Convergência das Séries de Taylor

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Polinômios e Séries de Taylor

Se f é k-derivável, em $x = a$, temos o Polinômio de Taylor

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Se f é infinitamente derivável, em $x = a$, temos a Série de Taylor

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Questões

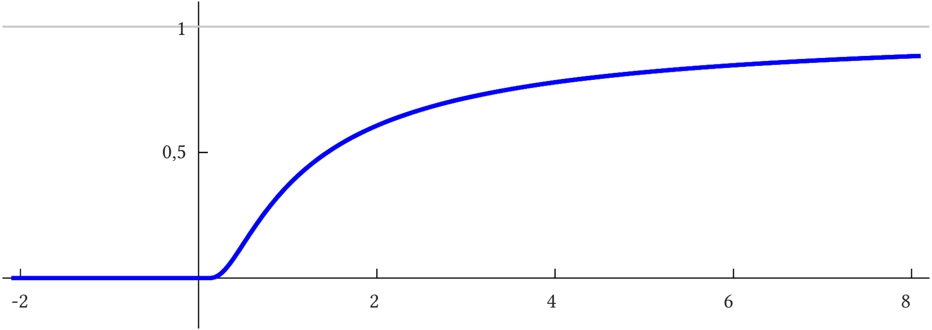
- Quão próximo o polinômio $P_k(x)$ está da função $f(x)$?
- A série converge, isso é, $S(x)$ existe?
- Se $S(x)$ existe, qual sua relação com $f(x)$?

Contraexemplo

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-1/x} & x > 0 \end{cases}$$

Contraexemplo



Contraexemplo

Suas derivadas em $x = 0$ são zero

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Sua Série de Taylor converge para

$$T(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Conteúdo

Teorema de Taylor

Sejam

- $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ uma função com $n+1$ derivadas contínuas em $\mathcal{I}$
- $a, x \in \mathcal{I}$

Então existe c entre a e x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad \text{onde} \qquad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$R_n(x)$ é o Resto (ou Erro) de Ordem n

Convergência da Série de Taylor

Se $R_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$ para todo $x \in \mathcal{I}$

A Série de Taylor de f converge para f no intervalo $\mathcal{I}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Uma função igual a sua Série de Taylor é chamada Analítica

Estimativa de Erro

Se existir M tal que $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq M$ para todo t entre x e a, inclusive

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \leq M\,\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Conteúdo

Exemplo 1

Estimar o erro ao aproximar e^x, no intervalo $[-1, 1]$, por seu Polinômio de Taylor centrado em zero

Exemplo 1

Série de Taylor da exponencial

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Erro após a soma de n termos, $P_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Para algum c entre zero e x

Exemplo 1

Não temos como saber o valor de c, mas sabemos que

$$f^{(n+1)}(c) = e^c \leq e \qquad \text{pois} \quad c \leq 1$$

Portanto

$$|R_n(x)| < e\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}$$

Exemplo 2

Mostre que a Série de Taylor de e^x converge para a e^x para todo $x \in [-1, 1]$

Exemplo 2

Verificamos que para qualquer $x \in [-1, 1]$

$$|R_n(x)| < \frac{e}{(n+1)!} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e}{(n+1)!} = 0$$

O Teorema do Confronto garante que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

A Série de Taylor da exponencial converge para a exponencial para $x \in [-1, 1]$

Exemplo 3

Mostre que a Série de Taylor de e^x converge para a e^x para todo $x \in \mathbb{R}$

Sabemos que $f^{(n+1)}(c) = e^c$ para c entre x e 0

Se $x > 0$, $c \in [0, x]$ e $f^{(n+1)}(c) = e^c \leq e^x$

Se $x < 0$, $c \in [x, 0]$ e $f^{(n+1)}(c) = e^c \leq e^0 \leq e^{|x|}$

Portanto

$$\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq e^{|x|} \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Exemplo 3

Para qualquer $x \in \mathbb{R}$

$$|R_n(x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^{|x|}|x|^{n+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$$

o Teorema do Confronto garante que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

A Série de Taylor da exponencial converge para a exponencial para $x \in \mathbb{R}$

Exemplo 4

Mostre que a Série de Taylor de $\cos(x)$ centrada em zero converge para a $\cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Exemplo 4

Série de Taylor da função $\cos(x)$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Erro após a soma de n termos, $P_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Para algum c entre zero e x

Exemplo 4

Sabemos que

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \cos(x) = \begin{cases} \pm \operatorname{sen}(x) & \text{ou} \\ \pm \cos(x) \end{cases}$$

Portanto

$$\left| f^{(n+1)}(c) \right| \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Exemplo 4

Assim

$$|R_n(x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

o Teorema do Confronto garante que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

A Série de Taylor do cosseno converge para o cosseno para $x \in \mathbb{R}$

Exemplo 5

Qual o grau do Polinômio de Taylor necessário para aproximar $\cos(x)$ no intervalo $[-1, 1]$ com erro menor do que 10^{-6}

Exemplo 5

Já verificamos que

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Como $x \in [-1, 1]$

$$|R_n(x)| \leq \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Precisamos que

$$\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

$$(n+1)! > 10^{6}$$

Como $10! = 3\,628\,800$ temos

$$n = 9$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 8.2 da Apostila

Exercício: 2

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações