Integração por Substituição Simples

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Justificativa

Assumindo que $F'(x) = f(x)$ e $g'(x)$ é a derivada e $g(x)$

temos

$$
\begin{aligned}
\Big(F\big(g(x)\big)\Big)' &= f\big(g(x)\big)g'(x) \\
\int \Big(F\big(g(x)\big)\Big)' dx &= \int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx \\
F\big(g(x)\big) &= \int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx \\
\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) &= \int f(u)\,du
\end{aligned}
$$

onde fizemos $u = g(x)$ e $du = g'(x)\,dx$

Integração por Substituição Simples

Regra

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

onde $u = g(x)$ e $du = g'(x)\,dx$

Integrais definidas

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

Casos Particulares

Se $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ e k é uma constante

$$\int f(kx)dx = \frac{1}{k}F(kx) + C$$

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$$

Conteúdo

Exemplo 1

Encontre $\displaystyle\int 4x^3 \cos\left(x^4+2\right)\,dx = \int \cos\left(x^4+2\right)4x^3\,dx$

Identificando as funções

$$f = \cos\left(x^4+2\right)$$

$$= \cos\left(g(x)\right)$$

$$g = x^4+2$$

$$g' = 4x^3$$

Exemplo 1

Nova variável

$$u = x^4 + 2 \qquad \text{e} \qquad du = 4x^3\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int \cos\left(x^4 + 2\right)\; 4x^3 dx &= \int \cos(u) du \\
&= \operatorname{sen}(u) + C \\
&= \operatorname{sen}\left(x^4 + 2\right) + C
\end{aligned}$$

Conteúdo

Exemplo 2

Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \int \left(1-4x^2\right)^{-1/2} x\,dx$

Identificando as funções

$$f = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} = \left(1-4x^2\right)^{-1/2}$$

$$= \left(g(x)\right)^{-1/2}$$

$$g = 1-4x^2$$

$$g' = -8x$$

Exemplo 2

Substituição

$$u = 1 - 4x^2 \qquad \text{e} \qquad du = -8x dx \quad \Leftrightarrow \quad x dx = -\frac{1}{8} du$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx &= -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du \\
&= -\frac{1}{8} \int u^{-1/2} du \\
&= -\frac{1}{8} \left(2\sqrt{u}\right) + C \\
&= -\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} + C
\end{aligned}$$

Conteúdo

Exemplo 3

Calcule $\displaystyle\int \operatorname{tg}(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx = \int \big(\cos(x)\big)^{-1} \operatorname{sen}(x)\,dx$

Identificando as funções

$$f = \big(\cos(x)\big)^{-1}$$

$$= \big(g(x)\big)^{-1}$$

$$g = \cos(x)$$

$$g' = -\operatorname{sen}(x)$$

Exemplo 3

Substituição

$$u = \cos(x) \qquad \text{e} \qquad du = -\operatorname{sen}(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad -du = \operatorname{sen}(x)dx$$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}(x)dx &= \int \big(\cos(x)\big)^{-1} \operatorname{sen}(x)\, dx \\
&= \int u^{-1}(-du) \\
&= -\int u^{-1}du \\
&= -\ln|u| + C \\
&= -\ln|\cos(x)| + C
\end{aligned}$$

Conteúdo

Exemplo 4

Encontre o valor médio de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ no intervalo $[1, e]$

Valor médio

$$f_{\text{médio}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Exemplo 4 – Integral Indefinida

Calcular $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int \ln(x)x^{-1}\,dx$

Substituição $\quad u = \ln(x) \quad$ e $\quad du = x^{-1}\,dx$

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int u\,du$$

$$= \frac{u^2}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\big(\ln(x)\big)^2 + C$$

Exemplo 4 – Integral Definida

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\ln(x)\Big)^2\Bigg|_1^e$$

$$= \frac{\Big(\ln(e)\Big)^2}{2} - \frac{\Big(\ln(1)\Big)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Exemplo 4 – Valor Médio

$$
\begin{aligned}
f_{\text{médio}} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{e-1}\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{e-1}\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2(e-1)}
\end{aligned}
$$

Conteúdo

Exemplo 5

Determine se a integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4}\, dx$ é convergente ou divergente

Integral Imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4}\, dx = \lim_{r \to -\infty} \int_{r}^{0} x^3 e^{-x^4}\, dx + \lim_{s \to \infty} \int_{0}^{s} x^3 e^{-x^4}\, dx$$

Exemplo 5 – Integral Indefinida

Calcular $\displaystyle\int x^3 e^{-x^4}\,dx$

Substituição $\quad u = -x^4 \quad$ e $\quad du = -4x^3\,dx \quad \Leftrightarrow \quad x^3\,dx = \dfrac{du}{-4}$

$$\begin{aligned}
\int x^3 e^{-x^4}\,dx &= \int e^u \left(-\frac{du}{4}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\int e^u\,du \\
&= -\frac{1}{4}e^u + C \\
&= -\frac{1}{4}e^{-x^4} + C
\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Integral Imprópria 1

$$\int_{-\infty}^{0} x^3 e^{-x^4}\, dx = \lim_{r \to -\infty} \int_{r}^{0} x^3 e^{-x^4}\, dx$$

$$= \lim_{s \to -\infty} \left(-\frac{e^{-x^4}}{4} \right) \Bigg|_{r}^{0}$$

$$= \lim_{r \to -\infty} \left(-\frac{1}{4} \left(e^{0} - e^{-r^4} \right) \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \left(1 - \lim_{r \to -\infty} e^{-r^4} \right)$$

$$= -\frac{1}{4}$$

Exemplo 5 – Integral Imprópria 2

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^4}\,dx &= \lim_{s\to\infty} \int_0^{s} x^3 e^{-x^4}\,dx \\
&= \lim_{s\to\infty} \left(-\frac{e^{-x^4}}{4}\right)\Bigg|_0^{s} \\
&= \lim_{s\to\infty} \left(-\frac{1}{4}\left(e^{-s^4} - e^0\right)\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\lim_{s\to\infty} e^{-s^4} - 1\right) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Conclusão

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4}\, dx = \lim_{r \to -\infty} \int_r^0 x^3 e^{-x^4}\, dx + \lim_{s \to \infty} \int_0^s x^3 e^{-x^4}\, dx$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= 0$$

A integral converge para zero

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 4.2 da Apostila

Exercícios: 1a-f, 2, 4, 5a-f

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações