

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [15] Escreva a equação $x^2 + xy + y^2 = 1$ em coordenadas polares e simplifique.

Sabemos que a relação entre as coordenadas é

$$x = r \cos(\theta) \qquad y = r \sin(\theta) \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

Portanto, precisamos substituir as expressões e simplificar o resultado

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 1 \\ (r \cos \theta)^2 + r \cos \theta r \sin \theta + (r \sin \theta)^2 &= 1 \\ r^2 \cos^2 \theta + r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta &= 1 \\ r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos \theta \sin \theta) &= 1 \\ r^2 (1 + \cos \theta \sin \theta) &= 1 \end{aligned}$$

Forma alternativa:

$$\begin{aligned} r^2 \left(1 + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) &= 1 \\ r^2 (2 + \sin(2\theta)) &= 2 \end{aligned}$$

2 [10] Encontre e corte da quádrica $y + z^2 = x$ pelo plano $z = 0$, identifique a região e a esboce no plano.

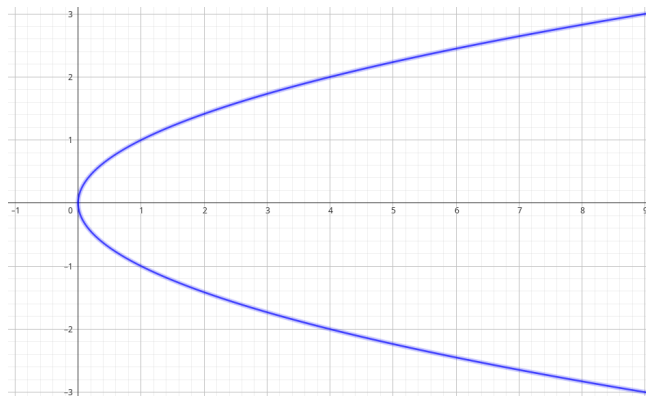
Encontramos o corte substituindo $z = 0$ na equação

$$y^2 + z^2 = x$$

$$y^2 = x$$

$$x = y^2$$

Essa é a expressão da **parábola** ilustrada a seguir



3 [15] Determine e esboce o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{y - x - 2}$

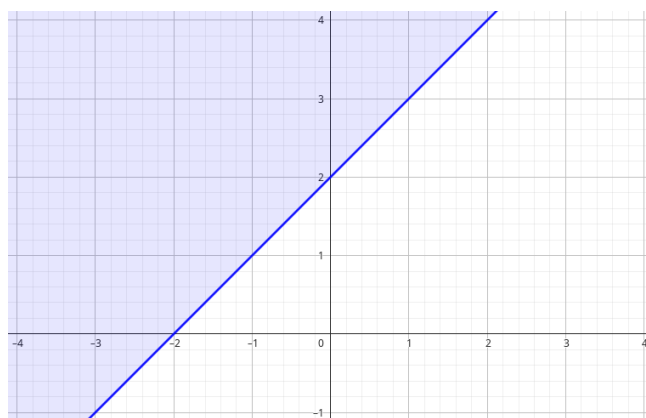
A raiz quadrada só está definida para valores maiores ou iguais a zero, assim, seu domínio consiste dos pontos que satisfaçam a condição

$$y - x - 2 \geq 0$$

$$y \geq x + 2$$

isso é, os pontos “a cima” da reta $y = x + 2$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y \geq x + 2\}$$



4 [30] Calcule os limites solicitados, ou prove que o limite não existe

a)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y - 2x + 2}{x - 1}$$

b)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{y - x}$$

- a) Se tentarmos calcular diretamente a fração obtemos uma indeterminação $0/0$. Portanto, precisamos remover a indeterminação manipulando algebricamente a função, assumindo que $(x, y) \neq (1, 1)$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{xy - y - 2x + 2}{x - 1} \\ &= \frac{(x - 1)y - 2(x - 1)}{x - 1} \\ &= \frac{(x - 1)(y - 2)}{x - 1} \\ &= y - 2 \end{aligned}$$

Onde o cancelamento só foi possível, pois $(x, y) \neq (1, 1)$. Agora podemos calcular o limite, pois temos uma função contínua em $(1, 1)$,

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y - 2x + 2}{x - 1} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} y - 1 = 2$$

- b) Se tentarmos calcular diretamente a fração obtemos uma indeterminação $0/0$. Portanto, precisamos remover a indeterminação manipulando algebricamente a função, assumindo que $(x, y) \neq (1, 1)$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - y^2}{y - x} \\ &= \frac{(x - y)(x + y)}{y - x} \\ &= -\frac{(x - y)(x + y)}{x - y} \\ &= -(x + y) \\ &= -x - y \end{aligned}$$

Onde o cancelamento só foi possível, pois $(x, y) \neq (1, 1)$. Agora podemos calcular o limite, pois temos uma função contínua em $(1, 1)$,

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{y - x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} -x - y = -2$$

5 [30] Calcule as derivadas solicitadas realizando as contas na ordem indicada

a) [15] $\frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 + y (\sin(xy) - x^4) \right)$ b) [15] $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(ye^{x^2-y} \right)$

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 + y (\sin(xy) - x^4) \right) &= \frac{\partial y^2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(y (\sin(xy) - x^4) \right) \\
 &= 2y + \frac{\partial y}{\partial y} (\sin(xy) - x^4) + y \frac{\partial}{\partial y} (\sin(xy) - x^4) \\
 &= 2y + \sin(xy) - x^4 + y \left(\frac{\partial}{\partial y} \sin(xy) - 0 \right) \\
 &= 2y + \sin(xy) - x^4 + y \cos(xy) \frac{\partial}{\partial y} (xy) \\
 &= 2y + \sin(xy) - x^4 + y \cos(xy) x \frac{\partial y}{\partial y} \\
 &= 2y - x^4 + \sin(xy) + xy \cos(xy)
 \end{aligned}$$

b) Começamos calculando a primeira derivada

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(ye^{x^2-y} \right) &= y \frac{\partial}{\partial x} e^{x^2-y} \\
 &= ye^{x^2-y} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y) \\
 &= ye^{x^2-y} \left(\frac{\partial x^2}{\partial x} - 0 \right) \\
 &= ye^{x^2-y} 2x \\
 &= 2xye^{x^2-y}
 \end{aligned}$$

Agora calculamos a derivada segunda

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(ye^{x^2-y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(ye^{x^2-y} \right) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(2xye^{x^2-y} \right) \\
 &= 2x \frac{\partial}{\partial y} \left(ye^{x^2-y} \right) \\
 &= 2x \left(\frac{\partial y}{\partial y} e^{x^2-y} + y \frac{\partial}{\partial y} e^{x^2-y} \right) \\
 &= 2x \left(e^{x^2-y} + ye^{x^2-y} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - y) \right) \\
 &= 2x \left(e^{x^2-y} + ye^{x^2-y} \left(0 - \frac{\partial y}{\partial y} \right) \right) \\
 &= 2x \left(e^{x^2-y} - ye^{x^2-y} \right)
 \end{aligned}$$

$$= 2x(1 - y)e^{x^2 - y}$$