

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [20] Calcule $\frac{\partial z}{\partial u} \left(2, \frac{\pi}{4} \right)$ sabendo que $z = 4e^{x \ln(y)}$, $x = \ln(u \cos(v))$ e $y = u \sin(v)$.

Vamos usar a regra da cadeia

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Calculando as derivadas necessárias

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(4e^{x \ln(y)} \right) = 4e^{x \ln(y)} \frac{\partial}{\partial x} (x \ln(y)) = 4e^{x \ln(y)} \ln(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(4e^{x \ln(y)} \right) = 4e^{x \ln(y)} \frac{\partial}{\partial y} (x \ln(y)) = 4e^{x \ln(y)} \frac{x}{y} = \frac{4x}{y} e^{x \ln(y)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (\ln(u \cos(v))) = \frac{1}{u \cos(v)} \frac{\partial}{\partial u} (u \cos(v)) = \frac{1}{u \cos(v)} \cos(v) = \frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (u \sin(v)) = \sin(v)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= 4e^{x \ln(y)} \ln(y) \times \frac{1}{u} + \frac{4x}{y} e^{x \ln(y)} \times \sin(v) \\ &= 4e^{x \ln(y)} \left(\frac{\ln(y)}{u} + \frac{\sin(v)}{y} \right) \end{aligned}$$

Avaliando no ponto $(u, v) = \left(2, \frac{\pi}{4} \right)$

$$x \left(2, \frac{\pi}{4} \right) = (\ln(u \cos(v))) \Big|_{(2, \frac{\pi}{4})} = \ln \left(2 \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) = \ln \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \ln(\sqrt{2})$$

$$y \left(2, \frac{\pi}{4} \right) = (u \sin(v)) \Big|_{(2, \frac{\pi}{4})} = 2 \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 4e^{x \ln(y)} \left(\frac{\ln(y)}{u} + \frac{\sin(v)}{y} \right) \Big|_{(2, \frac{\pi}{4})}$$

$$= 4 \exp \left[\ln \left(\sqrt{2} \right) \ln \left(\sqrt{2} \right) \right] \left[\frac{\ln \left(\sqrt{2} \right)}{2} + \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2}} \right]$$

$$= 4 \exp \left[\left(\ln \sqrt{2} \right)^2 \right] \left[\frac{\ln \left(\sqrt{2} \right)}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \right]$$

$$= 4e^{\ln^2 \sqrt{2}} \left[\frac{\ln \left(\sqrt{2} \right) + 1}{2} \right]$$

$$= 2 \left(\ln \sqrt{2} + 1 \right) e^{\ln^2 \sqrt{2}}$$

2 [25] Calcule a derivada da função $f(x, y, z) = 3e^x \cos(yz)$ na direção $v = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ no ponto $(0, 0, 0)$.

Precisamos do vetor unitário na direção do vetor

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{9}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Precisamos também do gradiente de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3e^x \cos(yz)) = 3e^x \cos(yz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3e^x \cos(yz)) = -3e^x z \sin(yz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (3e^x \cos(yz)) = -3e^x y \sin(yz)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3e^x \cos(yz) \\ -3e^x z \sin(yz) \\ -3e^x y \sin(yz) \end{pmatrix}$$

Avaliando o gradiente no ponto $(0, 0, 0)$

$$\nabla f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 3e^x \cos(yz) \\ -3e^x z \sin(yz) \\ -3e^x y \sin(yz) \end{pmatrix} \Big|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 3e^0 \cos(0) \\ -3e^0 0 \sin(0) \\ -3e^0 0 \sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Derivada direcional

$$D_u = u \cdot \nabla f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} 3 + 0 + 0 = 2$$

3 [25] Encontre o plano tangente ao gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4$ no ponto $(2, -3)$.

A equação do plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(2, -3)$ é

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$$f_x(2, -3)(x - 2) + f_y(2, -3)(y + 3) - (z - z_0) = 0$$

Calculando as derivadas parciais

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4) = 2x - 2y - 1$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4) = 2y - 2x + 3$$

Avaliando no ponto $(2, -3)$

$$\begin{aligned} z_0 &= f(2, -3) \\ &= (x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4) \Big|_{(2, -3)} \\ &= 2^2 + (-3)^2 - 2(2)(-3) - 2 + 3(-3) + 4 \\ &= 4 + 9 + 12 - 2 - 9 + 4 \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$f_x(2, -3) = (2x - 2y - 1) \Big|_{(2, -3)} = 2(2) - 2(-3) - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$$

$$f_y(2, -3) = (2y - 2x + 3) \Big|_{(2, -3)} = 2(-3) - 2(2) + 3 = -6 - 4 + 3 = -7$$

Portanto, a equação do plano tangente é

$$f_x(2, -3)(x - 2) + f_y(2, -3)(y + 3) - (z - z_0) = 0$$

$$9(x - 2) - 7(y + 3) - (z - 18) = 0$$

$$9x - 18 - 7y - 21 - z + 18 = 0$$

$$9x - 7y - z = 21$$

4 [30] Considerando a função $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

- a) [5] Calcule o gradiente de f .
- b) [5] Calcule a hessiana de f .
- c) [10] Encontre todos os pontos críticos de f .
- d) [10] Classifique cada ponto crítico de f .

a)

Precisamos das derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [4xy - x^4 - y^4] = 4y - 4x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [4xy - x^4 - y^4] = 4x - 4y^3$$

então

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4y - 4x^3 \\ 4x - 4y^3 \end{pmatrix}$$

b)

Precisamos das derivadas parciais de segunda ordem de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} [4y - 4x^3] = -12x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [4x - 4y^3] = -12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} [4x - 4y^3] = 4$$

então

$$H = \begin{pmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

c)

A função é um polinômio, então possui derivadas em todos os pontos do plano. Assim os pontos críticos são apenas os pontos onde as derivadas parciais são zero, $\nabla f = 0$

$$4y - 4x^3 = 0 \quad \text{e} \quad 4x - 4y^3 = 0$$

ou, simplificando,

$$y - x^3 = 0 \quad \text{e} \quad x - y^3 = 0$$

Isolando y na primeira equação, $y = x^3$, e substituindo na segunda, temos

$$x - y^3 = 0$$

$$x - (x^3)^3 = 0$$

$$x - x^9 = 0$$

$$x(1 - x^8) = 0$$

As soluções dessa equação são $x = 0$, $x = 1$ ou $x = -1$. Se $x = 0$ temos $y = 0$, se $x = 1$ temos $y = 1$ e se $x = -1$ temos $y = -1$. Portanto, os pontos críticos são

$$(x_1, y_1) = (0, 0), \quad (x_2, y_2) = (1, 1) \quad \text{e} \quad (x_3, y_3) = (-1, -1)$$

d)

Para classificar os pontos críticos precisamos avaliar o discriminante nos pontos críticos.

Considerando o ponto $(x_1, y_1) = (0, 0)$

$$f_{xx}(0, 0) = 0$$

$$f_{yy}(0, 0) = 0$$

$$f_{xy}(0, 0) = 4$$

$$D_1 = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 0 \times 0 - 4^2 = -16 < 0$$

Portanto, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela.

Considerando o ponto $(x_2, y_2) = (1, 1)$

$$f_{xx}(1, 1) = -12$$

$$f_{yy}(1, 1) = -12$$

$$f_{xy}(1, 1) = 4$$

$$D_2 = f_{xx}(1, 1)f_{yy}(1, 1) - f_{xy}^2(1, 1) = (-12)(-12) - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

Portanto, o ponto $(1, 1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(1, 1) = -12 < 0$ o ponto é um ponto de máximo local.

Considerando o ponto $(x_3, y_3) = (-1, -1)$

$$f_{xx}(-1, -1) = -12$$

$$f_{yy}(-1, -1) = -12$$

$$f_{xy}(-1, -1) = 4$$

$$D_3 = f_{xx}(-1, -1)f_{yy}(-1, -1) - f_{xy}^2(-1, -1) = (-12)(-12) - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

Portanto, o ponto $(-1, -1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(-1, -1) = -12 < 0$ o ponto é um ponto de máximo local.