Integrais e Séries – Prova 1 – Turma 6 01/11/24

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25] Calcule o valor médio da função $f(x) = \dfrac{1 - xe^{-x}}{x}$ no intervalo $[1, a]$, para $a > 1$

Valor médio

$$f_{\text{médio}} = \frac{1}{a-1}\int_1^a f(x)dx$$

Calculando a primitiva

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)dx \\
&= \int \frac{1 - xe^{-x}}{x}dx \\
&= \int \frac{1}{x} - e^{-x}dx \\
&= \int \frac{1}{x}dx - \int e^{-x}dx \\
&= \ln|x| + e^{-x} + C
\end{aligned}$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned}
f_{\text{médio}} &= \frac{1}{a-1}\int_1^a f(x)dx \\
&= \frac{1}{a-1}\left(F(x)\Big|_1^a\right) \\
&= \frac{1}{a-1}\big(F(a) - F(1)\big) \\
&= \frac{1}{a-1}\left[\big(\ln|a| + e^{-a} + C\big) - \big(\ln|1| + e^{-1} + C\big)\right] \\
&= \frac{1}{a-1}\left[\ln(a) + e^{-a} - 0 - e^{-1}\right] \\
&= \frac{\ln(a) + e^{-a} - e^{-1}}{a-1}
\end{aligned}$$

2 [25] Calcule a integral $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{t} - \cos(\pi t) + \sec^2\left(\frac{t}{2}\right) - 3x^3 + 1\; dt$

Calculando a primitiva

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int f(t)\, dt \\
&= \int \sqrt{t} - \cos(\pi t) + \sec^2\left(\frac{t}{2}\right) - 3x^3 + 1\; dt \\
&= \int t^{1/2}\; dt - \int \cos(\pi t)\; dt + \int \sec^2\left(\frac{t}{2}\right)\; dt - \int 3x^3 + 1\; dt \\
&= \frac{t^{1/2+1}}{1/2+1} - \frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi} + 2\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) - \left(3x^3+1\right) t + C \\
&= \frac{2}{3} t^{3/2} - \frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi} + 2\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) - \left(3x^3+1\right) t
\end{aligned}$$

Calculnado a integral definida

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^2 f(t)\, dt \\
&= F(t)\Big|_0^2 \\
&= F(2) - F(0) \\
&= \left[\frac{2}{3}2^{3/2} - \frac{\operatorname{sen}(\pi 2)}{\pi} + 2\operatorname{tg}\left(\frac{2}{2}\right) - \left(3x^3+1\right) 2\right] - \left[\frac{2}{3}0^{3/2} - \frac{\operatorname{sen}(\pi 0)}{\pi} + 2\operatorname{tg}\left(\frac{0}{2}\right) - \left(3x^3+1\right) 0\right] \\
&= \frac{2^{4/2}2^{1/2}}{3} + 2\operatorname{tg}(1) - \left(3x^3+1\right) 2 \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2\operatorname{tg}(1) - 6x^3 + 2
\end{aligned}$$

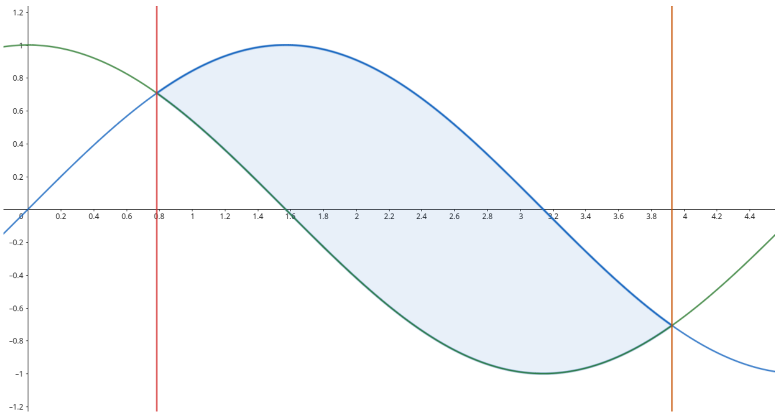
3 [25] Considerando as curvas

$$y = \cos(x) \qquad y = \operatorname{sen}(x) \qquad x = \frac{\pi}{4} \qquad \text{e} \qquad x = \frac{5\pi}{4}$$

a) Esboce o gráfico das curvas e indique a área delimitada por elas

b) Calcule a área

1)



2)
A função seno passa por cima da cosseno em todo o intervalo, portanto

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \operatorname{sen}(x) - \cos(x) dx \\
&= \big(-\cos(x) - \operatorname{sen}(x) \big)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} \\
&= \left(-\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \left(-\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{-\sqrt{2}}{2} \right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
&= 4\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

4 [25] Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas

$$y = x^3 \qquad \text{e} \qquad y = x^2$$

em torno da reta $x = -2$

Usando cascas cilíndricas o volume é

$$V = \int_a^b 2\pi r(x)h(x)\,dx$$

As curvas se interceptam nos pontos que satisfazem a equação

$$\begin{aligned} x^2 &= x^3 \\ x^2 - x^3 &= 0 \\ x^2(1-x) &= 0 \end{aligned}$$

ou seja, $x = 0$ e $x = 1$
O raio é a distância entre o "x da integração" e o eixo de rotação $x = -2$

$$r(x) = x + 2$$

Como $x^2 > x^3$ no intervalo $(0, 1)$ a altura é

$$h(x) = x^2 - x^3$$

Temos então

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi r(x)h(x)\,dx \\ &= \int_0^1 2\pi(x+2)(x^2 - x^3)\,dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^3 - x^4 + 2x^2 - 2x^3\,dx \\ &= 2\pi \int_0^1 2x^2 - x^3 - x^4\,dx \\ &= 2\pi \left(2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= 2\pi \left[\left(2\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} - \frac{1^5}{5}\right) - \left(2\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4} - \frac{0^5}{5}\right)\right] \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\ &= 2\pi \frac{40 - 15 - 12}{60} \\ &= \frac{13}{30}\pi \end{aligned}$$