CFVVI – Prova Substitutiva – Turma 7 21/07/2025

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

O exercício correspondente a prova que será substituída vale 50 pontos

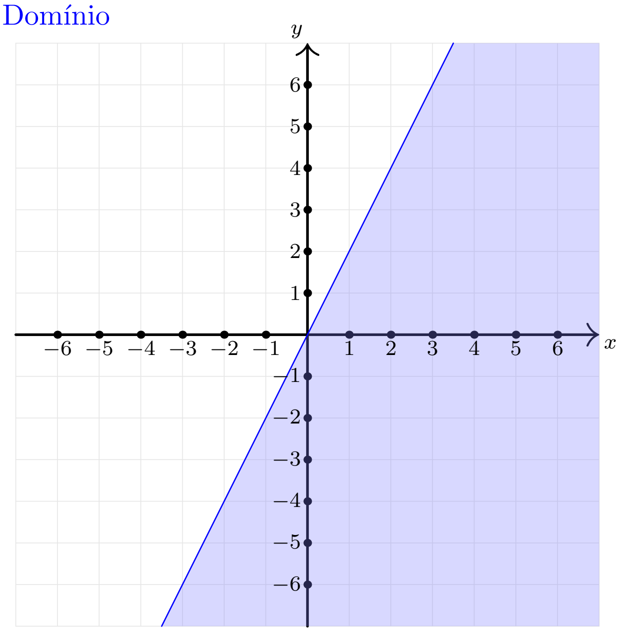
1 [25] Considerando a função $f(x, y) = \sqrt{2x - y} - 2$

a) Determine e esboce o domínio de f

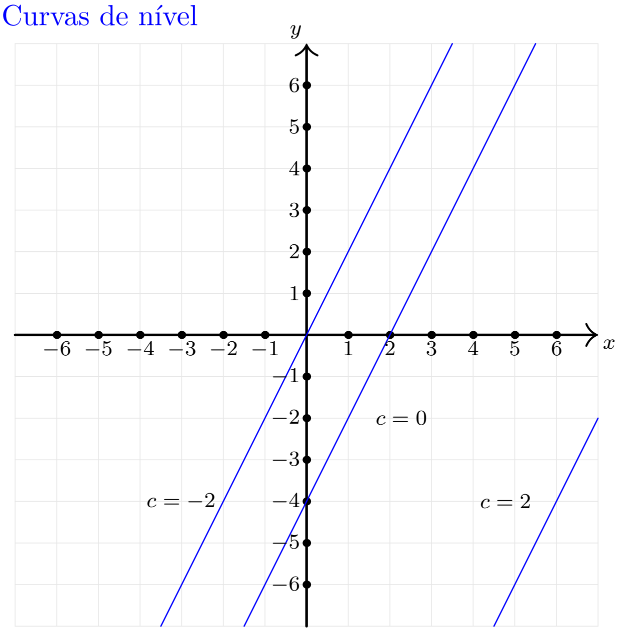
b) Determine as curvas de nível de f e esboce três delas

c) Calcule o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{f(x, y)}{2x - y - 4}$ ou mostre que ele não existe

Domínio



Curvas de nível



a) O domínio de f consiste dos pontos onde é possível avaliar a raiz quadrada, isto é, os pontos que satisfazem $2x - y \geq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} 2x - y &\geq 0 \\ -y &\geq 2x \\ y &\leq 2x \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leq 2x\right\},$$

que são os pontos abaixo a reta $y = 2x$.

b) As curvas de nível de f são compostas pelos pontos onde $f(x, y) = c$ para alguma constante c na imagem de f.
Para determinar a imagem de f observamos que $2x - y$ pode assumir qualquer valor não negativo. Portanto, $\sqrt{2x - y}$ está no intervalo $[0, \infty)$. Concluímos que os valores de f estão em $[-2, \infty)$, isto é, $\text{Im}(f) = [-2, \infty)$
Para qualquer $c \in \text{Im}(f) = [-2, \infty)$, temos a curva de nível

$$\begin{aligned} f(x, y) &= c \\ \sqrt{2x - y} - 2 &= c \\ \sqrt{2x - y} &= c + 2 \\ 2x - y &= (c + 2)^2 \\ -y &= (c + 2)^2 - 2x \\ y &= 2x - (c + 2)^2 \end{aligned}$$

Que são retas. Escolhendo os valores $c = -2$, $c = 0$ e $c = 2$, temos as curvas de nível

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: y = 2x - (-2 + 2)^2 = 2x - 0 = 2x \\ \gamma_2 &: y = 2x - (0 + 2)^2 = 2x - 4 \\ \gamma_3 &: y = 2x - (2 + 2)^2 = 2x - 16 \end{aligned}$$

c) Calculando o limite

$$\begin{aligned} L &= \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{f(x, y)}{2x - y - 4} \\ &= \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sqrt{2x - y} - 2}{2x - y - 4} \\ &= \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sqrt{2x - y} - 2}{2x - y - 4} \times \frac{\sqrt{2x - y} + 2}{\sqrt{2x - y} + 2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\left(\sqrt{2x - y}\right)^2 - 2^2}{(2x - y - 4)\left(\sqrt{2x - y} + 2\right)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{2x - y - 4}{(2x - y - 4)\left(\sqrt{2x - y} + 2\right)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{1}{\sqrt{2x - y} + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \times 2 - 0} + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2 [25] Considerando que a equação $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$ define z como função de x e y.

a) Calcule as derivadas $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

b) Encontre os valores de $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em $(1,1,1)$

c) Construa a aproximação linear da função $z(x,y)$ no ponto $(1,1)$

a) Considerando $z = z(x,y)$ e derivando por x os dois lados da equação temos

$$(z(x,y))^3 - xy + yz(x,y) + y^3 = 2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((z(x,y))^3 - xy + yz(x,y) + y^3\right) = \frac{\partial 2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((z(x,y))^3\right) - \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial x}(yz(x,y)) + \frac{\partial}{\partial x}\left(y^3\right) = 0$$

$$3\,(z(x,y))^2\frac{\partial z}{\partial x} - y + y\frac{\partial z}{\partial x} + 0 = 0$$

$$\left(3\,(z(x,y))^2 + y\right)\frac{\partial z}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{3\,(z(x,y))^2 + y}$$

Derivando por y os dois lados da equação temos

$$(z(x,y))^3 - xy + yz(x,y) + y^3 = 2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left((z(x,y))^3 - xy + yz(x,y) + y^3\right) = \frac{\partial 2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left((z(x,y))^3\right) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz(x,y)) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^3\right) = 0$$

$$3\,(z(x,y))^2\frac{\partial z}{\partial y} - x + \frac{\partial y}{\partial y}z(x,y) + y\frac{\partial z}{\partial y} + 3y^2 = 0$$

$$\left(3\,(z(x,y))^2 + y\right)\frac{\partial z}{\partial y} - x + z(x,y) + 3y^2 = 0$$

$$\left(3\,(z(x,y))^2 + y\right)\frac{\partial z}{\partial y} = x - z(x,y) - 3y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x - z(x,y) - 3y^2}{3\,(z(x,y))^2 + y}$$

b) Avaliando as derivadas no ponto $(1,1,1)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \left(\frac{y}{3z^2 + y}\right)\Bigg|_{(1,1,1)} = \frac{1}{3 \times 1^2 + 1} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = \left(\frac{x - z - 3y^2}{3z^2 + y}\right)\Bigg|_{(1,1,1)} = \frac{1 - 1 - 3 \times 1^2}{3 \times 1^2 + 1} = \frac{-3}{4}$$

c) A aproximação linear da função $z(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0) = (1, 1)$ é

$$\begin{aligned} L(x,y) &= z(x_0,y_0) + (x - x_0)\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) \\ &= z(1,1) + (x-1)\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) + (y-1)\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) \\ &= 1 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{4}(y-1) \end{aligned}$$

3 [25] Encontre os valores máximo e mínimo da função $f(x,y) = 4xy$ restrita a região fechada limitada $x^2 + y^2 \leq 32$

Como a função é contínua e a região é fechada e limitada sabemos que f assume um valor máximo e um valor mínimo na região.

Temos que buscar os pontos críticos no interior e aplicar multiplicadores de Lagrange na fronteira.

Gradiente de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4xy) = 4y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4xy) = 4x$$

Pontos críticos: Impondo $\nabla f = 0$ temos o ponto interior

$$P_1 = (0,0)$$

Multiplicadores de Lagrange: Temos a restrição $g(x,y) = x^2 + y^2 \leq 9$ e seu gradiente é

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = 2y$$

Precisamos resolver o sistema

$$4y = 2\lambda x$$
$$4x = 2\lambda y$$
$$x^2 + y^2 = 32$$

que pode ser simplificado para

$$2y = \lambda x$$
$$2x = \lambda y$$
$$x^2 + y^2 = 32$$

Se $\lambda = 0$ temos que $y = 0$ pela primeira equação e $x = 0$ pela segunda, mas esses valores não resolvem a terceira equação. Concluímos que $\lambda \neq 0$.

Assim podemos isolar x na primeira equação e substituir na segunda

$$2y = \lambda x$$
$$x = \frac{2y}{\lambda}$$

$$2x = \lambda y$$
$$2\frac{2y}{\lambda} = \lambda y$$
$$4y = \lambda^2 y$$

As soluções são $y = 0$ ou $\lambda = \pm 2$.
Se $y = 0$ temos $4x = 2\lambda y = 0$, que não resolve a terceira equação.
Se $\lambda = 2$, pela primeira equação, temos que $x = y$. A terceira equação se torna

$$x^2 + y^2 = 32$$
$$2x^2 = 32$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm 4$$

Encontramos os pontos

$$P_2 = (4,4) \qquad P_3 = (-4,-4)$$

Se $\lambda = -2$, pela primeira equação, temos que $x = -y$. A terceira equação se torna

$$x^2 + y^2 = 32$$
$$x^2 + (-x)^2 = 32$$
$$2x^2 = 32$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm 4$$

Encontramos os pontos

$$P_4 = (4,-4) \qquad P_5 = (-4,4)$$

Avaliando a função nos pontos encontrados

$$f(0,0) = 4 \times 0 \times 0 = 0$$
$$f(4,4) = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

$$f(-4,-4) = 4 \times (-4) \times (-4) = 64$$
$$f(-4,4) = 4 \times (-4) \times 4 = -64$$
$$f(4,-4) = 4 \times 4 \times (-4) = -64$$

O valor mínimo de f é -64 e o valor máximo é 64