# CFVVI – Prova 2 – Turma 4 04/06/2025

## Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

**1** [25] Considere que a equação $e^{xyz} + x^2 - z = 0$ defina $z$ como função de $x$ e $y$, encontre $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

$$
\begin{aligned}
e^{xyz(x,y)} + x^2 - z(x,y) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xyz(x,y)} + x^2 - z(x,y)\right) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial x} e^{xyz(x,y)} + \frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\
e^{xyz(x,y)} \frac{\partial}{\partial x}\left(xyz(x,y)\right) + 2x - \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\
e^{xyz(x,y)} \left(yz(x,y) + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2x - \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\
\left(xye^{xyz(x,y)} - 1\right)\frac{\partial z}{\partial x} &= -yz(x,y)e^{xyz(x,y)} - 2x \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-yz(x,y)e^{xyz(x,y)} - 2x}{xye^{xyz(x,y)} - 1} \\
&= \frac{-yze^{xyz} - 2x}{xye^{xyz} - 1}
\end{aligned}
$$

**2** [25] Seja $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ , use a aproximação linear de $f$ no ponto $(1,2)$ para estimar $f(1{,}01; 1{,}98)$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

Avaliando as derivadas no ponto $(1,2)$

$$f(1,2) = \ln(1+4) = \ln(5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{4}{5}$$

A aproximação linear é

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) \\ &= \ln(5) + \frac{2}{5}(x-1) + \frac{4}{5}(y-2) \end{aligned}$$

Avaliando no ponto $f(1{,}01; 1{,}98)$

$$\begin{aligned} L(1{,}01; 1{,}98) &= \ln(5) + \frac{2}{5}(0{,}01) + \frac{4}{5}(-0{,}02) \\ &= \ln(5) + \frac{2-8}{500} \\ &= \ln(5) - \frac{6}{500} \\ &= \ln(5) - \frac{3}{250} \\ &\approx 1.59744 \end{aligned}$$

Comparando com o valor exato

$$f(1{,}01; 1{,}98) = 1.59747$$

**3** [25] Seja $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

a) Calcule o gradiente de $f$

b) Calcule a derivada de $f$ no ponto $(1,2)$ na direção do vetor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Vetor gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{x^2+y^2+1} \\ \dfrac{2y}{x^2+y^2+1} \end{pmatrix}$$

b) Gradiente no ponto $(1,2)$

$$\nabla f(x,y)(1,2) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{6} \\ \dfrac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Calculando um vetor unitário na direção de $v$

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Derivada direcional

$$\begin{aligned} D_u f(1,2) &= \nabla f(1,2) \cdot u \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

**4** [25] Seja $f(x,y,z) = e^{x+y}\cos(z)$, calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ no ponto $(0,0,\pi)$. Efetue as derivadas na ordem especificada pela notação.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{x+y}\cos(z)\right) \\
&= e^{x+y}\frac{\partial}{\partial z}\cos(z) \\
&= e^{x+y}(-\operatorname{sen}(z)) \\
&= -e^{x+y}\operatorname{sen}(z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-e^{x+y}\operatorname{sen}(z)\right) \\
&= -\operatorname{sen}(z)\frac{\partial}{\partial x}e^{x+y} \\
&= -\operatorname{sen}(z)e^{x+y}\frac{\partial}{\partial x}(x+y) \\
&= -\operatorname{sen}(z)e^{x+y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0,\pi) &= -\operatorname{sen}(z)e^{x+y}\Big|_{(0,0,\pi)} \\
&= -\operatorname{sen}(\pi)e^{0+0} \\
&= -\operatorname{sen}(\pi)e^{0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$