Séries Numéricas – Teste da Integral

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Recapitulando

Série com Termos Não-Negativos

Teste da Integral

Estimativa de Erro

Exemplos

Lista Mínima

Recapitulando

Sequências numéricas

$$\left(a_k\right)_{k=1}^{\infty} \qquad\qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

Séries numéricas

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots$$

Somas parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Conteúdo

Recapitulando

Série com Termos Não-Negativos

Teste da Integral

Estimativa de Erro

Exemplos

Lista Mínima

Série com Termos Não-Negativos

Caso particular de séries onde $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Uma série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{com} \qquad a_n \geq 0$$

é convergente se, e somente se, sua sequência de somas parciais, S_n, é uma sequência limitada superiormente.

Conteúdo

Recapitulando

Série com Termos Não-Negativos

Teste da Integral

Estimativa de Erro

Exemplos

Lista Mínima

Teste da Integral

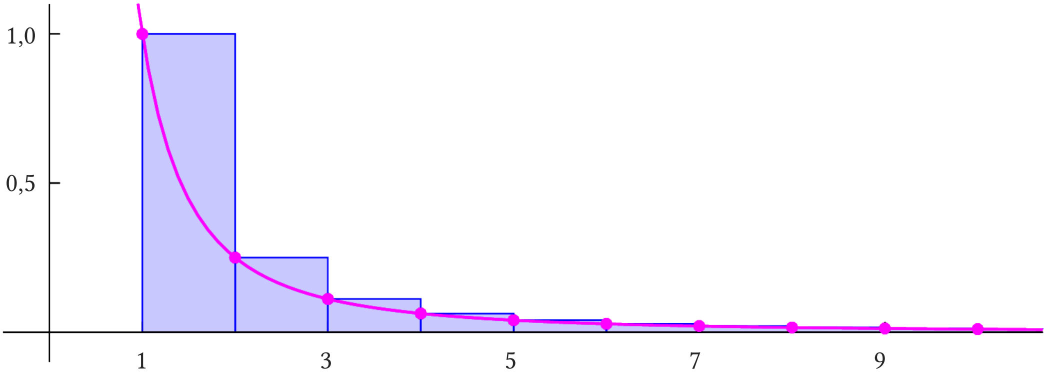
- Trocamos o problema de verificar se uma série converge para o de verificar se uma integral converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ converge?} \qquad \text{por} \qquad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \ \text{ converge?}$$

- O valor da integral **não é** uma boa aproximação para a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \not\approx \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

Diferença Entre a Integral e a Série



Teste da Integral

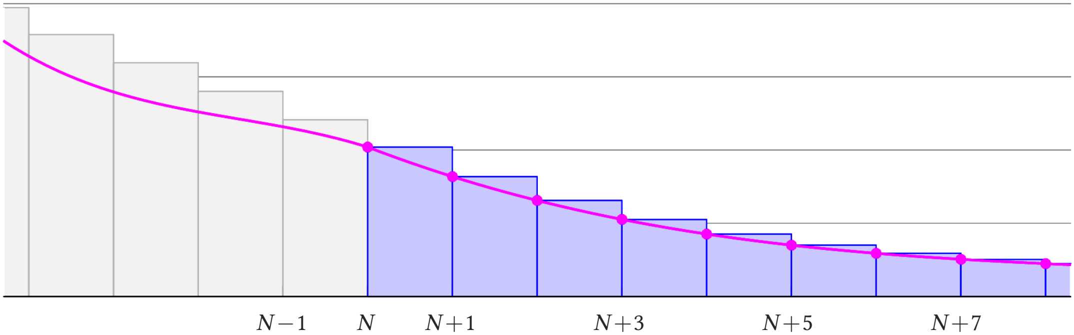
Seja (a_n) uma sequência tal que

1. seus termos são positivos, $a_n > 0$
2. $a_n = f(n)$
3. f é contínua, positiva e decrescente para todo $x \geq N$

Então, a série $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge

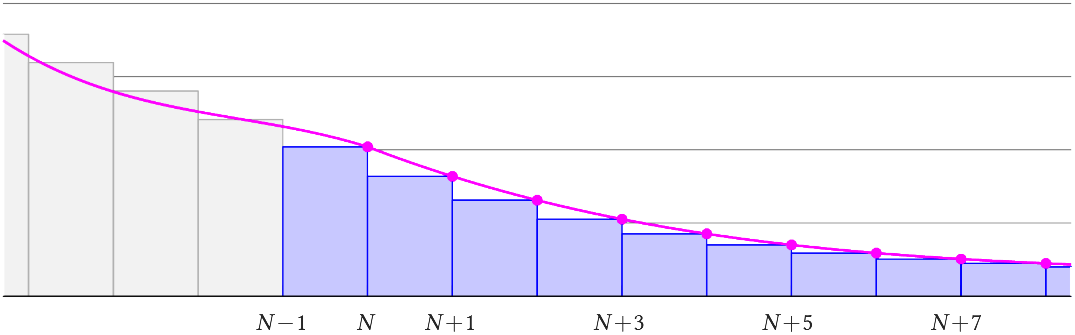
se, e somente se, a integral $\displaystyle\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ converge

Ilustração do Teste da Integral – 1



A série é "maior" do que a integral $$\int_N^\infty f(x)\,dx \quad \leq \quad \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

Ilustração do Teste da Integral – 2



A série é "menor" do que a integral

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_k \quad \leq \quad a_N + \int_N^{\infty} f(x)\,dx$$

Comparação entre a Série e a Integral

Temos portanto as relações

$$\int_N^\infty f(x)\,dx \quad \leq \quad \sum_{k=N}^\infty a_k \quad \leq \quad a_N + \int_N^\infty f(x)\,dx$$

