Sequências Numéricas – Teoremas

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

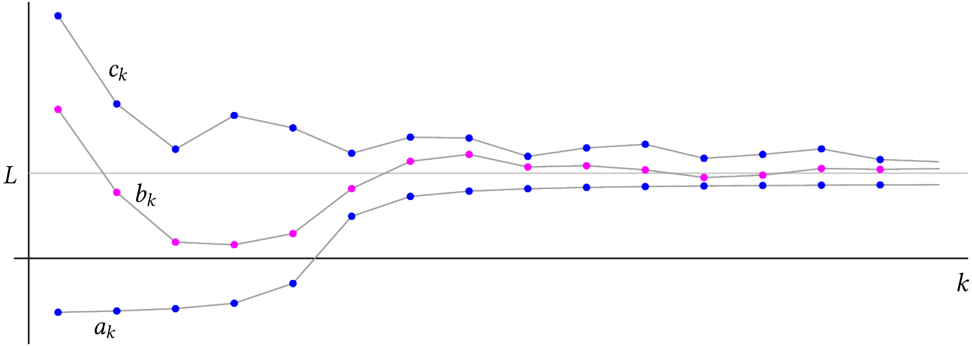
Teorema do Confronto

Sejam (a_k), (b_k) e (c_k) tais que

$$\boldsymbol{a_k} \leq \boldsymbol{b_k} \leq \boldsymbol{c_k} \qquad \forall\, k > N$$

Se $\quad a_k \to L \quad$ e $\quad c_k \to L \quad$ então $\quad b_k \to L$

Teorema do Confronto



Teorema da Função Contínua

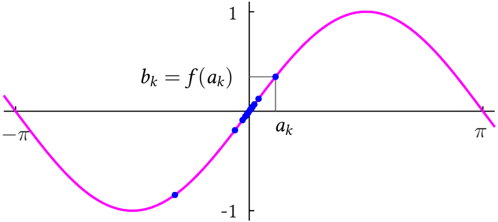
É verdade que $\quad \lim_{k\to\infty} f(a_k) = f\left(\lim_{k\to\infty} a_k\right) \quad$?

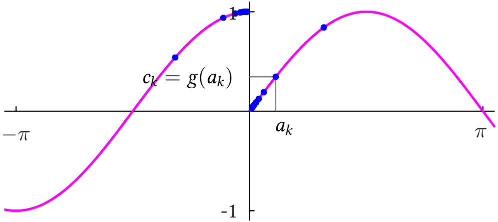
Se a_k é uma sequência numérica real convergente, $a_k \to L$, e
$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real contínua em D, com $L \in D$ então

$$\lim f(a_k) = f(L)$$

Conteúdo

Teorema da Função Contínua





Exemplo

Calcular $\lim \left[\cos\left(\alpha^k\right)\right]$ com $0 < \alpha < 1$

Considerando a sequência $a_k = \alpha^k$

Sabemos que $\lim a_k = 0$

A função cosseno é contínua em zero

Portanto

$$\lim \cos(\alpha^k) = \lim \cos(a_k) = \cos\left(\lim a_k\right) = \cos(0) = 1$$

Conteúdo

Limite de sequência definida por função

Se f é uma função real e $a_k = f(k)$ então

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_k = L$$

Esse resultado nos permite usar a regra de l'Hôpital (em x)

Exemplo

Mostre que $\lim \dfrac{5k^4}{k^4 + 8k^3} = 5$

A função

$$f(x) = \frac{5x^4}{x^4 + 8x^3} \qquad x \in \mathbb{R}$$

está definida para todo $x > 0$ e a sequência

$$a_k = f(k) = \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} \qquad k \in \mathbb{N}$$

Exemplo

Podemos aplicar a regra de L'Hôpital em x, pois temos uma indeterminação $^{\infty}/_{\infty}$

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{5k^4}{k^4+8k^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{x^4+8x^3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{20x^3}{4x^3+24x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{60x^2}{12x^2+48x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{120x}{24x+48} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{120}{24} \\
&= 5
\end{aligned}$$

Exemplo

Método mais apropriado

$$\lim_{k\to\infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{5k^4}{k^4}}{\dfrac{k^4 + 8k^3}{k^4}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{5}{1 + \dfrac{8}{k}}$$

$$= \frac{5}{1 + 8 \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k}}$$

$$= 5$$

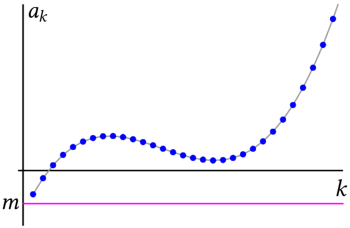
Conteúdo

Sequências Limitadas

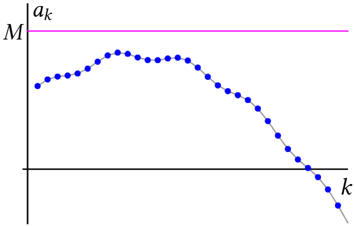
Uma sequência (a_k) é

Limitada inferiormente	se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$
Limitada superiormente	se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \geq a_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$
Limitada	se é limitada superiormente e inferiormente

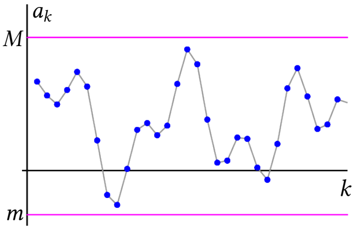
Sequências Limitadas



Limitada inferiormente



Limitada superiormente



Limitada

Sequências Crescentes e Decrescentes

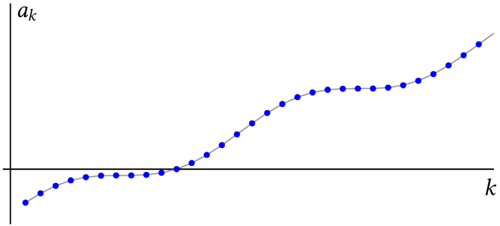
Uma sequência (a_k) é

Crescente se $a_k \leq a_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$

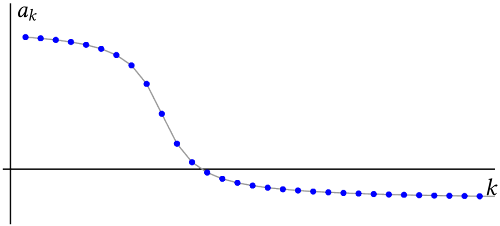
Decrescente se $a_k \geq a_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$

Monótona se é crescente ou decrescente

Sequências Crescentes e Decrescentes



Crescente



Decrescente

Convergência de sequência monótona

Se uma sequência (a_k) é limitada e monotônica, então ela é convergente

Importante porque permite decidir a convergência sem calcular o limite

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar as Seções 5.3 , 5.4 e 5.5 da Apostila

Exercícios:

- Seção 5.3: 2a-c
- Seção 5.4: 1, 2, 3
- Seção 5.5: 1, 2

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações