CFVVI – Prova 1 – Turma 2 05/05/2025

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25] Encontre uma parametrização para o círculo definido pela equação $(x-3)^2+(y+1)^2=4$

Círculo de raio 2 centrado no ponto $(3,-1)$
Parametrização do círculo unitário centrado na origem

$$x=\cos(\theta)$$

$$y=\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\theta\in[0,2\pi)$$

Parametrização do círculo de raio 2 centrado na origem

$$x=2\cos(\theta)$$

$$y=2\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\theta\in[0,2\pi)$$

Parametrização do círculo de raio 2 centrado no ponto $(3,-1)$

$$x=2\cos(\theta)+3$$

$$y=2\operatorname{sen}(\theta)-1$$

$$\theta\in[0,2\pi)$$

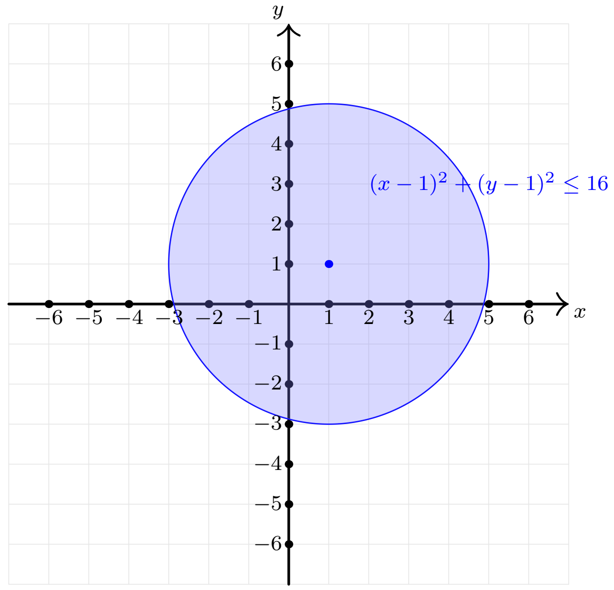
2 [25] Considerando a função $f(x,y) = \sqrt{16-(x-1)^2-(y-1)^2}$

(a) [10] Determine o domínio de f e represente-o graficamente

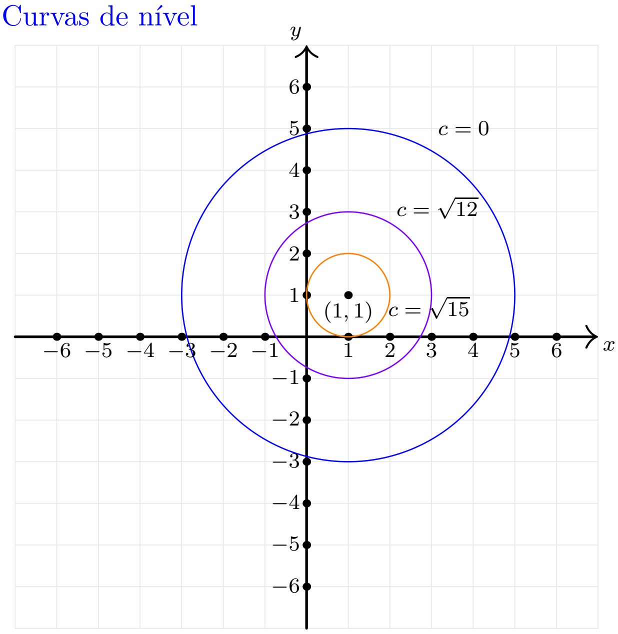
(b) [5] Encontre a imagem de f

(c) [10] Caracterize todas as curvas de nível de f e esboce três delas

Domínio



Curvas de nível



(a) O domínio de f é o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que:

$$16-(x-1)^2-(y-1)^2 \geq 0$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 4^2$$

ou seja, os pontos do circulo centrado em $(1,1)$ de raio 4. Portanto, o domínio é

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 4^2\}$$

(b) A imagem de f é o conjunto de valores que f pode assumir. Como $(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 16$, temos:

$$0 \leq \sqrt{16-(x-1)^2-(y-1)^2} \leq 4$$

Logo, a imagem é:

$$\text{Im}(f) = [0,4]$$

(c) As curvas de nível são definidas por $f(x,y) = c$ para $c \in [0,4]$.

