IS – Prova 3 – Turma 7 10/09/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [25] Use o teste da integral para verificar se a série $\sum_{n=1} \frac{n}{n^2+4}$ é convergente. Verifique todas as condições do teste.

Vamos usar a função $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$
Verificando as três condições do teste da integral.
1) A função é positiva para $x > 0$.
2) A função é contínua pois $x^2 + 4$ nunca será zero.
3) Para veerificar que f é decrescente precisamos verificar o sinal da dua derivada

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2+4) - x(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-x2x}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

A derivada será negativa para todo $x > 2$ portanto a função é decrescente.
Calculando a primitiva de f

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)dx \\
&= \int \frac{x}{x^2+4}dx \qquad\qquad u = x^2+4 \qquad du = 2xdx \\
&= \int \frac{1}{u}\frac{du}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{2}\ln|u| \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2+4| \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)
\end{aligned}$$

Calculando a integral de f no intervalo onde ela atende as condições do teste

$$\begin{aligned}
I &= \int_3^\infty f(x)dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_3^b f(x)dx
\end{aligned}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(F(x)\Big|_3^b \right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{2}\ln\left(b^2+4\right) - \frac{1}{2}\ln\left(3^2+4\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \left[\ln\left(b^2+4\right)\right] - \frac{1}{2}\ln(13)$$

Como $\lim\limits_{b\to\infty} \ln\left(b^2+4\right) = \infty$ a integral imprópria diverge e portanto a série também diverge.

2 [25] Determine o interior do intervalo onde a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^{2n}}{n}$ converge.

Vamos aplicar o teste da razão.
O termo geral da série é

$$u_n = \frac{4^n x^{2n}}{n}$$

seu sucessor é

$$u_{n+1} = \frac{4^{n+1} x^{2(n+1)}}{n+1} = \frac{4^{n+1} x^{2n+2}}{n+1}$$

Calculando o quociente dos módulos

$$\begin{aligned}
\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \left|\frac{4^{n+1} x^{2n+2}}{n+1}\right| \left|\frac{n}{4^n x^{2n}}\right| \\
&= \frac{4^{n+1} |x|^{2n+2}}{n+1} \, \frac{n}{4^n |x|^{2n}} \\
&= \frac{4|x|^2 n}{n+1} \\
&= \frac{4nx^2}{n+1}
\end{aligned}$$

Calculando o limite

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{4nx^2}{n+1} = 4x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 4x^2$$

A condição de convergência do teste da razão é $\rho < 1$ portanto

$$\begin{aligned}
\rho &< 1 \\
4x^2 &< 1 \\
x^2 &< \frac{1}{4} \\
|x| &< \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2} < x &< \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

A série converge absolutamente no intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3 [25] Calcule a derivada da função $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n \ln n}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n \ln n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \; \frac{d}{dx} x^{n-2} \\
&= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} (n-2) x^{n-3} \\
&= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-2}{n \ln n} x^{n-3}
\end{aligned}
$$

A série da derivada começa em $n = 3$ pois a derivada de x^{n-2} com $n = 2$ é zero.

4 [25] Encontre a Série de Taylor, centrada em 1, da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Calculando as derivadas de $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-3} \\
f^{(2)}(x) &= \left(-2x^{-3}\right)' = -2(-3)x^{-4} = 3!x^{-4} \\
f^{(3)}(x) &= \left(3!x^{-4}\right)' = 3!(-4)x^{-5} = -4!x^{-5} \\
f^{(4)}(x) &= \left(-4!x^{-5}\right)' = -4!(-5)x^{-6} = 5!x^{-6}
\end{aligned}
$$

Identificamos o padrão

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n(n+1)!x^{-n-2}$$

Avaliando em $x = 1$ temos

$$f^{(n)}(1) = (-1)^n(n+1)!$$

O coeficiente da Série de Taylos será

$$c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{n!} = \frac{(-1)^n(n+1)n!}{n!} = (-1)^n(n+1)$$

A Série de Taylor é

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n$$