CFVVI – PROVA 1 – TURMA 1 08/07/2024

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [15] Escreva a equação $r = 2\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta)$ em coordenadas cartesianas e simplifique.

Sabemos que a relação entre as coordenadas é

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{y}{r} \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

Portanto, precisamos substituir as expressões e simplificar o resultado

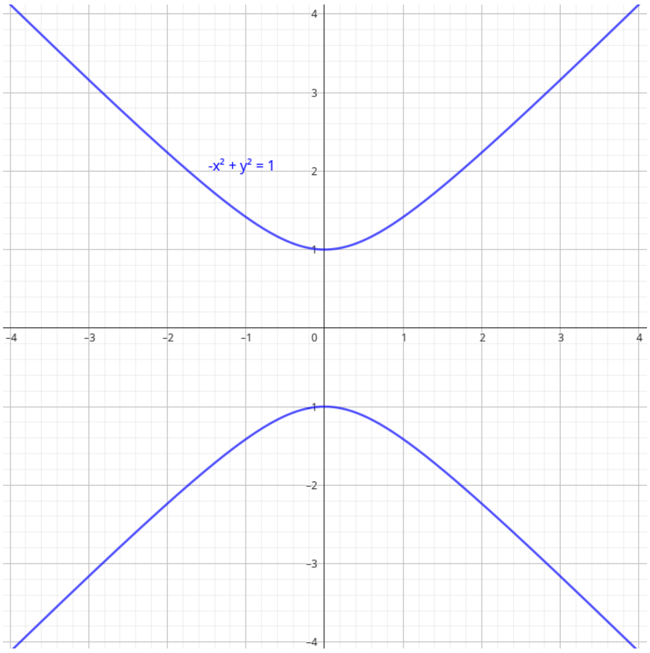
$$\begin{aligned} r &= 2\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta) \\ r &= 2\frac{x}{r} - \frac{y}{r} \\ r &= \frac{2x - y}{r} \\ r^2 &= 2x - y \\ x^2 + y^2 &= 2x - y \\ x^2 + y^2 - 2x + y &= 0 \end{aligned}$$

2 [10] Encontre e corte da quádrica $z^2 + 4y^2 - 4x^2 = 4$ pelo plano $z = 0$, identifique a região e a esboce no plano.

Encontramos o corte substituindo $z = 0$ na equação

$$\begin{aligned} z^2 + 4y^2 - 4x^2 &= 4 \\ 4y^2 - 4x^2 &= 4 \\ y^2 - x^2 &= 1 \end{aligned}$$

Essa é a expressão da **hipérbole** ilustrada a seguir



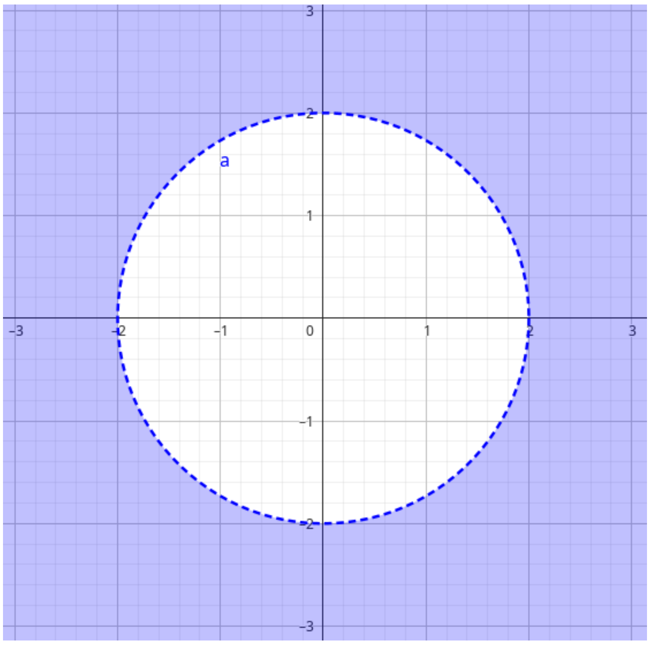
3 [15] Determine e esboce o domínio da função $f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2 - 4\right)$

O logaritmo só está definido para valores estritamente maiores do que zero, assim seu domínio consiste dos pontos que satisfaçam a condição

$$x^2 + y^2 - 4 > 0$$
$$x^2 + y^2 > 4$$

isso é, os pontos externos a circunferência de raio 2 centrada na origem

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \ / \ x^2 + y^2 > 4\right\}$$



4 [30] Calcule os limites solicitados, ou prove que o limite não existe

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$

a) Se tentarmos calcular diretamente a fração obtemos uma indeterminação $0/0$. Portanto, precisamos remover a indeterminação manipulando algebricamente a função, assumindo que $(x,y) \neq (2,2)$, temos

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2} \\
&= \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2} \times \frac{\sqrt{x+y}+2}{\sqrt{x+y}+2} \\
&= \frac{(x+y-4)\left(\sqrt{x+y}+2\right)}{\left(\sqrt{x+y}\right)^2-2^2} \\
&= \frac{(x+y-4)\left(\sqrt{x+y}+2\right)}{x+y-4} \\
&= \sqrt{x+y}+2
\end{aligned}$$

Onde o cancelamento só foi possível, pois $(x,y) \neq (2,2)$. Agora podemos calcular o limite, pois temos uma função contínua em $(2,2)$,

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(2,2)} \sqrt{x+y}+2 \\
&= \sqrt{2+2}+2 = \sqrt{4}+2 = 4
\end{aligned}$$

b) Analisando a função percebemos que se fizermos $y = x$ o limite restrito a curva será

$$L_1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\left.\frac{xy}{|xy|}\right|_{y=x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x^2|} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Por outro lado, escolhendo $y = -x$ temos

$$L_2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\left.\frac{xy}{|xy|}\right|_{y=-x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{|-x^2|} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

Como $L_1 \neq L_2$ o limite não existe.

5 [30] Calcule as derivadas solicitadas realizando as contas na ordem indicada

a) $\dfrac{\partial}{\partial y}\, y^2 \ln\left(\dfrac{2x}{3y}\right)$ b) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\, \operatorname{sen}(xy)$

a)
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\, y^2 \ln\left(\frac{2x}{3y}\right) &= \frac{\partial y^2}{\partial y} \ln\left(\frac{2x}{3y}\right) + y^2 \frac{\partial}{\partial y} \ln\left(\frac{2x}{3y}\right) \\
&= 2y \ln\left(\frac{2x}{3y}\right) + y^2 \left(\frac{2x}{3y}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{2x}{3y} \\
&= 2y \ln\left(\frac{2x}{3y}\right) + y^2 \frac{3y}{2x} \frac{2x}{3} \frac{\partial y^{-1}}{\partial y} \\
&= 2y \ln\left(\frac{2x}{3y}\right) + y^3 \frac{\partial y^{-1}}{\partial y} \\
&= 2y \ln\left(\frac{2x}{3y}\right) + y^3 (-1) y^{-2} \\
&= 2y \ln\left(\frac{2x}{3y}\right) - y \\
&= y \left(2 \ln\left(\frac{2x}{3y}\right) - 1\right)
\end{aligned}$$

b) Começamos calculando a primeira derivada

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\, \operatorname{sen}(xy) &= \cos(xy) \frac{\partial}{\partial y}(xy) \\
&= \cos(xy) x \frac{\partial y}{\partial y} \\
&= x \cos(xy)
\end{aligned}$$

Agora calculamos a derivada segunda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\, \operatorname{sen}(xy) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\, \operatorname{sen}(xy)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(x \cos(xy)) \\
&= \frac{\partial x}{\partial x} \cos(xy) + x \frac{\partial}{\partial x} \cos(xy) \\
&= \cos(xy) - x \operatorname{sen}(xy) \frac{\partial}{\partial x}(xy) \\
&= \cos(xy) - x \operatorname{sen}(xy) y \frac{\partial x}{\partial x} \\
&= \cos(xy) - xy \operatorname{sen}(xy)
\end{aligned}$$