Diferenciabilidade

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Derivada Ordinária – Uma variável

Variação da função com relação à variável

Derivada da função $f : R \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no ponto x_0

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Diferenciabilidade em 1D

Se a derivada de f existe em x_0 então f é diferenciável em x_0

Existe uma reta tangente a f no ponto $\big(x_0, f(x_0)\big)$

Podemos aproximar a função pela reta em uma vizinhança de x_0

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x) - f(x_0)\\ &= f'(x_0)\Delta x + \varepsilon \Delta x\end{aligned}$$

$\varepsilon \to 0$ quando $\Delta x \to 0$

Definição – Derivada Parcial em x

A derivada parcial, com relação a x, da função $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ f(x, y)$ no ponto $(x, y) = (x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Desde que o limite exista

Diferenciabilidade em n Dimensões

A existência das derivadas parciais não garante diferenciabilidade

Diferenciabilidade está associada a existência do plano tangente

Definição: Diferenciabilidade em 2D

Uma função $z = f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0)

se $\dfrac{df}{dx}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{df}{dy}(x_0, y_0)$ existem

e $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_o, y_0)$

satisfaz

$$\Delta z \ = \ f_x(x_0, y_0)\Delta x \ + \ f_y(x_0, y_0)\Delta y \ + \ \varepsilon_1 \Delta x \ + \ \varepsilon_2 \Delta y$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x, \Delta y \to 0$

Teorema do Incremento

Suponha que as derivadas parciais de primeira ordem de $f(x, y)$ sejam definidas em uma região aberta R, que contem o ponto (x_0, y_0) e que f_x e f_y sejam contínuas em (x_0, y_0), então a variação

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

com $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in R$, satisfaz

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x, \Delta y \to 0$

Corolário do Teorema do Incremento

Se $\dfrac{df}{dx}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{df}{dy}(x_0, y_0)$ existem

e são contínuas em uma região aberta R

então f é diferenciável em R

Diferenciabilidade em 2D

Dizemos que f é diferenciável se ela é diferenciável em todos os pontos do seu domínio

Nesse caso dizemos que seu gráfico é uma superfície lisa

Teorema Diferenciabilidade e Continuidade

Se uma função $f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0)

então ela é contínua em (x_0, y_0)

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.3

1. Estudar o texto da seção

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações