

## GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

O exercício correspondente a prova que vai ser substituída vale 40 pontos.

Tabela de integrais

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad \int \operatorname{cosec}^2(x) dx = -\cot(x) + c$$

- 1 [20] Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região contida entre os gráficos das funções  $f(x) = |x - 1|$  e  $g(x) = \frac{2-x}{2}$  em torno da reta  $x = -1$

As funções vão se interceptar em  $x = 0$  e em  $b \in [1, 2]$

$$\begin{aligned} f(b) &= g(b) \\ |b - 1| &= 1 - \frac{b}{2} \\ b - 1 &= 1 - \frac{b}{2} && \text{pois } b > 1 \\ \frac{3}{2}b &= 2 \\ b &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Vamos usar cascas cilíndricas

$$V = \int_a^b 2\pi r(x)h(x)dx$$

onde

$$\begin{aligned} r(x) &= x + 1 \\ h(x) &= g(x) - f(x) \\ a &= 0 \\ b &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Para encontrar  $h(x)$  precisamos dividir região em duas partes, para  $x \in [0, 1]$

$$h(x) = g(x) - f(x) = 1 - \frac{x}{2} - |x - 1| = 1 - \frac{x}{2} + x - 1 = \frac{x}{2}$$

para  $x \in [1, 4/3]$

$$h(x) = g(x) - f(x) = 1 - \frac{x}{2} - |x - 1| = 1 - \frac{x}{2} - x + 1 = 2 - \frac{3x}{2}$$

Calculando o volume para  $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^1 2\pi r(x)h(x) dx \\ &= \int_0^1 2\pi(x+1) \frac{x}{2} dx \\ &= \pi \int_0^1 x^2 + x dx \\ &= \pi \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \pi \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

para  $x \in [1, 4/3]$

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_1^{4/3} 2\pi r(x)h(x) dx \\ &= \int_1^{4/3} 2\pi(x+1) \left( 2 - \frac{3x}{2} \right) dx \\ &= 2\pi \int_1^{4/3} -\frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2} + 2 dx \\ &= 2\pi \left( -\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} + 2x \right) \Big|_1^{4/3} \\ &= \pi \left( -x^3 + \frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_1^{4/3} \\ &= \pi \left[ \left( -\frac{4^3}{3^3} + \frac{4^2}{3^2 \times 2} + \frac{4^2}{3} \right) - \left( -1 + \frac{1}{2} + 4 \right) \right] \\ &= \pi \left( -\frac{4^3}{3^3} + \frac{4^2}{3^2 \times 2} + \frac{4^2}{3} - 3 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{19}{54}\pi \end{aligned}$$

Volume do sólido

$$V = V_1 + V_2 = \frac{5}{6}\pi + \frac{19}{54}\pi = \frac{32}{27}\pi \approx 3,7234$$

**2** [20] Calcule a integral  $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

$$F(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$x = 2 \operatorname{sen}(\theta) \quad dx = 2 \cos(\theta) d\theta$$

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-2^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} = \sqrt{4(1-\operatorname{sen}^2(\theta))} = \sqrt{4 \cos^2(\theta)} = 2 \cos(\theta)$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int \frac{4 \operatorname{sen}^2(\theta)}{2 \cos(\theta)} 2 \cos(\theta) d\theta \\ &= 4 \int \operatorname{sen}^2(\theta) d\theta \\ &= 4 \int \frac{1}{2} (1 - \cos(2\theta)) d\theta \\ &= 2 \int 1 - \cos(2\theta) d\theta \\ &= 2 \left( \theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \right) + c \\ &= 2\theta - \operatorname{sen}(2\theta) + c \\ &= 2\theta - 2 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + c \\ &= 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{x}{2} \right) - 2 \cos(\theta) \frac{x}{2} + c \\ &= 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{x}{2} \right) - \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} x + c \end{aligned}$$

**3** [20] Analise a convergência da série  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2(n))}$

Usando o teste da integral com a função

$$f(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}$$

Verificando as condições do teste

A função  $f$  só não é contínua em  $x = 0$ , portanto é contínua em  $[2, \infty)$ .

A função  $f$  é positiva para todo  $x > 0$ .

Derivando  $f$  temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} [x(1+\ln^2(x))]^{-1} \\ &= -[x(1+\ln^2(x))]^{-2} \frac{d}{dx} [x(1+\ln^2(x))] \\ &= \frac{-1}{x^2(1+\ln^2(x))^2} [(1+\ln^2(x)) + x(1+\ln^2(x))'] \\ &= \frac{-1}{x^2(1+\ln^2(x))^2} [1+\ln^2(x) + x(\ln^2(x))'] \\ &= \frac{-1}{x^2(1+\ln^2(x))^2} [1+\ln^2(x) + x2\ln(x)(\ln(x))'] \\ &= \frac{-1}{x^2(1+\ln^2(x))^2} \left[ 1+\ln^2(x) + x2\ln(x)\frac{1}{x} \right] \\ &= -\frac{1+\ln^2(x) + 2\ln(x)}{x^2(1+\ln^2(x))^2} \end{aligned}$$

Que será negativa para  $x > 1$ .

Calculando a primitiva

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{dx}{x(1+\ln^2(x))} & u &= \ln(x) & du &= \frac{dx}{x} \\ &= \int \frac{du}{1+u^2} \\ &= \arctg(u) + c \\ &= \arctg(\ln(x)) + c \end{aligned}$$

Calculando a integral imprópria

$$\begin{aligned} I &= \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2(x))} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x(1+\ln^2(x))} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \arctg(\ln(x)) \Big|_2^b \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg(\ln(b)) - \arctg(\ln(2)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \arctg(t) - \arctg(\ln(2)) \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\ln(2))$$

Como a integral converge a série também converge.

4 [20] Sabendo que, para  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$f^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

- a) [04] Construa a Série de Taylor de  $f(x)$  centrada em 2
- b) [04] Determine o intervalo aberto onde a série converge absolutamente
- c) [06] Use o polinômio de Taylor de terceiro grau para aproximar  $f(3)$
- d) [06] Estime o erro cometido na aproximação

Não é necessário encontrar a representação decimal dos valores calculados, mas é necessário realizar as simplificações elementares.

a)

$$f^{(n)}(2) = \frac{2(-1)^n n!}{2^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{2^n}$$

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^n n!} (x-2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-2)^n \end{aligned}$$

b) Usando o teste da raiz

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x-2|^n}{2^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-2|}{2} \\ &= \frac{|x-2|}{2} \end{aligned}$$

Impondo  $\rho < 1$  temos  $|x-2| < 2$  portanto  $I = (0, 4)$

c)

$$P_3(x) = \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n}{2^n} (x-2)^n = 1 - \frac{x-2}{2} + \frac{(x-2)^2}{2^2} - \frac{(x-2)^3}{2^3}$$

$$P_3(3) = 1 - \frac{3-2}{2} + \frac{(3-2)^2}{2^2} - \frac{(3-2)^3}{2^3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

d)

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-2)^4 = \frac{2(-1)^4 4!}{c^5 4!}(x-2)^4 = \frac{2(x-2)^4}{c^5} \quad c \in [2, x]$$

$$R_3(3) = \frac{2(3-2)^4}{c^5} = \frac{2}{c^5} \quad c \in [2, 3]$$

$$|R_3(3)| \leq \frac{2}{2^5} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$