

## GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [20] Calcule raízes cúbicas do número complexo  $z = 1 + i\sqrt{3}$

Converter para forma polar

$$x = \operatorname{Re}(z) = 1 \quad y = \operatorname{Im}(z) = \sqrt{3} \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\varphi = \arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = 2e^{i\pi/3}$$

Aplicar a fórmula de De Moivre para as raízes cúbicas

$$u_k = \sqrt[3]{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi/3 + 2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi/3 + 2k\pi}{3}\right) \right] \quad k = 0, 1, 2$$

Calculando os argumentos das raízes

$$\varphi_0 = \frac{\pi/3 + 2 \times 0\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi/3 + 2 \times 1\pi}{3} = \frac{\pi/3 + 6\pi/3}{3} = \frac{7\pi}{9}$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi/3 + 2 \times 2\pi}{3} = \frac{\pi/3 + 12\pi/3}{3} = \frac{13\pi}{9}$$

As raízes são

$$u_0 = \sqrt[3]{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right) \right] = \sqrt[3]{2}e^{i\pi/9}$$

$$u_1 = \sqrt[3]{2} \left[ \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{9}\right) \right] = \sqrt[3]{2}e^{7i\pi/9}$$

$$u_2 = \sqrt[3]{2} \left[ \cos\left(\frac{13\pi}{9}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{9}\right) \right] = \sqrt[3]{2}e^{13i\pi/9}$$

**2** [20] Converta a equação para coordenadas cartesianas e mostre que a solução é uma cônica

$$r = \frac{10}{4 + \operatorname{sen} \theta}$$

Queremos mostrar que a equação, escrita em coordenadas cartesianas,  $(x, y)$ , é uma expressão com termos de segundo grau em  $x$  e  $y$

$$r = \frac{10}{4 + \operatorname{sen} \theta}$$

$$r(4 + \operatorname{sen} \theta) = 10$$

$$4r + r \operatorname{sen} \theta = 10$$

$$4r + y = 10$$

$$4r = 10 - y$$

$$16(x^2 + y^2) = 100 - 20y + y^2$$

$$16x^2 + 16y^2 = 100 - 20y + y^2$$

$$16x^2 + 15y^2 + 20y - 100 = 0$$

**3** [30] Encontre e classifique os pontos críticos da função  $f(x, y) = \text{sen}(x)\text{sen}(y)$  na região aberta  $-\pi < x < \pi$  e  $-\pi < y < \pi$

Calculando as **derivadas primeiras** de  $f$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\text{sen}(x)\text{sen}(y)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\text{sen}(x))\text{sen}(y) \\ &= \cos(x)\text{sen}(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (\text{sen}(x)\text{sen}(y)) \\ &= \text{sen}(x)\frac{\partial}{\partial y} (\text{sen}(y)) \\ &= \text{sen}(x)\cos(y)\end{aligned}$$

Encontrando os **pontos críticos**. As derivadas parciais de  $f$  existem em todo o plano, temos então que resolver o sistema  $\nabla f = 0$

$$\begin{aligned}\cos(x)\text{sen}(y) &= 0 \\ \text{sen}(x)\cos(y) &= 0\end{aligned}$$

Da primeira equação temos que

$$\cos(x) = 0 \quad x = \pm \frac{\pi}{2}$$

ou

$$\text{sen}(y) = 0 \quad y = 0$$

Se  $y = 0$  a segunda equação se torna

$$\begin{aligned}\text{sen}(x)\cos(0) &= 0 \\ \text{sen}(x) &= 0 \\ x &= 0\end{aligned}$$

Então o primeiro ponto é

$$P_1 = (0, 0)$$

Se  $x = \pi/2$  a segunda equação se torna

$$\begin{aligned}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(y) &= 0 \\ \cos(y) &= 0\end{aligned}$$

$$y = \pm \frac{\pi}{2}$$

Temos então os pontos

$$P_2 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad P_3 = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$$

Se  $x = -\pi/2$  a segunda equação se torna

$$\begin{aligned}\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(y) &= 0 \\ -\cos(y) &= 0 \\ y &= \pm \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Temos então os pontos

$$P_4 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad P_5 = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$$

Para **classificar** os pontos críticos precisamos do determinante da Hessiana

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (\cos(x)\text{sen}(y)) = -\text{sen}(x)\text{sen}(y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} (\text{sen}(x)\cos(y)) = -\text{sen}(x)\text{sen}(y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} (\text{sen}(x)\cos(y)) = \cos(x)\cos(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(x, y) &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 \\ &= (-\text{sen}(x)\text{sen}(y)) \\ &\quad \times (-\text{sen}(x)\text{sen}(y)) \\ &\quad - (\cos(x)\cos(y))^2 \\ &= \text{sen}^2(x)\text{sen}^2(y) - \cos^2(x)\cos^2(y)\end{aligned}$$

Classificando o ponto  $P_1$

$$\begin{aligned}D(0, 0) &= \text{sen}^2(0)\text{sen}^2(0) - \cos^2(0)\cos^2(0) \\ &= 0 \times 0 - 1 \times 1 = -1 < 0\end{aligned}$$

O ponto  $P_1$  é um ponto de sela

Classificando o ponto  $P_2$

$$\begin{aligned} D\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &= \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 \times 1 - 0 \times 0 \\ &= 1 > 0 \\ f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -1 \times 1 \\ &= -1 < 0 \end{aligned}$$

O ponto  $P_2$  é um máximo local

Classificando o ponto  $P_3$

$$\begin{aligned} D\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) &= \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 \times (-1)^2 - 0 \times 0 \\ &= 1 > 0 \\ f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -1 \times (-1) \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

O ponto  $P_3$  é um mínimo local

Classificando o ponto  $P_4$

$$\begin{aligned} D\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &= \sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= (-1)^2 \times 1 - 0 \times 0 \\ &= 1 > 0 \\ f_{xx}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -(-1) \times 1 \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

O ponto  $P_4$  é um mínimo local

Classificando o ponto  $P_5$

$$\begin{aligned} D\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) &= \sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= (-1)^2 \times (-1)^2 - 0 \times 0 \\ &= 1 > 0 \\ f_{xx}\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -(-1) \times (-1) \\ &= -1 < 0 \end{aligned}$$

O ponto  $P_5$  é um máximo local

4 [30] Encontre o valor mínimo de  $x^2 + y^2$  sujeito a  $xy = 1$

Queremos encontrar os valores máximo e mínimo da função

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sujeitos a restrição

$$g(x, y) = xy = 1$$

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) = 2y$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x$$

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Precisamos resolver o sistema

$$2x = \lambda y$$

$$2y = \lambda x$$

$$xy = 1$$

Pela terceira equação sabemos que  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ . Isolando  $\lambda$  na primeira,  $\lambda = \frac{2x}{y}$ , e

substituindo na segunda, temos

$$2y = \lambda x$$

$$2y = \frac{2x}{y}x$$

$$y^2 = x^2$$

$$y = \pm x$$

Se  $y = x$ , da terceira equação temos

$$xy = 1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Temos, então, os pontos

$$P_1 = (1, 1) \quad \text{e} \quad P_2 = (-1, -1)$$

Se  $y = -x$ , da terceira equação temos

$$xy = 1$$

$$x(-x) = 1$$

$$-x^2 = 1$$

$$x^2 = -1$$

Não existe solução neste caso.

Avaliando  $f$  nos pontos encontrados, temos

$$f(1, 1) = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$f(-1, -1) = (-1)^2 + (-1)^2 = 2$$

Os dois pontos são pontos de mínimo e o valor mínimo da função é 2