Lembrando como Calcular uma Integral Imprópria

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \left(F(x)\Big|_a^b \right) = \lim_{b\to\infty} \big(F(b) - F(a)\big)$$

Série p

Série p ou p-série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \cdots$$

onde p é uma constante real

Não confundir com a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^n = \alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \alpha r^4 + \cdots$$

Série Harmônica ($p = 1$)

Série Harmônica é um caso particular da série p com $p = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Essa série passa no teste da divergência pois $\quad a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$

mas mesmo assim diverge

Somas Parciais da Série Harmônica

$$S_2 \;=\; 1 + \frac{1}{2} \;=\; \frac{3}{2}$$

$$S_4 \;=\; S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \;>\; S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \;=\; \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \;=\; \frac{4}{2}$$

$$S_8 \;=\; S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \;>\; S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \;>\; \frac{4}{2} + \frac{1}{2} \;=\; \frac{5}{2}$$

$$S_{16} \;=\; S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \;>\; S_8 + \frac{8}{16} \;>\; \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \;=\; \frac{6}{2}$$

Somas Parciais da Série Harmônica

Considerando os termos $n = 2^k$ da sequência de somas parciais observamos que

$$S_{2^k} \geq \frac{2+k}{2}$$

portanto $S_n \to \infty$ e a série harmônica diverge

Aplicando o Teste da Integral para $p \neq 1$

Observamos que

$$a_n = \frac{1}{n^p} = f(n) \qquad \text{para} \qquad f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Para $x \in [1, \infty)$ a função $f(x)$ é descrescente, contínua e positiva,

pelo Teste da Integral, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx \quad \text{converge}$$

Calculando a Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^b\right]$$

$$= \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left(b^{1-p}-1\right)$$

A convergência de $\lim_{b\to\infty} b^{1-p}$ depende do valor de p

Convergência

Se $p > 1$

$$1 - p < 0 \qquad \lim_{b \to \infty} b^{1-p} = 0$$

Se $p < 1$

$$1 - p > 0 \qquad \lim_{b \to \infty} b^{1-p} \quad \text{diverge}$$

Convergência da Série p

A série-p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \cdots$$

converge para $p > 1$ e diverge caso contrário

Exemplo – 1

Use o teste da integral para determinar se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge ou diverge

Certifique-se de que as condições do teste da integral sejam satisfeitas

Exemplo – 1

Podemos aplicar o teste da integral pois a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

é positiva, contínua e decrescente para $x \geq 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Bigg|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) \; = \; 1$$

Como a integral converge a série também converge

Exemplo – 1

Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449 \; \neq \; 1$$

O cálculo da soma da série está na Seção 9.6 – Problema de Basileia

Conteúdo

Recapitulando

Série com Termos Não-Negativos

Teste da Integral

Estimativa de Erro

Exemplos

Lista Mínima

Convergência da Série p

Não temos uma fórmula para a soma da série

Podemos usar as somas parciais para aproximar a soma

Quantos termos precisamos?

Resto ou Erro

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

$$= S_n + R_n$$

R_n é o resto da série, isso é, o que faltou ser calculado

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

Estimativa de Erro

Se uma série é convergente pelo teste da integral podemos estimar o resto

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \cdots$$

comparando a área dos retângulos com a da integral temos

$$R_n \geq \int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\, dx$$

Limitantes para o resto no teste da integral

Se a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

converge segundo o teste da integral, então o resto satisfaz

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \quad \leq \quad R_n \quad \leq \quad \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

Conteúdo

Recapitulando

Série com Termos Não-Negativos

Teste da Integral

Estimativa de Erro

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo – 2

Use o teste da integral para determinar se a série converge ou diverge. Certifique-se de que as condições do teste da integral sejam satisfeitas.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4}$$

Exemplo – 2

A função $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ é positiva e contínua para $x \geq 1$

Para verificar que ela é decrescente, calculamos sua derivada

$$f'(x) = \frac{1(x^2+4) - x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

$f'(x) < 0$, e portanto f é decrescente, para todo $x > 2$

Precisamos de um N inteiro a partir do qual f seja decrescente

Escolhemos $N = 3$

Exemplo – 2

Podemos, agora, aplicar o teste da integral

Primeiro calculamos a primitiva de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ usando substituição

$$u = x^2 + 4 \qquad \text{e} \qquad du = 2x dx$$

$$\begin{aligned} F(x) = \int \frac{x}{x^2+4}\, dx &= \int \frac{1}{2u}\, du \\ &= \frac{1}{2} \ln u + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(x^2+4\right) + C \end{aligned}$$

Exemplo – 2

Calculando a integral imprópria temos

$$\int_3^{\infty} \frac{x}{x^2+4}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_3^{b} \frac{x}{x^2+4}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[F(x)\right]\Big|_3^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\right]\Bigg|_3^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{\ln\left(b^2+4\right)-\ln\left(3^2+4\right)}{2}\right] = \infty$$

Como a integral diverge a série também diverge

Exemplo – 3

Sabemos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge, pois é uma série p, com $p = 2$

Descubra n tal que o resto R_n da aproximação S_n seja menor que 0,01

Exemplo – 3

Sabemos que o Teste da Integral pode ser aplicado, pois

$$\int_n^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n}$$

Assim

$$\frac{1}{n+1} \ \le \ R_n \ \le \ \frac{1}{n}$$

Exemplo – 3

Para garantir que $R_n < 0{,}01$ impomos que

$$\frac{1}{n} < 0{,}01$$

isolando n obtemos $n > 100$

A aproximação S_{100} tem um erro menor do que $0{,}01$

Conteúdo

Recapitulando

Série com Termos Não-Negativos

Teste da Integral

Estimativa de Erro

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar as Seção 6.4 da Apostila

Exercícios: 3, 7a, 8, 9, 10

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações