Séries de Taylor

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Séries de Potência e Séries de Taylor

- Séries de Potências

  Dada uma Série de Potências construímos uma função

- Séries de Taylor

  Dada uma função construímos uma Série de Potências

Séries de Taylor e Séries de Maclaurin

- Séries de Taylor

  Centrada em um ponto qualquer, $a \in \mathbb{R}$

- Séries de Maclaurin

  Série de Taylor centrada na origem, $a = 0$

Conteúdo

Construção da Série de Taylor

Supomos que uma função pode ser escrita como uma Série de Potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

Construção da Série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

$$= \boldsymbol{c_0} + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

$$f(a) = \boldsymbol{c_0}$$

$$\boldsymbol{c_0} = f(a) = \frac{f(a)}{0!}$$

Construção da Série de Taylor

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[c_0 + \mathbf{c_1}(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots\right]$$

$$= \mathbf{c_1} + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots$$

$$f'(a) = \mathbf{c_1}$$

$$\mathbf{c_1} = f'(a) = \frac{f'(a)}{1!}$$

Construção da Série de Taylor

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[c_1 + 2\boldsymbol{c_2}(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots\right]$$

$$= (2 \times 1)\boldsymbol{c_2} + (3 \times 2)c_3(x-a) + (4 \times 3)c_4(x-a)^2 + \cdots$$

$$f''(a) = (2 \times 1)\boldsymbol{c_2}$$

$$\boldsymbol{c_2} = \frac{f''(a)}{2!}$$

Construção da Série de Taylor

$$f^{(3)}(x) = \frac{d}{dx}\Big[(2\times 1)c_2 + (3\times 2)\boldsymbol{c_3}(x-a) + (4\times 3)c_4(x-a)^2 + \cdots\Big]$$

$$= (3\times 2\times 1)\boldsymbol{c_3} + (4\times 3\times 2)c_4(x-a) + (5\times 4\times 3)c_5(x-a)^2 + \cdots$$

$$f^{(3)}(a) = (3\times 2\times 1)\boldsymbol{c_3}$$

$$\boldsymbol{c_3} = \frac{f^{(3)}(a)}{3!}$$

Construção da Série de Taylor

$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}\Big[(3 \times 2 \times 1)c_3 + (4 \times 3 \times 2)\boldsymbol{c_4}(x-a) + (5 \times 4 \times 3)c_5(x-a)^2 + \cdots\Big]$$

$$= (4 \times 3 \times 2 \times 1)\boldsymbol{c_4} + (5 \times 4 \times 3 \times 2)c_5(x-a) + \cdots$$

$$f^{(4)}(a) = (4 \times 3 \times 2 \times 1)\boldsymbol{c_4}$$

$$\boldsymbol{c_4} = \frac{f^{(4)}(a)}{4!}$$

Construção da Série de Taylor

Generalizando

$$f^{(n)}(a) = n!c_n \qquad\qquad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Se $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad$ então $\quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Conteúdo

Série de Taylor

Se f é uma função infinitamente derivável em $x = a$
sua Série de Taylor centrada em $x = a$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Observe que não escrevemos que $f(x)$ é igual a sua série de Taylor

Série de Maclaurin

Uma Série de Maclaurin é uma Série de Taylor centrada em zero, $a = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Polinômios de Taylor

Se f é uma função com k derivadas em $x = a$
seu Polinômio de Taylor de ordem k centrado em $x = a$ é

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Conteúdo

Exemplo 1

Calcule a Série de Taylor da função $f(x) = e^x$ centrada em $a = 0$

Exemplo 1 – Derivadas

Derivando

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}\, e^x = e^x$$

Avaliando em $a = 0$

$$f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

Exemplo 1 – Calculando os Coeficientes

$$c_0 = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} = \frac{1}{0!} = 1$$

$$c_1 = \frac{f^{(1)}(0)}{1!} = \frac{1}{1!} = 1$$

$$c_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$$

Exemplo 1 – Construindo a Série

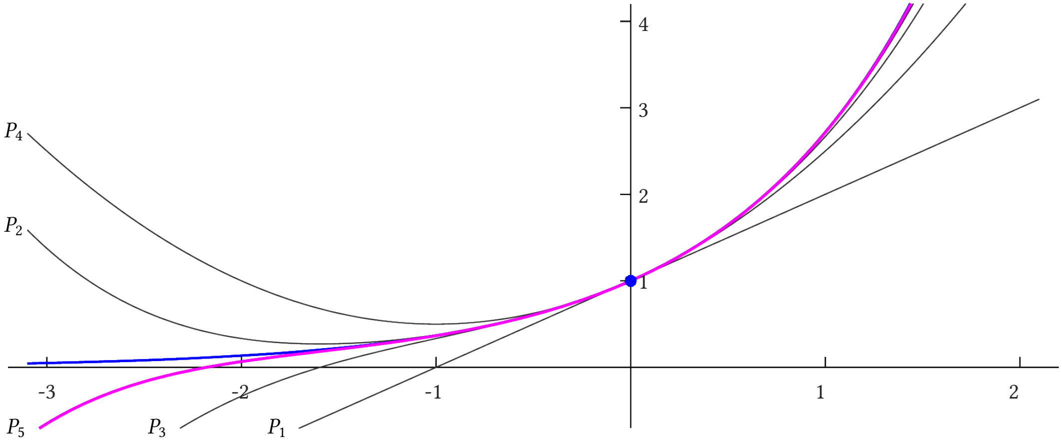
$$
\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Convergência

- Vimos que a Série de Potências converge para todo $x \in \mathbb{R}$
- Mas a série converge para a função?

$$e^x \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Polinômios de Taylor a Função Exponencial



Exemplo 2

Calcule a série de Taylor do logaritmo natural, $\ln(x)$, centrada em 1

Exemplo 2– Derivadas

Derivando

$$f^{(0)}(x) = \ln(x)$$

$$f^{(1)}(x) = x^{-1}$$

$$f^{(2)}(x) = (-1)x^{-2}$$

$$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)x^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4}$$

$$f^{(5)}(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)x^{-5}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\,x^{-n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Exemplo 2 – Derivadas

Avaliando as derivadas em $x = 1$

Para $n = 0$

$$f^{(0)}(1) = \ln(1) = 0$$

Para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\,1^{-n} = (-1)^{n-1}\,(n-1)!$$

Exemplo 2 – Calculando os Coeficientes

Calculando os coeficientes c_n

Para $n = 0$

$$c_0 = \frac{f^{(0)}(1)}{0!} = \frac{\ln(1)}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Exemplo 2 – Construindo a Série

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} \\
&= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n!} + \cdots
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

Calcule a série de Taylor do cosseno, $\cos(x)$, centrada em 0

Exemplo 3– Derivadas

Derivando

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \cos(x) \\
f^{(1)}(x) &= -\operatorname{sen}(x) \\
f^{(2)}(x) &= -\cos(x) \\
f^{(3)}(x) &= \operatorname{sen}(x) \\
f^{(4)}(x) &= \cos(x) \\
f^{(5)}(x) &= -\operatorname{sen}(x) \\
f^{(6)}(x) &= -\cos(x)
\end{aligned}
$$

Avaliando as derivadas em $x = 0$

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(0) &= \cos(0) = 1 \\
f^{(1)}(0) &= -\operatorname{sen}(0) = 0 \\
f^{(2)}(0) &= -\cos(0) = -1 \\
f^{(3)}(0) &= \operatorname{sen}(0) = 0 \\
f^{(4)}(0) &= \cos(0) = 1 \\
f^{(5)}(0) &= -\operatorname{sen}(0) = 0 \\
f^{(6)}(0) &= -\cos(0) = -1
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Representando o padrão

Para n ímpar

$$f^{(n)}(0) = 0$$

Para n par

$$f^{(0)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(0) = -1$$

$$f^{(4)}(0) = 1$$

$$f^{(6)}(0) = -1$$

Para todo k, $n = 2k$ é sempre par

k	n	$f^{(2k)}(0)$
0	0	1
1	2	-1
2	4	1
3	6	-1
4	8	1

Assim $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$

Exemplo 3 – Calculando os Coeficientes

Calculando os coeficientes c_n

Para n ímpar

$$c_n = 0$$

Para n par, usamos $n = 2k$

$$c_n = c_{2k} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

Exemplo 3 – Construindo a Série

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots
\end{aligned}
$$

Exemplo 4

Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ e o raio de convergência da série de potências.

Exemplo 4 – Calculando as derivadas

$$f^{(0)}(x) = (1-x)^{-2} \qquad f^{(0)}(0) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = (1-x)^{-3}\, 2 \qquad f^{(1)}(0) = 2$$

$$f^{(2)}(x) = (1-x)^{-4}\, 2 \cdot 3 \qquad f^{(2)}(0) = 3!$$

$$f^{(3)}(x) = (1-x)^{-5}\, 2 \cdot 3 \cdot 4 \qquad f^{(3)}(0) = 4!$$

$$f^{(n)}(x) = (1-x)^{-n-2}(n+1)! \qquad f^{(n)}(0) = (n+1)!$$

Exemplo 4 – Série de Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\, n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

Exemplo 4 – Analisando a convergência

Usando o teste da razão para determinar o Raio de Convergência

$$a_n = (n+1)x^n \qquad |a_n| = (n+1)|x|^n$$

$$a_{n+1} = [(n+1)+1]x^{n+1} = (n+2)x^{n+1} \qquad |a_{n+1}| = (n+2)|x|^{n+1}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)|x|^{n+1}}{(n+1)|x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1+{}^2/_n}{1+{}^1/_n} = |x|$$

A série converge para $\rho = |x| < 1$ portanto $R = 1$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 8.1 da Apostila

Exercícios: 1a-d, 2d-h, 3a-d, 5a-c

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações