CFVVI – Prova 2 – Turma 4 12/08/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [20] Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial u}\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ sabendo que $z = 4e^{x\ln(y)}$, $x = \ln\left(u\cos(v)\right)$ e $y = u\,\mathrm{sen}(v)$.

Vamos usar a regra da cadeia

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Calculando as derivadas necessárias

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4e^{x\ln(y)}\right) = 4e^{x\ln(y)}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\ln(y)\right) = 4e^{x\ln(y)}\ln(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(4e^{x\ln(y)}\right) = 4e^{x\ln(y)}\frac{\partial}{\partial y}\left(x\ln(y)\right) = 4e^{x\ln(y)}\frac{x}{y} = \frac{4x}{y}e^{x\ln(y)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\ln\left(u\cos(v)\right)\right) = \frac{1}{u\cos(v)}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\cos(v)\right) = \frac{1}{u\cos(v)}\cos(v) = \frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(u\,\mathrm{sen}(v)\right) = \mathrm{sen}(v)$$

Portanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= 4e^{x\ln(y)}\ln(y) \times \frac{1}{u} + \frac{4x}{y}e^{x\ln(y)} \times \mathrm{sen}(v)\\ &= 4e^{x\ln(y)}\left(\frac{\ln(y)}{u} + \frac{\mathrm{sen}(v)}{y}\right)\end{aligned}$$

Avaliando no ponto $(u, v) = \left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$x\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\ln\left(u\cos(v)\right)\right)\Big|_{\left(2,\frac{\pi}{4}\right)} = \ln\left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\sqrt{2}\right)$$

$$y\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = \left(u\,\mathrm{sen}(v)\right)\Big|_{\left(2,\frac{\pi}{4}\right)} = 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 4e^{x\ln(y)}\left(\frac{\ln(y)}{u} + \frac{\mathrm{sen}(v)}{y}\right)\Bigg|_{\left(2,\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= 4\exp\left[\ln\left(\sqrt{2}\right)\ln\left(\sqrt{2}\right)\right]\left[\frac{\ln\left(\sqrt{2}\right)}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= 4\exp\left[\left(\ln\sqrt{2}\right)^2\right]\left[\frac{\ln\left(\sqrt{2}\right)}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right]$$

$$= 4e^{\ln^2\sqrt{2}}\left[\frac{\ln\left(\sqrt{2}\right)+1}{2}\right]$$

$$= 2\left(\ln\sqrt{2}+1\right)e^{\ln^2\sqrt{2}}$$

2 [25] Calcule a derivada da função $f(x,y,z) = 3e^x\cos(yz)$ na direção $v = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ no ponto $(0,0,0)$.

Precisamos do vetor unitário na direção do vetor

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{9}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Precisamos também do gradiente de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3e^x\cos(yz)\right) = 3e^x\cos(yz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3e^x\cos(yz)\right) = -3e^x z\,\mathrm{sen}(yz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(3e^x\cos(yz)\right) = -3e^x y\,\mathrm{sen}(yz)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3e^x\cos(yz) \\ -3e^x z\,\mathrm{sen}(yz) \\ -3e^x y\,\mathrm{sen}(yz) \end{pmatrix}$$

Avaliando o gradiente no ponto $(0,0,0)$

$$\nabla f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 3e^x\cos(yz) \\ -3e^x z\,\mathrm{sen}(yz) \\ -3e^x y\,\mathrm{sen}(yz) \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 3e^0\cos(0) \\ -3e^0 0\,\mathrm{sen}(0) \\ -3e^0 0\,\mathrm{sen}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Derivada direcional

$$D_u = u\cdot\nabla f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}3 + 0 + 0 = 2$$

3 [25] Encontre o plano tangente ao gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4$ no ponto $(2, -3)$.

A equação do plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(2, -3)$ é

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$$f_x(2, -3)(x - 2) + f_y(2, -3)(y + 3) - (z - z_0) = 0$$

Calculando as derivadas parciais

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4\right) = 2x - 2y - 1$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4\right) = 2y - 2x + 3$$

Avaliando no ponto $(2, -3)$

$$\begin{aligned} z_0 &= f(2, -3) \\ &= \left(x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4\right)\Big|_{(2,-3)} \\ &= 2^2 + (-3)^2 - 2(2)(-3) - 2 + 3(-3) + 4 \\ &= 4 + 9 + 12 - 2 - 9 + 4 \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$f_x(2, -3) = (2x - 2y - 1)\Big|_{(2,-3)} = 2(2) - 2(-3) - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$$

$$f_y(2, -3) = (2y - 2x + 3)\Big|_{(2,-3)} = 2(-3) - 2(2) + 3 = -6 - 4 + 3 = -7$$

Portanto, a euquação do plano tangente é

$$\begin{aligned} &f_x(2, -3)(x - 2) + f_y(2, -3)(y + 3) - (z - z_0) = 0 \\ &9(x - 2) - 7(y + 3) - (z - 18) = 0 \\ &9x - 18 - 7y - 21 - z + 18 = 0 \\ &9x - 7y - z = 21 \end{aligned}$$

4 [30] Considerando a função $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

a) [5] Calcule o gradiente de f.

b) [5] Calcule a hessiana de f.

c) [10] Encontre todos os pontos críticos de f.

d) [10] Classifique cada ponto crítico de f.

a)
Precisamos das derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[4xy - x^4 - y^4\right] = 4y - 4x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[4xy - x^4 - y^4\right] = 4x - 4y^3$$

então

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4y - 4x^3 \\ 4x - 4y^3 \end{pmatrix}$$

b)
Precisamos das derivadas parciais de segunda ordem de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[4y - 4x^3\right] = -12x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[4x - 4y^3\right] = -12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[4x - 4y^3\right] = 4$$

então

$$H = \begin{pmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

c)
A função é um polinômio, então possui derivadas em todos os pontos do plano. Assim os pontos críticos são apenas os pontos onde as derivadas parciais são zero, $\nabla f = 0$

$$4y - 4x^3 = 0 \qquad \text{e} \qquad 4x - 4y^3 = 0$$

ou, simplificando,

$$y - x^3 = 0 \qquad \text{e} \qquad x - y^3 = 0$$

Isolando y na primeira equação, $y = x^3$, e substituindo na segunda, temos

$$x - y^3 = 0$$

$$
\begin{aligned}
x - \left(x^3\right)^3 &= 0 \\
x - x^9 &= 0 \\
x(1 - x^8) &= 0
\end{aligned}
$$

As soluções dessa equação são $x = 0$, $x = 1$ ou $x - 1$. Se $x = 0$ temos $y = 0$, se $x = 1$ temos $y = 1$ e se $x = -1$ temos $y = -1$. Portanto, os pontos críticos são

$$(x_1, y_1) = (0,0), \qquad (x_2, y_2) = (1,1) \quad \text{e} \quad (x_3, y_3) = (-1,-1)$$

d)

Para classificar os pontos críticos precisamos avaliar o discriminante nos pontos críticos.
Considerando o ponto $(x_1, y_1) = (0,0)$

$$f_{xx}(0,0) = 0$$

$$f_{yy}(0,0) = 0$$

$$f_{xy}(0,0) = 4$$

$$D_1 = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = 0 \times 0 - 4^2 = -16 < 0$$

Portanto, o ponto $(0,0)$ é um ponto de sela.
Considerando o ponto $(x_2, y_2) = (1,1)$

$$f_{xx}(1,1) = -12$$

$$f_{yy}(1,1) = -12$$

$$f_{xy}(1,1) = 4$$

$$D_2 = f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1) - f_{xy}^2(1,1) = (-12)(-12) - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

Portanto, o ponto $(1,1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(1,1) = -12 < 0$ o ponto é um ponto de máximo local.
Considerando o ponto $(x_3, y_3) = (-1,-1)$

$$f_{xx}(-1,-1) = -12$$

$$f_{yy}(-1,-1) = -12$$

$$f_{xy}(-1,-1) = 4$$

$$D_3 = f_{xx}(-1,-1)f_{yy}(-1,-1) - f_{xy}^2(-1,-1) = (-12)(-12) - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

Portanto, o ponto $(-1,-1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(-1,-1) = -12 < 0$ o ponto é um ponto de máximo local.