IS – Prova 2 – Turma 8 02/08/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [20] Use substituição simples para calcular a integral $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\operatorname{sen}\left(x^{3/2}+1\right)dx$

Queremos calcular

$$F = \int \sqrt{x}\,\operatorname{sen}\left(x^{3/2}+1\right)dx$$

Faremos a substituição

$$u = x^{3/2}+1 \qquad du = \frac{3}{2}x^{1/2}dx = \frac{3}{2}\sqrt{x}dx \qquad \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}du$$

Assim

$$\begin{aligned}
F &= \int \operatorname{sen}\left(x^{3/2}+1\right)\sqrt{x}dx \\
&= \int \operatorname{sen}(u)\,\frac{2}{3}du \\
&= \frac{2}{3}\int \operatorname{sen}(u)\,du \\
&= \frac{2}{3}\cos(u)+C \\
&= \frac{2}{3}\cos\left(x^{3/2}+1\right)+C
\end{aligned}$$

2 [20] Use integração por partes para calcular a integral $\int_1^e x^3 \ln(x) dx$

Queremos calcular

$$I = \int_1^e x^3 \ln(x) dx$$

Primeiro vamos encontrar a primitiva

$$F = \int x^3 \ln(x) dx$$

Usamos

$$u = \ln(x) \qquad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x^3 dx \qquad v = \frac{x^4}{4}$$

Assim

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x^3 \ln(x) dx \\ &= \ln(x) \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^4 \ln(x)}{4} - \frac{1}{4} \int x^3 dx \\ &= \frac{x^4 \ln(x)}{4} - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} + C \\ &= \frac{x^4 \ln(x)}{4} - \frac{x^4}{16} + C \end{aligned}$$

Agora podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e x^3 \ln(x) dx \\ &= F(x) \Big|_1^e \\ &= F(e) - F(1) \\ &= \left(\frac{e^4 \ln(e)}{4} - \frac{e^4}{16} + C \right) - \left(\frac{1^4 \ln(1)}{4} - \frac{1^4}{16} + C \right) \\ &= \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} - \frac{0}{4} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{4e^4 - e^4 + 1}{16} \\ &= \frac{3e^4 + 1}{16} \end{aligned}$$

3 [20] Calcule a integral $\int \cos^5(x)dx$

$$
\begin{aligned}
F &= \int \cos^5(x)dx \\
&= \int \cos^4(x)\cos(x)dx \\
&= \int \left(\cos^2(x)\right)^2 \cos(x)dx \\
&= \int \left(1 - \operatorname{sen}^2(x)\right)^2 \cos(x)dx
\end{aligned}
$$

$$u = \operatorname{sen}(x) \qquad du = \cos(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
F &= \int \left(1 - u^2\right)^2 du \\
&= \int 1 - 2u^2 + u^4 du \\
&= u - 2\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C \\
&= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C \\
&= \operatorname{sen}(x) - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3(x) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5(x) + C
\end{aligned}
$$

4 [20] Calcule a integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2-2x}$

$$F = \int \frac{dx}{x^3+x^2-2x}$$

Vamos aplicar frações parciais, para isso precisamos das raizes de $Q(x) = x^3 + x^2 - 2x$

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 2x &= 0 \\ x(x^2 + x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Uma das raizes de Q é zero, $x_1 = 0$, usamos Bhaskara para encontrar as demais

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (1) \times (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_3 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Podemos fatorar Q

$$Q(x) = x(x+1)(x-2)$$

Usando frações parciais

$$\frac{1}{x^3+x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

Multiplicando os dois lados por $x(x+1)(x-2)$

$$\begin{aligned} 1 &= A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1) \\ &= A(x^2 - 2x + x - 2) + B(x^2 - 2x) + C(x^2 + x) \\ &= Ax^2 - Ax + 2A + Bx^2 - 2Bx + Cx^2 + Cx \\ &= x^2(A + B + C) + x(-A - 2B + C) + 2A \end{aligned}$$

Igualando os polinômios construimos o sistema linear

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -A - 2B + C = 0 \\ 2A \qquad\qquad = 1 \end{cases}$$

Verificamos que $A = 1/2$ e reduzimos o sistema para

$$\begin{cases} \quad B + C = -\frac{1}{2} \\ -2B + C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Isolando B na primeira equação temos $B = {}^1\!/_2 - C$, substituindo na segunda temos

$$\begin{aligned}
-2B + C &= \frac{1}{2} \\
-2\left(\frac{1}{2} - C\right) + C &= \frac{1}{2} \\
-1 - 2C + C &= \frac{1}{2} \\
-C &= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \\
C &= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

portanto

$$B = \frac{1}{2} - C = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

temos então que

$$\frac{1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} = \frac{1}{2x} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{2(x-2)}$$

então

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3 + x^2 - 2x} dx &= \int \frac{1}{2x} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{2(x-2)} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-2} dx \\
&= \frac{1}{2} \ln|x| + 2 \ln|x+1| - \frac{3}{2} \ln|x-2| + C
\end{aligned}$$

5 [20] Calcule a limite da sequência $a_k = \dfrac{3^{k+1}}{5^k}$

$$
\begin{aligned}
\lim a_k &= \lim \frac{3^{k+1}}{5^k} \\
&= \lim 3 \frac{3^k}{5^k} \\
&= 3 \lim \left(\frac{3}{5}\right)^k \\
&= 3 \times 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$