Máximos e Mínimos

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Extremos locais

Seja $f(x, y)$ definida em uma região R que contém o ponto (a, b)

- $f(a, b)$ é um valor máximo local de f se

  $$f(a, b) \geq f(x, y)$$

  para (x, y) do domínio em um disco aberto centrado em (a, b)

- $f(a, b)$ é um valor mínimo local de f se

  $$f(a, b) \leq f(x, y)$$

  para (x, y) do domínio em um disco aberto centrado em (a, b)

Teste da derivada de primeira ordem

Se $f(x, y)$ tiver um máximo ou mínimo local
em um ponto interior (a, b) do seu domínio

e se as derivadas de primeira ordem existirem em (a, b), então

$$f_x(a, b) = 0 \qquad f_y(a, b) = 0$$

Ponto crítico

Um Ponto Crítico de uma função $f(x, y)$

é um ponto (a, b), no interior do domínio de f, onde

$f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ $\qquad\qquad$ $\nabla f(a, b) = 0$

ou

$f_x(a, b)$ ou $f_y(a, b)$ não exista $\qquad\qquad$ $\nabla f(a, b)$ não existe

Ponto de sela

Uma função diferenciável $f(x, y)$ possui um ponto de sela em (a, b)

se em todo disco aberto centrado em (a, b)

existirem pontos (x, y) onde

$$f(x, y) > f(a, b)$$

e existirem pontos (x, y) onde

$$f(x, y) < f(a, b)$$

Exemplo 1

Encontre os pontos críticos e valores extremos locais da função

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 9$$

Exemplo 1 – Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 - 4y + 9\right) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 - 4y + 9\right) = 2y - 4$$

Exemplo 1 – Pontos críticos

As derivadas existem em todos os pontos do plano

Plano tangente horizontal

$$f_x(x, y) = 0 \qquad f_y(x, y) = 0$$

$$2x = 0 \qquad 2y - 4 = 0$$

$$x = 0 \qquad y = 2$$

Ponto critico é $(0, 2)$

Exemplo 1 – Avaliando a função

Onde a função vale

$$f(0,2) = \left(x^2 + y^2 - 4y + 9\right)\Big|_{(0,2)} = 0 + 4 - 8 + 9 = 5$$

Analisando a função percebemos que 5 é o menor valor que ela assume, portanto é um ponto de mínimo local (e nesse caso global também)

Conteúdo

Hessiana

Matriz Hessiana

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Discriminante (ou hessiano)

$$D(x, y) = \det H(x, y) \; = \; f_{xx}(x, y)\, f_{yy}(x, y) \; - \; f_{xy}^2(x, y)$$

Teste da derivada segunda

Seja $f(x, y)$ diferenciável e (a, b) um ponto crítico onde $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$

1. se $\det H(a, b) = 0$ o teste é inconclusivo
2. se $\det H(a, b) < 0$ f tem um ponto de sela em (a, b)
3. se $\det H(a, b) > 0$ testamos a derivada segunda em x (ou y)
   3.1 se $f_{xx}(a, b) < 0$ f tem um máximo local em (a, b)
   3.2 se $f_{xx}(a, b) > 0$ f tem um mínimo local em (a, b)

Conteúdo

Exemplo 2

Encontre e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

Avalie os valores extremos locais de f

Exemplo 2 – Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4\right) = y - 2x - 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4\right) = x - 2y - 2$$

Exemplo 2 – Pontos críticos

As derivadas existem em todos os pontos do plano

Buscando os pontos onde plano tangente é horizontal

Exemplo 2 – Resolvendo o sistema

$$f_x(x, y) = y - 2x - 2 = 0$$

$$f_y(x, y) = x - 2y - 2 = 0$$

$$x - 2y - 2 = 0$$

$$x = 2y + 2$$

$$y - 2x - 2 = 0$$

$$y - 2(2y + 2) - 2 = 0$$

$$y - 4y + -6 = 0$$

$$-3y = 6$$

$$y = -2$$

$$x = 2y + 2 = 2(-2) + 2 = -2$$

Ponto crítico $(-2, -2)$

Exemplo 2 – Calculando as derivadas segundas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y - 2x - 2\right) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x - 2y - 2\right) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - 2y - 2\right) = 1$$

Discriminante

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = (-2)(-2) - 1 = 3$$

$$D(-2, -2) = 3$$

Exemplo 2 – Caracterização do ponto

Como $D(-2,-2) = 3 > 0$ e $f_{xx}(-2,-2) = -2 < 0$

O ponto $(-2,-2)$ é um ponto de máximo local

O valor da função neste máximo local é

$$\begin{aligned} f(-2,-2) &= \left(xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4\right)\Big|_{(-2,-2)} \\ &= (-2)(-2) - (-2)^2 - (-2)^2 - 2(-2) - 2(-2) + 4 \\ &= 4 - 4 - 4 + 4 + 4 + 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Exemplo 3

Encontre e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$$

Avalie os valores extremos locais de f

Exemplo 3 – Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy\right) = -6x + 6y = 6y - 6x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy\right) = 6y - 6y^2 + 6x$$

Exemplo 3 – Pontos críticos

As derivadas existem em todos os pontos do plano

Buscamos os pontos onde as derivadas parciais são nulas

Exemplo 3 – Derivadas parciais

$$f_x(x, y) = 6y - 6x = 0$$

$$f_y(x, y) = 6y - 6y^2 + 6x = 0$$

$$6y - 6x = 0$$

$$x = y$$

$$6y - 6y^2 + 6x = 0$$

$$6y^2 - 6y - 6x = 0$$

$$6y^2 - 6y - 6y = 0$$

$$6y^2 - 12y = 0$$

$$6y(y - 2) = 0$$

Portanto $y = 0$ ou $y = 2$

Os pontos críticos são $(0, 0)$ e $(2, 2)$

Exemplo 3 – Derivadas segundas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(6y - 6x) = -6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(6y - 6y^2 + 6x\right) = 6-12y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(6y - 6x) = 6$$

Discriminante

$$\begin{aligned} D(x, y) &= f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) \\ &= (-6)(6 - 12y) - 6^2 \\ &= -36 + 72y - 36 \\ &= 72(y - 1) \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Analisando o ponto $(0, 0)$

Como

$$D(0,0) = 72(0-1) = -72 \ < \ 0$$

esse ponto é um ponto de sela

Exemplo 3 – Analisando o ponto $(2, 2)$

Como

$$D(2,2) = 72(2-1) = 72 > 0 \qquad f_{xx}(2,2) = -6 < 0$$

o ponto $(2, 2)$ é um máximo local com valor

$$\begin{aligned} f(2,2) &= \left(3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy\right)\Big|_{(2,2)} \\ &= 3 \times 2^2 - 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 6 \times 2 \times 2 \\ &= 12 - 16 - 12 + 24 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Exemplo 4

Seja

$$f(x, y) = e^x \cos(y)$$

encontre os pontos críticos de f e classifique-os

Exemplo 4 – Derivadas primeiras

$$f_x(x, y) = e^x \cos(y) \qquad\qquad f_y(x, y) = -e^x \operatorname{sen}(y)$$

Pontos onde as derivadas são nulas

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 0 \\ e^x \cos(y) &= 0 \\ \cos(y) &= 0 \\ y &= \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= 0 \\ -e^x \operatorname{sen}(y) &= 0 \\ \operatorname{sen}(y) &= 0 \\ y &= n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Soluções

Não existe solução simultânea

e as derivadas existem em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$,

portanto, não há pontos críticos

Exemplo 5

Seja

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

encontre os pontos críticos de f e classifique-os

Exemplo 5 – Derivadas primeiras

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x^2+y^2+1)\right) \\ &= \frac{1}{x^2+y^2+1}\,\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+1) \\ &= \frac{2x}{x^2+y^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(x^2+y^2+1)\right) \\ &= \frac{1}{x^2+y^2+1}\,\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+1) \\ &= \frac{2y}{x^2+y^2+1} \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Pontos onde as derivadas são nulas

$$
\begin{aligned}
f_x(x, y) &= 0 \\
\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
f_y(x, y) &= 0 \\
\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} &= 0 \\
y &= 0
\end{aligned}
$$

Ponto crítico $(0, 0)$

Exemplo 5 – Derivadas segundas

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}\right) \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(2x)(x^2+y^2+1) - 2x\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2} \\
&= \frac{2(x^2+y^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+y^2+1)^2} \\
&= \frac{2(y^2+1-x^2)}{(x^2+y^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 – Derivadas segundas

$$
\begin{aligned}
f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\right) \\
&= \frac{\dfrac{\partial}{\partial y}(2y)(x^2 + y^2 + 1) - 2y\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\
&= \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - 2y(2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\
&= \frac{2(x^2 + 1 - y^2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 – Derivadas segundas

$$
\begin{aligned}
f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}\right) \\
&= 2x\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 + 1\right)^{-1} \\
&= 2x\frac{-1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 + 1\right) \\
&= \frac{-2x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}(2y) \\
&= \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 – Derivadas segundas

$$f_{xx}(x, y) = \frac{2(y^2 + 1 - x^2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \qquad f_{xx}(0, 0) = 2$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{2(x^2 + 1 - y^2)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \qquad f_{yy}(0, 0) = 2$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \qquad f_{xy}(0, 0) = 0$$

Exemplo 5 – Discriminante

$$
\begin{aligned}
D(0,0) &= f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) \\
&= 2 \times 2 - 0^2 \\
&= 4 \ > \ 0
\end{aligned}
$$

$$f_{xx}(0,0) = 2 > 0$$

O ponto $(0,0)$ é um mínimo local

Exemplo 6

Seja

$$f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$$

Encontre os pontos críticos de f e classifique-os

Exemplo 6 – Derivadas primeiras

$$
\begin{aligned}
f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{-x^2-y^2}\right) \\
&= \frac{\partial x}{\partial x} e^{-x^2-y^2} + x\frac{\partial}{\partial x} e^{-x^2-y^2} \\
&= e^{-x^2-y^2} + xe^{-x^2-y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2 - y^2\right) \\
&= e^{-x^2-y^2} + xe^{-x^2-y^2}\left(-2x\right) \\
&= \left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2-y^2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 6 – Derivadas primeiras

$$\begin{aligned}
f_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{-x^2-y^2}\right) \\
&= x\frac{\partial}{\partial y}e^{-x^2-y^2} \\
&= xe^{-x^2-y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(-x^2-y^2\right) \\
&= xe^{-x^2-y^2}\left(-2y\right) \\
&= -2xye^{-x^2-y^2}
\end{aligned}$$

Exemplo 6 – Pontos críticos

As derivadas existem em todos os pontos do plano

Pontos com plano tangente horizontal

Exemplo 6 – Sistema

$$\begin{cases} f_y(x, y) = 0 \\ f_x(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 2x^2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - 2x^2)\, e^{-x^2 - y^2} = 0 \\ -2xye^{-x^2 - y^2} = 0 \end{cases}$$

$$xy = 0$$

$$x = 0 \ \text{ ou } \ y = 0$$

Exemplo 6 – Sistema

Se $x = 0$

$$\begin{aligned} f_x(0, y) &= 0 \\ 1 - 2 \times 0^2 &= 0 \\ 1 &= 0 \end{aligned}$$

Não existe solução

Se $y = 0$

$$\begin{aligned} f_x(x, 0) &= 0 \\ 1 - 2x^2 &= 0 \\ 2x^2 &= 1 \\ x &= \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Pontos críticos $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2-y^2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2-y^2} + \left(1 - 2x^2\right) \frac{\partial}{\partial x} e^{-x^2-y^2} \\
&= -4xe^{-x^2-y^2} + \left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2-y^2} \frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2 - y^2\right) \\
&= -4xe^{-x^2-y^2} + \left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2-y^2} (-2x) \\
&= \left[-4x + \left(1 - 2x^2\right)(-2x)\right] e^{-x^2-y^2} \\
&= 2x\left(2x^2 - 3\right) e^{-x^2-y^2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$
\begin{aligned}
f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-2xye^{-x^2-y^2}\right) \\
&= -2x\left(\frac{\partial y}{\partial y}e^{-x^2-y^2} + y\frac{\partial}{\partial y}e^{-x^2-y^2}\right) \\
&= -2x\left(e^{-x^2-y^2} + ye^{-x^2-y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(-x^2 - y^2\right)\right) \\
&= -2x\left(e^{-x^2-y^2} + ye^{-x^2-y^2}(-2y)\right) \\
&= -2x\left(1 - 2y^2\right) e^{-x^2-y^2} \\
&= 2x\left(2y^2 - 1\right) e^{-x^2-y^2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$
\begin{aligned}
f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2-y^2}\right) \\
&= \left(1 - 2x^2\right) \frac{\partial}{\partial y} e^{-x^2-y^2} \\
&= \left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2-y^2} \frac{\partial}{\partial y}\left(-x^2 - y^2\right) \\
&= \left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2-y^2} \left(-2y\right) \\
&= 2y\left(2x^2 - 1\right) e^{-x^2-y^2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

Derivadas segundas

$$f_{xx}(x, y) = 2x\left(2x^2 - 3\right)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{yy}(x, y) = 2x\left(2y^2 - 1\right)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = 2y\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2-y^2}$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$
\begin{aligned}
f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) &= 2\left(2x^3 - 3x\right) e^{-x^2-y^2}\Big|_{(1/\sqrt{2},0)} \\
&= 2\left(2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) e^{-(1/\sqrt{2})^2} \\
&= 2\left(\frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) e^{-1/2} \\
&= 2\frac{1-3}{\sqrt{2}} e^{-1/2} \\
&= -2\sqrt{2}e^{-1/2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$
\begin{aligned}
f_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) &= 2x\left(2y^2 - 1\right) e^{-x^2-y^2}\Big|_{(1/\sqrt{2},0)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}(-1)e^{-1/2} \\
&= -\sqrt{2}e^{-1/2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$f_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 2y\left(2x^2 - 1\right) e^{-x^2-y^2}\Big|_{\left(1/\sqrt{2},0\right)} = 0$$

Exemplo 6 – Discriminante

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) = \det H\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) &= f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) f_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) - f_{xy}^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) \\ &= \left(-2\sqrt{2}e^{-1/2}\right)\left(-\sqrt{2}e^{-1/2}\right) - 0 \\ &= 4e^{-1} = \frac{4}{e} > 0 \end{aligned}$$

$$f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) = -2\sqrt{2}e^{-1/2} < 0$$

O ponto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ é um máximo local

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$
\begin{aligned}
f_{xx}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) &= 2\left(2x^3 - 3x\right)e^{-x^2-y^2}\Big|_{(-1/\sqrt{2},0)} \\
&= 2\left(2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)e^{-(-1/\sqrt{2})^2} \\
&= 2\left(\frac{-2}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)e^{-1/2} \\
&= 2\frac{-1+3}{\sqrt{2}}e^{-1/2} \\
&= 2\sqrt{2}e^{-1/2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$
\begin{aligned}
f_{yy}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) &= 2x\left(2y^2 - 1\right) e^{-x^2-y^2}\Big|_{(-1/\sqrt{2},0)} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{2}}(-1)e^{-1/2} \\
&= \sqrt{2}e^{-1/2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 6 – Derivadas segundas

$$f_{xy}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 2y\left(2x^2 - 1\right) e^{-x^2-y^2}\Big|_{\left(-1/\sqrt{2},0\right)} = 0$$

Exemplo 6 – Discriminante

$$D\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \det H\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) = f_{xx}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) f_{yy}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) - f_{xy}^2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$= \left(2\sqrt{2}e^{-1/2}\right)\left(\sqrt{2}e^{-1/2}\right) - 0$$

$$= 4e^{-1} = \frac{4}{e} > 0$$

$$f_{xx}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 2\sqrt{2}e^{-1/2} > 0$$

O ponto $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ é um mínimo local

Exemplo 7

Considerando a função $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$

a) Calcule o gradiente de f

b) Calcule a hessiana de f

c) Encontre todos os pontos críticos de f

d) Classifique cada ponto crítico de f

Exemplo 7 – a

Precisamos das derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^3 + 3xy + y^3\right] = 3x^2 + 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^3 + 3xy + y^3\right] = 3x + 3y^2$$

então

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y \\ 3x + 3y^2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 7 – b

Precisamos das derivadas parciais de segunda ordem de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[3x^2 + 3y\right] = 6x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[3x + 3y^2\right] = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[3x + 3y^2\right] = 3$$

então

$$H = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}$$

Exemplo 7 – c

A função é um polinômio, então possui derivadas em todos os pontos do plano. Assim os pontos críticos são apenas os pontos onde as derivadas parciais são zero, $\nabla f = 0$

$$3x^2 + 3y = 0 \qquad \text{e} \qquad 3x + 3y^2 = 0$$

ou, simplificando,

$$x^2 + y = 0 \qquad \text{e} \qquad x + y^2 = 0$$

Exemplo 7 – c

Isolando y na primeira equação, $y = -x^2$, e substituindo na segunda, temos

$$
\begin{aligned}
x + y^2 &= 0 \\
x + \left(-x^2\right)^2 &= 0 \\
x + x^4 &= 0 \\
x(1 + x^3) &= 0
\end{aligned}
$$

As soluções dessa equação são $x = 0$ ou $x - 1$. Se $x = 0$ temos $y = 0$ e se $x = -1$ temos $y = -1$. Portanto, os pontos críticos são

$$(x_1, y_1) = (0, 0) \qquad \text{e} \qquad (x_2, y_2) = (-1, -1)$$

Exemplo 7 – d

Para classificar os pontos críticos precisamos avaliar o discriminante nos pontos críticos.

Exemplo 7 – d

Considerando o ponto $(x_1, y_1) = (0, 0)$

$$f_{xx}(0, 0) = 0$$

$$f_{yy}(0, 0) = 0$$

$$f_{xy}(0, 0) = 3$$

$$D_1 = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 0 \times 0 - 3^2 = -9 < 0$$

Portanto, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela.

Exemplo 7 – d

Considerando o ponto $(x_2, y_2) = (-1, -1)$

$$f_{xx}(-1, -1) = -6$$

$$f_{yy}(-1, -1) = -6$$

$$f_{xy}(-1, -1) = 3$$

$$D_2 = f_{xx}(-1, -1) f_{yy}(-1, -1) - f_{xy}^2(-1, -1) = (-6)(-6) - 3^2 = 36 - 9 = 25 > 0$$

Portanto, o ponto $(-1, -1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0$ o ponto é um ponto de máximo local.

Exemplo 8

Considerando a função $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$

a) Calcule o gradiente de f

b) Calcule a hessiana de f

c) Encontre todos os pontos críticos de f

d) Classifique cada ponto crítico de f

Exemplo 8 – a

Precisamos das derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[4xy - x^4 - y^4\right] = 4y - 4x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[4xy - x^4 - y^4\right] = 4x - 4y^3$$

então

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4y - 4x^3 \\ 4x - 4y^3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – b

Precisamos das derivadas parciais de segunda ordem de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[4y - 4x^3\right] = -12x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[4x - 4y^3\right] = -12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[4x - 4y^3\right] = 4$$

então

$$H = \begin{pmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 8 – c

A função é um polinômio, então possui derivadas em todos os pontos do plano. Assim os pontos críticos são apenas os pontos onde as derivadas parciais são zero, $\nabla f = 0$

$$4y - 4x^3 = 0 \qquad \text{e} \qquad 4x - 4y^3 = 0$$

ou, simplificando,

$$y - x^3 = 0 \qquad \text{e} \qquad x - y^3 = 0$$

Exemplo 8 – c

Isolando y na primeira equação, $y = x^3$, e substituindo na segunda, temos

$$
\begin{aligned}
x - y^3 &= 0 \\
x - \left(x^3\right)^3 &= 0 \\
x - x^9 &= 0 \\
x(1 - x^8) &= 0
\end{aligned}
$$

As soluções dessa equação são $x = 0$, $x = 1$ ou $x - 1$. Se $x = 0$ temos $y = 0$, se $x = 1$ temos $y = 1$ e se $x = -1$ temos $y = -1$. Portanto, os pontos críticos são

$$(x_1, y_1) = (0, 0), \qquad (x_2, y_2) = (1, 1) \qquad \text{e} \qquad (x_3, y_3) = (-1, -1)$$

Exemplo 8 – d

Para classificar os pontos críticos precisamos avaliar o discriminante nos pontos críticos.

Exemplo 8 – d

Considerando o ponto $(x_1, y_1) = (0, 0)$

$$f_{xx}(0,0) = 0$$

$$f_{yy}(0,0) = 0$$

$$f_{xy}(0,0) = 4$$

$$D_1 = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = 0 \times 0 - 4^2 = -16 < 0$$

Portanto, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela.

Exemplo 8 – d

Considerando o ponto $(x_2, y_2) = (1, 1)$

$$f_{xx}(1, 1) = -12$$

$$f_{yy}(1, 1) = -12$$

$$f_{xy}(1, 1) = 4$$

$$D_2 = f_{xx}(1, 1)f_{yy}(1, 1) - f_{xy}^2(1, 1) = (-12)(-12) - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

Portanto, o ponto $(1, 1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(1, 1) = -12 < 0$ o ponto é um ponto de máximo local.

Exemplo 8 – d)

Considerando o ponto $(x_3, y_3) = (-1, -1)$

$$f_{xx}(-1, -1) = -12$$

$$f_{yy}(-1, -1) = -12$$

$$f_{xy}(-1, -1) = 4$$

$$D_3 = f_{xx}(-1, -1)f_{yy}(-1, -1) - f_{xy}^2(-1, -1) = (-12)(-12) - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

Portanto, o ponto $(-1, -1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(-1, -1) = -12 < 0$ o ponto é um ponto de máximo local.

Exemplo 9

Considerando a função $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$

a) Calcule o gradiente de f

b) Calcule a hessiana de f

c) Encontre todos os pontos críticos de f

d) Classifique cada ponto crítico de f

Exemplo 9 – a

Precisamos das derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^4 + y^4 + 4xy\right] = 4x^3 + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^4 + y^4 + 4xy\right] = 4y^3 + 4x$$

então

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x^3 + 4y \\ 4y^3 + 4x \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – b

Precisamos das derivadas parciais de segunda ordem de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[4x^3 + 4y\right] = 12x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[4y^3 + 4x\right] = 12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[4y^3 + 4x\right] = 4$$

então

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 & 4 \\ 4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 – c

A função é um polinômio, então possui derivadas em todos os pontos do plano. Assim os pontos críticos são apenas os pontos onde as derivadas parciais são zero, $\nabla f = 0$

$$4x^3 + 4y = 0 \qquad \text{e} \qquad 4y^3 + 4x = 0$$

ou, simplificando,

$$x^3 + y = 0 \qquad \text{e} \qquad y^3 + x = 0$$

Exemplo 9 – c

Isolando y na primeira equação, $y = -x^3$, e substituindo na segunda, temos

$$y^3 + x = 0$$

$$\left(-x^3\right)^3 + x = 0$$

$$-x^9 + x = 0$$

$$x^9 - x = 0$$

$$x(x^8 - 1) = 0$$

As soluções dessa equação são $x = 0$, $x = 1$ ou $x - 1$. Se $x = 0$ temos $y = 0$, se $x = 1$ temos $y = -1$ e se $x = -1$ temos $y = 1$. Portanto, os pontos críticos são

$$(x_1, y_1) = (0, 0), \qquad (x_2, y_2) = (1, -1) \qquad \text{e} \qquad (x_3, y_3) = (-1, 1)$$

Exemplo 9 – d

Para classificar os pontos críticos precisamos avaliar o discriminante nos pontos críticos.

Exemplo 9 – d

Considerando o ponto $(x_1, y_1) = (0, 0)$

$$f_{xx}(0, 0) = 0$$

$$f_{yy}(0, 0) = 0$$

$$f_{xy}(0, 0) = 4$$

$$D_1 = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 0 \times 0 - 4^2 = -16 < 0$$

Portanto, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela.

Exemplo 9 – d

Considerando o ponto $(x_2, y_2) = (1, -1)$

$$f_{xx}(1, -1) = 12$$

$$f_{yy}(1, -1) = 12$$

$$f_{xy}(1, -1) = 4$$

$$D_2 = f_{xx}(1, -1)f_{yy}(1, -1) - f_{xy}^2(1, -1) = 12 \times 12 - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

Portanto, o ponto $(1, -1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(1, -1) = 12 > 0$ o ponto é um ponto de mínimo local.

Exemplo 9 – d

Considerando o ponto $(x_3, y_3) = (-1, 1)$

$$f_{xx}(-1,1) = 12$$

$$f_{yy}(-1,1) = 12$$

$$f_{xy}(-1,1) = 4$$

$$D_3 = f_{xx}(-1,1)f_{yy}(-1,1) - f_{xy}^2(-1,1) = 12 \times 12 - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

Portanto, o ponto $(-1, 1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(-1,1) = 12 > 0$ o ponto é um ponto de mínimo local.

Conteúdo

Lista mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.7

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 2, 9, 11, 21, 23, 24, 25, 27

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações