

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

- 1 [20] Calcule $\frac{\partial z}{\partial v}(-2, \pi)$ sabendo que $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = ue^v \sin(u)$ e $y = ue^v \cos(u)$.

Vamos usar a regra da cadeia

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

Calculando as derivadas necessárias

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\ln(x^2 + y^2)) = \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\ln(x^2 + y^2)) = \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} (ue^v \sin(u)) = ue^v \sin(u)$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} (ue^v \cos(u)) = ue^v \cos(u)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \\ &= \frac{2x}{x^2 + y^2} \times ue^v \sin(u) + \frac{2y}{x^2 + y^2} \times ue^v \cos(u) \\ &= \frac{2ue^v}{x^2 + y^2} (x \sin(u) + y \cos(u)) \end{aligned}$$

Avaliando no ponto $(u, v) = (-2, \pi)$

$$x(-2, \pi) = (ue^v \sin(u)) \Big|_{(-2, \pi)} = -2e^\pi \sin(-2)$$

$$y(-2, \pi) = (ue^v \cos(u)) \Big|_{(-2, \pi)} = -2e^\pi \cos(-2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left[\frac{2ue^v}{x^2 + y^2} (x \sin(u) + y \cos(u)) \right] \Big|_{(-2, \pi)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(-2)e^{\pi}}{[-2e^{\pi} \sin(-2)]^2 + [-2e^{\pi} \cos(-2)]^2} [[-2e^{\pi} \sin(-2)] \sin(-2) + [-2e^{\pi} \cos(-2)] \cos(-2)] \\
&= \frac{-4e^{\pi}}{4e^{2\pi} \sin^2(-2) + 4e^{2\pi} \cos^2(-2)} [-2e^{\pi} \sin^2(-2) - 2e^{\pi} \cos^2(-2)] \\
&= \frac{-4e^{\pi}}{4e^{2\pi} [\sin^2(-2) + \cos^2(-2)]} [-2e^{\pi} [\sin^2(-2) + \cos^2(-2)]] \\
&= \frac{-4e^{\pi}}{4e^{2\pi}} [-2e^{\pi}] \\
&= 2
\end{aligned}$$

2 [25] Calcule a derivada da função $f(x, y) = \frac{x - y}{xy + 2}$ na direção $v = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ no ponto $(1, -1)$.

Precisamos do vetor unitário na direção do vetor

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ou seja

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{25}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

Precisamos também do gradiente de f

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x - y}{xy + 2} \right) \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial x} (x - y) (xy + 2) - (x - y) \frac{\partial}{\partial x} (xy + 2)}{(xy + 2)^2} \\ &= \frac{(1) (xy + 2) - (x - y) (y)}{(xy + 2)^2} \\ &= \frac{xy + 2 - xy + y^2}{(xy + 2)^2} \\ &= \frac{2 + y^2}{(xy + 2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x - y}{xy + 2} \right) \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial y} (x - y) (xy + 2) - (x - y) \frac{\partial}{\partial y} (xy + 2)}{(xy + 2)^2} \\ &= \frac{(-1) (xy + 2) - (x - y) (x)}{(xy + 2)^2} \\ &= \frac{-xy - 2 - x^2 + xy}{(xy + 2)^2} \\ &= \frac{-2 - x^2}{(xy + 2)^2} \end{aligned}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{2 + y^2}{(xy + 2)^2} \\ \frac{-2 - x^2}{(xy + 2)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(xy + 2)^2} \begin{pmatrix} 2 + y^2 \\ -2 - x^2 \end{pmatrix}$$

Avaliando o gradiente no ponto $(1, -1)$

$$\begin{aligned}\nabla f(1, -1) &= \frac{1}{(xy + 2)^2} \begin{pmatrix} 2 + y^2 \\ -2 - x^2 \end{pmatrix} \Big|_{(1, -1)} \\&= \frac{1}{(1(-1) + 2)^2} \begin{pmatrix} 2 + (-1)^2 \\ -2 - 1^2 \end{pmatrix} \\&= \frac{1}{(1)^2} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Derivada direcional

$$D_u = u \cdot \nabla f(1, -1) = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}3 + \frac{4}{5}(-3) = \frac{9 - 12}{5} = \frac{-3}{5}$$

3 [25] Encontre linearização da função $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$ no ponto $(1, 1)$.

A linearização de f no ponto $(1, 1)$ é a função

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) \end{aligned}$$

Precisamos das derivadas parciais de f

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [x^2 - xy - y^2] = 2x - y$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [x^2 - xy - y^2] = -x - 2y$$

Avaliando f e suas derivadas no ponto $(1, 1)$

$$f(1, 1) = (x^2 - xy - y^2) \Big|_{(1,1)} = 1^2 - 1 \times 1 - 1^2 = -1$$

$$f_x(1, 1) = (2x - y) \Big|_{(1,1)} = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$f_y(1, 1) = (-x - 2y) \Big|_{(1,1)} = -1 - 2 \times 1 = -3$$

Assim

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) \\ &= -1 + 1(x - 1) - 3(y - 1) \\ &= -1 + x - 1 - 3y + 3 \\ &= x - 3y + 1 \end{aligned}$$

4 [30] Considerando a função $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$.

a) [5] Calcule o gradiente de f .

b) [5] Calcule a hessiana de f .

c) [10] Encontre todos os pontos críticos de f .

d) [10] Classifique cada ponto crítico de f .

a)

Precisamos das derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [x^3 + 3xy + y^3] = 3x^2 + 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [x^3 + 3xy + y^3] = 3x + 3y^2$$

então

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y \\ 3x + 3y^2 \end{pmatrix}$$

b)

Precisamos das derivadas parciais de segunda ordem de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} [3x^2 + 3y] = 6x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [3x + 3y^2] = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} [3x + 3y^2] = 3$$

então

$$H = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}$$

c)

A função é um polinômio, então possui derivadas em todos os pontos do plano. Assim os pontos críticos são apenas os pontos onde as derivadas parciais são zero, $\nabla f = 0$

$$3x^2 + 3y = 0 \quad \text{e} \quad 3x + 3y^2 = 0$$

ou, simplificando,

$$x^2 + y = 0 \quad \text{e} \quad x + y^2 = 0$$

Isolando y na primeira equação, $y = -x^2$, e substituindo na segunda, temos

$$x + y^2 = 0$$

$$x + (-x^2)^2 = 0$$

$$x + x^4 = 0$$

$$x(1 + x^3) = 0$$

As soluções dessa equação são $x = 0$ ou $x = -1$. Se $x = 0$ temos $y = 0$ e se $x = -1$ temos $y = -1$. Portanto, os pontos críticos são

$$(x_1, y_1) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (x_2, y_2) = (-1, -1)$$

d)

Para classificar os pontos críticos precisamos avaliar o discriminante nos pontos críticos.

Considerando o ponto $(x_1, y_1) = (0, 0)$

$$f_{xx}(0, 0) = 0$$

$$f_{yy}(0, 0) = 0$$

$$f_{xy}(0, 0) = 3$$

$$D_1 = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 0 \times 0 - 3^2 = -9 < 0$$

Portanto, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela.

Considerando o ponto $(x_2, y_2) = (-1, -1)$

$$f_{xx}(-1, -1) = -6$$

$$f_{yy}(-1, -1) = -6$$

$$f_{xy}(-1, -1) = 3$$

$$D_2 = f_{xx}(-1, -1)f_{yy}(-1, -1) - f_{xy}^2(-1, -1) = (-6)(-6) - 3^2 = 36 - 9 = 25 > 0$$

Portanto, o ponto $(-1, -1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0$ o ponto é um ponto de máximo local.