Multiplicadores de Lagrange

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

Conteúdo

Extremos Condicionados

Encontre o máximo (mínimo) da função $f(x, y, z)$

sujeito a $g(x, y, z) = 0$

f	função objetivo
g	restrição

Conteúdo

Teorema do Gradiente Ortogonal

Seja $f(x, y, z)$ uma função diferenciável em uma região

cujo interior contém a curva

$$C: \; r(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \\ k(t) \end{pmatrix}$$

Se P_0 é um ponto em C onde f possua um máximo ou mínimo local relativo aos seus valores em C, então ∇f é normal a C em P_0

Demonstração

Os valores de f, restrita a C, são dados pela função

$$p(t) = f(g(t), h(t), k(t))$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial k}\frac{dk}{dt} = \nabla f \cdot \frac{dr}{dt}$$

Se f, restrita a C, possui extremo local em $(a, b, c) = (g(t_0), h(t_0), k(t_0))$

então $\frac{dp}{dt}(t_0) = 0$ portanto $\nabla f(a, b, c) \cdot \frac{dr}{dt}(t_0) = 0$

Conteúdo

Introdução

Para encontrar o máximo (mínimo) da função $f(x, y, z)$

sujeito a $g(x, y, z) = 0$

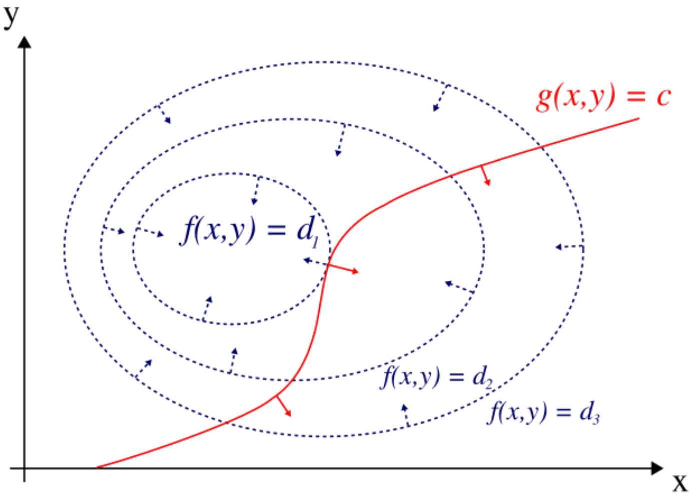
Buscamos pelos pontos onde o gradiente de f
é normal a curva de nível de $g(x, y, z) = 0$

Isto é, os pontos onde os gradientes de f e g apontam na mesma direção

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

λ é o Multiplicador de Lagrange

Extremos Condicionados



Método dos Multiplicadores de Lagrange

Suponha que $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ sejam diferenciáveis

e $\nabla g \neq 0$ quando $g(x, y, z) = 0$

Para encontrar os valores extremos locais de $f(x, y, z)$

sujeito a restrição $g(x, y, z) = 0$

encontre x, y, z e λ tais que

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Conteúdo

Exemplo 1

Encontre o maior e menor valores que a função

$$f(x, y) = xy$$

assume na elipse

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

Exemplo 1 – Interpretando o Problema

Queremos encontrar os valores extremos da função

$$f(x, y) = xy$$

sujeito a restrição

$$g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

Para isso precisamos encontrar os valores x, y e λ tais que

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad\qquad g(x, y) = 0$$

Exemplo 1 – Gradientes

Gradiente de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Gradiente de g

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right) = \frac{2x}{8} = \frac{x}{4}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right) = \frac{2y}{2} = y$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{x}{4} \\ y \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

se torna

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{x}{4} \\ \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$$

A equação

$$g(x, y) = 0$$

se torna

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

Exemplo 1 – Resolvendo o Sistema Não-Linear

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 4y = \lambda x \\ x = \lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$$

Substituindo $x = \lambda y$ em $4y = \lambda x$

$$4y = \lambda x = \lambda\lambda y$$

$$4y = \lambda^2 y$$

Não divida por y!

Assim $y = 0$ ou $y \neq 0$ e

$$\lambda^2 = 4$$

$$|\lambda| = 2$$

$$\lambda = \pm 2$$

Caso 1: $y = 0$
Caso 2: $y \neq 0$ e $\lambda = 2$
Caso 3: $y \neq 0$ e $\lambda = -2$

Exemplo 1 – Caso 1

$$y = 0$$

$$x = \lambda y = 0$$

$$x^2 + 4y^2 = 0 \neq 8$$

Não resolve o sistema

Portanto $y \neq 0$

Exemplo 1 – Casos 2 e 3

$y \neq 0 \qquad \lambda = 2$

$x = \lambda y = 2y$

$x^2 = 4y^2$

$x^2 + 4y^2 = 4y^2 + 4y^2 = 8y^2 = 8$

$y^2 = 1$

Portanto $y = \pm 1$

$y \neq 0 \qquad \lambda = -2$

$x = \lambda y = -2y$

$x^2 = 4y^2$

$x^2 + 4y^2 = 4y^2 + 4y^2 = 8y^2 = 8$

$y^2 = 1$

Portanto $y = \pm 1$

Temos então os pontos $(2, 1)$, $(2, -1)$, $(-2, 1)$ e $(-2, -1)$

Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função $f(x, y) = xy$ nos pontos

$$f(-2, -1) = (-2)(-1) = 2$$

$$f(\ \ 2, -1) = 2(-1) = -2$$

$$f(-2, \ \ 1) = -2 \times 1 = -2$$

$$f(\ \ 2, \ \ 1) = 2 \times 1 = 2$$

O valor máximo de f é $\ \ 2$ e ocorre nos pontos $(-2, -1)$ e $(2, 1)$

O valor mínimo de f é -2 e ocorre nos pontos $(-2, 1)$ e $(2, -1)$

Exemplo 2

Encontre os valores máximo e mínimo da função

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

na circunferência

$$x^2 + y^2 = 1$$

Exemplo 2 – Interpretação do Problema

Queremos encontrar os valores extremos da função

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

sujeito a restrição

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Para isso precisamos encontrar os valores x, y e λ tais que

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad\qquad g(x, y) = 0$$

Exemplo 2 – Gradientes

Gradiente de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x + 4y) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x + 4y) = 4$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gradiente de g

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 2y$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 – Sistema

A equação

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

se torna

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x\lambda = 3 \\ 2y\lambda = 4 \end{cases}$$

A equação

$$g(x, y) = 0$$

se torna

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Exemplo 2 – Solução

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x\lambda = 3 \\ 2y\lambda = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Notando que $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2\lambda} \\ y = \dfrac{2}{\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 &= 1 \\ \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} &= 1 \\ \frac{9+16}{4\lambda^2} &= 1 \\ 4\lambda^2 &= 25 \\ \lambda &= \pm\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

Quando $\lambda = \dfrac{5}{2}$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2^5/_2} = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{^5/_2} = \frac{4}{5}$$

Quando $\lambda = -^5/_2$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = -\frac{3}{2^5/_2} = -\frac{3}{5}$$

$$y = \frac{2}{\lambda} = -\frac{2}{^5/_2} = -\frac{4}{5}$$

Exemplo 2 – Solução

Avaliando a função $f(x, y) = 3x + 4y$ nos pontos

$$f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-9 - 16}{5} = -5$$

$$f\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 3\frac{3}{5} + 4\frac{4}{5} = \frac{9 + 16}{5} = 5$$

O valor máximo de f é 5 e ocorre no ponto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

O valor mínimo de f é -5 e ocorre no ponto $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

Exemplo 3

Encontre o ponto da superfície $z = xy + 1$ que está mais próximo da origem

Exemplo 3 – Formulação do Problema

Queremos minimizar a distância até a origem

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Como a função raiz quadrada é crescente, podemos minimizar a função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sujeito a restrição

$$g(x, y, z) = z - xy = 1$$

Exemplo 3 – Gradientes

Gradiente de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$f_x(x, y, z) = 2x$$

$$f_y(x, y, z) = 2y$$

$$f_z(x, y, z) = 2z$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Gradiente de $g(x, y, z) = z - xy$

$$g_x(x, y, z) = -y$$

$$g_y(x, y, z) = -x$$

$$g_z(x, y, z) = 1$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3 – Sistema

Aplicando os Multiplicadores de Lagrange, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x = -\lambda y \\ 2y = -\lambda x \\ 2z = \lambda \\ z - xy = 1 \end{cases}$$

Exemplo 3 – Solução

Isolamos x na primeira equação e substituímos na segunda

$$2x = -\lambda y \qquad x = \frac{-\lambda y}{2}$$

$$y = \frac{-\lambda}{2} x = \frac{-\lambda}{2} \frac{-\lambda y}{2} = \frac{\lambda^2}{4} y \qquad 4y = \lambda^2 y$$

Temos dois casos $y = 0$ ou $y \neq 0$

Exemplo 3 – Caso 1

Caso $y = 0$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = 0$$

$z - xy = 1$ se reduz a $z = 1$

Obtemos o ponto $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 1)$

Exemplo 3 – Caso 2

Caso $y \neq 0$

$$4y = \lambda^2 y$$

$$\lambda^2 = 4$$

$$\lambda = \pm 2$$

Exemplo 3 – Caso 2

Se $y \neq 0$ e $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2y}{2} = -y$$

$$2z = \lambda = 2$$

$$z = 1$$

Substituindo na quarta equação

$$\begin{aligned} z - xy &= 1 \\ 1 - (-y)y &= 1 \\ y^2 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Contradição

Exemplo 3 – Caso 2

Se $y \neq 0$ e $\lambda = -2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-(-2)y}{2} = y$$

$$2z = \lambda = -2$$

$$z = -1$$

Não existe solução

Substituindo na quarta equação

$$\begin{aligned} z - xy &= 1 \\ -1 - y^2 &= 1 \\ -y^2 &= 2 \\ y^2 &= -2 \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

O ponto mais próximo da origem é $\left(0, 0, 1\right)$

Exemplo 4

Encontre o ponto do plano $x + 2y + 3z = 13$ mais próximo do ponto $(1, 1, 1)$

Exemplo 4 – Formulação do Problema

Queremos minimizar a distância

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$$

Como a função raiz quadrada é crescente podemos minimizar a função

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

Sujeito a condição

$$g(x, y, z) = x + 2y + 3z = 13$$

Exemplo 4 – Gradientes

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \qquad g(x,y,z) = x + 2y + 3z$$

$$f_x(x,y,z) = 2(x-1) \qquad g_x(x,y,z) = 1$$

$$f_y(x,y,z) = 2(y-1) \qquad g_y(x,y,z) = 2$$

$$f_z(x,y,z) = 2(z-1) \qquad g_z(x,y,z) = 3$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2(z-1) \end{pmatrix} \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Sistema

Aplicando os Multiplicadores de Lagrange, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2(x-1) = \lambda \\ 2(y-1) = 2\lambda \\ 2(z-1) = 3\lambda \\ x + 2y + 3z = 13 \end{cases}$$

Exemplo 4 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x-1)=\lambda \qquad 2(y-1)=2\lambda \qquad 2(z-1)=3\lambda$$

$$x=\frac{\lambda}{2}+1 \qquad y=\lambda+1 \qquad z=\frac{3\lambda}{2}+1$$

Exemplo 4 – Solução

Substituindo na última equação

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 3z &= 13 \\
\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right) + 2\left(\lambda + 1\right) + 3\left(\frac{3\lambda}{2} + 1\right) &= 13 \\
\frac{\lambda}{2} + 1 + 2\lambda + 2 + \frac{9\lambda}{2} + 3 &= 13 \\
\lambda + 2 + 4\lambda + 4 + 9\lambda + 6 &= 26 \\
14\lambda + 12 &= 26 \\
14\lambda &= 14 \\
\lambda &= 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Solução

Portanto

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$y = \lambda + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$z = \frac{3\lambda}{2} + 1 = \frac{3 \times 1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

O ponto mais próximo é o ponto $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$

Exemplo 5

Encontre o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ mais distante do ponto $(1, -1, 1)$

Exemplo 5 – Formulação do Problema

Queremos maximizar a distância

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2}$$

Como a função raiz quadrada é crescente, podemos maximizar a função

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2$$

sujeito a restrição

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Exemplo 5 – Gradientes

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2$$

$$f_x(x, y, z) = 2(x-1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2(y+1)$$

$$f_z(x, y, z) = 2(z-1)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y+1) \\ 2(z-1) \end{pmatrix}$$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$g_x(x, y, z) = 2x$$

$$g_y(x, y, z) = 2y$$

$$g_z(x, y, z) = 2z$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Sistema

Aplicando os Multiplicadores de Lagrange, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2(x-1) = 2\lambda x \\ 2(y+1) = 2\lambda y \\ 2(z-1) = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Exemplo 5 – Solução

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x-1) = 2\lambda x \qquad 2(y+1) = 2\lambda y \qquad 2(z-1) = 2\lambda z$$

$$x - 1 = \lambda x \qquad y + 1 = \lambda y \qquad z - 1 = \lambda z$$

$$x(1-\lambda) = 1 \qquad y(1-\lambda) = -1 \qquad z(1-\lambda) = 1$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} \qquad y = \frac{-1}{1-\lambda} \qquad z = \frac{1}{1-\lambda}$$

Usamos que $1-\lambda \neq 0$ pois $x(1-\lambda) = 1$

Exemplo 5 – Substituindo na Última Equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 = 4$$

$$\frac{1+1+1}{(1-\lambda)^2} = 4$$

$$\frac{1}{(1-\lambda)^2} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{1-\lambda} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Para } \frac{1}{1-\lambda} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{1-\lambda} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

Exemplo 5 – Candidatos a Máximo

Temos dois candidatos $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$

Exemplo 5 – Avaliando a Função

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 \\
&= 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 – Avaliando a Função

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right) &= \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 \\
&= 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2
\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Como

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2$$

é menor do que

$$f\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2$$

O ponto mais distante é $\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.8

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 3, 5, 7, 12, 16, 18, 24 e 30

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações