

Derivação Implícita

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/cfvv1>

Conteúdo

Derivação Implícita

Exemplos

Lista Mínima

Derivação Implícita

Suponha que $F(x, y)$ seja diferenciável e que a equação

$$F(x, y) = 0$$

defina y como função de x , encontre $\frac{dy}{dx}$

Derivação Implícita – Justificativa

$$F_x \frac{dx}{dx} + F_y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$w(x) = F(x, y(x)) = 0$$

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$F_y \frac{dy}{dx} = -F_x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

desde que $F_y \neq 0$

Derivação Implícita – Fórmula

Suponha que $F(x, y)$ seja diferenciável e que a equação

$$F(x, y) = 0$$

defina y como função de x , $y = y(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

desde que $F_y \neq 0$

Exemplo 1

Calcule $\frac{dy}{dx}$ se $y^2 - x^2 - \text{sen}(xy) = 0$

Exemplo 1 – Solução

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - x^2 - \sin(xy)) = 0 - 2x - y \cos(xy) = -2x - y \cos(xy)$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - x^2 - \sin(xy)) = 2y - 0 - x \cos(xy) = 2y - x \cos(xy)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2x - y \cos(xy)}{2y - x \cos(xy)} = \frac{2x + y \cos(xy)}{2y - x \cos(xy)}$$

Derivação Implícita – Três Variáveis

Suponha que $F(x, y, z)$ seja diferenciável e que a equação

$$F(x, y, z) = 0$$

defina z como função de (x, y) , isto é, $z = f(x, y)$, determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$

Derivação Implícita – Justificativa

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [F(x, y, z(x, y))] = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + 0 + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$F_z \frac{\partial z}{\partial x} = -F_x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

desde que $F_z \neq 0$

Derivação Implícita – Justificativa

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [F(x, y, z(x, y))] = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$0 + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$F_z \frac{\partial z}{\partial y} = -F_y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

desde que $F_z \neq 0$

Derivação Implícita – Três Variáveis – Fórmulas

Suponha que $F(x, y, z)$ seja diferenciável e que a equação

$$F(x, y, z) = 0$$

defina z como função de (x, y) , então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

desde que $F_z \neq 0$

Exemplo 3

Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ se $x^3 + z^2 + ye^{xz} + z \cos(y) = 0$

Exemplo 3 – Solução

$$F(x, y, z) = x^3 + z^2 + ye^{xz} + z \cos(y)$$

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} [x^3 + z^2 + ye^{xz} + z \cos(y)] = 3x^2 + 0 + ye^{xz}z + 0 = 3x^2 + yze^{xz}$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} [x^3 + z^2 + ye^{xz} + z \cos(y)] = 0 + 0 + e^{xz} - z \sin(y) = e^{xz} - z \sin(y)$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z} [x^3 + z^2 + ye^{xz} + z \cos(y)] = 0 + 2z + ye^{xz}x + \cos(y) = 2z + yxe^{xz} + \cos(y)$$

Exemplo 3 – Solução

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + yze^{xz}}{2z + yxe^{xy} + \cos(y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{e^{xz} - z \operatorname{sen}(y)}{2z + yxe^{xy} + \cos(y)}$$

Conteúdo

Derivação Implícita

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 4

Considerando que a equação

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + 1$$

defina z como função de x e y . Encontre, se possível, $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ nos pontos $(1, 1, 1)$ e $(1, 3, 2)$

Note que $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 1$

Exemplo 4 – Solução

Sabemos que, se $F_z \neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Exemplo 4 – Solução

Calculando as derivadas parciais de $F(x, y, z)$

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 1) = 3x^2 - 3yz$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 1) = 3y^2 - 3xz$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z} (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 1) = 3z^2 - 3xy$$

Exemplo 4 – Solução

Avaliando as derivadas parciais no ponto $(1, 1, 1)$

$$F_z(1, 1, 1) = (3z^2 - 3xy) \Big|_{(1,1,1)} = 3 - 3 = 0$$

Não é possível calcular as derivadas neste ponto

Exemplo 4 – Solução

Avaliando as derivadas parciais no ponto $(1, 3, 2)$

$$F_z(1, 1, 2) = (3z^2 - 3xy) \Big|_{(1,3,2)} = 3 \times 2^2 - 3 \times 1 \times 3 = 12 - 9 = 3 \neq 0$$

É possível calcular as derivadas neste ponto

$$F_x(1, 1, 2) = (3x^2 - 3yz) \Big|_{(1,3,2)} = 3 \times 1^2 - 3 \times 3 \times 2 = 3 - 18 = -15$$

$$F_y(1, 1, 2) = (3y^2 - 3xz) \Big|_{(1,3,2)} = 3 \times 3^2 - 3 \times 1 \times 2 = 27 - 6 = 21$$

Exemplo 4 – Solução

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 3, 2) = -\frac{F_x(1, 3, 2)}{F_z(1, 3, 2)} = -\frac{-15}{3} = 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1, 2) = -\frac{F_y(1, 3, 2)}{F_z(1, 3, 2)} = -\frac{21}{3} = -7$$

Exemplo 5

Dada a equação $x^2y + y^2z + z^2x = 1$ encontre $\frac{\partial z}{\partial x}$

Exemplo 5 – Solução

Derivando ambos os lados por x , tratando z como função $z = z(x, y)$

$$x^2y + y^2z + z^2x = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2y + y^2z + z^2x) = \frac{\partial 1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} (y^2 + 2zx) = -2xy - z^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2z) + \frac{\partial}{\partial x}(z^2x) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy + z^2}{y^2 + 2zx}$$

$$2xy + y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2zx \frac{\partial z}{\partial x} + z^2 = 0$$

Conteúdo

Derivação Implícita

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 14.4

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 26, 28, 30, 32

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações