Coordenadas Polares

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r}$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{y}{x}$$

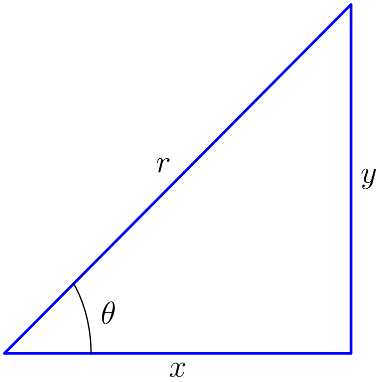


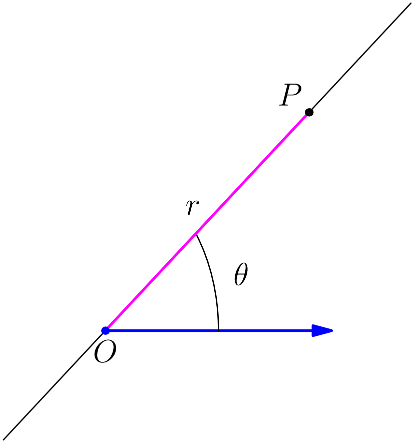
Tabela de Seno, Cosseno e Tangente

Graus	Radianos	$\operatorname{sen}(\theta)$	$\cos(\theta)$	$\operatorname{tg}(\theta)$
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	$\nexists$

Conteúdo

Coordenadas Polares

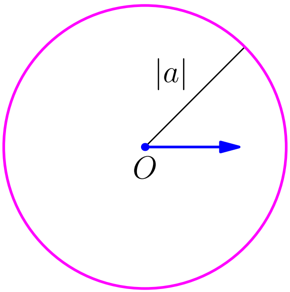
- Origem ou polo
- Raio inicial
- θ ângulo orientado
  partindo do raio inicial
  (em radianos) $\theta \in \mathbb{R}$
- r distância orientada
  partindo da origem, $r \in \mathbb{R}$
- Coordenadas polares (r, θ)



Equações em Coordenadas Polares

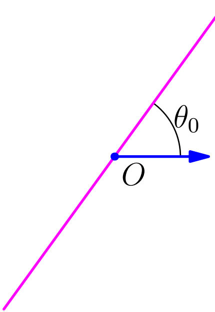
$r = a \qquad a \neq 0$

Circulo centrado na origem e raio $|a|$



$\theta = \theta_0$

Reta passando pela origem



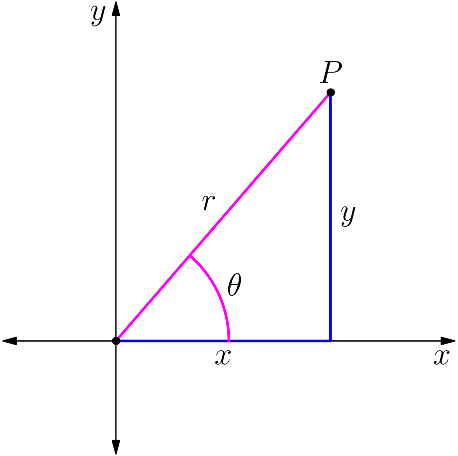
Relação Entre Coordenadas Polares e Cartesianas

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\,\text{sen}(\theta)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$$



Conteúdo

Exemplo 1

Encontre todas as coordenadas polares associadas ao ponto $(r, \theta) = \left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$

Exemplo 1 – Solução

O ponto $(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ também pode ser escrito como

$$(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ou

$$(r, \theta) = \left(-2, -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Exemplo 2

Converta as seguintes coordenadas cartesianas em coordenadas polares (r, θ)

a) $(x, y) = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$

b) $(x, y) = (3, 4)$

c) $(x, y) = (0, -5)$

Apresente as coordenadas com os valores "mais simples"

Exemplo 2 – Solução Item a

$$(x, y) = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$$

$$r^2 \ = \ x^2 + y^2 \ = \ (-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \ = \ 4 + 4 \times 3 \ = \ 16$$

$$r = \pm 4$$

$$\operatorname{tg}\theta \ = \ \frac{y}{x} \ = \ \frac{2\sqrt{3}}{-2} \ = \ -\sqrt{3}$$

$$\theta \ = \ \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) \pm n\pi \ = \ -\frac{\pi}{3} \pm n\pi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$(r, \theta) \ = \left(4, -\frac{\pi}{3} + \pi\right) \ = \left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$$

Exemplo 2 – Solução Item a – Alternativa

$$(x, y) = \left(-2, 2\sqrt{3}\right) \qquad r = 4$$

Podemos determinar θ resolvendo o sistema

$$\begin{cases} r\cos(\theta) = x \\ r\,\mathrm{sen}(\theta) = y \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\cos(\theta) = -2 \\ 4\,\mathrm{sen}(\theta) = 2\sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\theta) = -\dfrac{1}{2} \\ \mathrm{sen}(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Como $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \\ \mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\quad \theta = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} \quad (r, \theta) = \left(4, \dfrac{2\pi}{3}\right)$

Exemplo 2 – Solução Item b

$$(x, y) = (3, 4)$$

$$r^2 \;=\; x^2 + y^2 \;=\; 3^2 + 4^2 \;=\; 9 + 16 \;=\; 25 \qquad\qquad r = \pm 5$$

$$\operatorname{tg}\theta \;=\; \frac{y}{x} \;=\; \frac{4}{3}$$

$$\theta \;=\; \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) \pm n\pi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$(r, \theta) = \left(5, \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$$

Exemplo 2 – Solução Item c

$$(x, y) = (0, -5)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = 0^2 + 5^2 = 25 \qquad r = \pm 5$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{0} \quad \nexists$$

$$\begin{cases} r\cos(\theta) = x \\ r\,\mathrm{sen}(\theta) = y \end{cases} \qquad \begin{cases} 5\cos(\theta) = 0 \\ 5\,\mathrm{sen}(\theta) = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\theta) = 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) = -1 \end{cases}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \pm 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$(r, \theta) = \left(5, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Exemplo 3

Converta as coordenadas polares em coordenadas cartesianas (x, y)

a) $(r, \theta) = \left(4, \dfrac{\pi}{6}\right)$

b) $(r, \theta) = \left(3, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

c) $(r, \theta) = (5, \pi)$

Exemplo 3 – Solução Item a

$$x = r\cos(\theta) = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta) = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\frac{1}{2} = 2$$

$$(x, y) = \left(2\sqrt{3}, 2\right)$$

Exemplo 3 – Solução Item b

$$x = r\cos(\theta) = 3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-3\sqrt{2}}{2} = \frac{-3}{\sqrt{2}}$$

$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta) = 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$(x, y) = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

Exemplo 3 – Solução Item c

$$x = r\cos(\theta) = 5\cos(\pi) = 5(-1) = -5$$

$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta) = 5\,\mathrm{sen}(\pi) = 0$$

$$(x, y) = (-5, 0)$$

Exemplo 4

Encontre a equação polar para o círculo $x^2 + (y - 3)^2 = 9$

Exemplo 4 – Solução

Escrevendo a equação em coordenadas polares

$$
\begin{aligned}
x^2 + (y-3)^2 &= 9 \\
x^2 + y^2 - 6y + 3^2 &= 9 \\
x^2 + y^2 - 6y &= 0 \\
r^2 - 6r\,\mathrm{sen}(\theta) &= 0 \\
r\big(r - 6\,\mathrm{sen}(\theta)\big) &= 0
\end{aligned}
$$

Portanto

$$r = 0 \qquad \text{ou} \qquad r = 6\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Exemplo 5

Escreva a equação

$$r = \frac{4}{2\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta)}$$

em coordenadas cartesianas e identifique seu gráfico

Exemplo 5 – Solução

Sabemos que $x = r\cos(\theta) \quad y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{4}{2\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta)} \\
r\left(2\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta)\right) &= 4 \\
2r\cos(\theta) - r\,\mathrm{sen}(\theta) &= 4 \\
2x - y &= 4 \\
y &= 2x - 4
\end{aligned}
$$

O gráfico é uma reta

Exemplo 6

Mostre que a equação polar

$$r = \frac{4}{2 - \cos\theta}$$

representa uma cônica

Exemplo 6 – Solução

$$r = \frac{4}{2-\cos\theta}$$

$$(2-\cos\theta)\, r = 4$$

$$(2r - r\cos\theta) = 4$$

$$2r - x = 4$$

$$2r = 4 + x$$

$$4r^2 = (4+x)^2$$

$$4\left(x^2 + y^2\right) = 16 + 8x + x^2$$

$$4x^2 + 4y^2 - 8x - x^2 = 16$$

$$3x^2 + 4y^2 - 8x = 16$$

Exemplo 7

Escreva a equação

$$r = 2\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta)$$

em coordenadas cartesianas e simplifique

Exemplo 7 – Solução

Sabemos que

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{y}{r} \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$r = 2\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta)$$

$$r = 2\frac{x}{r} - \frac{y}{r}$$

$$r = \frac{2x - y}{r}$$

$$r^2 = 2x - y$$

$$x^2 + y^2 = 2x - y$$

$$x^2 + y^2 - 2x + y = 0$$

Exemplo 8

Escreva a equação

$$r = \frac{5}{\operatorname{sen}(\theta) - 2\cos(\theta)}$$

em coordenadas cartesianas e simplifique

Exemplo 8 – Solução

Sabemos que

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned}
r &= \frac{5}{\mathrm{sen}(\theta) - 2\cos(\theta)} \\
r\left(\mathrm{sen}(\theta) - 2\cos(\theta)\right) &= 5 \\
r\,\mathrm{sen}(\theta) - 2r\cos(\theta) &= 5 \\
y - 2x &= 5 \\
y &= 2x + 5
\end{aligned}$$

Exemplo 9

Escreva a equação

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

em coordenadas polares e simplifique

Exemplo 9 – Solução

Sabemos que

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned}
x^2 + xy + y^2 &= 1 \\
x^2 + y^2 + xy &= 1 \\
r^2 + r\cos\theta\, r\,\mathrm{sen}\,\theta &= 1 \\
r^2 + r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta &= 1 \\
r^2\left(1 + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right) &= 1
\end{aligned}$$

$$r = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}}$$

Exemplo 9 – Solução Alternativa

$$
\begin{aligned}
r^2\left(1+\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right) &= 1 \\
r^2\left(1+\frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{2}\right) &= 1 \\
r^2\left(2+\mathrm{sen}(2\theta)\right) &= 2
\end{aligned}
$$

$$
r = \frac{\pm 2}{\sqrt{2+\mathrm{sen}(2\theta)}}
$$

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 11.3

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 1, 2, 6, 7, 11-15, 27-31, 53-57, 68

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações