

## GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25] Considerando que a equação  $\sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(x + z) = 0$  define  $z$  como função de  $x$  e  $y$ .

- a) Calcule as derivadas  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$
- b) Encontre os valores de  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  em  $(\pi, \pi, \pi)$
- c) Construa a aproximação linear da função  $z(x, y)$  no ponto  $(\pi, \pi)$

a) Considerando  $z = z(x, y)$  e derivando por  $x$  os dois lados da equação temos

$$\begin{aligned}
 \sin(x + y) + \sin(y + z(x, y)) + \sin(x + z(x, y)) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial x} (\sin(x + y) + \sin(y + z(x, y)) + \sin(x + z(x, y))) &= 0 \\
 \cos(x + y) \frac{\partial}{\partial x} (x + y) + \cos(y + z(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} (y + z(x, y)) + \cos(x + z(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} (x + z(x, y)) &= 0 \\
 \cos(x + y) + \cos(y + z(x, y)) \frac{\partial z}{\partial x} + \cos(x + z(x, y)) \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) &= 0 \\
 \cos(x + y) + \cos(y + z(x, y)) \frac{\partial z}{\partial x} + \cos(x + z(x, y)) + \cos(x + z(x, y)) \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\
 (\cos(y + z(x, y)) + \cos(x + z(x, y))) \frac{\partial z}{\partial x} &= -\cos(x + y) - \cos(x + z(x, y)) \\
 \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\cos(x + y) + \cos(x + z(x, y))}{\cos(y + z(x, y)) + \cos(x + z(x, y))}
 \end{aligned}$$

Derivando por  $y$  os dois lados da equação temos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(y+z(x,y)) + \operatorname{sen}(x+z(x,y)) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(y+z(x,y)) + \operatorname{sen}(x+z(x,y))) &= 0 \\
 \cos(x+y) \frac{\partial}{\partial y}(x+y) + \cos(y+z(x,y)) \frac{\partial}{\partial y}(y+z(x,y)) + \cos(x+z(x,y)) \frac{\partial}{\partial y}(x+z(x,y)) &= 0 \\
 \cos(x+y) + \cos(y+z(x,y)) \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \cos(x+z(x,y)) \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\
 \cos(x+y) + \cos(y+z(x,y)) + \cos(y+z(x,y)) \frac{\partial z}{\partial y} + \cos(x+z(x,y)) \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\
 (\cos(y+z(x,y)) + \cos(x+z(x,y))) \frac{\partial z}{\partial y} &= -\cos(x+y) - \cos(y+z(x,y)) \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\cos(x+y) + \cos(y+z(x,y))}{\cos(y+z(x,y)) + \cos(x+z(x,y))}
 \end{aligned}$$

**b)** Avaliando as derivadas no ponto  $(\pi, \pi, \pi)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x}(\pi, \pi) &= \left( -\frac{\cos(x+y) + \cos(x+z)}{\cos(y+z) + \cos(x+z)} \right) \Big|_{(\pi, \pi, \pi)} \\
 &= -\frac{\cos(\pi + \pi) + \cos(\pi + \pi)}{\cos(\pi + \pi) + \cos(\pi + \pi)} \\
 &= -\frac{2 \cos(2\pi)}{2 \cos(2\pi)} \\
 &= -\frac{2 \times 1}{2 \times 1} = -1 \\
 \frac{\partial z}{\partial y}(\pi, \pi) &= \left( -\frac{\cos(x+y) + \cos(y+z)}{\cos(y+z) + \cos(x+z)} \right) \Big|_{(\pi, \pi, \pi)} \\
 &= -\frac{\cos(\pi + \pi) + \cos(\pi + \pi)}{\cos(\pi + \pi) + \cos(\pi + \pi)} \\
 &= -\frac{2 \cos(2\pi)}{2 \cos(2\pi)} \\
 &= -\frac{2 \times 1}{2 \times 1} = -1
 \end{aligned}$$

**c)** A aproximação linear da função  $z(x, y)$  no ponto  $(x_0, y_0) = (\pi, \pi)$  é

$$\begin{aligned}
 L(x, y) &= z(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \\
 &= z(\pi, \pi) + (x - \pi) \frac{\partial z}{\partial x}(\pi, \pi) + (y - \pi) \frac{\partial z}{\partial y}(\pi, \pi) \\
 &= \pi - (x - \pi) - (y - \pi) \\
 &= \pi - x + \pi - y + \pi \\
 &= 3\pi - x - y
 \end{aligned}$$

**2** [25] Encontre os valores máximo e mínimo da função  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$  restrita a região fechada limitada  $x^2 + y^2 \leq 9$

Como a função é contínua e a região é fechada e limitada sabemos que  $f$  assume um valor máximo e um valor mínimo na região.

Temos que buscar os pontos críticos no interior e aplicar multiplicadores de Lagrange na fronteira.

**Gradiente de  $f$**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 4y^2) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + 4y^2) = 8y$$

**Pontos críticos:** Impondo  $\nabla f = 0$  temos o ponto interior

$$P_1 = (0, 0)$$

**Multiplicadores de Lagrange:** Temos a restrição  $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 9$  e seu gradiente é

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) = 2y$$

Precisamos resolver o sistema

$$2x = 2\lambda x$$

$$8y = 2\lambda y$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

Que pode ser simplificado

$$x = \lambda x$$

$$4y = \lambda y$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

Da primeira equação temos que  $x = 0$  ou  $\lambda = 1$ . Se  $x = 0$  a terceira equação se reduz a  $y^2 = 9$ , cujas soluções são  $y = 3$  ou  $y = -3$ . Substituindo qualquer uma delas na segunda equação temos  $\lambda = 0$ . Encontramos o segundo e terceiro pontos

$$P_2 = (0, -3) \quad P_3 = (0, 3)$$

Se  $\lambda = 1$  a segunda equação se torna  $4y = y$  e, portanto,  $y = 0$ . Substituindo na terceira equação temos  $x^2 = 9$ , cujas soluções são  $x = -3$  ou  $x = 3$ . Encontramos o quarto e quinto pontos

$$P_4 = (-3, 0) \quad P_5 = (3, 0)$$

**Avaliando** a função nos pontos encontrados

$$f(0, 0) = 0^2 + 4 \times 0^2 = 0$$

$$f(0, -3) = 0^2 + 4 \times (-3)^2 = 36$$

$$f(0, 3) = 0^2 + 4 \times 3^2 = 36$$

$$f(-3, 0) = (-3)^2 + 4 \times 0^2 = 9$$

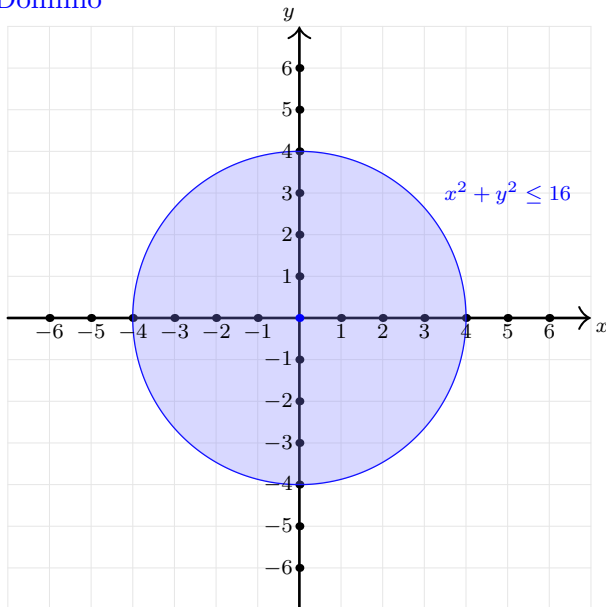
$$f(3, 0) = 3^2 + 4 \times 0^2 = 9$$

O valor mínimo de  $f$  é 0 e o valor máximo é 36

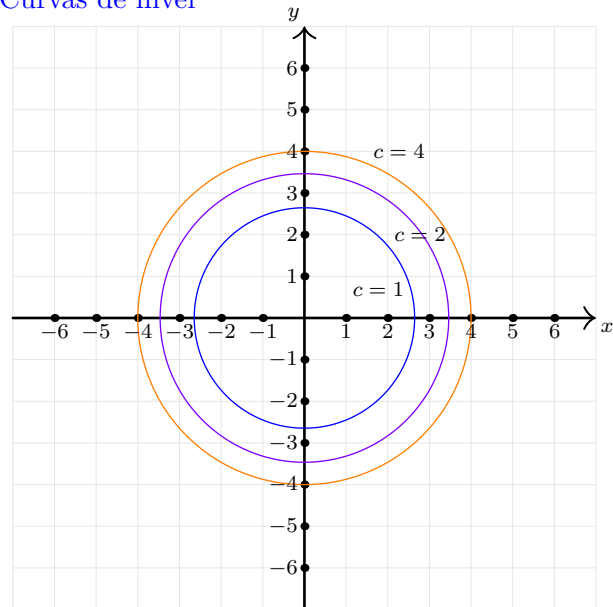
3 [25] Considerando a função  $f(x, y) = 4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

