

## GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

- 1 [20] Converta a equação para coordenadas cartesianas e mostre que a solução é uma cônica

$$r = \frac{8}{3 + 2 \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta}$$

Queremos mostrar que a equação, escrita em coordenadas cartesianas,  $(x, y)$ , é uma expressão com termos de segundo grau em  $x$  e  $y$

$$r = \frac{8}{3 + 2 \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta}$$

$$r(3 + 2 \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta) = 8$$

$$3r + 2r \cos \theta + 2r \operatorname{sen} \theta = 8$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2} + 2x + 2y = 8$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2} = 8 - 2x - 2y$$

$$9(x^2 + y^2) = (8 - 2x - 2y)^2$$

$$9x^2 + 9y^2 = 64 - 32x - 32y + 4x^2 + 8xy + 4y^2$$

$$5x^2 + 5y^2 - 8xy + 32x + 32y - 64 = 0$$

**2** [20] Determine todas as raízes cúbicas de  $z = -8i$

Converter para forma polar

$$x = \operatorname{Re}(z) = 0$$

$$y = \operatorname{Im}(z) = -8$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-8)^2} = 8$$

$$\varphi = \arg(z) = -\frac{\pi}{2}$$

Aplicar a fórmula de De Moivre para as raízes cúbicas

$$u_k = 2 \left[ \cos \left( \frac{-\pi/2 + 2k\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{-\pi/2 + 2k\pi}{3} \right) \right] \quad k = 0, 1, 2$$

Calculando os argumentos das raízes

$$\varphi_0 = \frac{-\pi/2 + 2 \times 0\pi}{3} = \frac{-\pi}{6}$$

$$\varphi_1 = \frac{-\pi/2 + 2 \times 1\pi}{3} = \frac{-\pi/2 + 4\pi/2}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_2 = \frac{-\pi/2 + 2 \times 2\pi}{3} = \frac{-\pi/2 + 8\pi/2}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

As raízes são

$$u_0 = 2 \left[ \cos \left( \frac{-\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{-\pi}{6} \right) \right] = 2e^{-i\pi/6} = \sqrt{3} - i$$

$$u_1 = 2 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \right] = 2e^{i\pi/2} = 2i$$

$$u_2 = 2 \left[ \cos \left( \frac{7\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{7\pi}{6} \right) \right] = 2e^{7i\pi/6} = -\sqrt{3} - i$$

**3** [30] Encontre e classifique os pontos críticos da função  $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

Calculando as **derivadas primeiras** de  $f$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^3 - 12xy + 8y^3) \\ &= 3x^2 - 12y + 0 \\ &= 3x^2 - 12y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (x^3 - 12xy + 8y^3) \\ &= 0 - 12x + 8 \times 3y^2 \\ &= 24y^2 - 12x\end{aligned}$$

Encontrando os **pontos críticos**. As derivadas parciais de  $f$  existem em todo o plano, temos então que resolver o sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 12y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 24y^2 - 12x = 0\end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned}x^2 - 4y &= 0 \\ 2y^2 - x &= 0\end{aligned}$$

Isolando  $x$  na segunda equação e substituindo na primeira temos

$$\begin{aligned}x &= 2y^2 \\ x^2 - 4y &= 0 \\ (2y^2)^2 - 4y &= 0 \\ 4y^4 - 4y &= 0 \\ y(y^3 - 1) &= 0\end{aligned}$$

As soluções são  $y = 0$  e  $y = 1$ .

Se  $y = 0$ , temos

$$x = 2 \times 0^2 = 0$$

e o ponto  $P_1 = (0, 0)$

Se  $y = 1$ , temos

$$x = 2 \times 1^2 = 2$$

e o ponto  $P_2 = (2, 1)$

Para **classificar** os pontos críticos precisamos do determinante da Hessiana

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 - 12y) = 6x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} (24y^2 - 12x) = 48y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 - 12y) = -12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(x, y) &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 \\ &= (6x)(48y) - (-12)^2 \\ &= 144(2xy - 1)\end{aligned}$$

Classificando o ponto  $P_1$

$$D(0, 0) = 144(2 \times 0 \times 0 - 1) = -144 < 0$$

$P_1$  é ponto de sela

Classificando o ponto  $P_2$

$$\begin{aligned}D(2, 1) &= 144(2 \times 2 \times 1 - 1) = 144(4 - 1) > 0 \\ f_{xx}(2, 1) &= 6 \times 2 = 12 > 0\end{aligned}$$

O ponto  $P_2$  é um mínimo local

4 [30] Encontre os valores máximo e mínimo de  $3x + y$  sujeitos a  $x^2 + y^2 = 10$

Queremos encontrar os valores máximo e mínimo da função

$$f(x, y) = 3x + y$$

sujeitos a restrição

$$g(x, y) = x^2 + y^2 = 10$$

Gradiente de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x + y) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x + y) = 1$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gradiente de  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) = 2y$$

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Precisamos resolver o sistema

$$3 = \lambda 2x$$

$$1 = \lambda 2y$$

$$x^2 + y^2 = 10$$

Da primeira equação verificamos que  $x \neq 0$  e  $\lambda \neq 0$ , da segunda verificamos que  $y \neq 0$ .

Isolando  $x$  e  $y$  nas duas primeiras equações e substituindo na terceira, temos

$$x = \frac{3}{2\lambda}$$

$$y = \frac{1}{2\lambda}$$

$$x^2 + y^2 = 10$$

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 10$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 10$$

$$\frac{10}{4\lambda^2} = 10$$

$$4\lambda^2 = 1$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Se } \lambda = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2^{1/2}} = 3$$

$$y = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2^{1/2}} = 1$$

Então o primeiro ponto é  $P_1 = (3, 1)$

$$\text{Se } \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2(-1/2)} = -3$$

$$y = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2(-1/2)} = -1$$

Então o primeiro ponto é  $P_1 = (-3, -1)$

Avaliando a função nos pontos

$$f(3, 1) = 3 \times 3 + 1 = 10$$

$$f(-3, -1) = 3 \times (-3) + (-1) = -10$$

O valor mínimo da função é  $-10$  e o valor máximo é  $10$