Continuidade de Funções de Várias Variáveis

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

Conteúdo

Definição

Uma função $f(x, y)$ é contínua no ponto (x_0, y_0), se

1. f é definida em (x_0, y_0)
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ existe
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Uma função é contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio

Limite de Função Contínua

Se $f(x, y)$ é contínua em (x_0, y_0), então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Combinações Algébricas

Combinações algébricas de funções contínuas são funções contínuas, exceto por divisões por zero, raízes de números negativos, …

Aplicação direta das propriedades de limites

Exemplo 1

Exemplos de funções contínuas no plano

1. $f(x, y) = x$
2. $f(x, y) = y$
3. $f(x, y) = xy$
4. $f(x, y) = x^n$ para n inteiro positivo
5. $f(x, y) = y^n$ para n inteiro positivo

Exemplo 2

Mostre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua em todos os pontos, exceto na origem

Exemplo 2 – Solução

Consideramos primeiro o caso $(x, y) \neq (0, 0)$

$2xy$ é uma função contínua no plano

$x^2 + y^2$ é uma função contínua no plano

então $\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ é contínua para todo $(x, y) \neq (0, 0)$

Exemplo 2 – Solução

Em $(x, y) = (0, 0)$ temos que aplicar a definição

1. f é definida em $(0, 0)$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$

A condição 1 vale, pois $f(0, 0) = 0$

Exemplo 2

Verificando a condição 2, percebemos que o limite não existe

Se fizermos $y = mx$, para $m \neq 0$ e $x \neq 0$, temos

$$f(x, y)\bigg|_{y=mx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}\bigg|_{y=mx} = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2mx^2}{(1 + m^2)\,x^2} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

Para cada valor de m, a função f se aproxima da origem com um valor diferente.

Portanto, o limite não existe e a função não é contínua na origem

Continuidade de Compostas

Se $f(x, y)$ é contínua em (x_0, y_0)

e g é uma função, de uma variável, contínua em $z_0 = f(x_0, y_0)$

então a função composta $h = g \circ f$ definida como

$$h(x, y) = g\big(f(x, y)\big)$$

é contínua em (x_0, y_0)

Exemplo 3

Mostre que

$$f(x, y) = \cos\left(\frac{xy}{x^2 + 1}\right)$$

é contínua em todos os pontos do plano

Exemplo 3 – Solução

Primeiro reconhecemos que temos a composição de funções $f = g \circ h$, com

$$h(x, y) = \frac{xy}{x^2 + 1} \qquad \text{e} \qquad g(t) = \cos(t)$$

isso é,

$$f(x, y) = g\big(h(x, y)\big) = \cos\left(\frac{xy}{x^2 + 1}\right)$$

Exemplo 3 – Solução

h é uma combinação algébrica de funções contínuas e nunca teremos uma divisão por zero, portanto, h é contínua em todo o plano

g é uma função contínua em toda a reta real, portanto, qualquer que seja o ponto (x_0, y_0) a função g será contínua em $h(x_0, y_0)$

Pelo teorema da continuidade da composta, f é contínua em todo o plano

Conteúdo

Teorema do Valor Extremo

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em uma região R,

fechada e limitada (compacta),

a função assume um máximo e um mínimo absolutos em R

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.2

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 31-33, 36-37, 60

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações