Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Se f for contínua em $[a, b]$ então, para qualquer primitiva F de f,

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) - F(a) \;=\; F(x)\Big|_a^b$$

Demonstração

Queremos mostrar que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Demonstração

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é uma primitiva de f

Qualquer outra primitiva tem a forma

$$F(x) = G(x) + C$$

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

$$
\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= \big(G(b) + C\big) - \big(G(a) + C\big) \\
&= G(b) - G(a) \\
&= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^a f(x)\,dx \\
&= \int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}
$$

Conteúdo

Exemplo 1

Calcular a área sob o gráfico de $f(x) = x^2$ entre 0 e b

Exemplo 1

$$\text{Área} \;=\; \int_0^b f(x)\,dx \;=\; \int_0^b x^2\,dx$$

Sabemos que a primitiva de f é

$$F(x) \;=\; \int x^2\,dx \;=\; \frac{x^{2+1}}{2+1} + C \;=\; \frac{x^3}{3} + C$$

então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\text{Área} \;=\; F(x)\Big|_0^b \;=\; F(b) - F(0) \;=\; \left[\frac{b^3}{3} + C\right] - \left[\frac{0^3}{3} + C\right] \;=\; \frac{b^3}{3}$$

Exemplo 2

Calcule $\displaystyle\int_3^6 \frac{dx}{x}$

Exemplo 2

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ é contínua no intervalo } [3, 6]$$

Uma primitiva de f é $F(x) = \ln|x|$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_3^6 \frac{dx}{x} = \ln|x| \,\Big|_1^3 = \ln(6) - \ln(3) = \ln\left(\frac{6}{3}\right) = \ln(2) \approx 0.693$$

Exemplo 3

Calcule $\displaystyle\int_0^1 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3 \; dx$

Exemplo 3

Queremos uma integral definida da função

$$f(x) = 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3$$

Primeiro precisamos encontrar uma primitiva de f

Tendo a primitiva, usamos o Teorema Fundamental do Cálculo

Exemplo 3

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)dx \\
&= \int 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3 \; dx \\
&= \int 20x^5 dx - \int e^x dx + \int 3x^6 dx - \int \cos(x) dx + \int \frac{3}{1+x^2} dx - \int 3 dx \\
&= 20\frac{x^6}{6} - e^x + 3\frac{x^7}{7} - \operatorname{sen}(x) + 3\operatorname{arctg}(x) - 3x + C \\
&= \frac{10}{3}x^6 - e^x + \frac{3}{7}x^7 - \operatorname{sen}(x) + 3\operatorname{arctg}(x) - 3x + C
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 f(x)dx = F(x)\Big|_0^1 \\
&= \left(\frac{10}{3}x^6 - e^x + \frac{3}{7}x^7 - \operatorname{sen}(x) + 3\operatorname{arctg}(x) - 3x\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \left(\frac{10}{3} \times 1 - e^1 + \frac{3}{7} \times 1 - \operatorname{sen}(1) + 3\operatorname{arctg}(1) - 3 \times 1\right) \\
&- \left(\frac{10}{3} \times 0 - e^0 + \frac{3}{7} \times 0 - \operatorname{sen}(0) + 3\operatorname{arctg}(0) - 3 \times 0\right) \\
&= \left(\frac{10}{3} - e + \frac{3}{7} - \operatorname{sen}(1) + \frac{3\pi}{4} - 3\right) - (-1) \\
&= \frac{10}{3} - e + \frac{3}{7} - \operatorname{sen}(1) + \frac{3\pi}{4} - 2 \;=\; \frac{148 - 84e - 84\operatorname{sen}(1) + 63\pi}{84}
\end{aligned}
$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 2.5 da Apostila

Fazer os exercícios: 1a-f, 2, 6a-f, 7, 9a

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações