CFVVI – Exame Especial – Turma 1 18/09/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [25] Calcule o limite solicitado, ou prove que o limite não existe, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{y-x}$

Se tentarmos calcular diretamente a fração obtemos uma indeterminação $0/0$. Portanto, precisamos remover a indeterminação manipulando algebricamente a função, assumindo que $(x,y) \neq (1,1)$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-y^2}{y-x} \\ &= \frac{(x-y)(x+y)}{y-x} \\ &= -\frac{(x-y)(x+y)}{x-y} \\ &= -(x+y) \\ &= -x-y \end{aligned}$$

Onde o cancelamento só foi possível, pois $(x,y) \neq (1,1)$. Agora podemos calcular o limite, pois temos uma função contínua em $(1,1)$,

$$L = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{y-x} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} -x-y = -2$$

2 [25] Encontre o plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4$ no ponto $(2,-3)$.

A equação do plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(2,-3)$ é

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

$$f_x(2,-3)(x-2) + f_y(2,-3)(y+3) - (z-z_0) = 0$$

Calculando as derivadas parciais

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4\right) = 2x - 2y - 1$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4\right) = 2y - 2x + 3$$

Avaliando no ponto $(2,-3)$

$$\begin{aligned} z_0 &= f(2,-3) \\ &= \left(x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4\right)\Big|_{(2,-3)} \\ &= 2^2 + (-3)^2 - 2(2)(-3) - 2 + 3(-3) + 4 \\ &= 4 + 9 + 12 - 2 - 9 + 4 \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$f_x(2,-3) = (2x - 2y - 1)\Big|_{(2,-3)} = 2(2) - 2(-3) - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$$

$$f_y(2,-3) = (2y - 2x + 3)\Big|_{(2,-3)} = 2(-3) - 2(2) + 3 = -6 - 4 + 3 = -7$$

Portanto, a equação do plano tangente é

$$\begin{aligned} &f_x(2,-3)(x-2) + f_y(2,-3)(y+3) - (z-z_0) = 0 \\ &9(x-2) - 7(y+3) - (z-18) = 0 \\ &9x - 18 - 7y - 21 - z + 18 = 0 \\ &9x - 7y - z = 21 \end{aligned}$$

3 [25] Encontre e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

Precisamos das derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[4xy - x^4 - y^4\right] = 4y - 4x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[4xy - x^4 - y^4\right] = 4x - 4y^3$$

então

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4y - 4x^3 \\ 4x - 4y^3 \end{pmatrix}$$

A função é um polinômio, então possui derivadas em todos os pontos do plano. Assim os pontos críticos são apenas os pontos onde as derivadas parciais são zero, $\nabla f = 0$

$$4y - 4x^3 = 0 \qquad \text{e} \qquad 4x - 4y^3 = 0$$

ou, simplificando,

$$y - x^3 = 0 \qquad \text{e} \qquad x - y^3 = 0$$

Isolando y na primeira equação, $y = x^3$, e substituindo na segunda, temos

$$\begin{aligned} x - y^3 &= 0 \\ x - \left(x^3\right)^3 &= 0 \\ x - x^9 &= 0 \\ x(1 - x^8) &= 0 \end{aligned}$$

As soluções dessa equação são $x = 0$, $x = 1$ ou $x = -1$. Se $x = 0$ temos $y = 0$, se $x = 1$ temos $y = 1$ e se $x = -1$ temos $y = -1$. Portanto, os pontos críticos são

$$(x_1, y_1) = (0,0), \qquad (x_2, y_2) = (1,1) \qquad \text{e} \qquad (x_3, y_3) = (-1,-1)$$

Precisamos das derivadas parciais de segunda ordem de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[4y - 4x^3\right] = -12x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[4x - 4y^3\right] = -12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[4x - 4y^3\right] = 4$$

então

$$H = \begin{pmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

Para classificar os pontos críticos precisamos avaliar o discriminante nos pontos críticos.

Considerando o ponto $(x_1, y_1) = (0, 0)$

$$f_{xx}(0,0) = 0$$

$$f_{yy}(0,0) = 0$$

$$f_{xy}(0,0) = 4$$

$$D_1 = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = 0 \times 0 - 4^2 = -16 < 0$$

Portanto, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela.
Considerando o ponto $(x_2, y_2) = (1, 1)$

$$f_{xx}(1,1) = -12$$

$$f_{yy}(1,1) = -12$$

$$f_{xy}(1,1) = 4$$

$$D_2 = f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1) - f_{xy}^2(1,1) = (-12)(-12) - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

Portanto, o ponto $(1, 1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(1,1) = -12 < 0$ o ponto é um ponto de máximo local.
Considerando o ponto $(x_3, y_3) = (-1, -1)$

$$f_{xx}(-1,-1) = -12$$

$$f_{yy}(-1,-1) = -12$$

$$f_{xy}(-1,-1) = 4$$

$$D_3 = f_{xx}(-1,-1)f_{yy}(-1,-1) - f_{xy}^2(-1,-1) = (-12)(-12) - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

Portanto, o ponto $(-1, -1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(-1,-1) = -12 < 0$ o ponto é um ponto de máximo local.

4 [25] Encontre os números positivos x, y e z, restritos a $x + y + z^2 = 16$, tais que seu produto seja máximo.

Queremos maximizar

$$f(x, y, z) = xyz$$

com a restrição

$$g(x, y, z) = x + y + z^2 = 16$$

Para usar multiplicadores de Lagrange precisamos das derivadas parciais de f e g

$$f_x(x, y, z) = yz \qquad f_y(x, y, z) = xz \qquad f_z(x, y, z) = xy$$

$$g_x(x, y, z) = 1 \qquad g_y(x, y, z) = 1 \qquad g_z(x, y, z) = 2z$$

Vamos agora resolver o sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g = 16$

$$\begin{cases} yz = \lambda \\ xz = \lambda \\ xy = 2\lambda z \\ x + y + z^2 = 16 \end{cases}$$

Igualando as duas primeiras equações

$$yz = xz$$

obtemos $z = 0$ ou $y = x$.
Como o enunciado especifica que os valores devem ser positivos então $z = 0$ pode ser desconsiderado.
Substituindo $xz = \lambda$ e $y = x$ na terceira equação

$$\begin{aligned} xy &= 2\lambda z \\ x^2 &= 2xz^2 \end{aligned}$$

temos $x = 0$ ou $z^2 = \dfrac{x}{2}$.
Como x deve ser positivo temos

$$y = x \qquad \text{e} \qquad z^2 = \frac{x}{2}$$

Substituindo na quarta equação

$$\begin{aligned} x + y + z^2 &= 16 \\ x + x + \frac{x}{2} &= 16 \\ \frac{2x}{2} + \frac{2x}{2} + \frac{x}{2} &= 16 \\ \frac{5x}{2} &= 16 \end{aligned}$$

$$x = \frac{16 \times 2}{5} = \frac{32}{5}$$

Portanto

$$y = x = \frac{32}{5}$$

$$z^2 = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\frac{32}{5} = \frac{16}{5} \qquad z = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Novamente, como z deve ser positivo temos que os valores são

$$x = y = \frac{32}{5} \qquad z = \frac{4}{\sqrt{5}}$$