Integrais e Séries – Prova 3 – Turma 8 14/01/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

Para facilitar o cálculo dos limites considere as ordens de crescimento

$$\ln(n) \ll n^{1/k} \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

1 [25] Calcule o limite da sequência de somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n(n+1)}$

Usando frações parciais, podemos reescrever o termo geral

$$a_n = \frac{\pi}{n(n+1)} = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n+1}$$

Expandindo a soma parcial S_N, temos

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n+1} \right) = \left(\frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{\pi}{N} - \frac{\pi}{N+1} \right)$$

Após o cancelamento telescópico, restam

$$S_N = \pi - \frac{\pi}{N+1}$$

Calculando o limite

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \pi - \frac{\pi}{N+1} = \pi$$

2 [25] Analise a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!n!}{(2n)!}$$

$$a_{n+1} = \frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!} = \frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}\,\frac{(2n)!}{n!n!} \\
&= \frac{(n+1)\,n!\,(n+1)\,n!\,(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!\,n!\,n!} \\
&= \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \frac{(n+1)(n+1)}{2(n+1)(2n+1)} \\
&= \frac{n+1}{4n+2} \\
&= \frac{1+{}^{1}\!/_{n}}{4+{}^{2}\!/_{n}}
\end{aligned}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+{}^{1}\!/_{n}}{4+{}^{2}\!/_{n}} = \frac{1+0}{4+0} = \frac{1}{4}$$

Como $\rho = \dfrac{1}{4} < 1$ a série converge pelo teste da razão.

3 [25] Verifique se a série converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\operatorname{sen}(n)}{n}\right]^2$

Como os termos da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\operatorname{sen}(n)}{n}\right]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2(n)}{n^2}$$

são não-negativos, podemos usar o teste da comparação. Observando que $0 \le \operatorname{sen}^2(n) \le 1$ temos que

$$a_n=\frac{\operatorname{sen}^2(n)}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$$

Como $b_n=\dfrac{1}{n^2}$ são os termos de uma p-série convergente ($p=2>1$) o teste da comparação garante que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2(n)}{n^2}$$

converge

4 [25] Use o teste da integral para mostrar que a soma da série existe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Vamos usar a função real

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

Precisamos verificar as três condições do teste

i) $f(x) > 0$ sempre que $x(x+1) > 0$. isso é, $x < -1$ ou $x > 0$

ii) $f(x)$ é contínua em para todo $x \in \mathbb{R}$, desde que $x \neq 0$ e $x \neq -1$

iii) A derivada de $f(x)$ é

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{1}{x(x+1)}\right]' \\ &= \left[\frac{1}{x^2+x}\right]' \\ &= \frac{0-(2x+1)}{x^2(x+1)^2} \\ &= -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} \end{aligned}$$

A derivada será negativa sempre que $2x+1 > 0$, ou seja, $f(x)$ é decrescente quando $x > -\dfrac{1}{2}$

Portanto, a função $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ é apropriada para o teste da integral. Vamos então calcular sua primitiva.

$$F(x) = \int \frac{1}{x(x+1)} dx$$

Por frações parciais temos que

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

então

$$F(x) = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

Calculando a integral imprópria

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{\infty} f(x)dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx \\ &= \lim_{b\to\infty} F(x)\Big|_1^b \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{b\to\infty} \big(\ln|x| - \ln|x+1|\big)\Big|_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big(\big(\ln|b| - \ln|b+1|\big) - \big(\ln|1| - \ln|1+1|\big)\Big) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\ln\left|\frac{b}{b+1}\right|\right) + \ln(2) \\
&= \ln\left|\lim_{b\to\infty} \frac{b}{b+1}\right| + \ln(2) \\
&= \ln(1) + \ln(2) \\
&= \ln(2)
\end{aligned}
$$

Como a integral converge a série também converge.