$$\sqrt{16-(x-1)^2-(y-1)^2} = c$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2 = 16-c^2$$

Cada curva de nível é uma circunferência com centro em $(1,1)$ e raio $\sqrt{16-c^2}$

$r = 4$	$c = \sqrt{16 - r^2} = 0$	$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$
$r = 2$	$c = \sqrt{16 - r^2} = \sqrt{12}$	$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$
$r = 1$	$c = \sqrt{16 - r^2} = \sqrt{15}$	$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

3 [30] Calcule o limite ou mostre que ele não existe

(a) [15] $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(b) [15] $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

(a) Testando diferentes caminhos

Caminho $y = x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{xy}{x^2+y^2}\right|_{y=x} = \lim_{x\to 0} \frac{xx}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Caminho $y = -x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{xy}{x^2+y^2}\right|_{y=-x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(-x)}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Como os limites são diferentes, o limite **não existe**

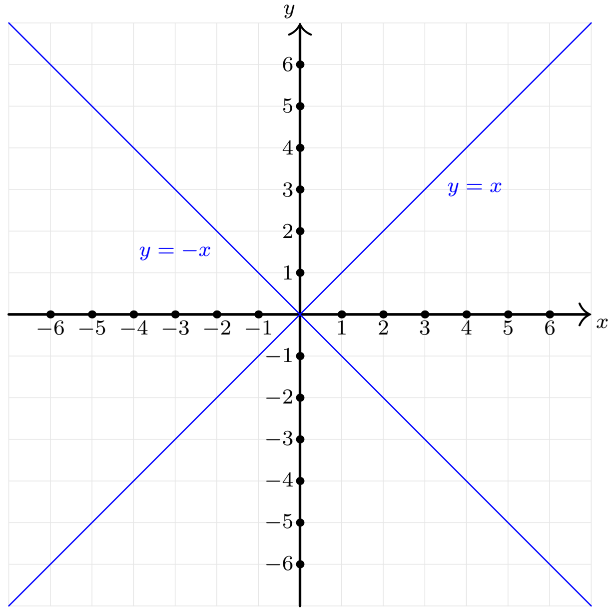
(b) Multiplicando pelo conjugado

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} &= \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} \times \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} \\
&= \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}
\end{aligned}$$

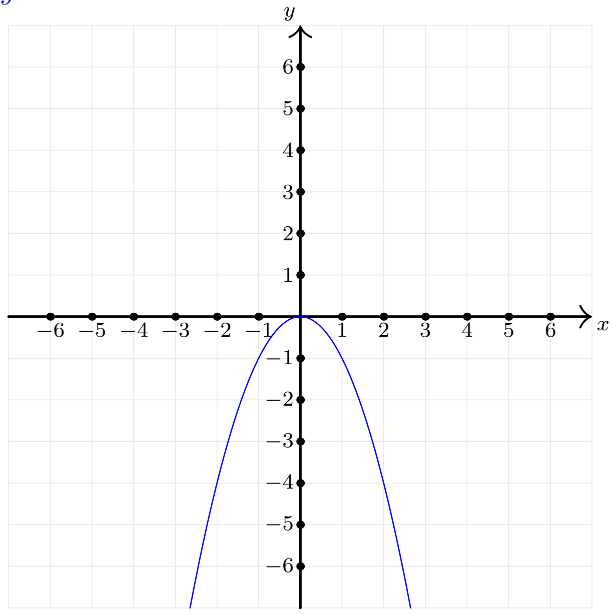
$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{0^2+0^2+1}+1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

4 [20] Encontre e esboce as curvas que representam os cortes da superfície $y^2 - x^2 = z$ pelos planos $z = 0$ e $y = 0$

$z = 0$



$y = 0$



No plano $z = 0$ a equação $y^2 - x^2 = z$ se reduz a

$$y^2 - x^2 = 0$$

$$y^2 = x^2$$

$$|y| = |x|$$

$$y = \pm x$$

que corresponde as retas $y = x$ e $y = -x$
No plano $y = 0$ a equação $y^2 - x^2 = z$ se reduz a

$$0 - x^2 = z$$

$$z = -x^2$$

que corresponde uma parábola com vértice na origem e apontando para baixo no plano zx