## **GABARITO**

- 1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
- 2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
- 3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
- 4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
- 5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
- 1 [20] Calcule o volume do sólido formado pela rotação da região entre as curvas

$$y = x + 2 \qquad y = x^2$$

em torno da reta x = -1.

Vamos usar cascas cilíndricas, para isso precisamos encontrar o raio e a altura da casca cilindica

$$r(x) = x - (-1) = x + 1$$

$$h(x) = (x+2) - x^2 = 2 + x - x^2$$

O intervalo de integração, [a,b], vai ser entre os pontos comuns entre as curvas  $y=x+2\,$  e  $y=x^2\,$ , ou seja  $a=0\,$  e

$$(x+2) = x^{2}$$

$$x^{2} - x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^{2} - 4ac = (-1)^{2} - 4(1)(-2) = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm 3}{2 \times 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

portanto

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$
  $x_2 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ 

O intervalo de integração é [-1,2]

Calculando o volume

$$V = \int_{a}^{b} 2\pi \ r(x) \ h(x) \ dx$$
$$= 2\pi \int_{-1}^{2} (x+1)(2+x-x^{2})dx$$
$$= 2\pi \int_{-1}^{2} 2x + x^{2} - x^{3} + 2 + x - x^{2}dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{2} 2 + 3x - x^{3} dx$$

$$= 2\pi \left( 2x + 3\frac{x^{2}}{2} - \frac{x^{4}}{4} \right) \Big|_{-1}^{2}$$

$$= 2\pi \left( \left[ 2 \times 2 + 3\frac{2^{2}}{2} - \frac{2^{4}}{4} \right] - \left[ 2(-1) + 3\frac{(-1)^{2}}{2} - \frac{(-1)^{4}}{4} \right] \right)$$

$$= 2\pi \left( \left[ 4 + 6 - 4 \right] - \left[ -2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right] \right)$$

$$= 2\pi \left( 6 - \frac{-8 + 6 - 1}{4} \right)$$

$$= 2\pi \left( \frac{24 + 3}{4} \right)$$

$$= \frac{27 \times 2\pi}{4}$$

$$= \frac{27\pi}{2}$$

## **2** [20] Calcule a integral $\int_{1}^{e} x^{3} \ln(x) dx$

Para calcular a primitiva

$$F(x) = \int x^3 \ln(x) dx$$

vamos usar integração por partes com

$$u = \ln(x)$$
  $du = \frac{dx}{x}$   $dv = x^3 dx$   $v = \frac{x^4}{4}$ 

obtendo

$$F(x) = \int x^{3} \ln(x) dx$$

$$= \ln(x) \frac{x^{4}}{4} - \int \frac{x^{4}}{4} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^{4} \ln(x)}{4} - \frac{1}{4} \int x^{3} dx$$

$$= \frac{x^{4} \ln(x)}{4} - \frac{1}{4} \frac{x^{4}}{4} + C$$

$$= \frac{x^{4}}{4} \left( \ln(x) - \frac{1}{4} \right) + C$$

Agora podemos calcular

$$I = \int_{1}^{e} x^{3} \ln(x) dx$$

$$= F(x) \Big|_{1}^{e}$$

$$= \left(\frac{x^{4}}{4} \left(\ln(x) - \frac{1}{4}\right)\right) \Big|_{1}^{e}$$

$$= \left(\frac{e^{4}}{4} \left(\ln(e) - \frac{1}{4}\right)\right) - \left(\frac{1^{4}}{4} \left(\ln(1) - \frac{1}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{e^{4}}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} \left(0 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{e^{4}}{4} \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3e^{4} + 1}{16}$$

**3** [20] Calcule a soma da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$ 

Por frações parciais

$$\frac{6}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$$
$$6 = A(2n+1) + B(2n-1)$$
$$= 2(A+B)n + (A-B)$$

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2A + 2B = 0 \\ A - B = 6 \end{cases}$$

Que podemos reescrever como

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 6 \end{cases}$$

Da primeira equação temos que B=-A. Substituindo na segunda temos

$$6 = A - B = A - (-A) = 2A$$

portanto A=3 e B=-3

Podemos agora reescrever a série como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n-1} - \frac{3}{2n+1}$$

que é uma série telescópica com soma parcial igual a

$$S_n = \left(\frac{3}{2n-1}\right)\Big|_{n=1} - \frac{3}{2n+1} = 3 - \frac{3}{2n+1}$$

Calculando o limite das somas parciais temos o valor da soma

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left( 3 - \frac{3}{2n+1} \right) = 3 - 3 \lim_{n \to \infty} \left( \frac{1}{2n+1} \right) = 3$$

**4** [20] Encontre o interiror do intervalo de convergêcia da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{\sqrt{n^2+3}}$ 

O módulo do termo geral é

$$u_n = \left| \frac{(-1)^n x^{n+1}}{\sqrt{n^2 + 3}} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n^2 + 3}}$$

o módulo do seu sucessor é

$$u_{n+1} = \frac{|x|^{n+2}}{\sqrt{(n+1)^2 + 3}} = \frac{|x|^{n+2}}{\sqrt{n^2 + 2n + 1 + 3}} = \frac{|x|^{n+2}}{\sqrt{n^2 + 2n + 4}}$$

USando o teste da razão temos

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|^{n+2}}{\sqrt{n^2 + 2n + 4}} \frac{\sqrt{n^2 + 3}}{|x|^{n+1}} = |x| \frac{\sqrt{n^2 + 3}}{\sqrt{n^2 + 2n + 4}} = |x| \sqrt{\frac{n^2 + 3}{n^2 + 2n + 4}}$$

Calculando o  $\rho$ 

$$\rho = \lim_{n\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$= \lim_{n\infty} \left( |x| \sqrt{\frac{n^2 + 3}{n^2 + 2n + 4}} \right)$$

$$= |x| \sqrt{\lim_{n\infty} \frac{n^2 + 3}{n^2 + 2n + 4}}$$
Pois a raiz é uma função contínua
$$= |x| \sqrt{\lim_{n\infty} \frac{1 + 3/n^2}{1 + 2^2/n + 4/n^2}}$$

$$= |x| \sqrt{1}$$

$$= |x|$$

A condição de convergência do teste da razão é  $\, \rho < 1 \, ,$  ou seja

$$\begin{aligned} \rho < 1 \\ |x| < 1 \\ -1 < x < 1 \end{aligned}$$

O interiror do intervalo de convergência é o intervalo aberto (-1,1)

Calculando as derivadas da função

$$f^{(0)}(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2$$

$$f^{(1)}(x) = 15x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2x$$

$$f^{(2)}(x) = 60x^3 - 12x^2 + 12x + 2$$

$$f^{(3)}(x) = 180x^2 - 24x + 12$$

$$f^{(4)}(x) = 360x - 24$$

$$f^{(5)}(x) = 360$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad n > 5$$

Avaliando as derivadas em a = -1

$$f^{(0)}(-1) = 3(-1)^5 - (-1)^4 + 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2$$

$$= -3 - 1 - 2 + 1 - 2$$

$$= -7$$

$$f^{(1)}(-1) = 15(-1)^4 - 4(-1)^3 + 6(-1)^2 + 2(-1)$$

$$= 15 + 4 + 6 - 2$$

$$= 23$$

$$f^{(2)}(-1) = 60(-1)^3 - 12(-1)^2 + 12(-1) + 2$$

$$= -60 - 12 - 12 + 2$$

$$= -82$$

$$f^{(3)}(-1) = 180(-1)^2 - 24(-1) + 12$$

$$= 180 + 24 + 12$$

$$= 216$$

$$f^{(4)}(-1) = 360(-1) - 24$$

$$= -360 - 24$$

$$= -384$$

$$f^{(5)}(-1) = 360$$

$$f^{(n)}(-1) = 0 \qquad n > 5$$

A série de Taylor é

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!} (x+1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{5} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!} (x+1)^n$$
 Pois as demais derivadas são zero
$$= \frac{f^{(0)}(-1)}{0!} (x+1)^0 + \frac{f^{(1)}(-1)}{1!} (x+1)^1 + \frac{f^{(2)}(-1)}{2!} (x+1)^2 + \frac{f^{(3)}(-1)}{3!} (x+1)^3$$

$$+ \frac{f^{(4)}(-1)}{4!}(x+1)^4 + \frac{f^{(1)}(-1)}{5!}(x+1)^5$$

$$= f^{(0)}(-1) + f^{(1)}(-1)(x+1) + \frac{f^{(2)}(-1)}{2}(x+1)^2 + \frac{f^{(3)}(-1)}{6}(x+1)^3$$

$$+ \frac{f^{(4)}(-1)}{24}(x+1)^4 + \frac{f^{(1)}(-1)}{120}(x+1)^5$$

$$= -7 + 23(x+1) - \frac{82}{2}(x+1)^2 + \frac{216}{6}(x+1)^3 - \frac{384}{24}(x+1)^4 + \frac{360}{120}(x+1)^5$$

$$= -7 + 23(x+1) - 41(x+1)^2 + 36(x+1)^3 - 16(x+1)^4 + 3(x+1)^5$$