CFVVI – EXAME ESPECIAL – TURMA 6 18/09/2024

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [25] Calcule o limite solicitado, ou prove que o limite não existe, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$

Analisando a função percebemos que se fizermos $y = x$ o limite restrito a curva será

$$L_1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\left.\frac{x-y}{x+y}\right|_{y=x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{2x} = 0$$

Por outro lado, escolhendo $y = 2x$ temos

$$L_2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\left.\frac{x-y}{x+y}\right|_{y=2x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{3x} = \frac{-1}{3}$$

Como $L_1 \neq L_2$ o limite não existe.

2 [25] Encontre linearização da função $f(x,y)=\sqrt{y-x}$ no ponto $(1,2)$.

A linearização de f no ponto $(1,2)$ é a função

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &= f(1,2)+f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2) \end{aligned}$$

Precisamos das derivadas parciais de f

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{y-x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[(y-x)^{1/2}\right]=\frac{1}{2}(y-x)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}(y-x)=\frac{-1}{2\sqrt{y-x}}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{y-x}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[(y-x)^{1/2}\right]=\frac{1}{2}(y-x)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial y}(y-x)=\frac{1}{2\sqrt{y-x}}$$

Avaliando f e suas derivadas no ponto $(1,2)$

$$f(1,2)=\sqrt{2-1}=\sqrt{1}=1$$

$$f_x(1,2)=\frac{-1}{2\sqrt{2-1}}=\frac{-1}{2}$$

$$f_y(1,2)=\frac{1}{2\sqrt{2-1}}=\frac{1}{2}$$

Assim

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(1,2)+f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2) \\ &= 1-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-2) \\ &= 1-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{y}{2}-1 \\ &= -\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

3 [25] Encontre e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$

Precisamos das derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^4 + y^4 + 4xy\right] = 4x^3 + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^4 + y^4 + 4xy\right] = 4y^3 + 4x$$

então

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x^3 + 4y \\ 4y^3 + 4x \end{pmatrix}$$

A função é um polinômio, então possui derivadas em todos os pontos do plano. Assim os pontos críticos são apenas os pontos onde as derivadas parciais são zero, $\nabla f = 0$

$$4x^3 + 4y = 0 \qquad \text{e} \qquad 4y^3 + 4x = 0$$

ou, simplificando,

$$x^3 + y = 0 \qquad \text{e} \qquad y^3 + x = 0$$

Isolando y na primeira equação, $y = -x^3$, e substituindo na segunda, temos

$$\begin{aligned} y^3 + x &= 0 \\ \left(-x^3\right)^3 + x &= 0 \\ -x^9 + x &= 0 \\ x^9 - x &= 0 \\ x(x^8 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

As soluções dessa equação são $x = 0$, $x = 1$ ou $x = -1$. Se $x = 0$ temos $y = 0$, se $x = 1$ temos $y = -1$ e se $x = -1$ temos $y = 1$. Portanto, os pontos críticos são

$$(x_1, y_1) = (0, 0), \qquad (x_2, y_2) = (1, -1) \qquad \text{e} \qquad (x_3, y_3) = (-1, 1)$$

Precisamos das derivadas parciais de segunda ordem de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[4x^3 + 4y\right] = 12x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[4y^3 + 4x\right] = 12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[4y^3 + 4x\right] = 4$$

então

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 & 4 \\ 4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Para classificar os pontos críticos precisamos avaliar o discriminante nos pontos críticos.

Considerando o ponto $(x_1, y_1) = (0, 0)$

$$f_{xx}(0,0) = 0$$

$$f_{yy}(0,0) = 0$$

$$f_{xy}(0,0) = 4$$

$$D_1 = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = 0 \times 0 - 4^2 = -16 < 0$$

Portanto, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela.
Considerando o ponto $(x_2, y_2) = (1, -1)$

$$f_{xx}(1,-1) = 12$$

$$f_{yy}(1,-1) = 12$$

$$f_{xy}(1,-1) = 4$$

$$D_2 = f_{xx}(1,-1)f_{yy}(1,-1) - f_{xy}^2(1,-1) = 12 \times 12 - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

Portanto, o ponto $(1, -1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(1,-1) = 12 > 0$ o ponto é um ponto de mínimo local.
Considerando o ponto $(x_3, y_3) = (-1, 1)$

$$f_{xx}(-1,1) = 12$$

$$f_{yy}(-1,1) = 12$$

$$f_{xy}(-1,1) = 4$$

$$D_3 = f_{xx}(-1,1)f_{yy}(-1,1) - f_{xy}^2(-1,1) = 12 \times 12 - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

Portanto, o ponto $(-1, 1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(-1,1) = 12 > 0$ o ponto é um ponto de mínimo local.

4 [25] Encontre as dimensões da caixa retangular fechada com máximo volume que pode ser inscrita na esfera unitária.

Queremos maximizar a função

$$f(x, y, z) = (2x)(2y)(2z) = 8xyz$$

sujeita à

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Sabemos também que x, y e z precisam sere positivos para que o volume f seja positivo.
Para aplicarmos multiplicadores de Lagrange precisamos das derivadas parciais de f e g

$$f_x(x, y, z) = 8yz \qquad f_y(x, y, z) = 8xz \qquad f_z(x, y, z) = 8xy$$

$$g_x(x, y, z) = 2x \qquad g_y(x, y, z) = 2y \qquad g_z(x, y, z) = 2z$$

Vamos agora resolver o sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g = 1$

$$\begin{cases} 8yz = 2\lambda x \\ 8xz = 2\lambda y \\ 8xy = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Simplificando

$$\begin{cases} 4yz = \lambda x \\ 4xz = \lambda y \\ 4xy = \lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Isolando o λ na primeira equação

$$\lambda = \frac{4yz}{x}$$

e substituindo na segunda

$$4xz = \lambda y = \frac{4yz}{x} y = \frac{4y^2 z}{x} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = y^2$$

Substituindo na terceira

$$4xy = \lambda z = \frac{4yz}{x} z = \frac{4yz^2}{x} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = z^2$$

Assim a terceira equação se torna

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$3x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Portanto

$$x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$