

## GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

Substitui a prova \_\_\_\_\_

Os exercícios 1 e 2 valem 30 para quem perdeu a prova 1 ou 2

O exercício 3 vale 40 para quem perdeu a prova 3

O exercício 4 vale 40 para quem perdeu a prova 4

1 [20] Calcule a integral  $\int_0^3 x^2 \ln(x) dx$ . *Atenção ao intervalo de integração.*

Calculando a primitiva  $F(x) = \int x^2 \ln(x) dx$ , por integral por partes

$$u = \ln(x) \quad dv = x^2 dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \quad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x^2 \ln(x) dx \\ &= \ln(x) \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C \\ &= \frac{x^3}{3^2} (3 \ln(x) - 1) + C \end{aligned}$$

Para calcular a integral definida precisamos observar que temos uma assintota vertical em  $x = 0$ , portanto, essa é uma integral imprópria

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 x^2 \ln(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^3 x^2 \ln(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{x^3}{3^2} (3 \ln(x) - 1) \right]_t^3 \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{3^3}{3^2} (3 \ln(3) - 1) - \frac{t^3}{3^2} (3 \ln(t) - 1) \right] \\
&= 3(3 \ln(3) - 1) - \frac{1}{3^2} \lim_{t \rightarrow 0} [t^3 (3 \ln(t) - 1)]
\end{aligned}$$

Precisamos calcular o limite

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{t \rightarrow 0} t^3 (3 \ln(t) - 1) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3 \ln(t) - 1}{t^{-3}} && \text{usando l'Hopital} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^{-1}}{-3t^{-4}} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} -t^3 = 0
\end{aligned}$$

Portando

$$I = \int_0^3 x^2 \ln(x) dx = 3(3 \ln(3) - 1) = 9 \ln(3) - 3$$

**2** [20] Calcule o volume do sólido construído pela rotação, em torno do eixo  $x$ , da região contida entre as curvas  $y = x$  e  $y = x^2$

Integrando por seções transversais em  $x$  temos

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

Calculando os pontos de intersecção das curvas

$$\begin{aligned}
x &= x^2 \\
x^2 - x &= 0 \\
x(x - 1) &= 0
\end{aligned}$$

temos  $x = 0$  ou  $x = 1$ , então  $a = 0$ ,  $b = 1$ . A área da seção transversal é

$$A(x) = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi (x^2 - x^4)$$

Assim

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi (x^2 - x^4) dx \\
&= \pi \int_0^1 x^2 - x^4 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 \\
&= \pi \left[ \left( \frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5} \right) - \left( \frac{0^3}{3} - \frac{0^5}{5} \right) \right] \\
&= \pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15}
\end{aligned}$$

**3** [20] Analise a convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Usando o teste da integral com a **função real**  $f(x) = xe^{-x^2}$  que é:

1. **contínua** para todo  $x$  real
2. **positiva** para  $x > 0$
3. para verificar se é **decrecente** vamos calcular sua derivada

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx} xe^{-x^2} \\
&= e^{-x^2} + x \frac{d}{dx} e^{-x^2} \\
&= e^{-x^2} + xe^{-x^2} \frac{d}{dx} (-x^2) \\
&= e^{-x^2} + xe^{-x^2} (-2x) \\
&= e^{-x^2} (1 - 2x^2)
\end{aligned}$$

A função será decrescente para

$$\begin{aligned}
1 - 2x^2 &< 0 \\
x^2 &> \frac{1}{2} \\
x &> \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7
\end{aligned}$$

Temos então que a série converge, se e somente, se a integral

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx$$

converge. Calculando a primitiva por substituição simples

$$u = -x^2 \quad du = -2x dx \quad dx = \frac{du}{-2x}$$

temos

$$F(x) = \int xe^{-x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int x e^u \frac{du}{-2x} \\
&= \frac{-1}{2} \int e^u du \\
&= \frac{-e^u}{2} + C \\
&= \frac{-e^{-x^2}}{2} + C
\end{aligned}$$

Calculando a integral imprópria

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^\infty x e^{-x^2} dx \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x e^{-x^2} dx \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{-e^{-x^2}}{2} \right) \Big|_1^b \\
&= \frac{-1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left( e^{-x^2} \right) \Big|_1^b \\
&= \frac{-1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left( e^{-b^2} - e^{-1^2} \right) \\
&= \frac{-1}{2} \left( \lim_{b \rightarrow \infty} \left( e^{-b^2} \right) - e^{-1} \right) \\
&= \frac{1}{2e} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Como a integral converge a série também converge.

4 [20] Sabendo que  $f^{(n)}(x) = 2^x \ln(2)^n$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$

- a) Construa a Série de Taylor de  $f$  centrada em zero
- b) Mostre que a Série de Taylor de  $f$  converge para  $f$  em  $[0, 10]$

a) A Série de Taylor para essa função é

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \ln(2)^n}{n!} x^n$$

- b) Para provarmos que a Série de Taylor converge para a função devemos mostrar que  $R_n(x) \rightarrow 0$ . Pelo Teorema de Taylor temos

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

com  $\xi$  entre zero e  $x$ , em nosso caso

$$R_n(x) = \frac{2^\xi \ln(2)^n}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\ln(2)^n}{(n+1)!} 2^\xi x^{n+1}$$

Portanto

$$|R_n(x)| = \frac{\ln(2)^n}{(n+1)!} 2^\xi |x|^{n+1}$$

Como  $0 \leq \xi \leq x \leq 10$  temos

$$2^\xi \leq 2^{10} \quad \text{e} \quad |x|^{n+1} = x^{n+1} \leq 10^{n+1}$$

Assim

$$|R_n(x)| \leq \frac{\ln(2)^n}{(n+1)!} 2^{10} 10^{n+1} = 10 \cdot 2^{10} \frac{\ln(2)^n 10^n}{(n+1)!} = 10 \cdot 2^{10} \frac{(10 \ln(2))^n}{(n+1)!}$$

como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 10 \cdot 2^{10} \frac{(10 \ln(2))^n}{(n+1)!} = 0$$

o Teorema do Confronto garante que  $R_n(x) \rightarrow 0$  e portanto a Série de Taylor converge para a função.