GABARITO

- 1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
- 2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
- 3. Respeite as margens do papel!
- 4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
- 5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
- 6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
- 1 [50] Encontre o ponto da superfície z = xy + 1 que está mais próximo da origem.

Queremos minimizar a distância

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Como a função raiz quadrada é crescente podemos minimizar a função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

suas derivadas parciais são

$$f_x(x, y, z) = 2x$$
 $f_y(x, y, z) = 2y$ $f_z(x, y, z) = 2z$

As derivadas parciais da função g(x, y, z) = z - xy são

$$g_x(x, y, z) = -y$$
 $g_y(x, y, z) = -x$ $g_z(x, y, z) = 1$

Aplicando os Multiplicadores de Lagrange, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x = -\lambda y \\ 2y = -\lambda x \\ 2z = \lambda \\ z - xy = 1 \end{cases}$$

Isolamos x na primeira equação e substituimos na segunda

$$x = \frac{-\lambda y}{2}$$

$$y = \frac{-\lambda}{2}x = \frac{-\lambda}{2}\frac{-\lambda y}{2} = \frac{\lambda^2}{4}y$$

Temos y = 0 ou

$$\frac{\lambda^2}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2$$

Se y=0 a quarta equação se reduz a z=1, pela terceira $\lambda=2$ e

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2 \times 0}{2} = 0$$

Obtemos o ponto $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 1)$

Se $\lambda = 2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-2y}{2} = -y$$

$$2z = \lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad z = 1$$

Substituindo na quarta equação

$$z - xy = 1$$
$$1 - (-y)y = 1$$

$$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

Obtemos novamente o ponto $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 1)$

Se $\lambda = -2$

$$x = \frac{-\lambda y}{2} = \frac{-(-2)y}{2} = y$$

$$2z = \lambda = -2 \quad \Rightarrow \quad z = -1$$

Substituindo na quarta equação

$$z - xy = 1$$

$$-1 - y^2 = 1$$

$$-y^2 = 2$$

$$y^2 = -2$$

Não existe solução real.

O ponto mais próximo da origem é (0,0,1).

2 [25] Dado $z = \left(\sqrt{3} + i\right)^4$, calcule

- a) a parte real de z,
- b) a parte imaginária de z,
- c) o módulo de z,
- d) o argumento de z

Convertendo $u = \sqrt{3} + i$ para a forma polar

$$\rho = |u| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\operatorname{sen}(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(u)}{|u|} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{cos}(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(u)}{|u|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \varphi = \operatorname{arg}(u) = 30^{\circ} = \frac{\pi}{6}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(u)}{|u|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi = \arg(u) = 30^{\circ} = \frac{\pi}{6}$$

Assim

$$u = \rho \left[\cos \left(\varphi \right) + i \operatorname{sen} \left(\varphi \right) \right] = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) \right]$$

Portanto

$$z = u^{3}$$

$$= \rho^{4} \left[\cos (4\varphi) + i \sin (4\varphi) \right]$$

$$= 2^{4} \left[\cos \left(\frac{4\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{6} \right) \right]$$

$$= 16 \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$= 16 \left[-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$= -8 + 8\sqrt{3}i$$

Parte real de z

$$Re(z) = -8$$

Parte imaginária de z

$$\mathrm{Im}(z) = 8\sqrt{3}$$

Módulo de z

$$|z| = 16$$

Argumento de z

$$\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$$

3 [25] Encontre as raízes cúbicas complexas do número z=27i.

Escrevemos z = 27i na forma trigonométrica

$$z = 27 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

As raízes cúbicas são

$$u_k = \sqrt[3]{27} \left[\cos \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right) \right]$$

$$= 3 \left[\cos \left(\frac{\pi + 4k\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 4k\pi}{6} \right) \right]$$

Para cada valor de k

cada valor de
$$k$$

$$u_0 = 3 \left[\cos \left(\frac{\pi + 4 \times 0\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 4 \times 0\pi}{6} \right) \right]$$

$$= 3 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$= 3 \left[\cos \left(30^{\circ} \right) + i \operatorname{sen} \left(30^{\circ} \right) \right]$$

$$= 3 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$u_1 = 3 \left[\cos \left(\frac{\pi + 4 \times 1\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 4 \times 1\pi}{6} \right) \right]$$

$$= 3 \left[\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right]$$

$$= 3 \left[\cos \left(150^{\circ} \right) + i \operatorname{sen} \left(150^{\circ} \right) \right]$$

$$= 3 \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right]$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$u_2 = 3 \left[\cos \left(\frac{\pi + 4 \times 2\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 4 \times 2\pi}{6} \right) \right]$$

$$= 3 \left[\cos \left(\frac{9\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{9\pi}{6} \right) \right]$$

$$2 = 3 \left[\cos \left(\frac{\pi + 4 \times 2\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 4 \times 2\pi}{6} \right) \right]$$

$$= 3 \left[\cos \left(\frac{9\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{9\pi}{6} \right) \right]$$

$$= 3 \left[\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 3 \left[\cos (270^{\circ}) + i \operatorname{sen} (270^{\circ}) \right]$$

$$= 3 \left[0 + i(-1) \right] = -3i$$