INTEGRAIS E SÉRIES – PROVA 1 – TURMA 8 01/11/24

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25] Calcule a integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

Notamos que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

tende ao infinito quando $x \to 0$, portanto não podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo diretamente, essa é uma **integral imprópria**.

Calculando a primitiva

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \int x^{-2/3}\,dx \\ &= \frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1} + C \\ &= \frac{x^{1/3}}{1/3} + C \\ &= 3\sqrt[3]{x} + C \end{aligned}$$

Calculado a integral definida

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \lim_{a\to 0} \int_a^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \lim_{a\to 0} \left(F(x)\Big|_a^2 \right) \\ &= \lim_{a\to 0} \big(F(2) - F(a)\big) \\ &= \lim_{a\to 0} \left(3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{a}\right) \\ &= 3\sqrt[3]{2} - 3\lim_{a\to 0} \sqrt[3]{a} \\ &= 3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{0} \\ &= 3\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

2 [25] Calcule a integral $\displaystyle\int_1^3 e^{2t+1} - \cos(\pi t) - \frac{1}{5t} + 3x + 2\ dt$

Calculando a primitiva

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int e^{2t+1} - \cos(\pi t) - \frac{1}{5t} + 3x + 2\ dt \\
&= \int e^{2t+1}\ dt - \int \cos(\pi t)\ dt - \int \frac{dt}{5t} + \int 3x + 2\ dt \\
&= \frac{1}{2}e^{2t+1} - \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi t) - \frac{1}{5}\ln|t| + (3x+2)t + C
\end{aligned}$$

Calculando a integral definida

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^3 e^{2t+1} - \cos(\pi t) - \frac{1}{5t} + 3x + 2\ dt \\
&= F(x)\Big|_1^3 \\
&= F(3) - F(1) \\
&= \left(\frac{1}{2}e^{2\times 3+1} - \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi 3) - \frac{1}{5}\ln|3| + (3x+2)3\right) \\
&- \left(\frac{1}{2}e^{2\times 1+1} - \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi 1) - \frac{1}{5}\ln|1| + (3x+2)1\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}e^{7} - 0 - \frac{1}{5}\ln(3) + 9x - 6\right) - \left(\frac{1}{2}e^{3} - 0 - 0 + 3x + 2\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{7} - \frac{1}{5}\ln(3) + 9x + 6 - \frac{1}{2}e^{3} - 3x - 2 \\
&= \frac{e^{7} - e^{3}}{2} - \frac{1}{5}\ln(3) + 6x + 4
\end{aligned}$$

3 [25] Considerando as curvas

$$y = 2 - |x| \qquad \text{e} \qquad y = x^2 - 4$$

a) Esboce o gráfico das curvas e indique a área delimitada por elas

b) Calcule a área

1) As curvas se interceptam nos pontos que satisfazem a equação

$$2 - |x| = x^2 - 4$$
$$x^2 + |x| - 6 = 0$$

Para $x \geq 0$ a equação é $x^2 + x - 6 = 0$ e suas raizes são

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 5}{2} \qquad x = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad x = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3 < 0$$

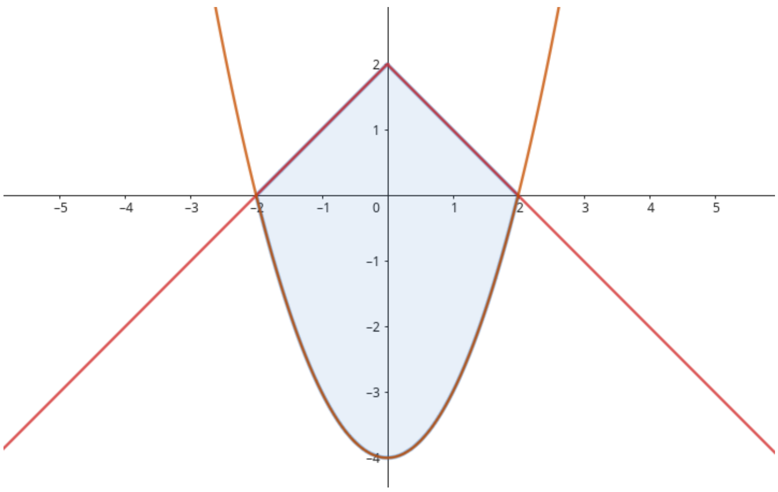
Para $x \geq 0$ a equação é $x^2 - x - 6 = 0$ e suas raizes são

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{2} \qquad x = \frac{1+5}{2} = \frac{5}{2} = 3 > 0 \qquad x = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Assim os pontos de interseção são $x = -2$ e $x = 2$
Alternativamente poderiamos usar a simetria da região e resolver apenas uma das equações acima.



2) Como na região o módulo é a função maior, a área é

$$A = \int_{-2}^{2} (2 - |x|) - \left(x^2 - 4\right) dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-2}^{2} 6 - |x| - x^2 \, dx \\
&= \int_{-2}^{0} 6 - |x| - x^2 \, dx + \int_{0}^{2} 6 - |x| - x^2 \, dx \\
&= \int_{-2}^{0} 6 + x - x^2 \, dx + \int_{0}^{2} 6 - x - x^2 \, dx \\
&= \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2} \\
&= -\left[6(-2) + \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3}\right] + \left[6 \times 2 - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right] \\
&= 12 - 2 - \frac{8}{3} + 12 - 2 - \frac{8}{3} \\
&= 20 - \frac{16}{3} \\
&= \frac{60 - 16}{3} \\
&= \frac{44}{3}
\end{aligned}
$$

Alternativamente podemos usar a simetria

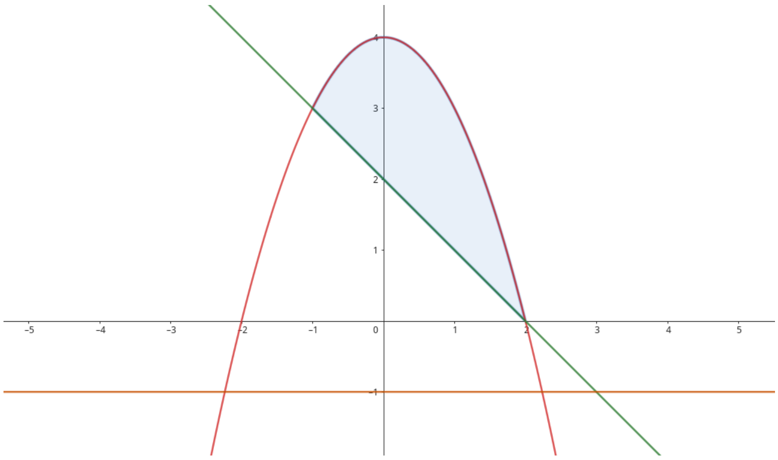
$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2} (2 - |x|) - \left(x^2 - 4\right) dx \\
&= 2 \int_{0}^{2} 6 - |x| - x^2 \, dx \\
&= 2 \int_{0}^{2} 6 - x - x^2 \, dx \\
&= 2 \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2} \\
&= 2 \left[6 \times 2 - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right] \\
&= 2 \left(12 - 2 - \frac{8}{3}\right) \\
&= 2 \left(\frac{30 - 8}{3}\right) \\
&= 2 \frac{22}{3} \\
&= \frac{44}{3}
\end{aligned}
$$

4 [25] Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas

$$y = 4 - x^2 \qquad \text{e} \qquad y = 2 - x$$

em torno da reta $y = -1$

Esboço da região



Vamos integrar por seções transversais, que são aneis

$$V = \int_a^b \pi \left[R^2(x) - r^2(x) \right] dx$$

Os extremos do intervalo de integração são as soluções da equação

$$4 - x^2 = 2 - x$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{2} \qquad x_1 = \frac{4}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{-2}{-2} = -1$$

O raio maior é

$$R(x) = \left(4 - x^2\right) + 1 = 5 - x^2$$

seu quadrado é

$$R^2(x) = \left(5 - x^2\right)^2 = 25 - 10x^2 + x^4$$

O raio menor é

$$r(x) = (2 - x) + 1 = 3 - x$$

seu quadrado é

$$r^2(x) = (3 - x)^2 = 9 - 6x + x^2$$

Portanto o volume é

$$
\begin{aligned}
V &= \int_a^b \pi\left[R^2(x) - r^2(x)\right] dx \\
&= \pi \int_{-1}^{2} \left(25 - 10x^2 + x^4\right) - \left(9 - 6x + x^2\right)\ dx \\
&= \pi \int_{-1}^{2} 16 + 6x - 11x^2 + x^4\ dx \\
&= \pi\left(16x + 6\frac{x^2}{2} - 11\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{2} \\
&= \pi\left[\left(16\times 2 + 3\times 2^2 - 11\frac{2^3}{3} + \frac{2^5}{5}\right) - \left(-16 + 2(-1)^2 - 11\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^5}{5}\right)\right] \\
&= \pi\left[32 + 12 - \frac{88}{3} + \frac{32}{5} + 16 - 2 - \frac{11}{3} + \frac{1}{5}\right] \\
&= \left(58 - \frac{99}{3} + \frac{33}{5}\right)\pi
\end{aligned}
$$