Integrais e Séries – Prova 2 – Turma 6 29/11/24

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [20] Calcule o valor médio da função $f(x) = x^2 \ln(x)$ no intervalo $[1, 3]$

Calculando a primitiva de f usando integral por partes $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx \\ &= \int x^2 \ln(x)\,dx \end{aligned}$$

$$u = \ln(x) \qquad du = \frac{dx}{x} \qquad\qquad dv = x^2\,dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2\,dx \\ &= \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C \\ &= \frac{x^3}{3}\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right) + C \end{aligned}$$

Calculando a integral definida de f no intervalo $[1, 3]$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 f(x)dx \\ &= F(x)\Big|_1^3 \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right)\right]\Bigg|_1^3 \\ &= \frac{3^3}{3}\left(\ln(3) - \frac{1}{3}\right) - \frac{1^3}{3}\left(\ln(1) - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$= 9\left(\ln(3) - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(0 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 9\ln(3) - 3 + \frac{1}{9}$$

$$= 9\ln(3) - \frac{27}{9} + \frac{1}{9}$$

$$= 9\ln(3) - \frac{26}{9}$$

Calculando a média

$$f_{\text{médio}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$= \frac{1}{3-1}\int_1^3 x^2 \ln(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(9\ln(3) - \frac{26}{9}\right)$$

$$= \frac{9}{2}\ln(3) - \frac{13}{9}$$

$$\approx 3{,}4993$$

2 [20] Use substituição simples para calcular a integral $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$

Calculando a primitiva usando substituição simples

$$F = \int xe^{-x^2}\,dx$$

$$u = -x^2 \qquad du = -2x\,dx \qquad x\,dx = \frac{du}{-2}$$

$$\begin{aligned}
F &= \int e^u\,\frac{du}{-2}\\
&= -\frac{1}{2}\int e^u\,du\\
&= -\frac{1}{2}e^u + C\\
&= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C
\end{aligned}$$

Calculando a integral imprópria

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx\\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x^2}\,dx\\
&= \lim_{b\to\infty}\left(F(x)\Big|_0^b\right)\\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-x^2}}{2}\Big|_0^b\right)\\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-b^2}}{2}+\frac{e^{-0^2}}{2}\right)\\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-b^2}}{2}+\frac{1}{2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-b^2}\right)+\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3 [20] Encontre a primitiva da função $f(x) = \cos^5(x)\,\mathrm{sen}^2(x)$

$$\begin{aligned}
F &= \int f(x)dx \\
&= \int \cos^5(x)\,\mathrm{sen}^2(x)dx \\
&= \int \left(\cos^2(x)\right)^2 \mathrm{sen}^2(x)\cos(x)dx \\
&= \int \left(1-\mathrm{sen}^2(x)\right)^2 \mathrm{sen}^2(x)\cos(x)dx
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\quad u = \mathrm{sen}(x) \quad du = \cos(x)dx$

$$\begin{aligned}
F &= \int \left(1-u^2\right)^2 u^2 du \\
&= \int \left(1-2u^2+u^4\right) u^2 du \\
&= \int u^2 - 2u^4 + u^6\, du \\
&= \frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + c \\
&= \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}^3(x) - \frac{2}{5}\,\mathrm{sen}^5(x) + \frac{1}{7}\,\mathrm{sen}^7(x) + c
\end{aligned}$$

4 [20] Encontre a primitiva da função $h(x) = \dfrac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}$

$$H = \int \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Fazendo a substituição $x = 2\operatorname{sen}(\theta) \qquad dx = 2\cos(\theta)d\theta$

$$\begin{aligned}
H &= \int \frac{2^5 \operatorname{sen}^5(\theta)}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2(\theta)}} 2\cos(\theta)d\theta \\
&= 2^5 \int \frac{\operatorname{sen}^5(\theta)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}} \cos(\theta)d\theta \\
&= 2^5 \int \frac{\operatorname{sen}^5(\theta)}{\cos(\theta)} \cos(\theta)d\theta \\
&= 2^5 \int \operatorname{sen}^5(\theta)d\theta \\
&= 2^5 \int \left(\operatorname{sen}^2(\theta)\right)^2 \operatorname{sen}(\theta)d\theta \\
&= 2^5 \int \left(1-\cos^2(\theta)\right)^2 \operatorname{sen}(\theta)d\theta
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\qquad u = \cos(\theta) \qquad du = -\operatorname{sen}(\theta)d\theta$

$$\begin{aligned}
H &= -2^5 \int \left(1-u^2\right)^2 du \\
&= -2^5 \int 1 - 2u^2 + u^4 \, du \\
&= 2^5 \int 2u^2 - u^4 - 1 \, du \\
&= 2^5 \left(\frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 - u\right) + c \\
&= 2^5 \left(\frac{2}{3}\cos^3(\theta) - \frac{1}{5}\cos^5(\theta) - \cos(\theta)\right) + c
\end{aligned}$$

Para calcular $\cos(\theta)$ usamos que $\operatorname{sen}(\theta) = x/2$, portanto a hipotenusa é 2 e o cateto oposto é x assim o cateto adjacente é $a = \sqrt{2^2 - x^2} = \sqrt{4-x^2}$ e o cosseno é

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

Voltando para a integral

$$\begin{aligned}
H &= 2^5 \left[\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^5 - \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right] + c \\
&= 2^5 \left[\frac{2}{3\cdot 2^3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3 - \frac{1}{5\cdot 2^5}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^5 - \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\right] + c \\
&= \sqrt{4-x^2}\left[\frac{2^3}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^4 - 2^4\right] + c
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{4-x^2}\left[\frac{8}{3}\left(4-x^2\right) - \frac{1}{5}\left(4-x^2\right)^2 - 16\right] + c$$

$$= \sqrt{4-x^2}\left[\frac{32-8x^2}{3} - \frac{16-8x^2+x^4}{5} - 16\right] + c$$

$$= \sqrt{4-x^2}\left[\frac{5\cdot 32 - 5\cdot 8x^2}{15} - \frac{3\cdot 16 - 3\cdot 8x^2 + 3x^4}{15} - \frac{16\cdot 15}{15}\right] + c$$

$$= \frac{\sqrt{4-x^2}}{15}\left[16\cdot 5\cdot 2 - 16\cdot 3 - 16\cdot 5\cdot 3 - 5\cdot 8x^2 + 3\cdot 8x^2 - 3x^4\right] + c$$

$$= \frac{\sqrt{4-x^2}}{15}\left[-16\cdot 5 - 16\cdot 3 - 2\cdot 8x^2 - 3x^4\right] + c$$

$$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{15}\left[16\cdot 8 + 2\cdot 8x^2 + 3x^4\right] + c$$

$$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{15}\left[128 + 16x^2 + 3x^4\right] + c$$

5 [20] Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno da reta $x = -2$, da região contida entre as curvas

$$f(x) = \frac{1}{5x - x^2} \qquad y = 0 \qquad x = 1 \qquad x = 4$$

Volume por castas cilíndricas

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi r(x)h(x)dx \\ a &= 1 \\ b &= 4 \\ r &= x + 2 \\ h &= \frac{1}{5x - x^2} \end{aligned}$$

portanto

$$V = 2\pi \int_1^4 \frac{x+2}{5x - x^2} dx$$

Calculando a integral indefinida

$$F = \int \frac{x+2}{5x - x^2} dx = \int \frac{x+2}{x(5-x)} dx$$

Por frações parciais temos

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x(5-x)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{5-x} \\ x + 2 &= A(5-x) + Bx \\ &= (B - A)x + 5A \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes

$$\begin{cases} -A + B = 1 \\ 5A \qquad = 2 \end{cases}$$

obtemos os valores $A = \dfrac{2}{5}$ e $B = \dfrac{7}{5}$ portanto

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{2}{5x} + \frac{7}{5(5-x)} dx \\ &= \frac{2}{5}\ln(x) - \frac{7}{5}\ln(5-x) + c \end{aligned}$$

Voltando ao volume temos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi F(x)\Big|_1^4 \\ &= 2\pi \left[\frac{2}{5}\ln(x) - \frac{7}{5}\ln(5-x)\right]\Big|_1^4 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \left[\left(\frac{2}{5}\ln(4) - \frac{7}{5}\ln(5-4) \right) - \left(\frac{2}{5}\ln(1) - \frac{7}{5}\ln(5-1) \right) \right] \\
&= 2\pi \left(\frac{2}{5}\ln(4) + \frac{7}{5}\ln(4) \right) \\
&= 2\pi \frac{9}{5}\ln(4) \\
&= \frac{18\pi}{5}\ln(4)
\end{aligned}
$$