Integrais Impróprias

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Integrais Impróprias

1. Intervalo de integração infinito

2. Descontinuidade no extremo do intervalo

Integrais Impróprias

1. Envolve o calculo de um limite
2. Se o limite existe a integral é convergente
3. Se algum limite não existir a integral é divergente

Conteúdo

Integrais Impróprias – Tipo 1

f função contínua em intervalo ilimitado, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, \infty)$

Integrais Impróprias – Tipo 1

f é função contínua em $[a, \infty)$

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \;=\; \lim_{t\to\infty} \int_a^{t} f(x)\,dx$$

Integrais Impróprias – Tipo 1

f é função contínua em $(-\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \;=\; \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$$

Integrais Impróprias – Tipo 1

f é função contínua em $(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{c} f(x)\,dx + \lim_{s\to\infty} \int_{c}^{s} f(x)\,dx$$

para algum $c \in \mathbb{R}$

Conteúdo

Integrais Impróprias – Tipo 1

f função contínua no interior do intervalo, mas tende ao infinito em algum ponto

Integrais Impróprias – Tipo 2

f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Atenção ao limite lateral

Integrais Impróprias – Tipo 2

f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\, dx$$

Atenção ao limite lateral

Integrais Impróprias – Tipo 2

f é uma função definida em $[a, b]$, contínua exceto em um ponto $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$= \lim_{r \to c^-} \int_a^r f(x)\,dx + \lim_{s \to c^+} \int_s^b f(x)\,dx$$

Conteúdo

Exemplo 1

Calcular a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx$

Exemplo 1

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx &= \lim_{t \to -\infty} \left(\int_t^0 e^x \, dx \right) && \text{definição integral imprópria} \\
&= \lim_{t \to -\infty} \left(e^x \Big|_t^0 \right) \\
&= \lim_{t \to -\infty} \left(e^0 - e^t \right) \\
&= \lim_{t \to -\infty} 1 - \lim_{t \to -\infty} e^t \\
&= 1
\end{aligned}$$

Exemplo 2

Determine se a integral

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^{2/3}}\, dx$$

é convergente ou divergente

Exemplo 2

$$f(x) = \frac{1}{x^{2/3}} = x^{-2/3} \text{ é descontínua em } x = 0$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^{2/3}}\, dx = \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} x^{-2/3}\, dx$$

$$= \lim_{t \to 0^-} \left(\frac{x^{-2/3+1}}{-2/3 + 1} \Bigg|_{-1}^{t} \right)$$

$$= \lim_{t \to 0^-} \left(3x^{1/3} \Bigg|_{-1}^{t} \right)$$

$$= \lim_{t \to 0^-} 3 \left[t^{1/3} - (-1)^{1/3} \right]$$

$$= 3$$

Portanto, a integral imprópria converge

Exemplo 3

Calcule

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$$

se possível

Exemplo 3

A função $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ é descontínua em $x = 1 \in [0, 3]$

Precisamos dividir o intervalo e duas partes $[0, 1]$ e $[1, 3]$

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx$$

Agora a descontinuidade está nos extremos dos intervalos e podemos usar integrais impróprias

Exemplo 3

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1}\,dx \\
&= \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1|\Big|_0^t \\
&= \lim_{t\to 1^-} \big(\ln|t-1| - \ln|-1|\big) \\
&= \lim_{t\to 1^-} \ln(1-t) \qquad\qquad 1-t \to 0^+ \text{ quando } t \to 1^- \\
&= -\infty
\end{aligned}
$$

Portanto a integral diverve e não precisamos calcular a segunda parte

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 2.6 da Apostila

Fazer os exercícios 1, 2 e 3

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações