CFVVI – Prova 2 – Turma 2 04/06/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25] Utilize a linearização da função $f(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos(xy)$ no ponto $\left(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right)$, para obter uma estimativa para $f(2,1)$

Calculando as derivadas parciais

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \quad e^{x^2-y^2}\left(2x\cos(xy)-y\,\mathrm{sen}(xy)\right)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -e^{x^2-y^2}\left(2y\cos(xy)+x\,\mathrm{sen}(xy)\right)\end{aligned}$$

Avaliando as derivadas parciais no ponto $\left(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right) &= e^{\sqrt{\pi}^2-\sqrt{\pi}^2}\Big(2\sqrt{\pi}\cos\left(\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}\right)-\sqrt{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}\right)\Big)\\ &= e^0\Big(2\sqrt{\pi}\cos\left(\pi\right)-\sqrt{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\pi\right)\Big)\\ &= 2\sqrt{\pi}(-1)-\sqrt{\pi}0\\ &= -2\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right) &= -e^{\sqrt{\pi}^2-\sqrt{\pi}^2}\Big(2\sqrt{\pi}\cos(\sqrt{\pi}\sqrt{\pi})+\sqrt{\pi}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\pi}\sqrt{\pi})\Big)\\ &= -e^0\Big(2\sqrt{\pi}(-1)+\sqrt{\pi}0\Big)\\ &= 2\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Avaliando a função no ponto $\left(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right)$

$$\begin{aligned}f(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) &= e^{x^2-y^2}\cos(xy)\\ &= e^{\sqrt{\pi}^2-\sqrt{\pi}^2}\cos\left(\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}\right)\\ &= e^0\cos\left(\pi\right)\\ &= -1\end{aligned}$$

Escrevendo a aproximação linear centrada no ponto $\left(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}\right)$

$$\begin{aligned}
L(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\
&= f\left(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right) + f_x\left(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right)\left(x-\sqrt{\pi}\right) + f_y\left(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right)\left(y-\sqrt{\pi}\right) \\
&= -1 - 2\sqrt{\pi}\left(x-\sqrt{\pi}\right) + 2\sqrt{\pi}\left(y-\sqrt{\pi}\right) \\
&= -1 - 2\sqrt{\pi}x + 2\pi + 2\sqrt{\pi}y - 2\pi \\
&= 2\sqrt{\pi}(y-x) - 1
\end{aligned}$$

Avaliando a estimativa para $f(3,2)$

$$f(2,1) \approx L(2,1) = 2\sqrt{\pi}(1-2) - 1 = -2\sqrt{\pi} - 1 \approx -4.54490770181$$

Comparando com o valor exato

$$f(2,1) = e^3\cos(2) \approx -8.35853265094$$

os pontos estão muito longe para que a aproximação linear seja adequada

2 [25] Considere que a equação $\operatorname{sen}(xz) + y^2 z = 1$ defina z como função de x e y, encontre $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(xz) + y^2 z &= 1 \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sen}(xz) + y^2 z\right) &= 0 \\
\cos(xz)\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y^2\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\
z\cos(xz) + \left(x\cos(xz) + y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\
\left(x\cos(xz) + y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} &= -z\cos(xz) \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-z\cos(xz)}{x\cos(xz) + y^2}
\end{aligned}$$

3 [25] Seja $f(x,y) = x^2y + \cos(y)$

a) Calcule o gradiente de f

b) Calcule a derivada de f no ponto $(1,\pi)$ na direção do vetor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) Vetor gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - \text{sen}(y) \end{pmatrix}$$

b) Gradiente no ponto $(1,\pi)$

$$\nabla f(x,y)(1,\pi) = \begin{pmatrix} 2 \times 1 \times \pi \\ 1^2 - \text{sen}(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculando um vetor unitário na direção de v

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Derivada direcional

$$\begin{aligned} D_u f(1,\pi) &= \nabla f(1,\pi) \cdot u \\ &= \begin{pmatrix} 2\pi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}(6\pi + 4) \\ &= \frac{6\pi + 4}{5} \end{aligned}$$

4 [25] Seja $f(x,y,z) = \ln(1 + xy^2 + z^2)$, calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ no ponto $(1,1,2)$. Efetue as derivadas na ordem especificada pela notação.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \ln(1 + xy^2 + z^2) \\
&= \frac{1}{1 + xy^2 + z^2} \frac{\partial}{\partial z}(1 + xy^2 + z^2) \\
&= \frac{2z}{1 + xy^2 + z^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2z}{1 + xy^2 + z^2} \right) \\
&= 2z \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + xy^2 + z^2\right)^{-1} \\
&= 2z(-1) \left(1 + xy^2 + z^2\right)^{-2} \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + xy^2 + z^2\right) \\
&= \frac{-2z}{(1 + xy^2 + z^2)^2} \, y^2 \\
&= \frac{-2zy^2}{(1 + xy^2 + z^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,1,2) &= \left. \frac{-2zy^2}{(1 + xy^2 + z^2)^2} \right|_{(1,1,2)} \\
&= \frac{-2 \times 2 \times 1^2}{(1 + 1 \times 1^2 + 2^2)^2} \\
&= \frac{-2^2}{6^2} \\
&= \frac{-2^2}{2^2 \times 3^2} \\
&= \frac{-1}{9}
\end{aligned}$$