Derivadas de Curvas Paramétricas

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Fórmula Paramétrica para dy/dx

Se y for uma função derivável de x ao longo da curva paramétrica

$$y = y(x)$$

Não temos a expressão de y em função de x

A regra da cadeia fornece a relação

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Se $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$ temos $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{{}^{dy}\!/_{dt}}{{}^{dx}\!/_{dt}}$

Exemplo 1

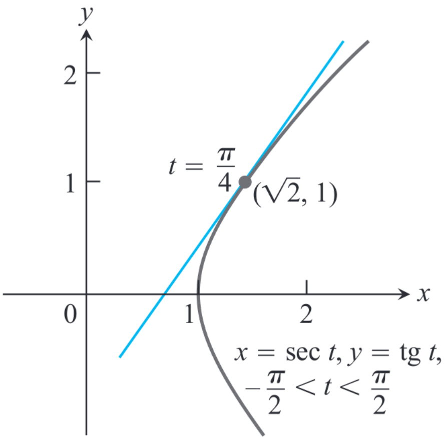
Encontre a tangente à curva

$$x = \sec(t)$$

$$y = \mathrm{tg}(t)$$

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

no ponto $\left(\sqrt{2}, 1\right)$, onde $t = \dfrac{\pi}{4}$



Exemplo 1 – Solução

Já calculamos

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{tg}(t)\sec(t) \qquad \frac{dy}{dt} = \sec^2(t)$$

Portanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sec^2(t)}{\operatorname{tg}(t)\sec(t)} = \frac{\sec(t)}{\operatorname{tg}(t)}$$

Avaliando no ponto

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/4} = \frac{\sec\left(\pi/4\right)}{\operatorname{tg}\left(\pi/4\right)} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Exemplo 1 – Solução

Equação da reta

$$y - y_0 = a(x - x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t_0} (x - x_0)$$

$$y - 1 = \sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}x - 2$$

$$y = \sqrt{2}x - 2 + 1 = \sqrt{2}x - 1$$

Equação da reta tangente

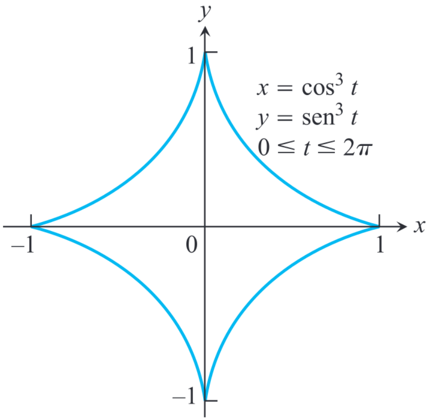
$$y = \sqrt{2}x - 1$$

Exemplo 2

Encontre uma equação para a reta tangente ao astróide

$$x = \cos^3(t) \qquad y = \operatorname{sen}^3(t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

no ponto $t = \dfrac{\pi}{6}$



Exemplo 2 – Solução

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\cos^3(t) = 3\cos^2(t)\frac{d}{dt}\cos(t) = -3\cos^2(t)\,\mathrm{sen}(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\mathrm{sen}^3(t) = 3\,\mathrm{sen}^2(t)\frac{d}{dt}\mathrm{sen}(t) = 3\,\mathrm{sen}^2(t)\cos(t)$$

Portanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{{}^{dy}/_{dt}}{{}^{dx}/_{dt}} = \frac{3\,\mathrm{sen}^2(t)\cos(t)}{-3\cos^2(t)\,\mathrm{sen}(t)} = -\frac{\mathrm{sen}(t)}{\cos(t)} = -\,\mathrm{tg}(t)$$

Avaliando no ponto

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t={}^{\pi}/_{6}} = -\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{3^{1/2}}$$

Exemplo 2 – Solução

Equação da reta

$$y - y_0 = a(x - x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t_0} (x - x_0)$$

$$x_0 = x\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3^{3/2}}{2^3}$$

$$y_0 = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3}$$

Exemplo 2 – Solução

Equação da reta

$$y - y_0 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t_0} (x - x_0)$$

$$y - \frac{1}{2^3} = \frac{-1}{3^{1/2}}\left(x - \frac{3^{3/2}}{2^3}\right) = \frac{-x}{3^{1/2}} - \frac{-1}{3^{1/2}}\frac{3^{3/2}}{2^3}$$

$$y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^3} = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{4}{8} = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$$

Equação da reta tangente

$$y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$$

Conteúdo

Fórmula Paramétrica para d^2y/dx^2

Sabemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Substituindo y por y' temos

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Exemplo 3

Encontre $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ como função de t se

$$x = t - t^2 \qquad y = t - t^3$$

Exemplo 3 – Solução

Vamos usar a fórmula $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy'/dt}{dx/dt}$

Calculando dx/dt e dy/dt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t - t^2\right) = 1 - 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t - t^3\right) = 1 - 3t^2$$

Calculando dy/dx

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
\frac{dy'}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1-3t^2}{1-2t}\right) \\
&= \frac{\frac{d}{dt}\left(1-3t^2\right)\left(1-2t\right)-\left(1-3t^2\right)\frac{d}{dt}\left(1-2t\right)}{\left(1-2t\right)^2} \\
&= \frac{\left(-6t\right)\left(1-2t\right)-\left(1-3t^2\right)\left(-2\right)}{\left(1-2t\right)^2} \\
&= \frac{\left(-6t+12t^2\right)-\left(-2+6t^2\right)}{\left(1-2t\right)^2} \\
&= \frac{2-6t+6t^2}{\left(1-2t\right)^2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2}}{1-2t} = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3}$$

Exemplo 4

Calcule $\dfrac{dy}{dx}$, em $t = 2$, para a curva paramétrica definida implicitamente

$$x^3 + 2t^2 = 9 \qquad 2y^3 - 3t^2 = 4$$

Nesse caso podemos isolar x e y

$$x = \sqrt[3]{9 - 2t^2} \qquad y = \sqrt[3]{\frac{4 + 3t^2}{2}}$$

Se não for possível?

Exemplo 4 – Solução

$$
\begin{aligned}
x^3 + 2t^2 &= 9 \\
x^3 &= 9 - 2t^2 \\
\frac{d}{dt}\left(x^3\right) &= \frac{d}{dt}\left(9 - 2t^2\right) \\
3x^2\frac{dx}{dt} &= 0 - 2 \times 2t \\
\frac{dx}{dt} &= \frac{-4t}{3x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2y^3 - 3t^2 &= 4 \\
2y^3 &= 4 + 3t^2 \\
\frac{d}{dt}\left(2y^3\right) &= \frac{d}{dt}\left(4 + 3t^2\right) \\
2 \times 3y^2\frac{dy}{dt} &= 0 + 3 \times 2t \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{6t}{6y^2} = \frac{t}{y^2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Solução

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{t}{y^2}}{\dfrac{-4t}{3x^2}} = \frac{t}{y^2}\,\frac{3x^2}{-4t} = -\frac{3x^2}{4y^2}$$

Exemplo 4 – Solução

Avaliando x_0 e y_0 no ponto $t_0 = 2$

$$
\begin{aligned}
x_0^3 + 2t_0^2 &= 9 \\
x_0^3 + 2 \times 2^2 &= 9 \\
x_0^3 + 8 &= 9 \\
x_0^3 &= 1 \\
x_0 &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2y_0^3 - 3t_0^2 &= 4 \\
2y_0^3 - 3 \times 2^2 &= 4 \\
2y_0^3 - 12 &= 4 \\
2y_0^3 &= 16 \\
y_0^3 &= 8 \\
y_0 &= 2
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Solução

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2} = -\left.\frac{3x^2}{4y^2}\right|_{t=2} = -\frac{3x_0^2}{4y_0^2} = -\frac{3\times 1^2}{4\times 2^2} = -\frac{3}{16}$$

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 11.2

1. Estudar todo o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 2, 8, 12, 16, 18, 20

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações