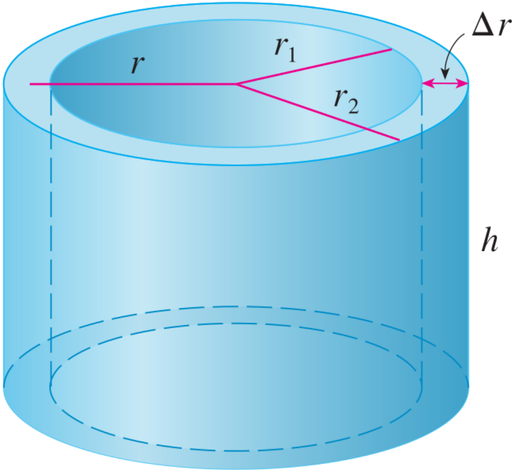
Volumes por Cascas Cilíndricas

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Casca Cilíndrica



Volume de uma Casca Cilíndrica

$$
\begin{aligned}
V &= V_2 - V_1 \\
&= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h \\
&= \pi \left(r_2^2 - r_1^2\right) h \\
&= \pi \left(r_2 + r_1\right) \left(r_2 - r_1\right) h \\
&= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} \left(r_2 - r_1\right) h \\
&= 2\pi r \, \Delta r \, h
\end{aligned}
$$

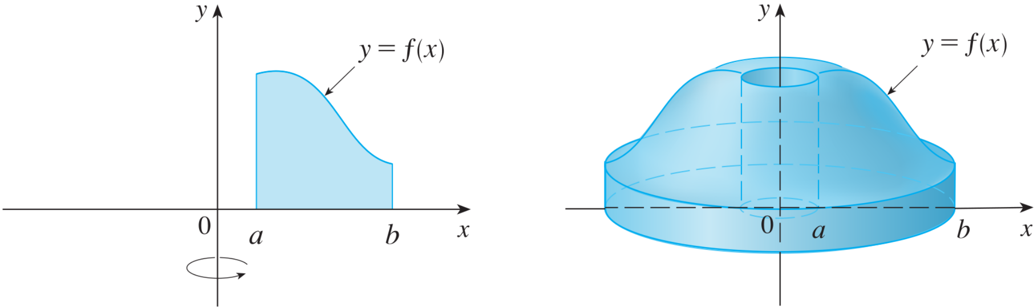
onde fizemos $r = \dfrac{r_2 + r_1}{2}$ e $\Delta r = r_2 - r_1$

Volume de uma Casca Cilíndrica

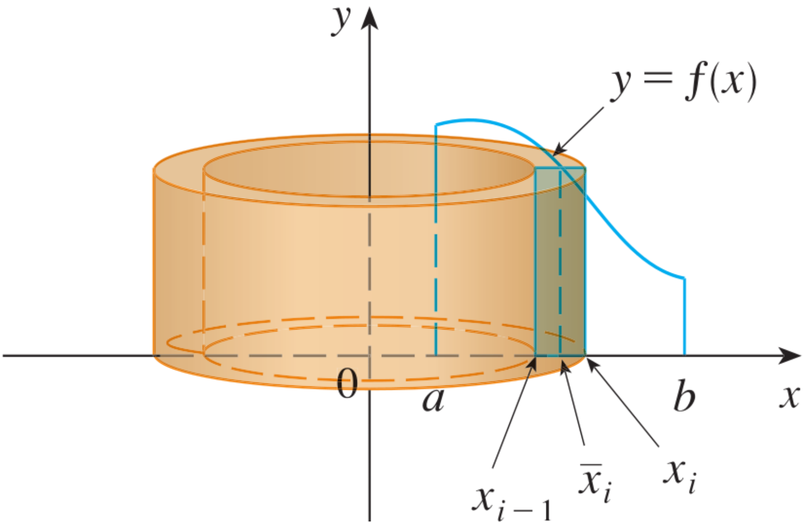
$$\begin{aligned} V &= (\text{circunferência})\,(\text{altura})\,(\text{espessura}) \\ &= (2\pi r)\,(h)\,(\Delta x) \end{aligned}$$

Conteúdo

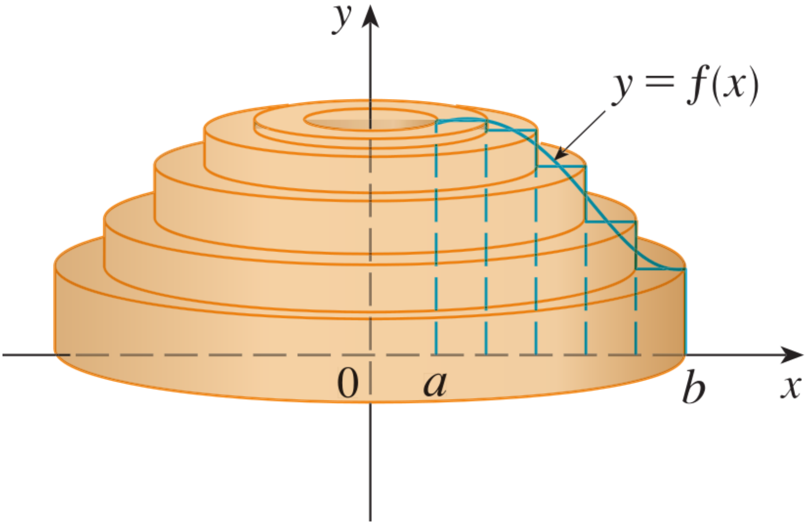
Sólido de Revolução



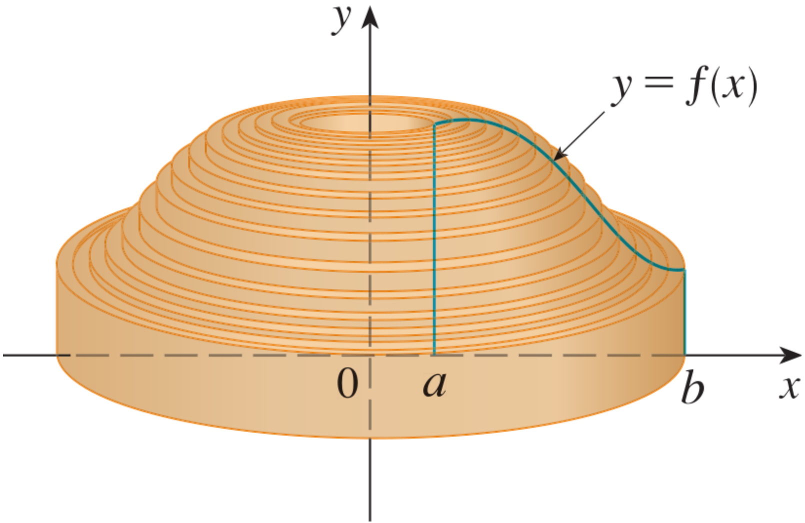
Volume Sólido de Revolução



Volume Sólido de Revolução



Volume Sólido de Revolução



Volumes por Cascas Cilíndricas

$$
\begin{aligned}
V &= \int_a^b dV \\
&= \int_a^b (\text{circunferência})\,(\text{altura})\,(\text{espessura}) \\
&= \int_a^b 2\pi x\, f(x)\ dx
\end{aligned}
$$

Volumes por Cascas Cilíndricas

O volume do sólido S obtido pela rotação em torno do eixo y da região

$$R = \left\{ (x, y) \colon \; 0 \leq y \leq f(x), \; a \leq x \leq b \right\}$$

é calculado pela integral

$$V = \int_a^b 2\pi \, x \, f(x) \, dx$$

Conteúdo

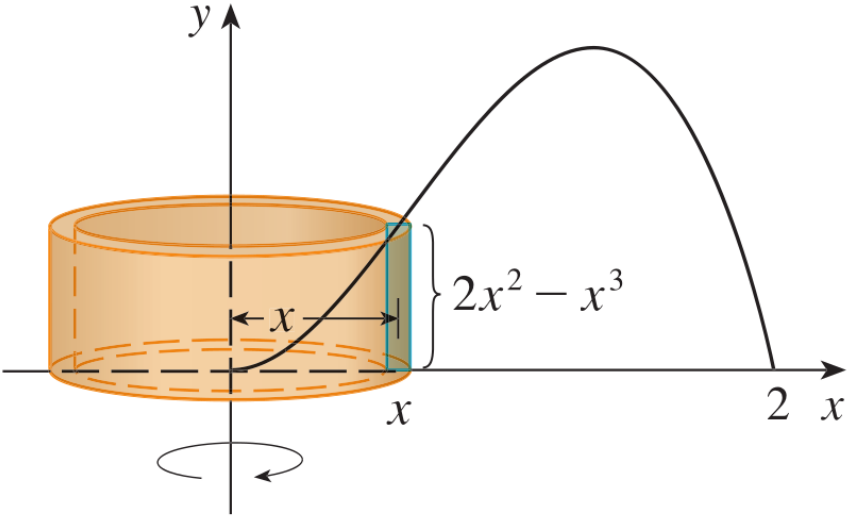
Exemplo 1

Exemplo 1

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por

$$y = 2x^2 - x^3 \qquad \text{e} \qquad y = 0$$

Exemplo 1 – Esboço



Exemplo 1 – Casca Cilíndrica

Raio	$r(x) = x$
Circunferência	$2\pi x$
Altura	$h(x) = 2x^2 - x^3$

Exemplo 1 – Volume

$$V = \int_0^2 2\pi x \left(2x^2 - x^3\right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 2x^3 - x^4 dx$$

$$= 2\pi \left(2\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right) \Big|_0^2$$

$$= 2\pi \left(2^3 - \frac{2^5}{5}\right) = 2\pi \left(\frac{5 \times 8}{5} - \frac{32}{5}\right) = 2\pi \frac{8}{5} = \frac{16\pi}{5}$$

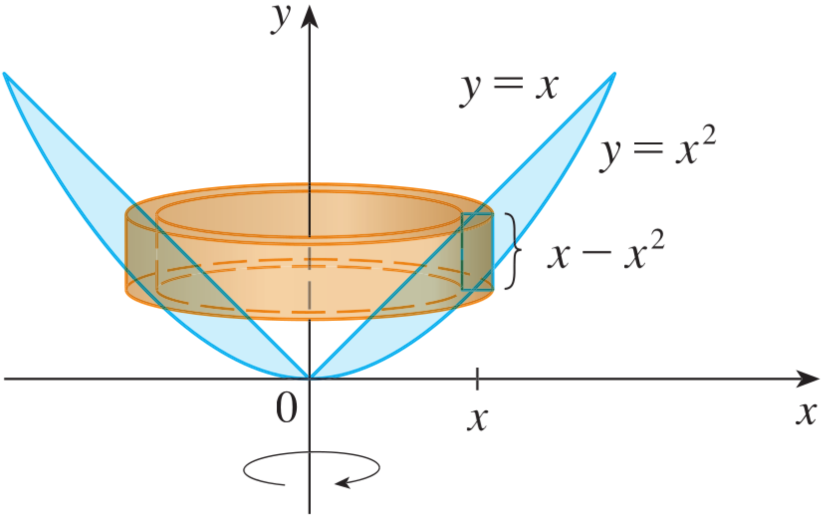
Exemplo 2

Exemplo 2

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região entre

$$y = x \qquad \text{e} \qquad y = x^2$$

Exemplo 2 – Esboço



Exemplo 2 – Casca Cilíndrica

Raio	$r(x) = x$
Circunferência	$2\pi x$
Altura	$h(x) = x - x^2$

Exemplo 2 – Volume

$$V = \int_0^1 2\pi x \left(x - x^2\right)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 x^2 - x^3 dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 2\pi\frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}$$

Exemplo 3

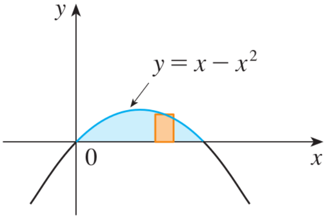
Exemplo 3

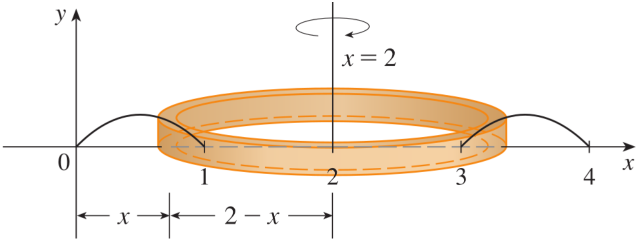
Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada por

$$y = x - x^2 \qquad \text{e} \qquad y = 0$$

em torno da reta $x = 2$

Exemplo 3 – Esboço





Exemplo 3 – Casca Cilíndrica

Raio	$r(x) = 2 - x$
Circunferência	$2\pi(2 - x)$
Altura	$h(x) = x - x^2$

Exemplo 3

$$V = \int_0^1 2\pi(2-x)\left(x-x^2\right)dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x\,dx$$

$$= 2\pi\left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Big|_0^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) = \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 4

Exemplo 4

Use cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x da região sob a curva

$$y = \sqrt{x}$$

de 0 até 1

Exemplo 4 – Casca Cilíndrica

Raio	$r(y) = y$
Circunferência	$2\pi y$
Altura	$h(y) = 1 - y^2$

Exemplo 4

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 2\pi y(1-y^2)\,dy \\
&= 2\pi \int_0^1 y - y^3\,dy \\
&= 2\pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 5

Exemplo 5

Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas

$$x = (y - 3)^2 \qquad \text{e} \qquad x = 4$$

em torno da reta $y = 1$

Exemplo 5 – Casca Cilíndrica

Raio	$r(y) = y - 1$
Circunferência	$2\pi(y - 1)$
Altura	$h(y) = 4 - (y - 3)^2$

Exemplo 5

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^5 2\pi(y-1)\left(4-(y-3)^2\right)dy \\
&= 2\pi \int_1^5 (y-1)\left(-y^2+6y-5\right) dy \\
&= 2\pi \int_1^5 -y^3+7y^2-11y+5\, dy \\
&= 2\pi \left(-\frac{y^4}{4}+7\frac{y^3}{3}-11\frac{y^2}{2}+5y\right)\Bigg|_1^5 \\
&= 2\pi\left[\left(-\frac{5^4}{4}+7\frac{5^3}{3}-11\frac{5^2}{2}+25\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{7}{3}-\frac{11}{2}+5\right)\right] = \frac{128\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Exemplo 6

Exemplo 6

Use os dois métodos estudados para encontrar o volume do sólido gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas

$$y = 5 - 4x \qquad y = \sqrt{x} \qquad x = 0$$

em torno do eixo y

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 3.4 da Apostila

Exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações