

# Sequências Numéricas – Teoremas

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

# Conteúdo

Teorema do Confronto

Teorema da Função Contínua

Sequência Definida por Função

Sequência Limitadas

Lista Mínima

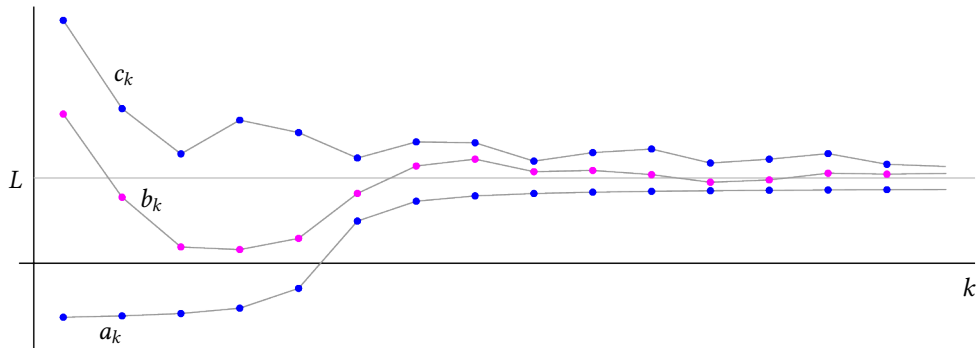
# Teorema do Confronto

Sejam  $(a_k)$ ,  $(b_k)$  e  $(c_k)$  tais que

$$a_k \leq b_k \leq c_k \quad \forall k > N$$

Se  $a_k \rightarrow L$  e  $c_k \rightarrow L$  então  $b_k \rightarrow L$

# Teorema do Confronto



# Teorema da Função Contínua

É verdade que  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k\right)$  ?

Se  $a_k$  é uma sequência numérica real convergente,  $a_k \rightarrow L$ , e  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real contínua em  $D$ , com  $L \in D$  então

$$\lim f(a_k) = f(L)$$

# Conteúdo

Teorema do Confronto

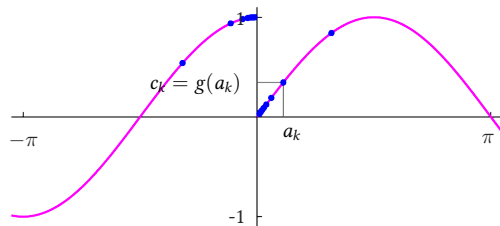
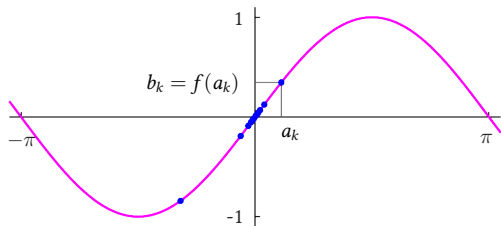
Teorema da Função Contínua

Sequência Definida por Função

Sequência Limitadas

Lista Mínima

# Teorema da Função Contínua



# Exemplo

Calcular  $\lim [\cos(\alpha^k)]$  com  $0 < \alpha < 1$

Considerando a sequência  $a_k = \alpha^k$

Sabemos que  $\lim a_k = 0$

A função cosseno é contínua em zero

Portanto

$$\lim \cos(\alpha^k) = \lim \cos(a_k) = \cos(\lim a_k) = \cos(0) = 1$$



# Conteúdo

Teorema do Confronto

Teorema da Função Contínua

**Sequência Definida por Função**

Sequência Limitadas

Lista Mínima

# Limite de sequência definida por função

Se  $f$  é uma função real e  $a_k = f(k)$  então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = L$$

Esse resultado nos permite usar a regra de l'Hôpital (em  $x$ )

# Exemplo

Mostre que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} = 5$

A função

$$f(x) = \frac{5x^4}{x^4 + 8x^3} \quad x \in \mathbb{R}$$

está definida para todo  $x > 0$  e a sequência

$$a_k = f(k) = \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} \quad k \in \mathbb{N}$$

# Exemplo

Podemos aplicar a regra de L'Hôpital em  $x$ , pois temos uma indeterminação  $\infty/\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{x^4 + 8x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^3}{4x^3 + 24x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{60x^2}{12x^2 + 48x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120x}{24x + 48} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120}{24} \\ &= 5\end{aligned}$$

# Exemplo

Método mais apropriado

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{5k^4}{k^4}}{\frac{k^4 + 8k^3}{k^4}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5}{1 + \frac{8}{k}}$$

$$= \frac{5}{1 + 8 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}}$$

$$= 5$$

# Conteúdo

Teorema do Confronto

Teorema da Função Contínua

Sequência Definida por Função

**Sequência Limitadas**

Lista Mínima

# Sequências Limitadas

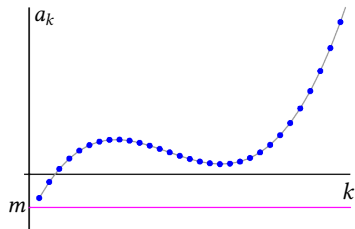
Uma sequência  $(a_k)$  é

Limitada inferiormente se existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $m \leq a_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$

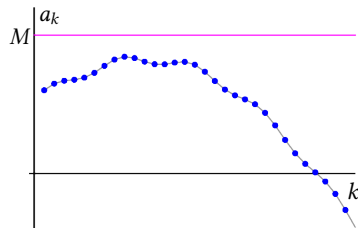
Limitada superiormente se existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $M \geq a_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$

Limitada se é limitada superiormente e inferiormente

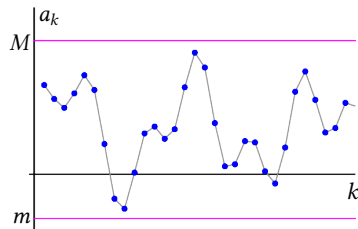
# Sequências Limitadas



Limitada inferiormente



Limitada superiormente



Limitada



# Sequências Crescentes e Decrescentes

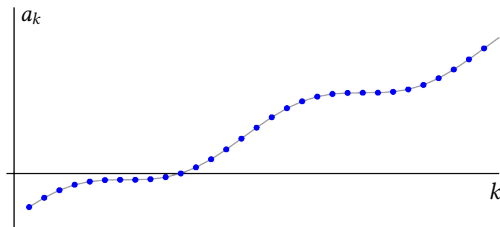
Uma sequência  $(a_k)$  é

**Crescente** se  $a_k \leq a_{k+1}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$

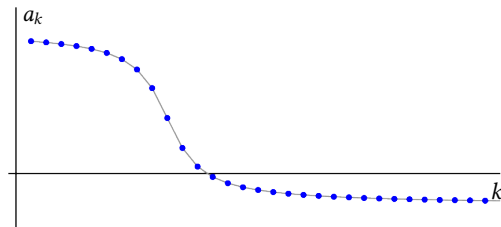
**Decrescente** se  $a_k \geq a_{k+1}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$

**Monótona** se é crescente ou decrescente

# Sequências Crescentes e Decrescentes



Crescente



Decrescente

# Convergência de sequência monótona

Se uma sequência  $(a_k)$  é limitada e monotônica, então ela é convergente

Importante porque permite decidir a convergência sem calcular o limite

# Conteúdo

Teorema do Confronto

Teorema da Função Contínua

Sequência Definida por Função

Sequência Limitadas

Lista Mínima

# Lista Mínima

Estudar as Seções 5.3 , 5.4 e 5.5 da Apostila

Exercícios:

Seção 5.3: 2a-c

Seção 5.4: 1, 2, 3

Seção 5.5: 1, 2

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações