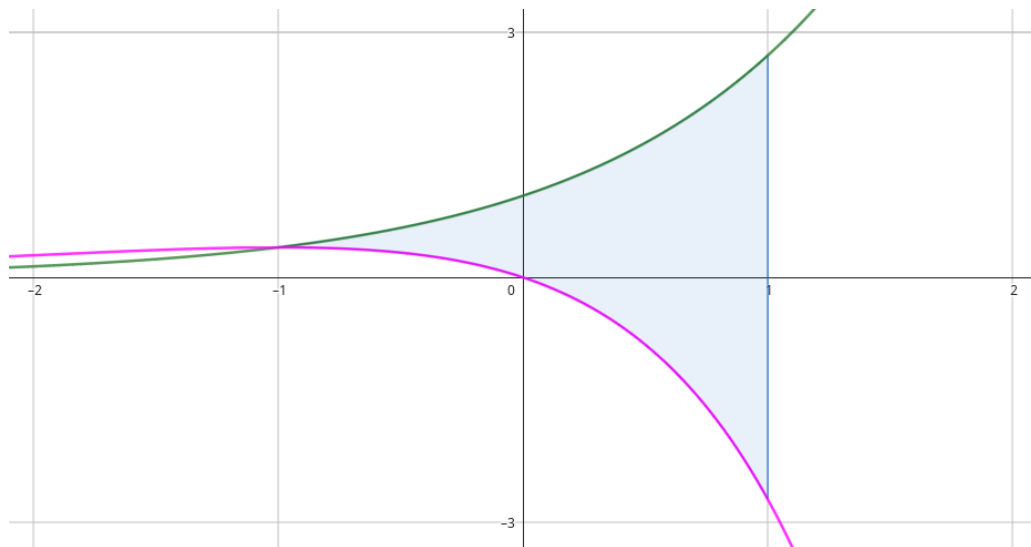


### GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [20] Calcule a área entre as curvas  $f(x) = -xe^x$ ,  $g(x) = e^x$  e  $x = 1$



Encontrando o ponto onde os gráficos das funções  $f$  e  $g$  se interceptam

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -xe^x &= e^x \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Como no intervalo  $[-1, 1]$  a função  $g$  é maior do que  $f$  a área é dada pela integral

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 g(x) - f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 e^x + xe^x dx \\ &= \int_{-1}^1 e^x dx + \int_{-1}^1 xe^x dx \end{aligned}$$

Calculando a primitiva de  $h(x) = xe^x$  por integral por partes  $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$$H(x) = \int xe^x \, dx$$

$$u = x \quad du = dx \quad dv = e^x \, dx \quad v = e^x$$

$$\begin{aligned} H(x) &= xe^x - \int e^x \, dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= (x - 1)e^x + C \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 e^x \, dx + \int_{-1}^1 xe^x \, dx \\ &= (e^x) \Big|_{-1}^1 + ((x - 1)e^x) \Big|_{-1}^1 \\ &= e^1 - e^{-1} + ((1 - 1)e^1) - ((-1 - 1)e^{-1}) \\ &= e - \frac{1}{e} + 0 + \frac{2}{e} \\ &= e + \frac{1}{e} \end{aligned}$$

**2** [20] Use substituição simples para calcular a integral  $\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}} dx$

Escolhendo a substituição

$$u = 3ax + bx^2 \quad du = (3a + 3bx^2) dx = 3(a + bx^2) dx$$

portanto

$$(a + bx^2) dx = \frac{du}{3}$$

então

$$\begin{aligned} \int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{3ax + bx^3}} (a + bx^2) dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{3} \int u^{-1/2} du \\ &= \frac{1}{3} \frac{u^{1/2}}{1/2} + c \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{u} + c \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{3ax + bx^2} + c \end{aligned}$$

**3** [20] Encontre a primitiva da função  $f(x) = \cos^2(x) \operatorname{sen}(2x)$

$$\begin{aligned} F &= \int f(x) dx \\ &= \int \cos^2(x) \operatorname{sen}(2x) dx \\ &= \int \cos^2(x) 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x) dx \\ &= 2 \int \cos^3(x) \operatorname{sen}(x) dx \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $u = \cos(x)$   $du = -\operatorname{sen}(x) dx$

$$\begin{aligned} F &= -2 \int u^3 du \\ &= -2 \frac{u^4}{4} + c \\ &= -\frac{1}{2} \cos^4(x) + c \end{aligned}$$

4 [20] Encontre a primitiva da função  $h(x) = \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}$

$$H = \int \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Fazendo a substituição  $x = 2 \operatorname{sen}(\theta)$   $dx = 2 \cos(\theta) d\theta$

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{2^5 \operatorname{sen}^5(\theta)}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2(\theta)}} 2 \cos(\theta) d\theta \\ &= 2^5 \int \frac{\operatorname{sen}^5(\theta)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}} \cos(\theta) d\theta \\ &= 2^5 \int \frac{\operatorname{sen}^5(\theta)}{\cos(\theta)} \cos(\theta) d\theta \\ &= 2^5 \int \operatorname{sen}^5(\theta) d\theta \\ &= 2^5 \int (\operatorname{sen}^2(\theta))^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta \\ &= 2^5 \int (1 - \cos^2(\theta))^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $u = \cos(\theta)$   $du = -\operatorname{sen}(\theta) d\theta$

$$\begin{aligned} H &= -2^5 \int (1-u^2)^2 du \\ &= -2^5 \int 1 - 2u^2 + u^4 du \\ &= 2^5 \int 2u^2 - u^4 - 1 du \\ &= 2^5 \left( \frac{2}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 - u \right) + c \\ &= 2^5 \left( \frac{2}{3} \cos^3(\theta) - \frac{1}{5} \cos^5(\theta) - \cos(\theta) \right) + c \end{aligned}$$

Para calcular  $\cos(\theta)$  usamos que  $\operatorname{sen}(\theta) = x/2$ , portanto a hipotenusa é 2 e o cateto oposto é  $x$  assim o cateto adjacente é  $a = \sqrt{2^2 - x^2} = \sqrt{4 - x^2}$  e o cosseno é

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

Voltando para a integral

$$\begin{aligned} H &= 2^5 \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \right)^3 - \frac{1}{5} \left( \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \right)^5 - \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \right] + c \\ &= 2^5 \left[ \frac{2}{3 \cdot 2^3} (\sqrt{4-x^2})^3 - \frac{1}{5 \cdot 2^5} (\sqrt{4-x^2})^5 - \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2} \right] + c \\ &= \sqrt{4-x^2} \left[ \frac{2^3}{3} (\sqrt{4-x^2})^2 - \frac{1}{5} (\sqrt{4-x^2})^4 - 2^4 \right] + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{4-x^2} \left[ \frac{8}{3} (4-x^2) - \frac{1}{5} (4-x^2)^2 - 16 \right] + c \\
&= \sqrt{4-x^2} \left[ \frac{32-8x^2}{3} - \frac{16-8x^2+x^4}{5} - 16 \right] + c \\
&= \sqrt{4-x^2} \left[ \frac{5 \cdot 32 - 5 \cdot 8x^2}{15} - \frac{3 \cdot 16 - 3 \cdot 8x^2 + 3x^4}{15} - \frac{16 \cdot 15}{15} \right] + c \\
&= \frac{\sqrt{4-x^2}}{15} \left[ 16 \cdot 5 \cdot 2 - 16 \cdot 3 - 16 \cdot 5 \cdot 3 - 5 \cdot 8x^2 + 3 \cdot 8x^2 - 3x^4 \right] + c \\
&= \frac{\sqrt{4-x^2}}{15} \left[ -16 \cdot 5 - 16 \cdot 3 - 2 \cdot 8x^2 - 3x^4 \right] + c \\
&= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{15} \left[ 16 \cdot 8 + 2 \cdot 8x^2 + 3x^4 \right] + c \\
&= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{15} \left[ 128 + 16x^2 + 3x^4 \right] + c
\end{aligned}$$

**5** [20] Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno da reta  $x = -1$ , da região contida entre as curvas

$$f(x) = \frac{1}{4x - x^2} \quad y = 0 \quad x = 1 \quad x = 3$$

Volume por castas cilíndricas

$$V = \int_a^b 2\pi r(x)h(x)dx$$

$$a = 1$$

$$b = 3$$

$$r = x + 1$$

$$h = \frac{1}{4x - x^2}$$

portanto

$$V = 2\pi \int_1^3 \frac{x+1}{4x-x^2} dx$$

Calculando a integral indefinida

$$F = \int \frac{x+1}{4x-x^2} dx = \int \frac{x+1}{x(4-x)} dx$$

Por frações parciais temos

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x(4-x)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{4-x} \\ x+1 &= A(4-x) + Bx \\ &= (B-A)x + 4A \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes

$$\begin{cases} -A + B = 1 \\ 4A = 1 \end{cases}$$

obtemos os valores  $A = \frac{1}{4}$  e  $B = \frac{5}{4}$  portanto

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{1}{4x} + \frac{5}{4(4-x)} dx \\ &= \frac{1}{4} \ln(x) - \frac{5}{4} \ln(4-x) + c \end{aligned}$$

Voltando ao volume temos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi F(x) \Big|_1^3 \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{4} \ln(x) - \frac{5}{4} \ln(4-x) \right] \Big|_1^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \left[ \left( \frac{1}{4} \ln(3) - \frac{5}{4} \ln(4-3) \right) - \left( \frac{1}{4} \ln(1) - \frac{5}{4} \ln(4-1) \right) \right] \\
&= 2\pi \left( \frac{1}{4} \ln(3) + \frac{5}{4} \ln(3) \right) \\
&= 2\pi \frac{6}{4} \ln(3) \\
&= 3\pi \ln(3)
\end{aligned}$$