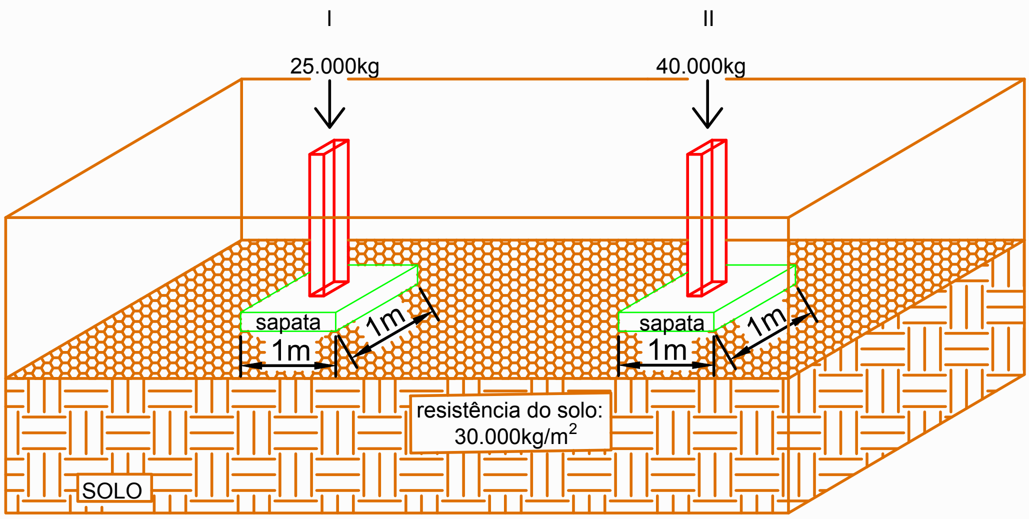


Figura 4.12: Carga descarregada no solo através do bloco de fundação.

Uma possível solução para a situação II, seria calcular uma nova área para o bloco de fundação. Por exemplo, se a área da base do bloco de fundação fosse de 2 m^2 teríamos que a carga que chega ao solo seria em uma proporção de 20 000 kg por cada metro quadrado o que atenderia aos padrões, pois o solo resiste até 30 000 kg por cada metro quadrado.

Nos cálculos realizados há, por parte dos profissionais responsáveis, a preocupação de trabalhar a favor da segurança, ou seja, com a intensão de evitar acidentes ou desastres antes, durante e após a obra. Iremos supor o valor 1,4 como fator de segurança para explicarmos nessa situação. Por esse motivo, quando calculamos que o peso que uma construção exerce sobre o solo é de 100 mil quilogramas, multiplicamos este valor por 1,4 chegando a uma indicação de que o peso da obra sobre o solo é 140 mil quilogramas, ou seja, estamos supondo um aumento de 40% no peso da construção. Caso a consideração fosse referente a força que o solo resiste, iriamos dividir este valor por 1,4, ou seja, se no cálculo o resultado fosse de 100 mil quilogramas, consideraríamos que ele só resiste a aproximadamente 71 mil quilogramas. Em ambos os casos, quando dividimos ou multiplicamos estamos aumentando a segurança, ou seja, esse aumento a favor da segurança recebe o nome de majoração.

Não se deixe enganar, vale ressaltar que a situação I ilustrada na Figura 4.12, nos mostra que o valor da carga que chega ao solo é menor que a resistência do mesmo, logo atenderia as condições e aos critérios de resistência e está tudo certo. Na verdade, não é bem assim que funciona, nas construções, principalmente nas partes estruturais que envolvem aço e concreto, existe sempre uma majoração nos cálculos realizados. Tal majoração é feita a favor da segurança, podendo chegar até a 40%. Portando se a carga da situação I que mencionamos, já estiver majorada está tudo certo e o bloco de fundação/sapata atenderá aos parâmetros conforme mencionamos, porém se a carga indicada for somente a calculada sem a majoração deverá ser feito tal aumento de acordo com as especificações técnicas.

Exemplo 4.4.1: Calculando a majoração da carga de uma estrutura.

Como exemplo vamos considerar que os 25 000 kg fossem somente a carga calculada, ela precisaria ser majorada, logo vamos supor que tal majoração fosse de 40%, ou seja, a carga calculada deve sofrer um aumento de 40%. Neste caso teríamos que a carga considerada (C_c) deverá ser:

$$\begin{aligned} C_c &= 25000 + (0{,}40 \text{ de } 25000) \\ &= 25000 + 10000 \\ &= 35\,000\,\text{kg} \end{aligned}$$

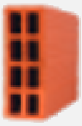
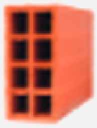
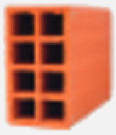
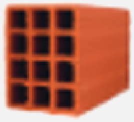
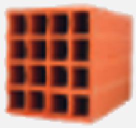
Como encontramos 35 000 kg e o solo só suporta, conforme mencionamos anteriormente, 30 000 kg/m^2, o bloco de fundação/sapata não atenderia aos critérios e deveria ser feita uma alteração no projeto estrutural, ou seja, deveríamos alterar a área da base do bloco de fundação que está em contato direto com o solo fazendo a distribuição das cargas que chegam.

Como estão observando, existe uma relação entre a matemática e as construções, porém vale ressaltar que além disso existem os critérios e normas técnicas por traz de cada construção. Portanto quando for iniciar a construção de um empreendimento, procure um profissional qualificado (engenheiro civil ou arquiteto) com formação na área e registro no órgão responsável. Nas construções geralmente o órgão é o CREA – Conselho Regional de Engenharia e Agronomia.

Em nosso dia a dia podemos observar a construção de paredes com janelas, conforme Figura 4.13. Quando fazemos o cálculo de tijolos, devemos observar e descontar a região das janelas onde não são utilizados tijolos. A seguir iremos mostrar o desenvolvimento de como calcular a quantidade de tijolos gastos em uma construção.

4.5 Área e proporção aplicados no cálculo de tijolos

Um material muito usado nas construções em geral é o tijolo. Vale ressaltar que existem os blocos de concreto e outros tipos de tijolos como ilustrado na tabela.

Alguns Tipos de Tijolos						
						
Produto	Alvenaria 30×20×4 (2)	Tijolo 30×20×7	Tijolo 30×20×9	Tijolo 30×20×11	Tijolo 30×20×15	Tijolo 30×20×22
Peso (kg)	5,0	3,5	4,0	4,6	6,2	8,5

Vamos iniciar a ideia do cálculo de tijolos com uma ilustração de um quadrado de 1 metro de lado, logo $1\,\mathrm{m}^2$. Iremos verificar quantos retângulos de 30 cm de comprimento por 20 cm de altura, cabem dentro deste quadrado. Iremos organizar esses retângulos de maneira desalinhada considerando a posição da fileira de baixo

Figura 4.13: Parede com janela.

com a de cima, isso porque é dessa forma que os tijolos são utilizados nas construções, para proporcionar um melhor travamento da estrutura.

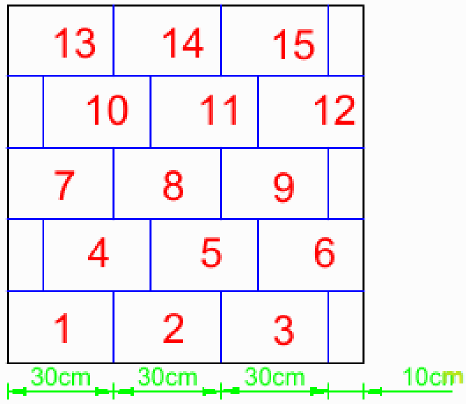


Figura 4.14: Região de $1\,\text{m}^2$ sendo preenchida com bloco retangular de 30cm de comprimento por $20\,\text{cm}$ de altura e seus respectivos pedaços, simulando a construção de uma parede.

EXEMPLO 4.5.1: Verificando quantos retângulos de $30\,\text{cm}$ de comprimento por $20\,\text{cm}$ de altura, cabem em um quadrado de $1\,\text{m}$ de lado.

Conforme Figura 4.14, observamos que foram colocados exatamente 15 retângulos inteiros e 5 pedaços de $10\,\text{cm}$ de comprimento, que ao juntarmos 3 destes pedaços obteremos um novo retângulo e ainda sobram dois pedaços que dão aproximadamente 0,66 de um retângulo. Podemos perceber portando que a quantidade de retângulos (Q_r) que cabem é

$$\begin{aligned} Q_r &= 15 + (5 \text{ pedaços de } 10\,\text{cm}) \\ &= 15 + (1 + 0{,}66) \\ &= 16{,}66 \text{ retângulos.} \end{aligned}$$

Uma outra maneira de encontramos esse valor é dividirmos a área do quadrado, $1\,\text{m}^2$, pela área da face do tijolo (A_{ft})

$$\begin{aligned} A_{ft} &= 30\,\text{cm} \times 20\,\text{cm} \\ &= 0{,}30\,\text{m} \times 0{,}20\,\text{m} \\ &= 0{,}06\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

Este cálculo nos proporcionaria o mesmo resultado, mesmo sem levar em consideração a ideia de colocá-los intertravados.

A ilustração na Figura 4.14, não foi feita por acaso, ela foi elaborada desta maneira, onde apoiamos os retângulo de forma que o de cima sempre encaixa sobre a metade dos dois blocos que estão logo abaixo, por se tratar da maneira como os tijolos são utilizados na construção, fazendo assim um travamento entre os tijolos e as fileiras. Chamamos essa forma de colocar os tijolos de intertravamento.

Iremos considerar em nossa construção a utilização de tijolos $14 \times 19 \times 29$ cm, ou seja, 14 cm de largura, 19 cm de altura e 29 cm de comprimento, pois geralmente nas construções das paredes apoiam se na horizontal os lados de 30 cm e 14 cm, logo os 14 cm, referem-se a espessura da parede. Vale ressaltar que no assentamento de tijolos, a largura não interfere na contagem de tijolos nas paredes, logo levaremos em consideração somente o comprimento e a altura do tijolo.

Conforme Figura 4.15, no assentamento do tijolo existe a utilização de uma massa para fixação do mesmo que geralmente tem 1 cm de espessura entre os tijolos.

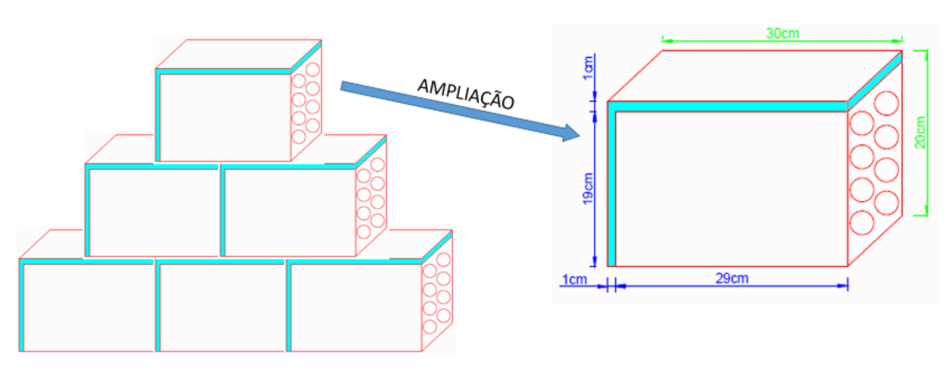


Figura 4.15: Tijolo assentado com massa de aproximadamente 1 cm de espessura para fixação de um tijolo com o outro tijolo.

Como o nosso tijolo é de 29 cm por 19 cm de altura, iremos considerar esse acréscimo de 1 cm na estrutura e, portanto, consideraremos ele com 30 cm de comprimento por 20 cm de altura, nos remetendo a situação descrita anteriormente em que encontramos que em $1\,\text{m}^2$ coube 16,6 blocos retangulares.

Nas construções, ao tentar cortar um tijolo na obra, geralmente não se consegue com um tijolo de 30 cm fazer três pedaços de 10 cm, logo, por esse motivo iremos considerar que com um tijolo de 30 cm de comprimento conseguimos fazer somente dois pedaços, ou seja, duas partes de 10 cm. Uma alternativa seria comprar partes prontas dos tijolos.

Exemplo 4.5.2: Quantidade de tijolos que cabem em $1\,\text{m}^2$.

Considerando a situação descrita anteriormente, isso nos leva a recalcular a quantidade de retângulos que cabem em $1\,\mathrm{m}^2$, agora considerados como tijolos. Logo teremos que a quantidade de tijolos (Q_t) será

$$\begin{aligned}
Q_t &= 15 + (5 \text{ pedaços de } 10\,\mathrm{cm})\\
&= 15 + (2 \text{ pedaços de } 10\,\mathrm{cm} + 2 \text{ pedaços de } 10\,\mathrm{cm} + 1 \text{ pedaços de } 10\,\mathrm{cm})\\
&= 15 + (1 \text{ tijolo } + 1 \text{ tijolo } + 0{,}5 \text{ tijolo})\\
&= 15 + (2 + 0{,}5)\\
&= 17{,}5 \text{ tijolos}
\end{aligned}$$

Chegamos a conclusão que em um metro quadrado de alvenaria (parede) são gastos aproximadamente 17,5 tijolos e portanto usaremos essa quantidade como referência para calcular a quantidade total que usaremos em nossa construção.

O primeiro passo é verificar a área em metros quadrados (m^2) de parede que temos em toda a construção. Podemos fazer isso de diferentes maneiras, mas aqui iremos mostrar dois métodos e escolheremos um deles para adotarmos nos procedimentos de nossos cálculos de tijolos.

Uma forma de calcular a quantidade de tijolos é considerar todas as paredes observando seu comprimento e altura sem descontar (pilares, janelas, portas, vãos livres). Logo depois deste cálculo geral, calcula-se a área ocupada na parede pelos itens citados (pilares, janelas, portas, vãos livres) e fazer os respectivos descontos referente às áreas dos mesmos na área geral da parede. Somente após esse desconto fazer a relação de proporcionalidade para verificar a quantidade de tijolos utilizados.

Outra maneira de calcular a quantidade de tijolos é analisar cada parede individualmente e descontar os respectivos vãos, ou seja, as regiões onde não usamos tijolos. Essa é a maneira que utilizaremos para calcular a quantidade de tijolos gastos em nossa construção. Para isso iremos analisar as paredes da construção através da planta que nos foi dada e as dividiremos entre: paredes externas e internas e faremos os cálculos de tijolos separadamente em cada uma delas. Logo em seguida somamos as quantidades de tijolos em cada caso.

Analisando a planta baixa da Figura 4.16 verificamos que as paredes externas são: ABC, CFI, IHG e GDA e as paredes internas: BEH, DEF, $D'E'$ e a parede da porta do banheiro.

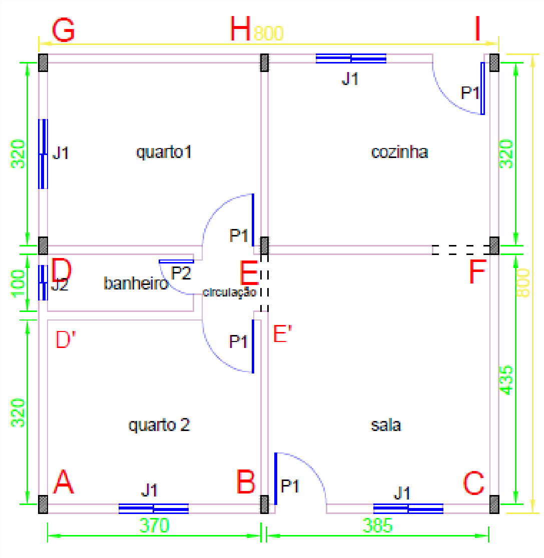


Figura 4.16: Planta baixa.

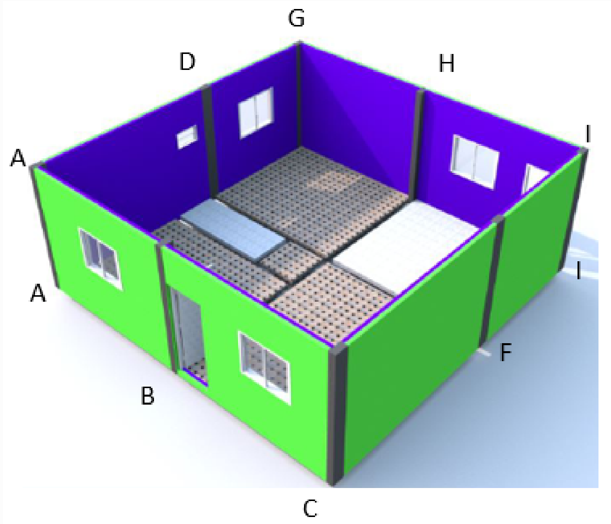


Figura 4.17: Paredes externas da construção.

Nos cálculos que iremos realizar a seguir, as regiões que iremos descontar por não necessitarem do assentamento de tijolos, tiveram suas dimensões indicadas nas informações referente a planta baixa, indicadas na Figura 4.16. Agora vamos ao cálculo da área das paredes externas que estão indicadas na Figura 4.17.

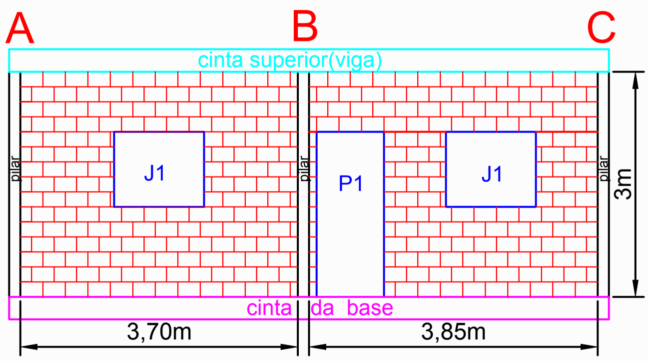


Figura 4.18: Parede externa ABC.

Exemplo 4.5.3: Área de alvenaria da parede externa ABC.

Como indicado na Figura 4.18 temos:

$$
\begin{aligned}
A &= (3{,}70 + 3{,}85) \times 3 \\
&= 7{,}55 \times 3 \\
&= 22{,}65\,\mathrm{m}^2
\end{aligned}
$$

Agora descontando a área referente aos vãos livres da porta $P1$ e das duas janelas $J1$ teremos:

$$\begin{aligned}A &= 22{,}65 - (J1 + P1 + J1)\\ &= 22{,}65 - (1{,}2 + 2 + 1{,}2)\\ &= 22{,}65 - 4{,}4\\ &= 18{,}25\,\mathrm{m}^2\end{aligned}$$

A área da parede ABC é:

$$A_1 = 18{,}25\,\mathrm{m}^2 \tag{4.1}$$

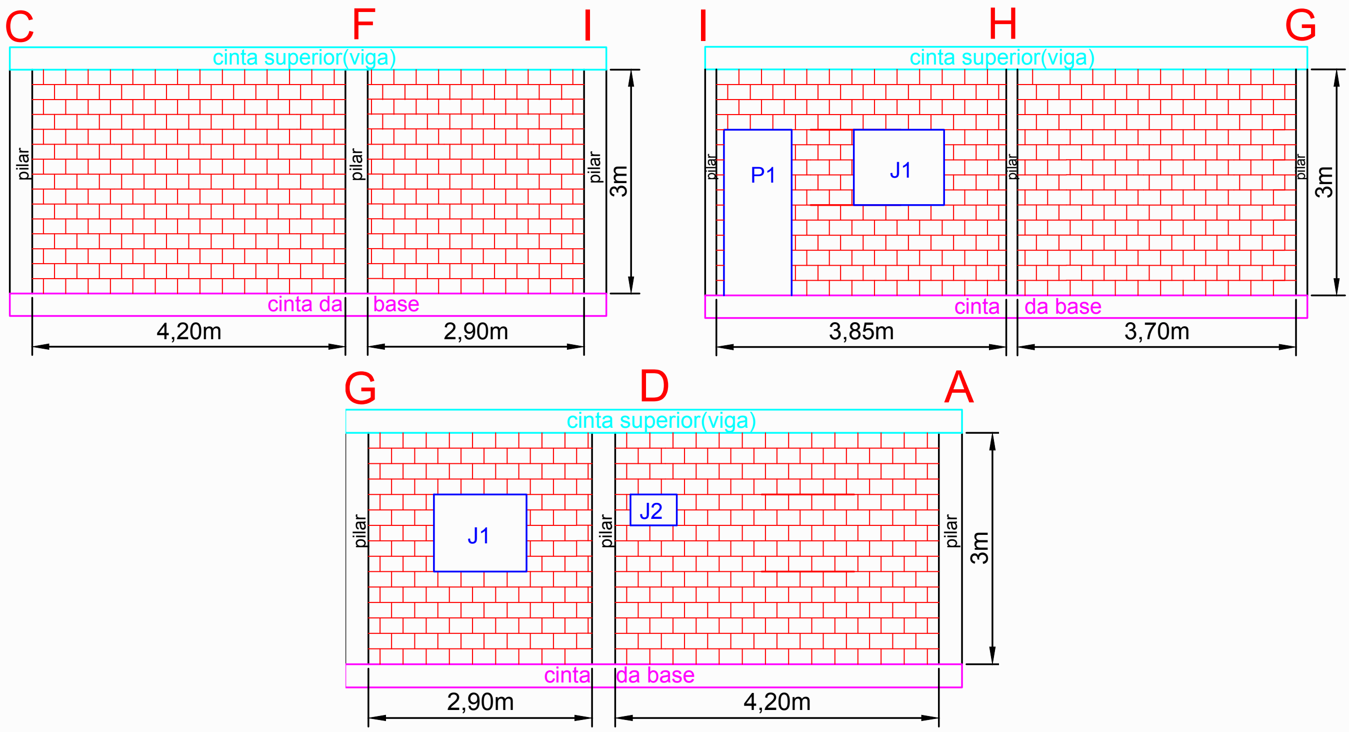


Figura 4.19: Paredes externas CFI, IHG e $GDAI$.

Exemplo 4.5.4: Calculando a área de alvenaria da parede externa CFI, indicada na Figura 4.19.

A parede CFI não possui vãos livres logo não precisamos descontar nenhum valor ao resultado obtido.

$$\begin{aligned}A &= (4{,}20 + 2{,}90) \times 3\\ &= 7{,}10 \times 3\\ &= 21{,}3\,\mathrm{m}^2\end{aligned}$$

A área da parede CFI é:

$$A = 21{,}3\,\mathrm{m}^2 \tag{4.2}$$

Dando sequência, vamos calcular a área das outras paredes.

Exemplo 4.5.5: Calculando a área de alvenaria da parede externa IHG, indicada na Figura 4.19.

Após este cálculo devemos descontar os vão livres referentes a porta P1 e a janela J1.

$$\begin{aligned} A &= (3{,}85 + 3{,}70) \times 3 \\ &= 7{,}55 \times 3 \\ &= 22{,}65\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

A área da parede IHG é:

$$A = 22{,}65\,\mathrm{m}^2$$

Descontando os vãos livres porta e janela teremos:

$$\begin{aligned} A &= 22{,}65 - (P1 + J1) \\ &= 22{,}65 - (2 + 1{,}2) \\ &= 22{,}65 - 3{,}2 \\ &= 19{,}45\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

A área da parede IHG é:

$$A = 19{,}45\,\mathrm{m}^2 \tag{4.3}$$

Exemplo 4.5.6: Calculando a área de alvenaria da parede externa GDA, indicada na Figura 4.19.

Nesta parede, assim como na anterior, após este cálculo devemos descontar os vãos livres existentes.

$$A = (2{,}90 + 4{,}20) \times 3$$

$$= 7{,}10 \times 3$$
$$= 21{,}3\,\text{m}^2$$

Descontando os vãos livres das janelas J1 e J2 teremos:

$$\begin{aligned} A &= 21{,}3 - (J1 + J2) \\ &= 21{,}3 - (2 + 0{,}24) \\ &= 21{,}3 - 2{,}24 \\ &= 19{,}06\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

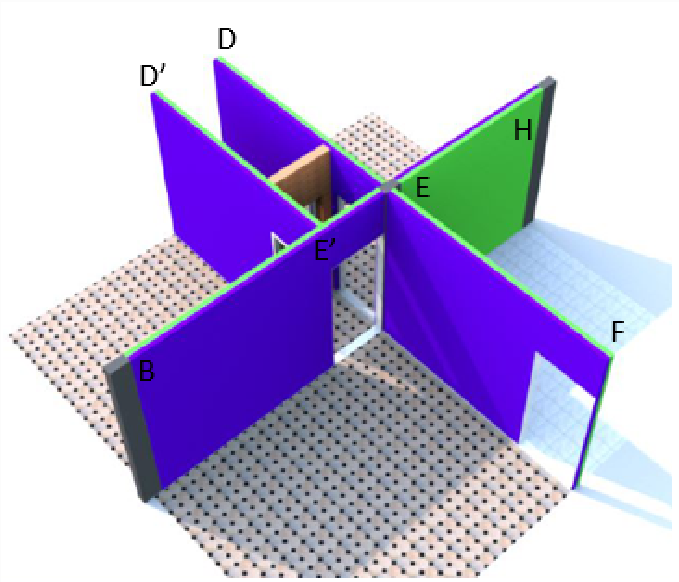


Figura 4.20: Paredes internas da construção.

Agora vamos fazer o cálculo de alvenaria das paredes internas, que estão indicadas na Figura 4.20

Exemplo 4.5.7: Calculando a área de alvenaria da parede interna BEH, indicada na Figura 4.21.

Inicialmente temos que a área de toda a parede sem descontar os vãos livres é:

$$\begin{aligned} A &= (4{,}20 + 2{,}90) \times 3 \\ &= 7{,}10 \times 3 \\ &= 21{,}3\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

Neste caso o vão livre refere-se a uma abertura de passagem livre, ou seja, não teremos a instalação de uma porta no local, logo descontando o vão livre

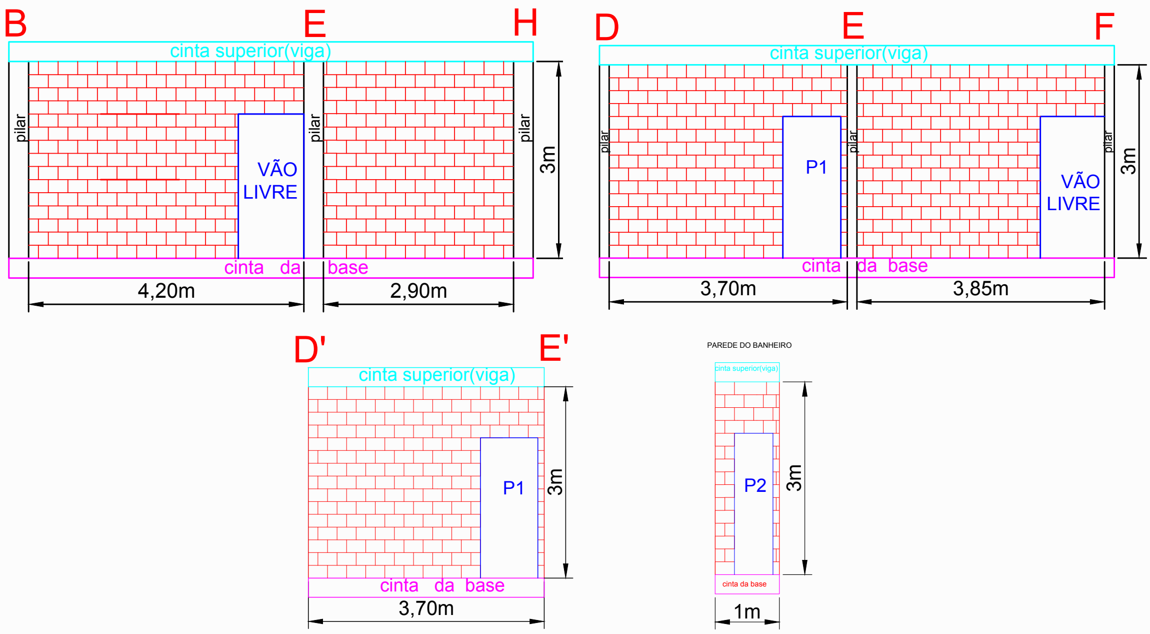


Figura 4.21: Paredes internas da casa.

teremos:

$$
\begin{aligned}
A &= 21{,}3 - (\text{área do vão livre}) \\
&= 21{,}3 - (2) \\
&= 19{,}3\,\mathrm{m}^2
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.5.8: Calculando a área de alvenaria da parede interna DEF, indicada na Figura 4.21.

Esta parede possui dois vão livres, sendo um uma porta e o outro uma passagem livre, ambos devem ser descontados após este cálculo.

$$
\begin{aligned}
A &= (3{,}70 + 3{,}85) \times 3 \\
&= 7{,}55 \times 3 \\
&= 22{,}65\,\mathrm{m}^2
\end{aligned}
$$

Descontando as áreas dos vãos livres teremos:

$$
\begin{aligned}
A &= 22{,}65 - (P1 + \text{área do vão livre}) \\
&= 22{,}65 - (2 + 2) \\
&= 22{,}65 - 4 \\
&= 18{,}65\,\mathrm{m}^2
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.5.9: Calculando a área de alvenaria da parede interna $D'E'$, indicada na Figura 4.21.

Está parede possui área total de:

$$\begin{aligned} A &= 3{,}70 \times 3 \\ &= 11{,}1\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Descontando o vão livre referente a porta P1 teremos:

$$\begin{aligned} A &= 11{,}1 - P1 \\ &= 11{,}1 - 2 \\ &= 9{,}1\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Exemplo 4.5.10: Calculando a área de alvenaria da parede interna da frente do banheiro, indicada na Figura 4.21.

Essa parede possui área:

$$\begin{aligned} A &= 1 \times 3 \\ &= 3\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Descontando o vão livre referente a porta P2 teremos:

$$\begin{aligned} A &= 3 - P2 \\ &= 3 - 1{,}54 \\ &= 1{,}46\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Portanto, a seguir iremos calcular a área total de alvenaria da construção já considerando os descontos dos vãos livres. Analisaremos as área das paredes externas e internas, conforme veremos o exemplo a seguir.

Exemplo 4.5.11: Calculando a área total de alvenaria desta construção.

Para realizarmos este cálculo devemos somar todas as áreas encontradas nos exemplos anteriores referente a alvenaria já considerando os descontos. Logo, teremos que o total da área de alvenaria será a soma das área das paredes externas somado com a soma das áreas das paredes internas, portanto teremos:

$$\begin{aligned} A &= (18{,}25 + 21{,}3 + 19{,}45 + 19{,}06) + (19{,}3 + 18{,}65 + 9{,}1 + 1{,}46) \\ &= 78{,}06 + 48{,}51 \\ &= 126{,}57\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Dando continuidade, o cálculo da área de parede nos permite calcular a quantidade de tijolos que será o próximo passo mostrado no exemplo a seguir.

Exemplo 4.5.12: Cálculo da quantidade de tijolos.

Como já temos a área de alvenaria (parede) que é de $126{,}57\,\mathrm{m}^2$ e sabemos que são gastos 17,5 tijolos por cada metro quadrado, logo para encontrarmos o total da quantidade de tijolos(Qt) que serão gastos na construção, é só multiplicarmos os dois valores, logo:

$$\begin{aligned} Qt &= 126{,}57 \times 17{,}5 \\ &= 2214{,}975 \end{aligned}$$

ou seja, aproximadamente 2 215 tijolos.

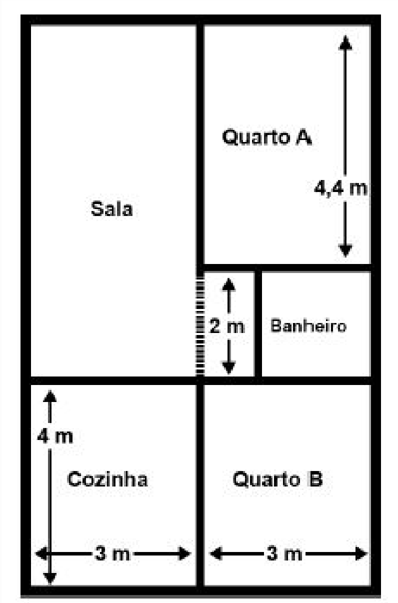
Segundo o valor calculado são 2 215 unidades de tijolos, porém não é usual chegar em uma loja de materiais de construção e pedir essa quantidade. Geralmente o comum é comprar em múltiplos de 50, logo 2.200 ou 2250 unidades. Como pode ocorrer algum imprevisto como a quebra de algumas unidades devido ao transporte e manuseio dos tijolos, logo é conveniente quando for em uma loja de material de construção comprar a quantidade de 2.250 tijolos.

4.6 Exercícios do ENEM

1) [resp] (ENEM/2019) Um pintor cobra 240,00 reais por dia de trabalho, que equivale a 8 horas de trabalho num dia. Quando é chamado para um serviço, esse pintor trabalha 8 horas por dia com exceção, talvez, do seu último dia nesse serviço. Nesse último dia, caso trabalhe até 4 horas, ele cobra metade do valor de um dia de trabalho. Caso trabalhe mais de 4 horas, cobra o valor correspondente a um dia de trabalho. Esse pintor gasta 8 horas para pintar uma vez uma área de$40\,\mathrm{m}^2$. Um cliente deseja pintar as paredes de sua casa, com uma área total de $260\,\mathrm{m}^2$. Ele quer que essa área seja pintada o maior número possível de vezes para que a qualidade da pintura seja a melhor possível. O orçamento desse cliente para a pintura é de 4 600,00 reais. Quantas vezes, no máximo, as paredes da casa poderão ser pintadas com o orçamento do cliente?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 6

2) [resp] (ENEM/2017) A figura traz o esboço da planta baixa de uma residência. Algumas medidas internas dos cômodos estão indicadas. A espessura de cada parede externa da casa é 0,20 m e das paredes internas, 0,10 m.



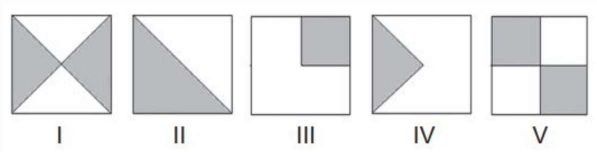
Sabe-se que, na localidade onde se encontra esse imóvel, o Imposto Predial Territorial Urbano (IPTU) é calculado conforme a área construída da residência. Nesse cálculo, são cobrados 4,00 reais por cada metro quadrado de área construída. O valor do IPTU desse imóvel, em real, é

a) 250,00 d) 276,48

b) 250,80 e) 286,00

c) 258,64

3) [resp] (ENEM/2011) Numa sementeira, cinco canteiros quadrados serão preparados para plantar, em cada um, dois tipos de sementes: A e B. Os canteiros estão representados segundo as figuras:



Suponha que cada canteiro tem $1\,m^2$ de área e que nas regiões sombreadas de cada canteiro serão plantadas as sementes do tipo A. Qual o total da área, em m^2, reservada para as sementes do tipo B?

a) 1,25 b) 2 c) 2,5 d) 3 e) 5

4) [resp] (ENEM/2011) Uma escola tem um terreno vazio no formato retangular cujo perímetro é 40 m, onde se pretende realizar uma única construção que aproveite o máximo de área possível. Após a análise realizada por um engenheiro, este concluiu que para atingir o máximo de área do terreno com uma única construção, a obra ideal seria

a) um banheiro com $8\,m^2$.

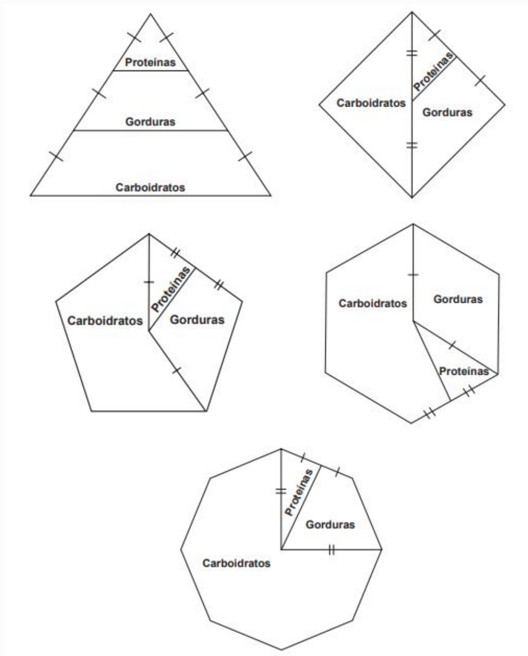
b) uma sala de aula com $16\,m^2$.

c) um auditório com $36\,m^2$.

d) um pátio com $100\,m^2$.

e) uma quadra com $160\,m^2$.

5) [resp] (ENEM/2015) Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas. Ela desenhou as seguintes figuras:



Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o

a) triângulo
b) losango
c) pentágono
d) hexágono
e) octógono

6) [resp] (ENEM/2012) Há, em virtude da demanda crescente de economia de água, equipamentos e utensílios como, por exemplo, as bacias sanitárias ecológicas, que utilizam 6 litros de água por descarga em vez dos 15 litros utilizados por bacias sanitárias não ecológicas, conforme dados da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Qual será a economia diária de água obtida por meio da substituição de uma bacia sanitária não ecológica, que gasta cerca de 60 litros por dia com a descarga, por uma bacia sanitária ecológica?

a) 24 litros
b) 36 litros
c) 40 litros
d) 42 litros
e) 50 litros

5

Quantidade de cerâmicas

Uma das últimas etapas de uma construção é o acabamento. O acabamento da parte onde pisamos é chamado de piso e o acabamento das paredes é chamado de revestimento e ambos podem ser feitos com diferentes tipos de materiais. A quantidade de material a ser utilizado nesses ambientes também é calculado através da área. Logo, como já relembramos este conceito, vamos prosseguir.

Em nosso dia a dia podemos observar a colocação de cerâmica no piso, conforme Figura 5.1. A seguir iremos mostrar o desenvolvimento de como calcular a quantidade de cerâmica em uma construção.

Figura 5.1: Cerâmica sendo instalado no piso.

5.1 Área no cálculo de cerâmicas

Existem algumas regiões da casa que precisam ser revestidas com material impermeável, pois recebem constantemente o uso de água, como exemplo temos o piso de uma casa e paredes de banheiro e cozinha. Existem diferentes tipos de pisos, como exemplo: cerâmica, porcelanato, vinílico, emborrachado, laminado, silicone 3D, entre outros. Fica a critério do cliente colocar o mesmo tipo de material de acabamento em todo o piso ou optar por variações de um local para outro.

Em nosso contexto, consideramos o uso do piso do tipo cerâmica, mas vale ressaltar que independente do material utilizado o processo de cálculo é similar. O nosso cálculo consiste em mostrar a quantidade de revestimento que será utilizado através da área calculada onde geralmente utiliza-se o metro quadrado (m^2) como unidade de medida.

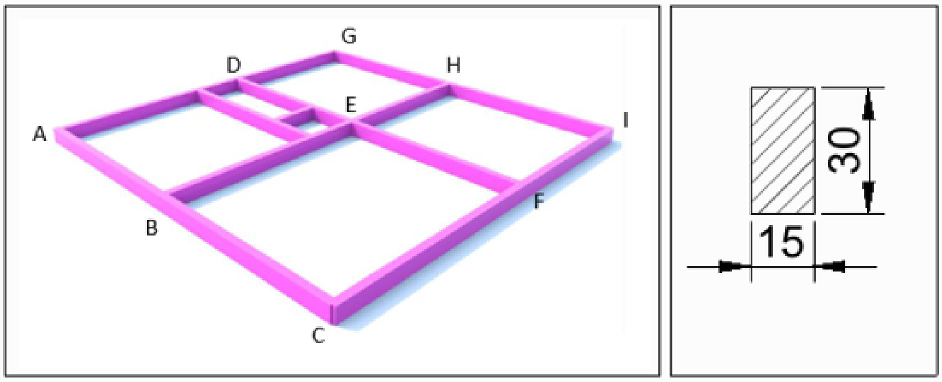


Figura 5.2: Cinta de concreto em toda a base da construção com ampliação de sua seção transversal.

Exemplo 5.1.1: Calculando a quantidade de cerâmica do piso da construção.

Nossa construção é quadrada de lado medindo 8 metros, logo temos que a área de toda a base é $64\,\text{m}^2$. Mas este não é o valor da área do nosso piso, pois sabemos que existem paredes onde não serão aplicados os pisos, logo devemos descontar tais áreas referente a base destas paredes. Temos que a base da parede mede 15 cm. Como essa base se estende por toda a estrutura, iremos calcular o comprimento total da estrutura mostrada na Figura 5.2. O comprimento total é dado pela soma do comprimento dos segmentos externos (C_{se}) e comprimento dos segmentos internos (C_{si}), logo será dado por: segmentos externos

$$C_{\text{se}} = GI + CI + AC + AG$$

$$= 8\,\text{m} + 8\,\text{m} + 8\,\text{m} + 8\,\text{m}$$
$$= 32\,\text{m}$$

e segmentos internos (C_{si})

$$\begin{aligned} C_{\text{si}} &= BH + DE + DE' + EF + DE'' \\ &= 7{,}70 + 3{,}70 + 3{,}70 + 3{,}85 + 1 \\ &= 19{,}95\,\text{m} \end{aligned}$$

Portanto temos que o comprimento total (C_{t}) da estrutura analisada será:

$$\begin{aligned} C_{\text{t}} &= 32\,\text{m} + 19{,}95\,\text{m} \\ &= 51{,}95\,\text{m} \end{aligned}$$

O comprimento total de todas as paredes é de 51,95 m de comprimento.

Portanto, considerando a largura da parede como 15 cm, ou seja, 0,15 m, temos que a área ocupada pela base da parede é de

$$\begin{aligned} A &= 51{,}95 \times 0{,}15 \\ &= 7{,}79\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

Temos que a quantidade de piso calculada será

$$\begin{aligned} A &= 64 - 7{,}79 \\ &= 56{,}21\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

Existem outras maneiras de realizar os cálculos da quantidade de piso, como por exemplo calcular separadamente ambiente por ambiente como sala, quarto, cozinha, banheiro, etc, conforme indicado na Figura 1.13 que representa a planta baixa construída através do Sweet Home 3D e indica as medidas de cada ambiente internamente, ou seja, sem considerar as paredes. Se somarmos as áreas de cada região obteremos, praticamente o mesmo valor. Caso der uma pequena diferença é devido a arredondamentos nas casas decimais. Temos que a quantidade de piso calculada é de $56{,}21\,\text{m}^2$.

Exemplo 5.1.2: Aumentando os 10% no valor encontrado no cálculo da cerâmica do piso da construção.

Encontramos o valor de $56{,}21\,\text{m}^2$, mas geralmente a quantidade no dia a dia das construções é aconselhável comprar as cerâmicas com um acréscimo de 10% acima do calculado. Este aumento é devido as perdas causadas durante o recorte ou até mesmo peças que quebram com o manuseio, logo com este aumento teríamos:

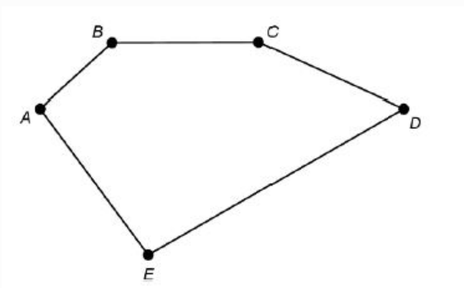
$$\begin{aligned} A &= 56{,}21 + 0{,}10 \times 56{,}21 \\ &= 56{,}21 + 5{,}62 \\ &= 61{,}83\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

Esses valores apresentados são referentes somente ao piso. Vale ressaltar que geralmente na cozinha e banheiro por serem ambientes onde se trabalha com água, ou seja, são chamados nos projetos de áreas molhadas, além dos pisos, são revestidas algumas ou todas as paredes do local. Existe também o rodapé que é um acabamento colocado na parte da parede em contato com o piso, geralmente com altura de 7 cm. Deixamos aqui como exercícios para você calcular o quantitativo de cerâmicas que serão gastos para revestir todas as paredes da cozinha e banheiro e colocação de rodapé no interior de toda a casa.

5.2 Exercícios do ENEM

Os exercícios a seguir, envolvem o mesmo conceito de área adotado no cálculo da quantidade de cerâmica.

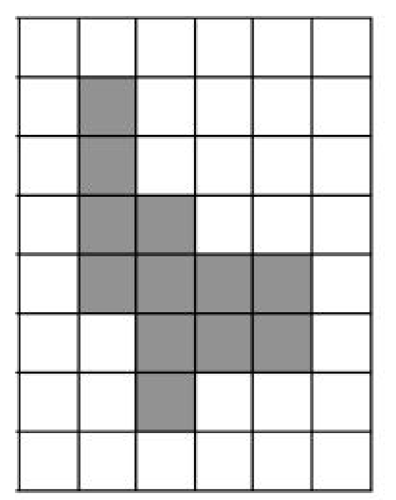
1) [resp] (ENEM/2018) Uma pessoa possui um terreno em forma de um pentágono, como ilustrado na figura.



Sabe-se que a diagonal AD mede 50 m e é paralela ao lado BC, que mede 29 m. A distância do ponto B a AD é de 8 m e a distância do ponto E a AD é de 20 m. A área, em metro quadrado, deste terreno é igual a

a) 658 b) 700 c) 816 d) 1 132 e) 1 632

2) [resp] (ENEM/2011) Na zona rural, a utilização de unidades de medida como o hectare é bastante comum. O hectare equivale à área de um quadrado de lado igual a 100 metros. Na figura, há a representação de um terreno por meio da área em destaque. Nesta figura, cada quadrado que compõe esta malha representa uma área de 1 hectare.



O terreno em destaque foi comercializado pelo valor 3 600 000,00 reais. O valor do metro quadrado desse terreno foi de

a) 30,00 reais

b) 300,00 reais

c) 360,00 reais

d) 3 600,00 reais

e) 300 000,00 reais

6

Quantidade de concreto

A quantidade de concreto é medida através de seu volume, logo se faz necessário relembrar este conceito.

6.1 Relembrando volume

Antes de iniciarmos esta seção vamos refletir um pouco sobre as seguintes frases:

1. Irei comprar concreto para construir minha laje.
2. As piscinas olímpicas são grandes.
3. O prefeito irá fazer doação de areia para construirmos a nossa quadra de peteca e quer saber a quantidade que precisamos.
4. Terei que contratar um caminhão para fazer o deslocamento da terra que retiramos do terreno.

É provável que você já ouviu algumas destas frases acima em seu cotidiano, caso ainda não, provavelmente terá a oportunidade de ver algumas ao longo deste trabalho. Todas as frases mencionadas anteriormente exigem respostas sobre um certo preenchimento de espaço. O espaço citado representa o que na Matemática chamamos de volume.

Segundo Antônio Caminha Muniz Neto [13], pág. 52.

O volume de um sólido é a medida do espaço que ele ocupa e esperamos que, dois sólidos disjuntos tenham volume igual à soma dos volumes ocupados por cada um deles. Também, se um dos sólidos estiver contido no outro, é razoável supor que o volume do primeiro seja menor ou igual que o volume do segundo. Por fim, para que possamos expressar numericamente essa medida de espaço ocupado, precisaremos de uma unidade de medida que nos sirva de referência.

Conforme citado anteriormente precisaremos de uma unidade de volume de referência que será utilizada como base de comparação. Para tanto vamos considerar o cubo unitário da Figura 6.1 como nossa unidade unitária de medida para o volume.

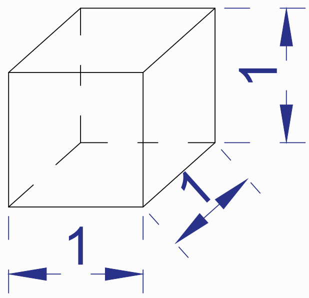


Figura 6.1: Cubo de lado 1 usado como uma unidade unitária de volume

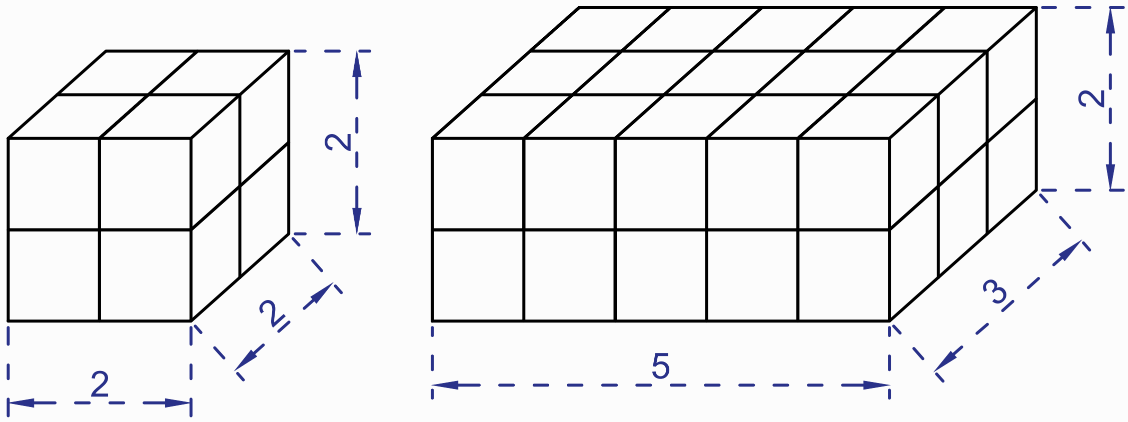


Figura 6.2: Cubo de lado 2 unidades e paralelepípedo com dimensões de 5 unidades de comprimento, 3 unidades de largura e 2 unidades de altura.

Partindo do princípio de que é possível medir o sólido iremos considerar nosso cubo unitário como unidade de medida para volume, podemos perceber que a Figura 6.2 que ilustra um cubo de lado 2 e um paralelepípedo com dimensões iguais a 5, 3 e 2.

Temos que a quantidade de unidades (Qu) na base do cubo são:

$$Qu = 2 \times 2 = 4$$

como são 4 unidades de volume que se repetem em 2 (duas) camadas, logo o volume do cubo (Vc) será:

$$Vc = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

logo, 8 unidades de volume. Analogamente temos que a quantidade de unidades (Qu) na base do paralelepípedo é:

$$5 \times 3 = 15$$

ou seja, 15 unidades de volume e essa camada se repete em outra camada, logo temos que seu volume total (Vt) será

$$Vt = 5 \times 3 \times 2 = 30$$

portanto 30 unidades de volume.

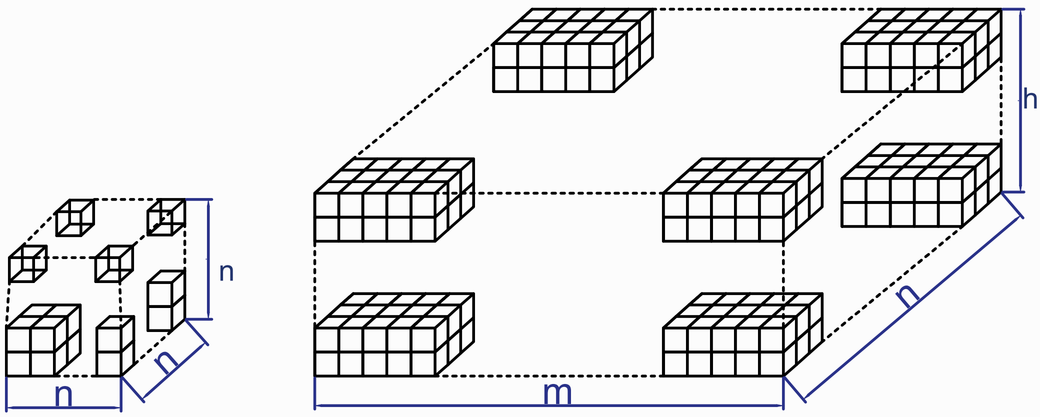


Figura 6.3: Cubo de lado medindo n unidades e paralelepípedo de comprimento m, largura n e altura h, onde o cubo possui n^3 unidades de volume e o paralelepípedo possui mnh unidades de volume.

Considere um cubo de lado medindo n e um paralelepípedo de lados m, n e h conforme Figura 6.3, temos que no cubo de lado n, teríamos em sua base

$$n \times n = n^2$$

unidades de volume onde os mesmos se repetiriam em n camadas, logo seu volume total é dado por

$$n \times n \times n = n^3$$

unidades de volume. Analogamente se um paralelepípedo de comprimento m, largura n e altura h, em sua base teríamos

$$m \times n = mn$$

unidades de volume que iriam se repetir em h camadas, logo seu volume total seria

$$m \times n \times h$$

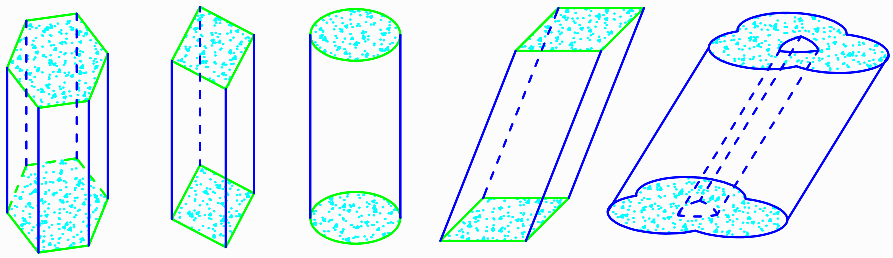


Figura 6.4: Sólidos geométricos com secção transversal constante ao longo de toda a sua altura.

Dado um sólido geométrico (objeto tridimensional definido no espaço) apoiado em um plano, se ao ser seccionado por um plano paralelo a sua base, a intersecção do sólido geométrico com o plano gera sempre secções com a área igual a área da base ao longo de toda a sua altura até o topo, podemos afirmar que o volume do mesmo será dado pelo produto da área da base pela altura.

$$V_{\text{sólidos de área constante ao longo de sua altura}} = \text{área da base} \times \text{altura}$$

Podemos destacar aqui o Princípio de Cavalieri que nos diz que dados dois sólidos geométricos que possuam a mesma área da base e mesma altura, apoiados sobre um mesmo plano horizontal, se traçarmos um plano paralelo ao plano da base em qualquer altura dos sólidos, se a área formada pelas seções forem as mesmas, estes sólidos possuem o mesmo volume.

Como exemplo vamos considerar um sólido de base quadrada e um sólido de base circular, onde ambos mantém sua base constante ao longo de toda sua altura. Iremos considerar que, estes dois sólidos apoiam suas bases sobre o mesmo plano e que são seccionados por um outro plano paralelo ao plano da base, produzindo secções de mesma área conforme Figura 6.5. Segundo o Princípio de Cavalieri estes sólidos possuem o mesmo volume.

Existem sólidos que não obedecem aos padrões descritos anteriormente, pois sua base não se mantêm constante ao longo de toda a altura. Os cones e pirâmides, bem como seus troncos, são alguns exemplos. Nesses casos iremos mostrar como proceder na realização do cálculo do volume.

Após fixado o conhecimento de como calcular o volume dos sólidos que mantém a secção constante ao longo de toda sua altura, vamos prosseguir analisando o volume de cones e pirâmides que podem ser mostrados de maneira prática na própria sala de aula, levando o estudante a refletir sobre o volume do mesmo.

Para ilustrarmos simbolicamente a tal situação prática, pegue um cone e um cilindro,

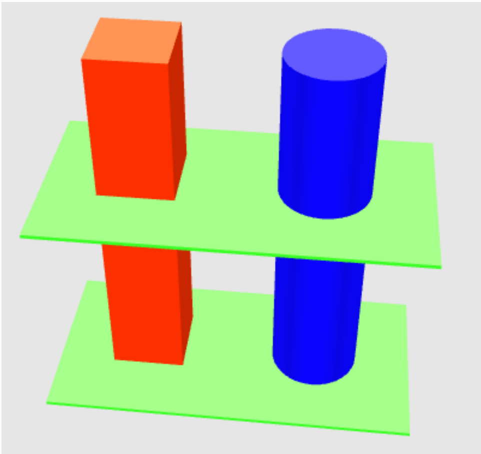


Figura 6.5: Dois com mesma área da base e mesma altura, sendo seccionados por um plano paralelo ao plano da base.

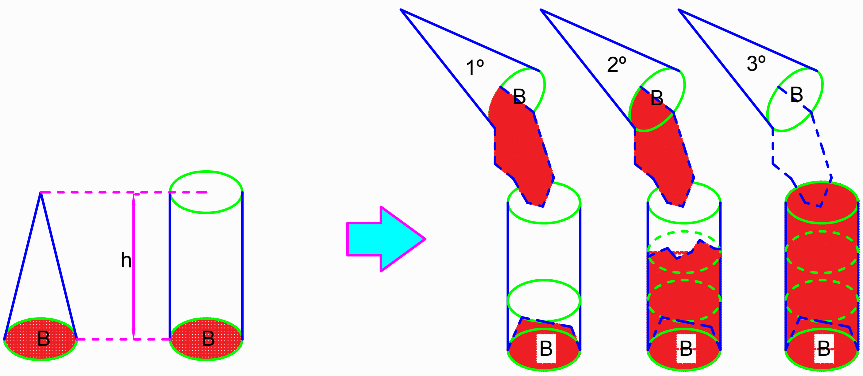


Figura 6.6: Sendo o cone e cilindro, ambos com mesma base e mesma altura, são exatamente 3 cones para preencher exatamente um cilindro.

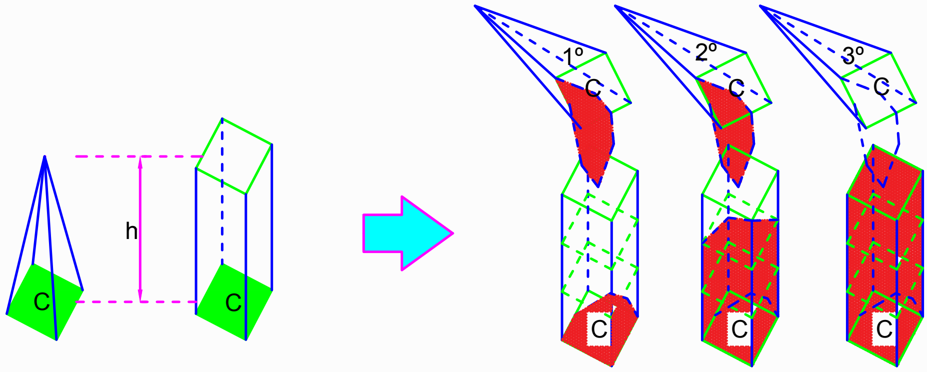


Figura 6.7: Sendo a pirâmide e paralelepípedo, ambos com mesma base e mesma altura, são exatamente 3 pirâmides para preencher exatamente um paralelepípedo.

ambos com mesma área da base e mesma altura, enchendo o cone com algum material (areia, trigo, arroz, ...), será possível observar que desprezando as espessuras, verificamos que são necessários 3 cones cheios para completar perfeitamente o cilindro conforme Figura 6.6.

Repetindo o mesmo procedimento para ilustrarmos o experimento com a pirâmide, verificamos que são necessárias exatamente 3 pirâmides cheias para preencher completamente um paralelepípedo, conforme Figura 6.7.

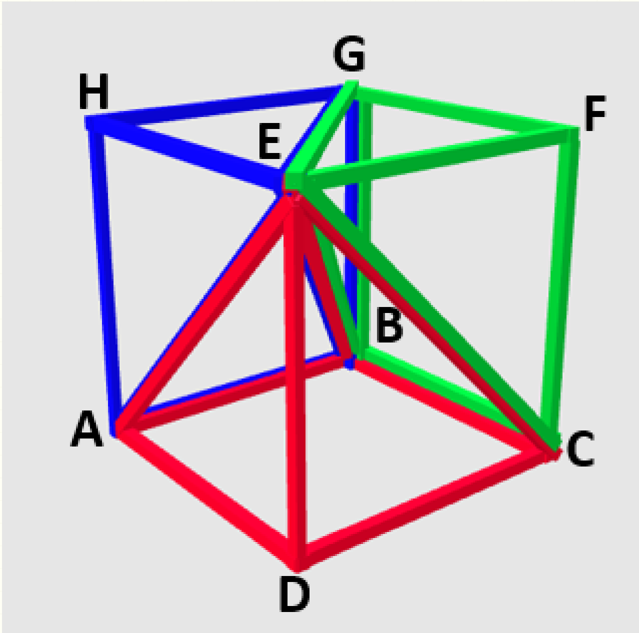
O argumento empírico sugere que tanto no cone como na pirâmide, seus volumes equivalem a $^1/_3$ dos respectivos sólidos, que possuem a mesma base e altura. Mas vale ressaltar que essa situação pode ser demonstrada. O volume dos objetos que mantém a mesma secção ao longo de sua altura é dado pelo produto da área da base pela altura, logo o mesmo equivale para o cone e pirâmide desde que consideramos somente a terça parte, ou seja, o volume do cone e da pirâmide é um terço do produto da área da base pela altura.

$$V_{\text{cone e pirâmide}} = \frac{\text{área da base} \times \text{altura}}{3}$$

Conforme mostrado na ilustração das Figuras 6.6 e 6.7.

Para ilustrar as situações, com o objetivo de auxiliar o entendimento do cálculo de volume de uma pirâmide, vamos fazer um exemplo.

Exemplo 6.1.1: Considere o cubo $ABCDEFGH$, conforme a imagem a seguir vamos analisá-lo por partes e tentarmos concluir algo sobre o volume de uma pirâmide.



Temos que o cubo $ABCDEFGH$ é constituído por:

1. Uma pirâmide de base $ABCD$ (que é a própria face do cubo) e altura DE (que é a própria aresta do cudo).
2. Uma pirâmide de base $CFGB$ (que é a própria face do cubo) e altura FE (que é a própria aresta do cudo).
3. Uma pirâmide de base $ABGH$ (que é a própria face do cubo) e altura HE (que é a própria aresta do cudo).

Observamos que essas 3 pirâmides formam exatamente o nosso cubo $ABCDEFGH$. Portanto, como o volume do cubo é dado pelo produto da área da base pela altura, logo concluímos que, o volume de uma pirâmide é a terça parte do volume do cubo, conforme mencionado anteriormente.

6.2 Aplicabilidades e transformações

O volume é usado em diferentes ramos de atuação e com o auxílio da proporcionalidade, resolvemos várias situações em nosso dia a dia. Quando queremos por exemplo, saber a quantidade de água suportada por um recipiente, a unidade de comparação é feita através do seu volume.

Para isso, usamos como referência o metro cúbico, onde desprezando as espessuras do material que ele é feito temos que $1\,\mathrm{m}^3 = 1000$ litros de água, conforme Figura 6.8.

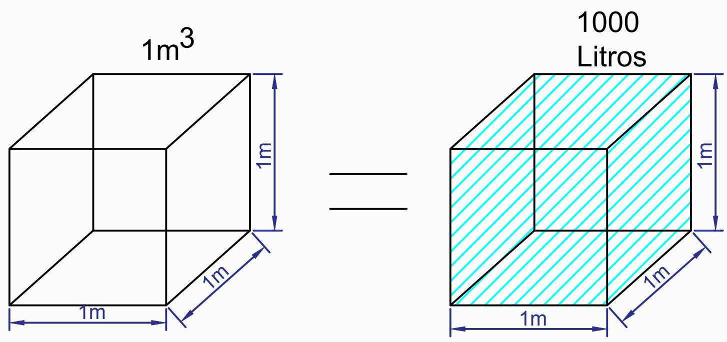


Figura 6.8: Verificamos que $1\,\text{m}^3$ equivale a capacidade de 1000 litros de água.

Analogamente se subdividirmos esse cubo iremos observar que ele é composto por $1000\,\text{dm}^3$, o que significa que $1\,\text{dm}^3$ equivale a 1 litro. Cada especialidade utiliza a medida que lhe for mais conveniente e atenda melhor suas necessidades.

Exemplo 6.2.1: Quantidade de água de uma piscina.

Sendo assim, usando a proporcionalidade podemos calcular a quantidade de água que caberá em uma piscina que possui $10\,\text{m}$ de comprimento por $6\,\text{m}$ de largura e $1{,}5\,\text{m}$ de profundidade, conforme Figura 6.9. Aplicamos os conceitos sobre o cálculo de volume, encontramos $90\,\text{m}^3$, agora fazendo a devida transformação de m^3 para litros usando a proporcionalidade, descobrimos que a piscina terá 90 mil litros de água quando estiver completamente cheia.

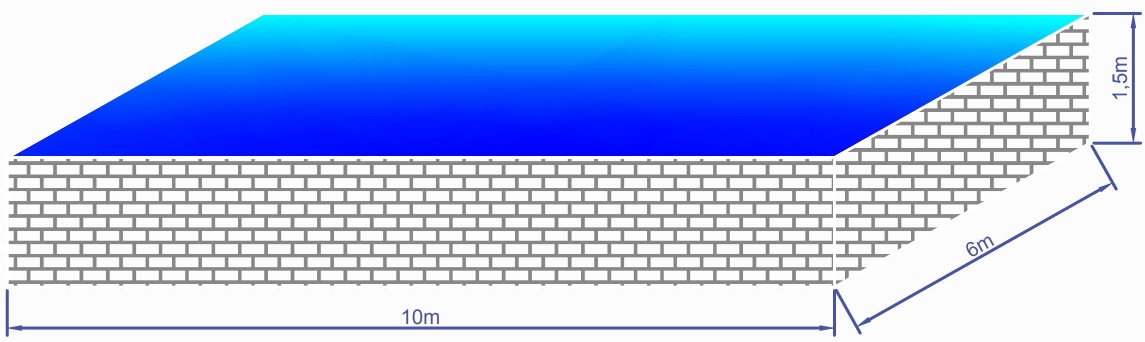


Figura 6.9: Piscina com capacidade de 90 mil litros de água quando estiver completamente cheia.

Exemplo 6.2.2: Peso de uma estrutura.

Um outro exemplo onde se utiliza a proporcionalidade e o volume são os pesos das estruturas de concreto assim como as alvenarias (paredes), onde segundo referências temos que $1\,\text{m}^3$ de concreto equivale a aproximadamente $2400\,\text{kg}$ e $1\,\text{m}^3$ de alvenaria possui peso especifico de $1300\,\text{kg}$. Sendo assim o peso da estrutura de concreto indicada na Figura 6.10, como seu volume é de $2{,}5\,\text{m}^3$, logo usando a proporção encontraremos o equivalente a $6000\,\text{kg}$, ou seja, 6 toneladas.

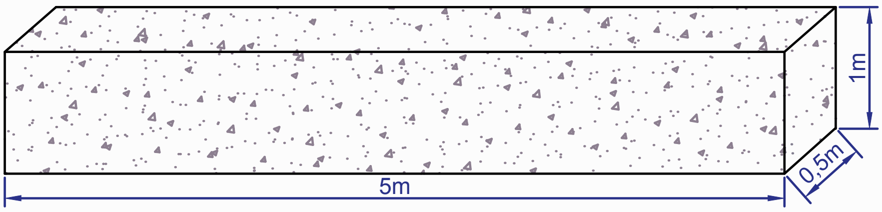


Figura 6.10: Viga de concreto com 5 metros de comprimento, meio metro de largura e 1 metro de altura, pesando o equivalente a 6 toneladas.

Quando chegamos em um estabelecimento comercial e somos informados que a areia custa 100 reais o metro cúbico (m^3) e a brita custa 90 reais o metro cúbico (m^3), observe que o preço dos mesmos são especificados através de seu volume. Observe também que os valores indicados a seguir estão relacionados a quantidade de carga dos veículos, por exemplo quando falamos que o caminhão tanque possui capacidade de 30 mil litros de combustível e que o caminhão caçamba consegue transportar $18\,\text{m}^3$ de minério. Estes são exemplos comuns em nosso cotidiano relacionados ao volume. Na próxima seção iremos aplicar o conceito de volume e proporcionalidade

Figura 6.11: Pilar real de uma construção.

para calcular o volume de concreto de uma construção.

Em nosso dia a dia podemos observar nas construções, uma estrutura vertical de concreto e aço chamada de pilar, conforme Figura 6.11. A seguir iremos mostrar o desenvolvimento de como calcular a quantidade de concreto gasto em algumas estruturas da construção.

6.3 Volume aplicado no cálculo de concreto

Ao iniciar uma construção é importante saber a quantidade de materiais que serão gastos ou utilizados na obra. Nesta etapa faremos o cálculo do volume de concreto de cada parte especifica da obra, obtendo o gasto aproximado de concreto nas estruturas da construção. Descrevemos abaixo cada uma das 5 partes.

1. Na fundação de toda a casa: considere a base do pilar com $(0{,}15 \times 0{,}30)$ m e blocos de fundação de base 1 m por 1 m e altura de 0,40 m.
2. No contorno de toda a base, com vigas de $(0{,}15 \times 0{,}30)$ m.
3. No contorno de toda a cinta superior (viga), $(0{,}15 \times 0{,}30)$ m.
4. Nos pilares $(0{,}15 \times 0{,}30)$ m por 3 m de altura.
5. No contra piso em toda a casa com 5 cm de espessura.

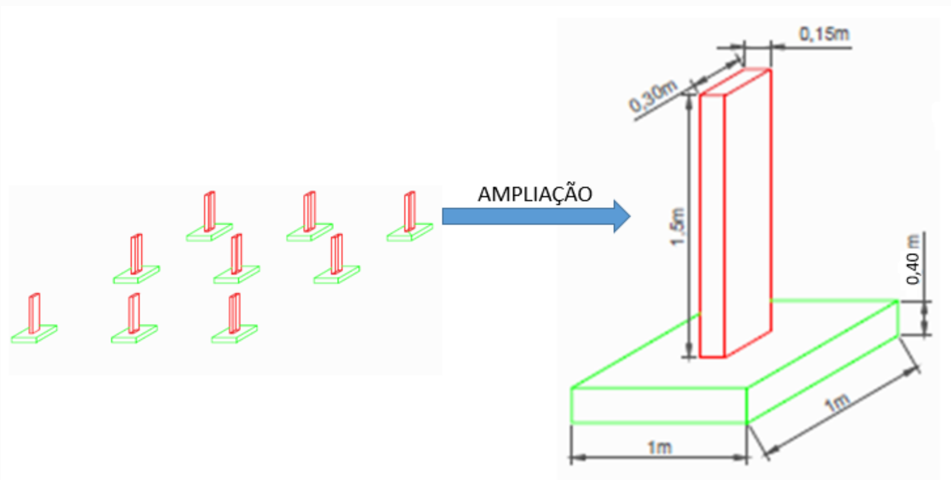


Figura 6.12: Fundação com todos os mini pilares com blocos de fundação e ampliação dos mesmos.

No item 1 temos que a fundação é composta por duas partes, sendo o bloco de fundação e um mini pilar. Ao fazer os cálculos iremos analisar separadamente cada tipo de estrutura da construção. Logo, conforme ilustração na Figura 6.12, no cálculo da fundação, observaremos ela separadamente do restante das outras estruturas.

Exemplo 6.3.1: Volume da fundação.

Conforme ilustração anterior temos que o bloco de fundação possui base quadrada de 1 m e altura de 40 cm e o mini pilar possui base 30×15 cm e altura de 1,5 m. Vamos calcular cada parte (mini pilar e bloco de fundação) separadamente e o volume de cada uma dessas estruturas será dado por: (área da base) vezes altura. Portanto teremos que:

$$\begin{aligned}\text{Volume do bloco de fundação} &= (1 \times 1) \times 0{,}40 \\ &= 0{,}4\,\mathrm{m}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Volume do mini pilar} &= (0{,}30 \times 0{,}15) \times 1{,}5 \\ &= 0{,}0675\,\mathrm{m}^3\end{aligned}$$

O volume (V) da estrutura constituída por um bloco e um mini pilar será:

$$\begin{aligned}V &= 0{,}4 + 0{,}0675 \\ &= 0{,}4675\,\mathrm{m}^3\end{aligned}$$

A base da nossa construção é formada por nove estruturas (bloco de fundação e mini pilar) logo o volume total da fundação (V_f) da construção será:

$$\begin{aligned}V_f &= 0{,}4675 \times 9 \\ &= 4{,}21\mathrm{m}^3\end{aligned}$$

Se tivéssemos calculado o volume de blocos de fundação e mini pilares de maneira individual um do outro, teríamos que o volume de todos os blocos de fundação será 3,6 m^3 e de todos os mini pilares 0,61 m^3 e ao somarmos estes valores obteríamos o mesmo resultado de 4,21 m^3.

No item 2 temos a cinta da base, que é a parte referente a estrutura que faz a ligação entre todos os pilares e a fundação. São os locais onde poderão ser construídas paredes e portanto está presente em todo o contorno da construção conforme Figura 5.2

Exemplo 6.3.2: Volume da cinta da base.

Para calcularmos o volume vamos considerar a secção 15x30 cm como sendo a base. Como essa base se estende ao longo de toda a estrutura, para calcularmos o volume, basta considerarmos o comprimento total da estrutura. Conforme apresentado na Seção 5.1 o comprimento total desta estrutura é dado pela soma de todos os segmentos (externos e internos), onde obtemos o comprimento total de 51,95 m. Como o volume é dado por (área da base) vezes altura. Portanto teremos que:

$$\text{Volume da cinta da base} = (0{,}30 \times 0{,}15) \times 51{,}95 = 2{,}34\,\text{m}^3$$

Exemplo 6.3.3: Volume das vigas.

Temos no item 3 a viga, também chamada de cinta superior. Essa estrutura das vigas é idêntica a estrutura da cinta de toda a base do item 2, portanto terá o mesmo volume $2{,}34\,\text{m}^3$.

Agora vamos verificar os pilares.

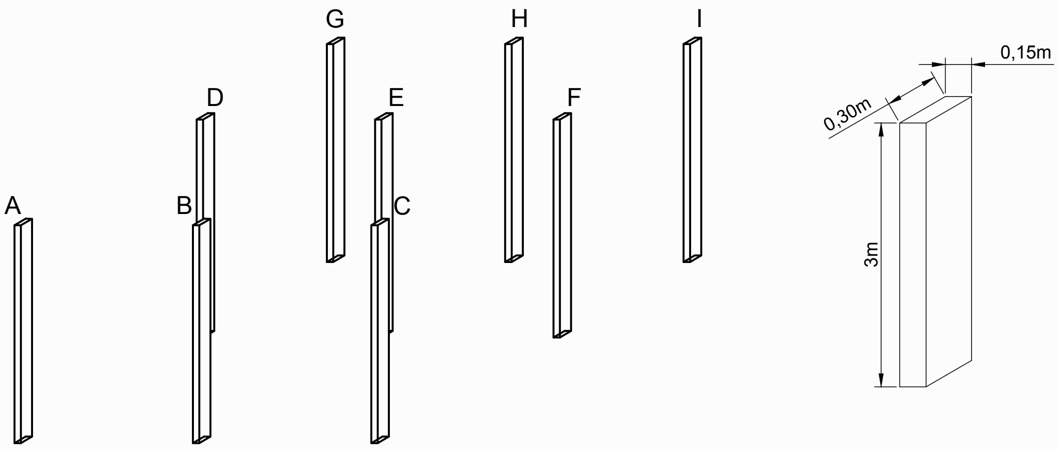


Figura 6.13: Estrutura com todos os pilares e sua ampliação.

Exemplo 6.3.4: Volume dos pilares.

O item 4 refere-se aos pilares que é a estrutura que fica entre a cinta da base e as vigas, conforme Figura 6.13. Conforme ilustração temos que o pilar possui base $(30 \times 15)\,\text{cm}^2$ e altura de 3 m.

Vamos calcular o volume de um pilar que é dado por: (área da base) vezes altura. Portanto teremos que:

$$\text{Volume do pilar} = (0{,}15 \times 0{,}30) \times 3 = 0{,}135\,\text{m}^3$$

A construção é formada por nove pilares, logo o volume total dos pilares da construção será:

$$0{,}135 \times 9 = 1{,}22\,\mathrm{m}^3$$

Agora iremos analisar o contra piso.

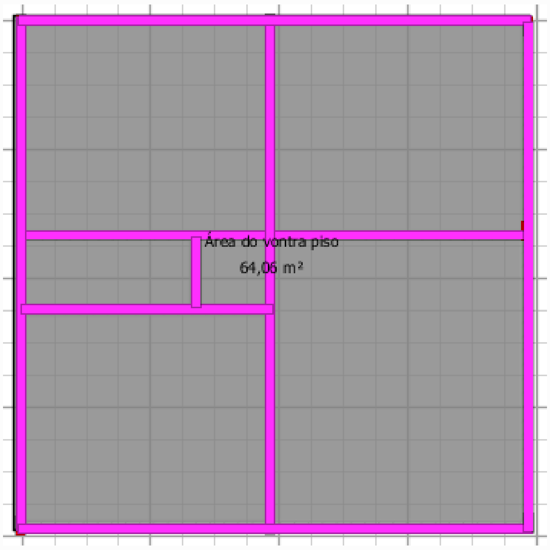


Figura 6.14: Área do contra piso calculada no Sweet Home 3D.

EXEMPLO 6.3.5: Volume do contra piso.

Prosseguimos com o item 5 que é o contra piso, geralmente feito de concreto e aplicado em toda a região do chão da casa. Este contra piso é essencial para regularização e futura aplicação dos revestimentos de acabamento como cerâmicas, porcelanatos, entre outros. Ao observar a planta baixa da casa temos que ela possui 8 m de comprimento por 8 m de largura, logo a base é quadrada. Poderíamos simplesmente fazer 8 m vezes 8 m para encontrar a área da base, isso pode ser feito se o contra piso for aplicado logo após a construção da cinta da base, antes da iniciação da construção das paredes. Caso este contra piso fosse aplicado após a construção das paredes, deveríamos fazer alguns descontos referentes a espessuras das mesmas. Iremos considerar que este contra piso será aplicado logo após a construção da cinta da base e antes da construção dos pilares e paredes, logo podemos considerar que a área da base do contra piso (Abc) será:

$$\begin{aligned} Abc &= 8\,\mathrm{m} \times 8\,\mathrm{m} \\ &= 64\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Encontramos o valor de $64\,m^2$, mas este cálculo poderia ser feito direto no Sweet Home 3D utilizando a ferramenta criar cômodo, conforme Figura 6.14. Dando continuidade, para calcular o volume temos que a espessura (altura) do contra piso é de $5\,cm$ portanto teremos que o volume de concreto será:

$$\begin{aligned} \text{Volume do contra piso} &= (\text{área da base}) \times \text{altura} \\ &= (8 \times 8) \times 0{,}05 \\ &= 3{,}2\,m^3 \end{aligned}$$

Podemos apresentar o resultado referente a quantidade de concreto dos itens 1 a 5 em uma tabela e somar a quantidade total de concreto necessário.

Estrutura	Dimensões da seção (m)	Comprimento (m)	Volume unitário (m^3)	Quantidade de itens	Volume total (m^3)
Bloco de fundação	$1{,}00 \times 1{,}00$	0,40	0,4000	9	3,60
Mini pilar	$0{,}15 \times 0{,}30$	1,50	0,0675	9	0,61
Cinta (base)	$0{,}15 \times 0{,}30$	51,95	2,3400	1	2,34
Vigas (superior)	$0{,}15 \times 0{,}30$	51,95	2,3400	1	2,34
Pilares	$0{,}15 \times 3{,}00$	3,00	0,1350	9	1,22
Contra piso	$8{,}00 \times 8{,}00$	0,05	3,2000	1	3,20
			Total geral de concreto (m^3)		13,31

Portanto temos que o volume total aproximado de concreto gasto em todas as estruturas citadas na construção será de aproximadamente $13{,}31\,m^3$.

Este é o valor calculado, porém quando se trata de construção sempre devemos considerar um acréscimo no volume. Tal acréscimo é devido às perdas que existem na obra ao manusear tais produtos. Este acréscimo é dado através de uma porcentagem que pode variar dependendo do produto que está sendo analisado. Aqui em nossos cálculos consideramos o volume calculado sem nenhum acréscimo.

6.4 Exercícios do ENEM

1) [resp] (ENEM-2019) O concreto utilizado na construção civil é um material formado por cimento misturado a areia, a brita e a água. A areia é normalmente extraída de leitos de rios e a brita, oriunda da fragmentação de rochas. Impactos ambientais gerados no uso do concreto estão associados à extração de recursos minerais e ao descarte indiscriminado desse material. Na tentativa de reverter esse quadro, foi proposta a utilização de concreto reciclado moído em substituição ao particulado rochoso graúdo na fabricação de novo concreto, obtendo um material com as mesmas propriedades que o anterior. O benefício ambiental gerado nessa proposta é a redução do(a)

a) extração da brita.

b) extração de areia.

c) consumo de água.

d) consumo de concreto.

e) fabricação de cimento.

2) [resp] (ENEM-2014) O criador de uma espécie de peixe tem sete tanques, sendo que cada tanque contém 14 600 litros de água. Nesses tanques, existem em média cinco peixes para cada metro cúbico (m3) de água. Sabe-se que cada peixe consome 1 litro de ração por semana. O criador quer construir um silo que armazenará a ração para alimentar sua criação. Qual é a capacidade mínima do silo, em litros, para armazenar a quantidade de ração que garantirá a alimentação semanal dos peixes?

a) 511

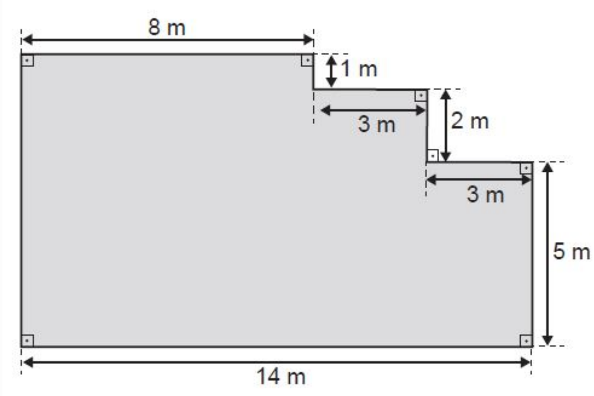
b) 5 110

c) 51 100

d) 511 000

e) 5 110 000

3) [resp] (ENEM/2019) Um mestre de obras deseja fazer uma laje com espessura de 5 cm utilizando concreto usinado, conforme as dimensões do projeto dadas na figura. O concreto para fazer a laje será fornecido por uma usina que utiliza caminhões com capacidades máximas de $2\,\text{m}^3$, $5\,\text{m}^3$ e $10\,\text{m}^3$ de concreto.



Qual a menor quantidade de caminhões, utilizando suas capacidades máximas, que o mestre de obras deverá pedir à usina de concreto para fazer a laje?

a) Dez caminhões com capacidade máxima de $10\,\text{m}^3$.

b) Cinco caminhões com capacidade máxima de $10\,\text{m}^3$

c) Um caminhão com capacidade máxima de $5\,\text{m}^3$.

d) Dez caminhões com capacidade máxima de $2\,\text{m}^3$.

e) Um caminhão com capacidade máxima de $2\,\text{m}^3$.

4) [resp] (ENEM-2013) O dono de uma empresa produtora de água mineral explora uma fonte de onde extrai 20 000 litros diários, os quais são armazenados em um reservatório com volume interno de $30\,\text{m}^3$, para serem colocados, ao final do dia, em garrafas plásticas. Para aumentar a produção, o empresário decide explorar também uma fonte vizinha, de onde passa a extrair outros 25 000 litros. O reservatório que se encontra em uso possui uma capacidade ociosa que deve ser aproveitada. Avaliando a capacidade do reservatório existente e o novo volume de água extraído, qual o volume interno mínimo de um novo reservatório que o empresário deve adquirir?

a) $15\,\text{m}^3$

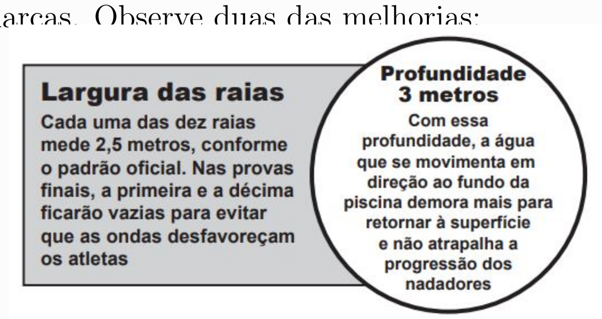
b) $25\,\text{m}^3$

c) $37{,}5\,\text{m}^3$

d) $45\,\text{m}^3$

e) $57{,}5\,\text{m}^3$

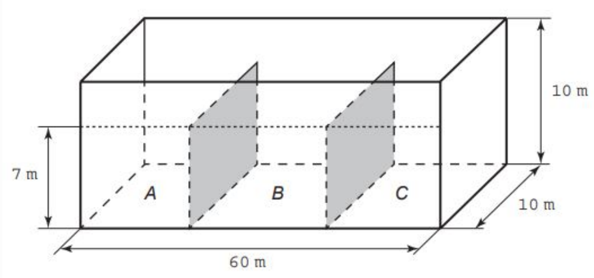
5) [resp] (ENEM/2017) Para a Olimpíada de 2012, a piscina principal do Centro Aquático de Londres, medindo 50 metros de comprimento, foi remodelada para ajudar os atletas a melhorar suas marcas. Observe duas das melhorias:



A capacidade da piscina em destaque, em metro cúbico, é igual a

a) 3750 b) 1500 c) 1250 d) 375 e) 150

6) [resp] (ENEM/2016) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m x 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso aja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias. Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de

a) $1{,}4 \times 10^3 m^3$
b) $1{,}8 \times 10^3 m^3$
c) $2 \times 10^3 m^3$
d) $3{,}2 \times 10^3 m^3$
e) $6 \times 10^3 m^3$

A

Instalando e configurando o Sweet Home 3D

Aqui apresentamos o processo inicial de como baixar o programa, fazer sua instalação e uso do mesmo.

A.1 Instalando o Sweet Home 3D

Para iniciarmos o processo de instalação devemos verificar qual é o sistema operacional do aparelho onde o programa será instalado.

Verificando o sistema operacional do seu computador

Com todos os ícones fechados do computador clicamos no ícone `iniciar`. Em seguida posicionamos o indicador do mouse sobre a palavra `meu computador` ou `este computador`, conforme indicado na Figura A.1a. Em seguida clicamos com o botão contrário (lado direito do mouse) sobre a palavra `este computador` e depois em `propriedade`, conforme Figura A.1b.

Após o procedimento mencionado, aparecerá a imagem, conforme Figura A.1c, onde podemos verificar o sistema operacional do computador, por exemplo, se ele é de 32 ou 64 bits. Neste caso temos que o sistema instalado no computador é Windows 10 e o Sistema Operacional é de 64 bits.

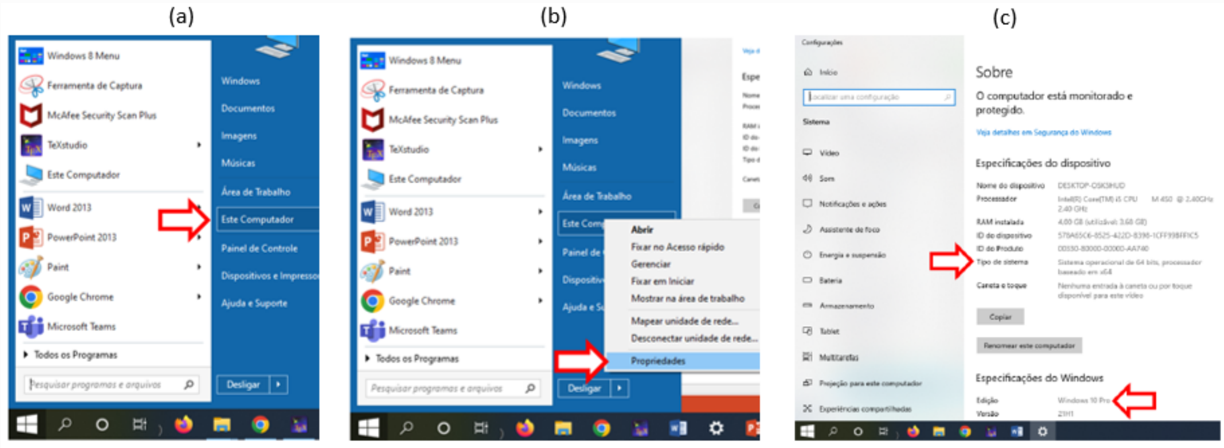


Figura A.1: Verificando qual é o sistema operacional.

Baixando o programa Sweet Home 3D

Para baixar o programa é só acessarmos o link https://www.sweethome3d.com/pt e clicar em download. Ao clicarmos em download aparecerá algumas opções de instalador. Conforme Figura A.2, devemos baixar de acordo o sistema operacional instalado em nosso computador. Após baixarmos o arquivo e localizá-lo, devemos dar um duplo clique e seguir o processo de instalação que é auto explicativo.

Figura A.2: Baixando e instalando o Sweet Home em diferentes sistemas operacionais.

A.2 Como baixar móveis e objetos da internet

Para baixarmos objetos, podemos acessar o site https://3dwarehouse.sketchup.com. Vale ressaltar que este mesmo site encontra-se presente dentro do próprio site do Sweet Home 3D www.sweethome3d.com.

Caso queira, podemos criar um login para ter acesso ao site e baixar os objetos. Veja a seguir as dicas para criar login e senha. No canto superior esquerdo, devemos posicionar o mouse no canto superior direito sobre o ícone que aparenta ser uma imagem de um rosto. Caso já possua login e senha devemos clicar em `Sign In` caso contrário devemos clicar em `Create Account` para se cadastrar.

Dando continuidade conforme indicado na Figura A.3, no local onde colocamos o nome para fazer a pesquisa no site (4) devemos digitar o nome do que deseja, por exemplo "telha" e pesquisar. Após isso podemos alterar entre as opções (5), (6), (7), (8) e verificarmos a que melhor nos atende.

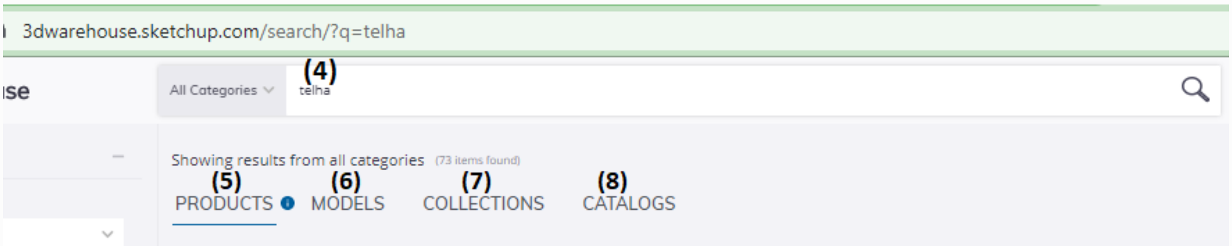


Figura A.3: Opções de download.

Após localizarmos o objeto, clicamos na seta, conforme Figura A.4, e escolhemos baixar com a opção `Collada File`, com isso nosso download será realizado. Uma dica é criar uma pasta com as imagens baixadas.

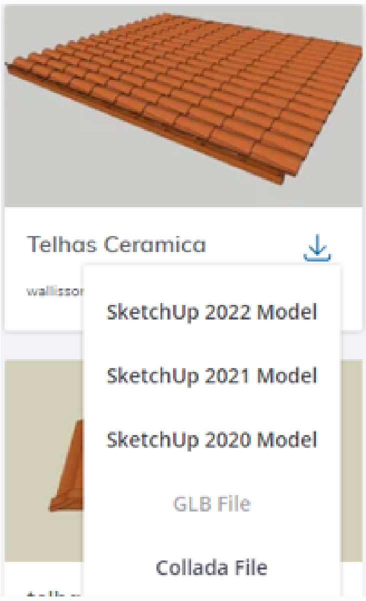


Figura A.4: Baixando com a opção Collada File.

Após baixarmos o objeto e estarmos no ambiente do Sweet Home 3D, se quisermos inseri-lo na construção devemos clicar em: `Mobília - Importar mobília`, logo depois clicamos em `escolher modelos` para escolhermos o objeto baixado e seguirmos as orientações. Durante este processo é possível escolher em qual pastas, ou seja, em qual categoria queremos salvar o objeto, além de alterar suas dimensões e colocá-lo a uma determinada elevação, conforme indicado na Figura A.5. Uma observação é que na fase inicial deste procedimento de inserção de objetos se clicarmos em `procurar modelos`, iremos ser direcionados ao site para baixá-los.

Após inserirmos o objeto é possível alterar características como tamanho, inclinação, elevação, rotação.

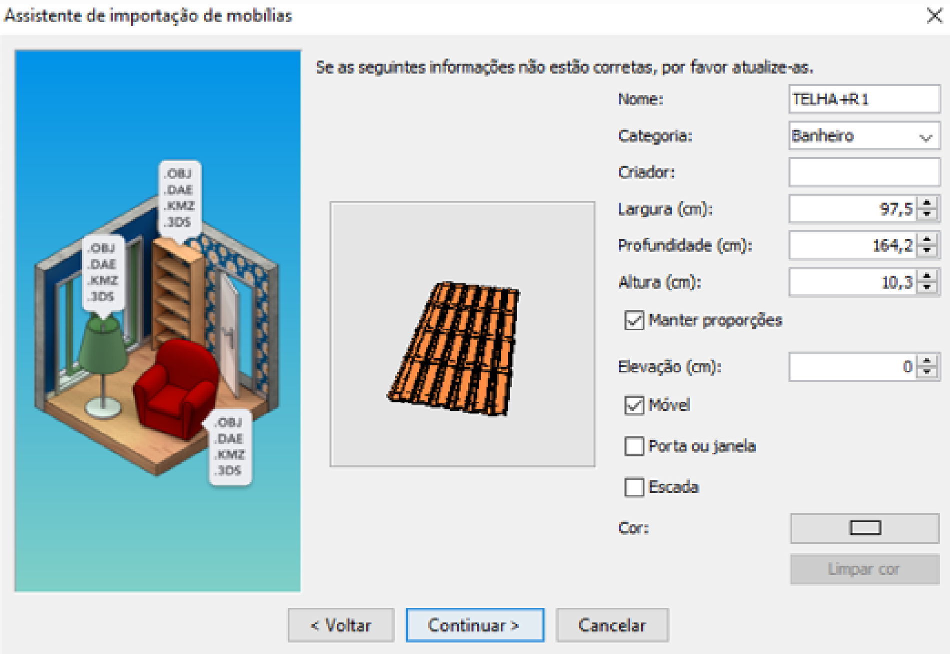


Figura A.5: Baixando objetos e salvando direto na pasta do programa.

Os objetos disponíveis foram criados por outros usuários e é possível criar novos objetos e disponibilizá-los colaborando com o site.

A.3 Criando vídeos

A criação da visualização de uma construção através de vídeos, proporciona uma percepção de como ela será na realidade ao ser executada. Essa visualização em vídeo permite fazer um passeio virtual por toda a construção. Portanto, após a criação da construção no Sweet Home 3D, para iniciarmos a criação do vídeo clicamos em `Visão 3D - Criar vídeo` que apresentará a janela exibida na Figura A.6 que contém as orientações de como criar o vídeo.

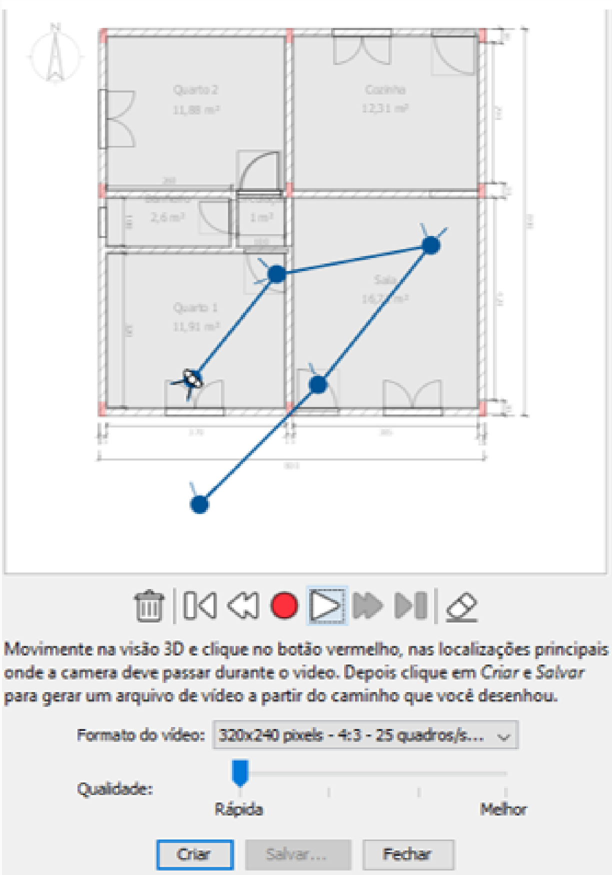


Figura A.6: Criando vídeos.

A.4 Recursos na Internet

No *link* https://www.youtube.com/watch?v=k6beq6fvQ existe um vídeo explicando como baixar objetos. Podemos explorar recursos do Sweet Home 3D no *link* http://www.sweethome3d.com/pt/features.jsp. Agora em http://www.sweethome3d.com/pt/userGuide.jspinstallation temos acesso ao Guia do Usuário.

Caso tenha dúvida na realização de alguma das orientações dadas, procure por canais no Youtube que expliquem sobre o Sweet Home 3D. Deixamos como sugestão o canal do Bruno Toniolo, nele estão disponíveis aulas explicando diversos detalhes de construção com o uso do Sweet Home 3D. Um exemplo é o vídeo https://www.youtube.com/watch?v=k6_beq6fvQ onde ele mostra como baixar objetos para o Sweet Home 3D.

B

Valores de alguns serviços da construção civil

O valor de uma construção não é baseado somente na compra de materiais como tijolos, aço, brita, areias, entre outros. Além dos materiais, deve-se considerar o valor da mão de obra para realização do serviço.

A seguir, temos uma tabela referencial de preços unitários para obras de edificação sem desoneração (os encargos da mão de obra estão com 20% a mais retirados para o INSS) na região central de Minas Gerais, tendo como referência o mês de janeiro de 2020 [16]

Pilares

CÓDIGO	SETOP	DESCRIÇÃO DO SERVIÇO	UNID.	CUSTO UNITÁRIO
ED-50842	SEE-EST-005	Pilar em concreto aparente 20 mpa, inclusive armação, forma plastificada e desforma	m^3	1805,24

Contra piso

CÓDIGO	SETOP	DESCRIÇÃO DO SERVIÇO	UNID.	CUSTO UNITÁRIO
ED-50569	PIS-CON-020	Contrapiso desempenado com argamassa, traço 1:3 (cimento e areia), esp. 50mm	m^2	37,35

Fundação superficial

CÓDIGO	SETOP	DESCRIÇÃO DO SERVIÇO	UNID.	CUSTO UNITÁRIO
ED-49780	FUN-CON-015	Concreto ciclópico, fck 15 mpa, preparado em obra com betoneira, com 30% de pedra de mão, inclusive lançamento, adensamento e acabamento	m^3	293,84
ED-49810	FUN-FOR-005	Forma e desforma de tábua e sarrafo, reaproveitamento (3x) (fundação)	m^2	433,39
ED-49786	FUN-CON-045	Fornecimento de concreto estrutural, preparado em obra com betoneira, com fck 20 mpa, inclusive lançamento, adensamento e acabamento (fundação)	m^3	391,13
ED-49804	FUN-CON-130	Fornecimento de concreto estrutural, usinado bombeado, com fck 20 mpa, inclusive lançamento, adensamento e acabamento (fundação)	m^3	310,09
ED-8503	—	Lançamento de concreto em fundação, inclusive transporte até o local de aplicação, exclusive aplicação	m^3	52,72
ED-8505	—	Aplicação de concreto em fundação, inclusive espalhamento, adensamento e acabamento	m^3	21,37
ED-8571	—	Forma e desforma de compensado plastificado, esp. 12mm, reaproveitamento (3x) (fundação)	m^2	43,54

Cinta da base

CÓDIGO	SETOP	DESCRIÇÃO DO SERVIÇO	UNID.	CUSTO UNITÁRIO
ED-8563	—	Forma para viga cinta/ bloco de madeira com tábua e sarrafo (fabricação)	m^2	55,77
ED-8564	—	Forma para viga-cinta/bloco de madeira com tábua e sarrafo (montagem)	m^2	17,52
ED-8565	—	Forma para viga-cinta/bloco de madeira com tábua e sarrafo (desmontagem)	m^2	6,29
ED-8567	—	Forma para viga-cinta/bloco com chapa de compensado resinado, esp. 12mm (fabricação)	m^2	63,64
ED-8568	—	Forma para viga-cinta/bloco com chapa de compensado resinado, esp. 12mm (montagem)	m^2	14,64
ED-8569	—	Forma para viga-cinta/bloco com chapa de compensado resinado, esp. 12mm (desmontagem)	m^2	5,70

Cinta superior

CÓDIGO	SETOP	DESCRIÇÃO DO SERVIÇO	UNID.	CUSTO UNITÁRIO
ED-48388	CIN-BLO-010	Cinta de amarração de alvenaria com bloco de concreto estrutural, canaleta tipo "u", esp. 14cm, (fbk 4,5mpa), para revestimento, inclusive argamassa para assentamento, exclusive graute e armação	m	11,69
ED-50860	SEE-FUN-010	Cinta armada em concreto 20 mpa, inclusive lastro 5 cm em concreto magro 9 mpa, formas laterais e desforma	m^3	2369,11

Alvenaria e divisões

CÓDIGO	SETOP	DESCRIÇÃO DO SERVIÇO	UNID.	CUSTO UNITÁRIO
ED-48213	ALV-EST-010	Alvenaria de bloco de concreto cheio com armação, em concreto com fck 15mpa , esp. 14cm, para revestimento, inclusive argamassa para assentamento (detalhe d - caderno seds)	m^2	119,28
ED-48234	ALV-VID-005	Alvenaria de tijolos de vidro tijolo de vidro 20 x 20 x 8 cm	m^2	373,51
ED-48231	ALV-TIJ-025	Alvenaria de vedação com tijolo cerâmico furado, esp. 9cm, para revestimento, inclusive argamassa para assentamento	m^2	31,16
ED-48232	ALV-TIJ-030	Alvenaria de vedação com tijolo cerâmico furado, esp. 14cm, para revestimento, inclusive argamassa para assentamento	m^2	41,38
ED-48227	ALV-TIJ-005	Alvenaria de vedação com tijolo maciço requeimado, esp. 10cm, para revestimento, inclusive argamassa para assentamento	m^2	53,39

Respostas

Capítulo 3

1) Opção c

2) Opção b

Capítulo 4

1) Opção b

2) Opção e

3) Opção d

4) Opção d

5) Opção a

6) Opção b

Capítulo 5

1) Opção c

2) Opção a

Capítulo 6

1) Opção a

2) Opção a

3) Opção c

4) Opção a

5) Opção a

6) Opção d

Referências

1 ALENCAR VELLOSO, D. DE; REZENDE LOPES, F. DE. *Fundações:critérios de projeto,investigação de subsolo, fundações superficiais, fundações profundas*. 1. ed. São Paulo: Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP), (Câmara Brasileira do Livro), 2010. (Oficina de Textos). ISBN 978-85-7975-209-4.

2 ALMEIDA, M. C. F. DE. *Estruturas Isostáticas*. 1. ed. São Paulo: Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP), (Câmara Brasileira do Livro), 2009. p. 11. (Oficina de Textos). ISBN 9788586238833.

3 BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. ISBN 9788583371069.

4 BERTOLINI, L. *Materiais de construção: patologia/reabilitação/prevenção*. 1. ed. São Paulo: Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP), (Câmara Brasileira do Livro), 2010. p. 25. (Oficina de Textos). ISBN 9788579752421.

5 COLABORADORES DA WIKIPEDIA. List of tallest buildings in Asia. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2022. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_tallest_buildings_in_Asia>.

6 COLABORADORES DA WIKIPEDIA. Oca. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2022. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Oca>.

7 COLABORADORES DA WIKIPEDIA. Palm Jumeirah. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2022. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Palm_Jumeirah>.

8 COLABORADORES DA WIKIPEDIA. Pirâmides egípcias. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2022. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Pir%C3%A2mides_eg%C3%ADpcias>.

9 DUTENHEFNER, F.; CADAR, L. *Encontros de Geometria – Parte 1*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, 2017. p. 156. (PIC - Programa de Iniciação Científica da OBMEP). ISBN 9788524403965.

10 EBC. *Construção civil está entre os setores com maior risco de acidentes de trabalho*. 2022. Disponível em: <www.anamt.org.br/portal/2019/04/30/construcao-civil-esta-entre-os-setores-com-maior-risco-de-acidentes-de-trabalho/>. Acesso em: 13 abr. 2020.

11 FALCONI, F. et al. *Fundações: teoria e prática*. 3. ed. São Paulo: PINI ABMS/ABEF, 2016. p. 55. (Fundações). ISBN 9788572664691.

12 JESUS, V. P. DE. *Apostila sobre a Matemática na construção civil com o uso do Sweet Home 3D*. 27 mai. 2022. Diss. (Mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG). Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6720&id2=171054682>.

13 NETO, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. p. 561. (Coleção Profmat). ISBN 9788583370369.

14 OHTAKE, R. *Oscar Niemeyer*. 1. ed. são Paulo: Publifolha, 2007. p. 12. (Arquitetura). ISBN 9788574028019.

15 SAXTON, G. Great Wall of China. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2022. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Great_Wall_of_China.jpeg>.

16 SECRETARIA DE INFRAESTRUTURA E MOBILIDADE. *Preços SETOP*. 2020. Disponível em: <http://www.infraestrutura.mg.gov.br/images/documentos/precosetop/2020/01-jan/sem-desoneracao/202001_SETOP_CENTRAL_SEM_DESONERACAO.pdf>. Acesso em: 19 mai. 2020.

17 TOMAZELA, J. M. *Quatro operários morrem atingidos por desabamento de parede em Presidente Prudente*. 2020. Disponível em: <www.terra.com.br/noticias/brasil/cidades/quatro-operarios-morrem-atingidos-por-desabamento-de-parede-em-presidente-prudente,0e1ec54bcf1ef286ebe9a04c6bdbffec8khg4duo.html>. Acesso em: 23 jul. 2020.

18 WIKIPÉDIA. *Rompimento de barragem em Brumadinho*. 2019. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Rompimento_de_barragem_em_Brumadinho>. Acesso em: 27 jul. 2020.

Índice Remissivo

Matemática na Construção Civil

Vilmar Pereira de Jesus
Luis Alberto D'Afonseca

12 de outubro de 2022

Esta apostila é produto do mestrado de Vilmar Pereira de Jesus defendida em 2022 no Profmat do Cefet-MG [12]. O texto completo da dissertação pode ser baixado aqui.

A versão mais recente desta apostila pode ser baixada clicando ou escaneando o código QR.

Arte da capa: Fotografia de Designdrunkard baixado de Pexels