Limites de Funções de Várias Variáveis

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

https://material-didatico.github.io/cfvv1

23 de agosto de 2025

Conteúdo

Definição

Uma função $f\colon R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\quad f(x,y)\,,$

se aproxima do limite L a medida que (x,y) se aproxima de (x_0,y_0)

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo (x,y) no domínio de f

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta(\varepsilon)$$

Obs: (x_0,y_0) não precisa estar no domínio de f

Notação

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

$$f(x,y) \to L \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (x_0,y_0)$$

Conteúdo

Teorema – Unicidade do Limite

Se uma função $f(x, y)$ possui um limite L

quando (x, y) se aproxima de (x_0, y_0),

então L é único

Teorema – Propriedades dos limites de várias variáveis

As propriedades a seguir são verdadeiras se

- L, M e k forem números reais
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = M$

Regra da Soma e Diferença

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)+g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L+M$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)-g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) - \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L-M$$

Regra da Multiplicação por Constante e do Produto

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [kf(x,y)] = k \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = kL$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)g(x,y)] = \left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right]\left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\right] = LM$$

Regra do Quociente (Divisão)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \right] = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)} = \frac{L}{M}$$

Desde que $M \neq 0$

Regra da Potência e da Raiz

Para n inteiro positivo

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^n = \left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right]^n = L^n$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)} = \sqrt[n]{L}$$

Se n for par L precisa ser positivo

Conteúdo

Exemplo 1

Calcule os limites

1. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} k$
2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x$
3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y$
4. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} xy$

Respostas

1. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} k = k$
2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$
3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$
4. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} xy = ab$

Exemplo 2

Calcule o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3}$, se ele existir

Assumindo que todos os limites necessários para aplicar as propriedades existam

(Isso pode não ser verdade)

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} &= \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} (x - xy + 3)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} (x^2y + 5xy - y^3)} \\
&= \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} x - \lim_{(x,y)\to(0,1)} xy + \lim_{(x,y)\to(0,1)} 3}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} x^2y + \lim_{(x,y)\to(0,1)} 5xy - \lim_{(x,y)\to(0,1)} y^3} \\
&= \frac{0 - 0 \times 1 + 3}{0^2 \times 1 + 5 \times 0 \times 1 - 1^3} \\
&= \frac{3}{-1} = -3
\end{aligned}$$

Exemplo 3

Calcule o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ se ele existir

Assumindo que todos os limites necessários para aplicar as propriedades existam

(Isso pode não ser verdade)

Exemplo 3 – Solução

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 - xy\right)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 - \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x} - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{y}}$$

$$= \frac{0 - 0}{0 - 0} = \frac{0}{0} = 1$$

Não existe divisão por zero !!!

Exemplo 3 – Solução

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 - xy\right)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 - \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x} - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{y}}$$

$$= \frac{0 - 0}{0 - 0} = \frac{0}{0} \qquad \nexists$$

Então o limite não existe?

Exemplo 3 – Solução

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 - xy\right)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 - \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x} - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{y}}$$

$$= \frac{0 - 0}{0 - 0} = \frac{0}{0}$$

Não podemos aplicar a propriedade do quociente

Precisamos remover a indeterminação

Exemplo 3 – Solução

Ao calcular o limite consideramos apenas os pontos dentro do domínio da função

Para $x \neq y$

$$\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(x^2 - xy)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}$$

$$= \frac{x\,(x - y)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}{x - y}$$

$$= x\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$$

Exemplo 3 – Solução

Calculando o limite

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \\
&= \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\right)\left[\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x}\right) + \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{y}\right)\right] \\
&= 0\left(\sqrt{0} + \sqrt{0}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Exemplo 4

Analise o limite de $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$ quando (x, y) se aproxima de $(0, 0)$

A reta $x = 0$ não faz parte do domínio de f

O ponto $(0, 0)$ não está no domínio de f

Não podemos usar as propriedades diretamente

Não existe manipulação que remova a indeterminação

Exemplo 4 – Solução

Analisando f sobre a reta $y = x$

$$f(x,y)\Big|_{y=x} = f(x,x) = \frac{x}{x} = 1 \qquad \text{pois } x = 0 \text{ não está no domínio de } f$$

Analisando f sobre a reta $y = 0$

$$f(x,y)\Big|_{y=0} = f(x,0) = \frac{0}{x} = 0 \qquad \text{pois } x = 0 \text{ não está no domínio de } f$$

O que vai acontecer com outas retas da forma $y = ax$?

Exemplo 4 – Solução

Para qualquer $\delta > 0$ sempre vai existir um

ponto da forma (x, x) e um ponto da forma $(x, 0)$

dentro da bola de raio δ de centro em $(0, 0)$

Nenhum valor L atende as condições da definição de limite

O limite não existe

Conteúdo

Teste dos Dois Caminhos

Se $f(x, y)$ tem limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes,

no domínio de f, quando (x, y) se aproxima de (x_0, y_0),

então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) \quad \text{não existe}$$

Conteúdo

Exemplo 5

Verifique se a função $f(x, y) = \dfrac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$ possui limite na origem.

O limite na origem leva a uma indeterminação do tipo $^0/_0$

Exemplo 5 – Solução

Fazendo $y = mx$, para $m \neq 0$ e $x \neq 0$, temos

$$f(x,y)\Big|_{y=mx} = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}\Big|_{y=mx} = \frac{2mx^3}{x^4+m^2x^2} = \frac{2mx\,x^2}{\left(x^2+m^2\right)x^2} = \frac{2mx}{x^2+m^2}$$

Calculando o limite $x \to 0$, que corresponde a $(x,y) \to (0,0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2mx}{x^2+m^2} = \frac{0}{m^2} = 0 \qquad \forall m$$

Portanto, $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{x^4+y^2} = 0$ **Falso!**

Exemplo 5 – Solução

Fazendo $y = kx^2$, para $k \neq 0$ e $x \neq 0$, temos

$$f(x,y)\Big|_{y=kx^2} = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}\Big|_{y=kx^2} = \frac{2kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{2kx^4}{\left(1+k^2\right)x^4} = \frac{2k}{1+k^2}$$

Para cada valor de k, a função f se aproxima da origem com um valor diferente

Portanto, o limite não existe

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.2

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 4-6, 13-15, 18, 26, 55

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações