Volumes de Sóidos de Revolução

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Sólidos de Revolução

Sólido de revolução é obtido pela rotação de uma região plana em torno de um eixo.

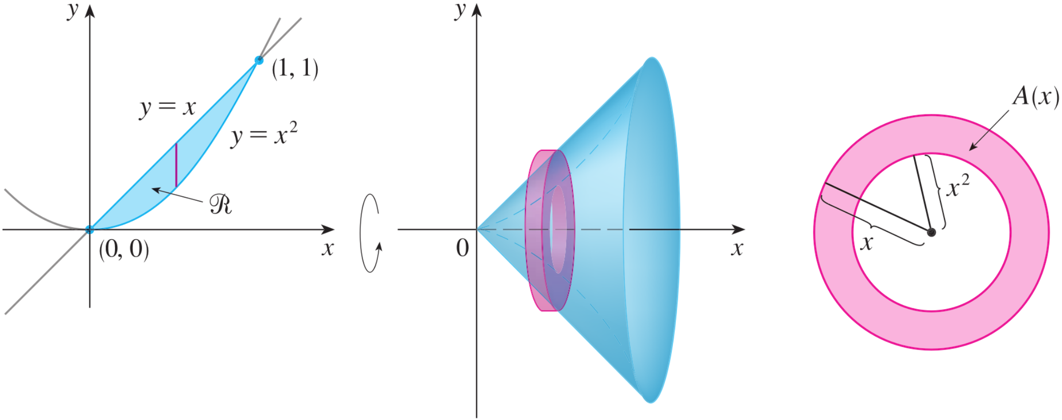
Seção transversal será um disco de raio $R(x)$

$$A(x) = \pi R(x)^2$$

Anel circular de raio externo $R(x)$ e raio interno $r(x)$

$$A(x) = \pi \left(R(x)^2 - r(x)^2 \right)$$

Sólidos de Revolução



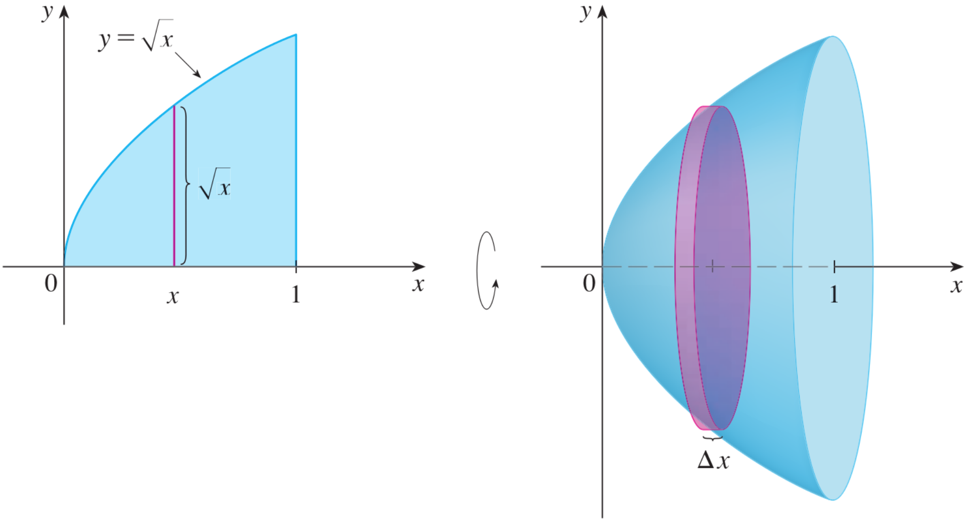
Conteúdo

Exemplo 1

Exemplo 1

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $f(x) = \sqrt{x}$ de 0 até 1

Exemplo 1



Exemplo 1 – Área da seção transversal

A seção transversal é um círculo de raio

$$R(x) = \sqrt{x}$$

com área

$$A(x) = \pi R(x)^2 = \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 = \pi x$$

Exemplo 1 – Volume

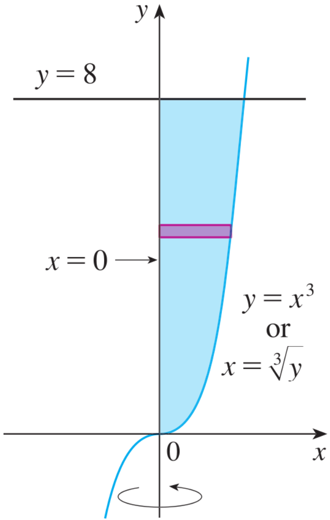
$$V = \int_0^1 \pi x \, dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

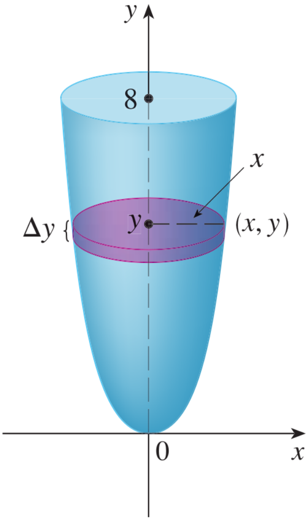
Exemplo 2

Exemplo 2

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = x^3$, $y = 8$, e $x = 0$ em torno do eixo y

Exemplo 2





Exemplo 3 – Área da seção transversal

Seção transversal é um círculo de raio x

$$x = \sqrt[3]{y}$$

Área da seção transversal

$$A(y) = \pi R(y)^2 = \pi \left(\sqrt[3]{y} \right)^2 = \pi y^{2/3}$$

Exemplo 2 – Volume

$$V = \int_0^8 \pi y^{2/3} dy = \pi \left(\frac{3}{5} y^{5/3} \right) \Bigg|_0^8 = \pi \frac{3}{5} 8^{5/3} = \frac{96\pi}{5}$$

Exemplo 3

Exemplo 3

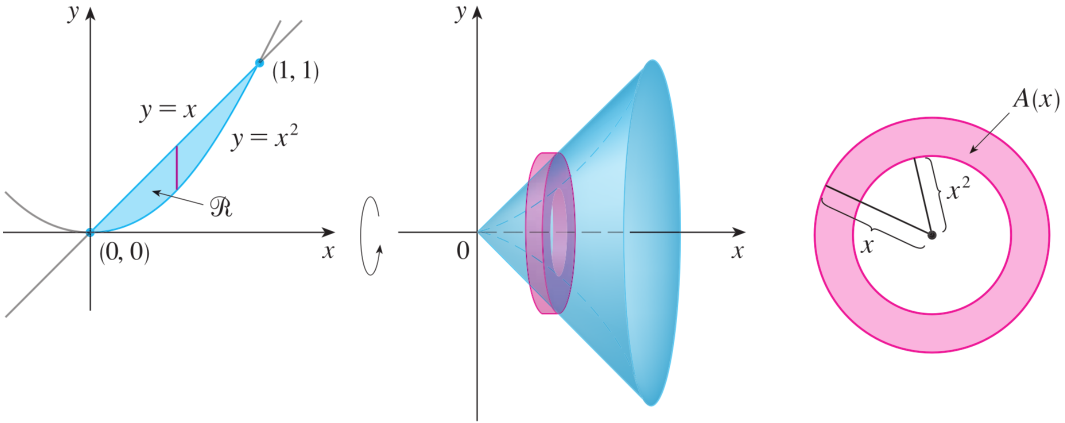
A região $\mathcal{R}$, limitada pelas curvas delimitada pelas curvas

$$y = x \qquad \text{e} \qquad y = x^2$$

é girada em torno do eixo x.

Encontre o volume do sólido resultante.

Exemplo 3



Exemplo 5 – Área da seção transversal

As curvas $y = x$ e $y = x^2$ se intersectam nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$

A seção transversal é um anel

Raio interno

$$r(x) = x^2$$

Raio externo

$$R(x) = x$$

Área da seção transversal

$$A(x) = \pi \left(x^2 - \left(x^2 \right)^2 \right) = \pi \left(x^2 - x^4 \right)$$

Exemplo 3 – Volume

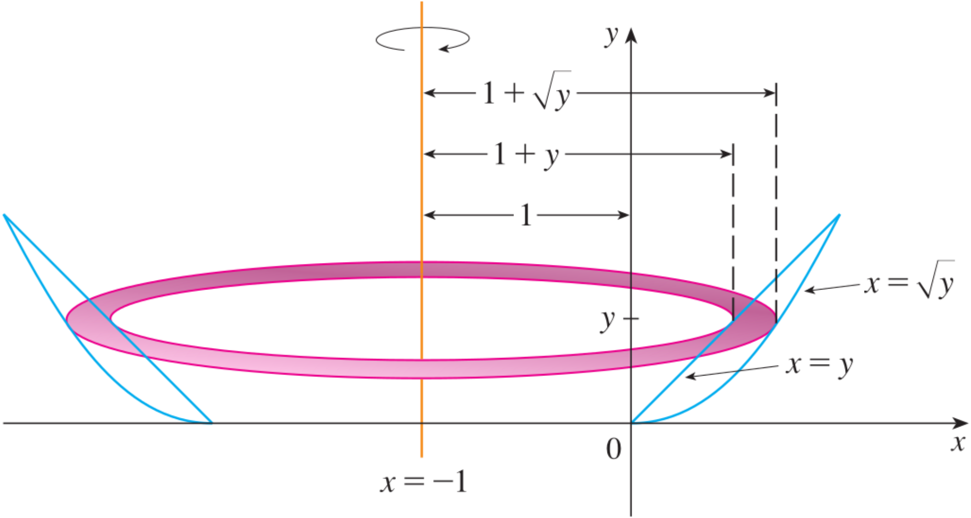
$$V = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{15}$$

Exemplo 4

Exemplo 4

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região do exemplo anterior em torno da reta $x = -1$

Exemplo 4



Exemplo 4 – Área da seção transversal

A seção transversal é um anel

Raio interno

$$r(y) = 1 + y$$

Raio externo

$$R(y) = 1 + \sqrt{y}$$

Área da seção transversal

$$\begin{aligned} A(y) &= \pi\left(R(y)^2 - r(y)^2\right) \\ &= \pi\left[(1+\sqrt{y})^2 - (1+y)^2\right] \\ &= \pi\left[(1 + 2\sqrt{y} + y) - \left(1 + 2y + y^2\right)\right] \\ &= \pi\left(2\sqrt{y} - y - y^2\right) \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Volume

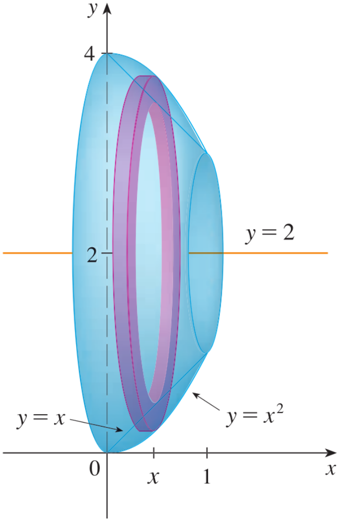
$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 A(y)\, dy \\
&= \int_0^1 \pi \left(2\sqrt{y} - y - y^2\right) dy \\
&= \pi \left(\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 \\
&= \pi \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

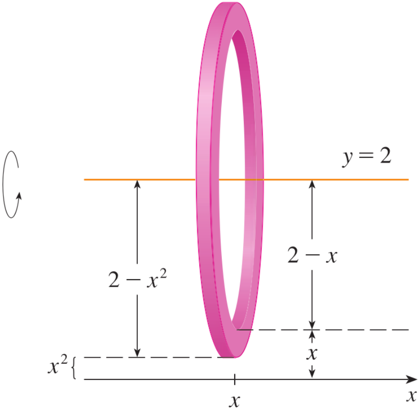
Exemplo 5

Exemplo 5

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região do exemplo anterior em torno da reta $y = 2$

Exemplo 5





Exemplo 5 – Área da seção transversal

A seção transversal é um anel

Raio interno

$$r(x) = 2 - x$$

Raio externo

$$R(x) = 2 - x^2$$

Área

$$A(x) = \pi\left(2 - x^2\right)^2 - \pi(2 - x)^2 = \pi\left(x^4 - 5x^2 + 4x\right)$$

Exemplo 5 – Volume

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 A(x)\,dx \\
&= \int_0^1 \pi\left(x^4 - 5x^2 + 4x\right)dx \\
&= \pi\left(\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \pi\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + \frac{4}{2}\right) \\
&= \frac{8\pi}{15}
\end{aligned}
$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 3.3 da Apostila

Exercícios: 1a-f, 2, 3

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações