CFVVI – Prova 3 – Turma 4 14/07/2025

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [20] Converta a equação para coordenadas cartesianas e mostre que a solução é uma cônica

$$r = \frac{12}{1 - 3\cos\theta}$$

Queremos mostrar que a equação, escrita em coordenadas cartesianas, (x, y), é uma expressão com termos de segundo grau em x e y

$$r = \frac{12}{1 - 3\cos\theta}$$

$$r(1 - 3\cos\theta) = 12$$

$$r - 3r\cos\theta = 12$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 3x = 12$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 12 + 3x$$

$$x^2 + y^2 = 144 + 72x + 9x^2$$

$$-8x^2 + y^2 - 72x - 144 = 0$$

$$8x^2 - y^2 + 72x + 144 = 0$$

2 [20] Encontre as raízes cúbicas de $z = 27\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Converter para forma polar

$$x = \mathrm{Re}(z) = \frac{27}{2}$$

$$y = \mathrm{Im}(z) = \frac{-27\sqrt{3}}{2}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{27}{2}\right)^2 + \left(\frac{-27\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27^2}{2^2} + \frac{27^2 \times 3}{2^2}} = \sqrt{\frac{27^2 \times 4}{2^2}} = \frac{27 \times 2}{2} = 27$$

$$\varphi = \arg(z) = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\frac{-27\sqrt{3}}{2}}{\frac{27}{2}}\right) = \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$z = 27\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right] = 27e^{-i\pi/3}$$

Aplicar a fórmula de De Moivre para as raízes cúbicas

$$u_k = \sqrt[3]{27}\left[\cos\left(\frac{-\pi/3 + 2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\pi/3 + 2k\pi}{3}\right)\right] \qquad k = 0{,}1{,}2$$

Calculando os argumentos das raízes

$$\varphi_0 = \frac{-\pi/3 + 2 \times 0\pi}{3} = \frac{-\pi}{9}$$

$$\varphi_1 = \frac{-\pi/3 + 2 \times 1\pi}{3} = \frac{-\pi/3 + 6\pi/3}{3} = \frac{5\pi}{9}$$

$$\varphi_2 = \frac{-\pi/3 + 2 \times 2\pi}{3} = \frac{-\pi/3 + 12\pi/3}{3} = \frac{11\pi}{9}$$

As raízes são

$$u_0 = 3\left[\cos\left(\frac{-\pi}{9}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\pi}{9}\right)\right] = 3e^{-i\pi/9}$$

$$u_1 = 3\left[\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right] = 3e^{5i\pi/9}$$

$$u_2 = 3\left[\cos\left(\frac{11\pi}{9}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{11\pi}{9}\right)\right] = 3r^{11i\pi/9}$$

3 [30] Encontre e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$

Calculando as **derivadas primeiras** de f

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2\right)\\ &= 0 + 3\times 2xy - 6\times 2x - 0 + 0\\ &= 6xy - 12x\\ &= 6x(y-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2\right)\\ &= 3y^2 + 3x^2 - 0 - 6\times 2y + 0\\ &= 3y^2 + 3x^2 - 12y\\ &= 3(y^2 - 4y + x^2)\end{aligned}$$

Encontrando os **pontos críticos**. As derivadas parciais de f existem em todo o plano, temos então que resolver o sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x(y-2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 - 4y + x^2) = 0$$

Da primeira equação temos que $x = 0$ ou $y = 2$
Se $x = 0$ temos

$$\begin{aligned}3(y^2 - 4y + x^2) &= 0\\ y(y-4) &= 0\end{aligned}$$

cujas soluções são $y = 0$ ou $y = 4$. Temos então os pontos críticos

$$P_1 = (0,0) \quad \text{e} \quad P_2 = (0,4)$$

Se $y = 2$ temos

$$\begin{aligned}3(y^2 - 4y + x^2) &= 0\\ 2^2 - 4\times 2 + x^2 &= 0\\ 4 - 8 + x^2 &= 0\\ x^2 &= 4\\ x &= \pm 2\end{aligned}$$

cujas soluções são $x = 2$ ou $x = -2$. Temos então os pontos críticos

$$P_3 = (2,2) \quad \text{e} \quad P_4 = (-2,2)$$

Para **classificar** os pontos críticos precisamos do determinante da Hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(6xy - 12x) = 6y - 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3y^2 + 3x^2 - 12y\right) = 6y - 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(6xy - 12x) = 6x$$

$$\begin{aligned}D(x,y) &= f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2\\ &= (6y-12)(6y-12) - (6x)^2\\ &= (6y-12)^2 - 36x^2\end{aligned}$$

Classificando o ponto P_1

$$\begin{aligned}D\,(0,0) &= (6\times 0 - 12)^2 - 36\times 0^2\\ &= (-12)^2 > 0\end{aligned}$$

$$f_{xx}\,(0,0) = 6\times 0 - 12 = -12 < 0$$

O ponto P_1 é um máximo local
Classificando o ponto P_2

$$\begin{aligned}D\,(0,4) &= (6\times 4 - 12)^2 - 36\times 0^2\\ &= (24-12)^2 > 0\end{aligned}$$

$$f_{xx}\,(0,4) = 6\times 4 - 12 = 12 > 0$$

O ponto P_2 é um mínimo local
Classificando o ponto P_3

$$\begin{aligned}D\,(2,2) &= (6\times 2 - 12)^2 - 36\times 2^2\\ &= (12-12)^2 - 36\times 4\\ &= -36\times 4 < 0\end{aligned}$$

P_3 é um ponto de sela
Classificando o ponto P_4

$$\begin{aligned} D(-2,2) &= (6\times 2-12)^2-36\times(-2)^2 \\ &= (12-12)^2-36\times 4 \\ &= -36\times 4<0 \end{aligned}$$

P_4 é um ponto de sela

4 [30] Encontre o valor mínimo de e^{xy} sujeitos a $x^3 + y^3 = 16$

Queremos encontrar o valor mínimo de e^{xy} mas como a função exponencial é crescente podemos localizar ponto onde o mínimo acontece usando a função

$$f(x,y) = xy$$

sujeitos a restrição

$$g(x,y) = x^3 + y^3 = 16$$

Gradiente de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Gradiente de g

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3) = 3x^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^3) = 3y^2$$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix}$$

Precisamos resolver o sistema

$$y = \lambda 3x^2$$

$$x = \lambda 3y^2$$

$$x^3 + y^3 = 16$$

Que podemos manipular as duas primeiras equações para obter

$$\frac{xy}{3} = \lambda x^3$$

$$\frac{xy}{3} = \lambda y^3$$

Portanto, $\lambda x^3 = \lambda y^3$
Assim $\lambda = 0$ ou $x = y$
Se $\lambda = 0$ as duas primeiras equações determinam $x = 0$ e $y = 0$ o que é incompatível com a terceira equação. Portanto, sabemos que $\lambda \neq 0$.
Substituindo $x = y$ na terceira equação

$$x^3 + y^3 = 16$$

$$2x^3 = 16$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

Portanto o único ponto candidato a mínimo é $(x,y) = (2,2)$.
Avaliando e^{xy} no ponto temos min $= e^4$