- Determine e esboce o domínio de  $f$
- Caracterize todas as curvas de nível de  $f$  e esboce três delas
- Calcule o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{f(x, y)}$  ou mostre que ele não existe

Domínio



Curvas de nível



a) O domínio de  $f$  consiste dos pontos onde é possível avaliar a raiz quadrada, isto é, os pontos que satisfazem  $16 - x^2 - y^2 \geq 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} 16 - x^2 - y^2 &\geq 0 \\ -x^2 - y^2 &\geq -16 \\ x^2 + y^2 &\leq 16 = 4^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\},$$

que corresponde a um disco de raio 4, centrado na origem.

b) As curvas de nível de  $f$  são compostas pelos pontos onde  $f(x, y) = c$  para alguma constante  $c$  na imagem de  $f$ .

Para determinar a imagem de  $f$  observamos que  $x^2 + y^2$  só pode assumir valores no intervalo  $[0, 16]$ . Portanto,  $16 - x^2 - y^2$  está limitado ao mesmo intervalo. Consequentemente  $\sqrt{16 - x^2 - y^2}$  está

em  $[0, 4]$ . Concluímos que os valores de  $f$  estão em  $[0, 4]$ , isto é,  $\text{Im}(f) = [0, 4]$

Para qualquer  $c \in \text{Im}(f) = [0, 4]$ , temos a curva de nível

$$\begin{aligned} f(x, y) &= c \\ 4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2} &= c \\ \sqrt{16 - x^2 - y^2} &= 4 - c \\ 16 - x^2 - y^2 &= (4 - c)^2 \\ -x^2 - y^2 &= (4 - c)^2 - 16 \\ x^2 + y^2 &= 16 - (4 - c)^2 \end{aligned}$$

Que corresponde a uma circunferência centrada na origem de raio

$$r = \sqrt{16 - (4 - c)^2}$$

Escolhendo os valores  $c = 1$ ,  $c = 2$  e  $c = 4$ , temos as curvas de nível

$$\gamma_1: x^2 + y^2 = 16 - (4 - 1)^2 = 16 - 9 = 7$$

$$\gamma_2: x^2 + y^2 = 16 - (4 - 2)^2 = 16 - 4 = 12$$

$$\gamma_3: x^2 + y^2 = 16 - (4 - 4)^2 = 16 - 0 = 16$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) \left( 4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2} \right)}{4^2 - \left( \sqrt{16 - x^2 - y^2} \right)^2}$$

c) Calcolando o limite

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{f(x, y)}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}} \times$$

$$\frac{4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}}{4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) \left( 4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2} \right)}{16 - (16 - x^2 - y^2)}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \left( 4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2} \right)$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( 4 + \sqrt{16 - x^2 - y^2} \right)$$

$$= 4 + \sqrt{16 - 0^2 - 0^2}$$

$$= 4 + 4 = 8$$

4 [25] Dado  $z = \frac{(1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i}{2 + 2i}$ , calcule

- a) a parte real de  $z$ ,
- b) a parte imaginária de  $z$ ,
- c) o módulo de  $z$ ,
- d) o argumento de  $z$

Avaliando  $z$

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i}{2 + 2i} \\ &= \frac{[(1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i](2 - 2i)}{(2 + 2i)(2 - 2i)} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{3})(2 - 2i) + (1 + \sqrt{3})(2i + 2)}{2^2 + 2^2} \\ &= \frac{2 - 2i - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}i + 2i + 2 + 2\sqrt{3}i + 2\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{4 + 4\sqrt{3}i}{8} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Parte real de  $z$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$$

Parte imaginária de  $z$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Módulo de  $z$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1+3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Argumento de  $z$ ,  $\varphi = \arg(z)$

$$\operatorname{sen}(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{1}{2}$$

$$\arg(z) = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$