Usos da Séries de Taylor - Arco Tangente

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

 $17~\mathrm{de}~\mathrm{agosto}~\mathrm{de}~2025$

Conteúdo

Cálculo da Série de Taylor para o Arco Tangente

Arco Tangente

Calcular a Série de Taylor de

Sabemos que

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Arco Tangente

Calculando as derivadas

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\arctan(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \arctan(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{d^4}{dx^4}\arctan(x) = -\frac{24x(x^2 - 1)}{(1 + x^2)^4}$$

Não é um bom método!

Arco Tangente

Cálculos formais (sem rigor)

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Soma de uma série geométrica com a = 1 e $r = -x^2$

$$\frac{d}{dx}$$
 arctg $(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{1-r} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$

Integrando os dois lados

$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

Problema

Como sabemos se os limites convergem?

Demonstrando a Série de Taylor do Arco Tangente

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} t^{2(n+1)} + \dots$$

Usando a fórmula da soma da Série Geométrica a partir de n + 1

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1+t^2}$$

Agora temos um número finito de termos

Integrando a Soma Finita

Escrevendo a derivada como uma soma finita

$$\frac{d}{dx} \arctan x = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{1 + x^2}$$

Integrando

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1 + t^2} dt$$

A Série de Taylor Converge se o Erro Tende a Zero

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1 + t^2} dt$$

como $1 + t^2 > 1$

$$|R_n(x)| \le \int_0^{|x|} t^{2(n+1)} dt = \left. \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \right|_0^{|x|} = \left. \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \right|_0^{|x|}$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$
 quando $|x| \le 1$

Série de Taylor do Arco Tangente

Para todo $x \in [-1, 1]$ temos

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

Conteúdo

Cálculo da Série de Taylor para o Arco Tangente