GABARITO

- 1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
- 2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
- 3. Respeite as margens do papel!
- 4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
- 5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
- 6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
- 7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

O exercício correspondente a prova que vai ser substituída vale 40 pontos.

Tabela de integrais

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad \int \operatorname{cossec}^2(x) \, dx = -\cot(x) + c$$

1 [20] Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região contida entre os gráficos das funções f(x) = |x - 1| e $g(x) = \frac{2 - x}{2}$ em torno da reta x = -1

As funções vão se interceptar em x = 0 e em $b \in [1, 2]$

$$f(b) = g(b)$$

$$|b-1| = 1 - \frac{b}{2}$$

$$b-1 = 1 - \frac{b}{2}$$

$$\frac{3}{2}b = 2$$

$$b = \frac{4}{3}$$
pois $b > 1$

Vamos usar cascas cilíndricas

$$V = \int_{a}^{b} 2\pi r(x)h(x)dx$$

onde

$$r(x) = x + 1$$

$$h(x) = g(x) - f(x)$$

$$a = 0$$

$$b = \frac{4}{3}$$

Para encontrar h(x) precisamos dividir região em duas partes, para $x \in [0,1]$

$$h(x) = g(x) - f(x) = 1 - \frac{x}{2} - |x - 1| = 1 - \frac{x}{2} + x - 1 = \frac{x}{2}$$

para $x \in [1, 4/3]$

$$h(x) = g(x) - f(x) = 1 - \frac{x}{2} - |x - 1| = 1 - \frac{x}{2} - x + 1 = 2 - \frac{3x}{2}$$

Calculando o volume para $x \in [0, 1]$

$$V_{1} = \int_{0}^{1} 2\pi r(x)h(x) dx$$

$$= \int_{0}^{1} 2\pi (x+1) \frac{x}{2} dx$$

$$= \pi \int_{0}^{1} x^{2} + x dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^{3}}{3} + \frac{x^{2}}{2}\right) \Big|_{0}^{1}$$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{6}\pi$$

para $x \in [1, 4/3]$

$$V_2 = \int_1^{4/3} 2\pi r(x)h(x) dx$$

$$= \int_1^{4/3} 2\pi (x+1) \left(2 - \frac{3x}{2}\right) dx$$

$$= 2\pi \int_1^{4/3} -\frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2} + 2 dx$$

$$= 2\pi \left(-\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} + 2x\right)\Big|_1^{4/3}$$

$$= \pi \left(-x^3 + \frac{x^2}{2} + 4x\right)\Big|_1^{4/3}$$

$$= \pi \left[\left(-\frac{4^3}{3^3} + \frac{4^2}{3^2 \times 2} + \frac{4^2}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{2} + 4\right)\right]$$

$$= \pi \left(-\frac{4^3}{3^3} + \frac{4^2}{3^2 \times 2} + \frac{4^2}{3} - 3 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{19}{54}\pi$$

Volume do sólido

$$V = V_1 + V_2 = \frac{5}{6}\pi + \frac{19}{54}\pi = \frac{32}{27}\pi \approx 3,7234$$

2 [20] Calcule a integral $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

 $= 2\theta - \sin(2\theta) + c$

 $= 2\theta - 2\cos(\theta)\sin(\theta) + c$

 $= 2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \cos(\theta)\frac{x}{2} + c$

 $=2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}x + c$

$$F(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$x = 2 \operatorname{sen}(\theta) \qquad dx = 2 \cos(\theta) d\theta$$

$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 2^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} = \sqrt{4(1 - \operatorname{sen}^2(\theta))} = \sqrt{4 \cos^2(\theta)} = 2 \cos(\theta)$$

$$F(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$= \int \frac{4 \operatorname{sen}^2(\theta)}{2 \cos(\theta)} 2 \cos(\theta) d\theta$$

$$= 4 \int \operatorname{sen}^2(\theta) d\theta$$

$$= 4 \int \frac{1}{2} (1 - \cos(2\theta)) d\theta$$

$$= 2 \int 1 - \cos(2\theta) d\theta$$

$$= 2 \left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + c$$

Usando o teste da integral com a função

$$f(x) = \frac{1}{x\left(1 + \ln^2(x)\right)}$$

Verificando as condições do teste

A função f só não é contínua em x=0, portanto é contínua em $[2,\infty)$.

A funçao f é positiva para todo x > 0.

Derivando f temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left[x \left(1 + \ln^2(x) \right) \right]^{-1}$$

$$= -\left[x \left(1 + \ln^2(x) \right) \right]^{-2} \frac{d}{dx} \left[x \left(1 + \ln^2(x) \right) \right]$$

$$= \frac{-1}{x^2 \left(1 + \ln^2(x) \right)^2} \left[\left(1 + \ln^2(x) \right) + x \left(1 + \ln^2(x) \right)' \right]$$

$$= \frac{-1}{x^2 \left(1 + \ln^2(x) \right)^2} \left[1 + \ln^2(x) + x \left(\ln^2(x) \right)' \right]$$

$$= \frac{-1}{x^2 \left(1 + \ln^2(x) \right)^2} \left[1 + \ln^2(x) + x 2 \ln(x) \left(\ln(x) \right)' \right]$$

$$= \frac{-1}{x^2 \left(1 + \ln^2(x) \right)^2} \left[1 + \ln^2(x) + x 2 \ln(x) \frac{1}{x} \right]$$

$$= -\frac{1 + \ln^2(x) + 2 \ln(x)}{x^2 \left(1 + \ln^2(x) \right)^2}$$

Que será negativa para x > 1. Calculando a primitiva

$$F = \int \frac{dx}{x(1 + \ln^2(x))}$$

$$= \int \frac{du}{1 + u^2}$$

$$= \arctan(u) + c$$

$$= \arctan(\ln(x)) + c$$

Calculando a integral imprópria

$$I = \int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x(1 + \ln^{2}(x))}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_{2}^{b} \frac{dx}{x(1 + \ln^{2}(x))}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(\operatorname{arctg} \left(\ln(x) \right) \Big|_{2}^{b} \right)$$

$$= \lim_{b \to \infty} \operatorname{arctg} \left(\ln(b) \right) - \operatorname{arctg} \left(\ln(2) \right)$$

$$= \lim_{t \to \infty} \operatorname{arctg}(t) - \operatorname{arctg} \left(\ln(2) \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\ln(2)\right)$$

Como a integral converge a série também converge.

4 [20] Sabendo que, para $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

- a) [04] Construa a Série de Taylor de f(x) centrada em 2
- b) [04] Determine o intervalo aberto onde a série converge absolutamente
- c) [06] Use o polinômio de Taylor de terceiro grau para aproximar f(3)
- d) [06] Estime o erro cometido na aproximação

Não é necessário encontrar a representação decimal dos valores calculados, mas é necessário realizar as simplificações elementares.

a)
$$f^{(n)}(2) = \frac{2(-1)^n n!}{2^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{2^n}$$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^n n!} (x-2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-2)^n$$

b) Usando o teste da raiz

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{|x-2|^n}{2^n}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{|x-2|}{2}$$

$$= \frac{|x-2|}{2}$$

Impondo $\rho < 1$ temos |x-2| < 2 portanto I = (0,4)

c)
$$P_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-2)^n = 1 - \frac{x-2}{2} + \frac{(x-2)^2}{2^2} - \frac{(x-2)^3}{2^3}$$

$$P_3(3) = 1 - \frac{3-2}{2} + \frac{(3-2)^2}{2^2} - \frac{(3-2)^3}{2^3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

d)
$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-2)^4 = \frac{2(-1)^4 4!}{c^5 4!}(x-2)^4 = \frac{2(x-2)^4}{c^5} \qquad c \in [2, x]$$

$$R_3(3) = \frac{2(3-2)^4}{c^5} = \frac{2}{c^5} \qquad c \in [2, 3]$$

$$|R_3(3)| \le \frac{2}{2^5} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$