Áreas entre Curvas

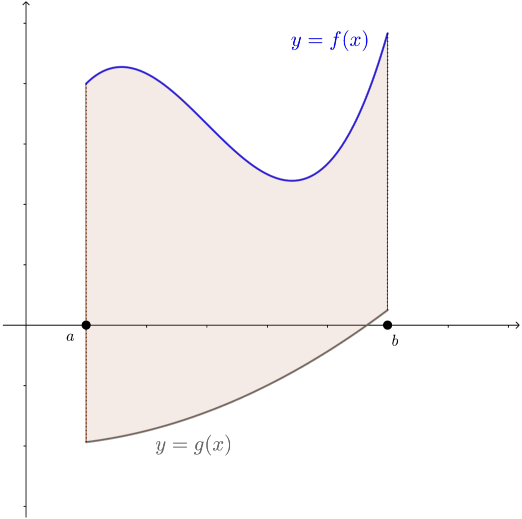
Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Área entre Curvas



Definição: Área entre Curvas

A área da região limitada pelas curvas e retas

$$y = f(x) \qquad y = g(x) \qquad x = a \qquad x = b$$

onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, é

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$$

Passo a Passo

1. Identificar a região
2. Dividir a região se necessário
3. Identificar qual é a função maior em cada parte da região
4. Montar a integral definida que representa a área de cada parte
5. Calcular as integrais definidas
6. Somar os resultados

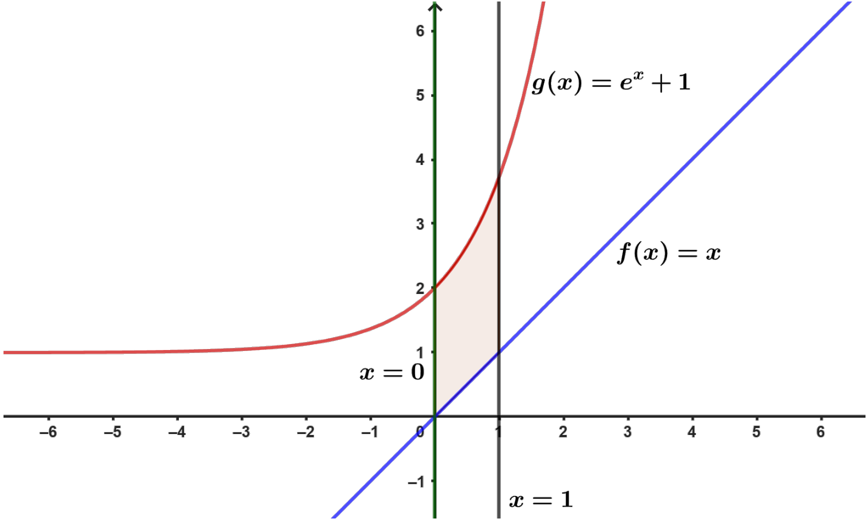
Conteúdo

Exemplo – 1

Exemplo 1

Encontre a área da região limitada abaixo por $f(x) = x$,
acima por $g(x) = e^x + 1$ e nos lados pelas retas $x = 0$ e $x = 1$

Exemplo 1 – Interpretação



Exemplo 1 – Resolução

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 g(x) - f(x)dx \\
&= \int_0^1 e^x + 1 - x\,dx \\
&= \left(e^x + x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 && \text{TFC 2} \\
&= \left(e + 1 - \frac{1}{2}\right) - \left(e^0 + 0 - \frac{0}{2}\right) \\
&= e - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exemplo – 2

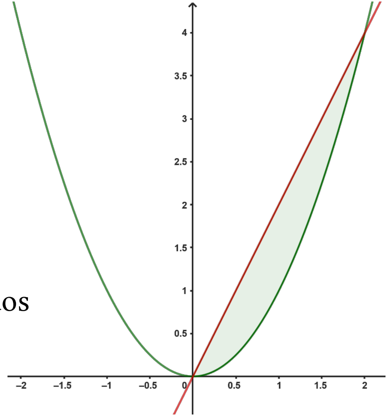
Exemplo 2

Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2x$

Exemplo 2 – Interpretação

Observe que:

- a curva $y = x^2$ é uma parábola
- a curva $y = 2x$ é uma reta que passa pela origem
- $y = 2x$ está "por cima"
- $y = x^2$ está "por baixo"
- os extremos do intervalo precisam ser determinados



Exemplo 2 – Resolução

Precisamos encontrar os pontos de intersecção das curvas

$$\begin{aligned} x^2 &= 2x \\ x^2 - 2x &= 0 \\ x(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

Soluções: $x = 0$ e $x = 2$

Exemplo 2 – Resolução

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^2 2x - x^2 \, dx \\
&= \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^2 \\
&= \left(4 - \frac{8}{3} \right) - \left(0 - \frac{0}{3} \right) \\
&= \frac{12 - 8}{3} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Exemplo – 3

Exemplo 3

Calcular a área da região delimitada pelas curvas

$$y = -x^2 + 3x + 2$$

e

$$y = x^2 - 3$$

Exemplo 3 – Interpretação

$y = -x^2 + 3x + 2$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo

Vértice

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(-1)2 = 9 + 8 = 17$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(-1)} = \frac{3}{2} \qquad y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{17}{4}$$

Raízes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$$

Intercepta o eixo y no ponto $(0, 2)$

Exemplo 3 – Interpretação

$y = x^2 - 3$ é uma parábola com concavidade voltada para cima

Vértice

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 12$$

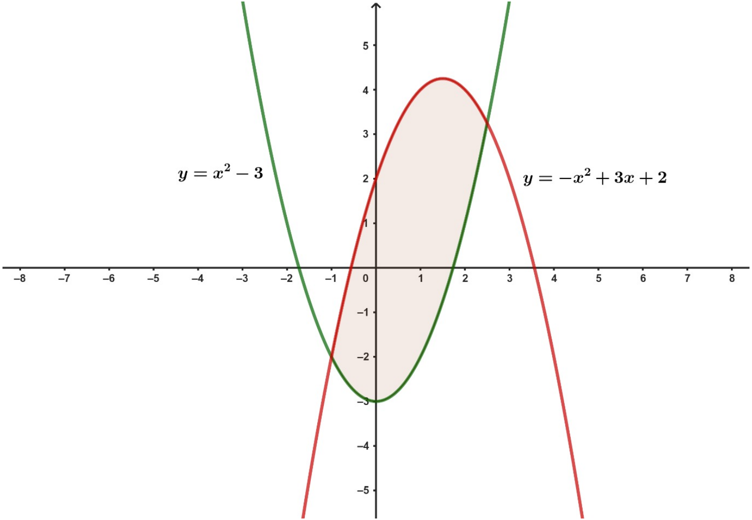
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0 \qquad y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-12}{4} = -3$$

Raízes

$$x_1 = \frac{-\sqrt{12}}{2} = \frac{-\sqrt{4}\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \qquad x_2 = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$$

Intercepta o eixo y no ponto $(0, -3)$

Exemplo 3 – Interpretação



Exemplo 3 – Resolução

Pontos de intersecção

$$-x^2 + 3x + 2 = x^2 - 3$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 9 + 40 = 49$$

Soluções

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{3 - 7}{4} = -1 \qquad x_2 = \frac{3 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{3 + 7}{4} = \frac{5}{2}$$

Exemplo 3 – Resolução

$$A = \int_{-1}^{5/2} \left(-x^2 + 3x + 2\right) - \left(x^2 - 3\right)\ dx$$

$$= \int_{-1}^{5/2} -2x^2 + 3x + 5\, dx$$

$$= \left(-2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 5x\right)\Bigg|_{-1}^{5/2}$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\frac{125}{8} + \frac{3}{2}\frac{25}{4} + 5\frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{2}{3}(-1)^3 + \frac{3}{2}(-1)^2 + 5(-1)\right)$$

$$= \frac{343}{24}$$

Exemplo – 4

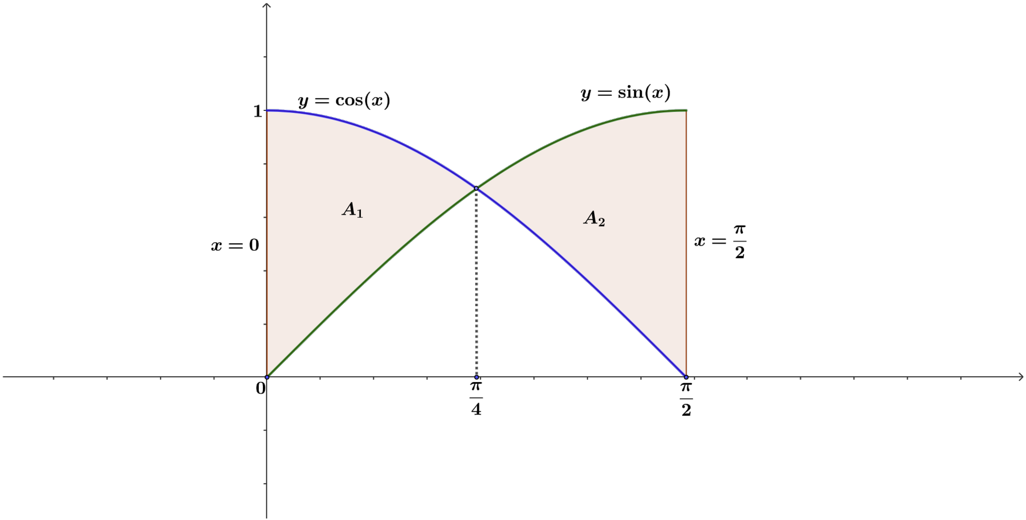
Exemplo 4

Calcule a área da região delimitada pelas curvas

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \quad \text{e} \quad g(x) = \cos(x)$$

no intervalo $[0, \pi/2]$

Exemplo 4 – Interpretação



Exemplo 4 – Interpretação

Pontos de interseção

$$\operatorname{sen}(x) = \cos(x) \qquad 0 \leq x \leq {}^{\pi}\!/_{2}$$

$$x = {}^{\pi}\!/_{4}$$

Pelo gráfico podemos notar que

$$\cos(x) \geq \operatorname{sen}(x) \qquad 0 \leq x \leq {}^{\pi}\!/_{4}$$

$$\operatorname{sen}(x) \geq \cos(x) \qquad {}^{\pi}\!/_{4} \leq x \leq {}^{\pi}\!/_{2}$$

Precisamos dividir a região em duas partes

Exemplo 4 – Resolução

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 \\
&= \int_0^{\pi/4} \cos(x) - \operatorname{sen}(x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}(x) - \cos(x)\,dx \\
&= \big(\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\big)\Big|_0^{\pi/4} + \big(-\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\big)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 2\sqrt{2} - 2
\end{aligned}
$$

Simetrias

Poderíamos ter aproveitado a simetria da região em relação à reta $x = {}^{\pi}/_{4}$, o que nos permitiria economizar esforço ao calcular a área, uma vez que

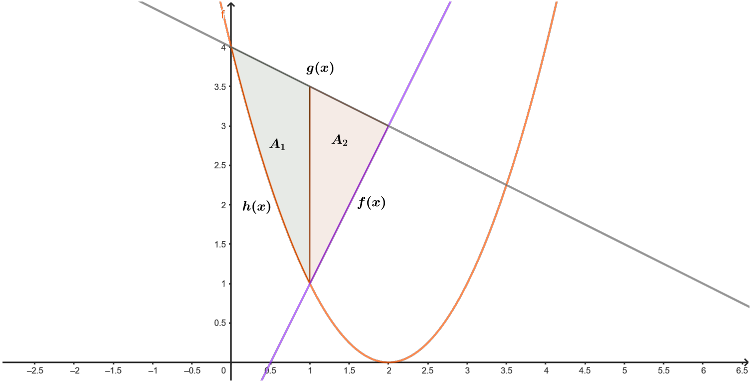
$$A = 2A_1 = 2\int_0^{\pi/4} \cos(x) - \operatorname{sen}(x)\, dx$$

Exemplo – 5

Exemplo 5

Calcule a área da região expressa na figura, que é uma das regiões delimitada simultaneamente pelas três curvas

$$f(x) = 2x - 1, \qquad g(x) = -\frac{x}{2} + 4 \quad \text{e} \quad h(x) = (x-2)^2$$



Exemplo 5 – Interpretação

$f(x)$ e $g(x)$ são retas

$h(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ parábola com concavidade para cima

Vértice $(2, 0)$

Raiz $x = 2$

Exemplo 5 – Interpretação

Precisamos dividir a região em duas

De 0 até 1

$g(x) = -{}^{x}/_{2} + 4$ está "por cima"

$h(x) = (x-2)^2$ está "por baixo"

De 1 até 2

$g(x) = -{}^{x}/_{2} + 4$ está "por cima"

$f(x) = 2x - 1$ está "por baixo"

Exemplo 5 – Resolução

$$A_1 = \int_0^1 g(x) - h(x)dx$$

$$A_2 = \int_1^2 g(x) - f(x)dx$$

Exemplo 5 – Resolução

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^1 \left(-\frac{x}{2} + 4\right) - \left(x^2 - 4x + 4\right)\, dx \\
&= \int_0^1 -x^2 + \frac{7}{2}x\, dx \\
&= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{4}\right) - (0 - 0) \\
&= \frac{17}{12}
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 – Resolução

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_1^2 \left(-\frac{x}{2} + 4\right) - (2x - 1)\ dx \\
&= \int_1^2 -\frac{5}{2}x + 5\,dx \\
&= \left(-\frac{5}{2}\frac{x^2}{2} + 5x\right)\Bigg|_1^2 \\
&= \left(-\frac{20}{4} + 10\right) - \left(-\frac{5}{4} + 5\right) \\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 – Resolução

$$A = A_1 + A_2 = \frac{17}{12} + \frac{5}{4} = \frac{17 + 15}{12} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 3.2 da Apostila

Exercício: 1

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações