Integração e Séries

Luis Alberto D'Afonseca
Jônathas Douglas Santos de Oliveira

Integração e Séries

Luis Alberto D'Afonseca
Jônathas Douglas Santos de Oliveira

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG
17 de agosto de 2025

Apostila para a disciplina "Integração e Séries" do CEFET-MG.

A versão mais recente desta apostila pode ser baixada clicando ou escaneando o código QR.

Arte da capa: Fotografia de Pixabay baixada de Pexels

Prefácio

Este texto ainda está em construção e, portanto, está incompleto e contém erros, ele não é um substituto para as aulas e livros da bibliografia.

Essa apostila foi idealizada para apresentar o conteúdo programático previsto para a disciplina de Integrais e Séries no CEFET-MG, cuja ementa contém os tópicos:

1. integrais definidas;
2. integrais Indefinidas;
3. séries numéricas e
4. séries de potências.

O conteúdo dessa apostila está distribuído nos seguintes capítulos:

1. Funções e Derivadas
2. Integração
3. Áreas e Volumes
4. Técnicas de Integração
5. Sequências Numéricas
6. Séries Numéricas
7. Séries de Potências

8. Séries de Taylor
9. Usos da Série de Taylor

Cada capítulo apresenta a teoria, exemplos e exercícios sobre o tópico correspondente. Sempre que possível apresentamos também exemplos e ilustrações implementadas em Python disponibilizadas como *notebooks* no Google Colaboratory ou Colab. Nenhuma das atividades em Python é necessária para o estudo da apostila, elas foram criadas apenas como atividades complementares para os alunos interessados. A seguir está o *link* para o *notebook* que apresenta as bibliotecas NumPy, usada para computação numérica, e SymPy, usada para computação simbólica.

Notebook introduz as bibliotecas NumPy e SymPy.

Como os textos matemáticos costumam ser muito densos em informação, não absorvemos todas as sutilezas apenas em uma leitura. Por isso, fazer exercícios é parte fundamental do processo de aprendizado, ao manipularmos os conceitos no processo de resolução do exercício somos forçados a utilizar os resultados e a explorar suas sutilezas. A regra geral é que cada passagem da resolução precisa ser embasada em um resultado verdadeiro explicitamente descrito antes, essa é a razão pela qual os textos numeraram os resultados e fórmulas. Mesmo que não escrevamos essas referências, precisamos estar plenamente conscientes delas.

Uma sugestão é utilizar os exemplos contidos no texto como exercícios, tente resolver o problema proposto antes de ler a resolução apresentada. Depois dessa tentativa leia a resolução e a compare criticamente à sua resposta. Seu resultado coincide com o apresentado? Se sim verifique se você apresentou todos os argumentos necessários para embasar sua resposta. Quando os resultados ou argumentos não coincidirem revise sua resolução e verifique se ela corresponde a uma solução alternativa ou contém algum erro. Nas disciplinas de Matemática, na maioria das vezes, a argumentação é muito mais importante do que o resultado.

Nesse texto foi inserida uma lista de exercícios após cada seção e uma lista de revisão no final de cada capítulo. Ao estudar uma seção, teste sua compreensão resolvendo alguns exercícios da seção. Ao fazer uma revisão ou se preparar para uma avaliação, resolva os exercícios da revisão. O fato deles não estarem organizados por temas introduz o processo de identificação do problema e escolha da teoria adequada para resolvê-los.

Alguns exercícios possuem resposta no final da apostila, nesses casos o *link* [resp] no enunciado do exercício leva para sua resposta. Para retornar ao enunciado clique no número da resposta. Em alguns casos a resposta consiste apenas do resultado final, em outros toda a resolução está escrita.

Alguns resultados matemáticos necessários para a disciplina, como números complexos e funções hiperbólicas, são apresentados sucintamente no apêndice Conteúdo Complementar. O apêndice Referências e Recursos Online apresenta diversos materiais complementares, como videoaulas e atividades *online*, que podem ser acessados gratuitamente e contribuir para o estudo de cada tópico. O Índice Remissivo traz *links* para os principais termos discutidos dentro do texto.

Sumário

1

Funções e Derivadas

1.1 Introdução

Apresentamos neste capítulo uma revisão de funções de uma variável real, limites e derivadas.

1.2 Funções Reais

Apresentamos nessa seção algumas definições e propriedades do Cálculo de funções reais que podem ser úteis para o estudo dos conteúdos desse material. Começamos pela definição de uma função real.

Definição 1.1: Função

Uma Função f de um conjunto D para um conjunto E é uma regra que associa, sem ambiguidade, um único elemento $y = f(x) \in E$ para cada elemento $x \in D$.

Denotamos uma função por

$$f\colon D \to E$$

Dizemos que D é o Domínio e E o Contra Domínio de f, enquanto o conjunto de todos os valores $y = f(x)$ correspondentes a algum $x \in D$ é a Imagem de f.

Definição 1.2: Função Real

Uma Função Real é uma função cujo domínio e contra domínio são subconjuntos dos reais $\mathbb{R}$.

A seguir estão algumas funções importantes.

Funções Exponencial e Logarítmica

A Função Exponencial é a função

$$e^x$$

onde a constante e tem o valor

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ 69995\ldots$$

A imagem da função exponencial é o conjunto dos números reais positivos. O gráfico dessa função pode ser visto na Figura 1.1. Alternativamente podemos definir essa função pelo limite

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{1.1}$$

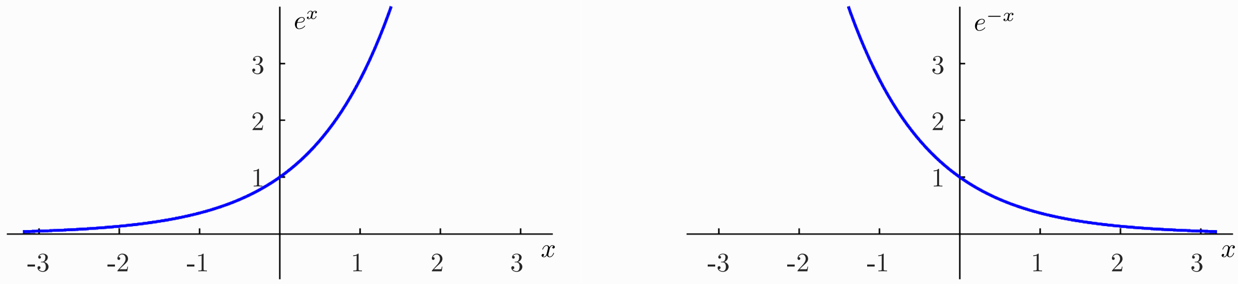
A derivada da função exponencial é

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

A Função Logaritmo Natural é a função inversa da exponencial e é o valor y tal que

$$y = \ln(x) \qquad \Rightarrow \qquad e^y = x$$

o domínio dessa função são os números reais positivos e sua imagem são todos os



(a) Gráfico da função e^x (b) Gráfico da função e^{-x}

Figura 1.1: Gráficos da função exponencial

reais. A Figura 1.2 mostra o gráfico dessa função calculada em $|x|$ estendendo assim o domínio para valores negativos de x.

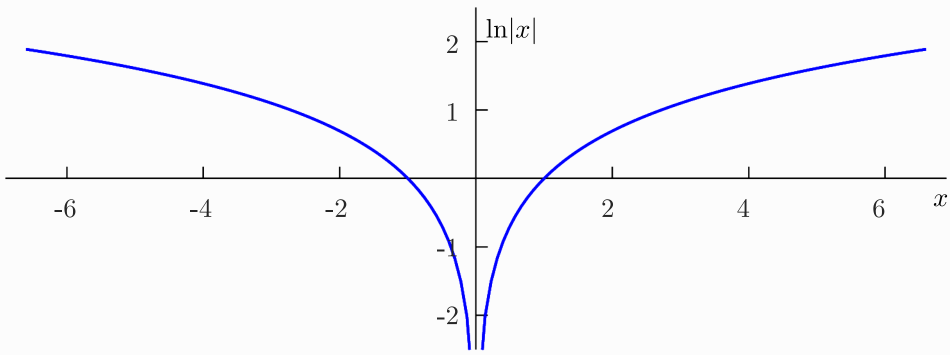


Figura 1.2: Gráfico da função $\ln|x|$

A derivada da função exponencial é

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

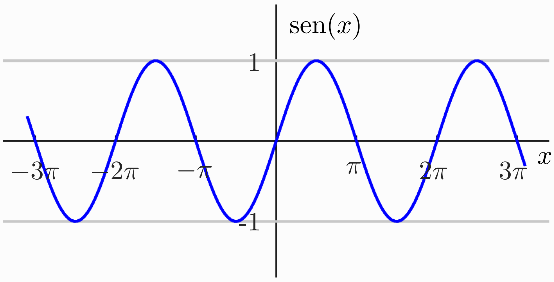
Funções Trigonométricas

Tradicionalmente pensamos nas funções trigonométricas como combinações das funções seno e cosseno

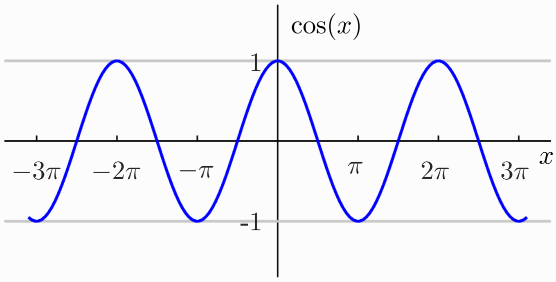
$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \operatorname{cossec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

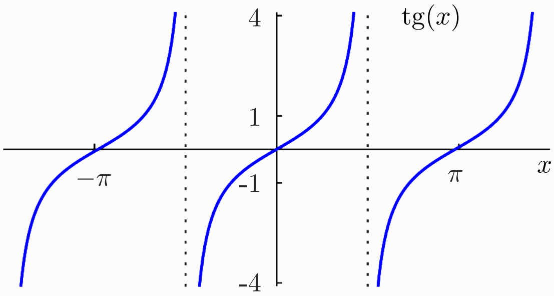
Os gráficos dessas funções podem ser vistos na Figura 1.3.



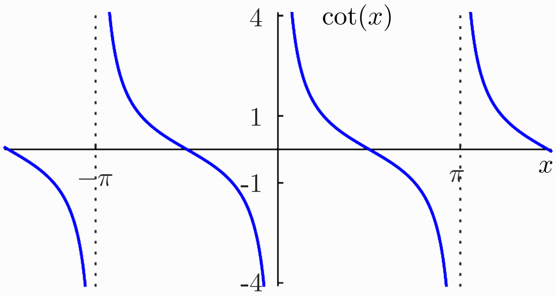
(a) Gráfico da função sen(x)



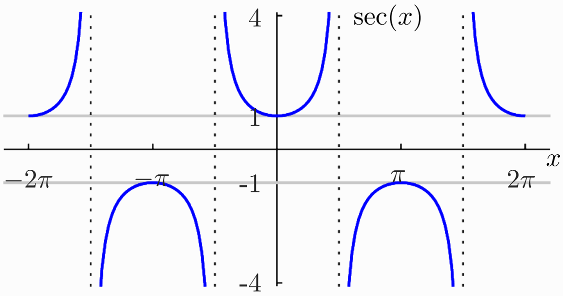
(b) Gráfico da função cos(x)



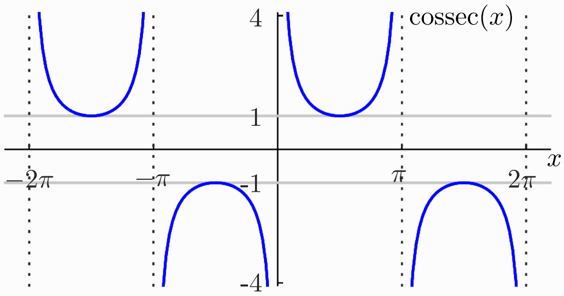
(c) Gráfico da função tg(x)



(d) Gráfico da função cot(x)



(e) Gráfico da função sec(x)



(f) Gráfico da função cossec(x)

Figura 1.3: Gráficos das funções trigonométricas

Identidade Pitagórica

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad 1 + \operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) \qquad 1 + \cot^2(x) = \operatorname{cossec}^2(x)$$

Algumas identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x) \qquad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}(x) \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$$

Fórmulas de soma e subtração

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$$
$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\cos(x)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$$
$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$$

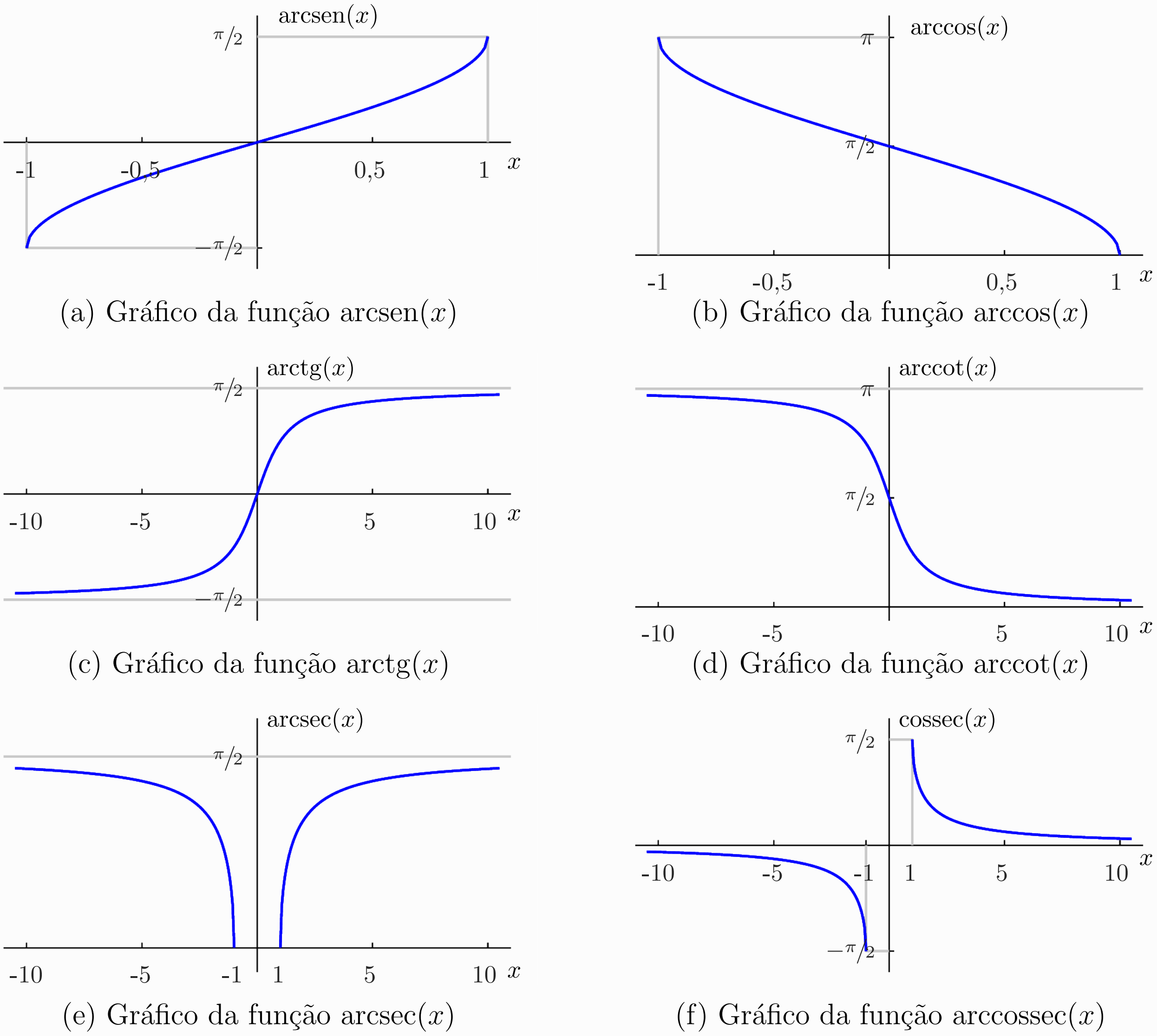
Fórmulas de ângulo duplo

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\\ &= 2\cos^2(x) - 1\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2(x)\end{aligned}$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

Fórmulas de metade do ângulo

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{2} \qquad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{2}$$



(a) Gráfico da função arcsen(x)
(b) Gráfico da função arccos(x)
(c) Gráfico da função arctg(x)
(d) Gráfico da função arccot(x)
(e) Gráfico da função arcsec(x)
(f) Gráfico da função arccossec(x)

Figura 1.4: Gráficos das funções trigonométricas inversas

Funções Trigonométricas Inversas

Os gráficos dessas funções podem ser vistos na Figura 1.4.

Derivadas as funções trigonométricas inversas

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \qquad \frac{d}{dx}\arccos(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x) &= \frac{1}{1-x^2} & \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{arccot}(x) &= -\frac{1}{1-x^2} \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec}(x) &= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{arccossec}(x) &= -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}
$$

Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas são funções análogas às funções trigonométricas ordinárias, que recebem esse nome por estarem relacionadas às hipérboles de modo similar a relação entre as funções trigonométrica e a circunferência. Porém, em nosso contexto essa interpretação geométrica não será utilizada. Aqui elas são importantes por representarem funções exponenciais em um arranjo similar às trigonométricas.

Definição do seno e cosseno hiperbólicos

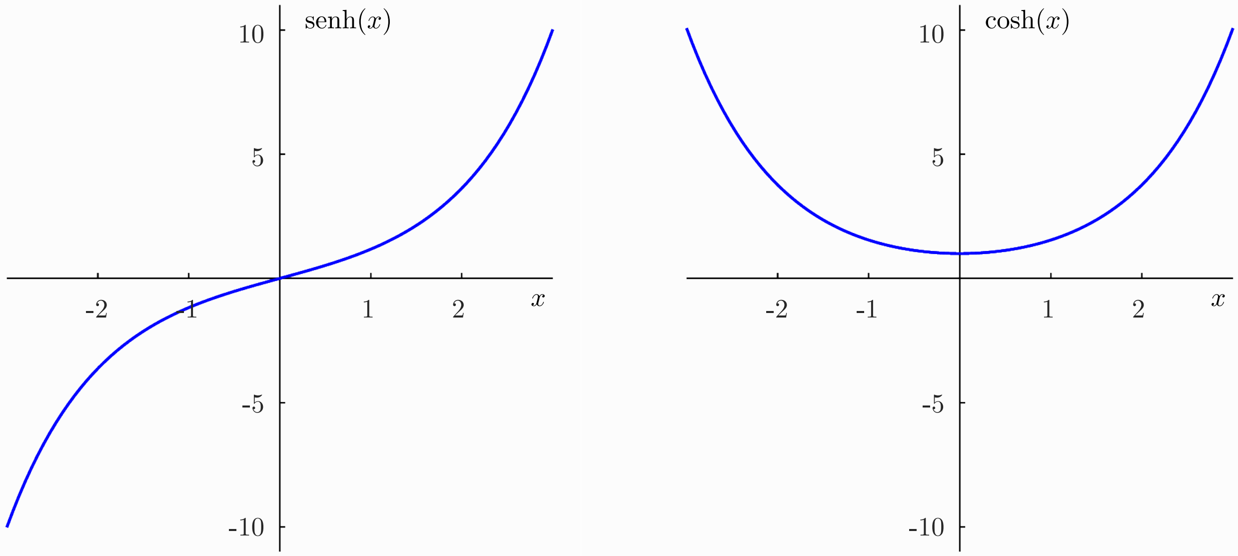
$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{1.2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{1.3}$$

Os gráficos dessas funções podem ser vistos na Figura 1.5.

Derivadas das funções hiperbólicas

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{senh}(x) &= \cosh(x) & \qquad \frac{d}{dx}\cosh(x) &= \operatorname{senh}(x) \\
\frac{d^2}{dx^2}\operatorname{senh}(x) &= \operatorname{senh}(x) & \qquad \frac{d^2}{dx^2}\cosh(x) &= \cosh(x)
\end{aligned}
$$



(a) Gráfico da função senh(x) (b) Gráfico da função cosh(x)

Figura 1.5: Gráficos das funções hiperbólicas

essas derivadas podem ser calculadas de modo simples apenas substituindo a definição da função, por exemplo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{senh}(x) &= \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{de^x}{dx} - \frac{de^{-x}}{dx}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\
&= \cosh(x)
\end{aligned}$$

Algumas relações úteis

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x) \qquad\qquad \cosh(-x) = \cosh(x)$$

Identidade similar a relação pitagórica

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$$

Somando e subtraindo os argumentos

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}(x+y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y) \\
\operatorname{senh}(x-y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) - \cosh(x)\operatorname{senh}(y) \\
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)
\end{aligned}$$

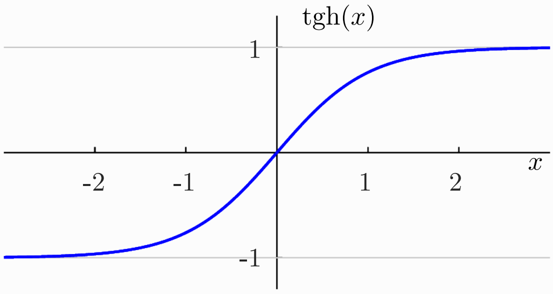
$$\cosh(x-y) = \cosh(x)\cosh(y) - \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$$

Da mesma forma como as funções trigonométricas podem ser definidas a partir do seno e cosseno, podemos definir as seguintes funções hiperbólicas

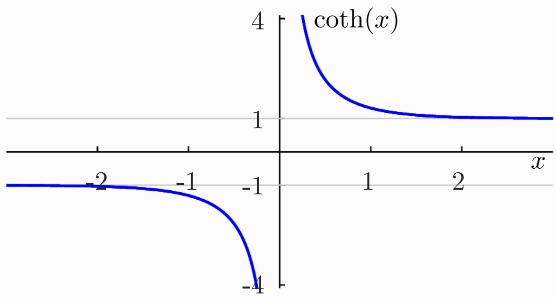
$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{1}{\operatorname{tgh}(x)}$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \qquad \operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}$$

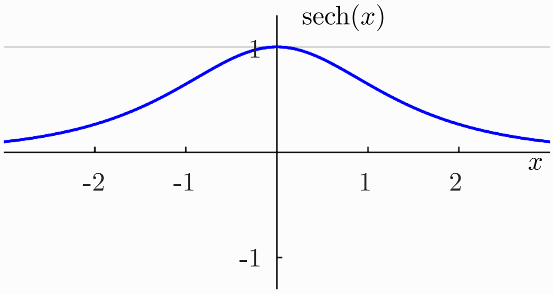
Os gráficos dessas funções podem ser vistos na Figura 1.6.



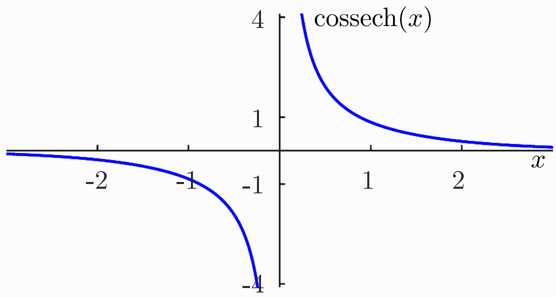
(a) Gráfico da função tgh(x)



(b) Gráfico da função coth(x)



(c) Gráfico da função sech(x)



(d) Gráfico da função cossech(x)

Figura 1.6: Gráficos das funções hiperbólicas compostas

Função sinc

O termo sinc é uma contração do nome da função em latim *sinus cardinalis* (seno cardinal), essa função é definida como

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Porém, por simplicidade, é comum escrevermos apenas

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

O gráfico dessa função pode ser visto na Figura 1.7.

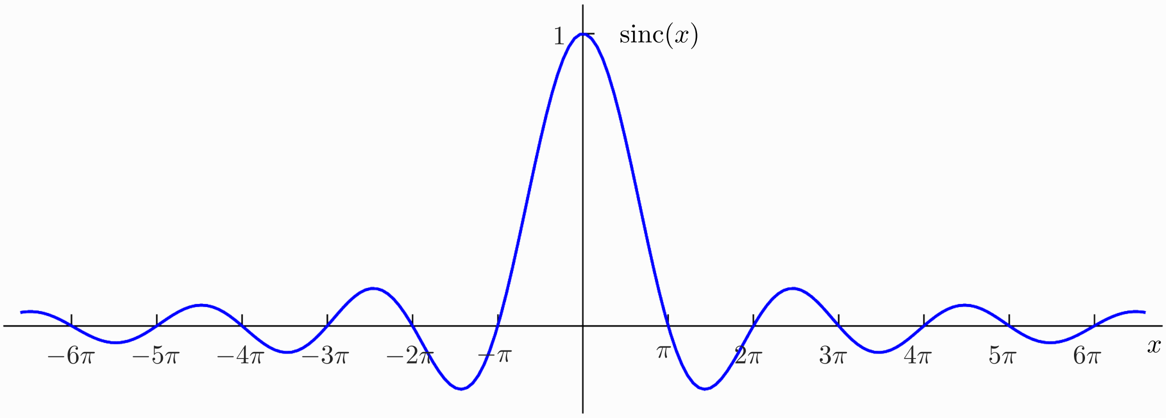


Figura 1.7: Gráfico da função sinc(x)

Derivada da sinc

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sinc}(x) = \frac{\cos(x) - \operatorname{sinc}(x)}{x}$$

Cuidado para não confundir a definição utilizada aqui com uma definição alternativa comumente utilizada no processamento digital de sinais, da função sinc normalizada

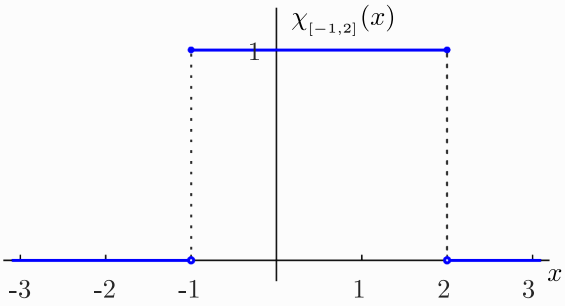
$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}$$

Outras Funções

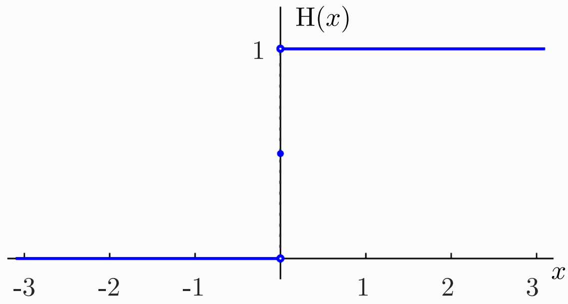
Apresentamos aqui algumas funções muito usadas em aplicações. Essas funções são exemplos de funções definidas por partes, isso é, não temos uma única expressão matemática que defina a função como um todo. Assim, usamos expressões diferentes em partes diferentes do domínio.

Definimos a Função Característica de um subconjunto A dos números reais $\mathbb{R}$ como a função χ_A que vale 1 em A e zero fora dele

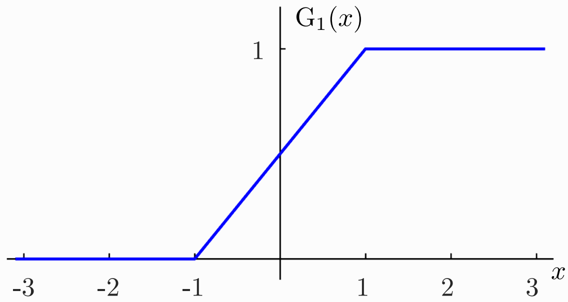
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.5}$$



(a) Gráfico da função característica



(b) Gráfico da função de Heaviside



(c) Gráfico da função rampa

Figura 1.8: Gráficos das funções característica, Heaviside, rampa e Delta de Dirac

A Função de Heaviside ou Degrau Unitário $\mathrm{H}(x)$, vale 1 para x positivo, zero para x negativo.

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Essa função não precisa ser definida em $x = 0$, mas dependendo do contexto ela pode assumir algum valor específico nesse ponto. Um exemplo é escolher o valor $1/2$

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Também podemos escrever essa função como $\mathrm{H}(t) = \chi_{[0,\infty)}(t)$.

A Função Rampa é uma aproximação contínua para a função de Heaviside, que é definida por

$$G_\varepsilon = \begin{cases} 0 & x < -\varepsilon \\ \dfrac{t}{2\varepsilon} + \dfrac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > \varepsilon \end{cases} \tag{1.7}$$

A Figura 1.8 mostra o gráfico dessas funções.

1.3 Limites e Continuidade

A seguir apresentamos a definição formal do limite de uma função real.

Definição 1.3: Limite de Função Real

Seja f uma função definida em intervalo aberto que contém do ponto $a \in \mathbb{R}$, podendo não ser definida em a. Dizemos que o Limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é $L \in \mathbb{R}$ e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para cada $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Essa definição pode ser estendida para o caso em que a é $\pm\infty$. Quando o limite existe ele possui as propriedades descritas na proposição a seguir.

Proposição 1.4: Propriedades do Limite de Funções Reais

Supondo que c é uma constante, f e g são funções reais e que os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

existem, então valem as Propriedades do Limite

1. $\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\lim_{x\to a}\Big[f(x)-g(x)\Big]=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$
3. $\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x)$
4. $\lim_{x\to a}\Big[f(x)g(x)\Big]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$
5. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}d(x)}$ desde que $\lim_{x\to a}d(x)\neq 0$

Uma propriedade de algumas funções reais é não possuir buracos ou saltos em seu gráfico. Dizemos que essa funções são contínuas e a próxima definição nos fornece uma caracterização para essas funções.

Definição 1.5: Continuidade de Função Real

Uma função real é Contínua em um ponto a se

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x\to a}f(x)$ existe
3. $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

Um resultado importante sobre funções contínuas é o Teorema do Valor Intermediário.

Teorema 1.6: Teorema do Valor Intermediário

Suponha que a função f é contínua em todos os pontos de um intervalo fechado $[a,b]$ e que $f(a)\neq f(b)$. Assuma que p é um valor entre $f(a)$ e $f(b)$ então existe um número $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=p$.

Teorema 1.7: Teorema de Weierstrass

Se f for contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, então f assume um valor máximo global $f(c)$ e um valor mínimo global $f(d)$ em pontos c, $d\in[a,b]$.

1.4 Derivadas

Com o limite podemos definir a derivada de uma função real que nos fornece o valor da inclinação da reta tangente ao gráfico da função em cada ponto.

Definição 1.8: Derivada de Função Real

A Derivada de uma função real $f(x)$ em relação a variável x é a função f' cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista.

Ao calcularmos derivadas usamos as regras de derivação listadas na proposição a seguir.

Proposição 1.9: Regras de Derivação

Sejam f e g funções deriváveis, c e r constantes, então temos que

1. $\dfrac{d}{dx} c = 0$
2. $\dfrac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$
3. $\dfrac{d}{dx} e^x = e^x$
4. $(cf)' = cf'$
5. $(f+g)' = f' + g'$
6. $(f-g)' = f' - g'$
7. $(fg)' = f'g + fg'$
8. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
9. Se $h(x) = f\big(g(x)\big)$ então
$$h'(x) = f'\big(g(x)\big)\, g'(x)$$

Algumas propriedades importantes das funções deriváveis são o Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio.

Teorema 1.10: Teorema de Rolle

Suponha que f é uma função

1. contínua no intervalo fechado $[a, b]$

2. derivável no intervalo aberto (a, b) e
3. $f(a) = f(b)$

então existe $c \in (a, b)$ onde $f'(c) = 0$.

Teorema 1.11: Teorema do valor médio

Suponha que f é uma função

1. contínua no intervalo fechado $[a, b]$
2. derivável no intervalo aberto (a, b)

então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2

Integração

2.1 Introdução

A integração, assim como a derivação, é uma operação extremamente importante para as aplicações da Matemática. Vamos ver ao longo deste capítulo como a integração e a derivação estão relacionadas, as diferentes formas que a integração pode assumir e suas características principais.

Na Seção 2.2 – Integrais Indefinidas vamos apresentar a definição da primitiva, ou antiderivada, de uma função real. Na Seção 2.3 – Integrais Definidas apresentamos um problema relacionado que é obter a área sob o gráfico de uma função. Depois esses dois problemas são conectados na Seção 2.5 – Teorema Fundamental do Cálculo. Posteriormente, na Seção 2.6 – Integrais Impróprias, o caso onde alguma singularidade ocorre no intervalo de integração

Por enquanto estamos preocupados apenas em entender os conceitos e suas relações. As técnicas para calcular integrais mais elaboradas serão apresentadas no Capítulo 4.

2.2 Integrais Indefinidas

Nesta seção vamos apresentar a operação inversa da derivação, que chamamos de primitivação. A primitiva de uma função real é uma função que quando derivada nos retorna a função inicial. A definição a seguir apresenta esta ideia de forma mais rigorosa.

Definição 2.1: Primitiva de Função Real

Uma função F é denominada Primitiva ou Antiderivada de uma função f em um intervalo I se

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

para todo $x \in I$.

Observe um exemplo mais concreto a seguir.

Exemplo 2.2.1: Encontre uma primitiva da função $f(x) = x^2$.

A função $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ é uma primitiva para a função $f(x) = x^2$, uma vez que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{x^3}{3}\right)' \\ &= \frac{1}{3}\left(x^3\right)' \\ &= \frac{1}{3}\,3\,x^{3-1} \\ &= x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Note que no exemplo anterior a função

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 345$$

também é uma primitiva para f, o que nos leva a concluir que a primitiva de uma função não é única, isso é, se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ então $F(x) + C$ também será para qualquer constante C. O Teorema a seguir caracteriza todas as primitivas de uma função.

Teorema 2.2: Primitiva Mais Geral

Se G é uma primitiva de f em um intervalo I, então a primitiva mais geral de f em I é

$$F(x) = G(x) + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

Os próximos exemplos obtém a forma mais geral para uma primitiva de uma função

Exemplo 2.2.2: Encontre a primitiva mais geral da função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

Por inspeção verificamos que

$$G(x) = -\cos(x)$$

é uma primitiva para f, uma vez que

$$G'(x) = \operatorname{sen}(x) = f(x).$$

Portanto, a primitiva mais geral para f é

$$F(x) = G(x) + K = -\cos(x) + K,$$

onde K é uma constante.

Exemplo 2.2.3: Encontre a primitiva mais geral da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Lembre-se que

$$\frac{d}{dx}\big(\ln(x)\big) = \frac{1}{x},$$

no intervalo $(0, \infty)$. Portanto, a primitiva mais geral no intervalo $(0, \infty)$ para

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ é

$$G(x) = \ln(x) + c\,,$$

onde c é uma constante.

No exemplo anterior trabalhamos apenas no intercalo $(0, \infty)$, mas podemos expandir para toda a reta exceto o zero. Note que

$$\frac{d}{dx}\big(\ln|x|\big) = \frac{1}{x}$$

em qualquer intervalo que não inclua o zero, isso nos diz que $\ln|x| + C$ é a primitiva mais geral para $f(x) = {}^{1}/_{x}$ tanto no intervalo $(-\infty,0)$ quanto no intervalo $(0, \infty)$.

Em síntese, a primitiva mais geral para f é

$$F(x) = \begin{cases} \ln(\;\;x) + C, & x > 0 \\ \ln(-x) + C, & x < 0 \end{cases}$$

ou de forma mais simplificada

$$F(x) = \ln|x| + C \tag{2.1}$$

para todo $x \neq 0$.

Exemplo 2.2.4: Encontre a primitiva mais geral da função $f(x) = x^n$ com $n \neq -1$

Vamos recorrer a regra da potência para encontrar uma primitiva para x^n. Para $n \neq -1$ temos que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

Logo uma primitiva mais geral para $f(x) = x^n$ é

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Isso é válido para todo $n \geq 0$, uma vez que $f(x) = x^n$ está definida em toda a reta, nesse caso. Se n for negativo (mas $n \neq -1$), é válido em qualquer intervalo que não contenha $x = 0$.

Como a derivação é uma operação linear, isso é, podemos trocar a ordem da soma de funções ou multiplicação por uma constante com a derivação, a primitiva também possui essa propriedade, como descrito na proposição a seguir.

Proposição 2.3: Linearidade da Primitiva

Dadas funções f e g com primitivas F e G, respectivamente, e uma constante k temos que

1. A primitiva de $f(x) + g(x)$ é a função $F(x) + G(x)$
2. A primitiva de $kf(x)$ é a função $kF(x)$

A seguir apresentaremos, na Tabela 2.1, algumas primitivas particulares ou *primitivas mais simples*, que nada mais é que a primitiva sem a constante, isso é, com constante igual a zero. Usaremos a notação F e G, significando que F é uma primitiva para f e G é uma primitiva para g. Uma tabela mais completa está na Seção A.5.

Tabela 2.1: Tabela de primitivas

Função	Primitiva particular
$kf(x)$	$kF(x)$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$
$x^n\,,\ n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln(a)}$

Função	Primitiva particular
$\operatorname{sen}(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\operatorname{sen}(x)$
$\sec^2(x)$	$\operatorname{tg}(x)$
$\sec(x)\operatorname{tg}(x)$	$\sec(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen}(x)$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg}(x)$

Exemplo 2.2.5: Encontre todas as funções g tais que $g'(x) = 4\,\mathrm{sen}(x) + \dfrac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$

Nesse exercício queremos encontrar uma primitiva para g'. Podemos reescrever g' como

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4\,\mathrm{sen}(x) + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x} \\ &= 4\,\mathrm{sen}(x) + \frac{2x^5}{x} - \frac{x^{1/2}}{x} \\ &= 4\,\mathrm{sen}(x) + 2x^4 - x^{-1/2} \end{aligned}$$

Assim, usando a Tabela 2.1 e o Teorema 2.2, temos que

$$\begin{aligned} g(x) &= 4\big(-\cos(x)\big) + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{1/2} + C \\ &= -4\cos(x) + \frac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.6: Encontre f se $f'(x) = e^x + 20(1+x^2)^{-1}$ e $f(0) = -2$.

Inicialmente vamos encontrar uma família de funções f que são primitivas de f', depois usamos a condição $f(0) = -2$ para encontrarmos a primitiva pedida.

A primitiva geral de

$$f'(x) = e^x + 20\frac{1}{1+x^2}$$

é a família de funções

$$f(x) = e^x + 20\,\mathrm{arctg}(x) + C$$

Para encontrarmos a constante C, usamos o fato de que $f(0) = -2$

$$\begin{aligned} f(0) &= -2 \\ e^0 + 20\,\mathrm{arctg}(0) + C &= -2 \\ C &= -2 - e^0 - 20\,\mathrm{arctg}(0) \\ C &= -2 - 1 - 0 \end{aligned}$$

Com isso, $C = -3$ e a solução particular é

$$f(x) = e^x + 20\,\mathrm{arctg}(x) - 3$$

Até aqui nesta seção fizemos o processo inverso do que fazíamos ao calcular derivadas. Antes, tínhamos uma função f e gostaríamos de encontrar a sua derivada, agora dada uma determinada função f' estamos interessado em encontrar uma função (na verdade, um família de funções) f cuja a derivada seja f'.

Em síntese temos que

$$\Big(f' \text{ é derivada de } f \Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(f \text{ é uma primitiva de } f' \Big).$$

A integral indefinida de uma função pode ser vista exatamente como a família de primitivas da função.

Definição 2.4: Integral Indefinida

A notação

$$\int f(x)\,dx$$

é tradicionalmente usada para a primitiva de f e é chamada de integral indefinida.

A definição anterior determina que

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

significa que F é a primitiva mais geral de f, ou seja,

$$F'(x) = f(x)$$

Decorre das propriedades de primitiva que a integral indefinida é uma operação linear, assim podemos reescrever uma nova versão da Proposição 2.3.

Proposição 2.5: Linearidade da Integral Indefinida

Dadas funções f e g integráveis e uma constante k temos que

1. $$\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\,,$$
2. $$\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx\,.$$

Note que usamos o termo integrável para indicar qualquer função que possua uma primitiva.

Exemplo 2.2.7: Calcule a integral indefinida da função x^2.

A integral indefinida de x^2 é

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

pois

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2\,.$$

Exemplo 2.2.8: Calcule a integral indefinida da função $\sec^2(x)$

A integral indefinida de $\sec^2(x)$ é

$$\int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C$$

pois

$$\frac{d}{dx}\big(\operatorname{tg}(x) + C\big) = \sec^2(x)\,.$$

Exemplo 2.2.9: Encontre a integral indefinida geral $\displaystyle\int 10x^4 - 2\sec^2(x)\,dx\,.$

Usando as propriedades de integral indefinida

$$\begin{aligned} F &= \int 10x^4 - 2\sec^2(x)\,dx \\ &= 10\int x^4\,dx - 2\int \sec^2(x)\,dx \\ &= 10\frac{x^5}{5} - 2\,\mathrm{tg}(x) + C \\ &= 2x^5 - 2\,\mathrm{tg}(x) + C \end{aligned}$$

Note que nesse exemplo calculamos duas integrais indefinidas e cada uma teria uma constante arbitrária, porém, como logo em seguida somamos todos os termos ficamos com apenas uma constante.

Exemplo 2.2.10: Uma partícula move-se em uma reta e tem aceleração dada por

$$a(t) = 6t + 4\,.$$

Sua velocidade inicial é $v(0) = 6\,\mathrm{cm/s}$, e seu deslocamento inicial é $s(0) = 9\,\mathrm{cm}$. Encontre sua função posição.

Uma vez que $v'(t) = a(t) = 6t + 4\,$, temos

$$v(t) = \int a(t)dt = 3t^2 + 4t + C$$

Podemos encontrar o valor da constante C pois nos foi dado que $v(0) = 6$. Substituindo essa informação na equação da velocidade encontrada

$$\begin{aligned} v(0) &= 6 \\ 3\cdot 0^2 + 4\cdot 0 + C &= 6 \\ C &= 6 \end{aligned}$$

Assim,

$$v(t) = 3t^2 + 4t + 6\,.$$

Sabendo que $s'(t) = v(t)$, então s é a primitiva de v

$$\begin{aligned} s(t) &= \int v(t)dt \\ &= \int 3t^2 + 4t + 6dt \\ &= t^3 + 2t^2 + 6t + D \end{aligned}$$

Sabendo que $s(0) = 9$, verificamos que $D = 9$. Portanto, a função posição pedida é

$$s(t) = t^3 + 2t^2 - 6t + 9\,.$$

Exercícios Seção 2.2

1) [resp] Calcule as Integrais Indefinidas.

a) $\displaystyle\int x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x - 2\,dx$

b) $\displaystyle\int \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int \sqrt{x^2} + x^{-2}\,dx$

d) $\displaystyle\int (u+4)(2u+1)\,du$

e) $\displaystyle\int v\,(v^2+2)^2\,dv$

f) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x}\,dx$

g) $\displaystyle\int x^2 + 1 + \frac{1}{1+x^2} - 100\cos(x)\,dx$

h) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x) - 2^x\,dx$

i) $\displaystyle\int \theta - \operatorname{cossec}(\theta)\cot(\theta)\,d\theta$

j) $\displaystyle\int 1 + 10\operatorname{tg}(x)\sec(x)\,dx$

k) $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2(t) - 2e^t - e^{-t}\,dt$

l) $\displaystyle\int \sec(t)\big(\sec(t) + \operatorname{tg}(t)\big)\,dt$

m) $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3}dx$

n) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(x)}\,dx$

2) [resp] Uma partícula se move com aceleração dada por

$$a(t) = 10\operatorname{sen}(t) + 3\cos(t)\,.$$

Encontre a equação do espaço sabendo que $s(0) = 0$ e $s(2\pi) = 12$.

3) Mostre que, para um movimento em uma reta com aceleração constante a, velocidade inicial v_0 e deslocamento inicial s_0, o deslocamento no tempo t é

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0\,.$$

2.3 Integrais Definidas

Nesta seção, exploraremos duas questões aparentemente distintas, mas interligadas:

1. Sob quais condições podemos afirmar que uma função dada $f\colon I \to \mathbb{R}$, definida em um intervalo aberto I da reta, é a derivada de outra função $F\colon I \to \mathbb{R}$? Ou seja, existe uma função F tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$?
2. Como podemos generalizar a noção clássica de área de figuras planas triangularizáveis para figuras mais gerais? Quais figuras não triangularizáveis podem ser incluídas nesse processo?

É importante notar que, na primeira questão, buscamos uma função específica como resposta, enquanto na segunda questão, estamos interessados em obter valores numéricos como respostas. Apesar da aparente diferença entre as duas questões, veremos que o cálculo de integrais definidas é a chave para solucioná-las, estabelecendo assim uma relação fundamental entre esses dois problemas aparentemente distintos. Existe um Teorema, chamado *Teorema Fundamental do Cálculo*, que faz essa ligação.

2.4 A área sob uma curva

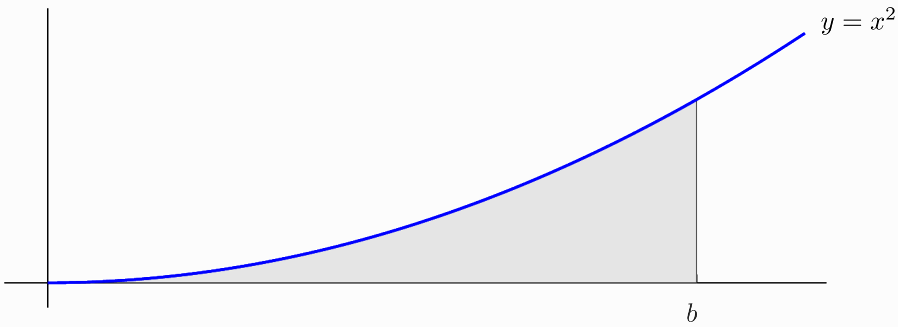


Figura 2.1: Área sob o gráfico de $y = x^2$.

Ao estudarmos funções contínuas, nos deparamos com uma questão interessante: como calcular a área delimitada entre a curva da função $f(x) \geq 0$ e o eixo x em um intervalo específico $[a, b]$, conforme mostra a Figura 2.3? A resposta para essa pergunta está intimamente relacionada com o conceito de integral definida.

Para iniciarmos a construção, vamos considerar $f(x)$ uma função não-negativa, contínua em um intervalo $[a, b]$ e suponhamos que estamos interessados em encontrar

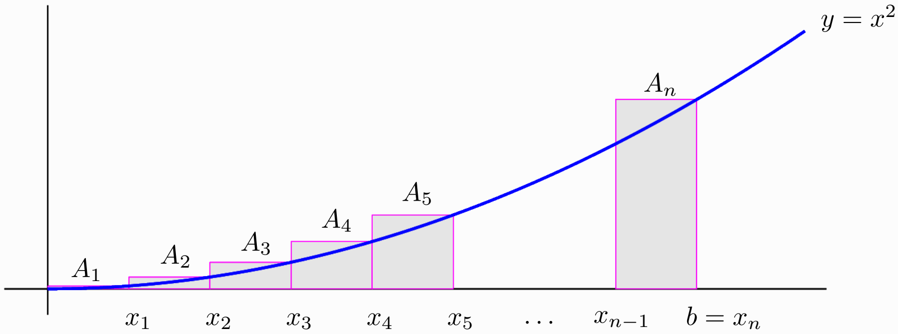


Figura 2.2: Partição do intervalo $[0, b]$ em n subintervalos.

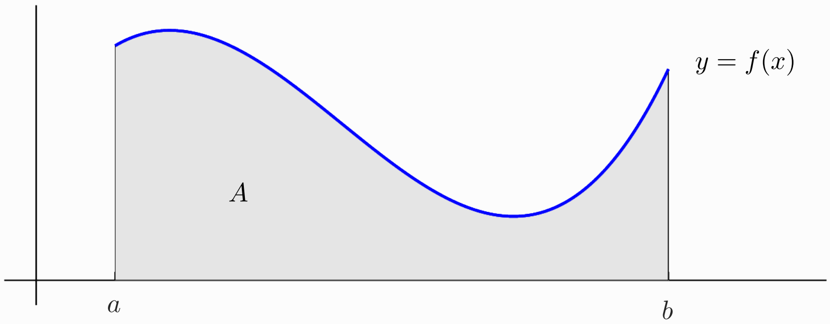


Figura 2.3: Ilustração da área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

a área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Para isso, vamos subdividir esse intervalo em n subintervalos menores, onde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,,$$

conforme mostra a Figura 2.4. A escolha de n subintervalos depende do grau de precisão desejado.

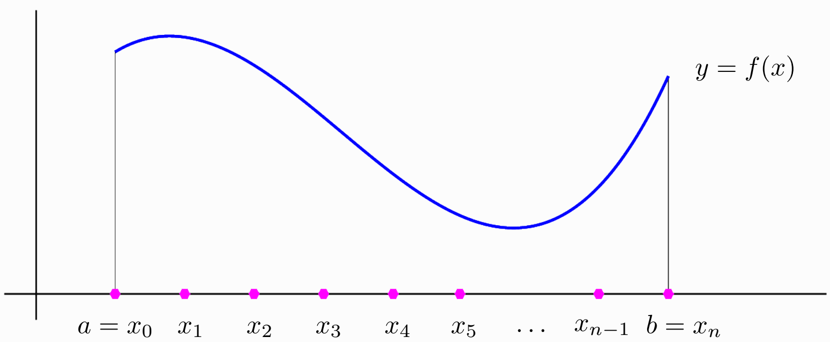


Figura 2.4: Partição do intervalo $[a, b]$.

Em seguida, em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escolhemos um ponto representativo c_i. Pode ser o ponto médio, o extremo direito de cada subintervalo, o extremo esquerdo de cada subintervalo ou qualquer outro ponto dentro do subintervalo. Sem perda de generalidade, vamos escolher c_i como sendo o extremo direito de cada $i-$ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_1]$. A largura do primeiro subintervalo $[x_0, x_1]$ é indicada por Δx_1, a largura do segundo subintervalo $[x_1, x_2]$ é indicada por Δx_2 e a largura do $i-$ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_1]$ por Δx_i. Para nossa construção vamos considerar que todos esses subintervalos tem mesma largura, ou seja, que dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesma largura Δx. Assim, temos que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Para nossa construção, vamos escolher como pontos amostrais c_i como sendo os extremos direitos de cada subintervalos. Assim, $c_i = x_i$ e

$$\begin{aligned} x_1 &= a + \Delta x \\ x_2 &= x_1 + \Delta x = a + 2\Delta x \\ &\vdots \\ x_i &= a + i\Delta x \\ &\vdots \\ x_n &= b \end{aligned}$$

Com isso, vamos considerar os n retângulos cuja base é Δx e altura é $f(x_i)$. Assim, denotando A_n como sendo a área do i-ésimo retângulo R_i , temos que $A_i = f(x_i)\Delta x$. A Figura 2.5 ilustra essa situação.

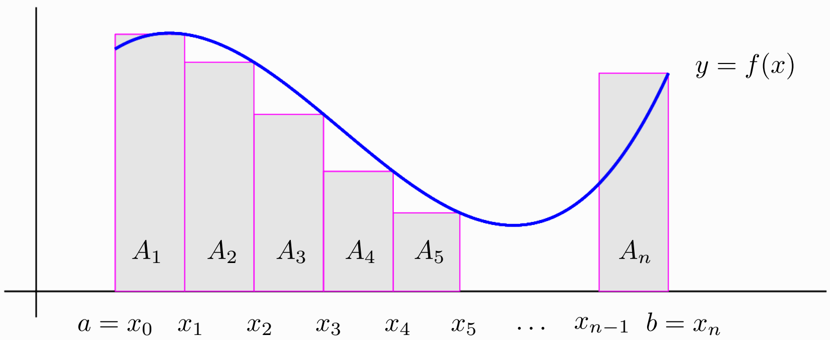


Figura 2.5: Aproximação por retângulos da área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

Portanto, podemos aproximar a área requerida, como soma das áreas desses n

retângulos, ou seja:

$$\begin{aligned} A &\approx A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n \\ &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \end{aligned} \tag{2.2}$$

Essa soma, é chamada de, *Soma de Riemann*, em homenagem ao matemático Bernard Riemann.

Frequentemente usamos a notação de somatória para expressar uma soma de muitos termos de uma forma compacta. Por exemplo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

Observe que, a medida que aumentamos o valor de n e, consequentemente, o número de retângulos, obtemos uma aproximação melhor para a área A. Assim, podemos definir A da seguinte forma.

Definição 2.6: Área via soma de Riemann

A área A da região sob o gráfico de uma função contínua f no intervalo $[a, b]$ é dada pelo limite.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

A definição 2.6 da soma de Riemann é independente dos pontos amostrais escolhidos. Se utilizarmos os extremos direitos de cada subintervalo como os pontos representativos c_i, a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

é chamada *soma superior*. Por outro lado, se escolhermos os extremos esquerdos de cada subintervalo como os pontos representativos c_i, a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

é chamada *soma inferior*.

2.4.1 A integral definida

Na seção anterior, exploramos o uso da soma de Riemann para calcular a área abaixo do gráfico de uma função contínua e não-negativa em um intervalo $[a, b]$. Agora, avançaremos para o conceito de integral definida, o qual está intrinsecamente relacionado ao problema da área. Mais precisamente, a integral definida nos proporciona uma forma precisa de calcular a área sob o gráfico de uma função contínua e não-negativa. Esse poderoso conceito nos permite generalizar o cálculo de áreas para uma variedade de funções e é fundamental para a análise matemática, encontrando aplicações em diversos campos da ciência e da engenharia. Nesta seção, exploraremos a definição e as propriedades da integral definida, aprofundando nosso entendimento sobre a área sob uma curva e suas importantes aplicações práticas.

Definição 2.7: Integral definida

Seja f uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais a

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Sejam

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$$

as extremidades desses subintervalos, escolhemos os pontos amostrais c_1, c_2, $\ldots$, c_n nesses subintervalos, de modo que c_i esteja no i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_1]$. Então a Integral definida de f de a até b é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

Desde que esse limite exista. Caso exista, dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

Figura 2.6: Termos da integral definida.

Cabe salientar que nem todas funções definidas no intervalo $[a, b]$ é integrável. O Teorema 2.8, que é demonstrado em cursos avançados, mostra que toda função contínua em $[a, b]$ é integrável. Mais que isso, que se uma função tem um número finito de descontinuidades ela é integrável.

Teorema 2.8: Integrabilidade de funções contínuas

Se f é uma função contínua em $[a, b]$, ou se f tem um número finito de descontinuidades tipo salto, então a integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

existe e f é integrável em $[a, b]$.

Além disso, se f é integrável, o limite da Definição 2.7 independe da escolha dos pontos amostrais c_i, para simplificar o cálculo da integral, vamos tomar como pontos amostrais as extremidades direitas de cada subintervalo. Com isso, $c_i = x_i$ e a definição de integral pode ser reescrita conforme o Teorema 2.9.

Teorema 2.9: Integral definida

Se f for integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

onde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \text{e} \qquad x_i = a + i\Delta x$$

2.4.2 Interpretação Geométrica da integral definida

Considere f uma função não negativa no intervalo $[a, b]$ conforme a Figura 2.7.

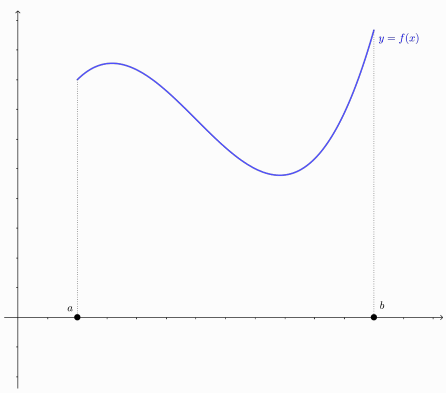


Figura 2.7: Gráfico de uma função não-negativa em $[a, b]$.

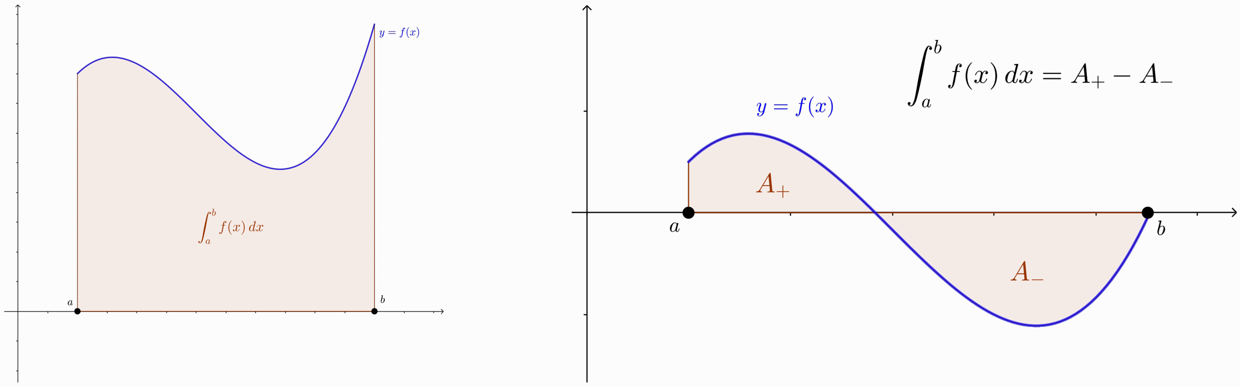
Então a integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

significa a área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$, conforme indica a Figura 2.8a. Se $f(x)$ é uma função que muda de sinal no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx$$

pode ser interpretada como a diferença de áreas conforme ilustra a Figura 2.8b.



(a) Quado f é não-negativa em $[a, b]$. (b) Quando f que muda de sinal em $[a, b]$.

Figura 2.8: Interpretação da integral definida para $f(x)$ em $[a, b]$.

TEOREMA 2.10: PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\displaystyle\int_a^b cdx = c(b-a)$, c é uma constante.
4. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
5. $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, c é uma constante.
6. $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

7. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

8. Se $f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0\,.$

9. Se $f(x) \geq g(x)$, $a \leq x \leq b$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

10. Se $m \leq f(x) \leq M$, para $a \leq x \leq b$ então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Exemplo 2.4.1: Calcule a integral da função de Heaviside no intervalo $[-1, 2]$.

Primeiro precisamos relembrar a definição da função de Heaviside (1.6)

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Notamos que essa função é definida por partes, assim precisamos usar a propriedade 7 do Teorema 2.10 para dividir a integral em duas partes

$$\int_{-1}^{2} \mathrm{H}(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} 1\,dx\,.$$

Agora precisamos calcular separadamente as áreas entre cada função e o eixo-x.

Na primeira integral a função é sempre zero e portanto a área também será zero

$$\int_{-1}^{0} 0\,dx = 0\,.$$

Na segunda integral a função é constante igual a 1, portanto a área entre o gráfico e o eixo será a área do retângulo de altura 1 e base igual a o comprimento do intervalo de integração

$$\begin{aligned}\int_0^2 1\,dx &= \int_0^2 dx \\ &= \text{base} \times \text{altura}\end{aligned}$$

$$= (2-0)\times 1 = 2$$

Concluímos que

$$\int_{-1}^{2} \mathrm{H}(x)\,dx = 0 + 2 = 2\,.$$

Isso nos dá um exemplo de uma função não-contínua em um intervalo fechado, que é integrável. Esse fato acontece porque $H(x)$ possui um número finito de descontinuidades em $[-1,2]$, conforme já sabíamos pelo Teorema 2.9.

Exercícios Seção 2.4

1) a) Usando soma de Riemann com pontos amostrais sendo as extremidades direitas de cada subintervalo e $n = 8$, encontre uma aproximação para a integral $\displaystyle\int_0^4 x^2 - 3x dx$.

b) Faça uma figura com os retângulos para ilustrar a aproximação da parte (a).

c) Calculando limite da soma de Riemann e usando o Teorema 2.9 calcule $\displaystyle\int_0^4 x^2 - 3x dx$.

d) Interprete a integral $\displaystyle\int_0^4 x^2 - 3x dx$ calculada em (c) como uma diferença de áreas.

2) [resp] Interprete o limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos(x_i)}{x_i^2}$ no intervalo $[\pi/2, 2\pi]$.

3) Mostre que $\displaystyle\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3}$.

4) [resp] Nos exercícios a seguir, esboce o gráfico dos integrandos e calcule a integral interpretando em termos de áreas.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \frac{x}{2} + 3dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x|dx$

c) $\displaystyle\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}dx$

d) $\displaystyle\int_{0}^{9} \frac{1}{3}x - 2dx$

5) [resp] Sejam f e g funções integráveis e que

i) $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = -4$

ii) $\displaystyle\int_1^5 f(x)dx = 6$

iii) $\displaystyle\int_1^5 g(x)dx = 8$

Use as propriedades de integral definida para determinar

a) $\displaystyle\int_2^2 f(x)dx$

b) $\displaystyle\int_5^1 g(x)dx$

c) $\displaystyle\int_1^2 7f(x)dx$

d) $\displaystyle\int_2^5 f(x)dx$

e) $\displaystyle\int_1^5 f(x) - g(x)dx$

f) $\displaystyle\int_1^2 5f(x) - 2g(x)dx$

2.5 Teorema Fundamental do Cálculo

Nessa seção veremos um resultado importante e que facilita o cálculo das integrais definidas: O Teorema Fundamental do Cálculo. Esse Teorema será dividido as duas partes e estabelece uma conexão entre dois tópicos importantes do cálculo: integração e derivação.

Antes de falarmos desse importante Teorema precisamos de um resultado auxiliar chamado: Teorema do valor médio para integrais.

No início do capítulo anterior, definimos como encontrar a área sob uma curva $y = f(x)$ contínua e não-negativa no intervalo $[a, b]$, conforme mostra a Figura 2.9.

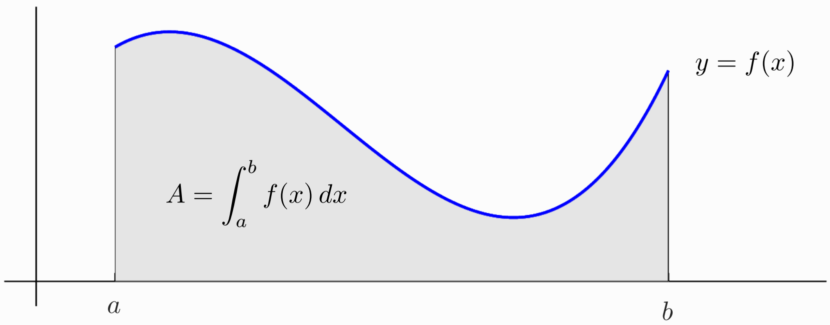


Figura 2.9: Área sob uma curva.

A pergunta que surge agora é: Será que existe $c \in [a, b]$, de modo que a área sob a curva $y = f(x)$ seja igual área do retângulo de altura $f(c)$ e base $b - a$? O Teorema do Valor médio para integrais responde esse questionamento.

Teorema 2.11: Teorema do Valor Médio para Integrais

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)dx$$

ou equivalentemente,

$$f(c) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)dx.$$

O valor $f(c)$ é chamado *Valor médio* de f no intervalo $[a, b]$ e denotamos por $f_{\text{médio}}$.

Geometricamente, o Teorema 2.11 afirma que existe um $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx$$

(a área sob o gráfico de f) é igual a $f(c)(b-a)$ (a área do retângulo de base $[a, b]$ e altura $f(c)$), como ilustra a Figura 2.10.

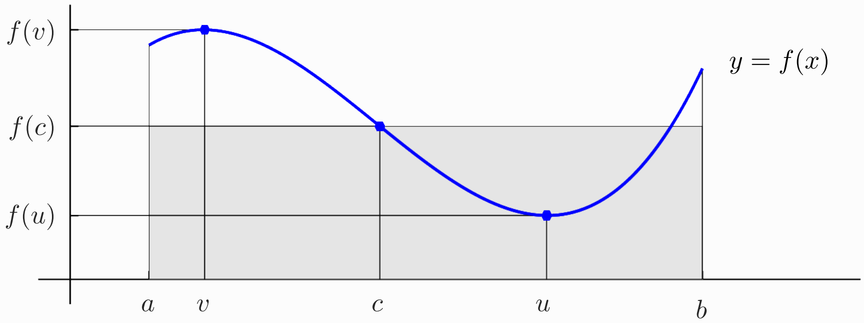


Figura 2.10: Teorema valor médio – média.

Demonstração

Para iniciarmos a demonstração, devemos lembrar que como f é contínua em $[a, b]$, então f assume um valor mínimo $f(u)$ e um valor máximo $f(v)$ com $u, v \in [a, b]$ (Teorema de Weierstrass 1.7). Assim,

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v)$$

Como já vimos que a integral preserva desigualdade, temos que

$$\int_a^b f(u)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(v)dx$$

Portanto,

$$f(u)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(v)(b-a)$$

Dividindo essa última desigualdade por $b - a$, chegamos que

$$f(u) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(v)$$

Como f é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema do Valor Intermediário 1.6, f deve assumir todos os valores entre o mínimo, $f(u)$, e o máximo, $f(v)$, de f. Portanto, deve assumir o valor

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

para algum valor $c \in (a, b)$. Em outras palavras, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\,.$$

Observe que a continuidade de f em $[a, b]$ foi uma hipótese crucial na demonstração do Teorema 2.11. Sem essa hipótese, é possível que uma função descontínua não assuma seu valor médio.

Teorema 2.12: Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

Se f for contínua em $[a, b]$, então a função F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e $F'(x) = f(x)$ note que em outras palavras temos que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

Exemplo 2.5.1: Calcule a derivada da função $g(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2}dt$

Sendo $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ contínua em todo o conjunto dos números reais, pela parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo

$$g'(x) = \sqrt{1+x^2}$$

Exemplo 2.5.2: Calcule a derivada da função $h(x) = \displaystyle\int_1^{x^4} \sec(t)dt$

Nesse item devemos ter cuidado ao aplicarmos o Teorema Fundamental do Cálculo uma vez que $h(x) = p(q(x))$, onde

$$p(x) = \int_0^x \sec(t)dt \qquad \text{e} \qquad q(x) = x^4$$

Portanto, para encontrar

$$\frac{d}{dx}\big(h(x)\big)$$

temos que usar a regra da cadeia. Ora, o Teorema Fundamental do Cálculo Parte 1 nos diz que

$$\frac{d}{dx}\big(p(x)\big) = \frac{d}{dx}\int_0^x \sec(t)dt = \sec(x),$$

além disso,

$$\frac{d}{dx}\left(x^4\right) = 4x^3$$

Assim, pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec(t)dt = 4x^3 \sec\left(x^4\right)$$

Exemplo 2.5.3: Calcule a derivada da função $p(x) = \displaystyle\int_{1-2x}^{1+2x} t\,\text{sen}(t)dt$

Inicialmente, vamos usar as propriedades de integral para manipular a integral. Pela propriedade 7. de integral definida, podemos escrever

$$\int_{1-2x}^{1+2x} t\,\text{sen}(t)dt = \int_{1-2x}^{0} t\,\text{sen}(t)dt = \int_0^{1+2x} t\,\text{sen}(t)dt$$

Pela propriedade 1. de Integral definida

$$\int_{1-2x}^{1+2x} t\,\text{sen}(t)dt = -\int_0^{1-2x} t\,\text{sen}(t)dt + \int_0^{1+2x} t\,\text{sen}(t)dt$$

Usando a parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}
p'(x) &= \frac{d}{dx}\int_{1-2x}^{1+2x} t\,\mathrm{sen}(t)dt \\
&= \frac{d}{dx}\left(-\int_0^{1-2x} t\,\mathrm{sen}(t)dt + \int_0^{1+2x} t\,\mathrm{sen}(t)dt\right) \\
&= 2x\,\mathrm{sen}(x) + 2x\,\mathrm{sen}(x) \\
&= 4x\,\mathrm{sen}(x).
\end{aligned}$$

Exemplo 2.5.4: Determine $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, onde $f(x) = e^{h(x)}$ e $h(x) = \int_1^{\mathrm{tg}(x)} e^t dt$

Note que f é uma função composta, para derivar usamos a regra da cadeia. Assim,

$$f'(x) = e^{h(x)}h'(x)$$

Para encontrar $h'(x)$ usamos o Teorema Fundamental do Cálculo parte 1, combinado com a regra da cadeia. Portanto,

$$h'(x) = e^{\mathrm{tg}(x)}\sec^2(x)$$

Logo,

$$f'(x) = e^{h(x)}h'(x) = e^{h(x)}e^{\mathrm{tg}(x)}\sec^2(x)$$

portanto

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{h(\pi/4)}e^{\mathrm{tg}(\pi/4)}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0e^1\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$$

onde,

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_1^1 e^t dt = 0.$$

Teorema 2.13: O Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Se f for contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f, isto é $F' = f$

Demonstração

Seja

$$G(x) = \int_a^x f(x)dx\,.$$

Pela parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo, g é uma primitiva de f. Se F for qualquer outra primitiva de f, então sabemos que F e G se diferem por uma constante, ou seja:

$$F(x) = G(x) + K$$

Assim,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \big[G(b) + K\big] - \big[G(a) + K\big] \\ &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx\,. \end{aligned}$$

O Teorema 2.13 nos diz que para calcular a integral definida

$$\int_a^b f(x)dx,$$

precisamos fazer duas coisas:

1. Determinar uma primitiva F qualquer para f.
2. Calcular o número $F(b) - F(a)$.

Além disso, vale ressaltar que enquanto a integral indefinida

$$\int f(x)dx$$

é uma função (ou uma família de funções), a integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

é um número.

Agora temos uma ferramenta importante para calcular integrais definidas. Vamos aos exemplos.

Exemplo 2.5.5: Calcule $\displaystyle\int_1^3 e^x dx$

Inicialmente, note que $f(x) = e^x$ é contínua no intervalo $[1, 3]$. Além disso, a primitiva mais geral para f é $G(x) = e^x + C$, como no Teorema Fundamental do cálculo precisamos de qualquer primitiva, então pegamos a primitiva mais simples $F(x) = e^x$. Logo, usando o Teorema Fundamental do Cálculo 2 temos

$$\int_1^3 e^x dx = e^x \Big|_1^3 = e^3 - e^1 = e^3 - e.$$

Exemplo 2.5.6: Calcule $\displaystyle\int_3^6 \frac{dx}{x}$

Note que $f(x) = 1/x$ é contínua no intervalo $[3, 6]$. Além disso, a primitiva mais geral para f é $G(x) = \ln|x| + C$, como no Teorema Fundamental do cálculo precisamos de qualquer primitiva, então pegamos a primitiva mais simples $F(x) = \ln|x|$. Logo, usando o Teorema Fundamental do Cálculo 2 temos

$$\int_3^6 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^3 = \ln(6) - \ln(3) = \ln\left(\frac{6}{3}\right) = \ln(2).$$

Exemplo 2.5.7: Calcule $\displaystyle\int_0^1 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos x + \frac{3}{1+x^2} - 3dx$

Note que

$$f(x) = 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos x + \frac{3}{1+x^2} - 3$$

é contínua no intervalo $[0, 1]$, uma vez que é soma de funções contínuas.

Para calcularmos a integral definida pedida, iniciaremos primeiro calculando a integral indefinida, usando a linearidade da integral.

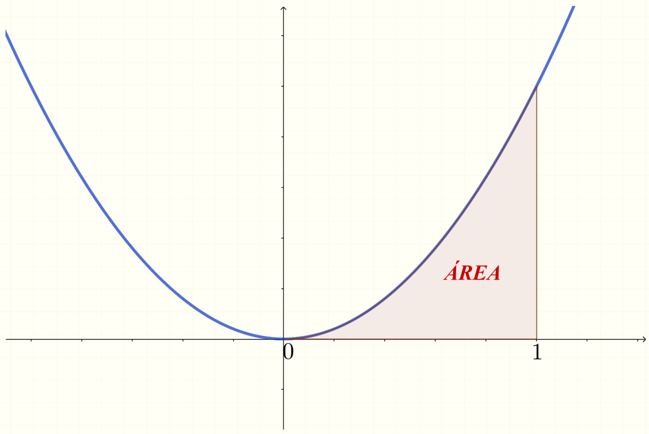
$$\begin{aligned}
F(x) &= \int 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos x + \frac{3}{1+x^2} - 3dx \\
&= \int 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos x + 3\frac{1}{1+x^2} - 3dx \\
&= 20\int x^5 dx - \int e^x dx + 3\int x^6 dx - \int \cos(x) dx \\
&\quad + 3\int \frac{1}{1+x^2} dx - 3\int dx \\
&= \frac{20x^6}{6} - e^x + \frac{3x^7}{7} - \operatorname{sen}(x) + 3\operatorname{arctg}(x) - 3x + C
\end{aligned}$$

Para encontrarmos a integral definida, usamos o Teorema Fundamental do Cálculo parte 2 temos que

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos x + \frac{3}{1+x^2} - 3dx \\
&= \left(\frac{20x^6}{6} - e^x + \frac{3x^7}{7} - \operatorname{sen}(x) + 3\operatorname{arctg}(x) - 3x\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \left(\frac{20}{6} - e + \frac{3}{7} - \operatorname{sen}(1) + 3\operatorname{arctg}(1) - 3\right) \\
&- \left(0 - e^0 + 0 - \operatorname{sen}(0) + 3\operatorname{arctg}(0) - 0\right) \\
&= \left(\frac{10}{3} - e + \frac{3}{7} - \operatorname{sen}(1) + \frac{3\pi}{4} - 3\right) - (-1) \\
&= \frac{10}{3} - e + \frac{3}{7} - \operatorname{sen}(1) + \frac{3\pi}{4} - 3 + 1 \\
&= \frac{148 - 84e - 84\operatorname{sen}(1) + 63\pi}{84}
\end{aligned}$$

Exemplo 2.5.8: Encontre a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1.

A figura a seguir mostra o gráfico da função $y = x^2$.



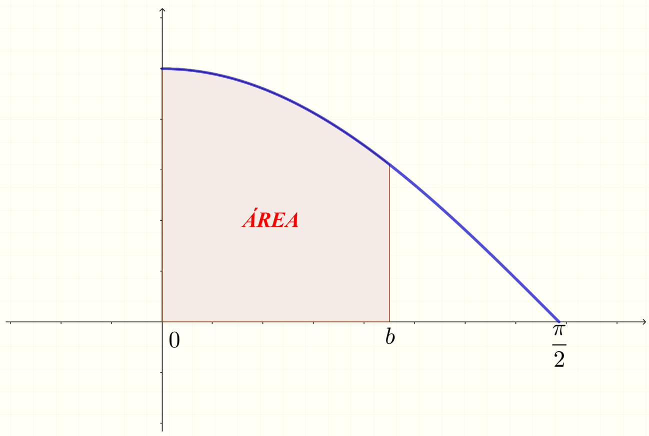
Note que $y = x^2$ é uma função positiva no intervalo $[0, 1]$ então

$$A = \int_1^0 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

onde, para calcularmos a integral definida usamos o Teorema Fundamental do Cálculo parte 2.

Exemplo 2.5.9: Encontre a área sob a curva $y = \cos(x)$ de 0 até b, onde $0 \leq b \leq {}^{\pi}/_{2}$

Note que a função $y = \cos(x)$ é positiva e contínua no intervalo $[0, b]$, uma vez que $b \in [0, {}^{\pi}/_{2}]$, conforme a figura .



Portanto, usando o Teorema Fundamental do Cálculo parte 2

$$A = \int_0^b \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x)\Big|_0^b = \operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen}(b)\,.$$

Exemplo 2.5.10: O que está errado no seguinte cálculo

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

Para começarmos podemos observar, pela propriedade 8 de integrais, que esse resultado está errado, uma vez que

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$$

no intervalo $[-1, 3]$ teríamos que ter que

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} dx \geq 0.$$

Portanto, devemos estar atentos as hipóteses quando quisermos usar o Teorema fundamental do cálculo. Note que

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

não é contínua no intervalo $[-1, 3]$, uma vez que existe uma descontinuidade em $x = 0$ (f não está definida em $x = 0$). Nesse caso, não podemos usar cegamente o Teorema Fundamental do Cálculo. Veremos como resolver esse tipo de problema quando estudarmos Integrais impróprias.

Exemplo 2.5.11: Seja $f(x) = x^2 + 2$

a) Encontre o valor médio (média) de $f(x)$ no intervalo $[-1, 3]$.

b) Encontre o(s) valor(es) de c que satisfaz(em) o Teorema do Valor médio para integrais.

a) Observando que $f(x)$ é contínua $[-1, 3]$, uma vez que é um polinômio. Então o valor médio de f no intervalo $[-1, 3]$ é:

$$\begin{aligned} f_{\text{médio}} &= \frac{1}{b-a} \int_{-1}^{3} f(x) dx \\ &= \frac{1}{3-(-1)} \int_{-1}^{3} (x^2 + 2) dx \end{aligned}$$

Usamos agora o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned} f_{\text{médio}} &= \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]\Bigg|_{-1}^{3} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{27}{3} + 6\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{3} - 2\right) \\ &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

b) O(s) valor(es) de c que atende(m) o Teorema do valor médio para integrais 2.11 satisfaz(em)

$$f(c) = f_{\text{médio}} = \frac{13}{3}.$$

Uma vez que $f(c) = c^2 + 2$, temos

$$\begin{aligned} c^2 + 2 &= \frac{13}{3} \\ c^2 &= \frac{13}{3} - 2 = \frac{7}{3} \\ c &= \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \end{aligned}$$

Assim existem dois valores para c

$$c = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \approx \pm 1{,}5275$$

no intervalo $[-1, 3]$, que satisfazem o Teorema do Valor Médio para integrais.

Podemos justapor as duas partes do Teorema Fundamental do cálculo.

Teorema 2.14: Teorema Fundamental do Cálculo

Se f for contínua em $[a, b]$ valem as afirmações:

1. Se $a \leq x \leq b$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \Rightarrow \qquad F'(x) = f(x)$$

2. Se F for qualquer primitiva de f, isto é $F' = f$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exercícios Seção 2.5

1) [resp] Use a parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para calcular a derivada das seguintes funções.

a) $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^3}dt$

b) $h(x) = \displaystyle\int_x^1 \cos\left(\sqrt{t}\right) dt$

c) $h(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} \ln(t)dt$

d) $p(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4+1}dz$

e) $j(x) = \displaystyle\int_{\mathrm{sen}(x)}^1 \sqrt{1+v^2}dv$

f) $h(x) = \displaystyle\int_{1-3x}^1 \frac{u^3}{1+u^2}du$

g) $h(x) = \displaystyle\int_{2x}^{3x} \frac{u^2-1}{1+u^2}du$

h) $h(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{t^2} dt$

i) $h(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{2x} \mathrm{arctg}(t)dt$

j) $p(x) = \displaystyle\int_{\mathrm{sen}(x)}^{\cos(x)} ln(1+2v)dv$

2) [resp] Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^x (1-t^2)e^{t^2}dt$

a) Encontre e classifique os pontos críticos de f.

b) Analise o crescimento e o decrescimento de f.

3) [resp] Em qual intervalo a curva $y = \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{t^2+t+2}dt$ é côncava para baixo?

4) [resp] Calcule $f'(2)$ se $f(x) = e^{g(x)}$ e $g(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{t}{1+t^4}dt$.

5) [resp] Se $f(x) = \displaystyle\int_0^{\mathrm{sen}(t)} \sqrt{1+t^2}dt$ e $g(y) = \displaystyle\int_3^y f(x)dx$, encontre $g''\left(\pi/6\right)$.

6) [resp] Calcule a integral definida

a) $\displaystyle\int_1^4 5 - 2t + 3t^2\, dt$

b) $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{x}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 (4-x)\sqrt{x}\, dx$

d) $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{x^{2/3}}\, dx$

e) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi} \mathrm{sen}(x)dx$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(v)\,\mathrm{tg}(v)dv$

g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{4+u^2}{u^3}du$

h) $\displaystyle\int_1^3 2\,\mathrm{sen}(x) - e^x dx$

i) $\displaystyle\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}dx$

j) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{t+1}dt$

k) $\displaystyle\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{8}{1+v^2}dv$

l) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx$ se $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & 0 \leq x < \pi/2 \\ \cos(x) & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$

m) $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx$ se

$f(x) = \begin{cases} 2 & -2 \leq x \leq 0 \\ 4 - x^2 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

n) $\displaystyle\int_0^1 5x - 5^x dx$

o) $\displaystyle\int_0^1 x\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right)dx$

p) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{tg}(\theta)}{\sec^2(\theta)}d\theta$

q) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^2 - 1}{t^4 - 1}dt$

r) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{y} - y}{y^2}dy$

s) $\displaystyle\int_0^2 |2x - 1|dx$

t) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\,dx$

7) Determine o que está errado em cada na equação.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{1} x^{-4}dx = \left.\frac{x^{-3}}{-3}\right|_{-2}^{1} = -\frac{-3}{8}$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sec^2(x)dx = \operatorname{tg}(x)\Big|_0^{\pi} = 0$

8) Calcule as integrais a seguir, interpretando-a em termos das áreas, faça um esboço da região.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 1 - x\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-3}^{0} 1 + \sqrt{9 - x^2}\,dx$

9) [resp] Nos exercícios a seguir, encontre:

i) O valor médio de f no intervalo dado.

ii) O valor de c tal que $f_{\text{médio}} = f(c)$.

iii) Esboce o gráfico de f e um retângulo cuja área é a mesma que a área sob o gráfico de f nesse intervalo.

a) $f(x) = (x - 3)^2$, $[2, 5]$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $[0, 4]$

c) $f(x) = -3x^2 - 1$, $[0, 1]$

d) $f(x) = |x| - 1$, $[-1, 1]$

10) [resp] Use a propriedade 10 de integrais para estimar o valor da integral.

a) $\displaystyle\int_0^2 xe^{-x}dx$

b) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg}(x)dx$

2.6 Integrais Impróprias

As integrais definidas são calculadas em um intervalo finito e a função f não deve ter nenhuma descontinuidade infinita. Porém, mesmo se o intervalo for infinito ou f possuir uma descontinuidade infinita, em alguns casos, é possível calcular a área sob o gráfico usando a integral imprópria.

2.6.1 Integrais impróprias – Intervalo de integração ilimitado

Definição 2.15: Integral Imprópria do tipo I

Seja f função contínua em intervalo ilimitado, do tipo $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ ou $(-\infty, \infty)$. A integral definida de f em cada um desses intervalos é dita imprópria e é dada respectivamente por

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^c f(x)\,dx + \lim_{t\to\infty} \int_c^t f(x)\,dx, \quad \text{para algum } c \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que a integral imprópria converge se o(s) limite(s) existe(m); caso contrário, diverge.

Se $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge, então $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Exemplo 2.6.1: Determine se a integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx$ é convergente ou divergente.

De acordo com a definição de integrais impróprias do tipo I, temos

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big|_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \big(\ln(t) - \ln(1)\big) \\
&= \lim_{t\to\infty} \ln(t) = \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx$ é divergente.

Exemplo 2.6.2: Determine se a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 2^x dx$ é convergente ou divergente.

Pela definição de integral imprópria

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} 2^x dx &= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} 2^x dx \\ &= \lim_{t\to-\infty} \left.\frac{2^x}{\ln(2)}\right|_{t}^{0} \\ &= \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{\ln(2)}\left(2^0 - 2^t\right) \\ &= \frac{1}{\ln(2)}\end{aligned}$$

Logo a integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 2^x dx$ é convergente e vale $\dfrac{1}{\ln(2)}$.

Exemplo 2.6.3: Determine se a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ é convergente ou divergente.

Mais uma vez iremos usar a definição de integral imprópria do tipo I. Nessa definição é conveniente escolher $a = 0$, assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

É necessário calcular as integrais do lado direito separadamente

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{t\to\infty} \left.\operatorname{arctg}(x)\right|_{0}^{t} \\ &= \lim_{t\to\infty} \big(\operatorname{arctg}(t) - \operatorname{arctg}(0)\big) \\ &= \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg}(t) \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{1-}{1+x^2}dx &= \lim_{t\to\infty}\int_t^0 \frac{dx}{1+x^2}\\ &= \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_t^0\\ &= \lim_{t\to-\infty}\big(\operatorname{arctg}(0)-\operatorname{arctg}(t)\big)\\ &= \lim_{t\to\infty} 0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Como ambas as integrais são convergentes, a integral dada é convergente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

Como $\dfrac{1}{1+x^2} > 0$, a integral imprópria pode ser interpretada como a área da região infinita sob a curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ e acima do eixo x, conforme mostra a Figura 2.11.

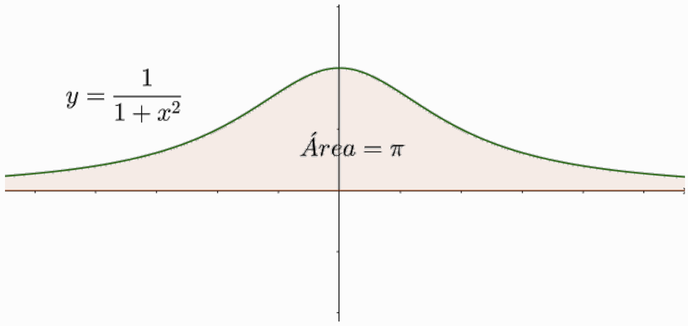


Figura 2.11: Integral Imprópria.

A próxima definição é outro tipo de integral imprópria, que envolve descontinuidade.

2.6.2 Integrais impróprias – Descontinuidade em um extremo

Definição 2.16: Integral Imprópria – Tipo 2

1. Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, temos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

Se esse limite existir (como número finito).

2. Se f é contínua em $(a,b]$ e descontínua em a, temos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

Se esse limite existir (como número finito).

Nesse caso, dizemos que a integral imprópria $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente se o limite correspondente existir e divergente caso contrário.

3. Se f é uma função definida em $[a,b]$, contínua exceto em um ponto $c \in [a,b]$ e c é uma descontinuidade de f, então definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

caso $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ forem convergentes.

Antes de fazermos os exemplos, vamos fazer algumas observações, que nos auxiliarão nos exemplos que seguem:

1. Seja F a primitiva mais geral de f, ou seja,

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

então, se k e b são constantes, vale que

$$\int f(kx)dx = \frac{F(kx)}{k} + C.$$

2. Além disso, $\int f(kx+b)dx = \dfrac{F(kx+b)}{k} + C$.
Para ficar mais claro, observe os exemplos a seguir:

3. $\int \cos(5x)dx = \dfrac{\mathrm{sen}(5x)}{5} + C$.

4. $\int e^{8x} = \dfrac{e^{8x}}{8} + C$.

5. $\int \dfrac{1}{x+3}dx = \ln|x+3| + C$.

Essas observações podem ser demonstradas usando substituição simples, técnica de integração que veremos posteriormente.

Exemplo 2.6.4: Encontre, caso exista $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$.

Note que, a integral

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$$

é imprópria tipo-2, pois

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$$

tem uma assíntota vertical em $x = 2$. Como essa descontinuidade ocorre no extremo esquerdo do intervalo $[2,5]$, usaremos a parte 2 da Definição 2.16. Desse modo

$$\begin{aligned}
\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx &= \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx \\
&\overset{\text{TFC2}}{=} \lim_{t\to 2^+} \left[2\sqrt{x-2}\right]_t^5 \\
&= \lim_{t\to 2^+} 2(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}) \\
&= 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Portanto, a integral imprópria é convergente. Uma vez que o integrando é uma função positiva, podemos interpretar o valor da integral como a área da região abaixo da curva $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$, no intervalo $(2,5]$.

Sabendo que $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{x} + k$, pela observação feita anteriormente, usamos que $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx = 2\sqrt{x-2} + k$.

Exemplo 2.6.5: Determine se a integral $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^{2/3}} dx$ é convergente ou divergente.

Mais uma vez devemos nos atentar que a integral em questão é imprópria tipo 2, uma vez que o integrando possui uma descontinuidade em $x = 0$. Uma vez que essa descontinuidade acontece no extremo direito do intervalo $[-1, 0]$, precisamos usar a parte 1 da Definição 2.16. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^{2/3}} dx &= \lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x^{2/3}} dx \\
&\overset{\text{TFC2}}{=} \lim_{t\to 0^-} 3x^{1/3} \Big|_{-1}^{t} \\
&= \lim_{t\to 0^-} 3\left[t^{1/3} - (-1)^{1/3}\right] \\
&= 3
\end{aligned}$$

Portanto, a integral imprópria converge.

Exemplo 2.6.6: Calcule $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{1}{x-1} dx$, se possível.

Primeiramente, é importante observar que a integral em questão é imprópria-tipo 2, uma vez que $1/x-1$ possui uma descontinuidade em $x = 1$. Como essa descontinuidade ocorre dentro do intervalo $[0, 3]$, devemos utilizar a parte 3 da Definição 2.16 com $c = 1$.

$$\int_{0}^{3} \frac{1}{x-1} dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{x-1} dx + \int_{1}^{3} \frac{1}{x-1} dx$$

onde

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1} \frac{1}{x-1} dx &= \lim_{t\to 1^-} \int_{0}^{t} \frac{1}{x-1} dx \\
&\overset{\text{TFC2}}{=} \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1| \Big|_{0}^{t} \\
&= \lim_{t\to 1^-} \big(\ln|t-1| - \ln|-1|\big) \\
&= \lim_{t\to 1^-} \ln(1-t) = -\infty
\end{aligned}$$

pois $1 - t \to 0^+$, quando $t \to 1^-$. Portanto, como

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx$$

é divergente, então

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx$$

é divergente e não precisamos calcular

$$\int_1^3 \frac{1}{x-1} dx \,.$$

Note que se não tivéssemos atentados que na função do exemplo 2.6.2, poderíamos ter feito erroneamente o seguinte cálculo

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx = \ln|t-1|\Big|_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

no entanto, esse procedimento está incorreto, uma vez que a integral imprópria deve ser calculada em termos de limite. Isso nos leva a uma importante lição: a partir de agora, sempre que for solicitado calcular

$$\int_a^b f(x)dx \,,$$

é fundamental decidir se a integral é ordinária ou imprópria.

Exercícios Seção 2.6

1) [resp] Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule aquelas que são convergentes.

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} dx$

b) $\displaystyle\int_2^\infty e^{-5p} dp$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{x^5} dx$

d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$

e) $\displaystyle\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4} dx$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty (2 - v^4) dv$

2) Esse exercício tem como objetivo mostrar que não podemos definir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)dx\,.$$

Para isso:

a) Mostre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ é divergente.

b) Mostre que $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x = 0$

3) Para que valores de p a integral $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge?

3

Áreas e Volumes

3.1 Introdução

Apresentaremos neste capítulo técnicas para calcular áreas e volumes usando a integração. Na Seção Área Entre Curvas mostramos como calcular a área entre duas curvas definidas por gráficos de funções. Nas Seções Volume pelo método das seções transversais e Volume pelo método das cascas cilíndricas mostramos como calcular volumes criando fatias de duas formas distintas.

3.2 Área Entre Curvas

Ao definirmos integral definida, definimos também o que seria a área sob uma curva para uma função não negativa. Aqui, usaremos integrais para encontrar áreas de regiões entre gráficos de duas funções.

Considere que queremos calcular a área da região S entre duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e as retas verticais $x = a$ e $x = b$.

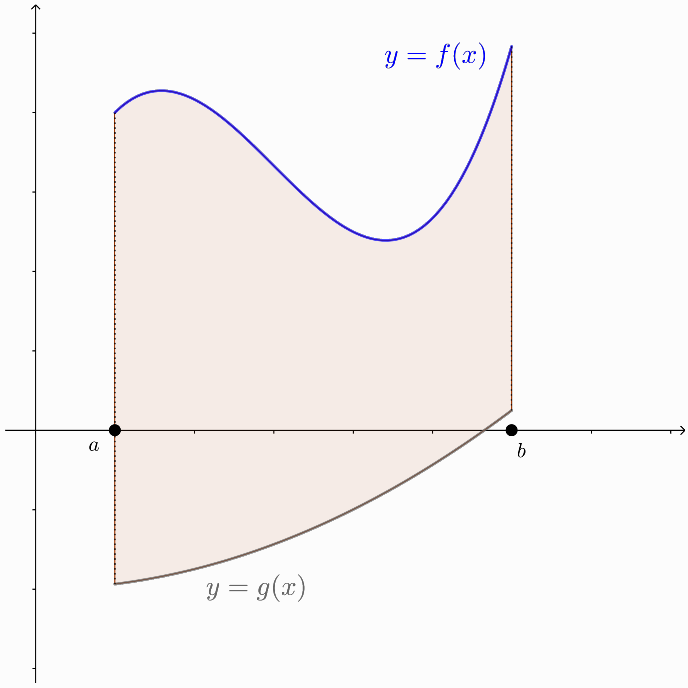


Figura 3.1: Gráfico da região.

Vamos dividir a região S em n faixas de mesma largura e então aproximamos a k-ésima faixa por um retângulo com base Δx e altura $f(c_k) - g(c_k)$, conforme mostra a Figura 3.2.

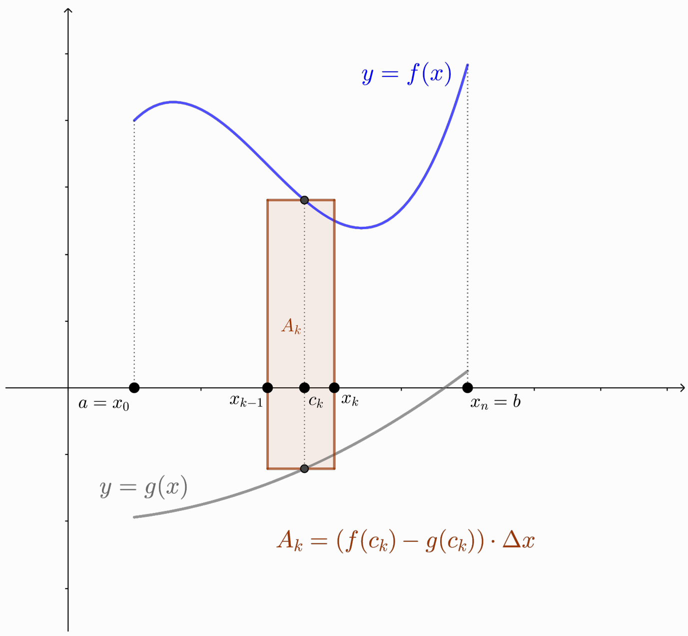


Figura 3.2: Gráfico da região.

Podemos aproximar a área da região S como soma da área desses n retângulos

$$\sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x$$

Essa aproximação fica cada vez melhor quando $n \to \infty$ e assim, definimos a área da região S como sendo

$$A = \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[f(c_k) - g(c_k)\right] \Delta x$$

Reconhecemos o limite acima como a integral definida de $f - g$. Assim, podemos apresentara definição a seguir.

Definição 3.1: Área entre curvas

A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$, $x = b$, onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, é

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$$

Exemplo 3.2.1: Encontre a área da região limitada abaixo por $f(x) = x$ e acima por $g(x) = e^x + 1$ e limitada nos lados pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

O esboço da região pedida pode ser visto na Figura 3.3. A área pedida pode ser calculada através da integral definida:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^x + 1 - x\, dx &= \left(e^x + x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \left(e + 1 - \frac{1}{2}\right) - \left(e^0 + 0 - \frac{0}{2}\right) \\
&= e - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Onde a primeira igualdade é decorrente do Teorema Fundamental do Cálculo, parte 2.

Exemplo 3.2.2: Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2x$.

Observe que a curva $y = x^2$ é uma parábola e a curva $y = 2x$ é uma reta que passa pela origem. O esboço da região pedida pode ser visto na Figura e note

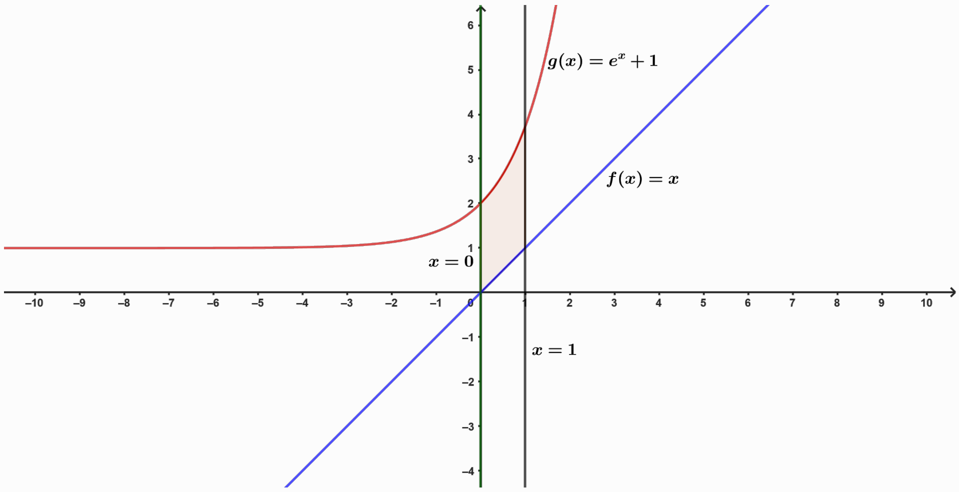


Figura 3.3: Esboço da região delimitada pelas curvas $y = e^x + 1$, $y = x$, $x = 0$ e $x = 1$.

que a curva que está “por cima” é $y = 2x$ e a curva que está “por baixo” é $y = x^2$.

Precisamos encontrar os pontos de intersecção dessas curvas e para isso, precisamos encontrar as soluções da equação:

$$x^2 = 2x$$

Cujas soluções são $x = 0$ e $x = 2$.

Assim, a área pedida pode ser calculada resolvendo a integral

$$\begin{aligned}\int_0^2 2x - x^2\,dx &\overset{\text{TFC2}}{=} \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2\\ &= \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(0 - \frac{0}{3}\right)\\ &= \frac{4}{3}\,.\end{aligned}$$

Exemplo 3.2.3: calcular a área da região delimitada pelas curvas $y = -x^2 + 3x + 2$ e $y = x^2 + 6x$.

Você deve lembrar que a curva $y = -x^2 + 3x + 2$ é uma parábola com concavidade

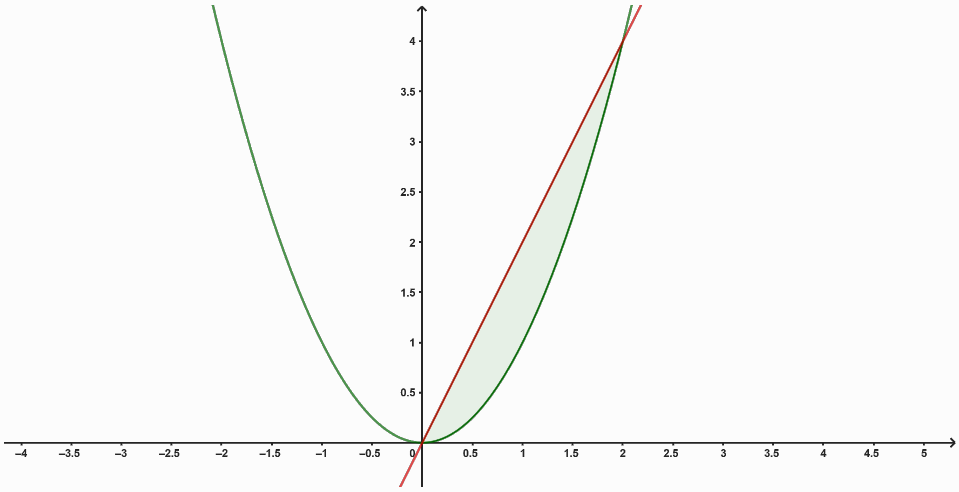


Figura 3.4: Esboço da área entre as curvas $y = x^2$ e $y = 2x$.

voltada para baixo, com vértice $(3/2, 17/4)$, zeros

$$x = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \qquad \text{e} \qquad x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

e intercepta o eixo y no ponto $(0, 2)$. Já a curva $y = x^2 + 6x$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, com vértice $(-3, -9)$, zeros $x = 0$ e $x = -6$ e intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$.

Para encontrar os pontos de intersecção, igualamos as duas funções

$$-x^2 + 3x + 2 = x^2 + 6x.$$

Resolvendo a equação, encontramos $x = -2$ e $x = 1/2$. O esboço da região pode ser visto na Figura 3.5.

Agora, podemos calcular a área, através da integral

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1/2} (-x^2 + 3x + 2) - (x^2 + 6x)\, dx \\ &= \int_{-2}^{1/2} -2x^2 - 3x + 2\, dx \\ &\overset{\text{TFC2}}{=} \left(\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 3\right)\Bigg|_{-2}^{1/2} \\ &= \frac{125}{24} \end{aligned}$$

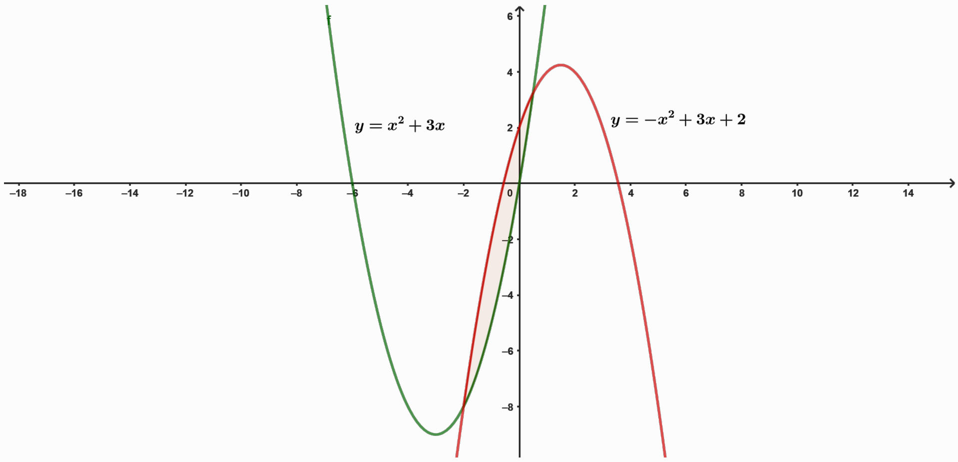


Figura 3.5: Esboço da região entre as curvas $y = -x^2 + 3x + 2$ e $y = x^2 + 6x$.

EXEMPLO 3.2.4: Calcule a área da região delimitada pelas curvas $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$, no intervalo $[0, \pi/2]$.

Inicialmente, observamos que os pontos de interseção ocorrem quando $\text{sen}(x) = \cos(x)$ e $0 \leq x \leq \pi/2$, ou seja, quando $x = \pi/4$. Ao esboçarmos o gráfico da região pedida, conforme a Figura 3.6, podemos notar que $\cos(x) \geq \text{sen}(x)$ quando $0 \leq x \leq \pi/4$, porém $\text{sen}(x) \geq \cos(x)$ quando $\pi/4 \leq x \leq \pi/2$. Portanto, precisamos dividir a região dada em duas partes, com áreas A_1 e A_2. Dessa forma, a área A da região pedida é a soma dessas duas áreas, ou seja

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 \\
&= \int_0^{\pi/4} \cos(x) - \text{sen}(x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \text{sen}(x) - \cos(x)\, dx \\
&\overset{\text{TFC2}}{=} \big(\text{sen}(x) + \cos(x)\big)\Big|_0^{\pi/4} + \big(-\cos(x) - \text{sen}(x)\big)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 2\sqrt{2} - 2
\end{aligned}
$$

Observe que, neste exercício específico, poderíamos ter aproveitado a simetria da região em relação à reta $x = \pi/4$, o que nos permitiria economizar esforço ao calcular a área, uma vez que

$$A = 2A_1 = 2\int_0^{\pi/4} \cos(x) - \text{sen}(x)\, dx.$$

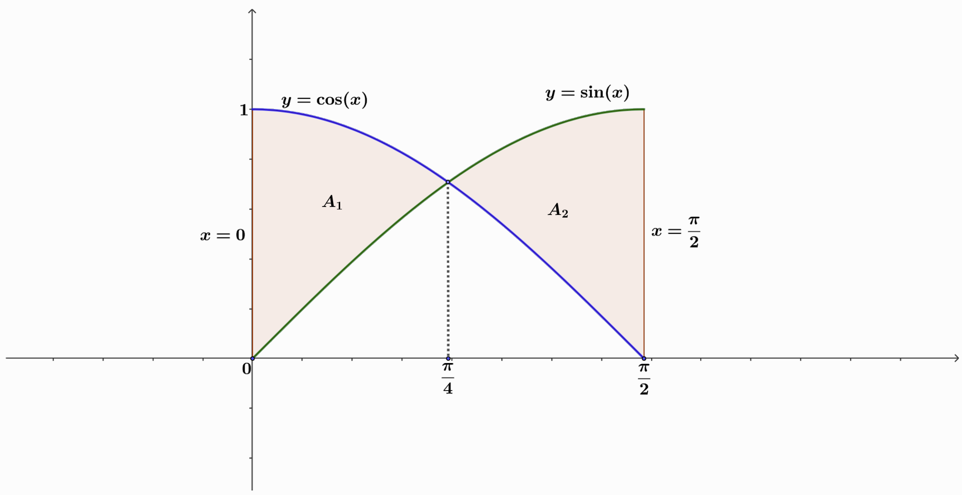


Figura 3.6: Região delimitada pelas curvas $y = \text{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$, no intervalo $0 \leq x \leq {}^{\pi}/_{2}$.

Exemplo 3.2.5: Calcule a área da região expressa na figura, que é uma das regiões delimitada simultaneamente pelas três curvas

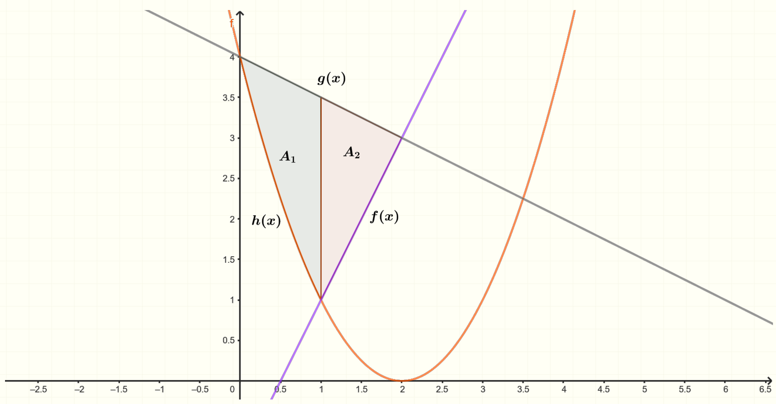
$$f(x) = 2x - 1, \qquad g(x) = -\frac{x}{2} + 4 \quad \text{e} \quad h(x) = (x-2)^2 .$$

Observe que as curvas $f(x)$ e $g(x)$ são retas e

$$h(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

é uma parábola, com concavidade para cima, cujo vértice é o ponto $(2, 0)$ e possui um único zero, $x = 2$.

O esboço da região pedida é mostrado na figura a seguir.



Note que precisamos dividir a região que queremos encontrar a área em duas regiões: na primeira região, o intervalo de integração é de 0 até 1 e a reta

$g(x) = -x/2 + 4$ está "por cima", enquanto a parábola $h(x) = (x-2)^2$ está "por baixo"; na segunda região, o intervalo de integração e a curva $g(x) = -x/2 + 4$ está "por cima", enquanto a curva que está "por baixo" é $f(x) = 2x - 1$.

Portanto, temos

$$A_1 = \int_0^1 \big(g(x) - h(x)\big)dx$$
$$A_2 = \int_1^2 \big(g(x) - f(x)\big)dx$$

Calculando as integrais separadamente

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 -\frac{x}{2} + 4 - x^2 + 4x - 4\, dx \\ &= \int_0^1 -x^2 + \frac{7}{2}x\, dx \\ &\overset{\text{TFC2}}{=} \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{7}{4}x^2\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \left(-\frac{1}{3} + 7/4\right) - (0 - 0) \\ &= \frac{17}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_1^2 -\frac{x}{2} + 4 - x^2 - 2x + 1\, dx \\ &= \int_1^2 -\frac{5x}{2} + 5\, dx \\ &\overset{\text{TFC2}}{=} \left(-\frac{5x^2}{4} + 5x\right)\Bigg|_1^2 \\ &= \left(-\frac{20}{4} + 10\right) - \left(-\frac{5}{4} + 5\right) \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Portanto, a área pedida é $A = A_1 + A_2 = \dfrac{17}{12} + \dfrac{5}{4} = \dfrac{8}{3}$.

Exemplo 3.2.6: Encontre a área da região limitada pela reta $y = x - 1$ e a parábola $y^2 = 2x + 6$.

Exercícios Seção 3.2

1) [resp] Nos itens a seguir, esboce a região delimitada pelas curvas indicadas e calcule a sua área.

a) $y = e^x, \quad y = x^2 - 1, \quad x = -1, \quad x = 1$

b) $y = \operatorname{sen}(x), \quad y = x, \quad x = \dfrac{\pi}{2}, \quad x = \pi$

c) $y = x^2 - 2x, \quad y = x + 4$

d) $y = \dfrac{1}{x}, \quad y = \dfrac{1}{x^2}, \quad x = 2$

e) $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$

f) $4x + y^2 = 12, \quad x = y$

g) $y = 12 - x^2, \quad y = x^2 - 6$

h) $y = x^3, \quad y = x$

i) $y = |x|, \quad y = x^2 - 2$

j) $y = \dfrac{1}{x}, \quad y = x, \quad y = \dfrac{1}{4}x, \quad x > 0$

k) $y = \cos(x), \quad y = \operatorname{sen}(2x), \quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{2}$

l) $y = \sqrt{x}, \quad y = \dfrac{1}{2}x, \quad x = 9$

2) [resp] Use o Cálculo para encontrar a área do triângulo com vértices $(0,0)$, $(3,1)$ e $(1,2)$.

3) [resp] Determine a área da região limitada exatamente pelas três curvas $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ e $y = 2x + 8$.

4) [resp] Encontre os valores de c tais que a área da região delimitada pelas parábolas $y = x^2 - c^2$ e $y = c^2 - x^2$ seja $8/3$.

3.3 Volume pelo método das seções transversais

Nesta seção, iremos explorar uma aplicação importante das integrais no cálculo de volumes de sólidos específicos. Em particular, abordaremos o cálculo de volumes para cilindros e sólidos de rotação. Todas as figuras dessa seção foram tiradas do livro do James Stewart [62].

Definição 3.2: Volume por Seções transversais

Seja S um sólido que está definido para $a \leq x \leq b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x , passando por x e perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, em que A é uma função contínua, então o volume de S é:

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i = \int_a^b A(x)dx$$

Essa definição é válida sempre que $A(x)$ for integrável, em particular, quando for contínua.

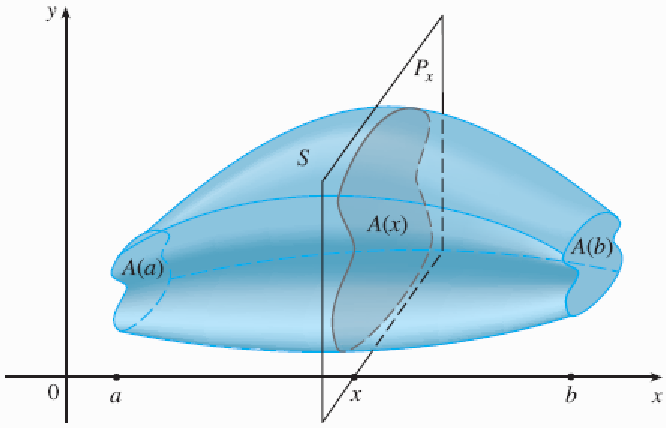


Figura 3.7: Ilustração do plano P_x interceptando um sólido S (Figura extraída do livro [62]).

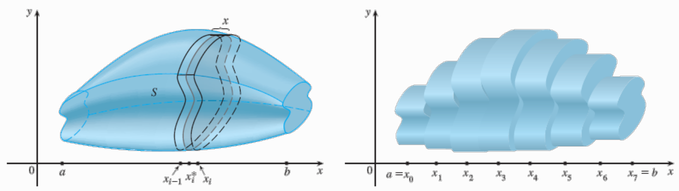


Figura 3.8: Ilustração do método das seções transversais (Figura extraída do livro [62]).

Para o cálculo do volume do sólido, siga os seguintes passos:

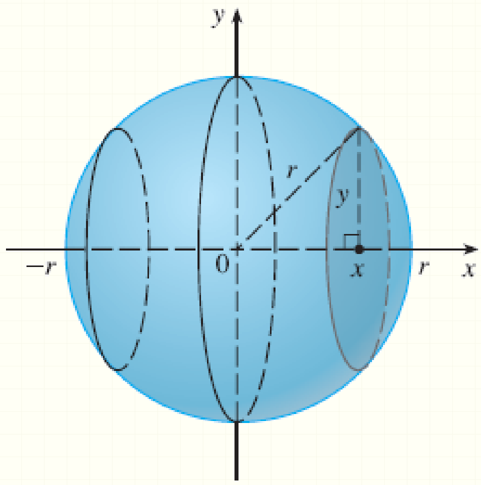
1. Faça o esboço do sólido e uma seção transversal típica.
2. Encontre uma expressão para $A(x)$, a área dessa seção transversal típica.
3. Determine os limites de integração.
4. Integre $A(x)$ para determinar o volume.

Exemplo 3.3.1: Uma pirâmide de base quadrada com lado 3 metros, tem 3 metros de altura. A seção transversal da pirâmide, perpendicular a altura e a x metros abaixo do vértice, é um quadrado com x metros de lado. Determine o volume dessa pirâmide.

$$V = \int_0^3 A(x)dx = \int_0^3 x^2 dx \overset{\text{TFC2}}{=} \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{27}{3} = 9\,\mathrm{m}^3$$

Exemplo 3.3.2: Usando integrais, encontre o volume V de uma esfera de raio r, mostrando que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Para ilustrar a situação, vamos posicionar a esfera de modo que seu centro esteja na origem, conforme figura a seguir



Fazendo um corte P_x perpendicular ao eixo x, temos que o plano P_x intercepta a seção transversal em um círculo é $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ (pelo Teorema de Pitágoras). Assim, a área da seção transversal é

$$A(x) = \pi y^2 = \pi\left(r^2 - x^2\right)$$

Usando a definição de volume com $a = -r$ e $b = r$, temos

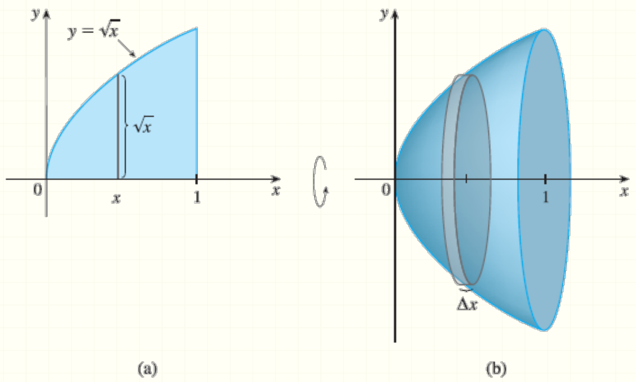
$$\begin{aligned}
V &= \int_{-r}^{r} A(x)dx \\
&= \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx \\
&= 2\pi \int_{0}^{r} r^2 - x^2\, dx \\
&= 2\pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^r \qquad\qquad \text{TFC} \\
&= 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3.
\end{aligned}$$

Definição 3.3: Sólido de revolução

Sólido de revolução é o sólido obtido pela rotação (ou revolução) de uma região plana em torno de um eixo. Nesse caso, a seção transversal será um disco de raio $R(x)$, que terá área $A(x) = \pi R(x)^2$ ou um anel circular de raio externo $R(x)$ e raio interno $r(x)$, cuja área é $\pi\left(R(x)^2 - r(x)^2\right)$.

Exemplo 3.3.3: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $f(x) = \sqrt{x}$ de 0 até 1.

A região é apresentada na figura a seguir.



A seção transversal é um círculo de raio $R(x) = y = \sqrt{x}$ cuja área é dada por

$$A(x) = \pi R(x)^2 = \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 = \pi x\,.$$

Além disso, o sólido está entre 0 e 1. Portanto,

$$V = \int_0^1 \pi x dx \overset{\text{TFC2}}{=} \pi\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

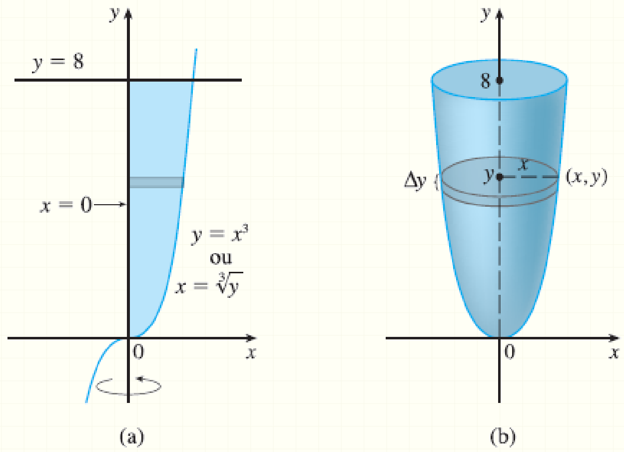
Ao invés de rotacionarmos uma seção plana em torno do eixo x, podemos fazer a rotação em torno do eixo y. Assim, teremos como região plana uma seção circular de raio $x = R(y)$, $c \leq y \leq d$ e usamos o mesmo método trocando x por y. Ou seja, nesse caso, o volume do sólido obtido é dado por

$$V = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \pi R(y)^2 dy$$

O exemplo a seguir ilustra essa situação.

Exemplo 3.3.4: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = x^3$, $y = 8$, e $x = 0$ em torno do eixo y.

A figura a seguir ilustra a situação.



Observe que dessa vez, como a região é girada em torno do eixo y, faz sentido fatiar o sólido perpendicularmente ao eixo y, obtendo como seção transversal é um círculo de raio x, onde $x = \sqrt[3]{y}$. Assim, a área dessa seção transversal é dada por

$$A(y) = \pi R(y)^2 = \pi \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 = \pi y^{2/3}$$

Ademais, uma vez que sólido está entre $y = 0$ e $y = 8$, seu volume é dado por:

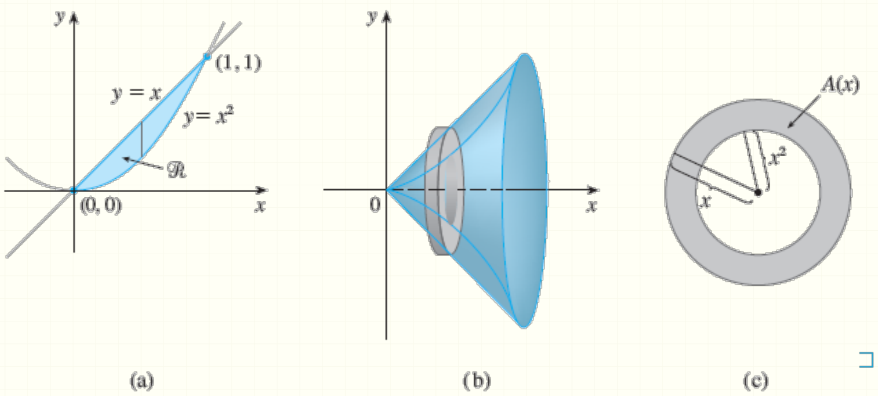
$$V = \int_0^8 \pi y^{2/3} dy \overset{\text{TFC2}}{=} \pi \left(\frac{3}{5} y^{5/3}\right)\Bigg|_0^8 = \pi \frac{3}{5} 8^{5/3} = \frac{96\pi}{5}.$$

Em síntese, temos que:

- Se o sólido é obtido pela rotação em torno do eixo x de uma região plana cuja seção transversal é um círculo, o raio desse círculo é $y = f(x)$ e o volume é dado por uma integral na variável x.
- Por outro lado, se o sólido é obtido pela rotação em torno do eixo y de uma região plana cuja seção transversal é um círculo, o raio desse círculo é $x = f(y)$ e o volume é dado por uma integral na variável y.

Exemplo 3.3.5: A região $\mathcal{R}$, limitada pelas curvas delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ é girada em torno do eixo x. Encontre o volume do sólido resultante.

A primeira observação importante é que as curvas $y = x$ e $y = x^2$ se intersectam nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Esses valores são obtidos resolvendo a equação $x = x^2$. A figura a seguir ilustra a situação.



Nesse contexto, a seção transversal não é um círculo, mas sim um anel com raio interno $r(x) = x^2$ e raio externo $R(x) = x$. Dessa forma, a área da seção transversal é dada por

$$A(x) = \pi\left(x^2 - \left(x^2\right)^2\right) = \pi\left(x^2 - x^4\right).$$

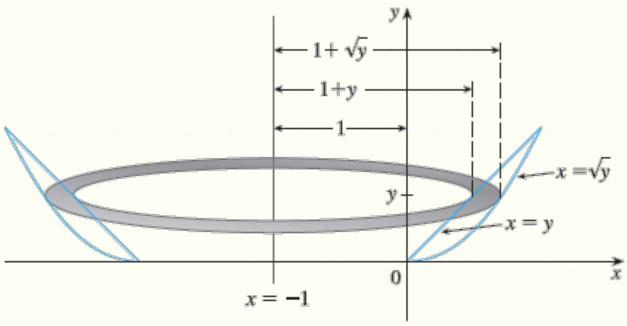
Portanto:

$$V = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)dx \overset{\text{TFC2}}{=} \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2\pi}{15}.$$

Em vez de realizar a rotação da região plana em torno dos eixos coordenados, podemos ter o interesse de calcular o volume de um sólido S gerado pela rotação de uma região plana em torno de uma reta paralela a esses eixos, como ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 3.3.6: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região do exemplo anterior em torno da reta $x = -1$.

Devemos notar que, nessa situação, a seção transversal é um anel, mas dessa vez o raio interno $2 - x$ e raio externo $2 - x^2$, conforme mostra a figura a seguir.



Assim, a área da seção transversal é dada por

$$A(x) = \pi\left(2 - x^2\right)^2 - \pi(2 - x)^2 = \pi\left(x^4 - 5x^2 + 4x\right)$$

Assim, o volume do sólido resultante é

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi\left(x^4 - 5x^2 + 4x\right) dx \\ &= \pi\left(\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 \qquad\qquad \text{TFC} \\ &= \pi\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + \frac{4}{2}\right) \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

Exemplo 3.3.7: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região do exemplo anterior em torno da reta $y = 2$.

Aqui, a seção transversal é um anel, com raio interno $1 + y$ e raio externo $1 + \sqrt{y}$. Assim, a área da seção transversal é dada por

$$A(y) = \pi\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 - \pi(1 + y)^2 = \pi\left(2\sqrt{y} - y - y^2\right)$$

Portanto, o volume pedido é dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi\left(2\sqrt{y} - y - y^2\right) dy \\ &= \pi\left(\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \qquad \text{TFC} \\ &= \pi\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Exercícios Seção 3.3

1) [resp] Nos itens que seguem, encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno das retas especificadas.

a) $y = 2 - \frac{1}{2}x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$, em torno do eixo x.

b) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 20$, em torno do eixo x.

c) $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$, em torno do eixo x.

d) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$, em torno do eixo x.

e) $y = x^3$, $y = x$, $x \geq 0$, em torno do eixo x.

f) $y = \sqrt{25 - x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$, em torno do eixo x.

g) $y^2 = x$, $x = 2y$, em torno do eixo y.

h) $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, em torno do eixo $y = 1$.

i) $x = 2\sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 9$ em torno do eixo y.

j) $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$, $0 \leq x \leq \pi/4$ em torno do eixo $y = -1$.

k) $y = x^3$, $x = 0$, $x = 1$ em torno do eixo $x = 2$.

l) $y = 5 - x^2$, $y = 1/4x^2$, $x = 1$ em torno do eixo x.

2) [resp] Determine o volume do sólido gerado bela rotação da região delimitada por $y = \sqrt{x}$ e pelas retas $y = 2$ e $x = 0$ em torno

a) do eixo x.

b) do eixo y.

c) da reta $y = 2$.

d) da reta $x = 4$.

3) [resp] Considere a região $\mathcal{R}$ do primeiro quadrante delimitada pelas curvas $y = -x^2 + 4x$ e $y = x$.

a) Esboce a região $\mathcal{R}$ e calcule a sua área.

b) Encontre o volume do sólido gerado pela rotação da região $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.

c) Encontre o volume do sólido gerado pela rotação da região $\mathcal{R}$ em torno da reta $y = -1$.

d) Encontre o volume do sólido gerado pela rotação da região $\mathcal{R}$ em torno da reta $y = 3$.

4) [resp] Considere a região $\mathcal{R}$ do primeiro quadrante delimitada pelas curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - x$.

a) Esboce a região $\mathcal{R}$ e calcule a sua área.

b) Encontre o volume do sólido gerado pela rotação da região $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.

c) Encontre o volume do sólido gerado pela rotação da região $\mathcal{R}$ em torno da reta $y = -1$.

d) Encontre o volume do sólido gerado pela rotação da região $\mathcal{R}$ em torno da reta $y = 5$.

5) [resp] Considere a região $\mathcal{R}$ do primeiro quadrante delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = \sqrt{x}$.

a) Esboce a região $\mathcal{R}$ e calcule a sua área.

b) Encontre o volume do sólido gerado pela rotação da região $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.

c) Encontre o volume do sólido gerado pela rotação da região $\mathcal{R}$ em torno do eixo y.

d) Encontre o volume do sólido gerado pela rotação da região $\mathcal{R}$ em torno da reta $y = -1$.

e) Encontre o volume do sólido gerado pela rotação da região $\mathcal{R}$ em torno da reta $y = 1$.

f) Encontre o volume do sólido gerado pela rotação da região $\mathcal{R}$ em torno da reta $x = 1$.

6) [resp] Esse exercício tem como objetivo usar integrais para demonstrar a fórmula de volume de alguns sólidos. Em cada item, encontre o volume do solido descrito.

a) uma pirâmide de base quadrada com lado L e cuja altura é h.

b) Um cone circular reto de altura h e raio da base r.

c) Um tronco de cone circular reto de altura h, raio da base inferior R e raio da base superior r.

d) Uma calota de uma esfera de raio r e altura h.

3.4 Volume pelo método das cascas cilíndricas

Todas as figuras dessa seção foram tiradas do livro do James Stewart[62].

Em certos problemas relacionados ao cálculo de volumes, a abordagem convencional usando seções transversais pode se tornar desafiadora. Um exemplo ilustrativo é a região delimitada pelas curvas $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$, conforme representado na Figura 3.9. Quando o objetivo é calcular o volume gerado pela rotação dessa região em torno do eixo y, as seções transversais resultantes assumem a forma de arruelas. Contudo, determinar os raios interno e externo dessas arruelas requer resolver a equação cúbica $y = 2x^2 - x^3$ em termos de x, uma tarefa desafiadora. É aqui que entra o poder do Método das Cascas Cilíndricas. Esse método proporciona uma abordagem alternativa para lidar com situações desse tipo.

Definição 3.4: Volume por cascas cilíndricas

O volume do sólido S obtido pela rotação em torno do eixo y da região

$$R = \left\{(x, y) \colon 0 \le y \le f(x), a \le x \le b\right\}$$

é calculado pela integral

$$V = \int_a^b 2\pi \,(\text{raio da casca})\,(\text{altura da casca})\, dx$$

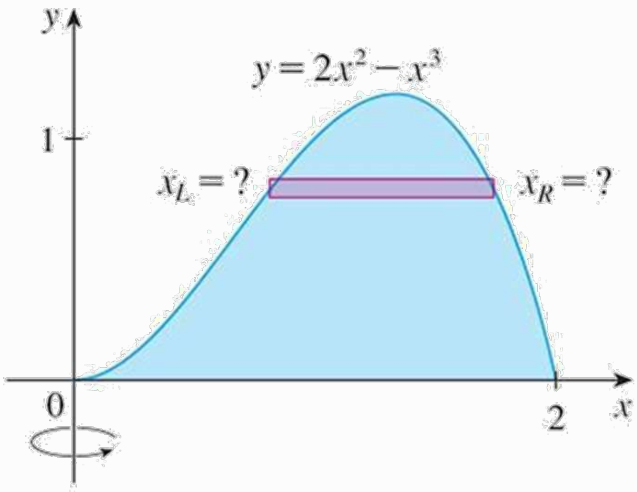


Figura 3.9: Esboço da região delimitada pelas curvas $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$,.

$$= \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

As figuras 3.10, 3.11 e 3.12 ilustram o método das cascas cilíndricas.

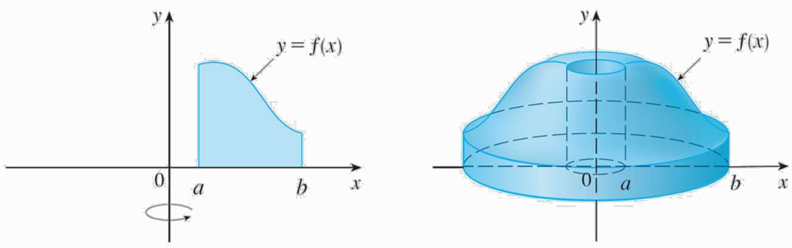


Figura 3.10: Volume por cascas cilíndricas – 03

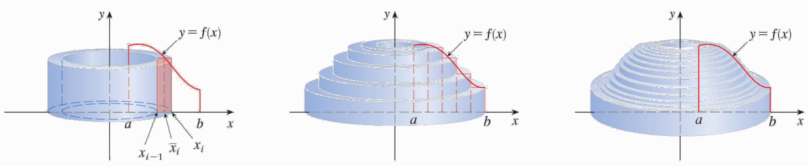


Figura 3.11: Volume por cascas cilíndricas – 04

Exemplo 3.4.1: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$.

A partir do esboço da figura a seguir, vemos que uma casca típica tem raio x, circunferência $2\pi x$ e altura $y = 2x^2 - x^3$.

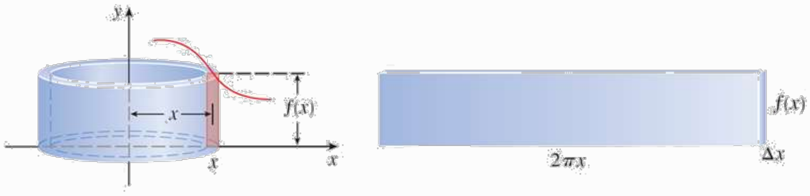
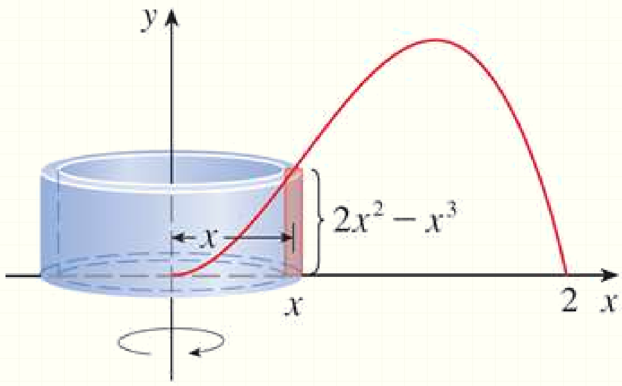


Figura 3.12: Volume por cascas cilíndricas – 05



Assim, pelo método das cascas cilíndricas, o volume é:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3)dx \\
&= 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)dx \qquad = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 \qquad \text{TFC} \\
&= 2\pi\left(8 - \frac{32}{5}\right) \qquad = \frac{16\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.4.2: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região entre $y = x$ e $y = x^2$.

Vemos que a casca tem raio x e altura $x - x^2$.

Portanto, o volume é dado por:

$$V = \int_0^1 (2\pi x)(x - x^2)dx = 2\pi \int_0^2 (x^2 - x^3)dx \overset{\text{TFC2}}{=} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

Exemplo 3.4.3: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada por $y = x - x^2$ e $y = 0$ em torno da reta $x = 2$.

Observe que nesse caso temos uma casca típica de raio $2 - x$ e altura $x - x^2$. Então, o volume do sólido é:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 2\pi(2-x)(x-x^2)dx \\
&= 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx \\
&= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right)\Big|_0^1 \qquad\qquad \text{TFC} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Ao calcular volumes por cascas cilíndricas fique atento aos pontos:

1. Se o sólido é obtido pela rotação de uma região em torno do eixo x (ou em torno de uma reta paralela ao eixo x) o raio da casca e a altura são funções de y e o volume é dado por uma integral na variável y.
2. Se o sólido é obtido pela rotação de uma região em torno do eixo y (ou em torno de uma reta paralela ao eixo y) o raio da casca e a altura são funções de x e o volume é dado por uma integral na variável x.

Exercícios Seção 3.4

1) [resp] Nos itens que seguem, encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno das retas especificadas.

a) $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, em torno do eixo x.

b) $y = x^2$,$y = 6x - 2x^2$, em torno do eixo x.

c) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$, em torno do eixo x.

d) $y = x^2 - 6x + 10$, $y = -x^2 + 6x - 6$ em torno do eixo x.

e) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 2$, em torno do eixo y.

f) $y = 1 + y^2$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$, em torno do eixo y.

g) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$ em torno do eixo y.

h) $y = 4x - x^2$, $y = 3$, em torno do eixo $x = 1$.

i) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$ em torno do eixo $x = -1$.

j) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$ em torno do eixo $y = 1$.

k) $x = y^2 + 1$, $x = 2$, em torno do eixo $y = -1$.

2) Nos itens a seguir, calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada por $y = x$ e $y = 2x - x^2$ em torno das retas especificadas. Você pode decidir qual dos dois métodos utilizados você deve usar.

a) do eixo x

b) do eixo y

c) Da reta $x = 1$

d) da reta $y = 2$

3) [resp] Nos itens a seguir, calcule o volume do sólido gerado pela rotação do triângulo com vértices (1,1), (1,2) e (2,2)em torno das retas especificadas. Você pode decidir qual dos dois métodos utilizados você deve usar.

a) do eixo x

b) do eixo y

c) Da reta $x = \frac{10}{3}$

d) da reta $y = 1$

4) [resp] Seja V o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ em torno do eixo y. Encontre V pelos métodos das seções transversais e das cascas cilíndricas. Em ambos os casos, desenhe um diagrama para explicar o método.

5) [resp] Use o método das cascas cilíndricas, encontre o volume do solido descrito.

a) uma pirâmide de base quadrada com lado L e cuja altura é h.

b) Um cone circular reto de altura h e raio da base r.

c) Um tronco de cone circular reto de altura h, raio da base inferior R e raio da base superior r.

d) Uma calota de uma esfera de raio r e altura h.

6) [resp] Escolha qual dos dois métodos estudados utilizar e encontre o volume do sólido gerado pela região dada em torno do eixo especificado.

a) $y = -x^2 + 6x - 8$, $y = 0$ em torno do eixo y.

b) $y = -x^2 + 6x - 8$, $y = 0$ em torno do eixo x.

4

Técnicas de Integração

4.1 Integração por partes

Proposição 4.1: Integração por Partes

Dadas funções integráveis p e q, podemos escrever a seguinte relação entre as integrais indefinidas

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.$$

De modo equivalente temos a relação entre as integrais definidas

$$\int_{-\infty}^{\infty} p\,dq = pq\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} q\,dp\,.$$

Quando usar? Normalmente, usamos integração por partes quando queremos integrar o produto de duas funções onde uma delas é a derivada de alguma função conhecida, isto é

$$\int f(x)g'(x)dx$$

Exemplos:

Em $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}(x)dx$, temos um produto de funções onde $\mathrm{sen}(x)$, por exemplo, é a derivada de alguém que conheço, isto é, de $-\cos(x)$.

$\displaystyle\int x\ln(x)dx$, aqui também temos um produto de funções e x é a derivada de $\dfrac{x^2}{2}$.

$\displaystyle\int (x^2+1)e^{-x}dx$, aqui temos um produto de duas funções e e^{-x} é a derivada de $-e^{-x}$.

Nossa intenção ao usarmos integração por partes é obtermos uma integral mais simples que aquela de partida.

Teorema 4.2: Fórmula de Integração por partes

Nem sempre é imediato o cálculo de integrais. Por isso, assim como em derivadas, precisamos de algumas técnicas para o cálculo dessas

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \tag{4.1}$$

Chamando $u = f(x)$ e $v = g(x)$, então $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{4.2}$$

Para demonstrar a fórmula de integração por partes, lembremos da regra do produto para derivadas

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Integrando ambos os lados da equação com relação a x, temos

$$\int \big(f(x)g(x)\big)'dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

ou seja,

$$(f(x)g(x)) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Isolando o termo que queremos temos que

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

É útil chamar $u = f(x)$ e $dv = g'(x)dx$ e usar o padrão

$$\begin{aligned} u &= f(x) & dv &= g'(x)dx \\ du &= f'(x)dx & v &= g(x) \end{aligned}$$

quando temos uma integral do tipo $\int f(x)g'(x)dx$, pois facilita a memorização da fórmula de integração por partes.

Na fórmula de integração por partes, g é qualquer antiderivada de g', então escolhemos a constante igual a zero por simplicidade.

Você não deve escolher u e dv de qualquer maneira. Essa escolha deve ser feita de modo a obter uma integral mais simples do que a que tínhamos inicialmente. Com a prática de exercícios essa escolha fica simples.

EXEMPLO 4.1.1: Encontre a Integral $\int x\,\mathrm{sen}(x)dx$

Solução 1 – usando a fórmula (4.1): Vamos escolher $f(x) = x$ e $g'(x) = \mathrm{sen}(x)$. Logo $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos(x)$ (Lembre-se que para g podemos escolher qualquer antiderivada de g'.). Assim, usando a fórmula 4.1, obtemos

$$\begin{aligned} \int x\,\mathrm{sen}(x)dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \\ &= x\big(-\cos(x)\big) - \int -\cos(x)dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -x\cos(x) + \int \cos(x)dx \\
&= -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C
\end{aligned}
$$

Solução 2 – usando a fórmula (4.2): Usando o padrão

$$
\begin{aligned}
u &= x & dv &= \operatorname{sen}(x)dx \\
du &= dx & v &= -\cos(x)
\end{aligned}
$$

Assim, fórmula (4.2) nos dá

$$
\begin{aligned}
\int x\operatorname{sen}(x)dx &= uv - \int vdu \\
&= x\big(-\cos(x)\big) - \int -\cos(x)\,dx \\
&= -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx \\
&= -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C
\end{aligned}
$$

Você poderia perguntar: Eu não poderia escolher $u = \operatorname{sen}(x)$ e $dv = x$, uma vez que conseguimos encontrar uma antiderivada de modo fácil para x? Como comentamos anteriormente, a escolha de u e dv deve ser feita de modo a obter uma integral mais simples. Caso tivéssemos feito essa escolha chegaríamos na integral

$$\int x\operatorname{sen}(x)dx = \operatorname{sen}(x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2\cos(x)dx$$

que é uma integral mais difícil que aquela que começamos.

Exemplo 4.1.2: Calcule $\int \ln(x)dx$

Primeiro note que podemos rescrever

$$\int \ln(x)dx = \int \ln(x)\cdot 1\,dx$$

Usando o padrão temos

$$u = \ln(x) \qquad dv = 1dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$$

Integrando por partes chegamos que

$$\begin{aligned}\int \ln(x)dx &= x\ln(x) - \int x\frac{dx}{x} \\ &= x\ln(x) - \int dx \\ &= x\ln(x) - x + C\end{aligned}$$

Exemplo 4.1.3: Encontre $\displaystyle\int t^2e^tdt$

Note que t^2 torna-se mais simples quando derivamos enquanto que e^t permanece inalterada quando integramos ou derivamos. Assim, escolhemos

$$u = t^2 \qquad dv = e^tdt$$

$$du = 2tdt \qquad v = e^t$$

Logo, a fórmula (4.2) de integração por partes resulta em

$$\int t^2e^tdt = t^2e^t - 2\int te^tdt \tag{4.3}$$

Observe que a integral $\displaystyle\int te^tdt$ não é imediata. Nesse caso, temos que usar novamente Integração por partes. Escolhemos,

$$u = t \qquad dv = e^tdt$$

$$du = dt \qquad v = e^t$$

Assim,

$$\int te^tdt = te^t - \int e^tdt = te^t - e^t + C$$

Substituindo esse resultado na equação (4.3), obtemos

$$\begin{aligned}\int t^2e^t dt &= t^2e^t - 2\int te^t dt\\ &= t^2e^t - 2(te^t - e^t + C)\\ &= t^2e^t - 2te^t + 2e^t + C_1\end{aligned}$$

onde $C_1 = 2C$.

Exemplo 4.1.4: Calcule $\int e^x \operatorname{sen}(x)dx$

Usando integração por partes

$$\begin{aligned} u &= e^x & dv &= \operatorname{sen}(x)dx\\ du &= e^x dx & v &= -\cos(x)\end{aligned}$$

Assim

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = -e^x\cos(x) + \int e^x\cos(x)dx \tag{4.4}$$

Parece que ainda não resolvemos o nosso problema, uma vez que $\int e^x\cos(x)dx$ não é uma integral elementar, mas pelo menos não é mais complicada. Vamos integrar novamente a integração por partes para ver onde chegamos. Dessa vez usaremos $u = e^x$ e $dv = \cos(x)dx$. Assim $du = e^x dx$, $v = \operatorname{sen}(x)$, e

$$\int e^x\cos(x)dx = e^x\operatorname{sen}(x) - \int e^x\operatorname{sen}(x)dx \tag{4.5}$$

Parece que estamos andando em círculos e que voltamos para o mesmo lugar que começamos. Porém, se substituirmos a expressão $\int e^x\cos(x)dx$ da equação (4.5) na equação (4.4), temos

$$\int e^x\operatorname{sen}(x)dx = -e^x\cos(x) + e^x\operatorname{sen}(x) - \int e^x\operatorname{sen}(x)dx$$

Assim, temos uma equação para a integral desconhecida e, para encontrar o seu valor, basta deixar o termo $\int e^x \operatorname{sen}(x)dx$ do lado esquerdo da equação. Assim,

$$2\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = -e^x\cos(x) + e^x\operatorname{sen}(x)$$

Dividindo a equação por 2 e adicionando a constante de integração temos

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = \frac{e^x}{2}\big(-\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\big) + C$$

Exemplo 4.1.5: Encontre $\displaystyle\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}dy$

Quando queremos calcular uma integral definida e precisamos usar alguma técnica de integração, primeiro calculamos a integral indefinida e depois usamos o Teorema Fundamental do Cálculo Parte 2.

Para encontrar

$$\int \frac{y}{e^{2y}}dy = \int ye^{-2y}dy,$$

usaremos integração por partes e escolhemos

$$u = y \qquad dv = e^{-2y}dy$$
$$du = dy \qquad v = -\frac{e^{-2y}}{2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{y}{e^{2y}}dy &= -\frac{ye^{-2y}}{2} - \int -\frac{e^{-2y}}{2}dy\\ &= -\frac{ye^{-2y}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2y}dy\\ &= -\frac{ye^{-2y}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2y} + C\end{aligned}$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, parte 2

$$\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}dy = \left[-\frac{ye^{-2y}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2y}\right]_0^1$$

$$= \left(-\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2}\right) - \left(0 - \frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}$$

Exemplo 4.1.6: A figura a seguir mostra a região do primeiro quadrante delimitada pelo eixo $y = 0$ e pela curva $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$, $0 \leq x \leq \pi$.

a) Encontre a área dessa região.

b) Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação dessa região em torno do eixo y.

c) Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação dessa região em torno do da reta $x = \pi$.

a) Lembre que a fórmula para calcular a área sob a curva de uma função $f(x)$ entre os limites a e b é dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

No nosso caso, a função é $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$ e os limites são $a = 0$ e $b = \pi$. Então, a área é

$$A = \int_0^\pi x\,\mathrm{sen}(x)dx$$

Para resolver essa integral definida, precisamos, inicialmente, encontrar a integral indefinida $\int x\,\mathrm{sen}(x)dx$. No exemplo 4.1 essa integral já foi calculada. Assim, usando o Teorema Fundamental do Cálculo-Parte 2

$$A = [-x\cos(x) + \mathrm{sen}(x)]\Big|_0^\pi$$
$$= \big(-\pi\cos(\pi + \mathrm{sen}(\pi))\big) - \big(-0\cos(0) + \cos(0)\big)$$
$$= \pi.$$

b) Agora, para encontrar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região delimitada pela curva $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$ e o eixo $y = 0$ em torno do eixo y, usamos o método de cascas cilíndricas, que é o mais apropriado. O raio da casca é x e a altura $f(x)$.

Integrando sobre a região entre $x = 0$ e $x = \pi$, obtemos o volume

$$V = \int_0^\pi 2\pi x(x\,\mathrm{sen}(x))\,dx = 2\pi\int_0^\pi x^2\,\mathrm{sen}(x)\,dx$$

Para calcular a integral indefinida, usamos integração por partes. Escolhemos $u = x^2$ e $dv = \mathrm{sen}(x)\,dx$. Então, $du = 2x\,dx$ e $v = -\cos(x)$.

$$\int x^2\,\mathrm{sen}(x)\,dx = -x^2\cos(x) - \int -2x\cos(x)\,dx$$

Integramos o segundo termo usando novamente integração por partes. Escolhemos $u = -2x$ e $dv = \cos(x)\,dx$. Então, $du = -2\,dx$ e $v = \mathrm{sen}(x)$.

$$\begin{aligned}\int -2x\cos(x)\,dx &= -2x\,\mathrm{sen}(x) - \int -2\,\mathrm{sen}(x)\,dx \\ &= -2x\,\mathrm{sen}(x) - 2\cos(x) + K\end{aligned}$$

Agora, voltamos à primeira expressão

$$\begin{aligned}\int x^2\,\mathrm{sen}(x)\,dx &= -x^2\cos(x) - (-2x\,\mathrm{sen}(x) - 2\cos(x)) + K \\ &= -x^2\cos(x) + 2x\,\mathrm{sen}(x) + 2\cos(x) + K\end{aligned}$$

Agora, usando o Teorema Fundamental do Cálculo-Parte 2

$$\begin{aligned}V &= 2\pi\int_0^\pi x^2\,\mathrm{sen}(x)\,dx \\ &= 2\pi\left(-x^2\cos(x) + 2x\,\mathrm{sen}(x) + 2\cos(x)\right)\Big|_0^\pi \\ &= 2\pi\Big[-\pi^2\cos(\pi) + 2\pi\,\mathrm{sen}(\pi) + 2\cos(\pi) \\ &\qquad - \left(0^2\cos(0) + 2(0)\,\mathrm{sen}(0) + 2\cos(0)\right)\Big]\end{aligned}$$

Lembrando que $\cos(\pi) = -1$ e $\mathrm{sen}(\pi) = 0$, temos

$$V = 2\pi\left(\pi^2 + 2\right) = 2\pi^3 - 8\pi$$

Exercícios Seção 4.1

1) [resp] Calcule as integrais, usando integração por partes

a) $\displaystyle\int x\cos(5x)\,dx$

b) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$

c) $\displaystyle\int t^2\operatorname{sen}(\beta t)\,dt$ onde β é uma constante.

d) $\displaystyle\int (x^2+2x)\cos(x)\,dx$

e) $\displaystyle\int p^5\ln(p)\,dp$

f) $\displaystyle\int \big(\ln(x)\big)^2\,dx$

g) $\displaystyle\int t\sec^2(2t)\,dt$

h) $\displaystyle\int e^{2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx$

i) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\ln(y)}{\sqrt{y}}\,dy$

j) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos(\pi x)\,dx$

k) $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right)e^{-x}\,dx$

l) $\displaystyle\int_1^2 x^4\big(\ln(x)\big)^2\,dx$

m) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$

n) $\displaystyle\int x\operatorname{tg}^2(x)\,dx$. Dica: $\operatorname{tg}^2(x)=1-\sec^2(x)$

2) [resp] Encontre a área sob a curva $y=x\operatorname{sen}(x)$ de 0 a π.

3) [resp] Uma partícula se move ao longo de uma reta com velocidade igual a $v(t)=t^2e^{-t}$ metros por segundo após t segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá nos primeiros t segundos?

4) Calcule as integrais

a) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}(x)dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\big(\ln(x)\big)^2}{x^3}dx$

c) $\displaystyle\int x^3e^x dx$

d) $\displaystyle\int e^{-y}\cos(2y)dy$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}dy$

5) Um arquiteto propôs colocar no piso de uma praça pastilhas coloridas em uma região plana cujo o formato se assemelha (respeitando a escala) a região delimitada simultaneamente pelas quarto curvas $y=\ln(x)$, $y=e^x$, $y=1-x$ e $x=e$. Esboce a região e calcule a área.

6) [resp] Calcule a área entre as curvas $y=x^2e^{-x}$ e $y=xe^{-x}$.

7) [resp] Calcule a integral imprópria $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}dx$.

8) [resp] Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região do primeiro quadrante delimitada pelos eixos coordenados, pela curva $y=e^x$ e pela reta $x=\ln(2)$ em torno da reta $x=\ln(2)$.

9) [resp] Considere a região delimitada pelos gráficos de $y=\ln(x)$ e pela reta $x=\ln(2)$, $y=0$ e $x=e$.

a) Determine a área dessa região.

b) Determine o volume do sólido gerado pela rotação dessa região em torno do eixo das abscissas.

c) Determine o volume do sólido gerado pela rotação dessa região em torno da reta $x=-2$.

10) [resp] Encontre o valor médio de $f(x)=x^2\ln(x)$ no intervalo [1,3].

4.2 Integração por substituição simples

Teorema 4.3: A Regra da substituição

Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I, então

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(u)du$$

Exemplo 4.2.1: Encontre $\displaystyle\int 4x^3\cos\left(x^4+2\right)dx$.

Note que, podemos escrever a integral

$$\int 4x^3\cos\left(x^4+2\right)dx = \int \cos\left(x^4+2\right)4x^3\,dx$$

como o produto de duas funções

$$f(x) = \cos\left(x^4+2\right) \qquad \text{e} \qquad h(x) = 4x^3.$$

Note que f é uma composição de duas funções e a função h é exatamente a derivada da função "de dentro" da composição, ou seja, a derivada de x^4+2. Portanto, nesse caso, a regra da substituição simples parece se encaixar bem.

Fazendo a substituição $u = x^4+2$ temos que a sua diferencial é $du = 4x^3dx$ e usando a regra da substituição temos

$$\begin{aligned}\int 4x^3\cos\left(x^4+2\right)dx &= \int \cos\left(x^4+2\right)4x^3dx \\ &= \int \cos(u)du \\ &= -\operatorname{sen}(u)+C \\ &= -\operatorname{sen}\left(x^4+2\right)+C\end{aligned}$$

◇ Note que, quando usamos a regra da substituição, após integrarmos com relação a variável u temos que voltar para a variável original.

◇ Quando usamos a regra da substituição nossa intenção é transformar uma integral complicada em uma mais simples de ser calculada.

Exemplo 4.2.2: Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

Note que se fizermos a substituição $u = 1 - 4x^2$, então

$$du = -8xdx \Leftrightarrow xdx = -\frac{1}{8}du.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx &= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du \\
&= -\frac{1}{8}\int u^{-1/2}du \\
&= -\frac{1}{8}\left(2\sqrt{u}\right) + C \\
&= -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C
\end{aligned}$$

Exemplo 4.2.3: Calcule $\displaystyle\int \operatorname{tg}(x)dx$

Sabemos que

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)},$$

portanto

$$\int \operatorname{tg}(x)dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}dx$$

Isso nos sugere fazer a substituição $u = \cos(x)$, com isso,

$$du = -\operatorname{sen}(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad -du = \operatorname{sen}(x)dx.$$

Assim, usando a regra da substituição simples

$$\int \operatorname{tg}(x)dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{u}(-du) \\
&= -\int \frac{1}{u}du \\
&= -\ln|\cos(x)| + C \\
&= \ln|\sec(x)| + C
\end{aligned}
$$

EXEMPLO 4.2.4:

a) Encontre $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$.

b) Encontre o valor médio de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ no intervalo $[1, e]$.

a) Primeiro vamos calcular a integral indefinida

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx$$

e depois usaremos o Teorema Fundamental do Cálculo parte 2 para calcular a integral definida.

Para calcular a integral indefinida iremos usar a substituição $u = \ln(x)$ e com isso, $du = \dfrac{1}{x}dx$.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\ln(x)}{x}dx &= \int \ln(x)\frac{1}{x}dx \\
&= \int u du \\
&= \frac{u^2}{2} + C \\
&= \frac{(\ln(x))^2}{2} + C
\end{aligned}
$$

Usando o Teorema fundamental do Cálculo parte 2

$$
\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx &= \left.\frac{\big(\ln(x)\big)^2}{2}\right|_1^e \\
&= \frac{\big(\ln(e)\big)^2}{2} - \frac{\big(\ln(1)\big)^2}{2}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}$$

b) O valor médio de f no intervalo $[1, e]$ é dado por:

$$f_{\text{médio}} = \frac{1}{e-1}\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{1}{e-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2(e-1)}.$$

Exemplo 4.2.5: Determine se a integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx$ é convergente ou divergente.

Usando definição de integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 x^3 e^{-x^4} dx + \lim_{t\to\infty}\int_0^t x^3 e^{-x^4} dx \tag{4.6}$$

Para resolvermos a integral indefinida $\int x^3 e^{-x^4} dx$, usamos a substituição

$$u = -x^4 \Rightarrow du = -4x^3 dx.$$

Logo,

$$\int x^3 e^{-x^4} dx = -\frac{1}{4}\int e^u du = -\frac{1}{4}e^u + C = -\frac{1}{4}e^{-x^4} + C$$

Usando o Teorema Fundamental do cálculo temos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} x^3 e^{-x^4} dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 x^3 e^{-x^4} dx \\ &= \lim_{t\to-\infty} -\frac{1}{4}\left(e^0 - e^t\right) \\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t x^3 e^{-x^4} dx \\ &= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{4}\left(e^t - e^0\right) \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Como uma das integrais do lado direito da equação 4.6 diverge então

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4}\,dx$$

é divergente.

Algumas observações importantes Seja F a primitiva mais geral de f, ou seja,

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

então

$$\int f(kx)dx = \frac{F(kx)}{k} + C.$$

Além disso,

$$\int f(kx+b)dx = \frac{F(kx+b)}{k} + C$$

Ppr exemplo

$$\int \cos(5x)dx = \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + C$$

$$\int e^{8x} = \frac{e^{8x}}{8} + C$$

$$\int \frac{1}{x+3}dx = \ln|x+3| + C$$

Essas observações podem ser demonstradas usando substituição simples.

Exercícios Seção 4.2

1) [resp] Calcule as integrais usando a regra da substituição.

a) $\int x\operatorname{sen}(x^2)\,dx$

b) $\int (x+1)\sqrt{2x+x^2}\,dx$

c) $\int \frac{e^u}{(1+e^u)^2}\,du$

d) $\int \cos^4(x)\operatorname{sen}(x)\,dx$

e) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

f) $\int 5^t\operatorname{sen}(5^t)\,dt$

g) $\int e^{\operatorname{tg}(x)}\sec^2(x)\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\text{arcsen}(x)}$

i) $\displaystyle\int \sqrt{\cot(x)}\,\text{cossec}^2(x)\,dx$

j) $\displaystyle\int \text{sen}(t)\sec^2\big(\cos(t)\big)\,dt$

k) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

l) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{\text{arctg}(x)}{1+x^2}\,dx$

n) $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b}\,,\ a\neq 0$

o) $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\,dt$

p) $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

q) $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{x^2+a^2}\,dx\,,\ a>0$

r) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^4}\,dx$

s) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}$

t) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}}\,dx$

u) $\displaystyle\int_{1/6}^{1/2} \text{cossec}(\pi t)\cot(\pi t)\,dt$

v) $\displaystyle\int_0^1 (3t-1)^{50}\,dt$

w) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{1+7x}\,dx$

x) $\displaystyle\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$

y) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2\,\text{arctg}(3x)+9x^3+x}{(9x^2+1)(x+1)^2}\,dx$

z) $\displaystyle\int \sec^2(\theta)\,\text{tg}^3(\theta)d\theta$

2) [resp] Calcule a área sob a curva dada no intervalo especificado.

a) $y=\text{arctg}(x),\quad 0\leq x\leq 1$

b) $y=\cos(x)\,\text{sen}(\text{sen}(x)),\quad 0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}$

c) $y=\dfrac{\sqrt{u}-2u^2}{u}du,\quad 1\leq u\leq 9$

3) [resp] Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y=\text{tg}(x)$, $y=2\,\text{sen}(x)$, $-\dfrac{\pi}{3}\leq x\leq\dfrac{\pi}{3}$

4) [resp] Primeiro faça uma substituição e então use integração por partes para calcular a integral

a) $\displaystyle\int \cos(\sqrt{x})dx$

b) $\displaystyle\int \text{sen}(\ln x)dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos(t)}\,\text{sen}(2t)dt$

d) $\displaystyle\int \text{arctg}\left(\sqrt{x}\right)\,dx$

5) [resp] Decida qual método usar e calcule as integrais (Substituição ou integração por partes). Pode ser que você precise usar as duas técnicas no mesmo exercício.

a) $\displaystyle\int \cos(x)(1+\text{sen}^2(x))dx$

b) $\displaystyle\int e^{x+e^x}dx$

c) $\displaystyle\int_1^3 x^4\ln(x)dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} t\,\text{sen}(2t)dt$

e) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}dx$

f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^{\text{arctg}(x)}}{1+x^2}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

h) $\displaystyle\int x^5e^{-x^3}dx$

i) $\displaystyle\int_0^1 \text{arcsen}(x)dx$

j) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln(\sqrt{x})dx$

6) [resp] Se f é uma função contínua no intervalo $[a,b]$, o valor médio de f é definido como

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Encontre o valor médio das seguinte função $f(x) = x\sec^2(x)$ no intervalo $[0, \pi/4]$.

7) [resp] Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule aquelas que são convergentes.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 ze^{2z}dz$

d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x}dx$

e) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

4.3 Integrais Trigonométricas

Fórmulas úteis de trigonometria

1. Relação fundamental

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

2. Decorrências da relação fundamental

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$
$$1 + \cot^2(x) = \operatorname{cossec}^2(x)$$

3. Arco duplo

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

4. Arco metade

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big)$$
$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\big(1+\cos(2x)\big)$$

Estratégias para calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)dx$

1. Se a potência de $\operatorname{sen}(x)$ for ímpar:
   (a) Guarda um fator $\operatorname{sen}(x)$ e use que $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.
   (b) Faça a substituição $u = \cos(x)$.
2. Se a potência de $\cos(x)$ for ímpar:
   (a) Guarda um fator $\cos(x)$ e use que $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$.
   (b) Faça a substituição $u = \operatorname{sen}(x)$.
3. Se as potências de seno e cosseno forem pares, use uma das transformações:

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big) \qquad \text{ou} \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big)$$

Algumas vezes a transformação $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ pode ser útil.

Estratégias para calcular $\displaystyle\int \operatorname{tg}^m(x)\sec^n(x)dx$:

1. Se a potência da $\sec(x)$ é par ($n = 2k$, $k \geq 2$).
   (a) Guarda um fator $\sec^2(x)$ e use que $\sec^2(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$.
   (b) Faça a substituição $u = \operatorname{tg}(x)$.
2. Se a potência de $\operatorname{tg}(x)$ for ímpar:
   (a) Guarda um fator $\sec(x)\operatorname{tg}(x)$ e use que $\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$.
   (b) Faça a substituição $u = \sec(x)$.

   Note que a mesma ideia pode ser usada para integrais do tipo

$$\int \cot^m(x)\operatorname{cossec}^m(x)dx$$

3. Os outros casos não tem uma regra geral e requer manipulações trigonométricas específicas para cada caso.

Exemplo 4.3.1: Calcule $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^2(x)dx$

Aqui, temos uma integral do tipo $\displaystyle\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)dx$ e a potência de $\operatorname{sen}(x)$ é ímpar, por isso, guardamos um fator $\operatorname{sen}(x)$ e usamos a transformação $\operatorname{sen}^2(x) =$

$1 - \cos^2(x)$, decorrente da relação fundamental. Assim,

$$\operatorname{sen}^3(x)\cos^2(x) = \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)\operatorname{sen}(x) = (1-\cos^2)cos^2(x)\operatorname{sen}(x)$$

e podemos reescrever a integral

$$\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^2(x)dx = \int \left(1-\cos^2\right) cos^2(x)\operatorname{sen}(x)dx$$

Usando a substituição simples $u = \cos(x)$, temos que $du = -\operatorname{sen}(x)dx$ e, assim,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^2(x)dx &= \int \left(1-\cos^2(x)\right)\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)dx \\ &= \int (1-u^2)u^2(-du) \\ &= -\int u^2 - u^4 du \\ &= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C \\ &= \frac{\cos^3(x)}{3} - \frac{\cos^5(x)}{5} + C\end{aligned}$$

Vamos pensar um pouco sobre o porque que esse procedimento que fizemos é adequado. Você poderia questionar: Por que não usamos a transformação $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$? Bom, caso fizéssemos essa mudança, teríamos a seguinte integral resultante

$$\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^2(x)dx = \int \operatorname{sen}^3(x)\left(1-\operatorname{sen}^2(x)\right)dx = \int \left[\operatorname{sen}^3(x) - \operatorname{sen}^5(x)\right]dx$$

ou seja, teríamos uma expressão em termos de $\operatorname{sen}(x)$ sem nenhum fator extra $\cos(x)$ necessário para usarmos substituição simples.

Exemplo 4.3.2: Encontre $\displaystyle\int \cos^3(x)dx$

Aqui temos uma integral que envolve apenas potência de $\cos(x)$, mas mesmo assim usamos o mesmo procedimento. Como o expoente do $\cos(x)$ é ímpar, então guardamos um fator $\cos(x)$ e usamos a transformação $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$ e assim, usamos a substituição simples

$$u = \operatorname{sen}(x)dx \Leftrightarrow du = \cos(x)dx.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\int \cos^3(x)dx &= \int \cos^2(x)\cos(x)dx \\
&= \int \left(1 - \operatorname{sen}^2(x)\right)\cos(x)dx \\
&= \int \left(1 - u^2\right) du \\
&= u - \frac{u^3}{3} + C \\
&= \cos(x) - \frac{\cos^3(x)}{3} + C
\end{aligned}$$

Exemplo 4.3.3: Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(x)dx$

Aqui temos apenas uma potência par de $\operatorname{sen}(x)$, portanto usamos a transformação $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(x)dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \big(1 - \cos(2x)\big)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right]\Bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\pi - \frac{\operatorname{sen}(2\pi)}{2}\right) - \left(0 - \frac{\operatorname{sen}(0)}{2}\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade decorre do Teorema fundamental do cálculo.

Exemplo 4.3.4: Calcule $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)dx$

Como aqui tanto a potência do $\operatorname{sen}(x)$ quanto a potência do $\cos(x)$ são pares, vamos usar as transformações do arco metade. Assim,

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)dx = \int \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)\frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big)dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \big(1 - \cos^2(2x)\big) dx$$

Precisamos mais uma vez usar a fórmula do arco metade escrevendo $\cos^2(2x) = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(4x)\big)$, portanto:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)dx &= \frac{1}{4}\int \big(1-\cos^2(2x)\big)dx \\ &= \frac{1}{4}\int 1 - \frac{1}{2}\big(1+\cos(4x)\big)dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(4x)\right) + C \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.5: Encontre $\int \operatorname{tg}^6(x)\sec^4(x)dx$

Nesse exercícios vamos separar um fator $\sec^2(x)$ e expressar $\sec^2(x)$ em termos da tangente, usando a identidade $\sec^2(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$. O próximo passo é usar substituição $u = \operatorname{tg}(x)$, de modo que $du = \sec^2(x)dx$:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^6(x)\sec^4(x)dx &= \int \operatorname{tg}^6(x)\sec^2(x)\sec^2(x)dx \\ &= \int \operatorname{tg}^6(x)\big(1+\operatorname{tg}^2(x)\big)\sec^2(x)dx \\ &= \int u^6\left(1+u^2\right)du \\ &= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C \\ &= \frac{\operatorname{tg}^7(x)}{7} + \frac{\operatorname{tg}^9(x)}{9} + C \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.6: Encontre $\int \operatorname{tg}^5(x)\sec^7(x)dx$

Nesse caso, temos que a potência de $\operatorname{tg}(x)$ é ímpar, então guardamos o fator $\sec(x)\operatorname{tg}(x)$ e usamos a transformação $\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$. Para resolvermos a integral resultante usamos a substituição $u = \sec(x)$, donde $du = \sec(x)\,\mathrm{tg}(x)dx$

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{tg}^5(x)\sec^7(x)dx &= \int \mathrm{tg}^4(x)\sec^6(x)\sec(x)\,\mathrm{tg}(x)dx \\
&= \big(\mathrm{tg}^2(x)\big)^2\sec^6(x)\sec(x)\,\mathrm{tg}(x)dx \\
&= \int \big(\sec^2(x)-1\big)^2\sec^6(x)\sec(x)\,\mathrm{tg}(x)dx \\
&= \int \big(u^2-1\big)^2 u^6 du \\
&= \int \big(u^4-2u^2+1\big) u^6 du \\
&= \int u^{10}-2u^8+u^6 du \\
&= \frac{u^{11}}{11}-\frac{2u^9}{9}+\frac{u^7}{7}+C \\
&= \frac{\sec^{11}(x)}{11}-\frac{2\sec^9(x)}{9}+\frac{\sec^7(x)}{7}+C
\end{aligned}$$

Exemplo 4.3.7: Calcule $\int \mathrm{tg}^3(x)dx$

Aqui temos apenas o termo $\mathrm{tg}(x)$, então usamos $\mathrm{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$ para reescrever o fator $\mathrm{tg}^2(x)$ em termos de $\sec^2(x)$

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{tg}^3(x)dx &= \int \mathrm{tg}(x)\,\mathrm{tg}^2(x)dx \\
&= \int \mathrm{tg}(x)\big(\sec^2(x)-1\big)dx \\
&= \int \mathrm{tg}(x)\sec^2(x)dx - \int \mathrm{tg}(x)dx
\end{aligned}$$

Para calcularmos

$$\int \mathrm{tg}(x)\sec^2(x)dx$$

usamos a substituição simples $u = \mathrm{tg}(x)$, de modo que $du = \sec^2(x)dx$ e assim,

$$\int \mathrm{tg}(x)\sec^2(x)dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2}+C = \frac{\mathrm{tg}^2(x)}{2}\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^3(x)dx &= \int \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}^2(x)dx\\ &= \int \operatorname{tg}(x)\big(\sec^2(x)-1\big)dx\\ &= \int \operatorname{tg}(x)\sec^2(x)dx - \int \operatorname{tg}(x)dx\\ &= \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2} - \ln|\sec(x)| + C\end{aligned}$$

Exercícios Seção 4.3

1) [resp] Calcule as integrais.

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^2(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^6(x)\cos^3(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7(x)\cos^5(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{3}\right)\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4(2t)\,dt$

f) $\displaystyle\int t\operatorname{sen}^2(t)\,dt$

g) $\displaystyle\int \cos(\theta)\cos^5\big(\operatorname{sen}(\theta)\big)\,d\theta$

h) $\displaystyle\int \cos^2(x)\operatorname{sen}(2x)\,dx$

i) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4(x)\sec^6(x)\,dx$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^5(x)\sec^4(x)\,dx$

k) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(8x)\cos(5x)\,dx$

l) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{\cos^3(\phi)}\,d\phi$

m) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5(x)\,dx$

n) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot^2(x)\,dx$

2) [resp] Uma partícula se move em linha reta com função velocidade $v(t) = \operatorname{sen}(\omega t)\cos^2(\omega t)$. Encontre a sua função posição $s = f(t)$ se $f(0) = 0$.

3) [resp] Determine se a $\displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{sen}^2(x)dx$ integral é convergente ou divergente. Caso seja convergente, calcule o valor dessa integral.

4) [resp] Nos exercícios seguintes encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas e encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno dos eixos especificados:

a) $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = 0$, $\dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi$, em torno do eixo x.

b) $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$, em torno de $y = 1$.

5) [resp] Encontre o valor médio de $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)$ no intervalo $[-\pi,\pi]$.

6) Considere a região do primeiro quadrante delimitada pelos eixos coordenadas e pela curva $f(x) = \cos(x)$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

a) Encontre a área dessa região.

b) Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação dessa região em torno do eixo x.

c) Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação dessa região em torno do eixo y.

d) Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação dessa região em torno do da reta $x = \dfrac{\pi}{2}$.

4.4 Integração por Substituição Trigonométrica

Quando tentamos resolver a integral

$$\int x\sqrt{a^2 - x^2}dx,$$

podemos usar uma substituição simples $u = a^2 - x^2$.

No geral fazemos a seguinte mudança

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Para a integral

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

não conseguimos fazer a substituição simples

Nesse caso fazemos uma substituição "inversa" $x = a\,\mathrm{sen}(\theta)$, assim:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)}\,a\cos(\theta)\,d\theta\\ &= \int \sqrt{a^2\big(1 - \mathrm{sen}^2(\theta)\big)}\,\cos(\theta)\,d\theta\\ &= \int a^2\cos^2(\theta)d\theta\end{aligned}$$

Nesse caso geral temos

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(\theta)\big)g'(\theta)\,d\theta$$

Podemos fazer a substituição inversa desde que g seja injetiva.

No nosso caso podemos fazer a substituição inversa $x = a\,\mathrm{sen}(\theta)$, desde que essa função seja injetora. Isso pode ser conseguido se restringirmos θ ao intervalo

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Nessa seção estudaremos a técnica de substituição trigonométrica e ela serve para integrar funções que tem uma “raiz” e não conseguimos usar nenhuma das técnicas estudadas até aqui. A Tabela 4.1 apresenta os casos onde usaremos a substituição trigonométrica.

Tabela 4.1: Substituições Trigonométricas

Expressão	Substituição		Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\,\mathrm{sen}(\theta)$	$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$	$1 - \mathrm{sen}^2(\theta) = \cos^2(\theta)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\,\mathrm{tg}(\theta)$	$-\pi/2 < \theta < \pi/2$	$1 + \mathrm{tg}^2(\theta) = \sec^2(\theta)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec(\theta)$	$0 \leq \theta < \pi/2$ $\pi \leq \theta < 3\pi/2$	$\sec^2(\theta) - 1 = \mathrm{tg}^2(\theta)$

Exemplo 4.4.1: Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}dx$

Note que aqui temos uma integral que envolve a raiz

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{3^2 - x^2}$$

então vamos fazer a substituição $x = a\,\mathrm{sen}(\theta)$, onde $a = 3$.

Seja $x = 3\,\mathrm{sen}(\theta)$, com $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$. Então $dx = 3\cos(\theta)d\theta$. Assim,

$$I = \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{\sqrt{9 - 9\,\mathrm{sen}^2(\theta)}}{9\,\mathrm{sen}^2(\theta)} 3\cos(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{9(1-\mathrm{sen}^2(\theta))}}{\mathrm{sen}^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta
\end{aligned}
$$

Usando agora que $1 - \mathrm{sen}^2(x) = \cos^2(x)$

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{9\cos^2(x)}}{\mathrm{sen}^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{3\cos(\theta)}{\mathrm{sen}^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta \\
&= \int \frac{\cos^2(\theta)}{\mathrm{sen}^2(\theta)}d\theta \\
&= \int \cot^2(\theta)d\theta
\end{aligned}
$$

Usando $\mathrm{cossec}^2(\theta) - 1 = \cot^2(\theta)$ temos

$$
\begin{aligned}
I &= \int (\mathrm{cossec}^2(\theta) - 1)d\theta \\
&= -\cot(\theta) - \theta + C
\end{aligned}
$$

Agora precisamos voltar para a variável original x, ou seja, é necessário expressar $\cot(\theta)$ e θ em função de x. Ora, temos que

$$
x = 3\,\mathrm{sen}(\theta) \Rightarrow \mathrm{sen}(\theta) = \frac{x}{3}.
$$

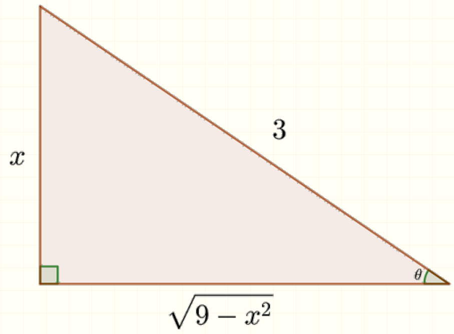
Se interpretarmos θ como um ângulo de um triângulo retângulo então podemos escolher x como o cateto oposto e 3 como hipotenusa, uma vez que $\mathrm{sen}(\theta) = \dfrac{x}{3}$. O Teorema de Pitágoras nos dá que o cateto adjacente é $\sqrt{9-x^2}$. Assim,

$$
\cot(\theta) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}
$$

Embora no diagrama $\theta > 0$, essa expressão para $\cot(\theta)$ também é válida para $\theta < 0$. Uma vez que $\mathrm{sen}(\theta) = \dfrac{x}{3}$ e $y = \mathrm{sen}(\theta)$ é injetiva no intervalo

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ então $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{3}\right)$, logo

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\cot(\theta) - \theta + C = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$



Durante a resolução do exercício usamos que $\sqrt{\cos^2(\theta)} = \cos(\theta)$, fizemos isso porque $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e $\cos(x)$ é não-negativo nesse intervalo, assim, $|\cos(x)| = \cos(x)$, nesse caso.

EXEMPLO 4.4.2: Encontre $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$

Fazendo a substituição trigonométrica $x = 2\operatorname{tg}(\theta)$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos que $dx = 2\sec^2(\theta)d\theta$. Assim,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx \\
&= \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\theta)\sqrt{4\operatorname{tg}^2(\theta)+4}}2\sec^2(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta)\sqrt{4(1+\operatorname{tg}^2(\theta))}}d\theta
\end{aligned}$$

Usando $1 + \operatorname{tg}^2(\theta) = \sec^2(\theta)$

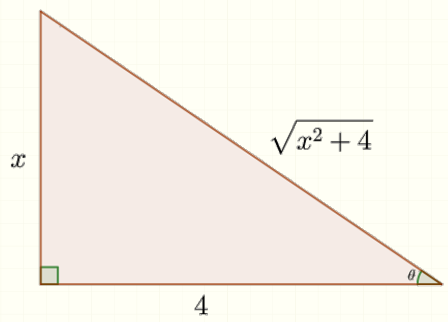
$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta)\sqrt{4\sec^2(\theta)}}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta)2\sec(\theta)}d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\sec(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta)}d\theta
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\dfrac{1}{\cos(\theta)}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)}d\theta$$

Usando a substituição $u = \operatorname{sen}(\theta)$ temos que $du = \cos(\theta)d\theta$, logo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)}d\theta &= \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{u} + C \\
&= \frac{1}{4\operatorname{sen}(\theta)} + C \\
&= \frac{-\operatorname{cossec}(\theta)}{4} + C
\end{aligned}$$

Usando a informação que $x = 2\operatorname{tg}(\theta) \Rightarrow \operatorname{tg}(\theta) = \frac{x}{2}$ e olhando o diagrama



temos que $\operatorname{cossec}(\theta) = \frac{x^2+4}{x}$. Assim,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C.$$

Exemplo 4.4.3: Encontre $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, onde $a > 0$.

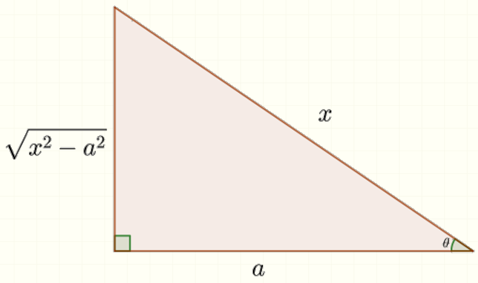
Aqui usamos a substituição trigonométrica $x = a\sec(\theta) \Rightarrow dx = a\sec(\theta)\operatorname{tg}(\theta)d\theta$, onde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ &= \int \frac{a\sec(\theta)\operatorname{tg}(\theta)d\theta}{\sqrt{a^2\sec^2(\theta) - a^2}} \\ &= a\int \frac{\sec(\theta)\operatorname{tg}(\theta)d\theta}{\sqrt{a^2(\sec^2(\theta) - 1)}} \end{aligned}$$

Usando $\sec^2(\theta) - 1 = \operatorname{tg}^2(\theta)$

$$\begin{aligned} I &= a\int \frac{\sec(\theta)\operatorname{tg}(\theta)d\theta}{a\sqrt{\operatorname{tg}^2(\theta)}} \\ &= \int \frac{\sec(\theta)\operatorname{tg}(\theta)d\theta}{\operatorname{tg}(\theta)} = \int \sec(\theta)d\theta \\ &= \ln|\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)| + C \end{aligned}$$

Já temos que $\sec(\theta) = \frac{x}{a}$ e usando o triângulo da figura



temos que $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$. Logo,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| + C$$

Durante a resolução do exercício usamos o fato que $\int \sec(x)dx = \ln|\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C$, para demonstrar esse fato multiplicamos o numerador e o denominador por $\sec(x) + \operatorname{tg}(x)$, assim

$$\int \sec(x)dx = \int \sec(x)\frac{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)}dx = \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x)\operatorname{tg}(x)}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)}dx$$

Usando a substituição $u = \sec(x) + \operatorname{tg}(x)$ temos que $du = (\sec(x)\operatorname{tg}(x) + \sec^2(x))dx$.

Então,

$$\int \sec(x)dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C$$

O próximo exemplo nos mostra que mesmo quando as substituições trigonométricas são possíveis, elas nem sempre nos dão a solução mais fácil. Você deve primeiro procurar um método mais simples.

Exemplo 4.4.4: Encontre $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

Aqui poderíamos pensar em usar a substituição trigonométrica $x = 2\operatorname{tg}(\theta)$ (e até pode), no entanto, fazer a substituição simples $u = x^2 + 4$ é mais fácil, uma vez que $du = 2xdx$ e

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+4} + C$$

Muitas vezes precisamos usar mais de uma técnica ou a mesma técnica de integração para resolver uma integral. O próximo exemplo ilustra uma situação dessa.

Exemplo 4.4.5: Calcule $\displaystyle\int x \operatorname{arcsen}(x)dx$

Vamos começar resolvendo a integral usando integração por partes. Chame $u = \operatorname{arcsen}(x)$ e $dv = xdx$, de modo que $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ e $v = \frac{x^2}{2}$. Assim, usando integração por partes,

$$\int x \operatorname{arcsen}(x)dx = \frac{x^2 \operatorname{arcsen}(x)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{4.7}$$

Para resolvermos a integral $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$, usaremos a substituição trigonométrica $x = \operatorname{sen}(\theta)$, assim $dx = \cos(\theta)d\theta$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Portanto,

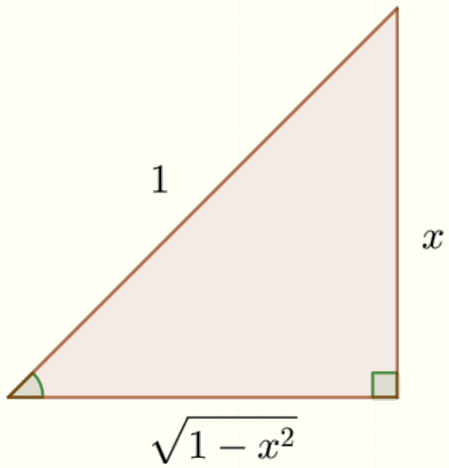
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}} \\ &= \int \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta)}{\sqrt{\cos^2(\theta)}}\end{aligned}$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta)}{\cos(\theta)} d\theta$$
$$= \int \operatorname{sen}^2(\theta) d\theta$$

Sabendo que $\operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$, chegamos que

$$\int \operatorname{sen}^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2}\int (1 - \cos(2\theta))$$
$$= \frac{1}{2}(\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2})$$
$$= \frac{1}{2}(\theta - \frac{2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{2})$$
$$= \frac{1}{2}(\theta - \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)) + C.$$

Já sabemos que $x = \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow \theta = \operatorname{arcsen}(x)$. Do triângulo



tiramos que $\cos(\theta) = \sqrt{1-x^2}$. Assim,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}(\theta - \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta))$$
$$= \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen}(x) - x\sqrt{1-x^2}) + C$$

Voltando para (4.7), obtemos

$$\int x \operatorname{arcsen}(x) dx = \frac{x^2 \operatorname{arcsen}(x)}{2} - \frac{1}{4}(\operatorname{arcsen}(x) - x\sqrt{1-x^2}) + C.$$

Exemplo 4.4.6: Calcule $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-6t+13}}$

Aqui não temos nenhuma expressão como aquelas da tabela de substituições trigonométricas. No entanto, temos uma raiz no denominador. Vamos manipular a expressão dentro da raiz para chegarmos em uma das expressões da tabela.

Note que, completando quadrado temos

$$t^2-6t+13=(t-3)^2-9+13=(t-3)^2+4.$$

Fazendo a substituição trigonométrica $u=t-3 \Rightarrow du=dt$, obtemos

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-6t+13}}=\int \frac{dt}{\sqrt{(t-3)^2+4}}=\int \frac{du}{\sqrt{u^2+4}}=\int \frac{du}{\sqrt{u^2+2^2}}$$

Agora, temos uma integral que envolve uma daquelas expressões que aparece na tabela de substituições trigonométricas. Portanto, fazendo a substituição trigonométrica $u=2\,\text{tg}(\theta) \Rightarrow du=2\sec^2(\theta)d\theta$. Assim,

$$\begin{aligned} I\int \frac{du}{u^2+2^2} &= \int \frac{2\sec^2(\theta)}{\sqrt{4\,\text{tg}^2(\theta)+4}}d\theta \\ &= \int \frac{2\sec^2(\theta)}{2\sqrt{(\text{tg}^2(\theta)+1)}}d\theta \end{aligned}$$

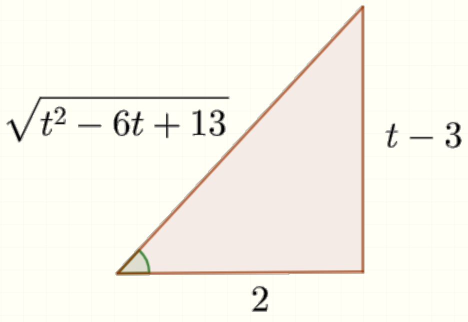
Usando $\text{tg}^2(\theta)+1=\sec^2(\theta)$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2\sec^2(\theta)}{2\sec(\theta)}d\theta \\ &= \int \sec(\theta)d\theta \\ &= \ln|\sec(\theta)+\text{tg}(\theta)|+K \end{aligned}$$

Já temos que

$$u=2\,\text{tg}(\theta) \Rightarrow \text{tg}(\theta)=\frac{u}{2}=\frac{t-3}{2},$$

então pela figura



temos que $\sec(\theta) = \dfrac{2}{\sqrt{t^2-6t+13}}$. Assim,

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-6t+13}} = \ln\left|\sec(\theta) = \frac{2}{\sqrt{t^2-6t+13}} + \frac{t-3}{2}\right| + K.$$

Exercícios Seção 4.4

1) [resp] Use substituição trigonométrica para calcular as integrais

a) $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$

b) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t^3(\sqrt{t^2}-1)}dt$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}dx$

d) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$

e) $\displaystyle\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2+2}}dt$

f) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{x^5\sqrt{9x^2-1}}dx$

g) $\displaystyle\int \sqrt{5+4x-x^2}dx$

h) $\displaystyle\int \frac{t^2}{\sqrt{t^2-6t+13}}dt$

2) Calcule $\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)dx$ por quatro métodos.

a) Use a substituição $u = \cos(x)$.

b) Use a substituição $u = \operatorname{sen}(x)$.

c) Use a identidade $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$.

d) Use integração por partes.

3) Use primeiro uma substituição e depois uma substituição trigonométrica para calcular a integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}}dx$.

4) Use substituição trigonométrica para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

5) [resp] Calcule o valor médio da função $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, $1 \le x \le 7$.

6) [resp] A parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide o disco $x^2+y^2 \le 8$ em duas partes. Encontre a área de ambas as partes.

7) [resp] Verifique se a integral imprópria $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-2x}dx$ é convergente e em caso afirmativo calcule seu valor.

4.5 Integração por Frações Parciais

- Seja F a primitiva mais geral de f, ou seja, $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + c$, então $\displaystyle\int f(kx)dx = \frac{F(kx)}{k} + C$.
- Além disso, $\displaystyle\int f(kx+b)dx = \frac{F(kx+b)}{k} + C$.
- $\displaystyle\int \cos(5x)dx = \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + C$.
- $\displaystyle\int e^{8x} = \frac{e^{8x}}{8} + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x+3}dx = \ln|x+3| + C$.

Suponha que queremos calcular a integral $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$. Podemos reescrever

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \int \frac{\frac{1}{a^2}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}dx$$

Usando a substituição $u = \frac{x}{a}$, temos que $du = \frac{1}{a}dx \Longrightarrow dx = adu$. Assim,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(u) + K = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + K.$$

Portanto,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + K.$$

Iremos usar essa integral ao longo dos exemplos.

MÉTODO DAS FRAÇÕES PARCIAIS

- Método para integrar funções racionais, ou seja, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinômios.
- Se o grau de P for maior ou igual que o grau de Q, precisamos de uma etapa preliminar que é efetuar a divisão de P por Q.
- Feito isso, o próximo passo é fatorar $Q(x)$ ao máximo;

◇ Expandir f em frações parciais e determinar os coeficientes.

Casos a serem analisados.

Caso 1

$Q(x)$ é o produto de m fatores lineares distintos, isto é, $Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\ldots(a_mx + b_m)$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(a_1x + b_1)} + \frac{A_2}{(a_2x + b_2)} + \cdots + \frac{A_m}{(a_mx + b_m)}$$

Por exemplo,

$$\frac{x-1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

Caso 2

$Q(x)$ é o produto de m fatores lineares e alguns dos fatores são repetidos. Para simplificar, suponha que o primeiro fator linear $(a_1x + b_1)$ seja repetido

$$\frac{A_1}{(a_1x + b_1)} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_i}{(a_1x + b_1)^i}$$

Por exemplo,

$$\frac{x^3 - x - 2}{x^3(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1}$$

Caso 3

$Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis que não se repetem. Se $Q(x)$ contém um fator $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então $\frac{P(x)}{Q(x)}$ tem um fator na forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Por exemplo,

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$$

Caso 4

$Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos. Se $Q(x)$ contém um fator $(ax^2+bx+c)^r$, onde $b^2-4ac<0$, então ao invés de uma fração parcial temos a seguinte decomposição

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$$

Por exemplo,

$$\frac{2x}{(x-9)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-9} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$$

Exemplo 4.5.1: Calcule a integral $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$

Uma vez que o grau do numerador é maior que o grau do denominador, precisamos fazer a etapa preliminar, que é efetuar a divisão de polinômios.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx &= \int x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\,dx \\ &= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+C\end{aligned}$$

Nesse exemplo a etapa preliminar já resolveu o nosso problema.

Exemplo 4.5.2: Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

Nesse caso, o grau do numerador é menor que o grau do denominador, então não precismos fazer a etapa preliminar. Então, o próximo passo é fatorar o denominador.

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = 2x(x - \frac{1}{2})(x+2) = x(2x-1)(x+2)$$

Temos o primeiro caso, uma vez que o denominador de produto de fatores lineares distintos. Assim, a decomposição em frações parciais do integrando tem a forma.

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

A fim de determinamos os valores de A,B e C, multiplicamos ambos os lados da equação pelo MMC dos denominadores, $x(2x-1)(x+2)$, obtendo

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 1 &= A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1) \\ &= (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A \end{aligned}$$

Usando a identidade de polinômios, igualamos os coeficientes de cada termo, por exemplo, o coeficiente de x^2 do lado direito, $2A + B + 2C$ deve ser igual ao coeficiente de x^2 do lado esquerdo, ou seja, 1. Prosseguindo assim, temos o seguinte sistemas de equação

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - C &= 2 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

Resolvendo, encontramos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ e $C = -\frac{1}{10}$, e assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx &= \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C \end{aligned}$$

Exemplo 4.5.3: Calcule $\displaystyle\int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$.

Note que novamente não precisamos fazer a etapa preliminar. As raízes do polinômio $x^3 - x^2 - x + 1$ são $x = 1$, com multiplicidade 2 e $x = -1$. Assim,

$$x^3 - x^2 - x - 2 = (x-1)^2(x+1)$$

Como o fator linear $x-1$ aparece duas vezes, temos que a decomposição em frações parciais é dada por

$$\frac{4x}{x^3-x^2-x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

Multiplicando essa expressão pelo mínimo múltiplo comum $(x-1)^2(x+1)$, obtemos

$$\begin{aligned}4x &= A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2\\ &= (A+C)x^2+(B-2C)x+(-A+B+C)\end{aligned}$$

Assim, para acharmos os coeficientes A,B e C precisamos resolver o sistema

$$\begin{aligned}A+C&=0\\ B-2C&=4\\ -A+B+C&=0\end{aligned}$$

Cuja solução é $A=1$, $B=2$ e $C=-1$. Assim,

$$\begin{aligned}\int\frac{4x}{x^3-x^2-x-2}dx &= \int\left[\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}\right]dx\\ &= \ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\ln|x+1|+C\\ &= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{2}{x-1}+C\end{aligned}$$

EXEMPLO 4.5.4: Encontre $\displaystyle\int\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx$.

Note que $x^3+4x=x(x^2+4)$, então temos que o denominador é o produto de um fator linear com um fator quadrático irredutível. Portanto,

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Multiplicando por $x(x^2+4)$, temos

$$\begin{aligned}2x^2-x+4 &= A(x^2+4)+(Bx+C)x\\ &= (A+B)x^2+Cx+4A\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes, temos o seguinte sistema

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4$$

Assim, temos que $A = 1$, $B = 1$ e $C = -1$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}\right) dx \\ &= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C\end{aligned}$$

Onde para resolver a integral $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}dx$ usamos a integração por substituição simples, tomando $u = x^2 + 4$, de modo que $du = 2xdx$ e para calcular $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}$ usamos a fórmula

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + K,$$

com $a = 4$.

Exemplo 4.5.5: Calcule $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3\cos(x)}dx$.

Note que aqui não temos,a princípio uma função racional. Vamos começar a resolver essa integral usando a substituição simples $u = \cos(x)$, de modo que $du = -\operatorname{sen}(x)dx \to -du = \operatorname{sen}(x)dx$. Assim,

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3\cos(x)}dx = \int \frac{-du}{u^2 - 3u} = -\int \frac{1}{u(u-3)}du$$

Agora temos uma função racional em u. Expandindo em frações parciais, temos

$$\frac{1}{u(u-3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-3}$$

Multiplicando pelo mínimo múltiplo comum $u(u-3)$ temos:

$$1 = A(u-3) + Bu = (A+B)u - 3A$$

Assim, temos que $A = -\frac{1}{3}$ e $B = \frac{1}{3}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3\cos(x)}dx &= \int \frac{-du}{u^2 - 3u} \\ &= -\int \frac{1}{u(u-3)}du \\ &= -\int -\frac{1}{3}\frac{1}{u} + \frac{1}{3}\frac{1}{u-3} \\ &= \frac{1}{3}\ln|u| - \frac{1}{3}\ln|u-3| + C \\ &= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u}{u-3}\right| + C \\ &= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\cos(x)}{\cos(x)-3}\right| + C\end{aligned}$$

Exercícios Seção 4.5

1) [resp] Usando frações parciais, calcule as seguintes integrais.

a) $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1}dx$

c) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3+2x^2}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2}dx$

e) $\displaystyle\int \frac{10}{(x-2)(x^2+9)}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^3-x+6}{x^3+3x}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}dx$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+4)^2}dx$

j) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+1}{x^3-x}dx$

2) [resp] Faça uma substituição simples para expressar o integrando como uma função racional e então calcule a integral $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}dx$.

3) Faça uma substituição simples para expressar o integrando como uma função racional e então calcule a integral $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+1)}dx$.

4) [resp] Use integração por partes, juntamente com frações parciais para resolver a integral $\int \ln(x^2-x+2)dx$.

5) [resp] Encontre a área da região sob a curva $y = \frac{x^2+1}{3x-x^2}$ de $x=1$ até $x=2$.

6) [resp] Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule aquelas que são convergentes.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{v^2+2v-3}dv$

b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}dx$

7) A integral $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2}dx$ pode ser resolvida usando primeiro uma integração por partes, depois frações parciais e por fim, é necessário usar uma substituição simples. Resolva essa integral. Além disso, mostre que a integral $\int_1^{\infty} \frac{\text{arctg}(x)}{x^2}dx$ é convergente e vale $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

Revisão de Técnicas de Integração

Os dois próximos exercícios são muito importantes para que vocês possam pegar a manha de qual técnica utilizar, uma vez que você tera que decidir qual(is) técnicas usar.

8) [resp] Nos itens a seguir, decida qual técnica usar e depois calcule a integral.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\text{arctg}(x)}}{1+x^2}dx$

b) $\displaystyle\int \text{sen}^5(x)\cos^4(x)dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos^3(x)\,\text{sen}(x)}{(9-\cos^2(x))^{\frac{5}{2}}}dx$

e) $\displaystyle\int_1^3 r^4\ln(r)dr$

f) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x-1}{x^2-4x+5}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$

h) $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^3(x)\sec^2(x)dx$

j) $\displaystyle\int \arccos(x)dx$

k) $\displaystyle\int t\,\text{sen}(t)\cos(t)dt$

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-1}}dx$

m) $\displaystyle\int \text{tg}^5(x)dx$

9) Calcule as Integrais. Em cada um dos itens você poderá de usar mais de uma técnica ou até a mesma técnica mais de uma vez,

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos^2(t)dt$

b) $\displaystyle\int x\arccos(x)dx$

c) $\displaystyle\int \frac{cos^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\ \text{cossec}(\sqrt{x})}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{r}{\sqrt{r^2-2r}}dr$

e) $\displaystyle\int x^5e^{-x^3}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{\sec(\theta)\,\text{tg}(\theta)}{\sec^2(\theta)-\sec(\theta)}d\theta$

h) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+(\ln(x))^2}}dx$

i) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^{2x}+6e^x+10)^{\frac{3}{2}}}dx$

j) $\displaystyle\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x-8}dx$

4.6 Revisão

1) [resp] Calcule as Integrais, usando as técnicas estudadas em sala.

a) $\displaystyle\int x\cos(5x)dx$

b) $\displaystyle\int p^5\ln(p)dp$

c) $\displaystyle\int \arccos(x)dx$

d) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\ln(y)}{\sqrt{y}}dy$

e) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}dx$

f) $\displaystyle\int x\,\text{sen}(x^2)dx$

g) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

h) $\displaystyle\int e^{\text{tg}(x)}\sec^2(x)dx$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\text{arcsen}(x)}$

j) $\displaystyle\int \text{sen}(t)\sec^2(\cos(t))dt$

k) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+1}dx$

l) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}}$

m) $\displaystyle\int_0^1 (3t-1)^{50}dt$

n) $\displaystyle\int \text{sen}^6(x)\cos^3(x)dx$

o) $\displaystyle\int_0^\pi cos^4(2t)dt$

p) $\displaystyle\int \cos(\theta)\cos^5(\text{sen}(\theta))d\theta$

q) $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$

r) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t^3(\sqrt{t^2}-1)}dt$

s) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}dx$

t) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$

u) $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}dx$

v) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1}dx$

w) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3+2x^2}dx$

x) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2}dx$

y) $\displaystyle\int \frac{10}{(x-2)(x^2+9)}dx$

2) Calcule as Integrais. Em cada um dos itens você poderá de usar mais de uma técnica ou até a mesma técnica mais de uma vez,

a) $\displaystyle\int_0^\pi t\cos^2(t)dt$

b) $\displaystyle\int x\arccos(x)dx$

c) $\displaystyle\int \frac{cos^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\,cossec(\sqrt{x})}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}dx$

e) $\displaystyle\int x^5e^{-x^3}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{\sec(\theta)\,\text{tg}(\theta)}{\sec^2(\theta)-\sec(\theta)}d\theta$

g) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+(\ln(x))^2}}dx$

h) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^{2x}+6e^x+10)^{\frac{3}{2}}}dx$

i) $\displaystyle\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x-8}dx$

j) $\displaystyle\int \frac{(\ln(x))^2}{x^3}dx$

k) $\displaystyle\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$

l) $\displaystyle\int x^2\,\text{arcsen}(x)dx$

m) $\displaystyle\int \frac{\text{sen}^3(\frac{1}{x})}{x^2}dx$

n) $\displaystyle\int \frac{\text{sen}^3(x)\cos(x)}{\sqrt{16+\text{sen}^2(x)}}dx$

o) $\displaystyle\int x\,\text{arctg}(x)dx$

p) $\displaystyle\int \frac{\sec^2(t)}{\text{tg}^2(t)+3\,\text{tg}(t)+2}dt$

3) [resp] Uma partícula se move ao longo de uma reta com uma velocidade $v(t) = t^2 - t$, onde v é medida em metros por segundo. Ache

a) O deslocamento.

b) A distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo [0,5].

Lembrete: Se $s(t)$ é a função deslocamento, então a velocidade $v(t) = s'(t)$. da mesma forma se $v(t)$ é a equação da velocidade então a função posição (deslocamento) é $s(t) = \int v(t)dt$, caso venha pedido a distância percorrida no intervalo $[a,b]$ então $s = \int_a^b v(t)dt$. O deslocamento nos primeiros t segundos é dado por $s(t) = \int_0^t v(t)dt$.

4) [resp] Se f for uma função contínua tal que

$$\int_1^x f(t)dt = (x-1)e^{2x} + \int_1^x e^{-t} f(t)dt$$

para todo x, ache uma formula explícita para $f(x)$. Dica: *Use o Teorema Fundamental do cálculo parte 1.*

5) [resp] Seja $g(x) = \int_1^x f(t)dx$ e $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^7}}{\sqrt{u^5}}du$, encontre $g''(2)$.

6) [resp] Seja $f(x) = \int_0^x (1-t^2)e^{t^2}dt$.

a) Encontre e classifique os pontos críticos de f.

b) Analise o crescimento e o decrescimento de f.

7) [resp] Uma partícula se move ao longo de uma reta com velocidade igual a $v(t) = t^2e^{-t}$ metros por segundo após t segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá nos primeiros t segundos.

8) [resp] Uma partícula se move em linha reta com função velocidade $v(t) = \operatorname{sen}(\omega t)\cos^2(\omega t)$. Encontre a sua função posição $s = f(t)$ se $f(0) = 0$?

9) Use substituição trigonométrica para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

10) [resp] Encontre a área delimitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

11) [resp] Encontre a área sob a curva $y = e^{\operatorname{sen}(x)}\operatorname{sen}(2x)$ de $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{2}$.
Lembrete: Lembre que a área sob (abaixo) de uma curva $y = f(x)$ (limitada pelo eixo x), no intervalo $[a,b]$ é dada por $A = \int_a^b f(x)dx$. Além disso, lembre-se que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$.

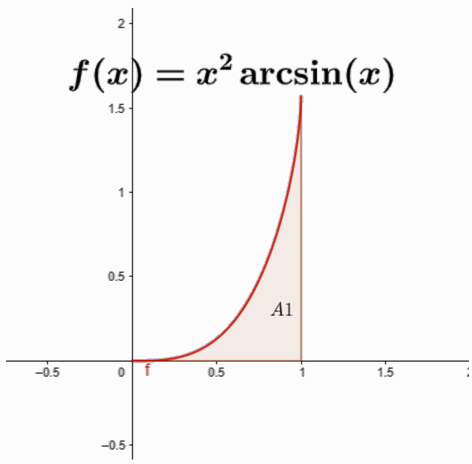
12) [resp] Se f é uma função contínua no intervalo $[a,b]$, o valor médio de f é definido como

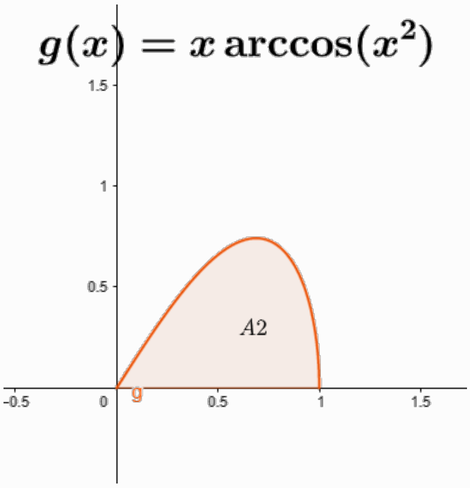
$$f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Encontre o valor médio das seguintes funções

1. $f(x) = x\sec^2(x)$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$.
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, $1 \leq x \leq 7$.

13) Nas figuras a seguir, a área 1 (A_1) representa a área sob a curva $f(x) = x^2\operatorname{arcsen}(x)$ e a área 2 (A_2) representa a área sob a curva $g(x) = x\arccos(x^2)$. Encontre a diferença $A_2 - A_1$. *OBS*: Para calcular a integral envolvida no cálculo da área A_2, você deve OBRIGATORIAMENTE começar usando uma substituição simples.





14) [resp] Encontre a área delimitada pelas curvas $y = 1 - x^2$ e $y = 3x^2$.

15) [resp] Encontre a área delimitada pelas curvas $y = 3x$ e $y = 2x^2 + x$.

16) [resp] Encontre a área delimitada pelas curvas $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = x$.

17) [resp] Encontre a área delimitada pelas curvas $y = \cos(x)$ e $y = \cos^2(x)$ entre $x = 0$ e $x = \pi$.

18) Um arquiteto propôs colocar no piso de uma praça pastilhas coloridas em uma região plana cujo o formato se assemelha (respeitando a escala) a região delimitada simutâneamente pelas quarto curvas $y = \ln(x)$, $y = e^x$, $y = 1 - x$ e $x = e$. Esboce a região e calcule a área.

19) [resp] Determine a área da região limitada exatamente pelas três curvas $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ e $y = 2x + 8$.

20) [resp] Avalie as seguintes integrais impróprias:

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)^2}dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$

d) $\displaystyle\int_3^5 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$

e) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4} dx$

21) [resp] A área sob a curva $y = xe^{-x}$ definida no intervalo $[0{,}\infty)$ é convergente?

22) [resp] Podemos estender a nossa definição de valor médio de uma função contínua a um intervalo definindo o valor médio de f no intervalo $[a, \infty)$ como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-a} \int_a^t f(x)dx$$

Calcule o valor médio de $y = \mathrm{arctg}(x)$ no intervalo $[0, \infty)$.

23) [resp] Avalie a integral imprópria $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-2x}} dx$. Lembre-se que a integral indefinida já foi resolvida no exercício 2-d.

5

Sequências Numéricas

5.1 Apresentação e Motivação

Apresentamos nesse capítulo o conceito de sequências de números reais. Estamos interessados em explorar suas propriedades de convergência. Esses resultados serão fundamentais quando iniciarmos a discussão sobre séries no próximo capítulo.

Note que os mesmos conceitos podem ser estendidos para sequências de outros objetos matemáticos, como vetores, matrizes ou funções. Porém, as propriedades de convergência serão basicamente as mesmas.

Sequências e séries estão entre os conceitos matemáticos mais aplicados, por exemplo, qualquer algoritmo computacional que busque a solução para um problema fazendo correções iterativas em uma aproximação inicial vai produzir uma sequência de aproximações que podem convergir ou não para a solução desejada. Como exemplo, apresentamos o método de Newton.

Método das Tangentes de Newton

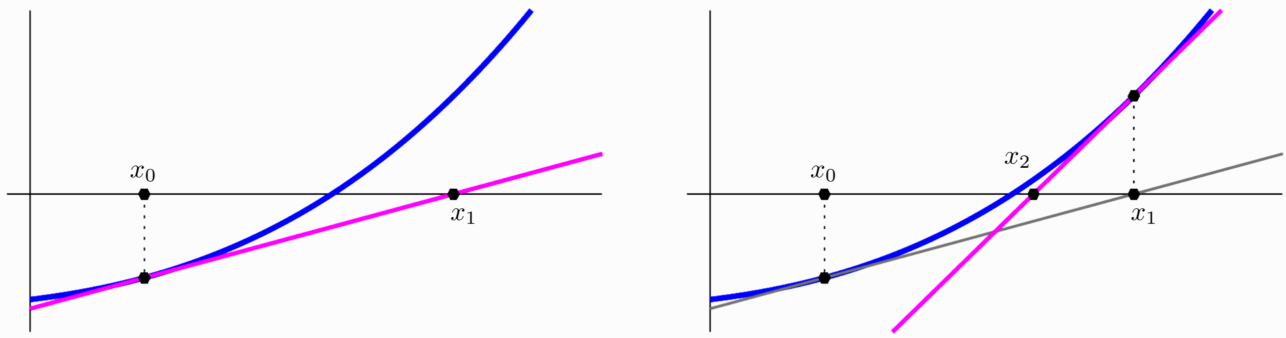
Muitos métodos numéricos ou computacionais se baseiam na busca de uma solução por aproximações sucessivas, isso é, eles partem de um chute inicial e a cada iteração constroem uma nova aproximação para a solução. Um dos métodos mais importantes com essas características é o Método de Newton para encontrar zeros de funções.

Queremos encontrar um valor real x^* que satisfaça a equação

$$f(x^*) = 0 \ ,$$

para uma função $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em A e cuja derivada, f', é diferente de zero para todo $x \in A$.

O Método de Newton busca uma solução para $f(x) = 0$ partindo de um chute inicial $x_0 \in A$. Começamos construindo a reta tangente ao gráfico de f pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e encontrando o ponto onde a reta toca o eixo-x, como ilustrado na Figura 5.1a. O ponto x_1 encontrado dessa forma é a nova aproximação para a solução.



(a) Reta tangente em $(x_0, f(x_0))$ e intercepto x_1

(b) Reta tangente em $(x_1, f(x_1))$ e intercepto x_2

Figura 5.1: Ilustração dos primeiros passos do Método de Newton

De posse da nova aproximação repetimos o processo para obter x_2, como ilustrado na Figura 5.1b. Aplicando sucessivamente esse método produzimos uma lista infinita de aproximações para a solução do problema.

Podemos construir uma fórmula para calcular cada aproximação x_n a partir do valor da aproximação anterior x_{n-1}. O primeiro passo é calcular a expressão para a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_n, f(x_n))$

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \ .$$

A próxima aproximação será o valor de x onde essa reta cruza o eixo-x, isso é, quanto $y = 0$, assim temos

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \ ,$$

rearranjando, obtemos a fórmula para o Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ .$$

Note que a exigência de que a derivada de f não seja nula em A é para garantir que a divisão sempre seja possível.

Esse método vai produzir várias listas infinitas de números

$$\begin{array}{llllll} x_0, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, & \ldots \\ f(x_0), & f(x_1), & f(x_2), & \ldots, & f(x_n), & \ldots \\ f'(x_0), & f'(x_1), & f'(x_2), & \ldots, & f'(x_n), & \ldots \end{array}$$

a cada uma dessas listas infinitas damos o nome de Sequência Numérica.

Código Python para ilustrar o Método de Newton.

A pergunta que precisamos responder agora é se essas sequências convergem para a solução que desejamos. O primeiro passo é definir o que queremos dizer com convergência, depois verificamos se as sequências convergem para alguma coisa e por fim verificamos que os valores $f(x_n)$ convergem para zero e consequentemente os valores x_n convergem para a solução que buscamos. Nas próximas seções deste capítulo apresentamos os resultados matemáticos necessários para respondermos a essas questões.

5.2 Definição e Propriedades

Começamos pela definição de sequências numéricas.

Definição 5.1: Sequência Numérica

Uma sequência de números reais é uma lista de números em uma ordem determinada

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \dots, \quad a_n, \quad \dots$$

Cada $a_i \in \mathbb{R}$ é um termo da sequência, enquanto i é o índice com $i = 1, 2, 3, \dots$

Uma definição equivalente, descreve a sequência de números reais como uma função, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dos naturais (índices) nos reais (termos). Neste caso, os termos da sequência são

$$a_1 = f(1), \quad a_2 = f(2), \quad a_3 = f(3), \quad \dots, \quad a_n = f(n), \quad \dots$$

Um aspecto importante na definição de sequência é o fato que os elementos são dados em uma ordem determinada. Isso distingue uma sequência de um conjunto enumerável de valores. Dessa forma, podemos ter duas sequências distintas que contém exatamente os mesmos elementos.

Nesse trabalho vamos representar sequências com os termos entre parênteses, como nestes exemplos:

$$\begin{aligned} &(\, 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n,\ \dots\,)\,, \\ &(\, 1,\ 2^{-1},\ 2^{-2},\ 2^{-3},\ \dots,\ 2^{-n},\ \dots\,)\,. \end{aligned}$$

Normalmente atribuímos nomes aos termos de uma sequência

$$(a_n) \qquad \text{ou} \qquad (b_n)\,.$$

Quando necessário podemos explicitar os valores para o índice

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \qquad \text{ou} \qquad (b_i)_{i=0}^{\infty}\,,$$

Em resumo, temos as seguintes notações para uma sequência

$$(a_n) = \big(a_n\big)_{n=1}^{\infty} = (\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots\ ).$$

Sempre que estivermos definindo uma sequência numérica e não explicitarmos os índices estamos assumindo que o índice começa em um. Mas tome cuidado pois essa regra não é universal, em muitos casos assume-se que o índice começa em zero, por exemplo, nas Séries de Potências que veremos no Capítulo 8.

Note que muitos livros representam sequências com os termos entre chaves

$$\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots\ \}.$$

Porém, a notação com chaves também é usada para representar conjuntos, onde a ordem dos elementos não é relevante, isso é, os conjuntos $\{a,b,c\}$ e $\{c,b,a\}$ são idênticos. Assim, escolhemos a notação com parênteses para enfatizar essa característica, isso é, as sequências

$$\begin{aligned}(a_n) &= (\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots\ ),\\ (b_n) &= (\ 2,\ 1,\ 4,\ 3,\ \ldots,\ 2n,\ 2n-1,\ \ldots\ )\end{aligned}$$

são diferentes apesar de possuírem os mesmos elementos. Note que, os termos da primeira sequência são da forma $a_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mas os termos da segunda sequência são da forma $b_n = n+1$ se n é impar e $b_n = n-1$ se n é par.

A forma como os termos de uma sequência são determinados não importa para a aplicação dos resultados da teoria. Porém, pode fazer muita diferença quando desejamos fazer manipulações algébricas com os termos. As duas formas mais comuns para calcular os termos de uma sequência são por uma expressão direta ou por uma relação de recorrência. No caso da expressão direta temos uma fórmula explicita para o termo em função do índice, como nos exemplos:

$$a_n = \sqrt{n}\,, \qquad b_n = \ln(n)\,, \qquad c_n = \frac{1}{n^2}\,.$$

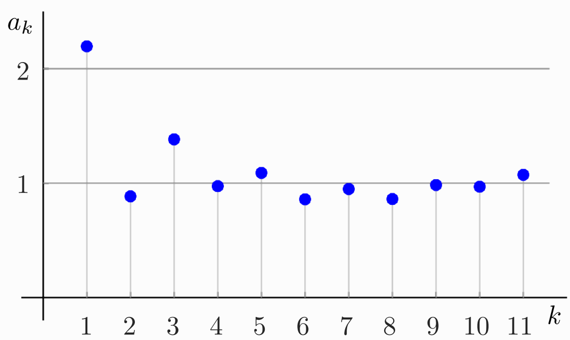
Na Relação de Recorrência o valor de um termo da sequência é calculado a partir do termo anterior, ou dos anteriores. Nesse caso, dizemos que a sequência é recursiva. O exemplo mais famoso é a Sequência de Fibonacci, que é definida pela relação de recorrência

$$f_1 = 1\,, \qquad f_2 = 2\,, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\,, \quad n \geq 3\,.$$

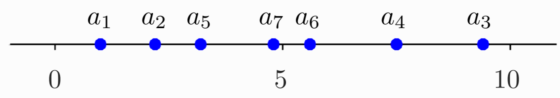
Outros exemplos são a Progressão Aritmética, p_n, e a Progressão Geométrica, q_n, definidas como

$$\begin{aligned} p_1 &= a\,, \qquad & p_n &= p_{n-1} + s\,, \\ q_1 &= a\,, \qquad & q_n &= r q_{n-1}\,. \end{aligned}$$

Podemos representar graficamente as sequências de uma forma semelhante a que usamos para representar o gráfico de uma função real $y = f(x)$, marcando os pontos em um plano cartesiano com os valores dos índices no eixo-x. Porém, no caso das sequências temos pontos isolados e não uma linha contínua, como ilustrado na Figura 5.2a. Alternativamente, podemos representar os valores dos termos de uma sequência sobre um único eixo, como ilustrado na Figura 5.2b.



(a) Representação de uma sequência em um plano cartesiano.



(b) Representação de uma sequência sobre um eixo.

Figura 5.2: Representação gráfica de sequências.

A seguir apresentamos alguns exemplos de sequências definidas diretamente por expressões envolvendo o índice. Observe que a linha conectando os pontos não faz parte do gráfico, ela foi incluída apenas para facilitar a visualização da ordem dos pontos.

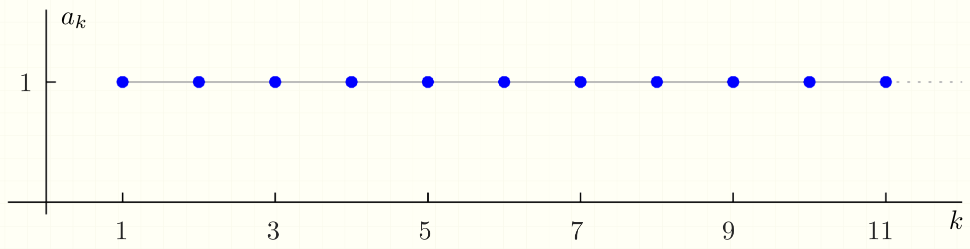
Exemplo 5.2.1: Escreva os primeiros termos de cada sequência e esboce seu gráfico no plano cartesiano.

1. $a_k = 1\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$

   Primeiros termos

   $$(a_k) = (\,1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1, \ldots\,)\ .$$

   Gráfico da sequência

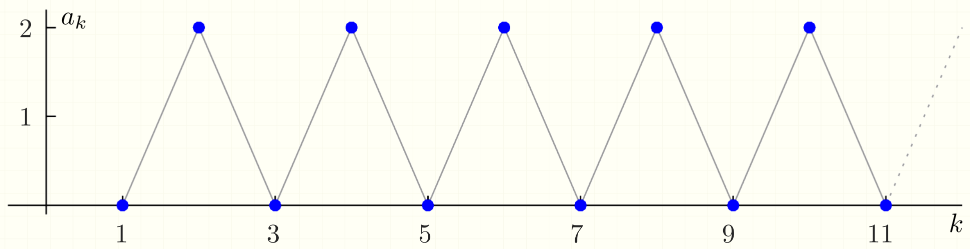


2. $a_k = 1 + (-1)^k\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$

   Primeiros termos

$$\begin{aligned}(a_k) &= \big(1+(-1)^1, \quad 1+(-1)^2, \quad 1+(-1)^3, \quad 1+(-1)^4, \ldots\big)\\ &= (1-1, \quad 1+1, \quad 1-1, \quad 1+1, \ldots)\\ &= (\,0,\ 2,\ 0,\ 2,\ 0,\ 2, \ldots\,)\ .\end{aligned}$$

   Gráfico da sequência

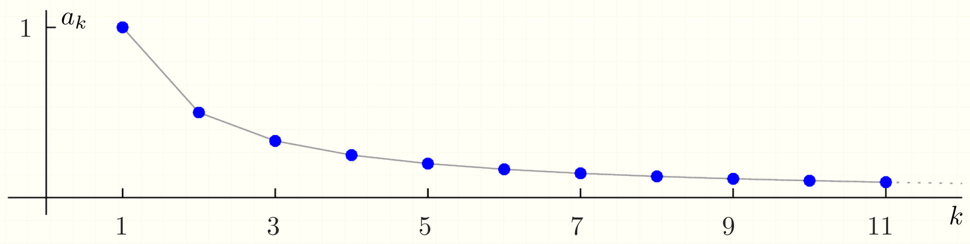


3. $a_k = \dfrac{1}{k}\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$

   Primeiros termos

$$(a_k) = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}, \ldots\right)\ .$$

   Gráfico da sequência



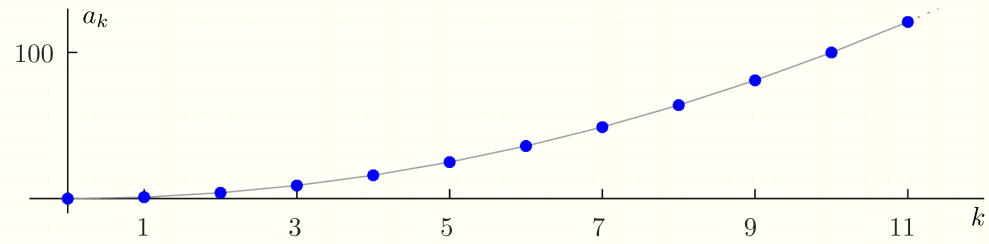
4. $a_k = k^2\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

   Primeiros termos

$$(a_k) = \big(\,0^2,\ 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2, \ldots\big)$$

$$= (\,0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16, \dots)\ .$$

Gráfico da sequência

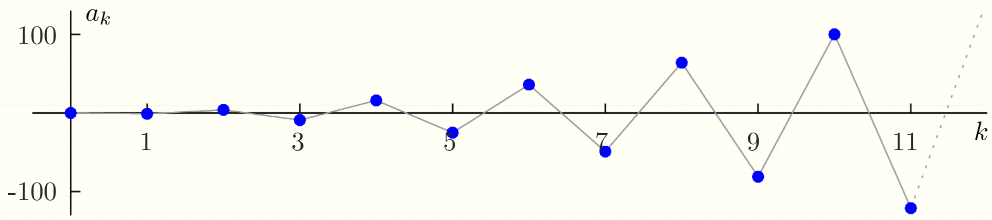


5. $a_k = (-1)^k k^2\,, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$

Primeiros termos

$$\begin{aligned}(a_k) &= \big((-1)^1 \times 1^2, \quad (-1)^2 \times 2^2, \quad (-1)^3 \times 3^2, \quad (-1)^4 \times 4^2, \dots\big)\\ &= (-1 \times 1, \quad 1 \times 4,\ -1 \times 9, \quad 1 \times 16, \dots)\\ &= (\,0, -1,\ 4, -9,\ 16, \dots)\ .\end{aligned}$$

Gráfico da sequência

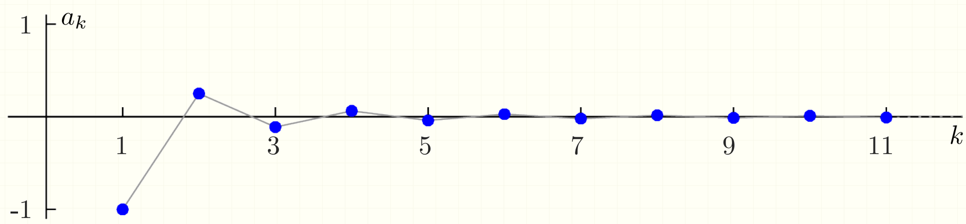


6. $a_k = \dfrac{(-1)^k}{k^2}\,, \qquad k = 1, 2, 3, \dots$

Primeiros termos

$$\begin{aligned}(a_k) &= \left(\frac{(-1)^1}{1^2}, \quad \frac{(-1)^2}{2^2}, \quad \frac{(-1)^3}{3^2}, \quad \frac{(-1)^4}{4^2}, \dots\right)\\ &= \left(\frac{-1}{1}, \quad \frac{1}{4}, \frac{-1}{9}, \quad \frac{1}{16}, \dots\right)\\ &= \left(-1, \frac{1}{4}, \frac{-1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right)\ .\end{aligned}$$

Gráfico da sequência



A seguir apresentamos alguns exemplos de sequências definidas recursivamente.

Exemplo 5.2.2: Escreva os primeiros termos de cada sequência e esboce seu gráfico no plano cartesiano.

1. $a_1 = 1\,, \qquad a_{n+1} = 0{,}8\,a_n\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

   Note que essa sequencia é uma Progressão Geométrica, seus primeiros termos são:

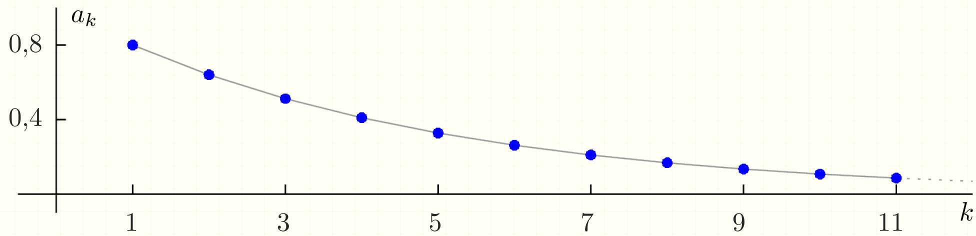
$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 0{,}8\,a_1 = 0{,}8 \\ a_3 &= 0{,}8\,a_2 = 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}64 \\ a_4 &= 0{,}8\,a_3 = 0{,}8 \times 0{,}64 = 0{,}512 \\ &\vdots \end{aligned}$$

   portanto

$$(a_k) = (\,1;\ 0{,}8;\ 0{,}64;\ 0{,}512; \ldots\,)\ .$$

   Observe que usamos o ponto e virgula para separar termos. Fazemos isso sempre que necessário para evitar confusão com a virgula da representação decimal do número.

   Gráfico da sequência



2. $a_1 = 1\,,\ a_2 = 1\,, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,, \qquad n = 3, 4, 5, \ldots$

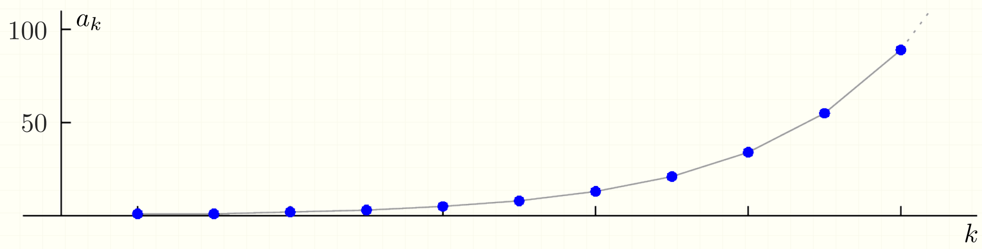
Note que essa é a sequencia de Fibonacci, seus primeiros termos são:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ a_3 &= a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3 \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5 \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

portanto

$$(a_k) = (1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5, \dots)\ .$$

Gráfico da sequência



3. $a_1 = 1\,, \qquad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}\,, \qquad n = 2, 3, 4, \dots$

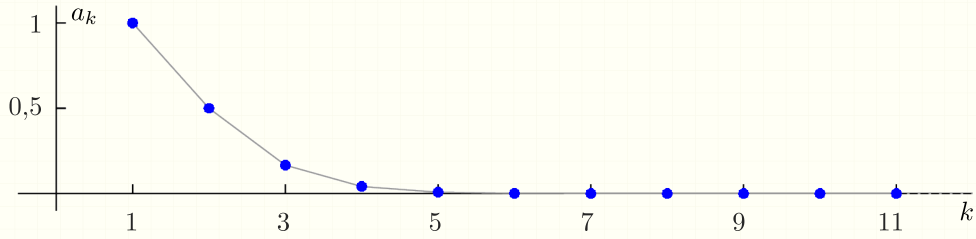
Os primeiros termos dessa sequência são:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2} \\ a_3 &= \frac{a_2}{3} = \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6} \\ a_4 &= \frac{a_3}{4} = \frac{1/6}{4} = \frac{1}{24} \\ a_5 &= \frac{a_4}{5} = \frac{1/24}{5} = \frac{1}{120} \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

portanto

$$(a_k) = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{24},\ \frac{1}{120}, \dots\right)\ .$$

Gráfico da sequência



Código Python para calcular os termos das sequências dos exemplos anteriores.

Podemos agora apresentar a definição de convergência de sequências. Note que a definição para o limite de funções reais é muito similar, porém, nem sempre ela é trabalhada dessa forma na disciplina de Cálculo I. Um exercício interessante é buscar a definição do limite de funções reais em um livro de Cálculo I e comparar com a definição a seguir.

Definição 5.2: Convergência de Sequências

Dizemos que uma sequência de números reais (a_n) converge para um número real L se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \qquad \Rightarrow \qquad |a_n - L| < \varepsilon\,.$$

Se (a_n) converge para L, usamos uma das notações

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \qquad \text{ou} \qquad \lim a_n = L$$

e dizemos que L é o limite da sequência (a_n).

A Figura 5.3 ilustra a definição do limite de uma sequência numérica. Esse gráfico apresenta uma sequência (a_n) que converge para L. Para qualquer valor ε que escolhermos, não importa o quão pequeno, sempre vai existir um índice N a partir do qual todos os valores a_n estão sempre dentro do intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Uma forma para entender o significado do ε é imaginá-lo como um valor de tolerância. Se estivéssemos buscando uma aproximação para L, utilizando a sequência a_n,

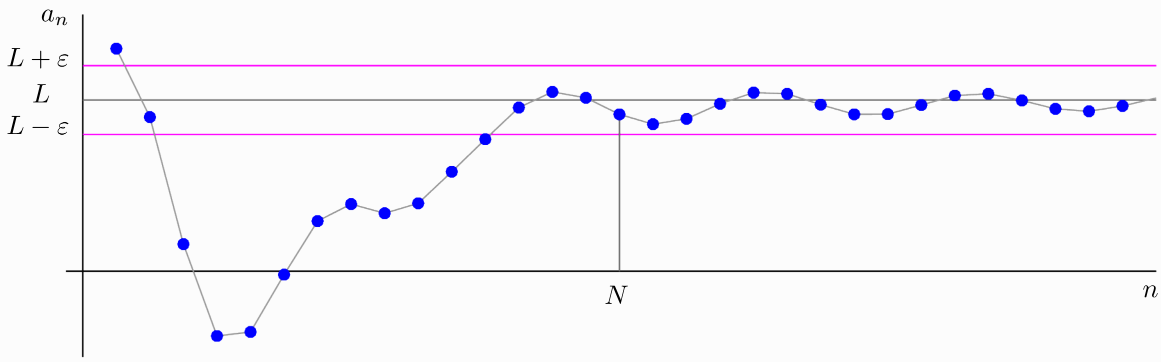


Figura 5.3: Ilustração da definição do limite de sequências numéricas.

precisaríamos garantir que para qualquer tolerância ε exigida seríamos capazes de encontrar um índice N a partir do qual todos os termos da sequência aproximam L com um erro menor do que ε. Porém, queremos mais do que apenas aproximar L, queremos poder dizer que o limite de a_n é igual a L, nesse caso precisamos garantir que para todos os valores de $\varepsilon > 0$ sempre é possível encontrar um N que satisfaça a condição de que o erro seja menor do que ε.

Para nos familiarizarmos com os elementos da definição vamos explorar um exemplo numérico.

Exemplo 5.2.3: A partir de que termo da sequência

$$a_n = \frac{1}{n}$$

podemos dizer que ela aproxima zero com as tolerâncias de $\varepsilon = 0{,}1$ e $\varepsilon = 0{,}001$?

Queremos determinar o índice N a partir do qual todos os termos a_n satisfazem a relação $|a_n| < \varepsilon$. Manipulando $|a_n|$ temos

$$|a_n| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Portanto $|a_n| < \varepsilon$ equivale a

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

que podemos reescrever como

$$\frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Assim, concluímos que a relação $|a_n| < \varepsilon$ é equivalente a

$$n > \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Podemos agora substituir os valores definidos para a tolerância. Para garantir que $|a_n| < 0{,}1$ precisamos que

$$n > \frac{1}{0{,}1} = 10\,.$$

Podemos então escolher $N = 10$, ou qualquer outro valor maior do que 10.

Enquanto que para garantir que $|a_n| < 0{,}001$ precisamos que

$$n > \frac{1}{0{,}001} = 1000\,.$$

Nesse caso podemos escolher $N = 1000$.

O exemplo anterior, assim como qualquer exploração numérica, pode nos ajudar a entender o comportamento de uma sequência, mas não garante nada sobre seu limite. A seguir fazemos a demonstração da convergência usando essencialmente as mesmas manipulações do exemplo anterior, mas sem usar valores numéricos.

Exemplo 5.2.4: Mostre que a sequência $a_n = \dfrac{1}{n}$ converge para zero.

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, queremos determinar o índice N tal que

$$|a_n - 0| < \varepsilon \qquad \forall n > N\,.$$

Simplificando essa relação temos

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \forall n > N\,.$$

Note que a condição $^1/_n < \varepsilon$ equivale a

$$n > \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Escolhendo N de forma que

$$N > \frac{1}{\varepsilon}$$

Garantimos que $|a_n - 0| < \varepsilon$ para todo $n > N$, pois

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

Provamos assim que

$$\frac{1}{n} \to 0\,.$$

A seguir apresentamos outros exemplos de como a definição de convergência é usada para provar a convergência de uma sequência.

Exemplo 5.2.5: Mostre que $\lim \frac{1}{2^n} = 0\,.$

Precisamos provar que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon \qquad \forall\, n > N\,, \tag{5.1}$$

Reescrevendo a desigualdade como $2^{-n} < \varepsilon$ e calculando o logaritmo base 2 em ambos os lados temos

$$\begin{aligned} \log_2\left(2^{-n}\right) &< \log_2 \varepsilon \\ -n &< \log_2 \varepsilon \\ n &> -\log_2 \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto basta escolher

$$N > -\log_2 \varepsilon$$

para garantir a condição (5.1) e mostrar que $\lim \frac{1}{2^n} = 0\,.$

O próximo exemplo generaliza o anterior.

Exemplo 5.2.6: Mostre que se $|\alpha| < 1$, então $\lim \alpha^n = 0$.

Se $\alpha = 0$ todos os termos da sequência são zero e portanto o limite é zero.

Quando $|\alpha| \neq 0$, precisamos provar que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\alpha^n - 0| = |\alpha^n| < \varepsilon \qquad \forall\, n > N\,, \tag{5.2}$$

para isso vamos usar uma variável auxiliar c que atende a condição

$$|\alpha| = \frac{1}{1+c}\,,$$

ou seja, $c = {}^1\!/_{|\alpha|} - 1$. Como $0 < |\alpha| < 1$, sabemos que ${}^1\!/_{|\alpha|} > 1$ e portanto $c > 0$. Usando a Desigualdade de Bernoulli (Veja o exemplo A.3)

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall x > -1,\ \forall n \geq 0$$

podemos escrever que

$$(1+c)^n \geq 1 + nc \geq nc$$

Retornando para a sequência α^n temos

$$\alpha^n = \frac{1}{(1+c)^n} \leq \frac{1}{nc}$$

Escolhendo N tal que

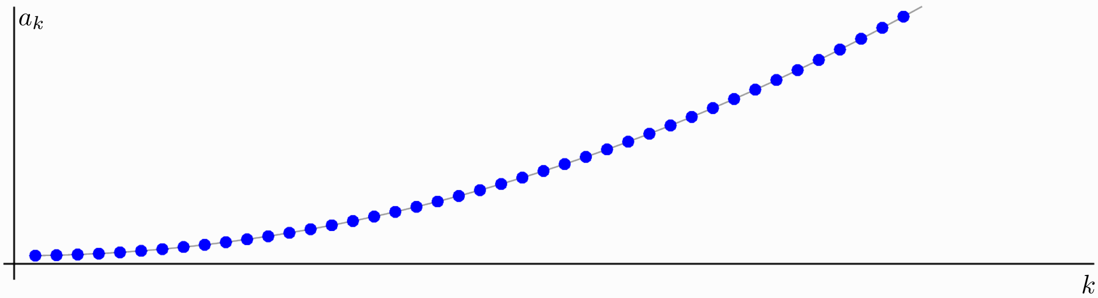
$$\frac{1}{Nc} < \varepsilon$$

ou seja $N > {}^1\!/_{c\varepsilon}$, concluímos que para todo $n > N$ vale

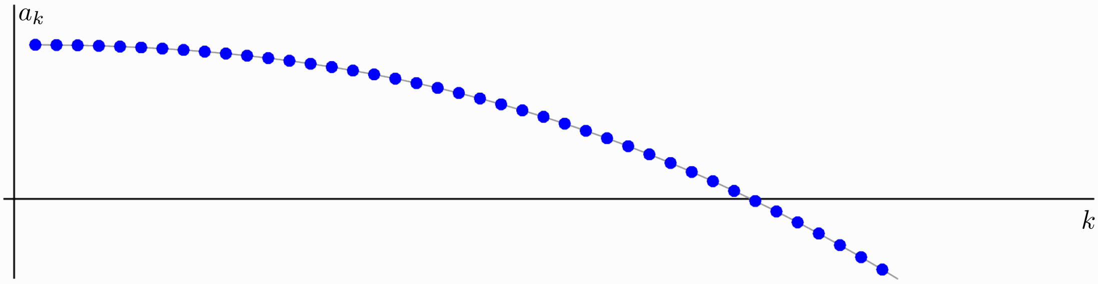
$$\alpha^n = \frac{1}{(1+c)^n} \leq \frac{1}{nc} < \frac{1}{Nc} < \varepsilon$$

que é exatamente a condição (5.2) e portanto mostra que $\lim a^n = 0$.

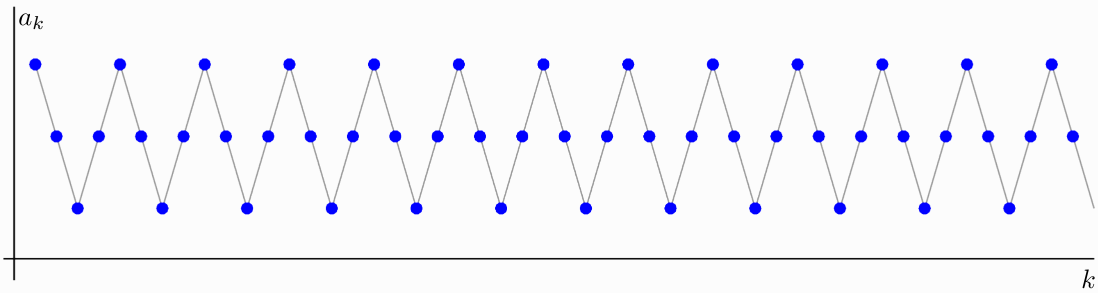
Observe que a definição do limite não nos diz como encontrar L e sua aplicação pode ser extremamente complicada. Sua importância está em ser a base para demonstrar as propriedades do limite que utilizaremos.



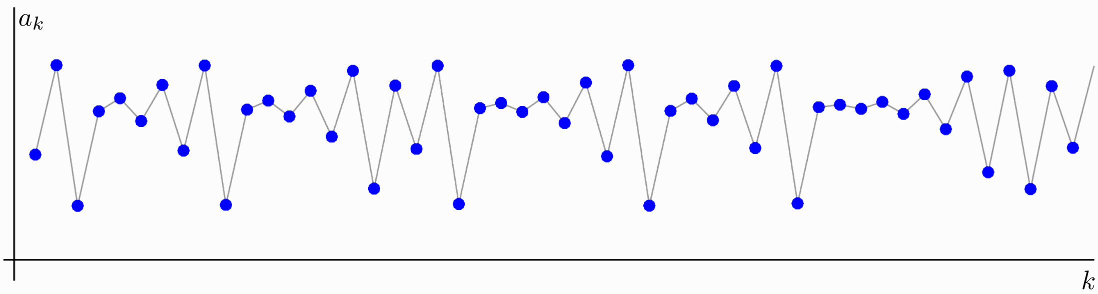
(a) Sequência divergente para o infinito.



(b) Sequência divergente para menos infinito.



(c) Sequência divergente pois permanece oscilando entre os mesmos valores.



(d) Sequência divergente pois tem comportamento caótico.

Figura 5.4: Formas em que uma sequência pode divergir.

Se não existe um número real L que satisfaça a Definição 5.2, dizemos que (a_n) diverge. A Figura 5.4 ilustra as formas como uma sequência numérica pode divergir. Os gráficos 5.4a e 5.4b mostram sequências que divergem para infinto e menos infinito, veja a Definição 5.7 mais a frente nesta seção. Em 5.4c temos uma sequência que oscila repetindo os mesmos valores indefinidamente, enquanto que a sequência ilustrada em 5.4d, o Mapa Logístico, apresenta um comportamento caótico.

Código Python para explorar o Mapa Logístico.

O próximo exemplo usa a definição para provar que uma sequência não converge para nenhum número real.

Exemplo 5.2.7: Mostre que a sequência $(1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ diverge.

Suponha, por absurdo, que ela convirja para algum valor L, então dado $\varepsilon = 1/3$, é impossível que $|0 - L| < 1/3$ e $|1 - L| < 1/3$, pois

$$|0 - L| < \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad L \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

enquanto que

$$|1 - L| < \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad L \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Porém, esses intervalos são disjuntos, ou seja, não tem interseção. Assim, é impossível que exista L que seja limite dessa sequência.

Quando uma sequência é covergente, existe um único valor para L que atende as condições da Definição 5.2. Mesmo que essa afirmação pareça bastante intuitiva, não podemos acreditar nela sem antes demostrá-la. Por isso precisamos do próximo teorema.

Teorema 5.3: Unicidade do Limite

Uma sequência convergente (a_n) tem apenas um limite.

Demonstração

Suponha que existam L_1 e L_2 tais que $a_n \to L_1$ e $a_n \to L_2$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existem naturais N_1 e N_2 tais que

$$|a_n - L_1| < \varepsilon \quad \forall\, n > N_1 \qquad \text{e} \qquad |a_n - L_2| < \varepsilon \quad \forall\, n > N_2\,.$$

Seja $N = \max(N_1, N_2)$, então para todo $n > N$, pela desigualdade triangular,

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| < 2\varepsilon \,.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $L_1 = L_2$.

Muitas vezes estaremos interessados em apenas alguns termos de uma sequência, selecionando esses termos criamos uma subsequência como definido a seguir.

Definição 5.4: Subsequências

Uma subsequência (b_k) de (a_n)

$$(b_k) = (a_{n_k})$$

é uma nova sequência com índices $k \in \mathbb{N}$ formada por elementos de (a_n), mantendo sua ordem, ou seja, $n_{k+1} > n_k$.

O próximo exemplo apresenta alguns casos de subsequências.

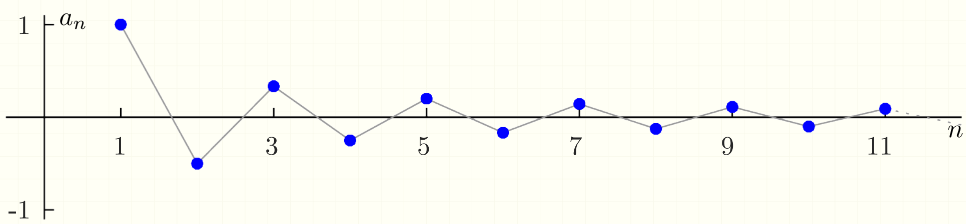
Exemplo 5.2.8: Dada a sequência

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \,,$$

calcule primeiros termos e esboce o gráfico dessa sequência e das suas subsequências com índices pares e ímpares.

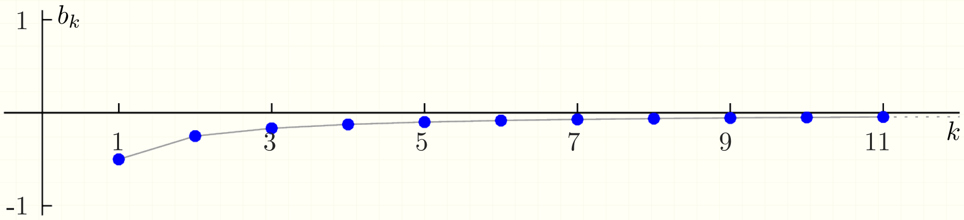
A sequência original, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(a_n) = \left(1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right) \,.$$



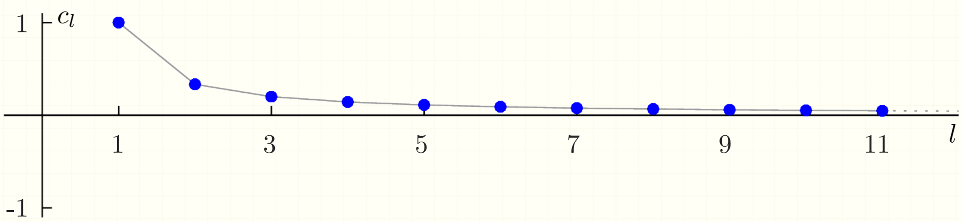
A subsequência dos termos pares, $n = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$(b_k) = (a_{2k}) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{8}, \ldots \right).$$



A subsequência dos termos ímpares, $n = 2l - 1$, $l = 1, 2, 3, \ldots$

$$(c_l) = (a_{2l-1}) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots \right).$$



O corolário a seguir relaciona o limite de uma subsequência com o limite da sequência original.

Corolário 5.5: Convergência de Subsequências

Toda subsequências (b_k) de uma sequência convertente (a_n) converge para o limite de a_n

$$\lim_{k \to \infty} b_k = \lim_{n \to \infty} a_n .$$

Esse resultado pode ser usado para determinar o limite de uma subsequência ou, como mostrado no exemplo a seguir, provar que uma sequência não poder ser convergente.

Exemplo 5.2.9: Mostre que a sequência $a_n = (-1)^n$ diverge.

Vamos assumir por absurdo que a_n seja convergente, nesse caso suas subsequências precisam convergir para o mesmo limite. Tomamos agora a subsequência de termos pares

$$b_k = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$$

e a subsequência de termos ímpares

$$c_k = a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1\,.$$

Como elas convergem para valores diferentes, $b_k \to 1$ e $c_k \to -1$, temos um absurdo, portanto a_n não pode convergir.

Quando desejamos operar com sequências convergentes podemos utilizar as propriedades do cálculo do limite descritas no teorema a seguir.

Teorema 5.6: Propriedades de Sequências Convergentes

Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências convergentes, então, valem as seguintes regras:

1. $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ Regra da soma
2. $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$ Regra da diferença
3. $\lim(ka_n) = k \lim a_n, \quad \forall\, k \in \mathbb{R}$ Regra da multiplicação por escalar
4. $\lim(a_n\, b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n)$ Regra do produto
5. $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}, \quad \lim b_n \neq 0$ Regra do quociente

Demonstração

Sejam $A = \lim a_n$ e $B = \lim b_n$. Dado $\varepsilon > 0$, existem $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_n - A| < \varepsilon/2$ se $n > N_1$ e $|b_n - B| < \varepsilon/2$ se $n > N_2$.

Então tomando $N = \max(N_1, N_2)$, segue, pela desigualdade triangular, que

$$|a_n + b_n - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

de onde, temos $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.

As demais demonstrações são equivalentes e deixadas como exercício. Compare, em um livro de Cálculo I, com a demonstração das propriedades equivalentes para limites de funções reais.

A seguir apresentamos alguns exemplos de como as propriedades do Teorema 5.6 podem ser usadas para calcular o limite de sequências que são definidas como combinações de sequências convergentes.

Exemplo 5.2.10: Sendo $0 < a < 1$, calcule o limite da sequência $-5a^n$

$$\lim -5a^n = -5 \lim a^n = -5 \cdot 0 = 0\,.$$

Exemplo 5.2.11: Sendo $0 < a < 1$, calcule o limite da sequência $10 + a^n$

$$\lim(10 + a^n) = 10 + \lim a^n = 10 + 0 = 10\,.$$

Exemplo 5.2.12: Sendo $0 < a < 1$, calcule o limite da sequência $\dfrac{-\frac{1}{a^n} + 7}{1 + \frac{5}{a^n}}$.

$$\begin{aligned}\lim\left(\frac{-1/a^n + 7}{1 + 5/a^n}\right) &= \lim\left(\frac{-1 + 7a^n}{a^n + 5}\right)\\ &= \frac{-1 + 7\lim(a^n)}{\lim(a^n) + 5} = -\frac{1}{5}\,.\end{aligned}$$

Uma técnica para calcular o limite de uma sequência recursiva, (a_n), que sabemos ser convergente, é usar o fato que as sequências (a_n) e (a_{n+1}) convergem para o mesmo valor. O exemplo a seguir ilustra essa técnica.

Exemplo 5.2.13: Calcule o limite da sequência convergente definida pela relação de recorrência

$$a_1 = 2\,, \qquad a_{n+1} = \frac{6}{1 + a_n}\,.$$

Como sabemos que a sequência converge podemos escrever

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L\,.$$

Agora podemos aplicar as propriedades de limite na expressão para a_{n+1}

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim \frac{6}{1+a_n} = \frac{6}{1+\lim a_n}\,.$$

Substituindo os limites por L temos uma equação algébrica

$$L = \frac{6}{1+L}\,,$$
$$L(1+L) = 6\,,$$
$$L^2 + L - 6 = 0\,.$$

Usando a fórmula de Bhaskara

$$L = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2}\,,$$

temos

$$L = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \qquad \text{ou} \qquad L = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Encontramos dois candidatos para L os valores -3 e 2, porém, o limite é único. O segundo candidato surge no momento que elevamos as expressões ao quadrado, mas uma das alternativas precisa ser descartada. Qual alternativa deve ser descartada depende do valor dado para o primeiro termo a_1. Observamos que com $a_1 = 2$, portanto, os valores de a_n nunca são negativos. Então o limite da sequência é 2.

A Figura 5.4 nos mostra as formas como uma sequência diverge. Entre esses casos, os dois primeiros, onde a sequência diverge para mais ou menos infinito, merecem uma atenção especial, pois, mesmo que a sequência seja divergente, é possível realizar alguns cálculos com ela. Para isso vamos definir com precisão o que significa divergir para o infinito.

Definição 5.7: Divergência ao Infinito

Dizemos que a sequência (a_n) diverge para o infinito se para cada número M dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $a_n > M$. Quando isso ocorre, escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{ou} \qquad a_n \to \infty \qquad \text{ou} \qquad \lim a_n = \infty\,.$$

Analogamente, se para cada número real m existir $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, $a_n < m$, então diremos que a sequência diverge para menos infinito e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \text{ou} \qquad a_n \to -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim a_n = -\infty\,.$$

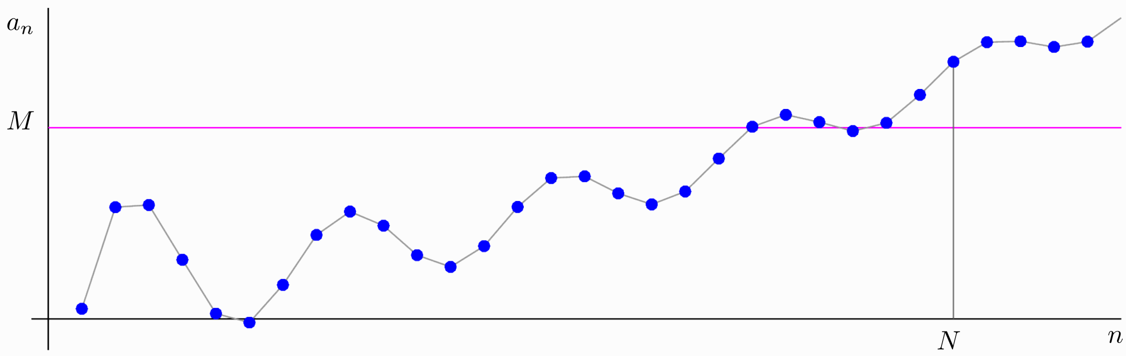


Figura 5.5: Ilustração da divergência para o infinito de sequências numéricas.

A Figura 5.5 apresenta uma sequência (a_n) que diverge para infinito positivo. Isso significa que para qualquer valor M que escolhermos, não importa o quão grande ele seja, sempre vai existir um índice N a partir do qual todos os valores de a_n são maiores do que M.

Exemplo 5.2.14: Mostre que a sequência $a_n = n^a$, diverge ao infinito para todo $a > 0$.

Dado qualquer número M, podemos supor sem perda de generalidade que $M > 0$,

$$n^a > M \quad \Leftrightarrow \quad n > M^{1/a}\,.$$

Agora basta escolher $N = M^{1/a}$, de modo que se $n > N$, segue que $a_n = n^a > M$.

Da mesma forma que toda subsequência b_k de uma sequência convergente, a_n, converge para o limite de a_n, toda subsequência c_k de uma sequência d_n, que diverge para o infinito precisa também divergir para o infinito.

Exercícios Seção 5.2

1) Responda as questões.

a) O que é uma sequência?

b) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$?

c) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

d) O que é uma sequência convergente? Dê dois exemplos.

e) O que é uma sequência divergente? Dê dois exemplos.

2) [resp] Dada a fórmula para o n-ésimo termo, a_n, de uma sequência (a_n), encontre os valores de a_1, a_2, a_3 e a_4.

$$a_n = \frac{1-n}{n^2}$$

3) Dada a fórmula para o n-ésimo termo a_n, encontre os valores dos quatro primeiros termos da sequência (a_n).

a) $a_n = \dfrac{1}{n!}$

b) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

c) $a_n = 2 + (-1)^n$

d) $a_n = \dfrac{2^n}{2^{n+1}}$

e) $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$

f) $a_n = \dfrac{3n}{1+6n}$

g) $a_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

h) $a_n = 1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

i) $a_n = 1 + \dfrac{10^n}{9^n}$

4) [resp] Dada um ou dois termos iniciais de uma sequência, bem como uma fórmula de recursão para os termos remanescentes. Escreva os dez termos iniciais da sequência.

$$a_1 = -2 \qquad a_{n+1} = \frac{n a_n}{n+1}$$

5) Dada a relação de recorrência e os valores iniciais necessários da sequência (a_n), calcule seus cinco primeiros termos.

a) $a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = a_n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

b) $a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$

c) $a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = (-1)^{n+1}\dfrac{a_n}{2}$

d) $a_1 = a_2 = 1 \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

e) $a_1 = 2,\ a_2 = -1 \qquad a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

6) [resp] Encontre uma fórmula para o n-ésimo termo da sequência dos quadrados dos inteiros positivos menos 1

$$(0, 3, 8, 15, 24, \ldots)$$

7) Encontre uma fórmula explicita para o n-ésimo termo de cada sequência.

a) Números 1 alternando o sinal

$$(1, -1, 1, -1, \ldots)$$

b) Quadrados dos inteiros positivos alternando os sinais

$$(1, -4, 9, -16, 25, \ldots)$$

c) Potências de 2 divididas por múltiplos de 3

$$\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{12}, \frac{2^2}{15}, \frac{2^3}{18}, \ldots\right)$$

d) Inteiros começando com -3

$$(-3, -2, -1, 0, 1, \ldots)$$

e) Um inteiro positivo impar sim um não

$$(1, 5, 9, 13, 17, \ldots)$$

f) $\left(1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{9}, \ldots\right)$

g) $\left(1, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \ldots\right)$

h) $\left(-3, 2, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{9}, -\dfrac{16}{27}, \ldots\right)$

i) $(5, 8, 11, 14, 17, \ldots)$

j) $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{4}, -\dfrac{16}{5}, \dfrac{25}{6}, \ldots\right)$

k) $(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots)$

8) [resp] A sequência (a_n) converge ou diverge? Encontre seu limite se for convergente.

$$a_n = 1 + (-1)^n$$

9) [resp] A sequência (a_n) converge ou diverge? Encontre seu limite se for convergente.

$$a_n = (-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

10) [resp] Método de Newton: As seguintes sequências vêm da fórmula recursiva para o método de Newton,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

As sequências convergem? Em caso afirmativo, para qual valor? Em cada caso, comece identificando a função f que gera a sequência.

a) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2-2}{2x_n} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$

b) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{\operatorname{tg}(x_n)-1}{\sec^2(x_n)}$

c) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - 1$

11) [resp] Verifique se a sequência é convergente, caso seja calcule seu limite.

a) $a_n = 2 + (0{,}1)^n$

b) $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$

c) $a_n = \dfrac{1-2n}{1+2n}$

d) $a_n = \dfrac{2n+1}{1-3\sqrt{n}}$

e) $a_n = \dfrac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$

f) $a_n = \dfrac{n+3}{n^2+5n+6}$

g) $a_n = \dfrac{n^2-2n+1}{n-1}$

h) $a_n = \dfrac{1-n^3}{70-4n^2}$

i) $a_n = 1+(-1)^n$

j) $a_n = (-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

k) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

l) $a_n = \left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)\left(3+\dfrac{1}{2^n}\right)$

12) Verifique se a sequência converge ou não e calcule o limite das sequências convergentes.

a) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

b) $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

c) $a_n = \dfrac{1}{(0{,}9)^n}$

d) $a_n = 1-(0{,}2)^n$

e) $a_n = \dfrac{n^3}{n^3+1}$

f) $a_n = \dfrac{3+5n^2}{n+n^2}$

g) $a_n = \dfrac{n^3}{n+1}$

h) $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n}$

i) $a_n = \dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$

13) [resp] Assuma que a sequência converge e encontre seu limite.

a) $a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \dfrac{72}{1+a_n}$

b) $a_1 = -1 \qquad a_{n+1} = \dfrac{a_n+6}{a_n+2}$

c) $a_1 = -4 \qquad a_{n+1} = \sqrt{8+2a_n}$

d) $a_1 = 0 \qquad a_{n+1} = \sqrt{8+2a_n}$

e) $a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = \sqrt{5a_n}$

f) $a_1 = 3 \qquad a_{n+1} = 12-\sqrt{a_n}$

g) $2,\ 2+\dfrac{1}{2},\ 2+\dfrac{1}{2+1/2},\ 2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2+1/2}},\ \ldots$

h) $\sqrt{1},\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ \ldots$

5.3 Sequências e Funções

Nessa seção apresentamos alguns resultados relacionando o cálculo de limites de sequências com propriedades de algumas funções. O primeiro resultado nos informa quando podemos trocar a ordem do cálculo do limite e a avaliação da função em situações como essa

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \quad \stackrel{?}{=} \quad f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right).$$

O segundo nos diz que podemos trocar o cálculo do limite de sequências pelo cálculo do limite de funções, o que nos permite utilizar as técnicas estudadas no Cálculo I.

Teorema 5.8: Teorema da Função Contínua

Se a_n é uma sequência numérica real convergente, $a_n \to L$, e $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $L \in D$, então

$$f(a_n) \to f(L).$$

Demonstração

Seja $\varepsilon > 0$, como f é contínua em L, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - L| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(L)| < \varepsilon.$$

Como $a_n \to L$, temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - L| < \delta \qquad \text{para todo} \quad n > N.$$

Então, para todo $n > N$ temos que $|f(a_n) - f(L)| < \varepsilon$, ou seja,

$$f(a_n) \to f(L).$$

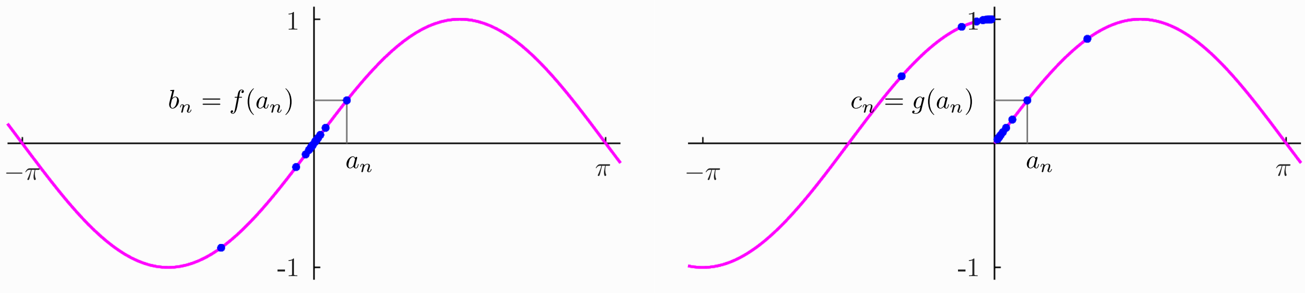
A Figura 5.6 ilustra a aplicação do Teorema 5.8 para as sequências $b_n = f(a_n)$ e $c_n = g(a_n)$ onde a sequência (a_n) e dada por

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^{1,5}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

que converge para $L = 0$, e as funções f e g são

$$f(x) = \operatorname{sen}(x), \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} \cos(x) & x < 0 \\ \operatorname{sen}(x) & x \geq 0 \end{cases}.$$

No gráfico 5.6a observamos que b_n também converge para zero, mas no gráfico 5.6b a sequência c_n oscila indefinidamente entre zero e 1.



(a) Função é contínua em $L = 0$. (b) Função é descontínua em $L = 0$.

Figura 5.6: Ilustração do Teorema da Função Contínua.

EXEMPLO 5.3.1: Verificar que se $0 < a < 1$ então $\lim \cos(a^n) = 1$.

Para ver isso basta lembrar que $\lim a_n = 0$ e que a função cosseno é contínua em zero. Portanto,

$$\lim \cos(a^n) = \cos\left(\lim a^n\right) = \cos(0) = 1\,.$$

O próximo teorema é bastante natural, mas uma regra da Matemática é nunca acreditar em um resultado antes de demonstrá-lo. Não importa o quão natural e aparentemente óbvio ele pareca ser.

TEOREMA 5.9: SEQUÊNCIA DEFINIDA POR FUNÇÃO

Se f é uma função real definida para todo $x \geq n_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, e a_n é uma sequência tal que

$$a_n = f(n) \qquad \text{para todo } n \geq n_0\,,$$

então

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L\,.$$

Uma consequência desse último teorema é que, em caso de indeterminação, podemos aplicar a Regra de L'Hôpital para calcular o limite de sequências que "concordam" com alguma função real. Os próximos exemplos aplicam essa técnica.

Exemplo 5.3.2: Mostre que $\lim \dfrac{1-5n^4}{n^4+8n^3} = -5\,.$

A função

$$f(x) = \frac{1-5x^4}{x^4+8x^3}$$

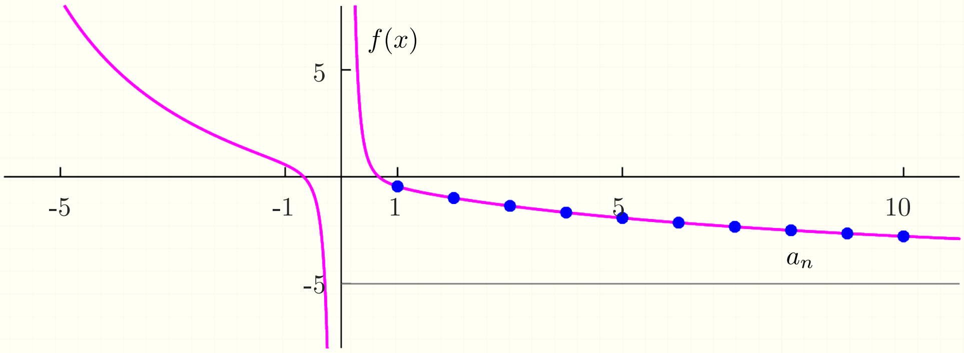
está definida para todo $x > 0$ e a sequência

$$f(n) = \frac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$$

para todo $n > 0$. Assim podemos usar Teorema 5.9 e aplicar a regra de L'Hôpital para calcular o limite desejado

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{1-5x^4}{x^4+8x^3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{-20x^3}{4x^3+24x^2} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-60x^2}{12x^2+48x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-120x}{24x+48} \\ &= \lim_{x\to\infty} -\frac{120}{24} = -5\,.\end{aligned}$$

A figura a seguir mostra os gráficos da função e da sequência.



Exemplo 5.3.3: Verifique se a sequência $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$ converge, se sim, calcule o limite.

Essa é uma indeterminação do tipo 1^∞, portando devemos aplicar o logaritmo natural para obter

$$\ln(a_n) = n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\ln\left(1 - {}^1\!/_{n^2}\right)}{{}^1\!/_n}\,.$$

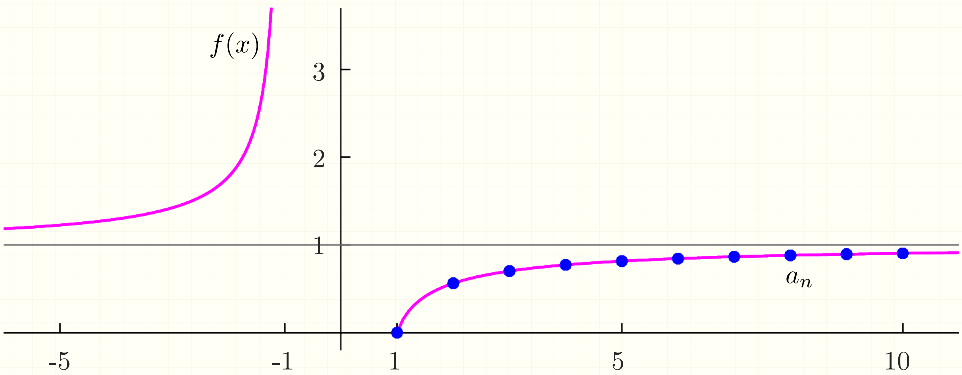
A última expressão é uma indeterminação do tipo ${}^0\!/_0$, então, aplicando a regra de L'Hôpital, segue que

$$\begin{aligned}
\lim \ln(a_n) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{d}{dx}\ln\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)}{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{1 - {}^1\!/_{x^2}}\,\dfrac{2}{x^3}}{-{}^1\!/_{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2}{x^3 - x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{3x^2 - 1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4}{6x} = 0\,.
\end{aligned}$$

Como a função e^x é contínua em 0, podemos usar o Teorema da Função Contínua 5.8, de modo que

$$\lim a_n = \lim\left(e^{\ln a_n}\right) = e^{\lim(\ln a_n)} = e^0 = 1\,.$$

A figura a seguir mostra os gráficos da função e da sequência.



Observe que o teorema vale apenas em um sentido, se a sequência converge, não podemos concluir nada sobre a função. Assim como, se a função não convergir não podemos concluir nada sobre a sequência. O próximo exemplo ilustra esse caso.

EXEMPLO 5.3.4: Comparação entre a sequência $a_n = 0$, com $n \in \mathbb{N}$ e a função $f(x) = \text{sen}(\pi x)$, com $x \in \mathbb{R}$.

Primeiro observamos que vale a igualdade

$$a_n = f(n)$$

pois, para todo n inteiro

$$f(n) = \text{sen}(\pi n) = 0\,.$$

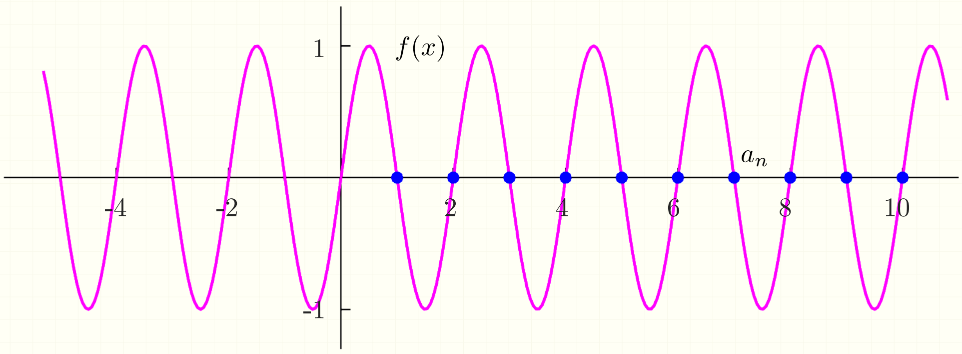
Analisando a sequência, concluímos que ela é convergente pois todos os seus termos são iguais a zero

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0\,.$$

Entretanto, a função f oscila entre -1 e 1 quando tentamos calcular seu limite para o infinito nos reais

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \text{sen}(\pi x) \qquad \text{não existe.}$$

A figura a seguir mostra os gráficos da função e da sequência.



Exercícios Seção 5.3

1) Use o Teorema da Função Contínua para mostrar que

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n}\right) = 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{4^n}\right) = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tgh}\left(\dfrac{n + {}^{1}/_{2^n}}{5 - {}^{10}/_{5^n}}\right) = 1$

2) Verifique se a sequência converge ou não e calcule o limite das sequências convergentes.

a) $a_n = e^{1/n}$

b) $a_n = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2n\pi}{1+8n}\right)$

c) $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{9n+1}}$

d) $a_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^3+4n}}$

e) $a_n = \exp\left(\dfrac{2n}{n+2}\right)$

f) $a_n = \cos\left(\dfrac{n}{2}\right)$

g) $a_n = \cos\left(\dfrac{2}{n}\right)$

h) $a_n = \dfrac{\ln(n)}{\ln(2n)}$

i) $a_n = \dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}$

j) $a_n = \dfrac{\operatorname{arctg}(n)}{n}$

k) $a_n = n^2 e^{-n}$

l) $a_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

5.4 Sequências Limitadas

Em muitas aplicações precisamos determinar se uma sequência é convergente ou não, mas não precisamos calcular explicitamente seu limite. Muitos métodos numéricos ou computacionais entram nessa categoria. Nos próximos capítulos vamos usar a existência do limite de sequências para analisar a convergência de séries, nestes casos também não precisaremos determinar o valor do limite. Dessa forma, nesta seção apresentamos algumas propriedades de sequências que podem nos ajudar a determinar sua convergência sem precisarmos calcular seu limite.

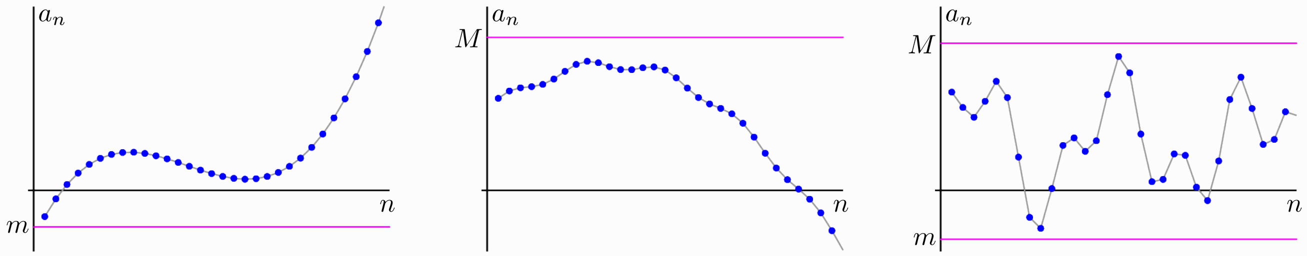
A primeira propriedade que vamos definir é se uma sequência é limitada ou não, isso é, se os seus termos podem divergir para o infinito ou não. Note que no Cálculo I esse mesmo conceito é definido para funções reais.

Definição 5.10: Sequências Limitadas

Dizemos que uma sequência numérica real (a_n) é:

Limitada Inferiormente	se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
Limitada Superiormente	se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
Limitada	se é limitada superiormente e inferiormente, ou seja, existem M e m tais que $m \leq a_n \leq M$.

Um cuidado especial precisa ser tomado aqui, estamos usando a palavra limite em dois sentidos diferentes. Quando falamos do limite de uma sequência estamos tratando da sua convergência, isso é, queremos saber se $a_n \to L$. Porém, quando falamos de sequências limitadas estamos nos referindo a barreiras que os termos da sequência jamais ultrapassam, $m \leq a_n \leq M$. A Figura 5.7 ilustra os casos descritos na Definição 5.10.



(a) Sequência limitada inferiormente.

(b) Sequência limitada superiormente.

(c) Sequência limitada.

Figura 5.7: Ilustração das sequências limitadas.

Note que, mesmo que a Definição 5.10 exija que as desigualdades valham para todos os termos da sequência, $n \in \mathbb{N}$, em muitos casos basta que a relação seja verdadeira apenas a partir de um determinado índice $n > N \in \mathbb{N}$.

Uma foma alternativa de descrever uma sequência limitada é impor a condição

$$|a_n| \leq A\,,$$

nesse caso $M = A$ e $m = -A$.

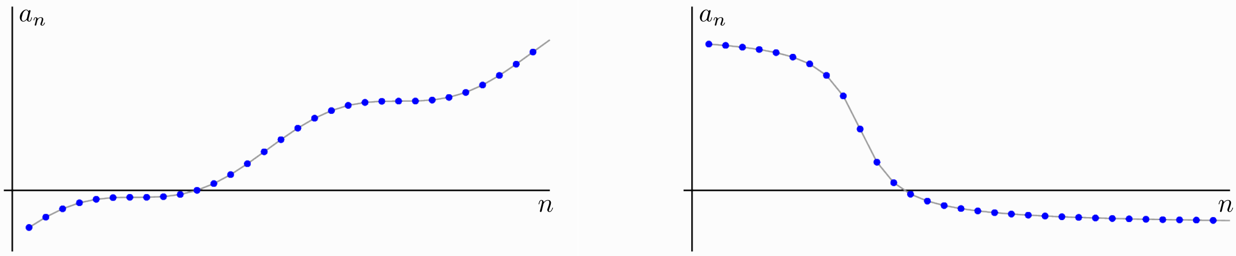
Outra propriedade que vamos definir depende dos termos da sequência serem sempre maiores ou menores do que o seu antecessor. Também existe uma definição equivalente para funções reais, estudada no Cálculo I. Pesquise as semelhanças e diferenças das definições em cada caso.

Definição 5.11: Sequências Crescentes e Decrescentes

Uma sequência (a_n) é:

- Crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- Decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- Monótona se é crescente ou decrescente, também chamada de monotônica.

Note que a definição de sequência crescente não exige que um termo seja estritamente maior do que o anterior, permitindo que ele seja igual. O equivalente vale para as sequências decrescentes. Dessa forma, pela definição, uma sequência constante é crescente e decrescente ao mesmo tempo. Uma nomenclatura mais precisa seria sequência “não decrescente” ou “não crescente”, porém, esses nomes não são comumente usados nos livros de Cálculo. A Figura 5.8 apresenta uma sequência crescente e uma decrescente, ambas são monótonas.



(a) Sequência crescente. (b) Sequência decrescente.

Figura 5.8: Ilustração das sequências crescentes e decrescentes.

Usando as duas definições anteriores podemos apresentar o seguinte teorema que pode nos ajudar a determinar se uma sequência é convergente sem precisar calcular seu limite.

Teorema 5.12: Convergência da Sequência Monótona

Se uma sequência é limitada e monótona então ela é convergente.

Para demonstrar esse resultado será necessário utilizar o ínfimo de um subconjunto dos reais, para os detalhes sobre o ínfimo veja Definição A.1.

Demonstração

Vamos considerar o caso que a_n é decrescente, ou seja,

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \cdots$$

Seja L o maior valor tal que $a_n \geq L$, ou seja, o ínfimo dos termos da sequência

$$L = \inf(a_n), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como L é o maior valor satisfazendo essa propriedade, para qualquer $\varepsilon > 0$

existe N tal que

$$a_N < L + \varepsilon\,.$$

Como a sequência é decrescente, para todo $n > N$, $a_n \leq a_N$, então

$$a_n < L + \varepsilon\,,$$

para todo $n > N$. Como $a_n > L$ segue diretamente que

$$a_n > L - \varepsilon\,.$$

Assim,

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \qquad \text{portanto} \qquad a_n \to L\,.$$

Note que os valores iniciais da sequência não influenciam na sua convergência. Assim basta que ela seja limitada e monótona a partir de algum índice N, isso é, basta que ela seja limitada e monótona para todo $n > N$.

O teorema a seguir explicita a propriedade de que as sequências convergentes sempre são limitadas.

Teorema 5.13: Sequência convergente é limitada

Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração

Tome uma sequência convergente $a_n \to L$. Como ela é convergente podemos escolher um ε e sabemos que existe N tal que, para todo $n > N$, temos que $|x_n - L| < \varepsilon$, ou seja,

$$\varepsilon - L < x_n < \varepsilon + L$$

Como a lista de termos a_n com $n \leq N$ é finita ela possui um minimo e um máximo

$$m_1 = \min_{n \leq N}(a_n) \qquad \text{e} \qquad M_1 = \max_{n \leq N}(a_n)$$

Definindo

$$m = \min(m_1, \varepsilon - L) \qquad \text{e} \qquad M = \max(M_1, \varepsilon + L)$$

Concluímos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$m \leq a_n \leq M$$

e portanto a_n é limitada.

Os últimos teoremas são úteis para verificar se uma dada sequência é ou não convergente, como ilustrado nos exemplos a seguir.

Exemplo 5.4.1: Verifique a convergência das sequências

$$(a_n) = (1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$$
$$(b_n) = (-2, -4, -6, \ldots, -2n, \ldots)$$
$$(c_n) = (1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, \ldots)$$
$$(d_n) = (-1, 4, -9, \ldots, (-1)^n n^2, \ldots)$$

Observamos que nenhuma das sequências é limitada, assim pelo Teorema 5.13 nenhuma pode ser convergente.

Exemplo 5.4.2: Verifique a convergência da sequência $a_n = p^n$ para $p > 1$.

Como $p > 1$, a sequência $a_n = p^n$ é monotônica crescente, mas não é limitada, portanto não é convergente.

Exemplo 5.4.3: Verifique a convergência da sequência $a_n = p^n$ para $0 < p < 1$.

Como $0 < p < 1$, a sequência $a_n = p^n$ é monotônica decrescente e limitada, portanto é convergente.

Exemplo 5.4.4: Para $0 < p < 1$, verifique a convergência da sequência

$$\left(1,\ 1 + p,\ 1 + p + p^2,\ \ldots,\ \sum_{k=0}^{n} p^k,\ \ldots\right).$$

Como $p > 0$, a sequência claramente é crescente.

Vamos verificar que a sequência é limitada. Note que o n-ésimo termo dessa sequência tem a forma

$$a_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^n \,.$$

Multiplicando por p, temos

$$pa_n = p + p^2 + \cdots + p^{n+1} \,.$$

Subtraindo as expressões temos

$$a_n - pa_n = 1 - p^{n+1} \,,$$

ou seja,

$$a_n = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p} \,.$$

Como $0 < p < 1$ sabemos que $0 < p^{n+1} < 1$ e portanto $1 - p^{n+1} < 1$, portanto

$$a_n \leq \frac{1}{1 - a} \,,$$

ou seja, a_n é limitada, sendo assim, a_n é uma sequência convergente.

Exercícios Seção 5.4

1) Suponha que que (a_n) é uma sequência decrescente e que todos os termos estão entre os números 5 e 8. Explique por que a sequência tem um limite. O que você pode dizer sobre o valor do limite?

2) [resp] Determine se a sequência

$$a_n = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!}$$

é monotônica e se é limitada.

3) Determine se cada sequência é monotônica e se é limitada

a) $a_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$

b) $a_n = \dfrac{2^n\,3^n}{n!}$

c) $a_n = 2 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{2^n}$

4) Determine se a sequência dada é crescente, decrescente ou não monótona. Verifique se a sequência é limitada.

a) $a_n = (-2)^{n+1}$

b) $a_n = \dfrac{2}{2n+5}$

c) $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+4}$

d) $a_n = (-1)^n\, n$

e) $a_n = ne^{-n}$

f) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

g) $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

5) Considere a sequência (a_n) definida como

$$a_1 = \sqrt{2} \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

a) Mostre por indução que (a_n) é crescente.

b) Mostre que ela é limitada superiormente por 3.

c) Aplique o Teorema da Sequencia Monótona para mostrar que (a_n) é convergente.

d) Calcule o limite de (a_n).

6) Mostre que a sequência

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

é crescente e $a_n < 3$ para todo n. Verifique se (a_n) é convergente e se for calcule seu limite.

7) Mostre que a sequência

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

é decrescente e satisfaz $0 < a_n \leq 3$ para todo n. Verifique se (a_n) é convergente e se for calcule seu limite.

5.5 Teorema do Confronto

O Teorema do Confronto é um resultado que nos permite obter o limite de uma sequência pela análise de sequências outras mais simples, ou já conhecidas, como descrito no teorema a seguir.

Teorema 5.14: Teorema do Confronto para Sequências

Sejam (a_n), (b_n) e (c_n) sequências de números reais tais que, para $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq b_n \leq c_n \,.$$

Se as sequências (a_n) e (c_n) convergem para um mesmo limite L

$$\lim a_n = \lim c_n = L$$

então a sequência b_n é convergente e

$$\lim b_n = L \,.$$

Demonstração

Como

$$\lim a_n = \lim c_n = L \,,$$

dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, por exemplo, $N = \max(N_1, N_2)$, onde N_1 e N_2 são associados às sequências a_n e c_n, tal que, para todo $n > N$

$$|a_n - L| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad |c_n - L| < \varepsilon\,,$$

ou seja,

$$-\varepsilon + L < a_n < \varepsilon + L \qquad \text{e} \qquad -\varepsilon + L < c_n < \varepsilon + L\,,$$

mas como $a_n \leq b_n \leq c_n$, segue que

$$-\varepsilon + L \ < \ a_n \ \leq \ b_n \ \leq \ c_n \ < \ \varepsilon + L\,.$$

Daí seque que $-\varepsilon < b_n - L < \varepsilon$, ou seja $|b_n - L| < \varepsilon$, o que implica que $b_n \to L$.

A Figura 5.9 ilustra o Teorema do Confronto 5.14, no caso onde sabemos que a_n e c_n convergem para L e que $a_n \leq b_n \leq c_n$, portanto podemos concluir que $b_n \to L$.

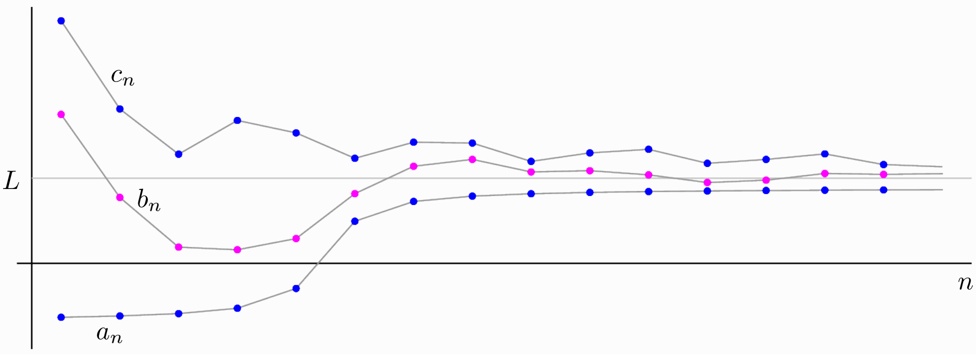


Figura 5.9: Ilustração do Teorema do Confronto com $a_n \leq b_n \leq c_n$.

O próximo exemplo mostra uma aplicação do Teorema do Confronto para calcular o limite de uma sequência.

EXEMPLO 5.5.1: Calcule o limite da sequência $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Note que

$$\frac{-1}{2n-1} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \leq \frac{1}{2n-1}\,.$$

Como

$$\lim \frac{-1}{2n-1} = \lim \frac{1}{2n-1} = 0\,,$$

segue, pelo Teorema do Confronto, que

$$\lim \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 0\,.$$

Analisando a sequência do exemplo anterior observamos que ela é o produto de uma sequência limitada

$$a_n = (-1)^{n+1}$$

por uma sequência que converge para zero

$$b_n = {}^{1}\!/_{(2n-1)}$$

e concluímos que ela converge para zero. Esse fato é verdade, como apresentado pelo corolário a seguir.

Corolário 5.15: Sequência que Converge para Zero

Se a_n é uma sequência limitada

$$|a_n| \leq M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e algum número $M > 0$ e b_n uma sequência que converge para zero

$$\lim b_n = 0$$

então

$$\lim a_n\, b_n = 0\,.$$

O próximo exemplo utiliza esse resultado para calcular o limite de uma sequência.

Exemplo 5.5.2: Calcular o limite de $\dfrac{\cos n}{n}$.

Uma vez que $\cos n$ é limitada e $\dfrac{1}{n} \to 0$ podemos concluir que $\lim \dfrac{\cos n}{n} = 0$.

Exercícios Seção 5.5

1) [resp] A sequência (a_n) converge ou diverge? Encontre seu limite se for convergente.

$$a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$$

2) Verifique se a sequência converge ou não e calcule o limite das sequências convergentes.

a) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}\, n}{n^2+1}$

b) $a_n = \dfrac{(-1)^n\, n^3}{n^3+2n^2+1}$

c) $a_n = \dfrac{\cos^2(n)}{2^n}$

d) $a_n = 2^{-n}\cos(n\pi)$

e) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen}(2n)}{1+\sqrt{n}}$

5.6 Revisão

1) Determine quais sequências são convergentes e quais são divergentes. Calcule o limite das sequências convergentes.

a) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

b) $a_n = \dfrac{1-(-1)^n}{\sqrt{n}}$

c) $a_n = \dfrac{1-2^n}{2^n}$

d) $a_n = 1 + \left(\dfrac{9}{10}\right)^n$

e) $a_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

f) $a_n = \operatorname{sen}(n\pi)$

g) $a_n = \dfrac{\ln(n^2)}{n}$

h) $a_n = \dfrac{\ln(2n+1)}{n}$

i) $a_n = \dfrac{n+\ln(n)}{n}$

j) $a_n = \dfrac{\ln(2n^3+1)}{n}$

k) $a_n = \left(\dfrac{n-5}{n}\right)^n$

l) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

m) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n}}$

n) $a_n = \left(\dfrac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

o) $a_n = n\left(2^{1/n}-1\right)$

p) $a_n = \sqrt[n]{2n+1}$

q) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n!}$

r) $a_n = \dfrac{(-4)^n}{n!}$

2) Considere as sequências

$$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{n^2}$$

a) Enuncie a definição de convergência de uma sequência e use essa definição para mostrar que $b_n \to 0$.

<u>Dica</u>: *Se* $\varepsilon > 0$ *e* $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$ *então* $^1/_{n^2} < \varepsilon$.

b) Mostre que $a_n \to 0$ e que $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$.

3) Defina divergência ao infinito ($\lim a_n = \infty$). Mostre, usando essa definição, que se $\lim a_n = \infty$, então $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$.

4) Considere as sequências

$$a_n = \frac{n!}{5^n} \qquad b_n = \frac{1}{n \ln n} \qquad c_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(\ln n)}$$

Verifique se as sequências a_n, b_n e c_n convergem ou divergem. Calcule o limite no(s) caso(s) em que converge.

5) Expresse a dizima periódica $0{,}\overline{23} = 0{,}232\,323\,232\ldots$ como a razão de dois números inteiros.

6) Qual frase a seguir é verdadeira e qual é falsa? Prove a verdadeira e dê um contra exemplo para a falsa.

a) Toda sequência convergente é limitada.

b) Toda sequência limitada é convergente.

7) Considerando as sequências

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad c_n = \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}$$

mostre que

$$a_n \to 0 \qquad b_n^{2/n} \to 1 \qquad \frac{c_n}{b_n} \to \frac{1}{2}$$

8) Mostre que $1 = 0{,}\bar{9} = 0{,}999\ldots$

9) Verifique se a sequência converge ou não e calcule o limite das sequências convergentes.

a) $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$

b) $a_n = n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

c) $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

d) $a_n = \ln\left(2n^2 + 1\right) - \ln\left(n^2 + 1\right)$

e) $a_n = \dfrac{\left(\ln(n)\right)^2}{n}$

f) $a_n = \operatorname{arctg}\left(\ln(n)\right)$

g) $a_n = n - \sqrt{n+1}\,\sqrt{n+3}$

h) $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

i) $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

6

Séries Numéricas

6.1 Definição

Séries são somas com um número infinito de termos. As primeiras questões que precisamos responder é o que exatamente isso significa e quando essa soma faz sentido. Para isso vamos utilizar as ideias construídas no estudo das sequências numéricas.

Definição 6.1: Série Numérica

Série Numérica é a soma dos infinitos termos de uma sequência numérica, (a_n),

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Cada termo a_n é chamado de Termo Geral da série.

Para determinarmos se essa soma faz sentido precisamos construir um critério de convergência, para isso, vamos construir outra sequência numérica associada a série.

Definição 6.2: Sequência de Somas Parciais

Seja (a_n) uma sequência de números reais, sua Sequência de Somas Parciais é definida como

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,.$$

Podemos agora definir a convergência das séries numéricas usando a definição da convergência das sequências numéricas.

Definição 6.3: Convergência de Uma Série

Dada uma série numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

dizemos que ela converge para um número real L quando sua sequência de somas parciais (S_n) converge para L, isso é, $S_n \to L$. Nesse caso podemos escrever

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L$$

e dizemos que L é a Soma da Série.

No caso em que a sequência de somas parciais diverge, dizemos que a série diverge.

Quando é evidente que os índices da série variam de 1 até ∞, podemos usar apenas a notação

$$\sum a_n \, .$$

Entretanto, muitas vezes as séries começam com índices diferentes de 1, nesses casos os índices precisam ser explicitados, por exemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \, .$$

Para ilustrar os conceitos envolvendo séries infinitas apresentados, vamos explorar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \, .$$

Essa série é interessante pois podemos interpretá-la geometricamente com facilidade. Note que os primeiros termos da sequência que queremos somar são

$$a_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad a_2 = \frac{1}{4}\,, \qquad a_3 = \frac{1}{8}\,, \qquad a_4 = \frac{1}{16}\,, \qquad a_5 = \frac{1}{32}\,.$$

Podemos imaginar que cada termo é a área de um retângulo e queremos encontrar a área da figura formada pela união de todos esses retângulos. A Figura 6.1 ilustra geometricamente os cinco primeiros termos da sequência de somas parciais dessa série e sua soma. O próximo exemplo efetua os cálculos para mostrar que a série realmente converge e que sua soma é igual a 1.

Exemplo 6.1.1: Calcular a soma os termos da sequência $a_k = \dfrac{1}{2^k}$.

Queremos calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \, .$$

O gráfico a seguir ilustra a soma dessa série, cada retângulo tem base igual a um e altura igual ao termo correspondente da série a_n.

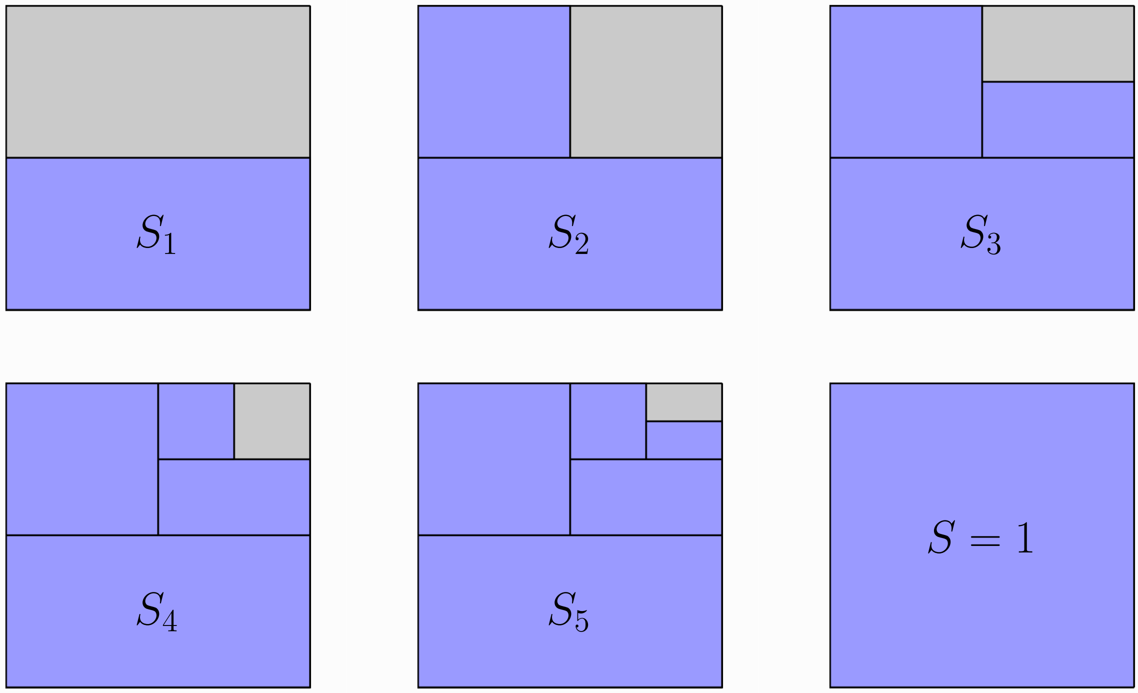
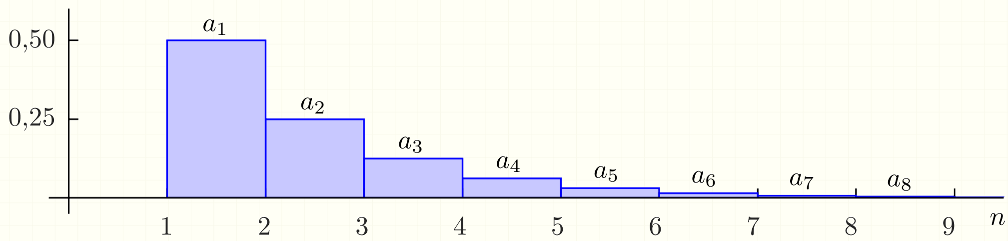


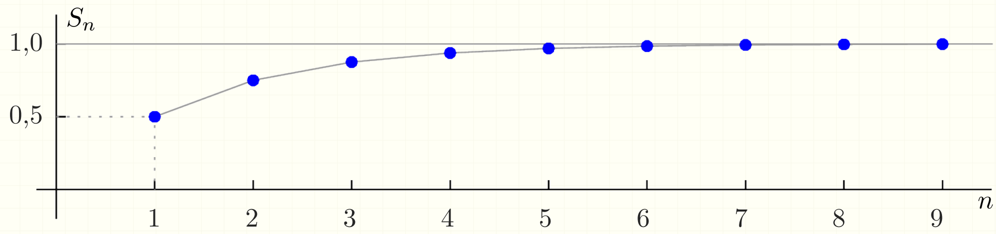
Figura 6.1: Ilustração das somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.



Para analisarmos se a série converge e qual seria o valor da sua soma, vamos construir a sequência de somas parciais dessa série:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 &&= \frac{1}{2}, \\
S_2 &= a_1 + a_2 &&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 &&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \\
S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.
\end{aligned}
$$

O próximo gráfico mostra os primeiros termos da sequência de somas parciais.



Podemos observar nos gráficos que, como esperado, a série converge para um. Porém, não podemos ficar dependentes da evidencia gráfica, que muitas vezes é enganosa. Precisamos verificar rigorosamente esse resultado. Para isso precisamos identificar a fórmula geral para cada soma parcial. Esse é um ponto onde alguns livros escrevem "*é fácil ver que*" para não serem forçados a escrever "*após muita dor e sofrimento descobrimos que*"

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}, \qquad S_2 = 1 - \frac{1}{4}, \qquad S_3 = 1 - \frac{1}{8}, \qquad S_4 = 1 - \frac{1}{16}.$$

Observando o padrão podemos escrever uma conjectura sobre como a fórmula geral deve ser

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Agora precisamos verificar se ela é verdadeira para todos os valores de $n \in \mathbb{N}$. Uma técnica para fazer essa demonstração é utilizar a Indução Finita, veja a Seção A.3. Para isso precisamos primeiro mostrar que a fórmula vale para $n = 1$. Depois assumimos que ela vale para um n qualquer e, partido dessa hipótese, mostrarmos que ela vale para o próximo, $n + 1$.

A demostração que a fórmula vale para $n = 1$ pode ser feita por mera avaliação. Vamos agora assumir que a fórmula vale para um valor qualquer $n = k - 1$

$$S_{k-1} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}}, \tag{6.1}$$

queremos mostrar que isso implica que ela também vale para o próximo $n = k$. Começamos calculando S_k

$$S_k = S_{k-1} + a_k = S_{k-1} + \frac{1}{2^k},$$

substituindo a hipótese de indução (6.1) temos

$$S_k = 1 - \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k}$$

$$= 1 - \frac{2}{2^k} + \frac{1}{2^k}$$
$$= 1 - \frac{1}{2^k},$$

que é a fórmula que desejamos demonstrar.

Tendo uma expressão explícita para os termos da sequência de somas parciais, podemos calcular seu limite e determinar a soma da série.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \lim 1 - \lim \frac{1}{2^n} \\
&= 1 - 0 = 1\,.
\end{aligned}$$

Portanto, a série converge e podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1\,.$$

Código Python para ilustrar algumas séries e suas somas parciais.

Exemplos de Séries

Apresentamos agora alguns exemplos de séries numéricas importantes. A série geométrica e a telescópica são exemplos para os quais podemos calcular a soma da série com relativa facilidade. Além dessas duas séries, também apresentaremos nessa seção as séries do inverso do quadrado e inverso do fatorial.

Definição 6.4: Série Geométrica

Sejam α e r números reais com $\alpha \neq 0$, uma série com a forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1} = \alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \cdots + \alpha r^{n-1} + \cdots$$

é chamada de Série Geométrica.

No ensino básico a sequência dos termos dessa série é chamada de Progressão Geométrica. Esse é um exemplo especialmente importante pois conseguimos verificar sua convergência e calcular sua soma com relativa facilidade.

Proposição 6.5: Convergência da Série Geométrica

A série geométrica converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$.

No caso em que a série converge, isso é, se $|r| < 1$ a soma da série é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1} = \frac{\alpha}{1-r}\,. \tag{6.2}$$

Demonstração

A sequência de somas parciais da série geométrica é

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha r^{k-1}\,.$$

Subtraindo rS_n de S_n, obtemos

$$\begin{aligned} S_n(1-r) &= S_n - rS_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha r^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} \alpha r^{k} \\ &= \left(\alpha + \alpha r + \cdots + \alpha r^{n-1}\right) - \left(\alpha r + \cdots + \alpha r^{n-1} + \alpha r^n\right) \\ &= \alpha - \alpha r^n\,. \end{aligned}$$

Temos então que

$$S_n = \frac{\alpha\,(1-r^n)}{1-r}\,.$$

Como $r^n \to 0$ se $|r| < 1$ e $|r^n| \to \infty$ se $|r| \geq 1$, segue que

$$S_n \to \frac{\alpha}{1-r}$$

se $|r| < 1$ e S_n diverge se $|r| \geq 1$.

Observe que na demonstração todas as manipulações algébricas aconteceram com as somas parciais, que são somas finitas e não envolvem limites. Só depois de obtermos uma expressão explícita para S_n é que fizemos n tender para o infinito e calculamos o limite.

Ao aplicar a proposição acima, cuidado com os índices, por exemplo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} br^n$$

também é uma série geométrica, mas a proposição não pode ser aplicada diretamente. Primeiro precisamos reescrever a série de modo que os índices sejam compatíveis com os da proposição. Nesse caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} br^n = \sum_{n=1}^{\infty} brr^{n-1}\,.$$

Então podemos tomar $\alpha = br$ e se $|r| < 1$ teremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} br^n = \frac{br}{1-r}\,.$$

Exemplo 6.1.2: Verifique a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n}$.

Essa série pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}.$$

Então é uma série geométrica com $\alpha = {}^4\!/_5$ e $r = {}^2\!/_5$. Como $|r| = {}^2\!/_5 < 1$, segue do critério de convergência da série geométrica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n} = \frac{4/5}{1 - 2/5} = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}.$$

EXEMPLO 6.1.3: Escreva a dízima periódica $0{,}\overline{d} = 0{,}ddddd\dots$ (onde $d \neq 0$ é um dígito) como a razão de dois números.

$$\begin{aligned} 0{,}ddd\,ddd\dots &= \frac{d}{10} + \frac{d}{(10)^2} + \frac{d}{(10)^3} + \cdots \\ &= \frac{d}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{(10)^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{d}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \\ &= \frac{d}{10}\left(\frac{1}{1 - 1/10}\right) \\ &= \frac{d}{10}\left(\frac{1}{0{,}9}\right) \\ &= \frac{d}{9}. \end{aligned}$$

Note que o resultado obtido nesse exemplo mostra que $0{,}999\,999\dots$ é igual a 1.

DEFINIÇÃO 6.6: SÉRIE TELESCÓPICA

Dizemos que uma série é telescópica se todos os termos, exceto o primeiro e o último, da n-ésima soma parcial se anulam.

Essa definição e seu uso para calcular o limite de uma série são melhor explicados com a utilização de um exemplo.

Exemplo 6.1.4: Encontre a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$.

Escrevendo os primeiros temos dessa série percebemos que eles se anulam quando somados

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2\cdot 1+1} - \frac{1}{2\cdot 1+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5},\\
a_2 &= \frac{1}{2\cdot 2+1} - \frac{1}{2\cdot 2+3} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7},\\
a_3 &= \frac{1}{2\cdot 3+1} - \frac{1}{2\cdot 3+3} = \frac{1}{7} - \frac{1}{9}.
\end{aligned}
$$

Assim, expandindo os termos da série e cancelando a segunda fração de um termo com a primeira do termo seguinte temos

$$
\begin{aligned}
S_k &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k\\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)\\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2k+3}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2k+3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 6.1.5: Encontre a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$.

Primeiro escrevemos o termo geral em somas parciais

$$a_n = \frac{4}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{A}{4n-3} + \frac{B}{4n+1}.$$

Então, $A(4n+1) + B(4n-3) = 4$. Assim, para $n = 1$ e $n = 2$, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 5A + B = 4 \\ 9A + 5B = 4 \end{cases}$$

Resolvendo, temos $A = 1$ e $B = -1$, ou seja,

$$a_n = \frac{4}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\,.$$

Escrevendo agora os primeiros temos da série:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4\cdot 1-3} - \frac{1}{4\cdot 1+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{5}\,, \\ a_2 &= \frac{1}{4\cdot 2-3} - \frac{1}{4\cdot 2+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{9}\,, \\ a_3 &= \frac{1}{4\cdot 3-3} - \frac{1}{4\cdot 3+1} = \frac{1}{9} - \frac{1}{13}\,. \end{aligned}$$

Assim, expandindo os termos da série e cancelando a segunda fração de um termo com a primeira do termo seguinte temos

$$\begin{aligned} S_k &= \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{4k+1}\,. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)} = \lim_{k\to\infty} S_k = 1\,.$$

Dada uma sequência (x_n) qualquer, podemos construir uma série $\sum a_n$ cujo termo geral é dado por

$$a_1 = x_1\,, \qquad a_{n+1} = x_{n+1} - x_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então a sequência de somas parciais é dada por

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_n\,. \end{aligned}$$

Assim, se a sequência (x_n) converge para L, a série $\sum a_n$ também converge para L. Por outro lado, se a sequência (x_n) diverge, a série também diverge. Essa é uma forma de construir uma infinidade de séries telescópicas.

Apresentamos a seguir as Séries do Inverso do Quadrado e do Inverso do Fatorial e suas somas.

Definição 6.7: Série do Inverso do Quadrado

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

é conhecida como Série do Inverso do Quadrado.

Definição 6.8: Série do Inverso do Fatorial

A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e = \approx 2{,}7183$$

é chamada de Série do Inverso do Fatorial.

Para calcular as somas dessas séries precisamos de resultados que serão apresentados mais a frente neste capítulo. Vamos mostrar que a Série do Inverso do Quadrado Converge no Exemplo 6.4.1 e calculamos seu valor na subseção sobre o problema de Basileia 9.6. A verificação da convergência da Série do Inverso do Fatorial está no Exemplo 6.4.2 e o cálculo da sua soma é feito no Exemplo 8.2.4.

Exercícios Seção 6.1

1) Escreva as quatro primeiras somas parciais S_n da série.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2-n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n)$

2) Escreva a série como um somatório.

a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots$

b) $2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12 + \cdots$

c) $3 + \frac{5}{2} + \frac{7}{4} + \frac{9}{8} + \frac{11}{16} + \cdots$

d) $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \cdots$

3) [resp] Encontre a fórmula para a n-ésima soma parcial da série

$$\frac{9}{100}+\frac{9}{100^2}+\frac{9}{100^3}+\cdots\frac{9}{100^n}+\cdots$$

use-a para encontrar a soma da série se ela convergir.

4) Encontre a fórmula para a n-ésima soma parcial de cada série e use-a para encontrar a soma da série se ela convergir.

a) $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}+\cdots$

b) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots$

c) $1-2+4-8+\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}+\cdots$

d) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$
$+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\cdots$

e) $\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{5}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

5) [resp] Escreva os primeiros termos da série para mostrar como a série começa. Então, calcule a soma da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$$

6) Escreva os primeiros termos de cada série para mostrar como a série começa. Então, calcule a soma da série.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{4^n}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5}{4^n}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right)$

7) [resp] Encontre uma fórmula para a n-ésima soma parcial da série e use-a para determinar se a série converge ou diverge. Se a série converge, encontre a soma.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

8) Encontre uma fórmula para a n-ésima soma parcial de cada série e use-a para determinar se a série converge ou diverge. Se a série converge, encontre sua soma.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n^2}-\frac{3}{(n+1)^2}\right)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\sqrt{n+1}-\ln\sqrt{n}\right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}(n)-\operatorname{tg}(n-1)\right)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}\right)$

9) Calcule a soma da série telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

10) Considere a série geométrica

$$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{(-9)^{(n-9)}}{10^{(n-10)}}$$

a) Rearranje os índices da série geométrica acima para que ela fique na forma $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ e identifique a e r.

b) Encontre o limite da série caso ela convirja.

11) Escreva os primeiros termos das séries geométricas e encontre a e r. Em seguida determine para quais valores de x temos que $|r|<1$ e calcule a soma de série.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}3\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{-2n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x+1)^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 (x-3)^n$

h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{sen}^n(x)$

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\big(\ln(x)\big)^n$

6.2 Propriedades

Nessa seção apresentamos algumas propriedades das séries que podemos utilizar ao fazermos manipulações algébricas.

Teorema 6.9: Linearidade das Séries

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries convergentes e $c \in \mathbb{R}$, então

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n + \sum_{n=1}^{\infty}b_n\,,$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n - \sum_{n=1}^{\infty}b_n\,,$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,.$

Exemplo 6.2.1: Calcular a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right).$

Observe que a série que queremos calcular é a soma, termo a termo de duas séries geométricas. Além disso, as razões das séries geométricas são $|{}^1\!/_2| < 1$ e $|-{}^1\!/_5| < 1$. Então, podemos usar a regra da soma de séries e a fórmula da soma da série geométrica.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n$$
$$=\frac{1}{1-1/2}+\frac{1}{1+1/5}=\frac{17}{6}\,.$$

Note que, nesse exemplo, o índice começou em zero e não em 1. O início da série não tem influência na convergência, mas pode mudar o valor da soma da série.

Exemplo 6.2.2: Calcular a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right]$.

Observe que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}$ converge, pois é uma série geométrica com $r = 1/4 < 1$, além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

é uma série telescópica com a sequência de somas parciais dada por

$$S_n = 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\to 1\,.$$

Temos então que

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right]$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}$$
$$=1-\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$
$$=1-\frac{1}{16}\,\frac{1}{1-1/4}$$
$$=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}\,.$$

A hipótese de que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries convergentes é importante, por exemplo, se considerarmos as duas séries divergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$$

observamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n+(-1)^{n+1}\right]=0 \quad \neq \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\right)+\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\right).$$

Manipulando Índices e Termos

Primeiro vamos destacar uma característica do cálculo do limite de uma série, não importa o valor dos primeiros termos, $n < N$, pois a existência do limite só depende do que acontece no "final" da série. Assim quando formos verificar a convergência sempre que for conveniente podemos ignorar o início da série. Não se esqueça que isso só vale para determinar a convergência, o valor da soma, se existir, provavelmente será alterado. O teorema a seguir formaliza essa afirmação.

Teorema 6.10: Verificando a Convergência

Ao verificarmos a convergência de uma série basta analisar a soma dos termos a partir de um índice N, isso é, se a série

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

for convergente, ou divergente, então a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

terá a mesma propriedade.

Podemos construir novas séries a partir de uma série dada, por exemplo, adicionando ou retirando termos. Note que mudar a ordem dos termos de uma série cria outra série. Se a mudança é feita em uma quantidade finita de termos a nova série mantêm a convergência ou divergência da série original. Porém, se infinitos termos forem alterados será necessário analisar separadamente a convergência da nova série.

Se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge, então a série onde removemos, $k > 0$, ou incluímos termos, $k < 0$,

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}$$

também converge, desde que os temos adicionais estejam bem definidos. Se a série original divergir então a nova série também diverge. Note que no caso de convergência, se $k \neq 0$ o limite é alterado. De fato, se L é o limite da série original, no caso onde removemos termos, $k > 0$, temos que

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - (a_1 + \cdots + a_{k-1}) = L - (a_1 + \cdots + a_{k-1}) \ .$$

Enquanto que, quando acrescentando termos, $k < 0$, temos que

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + (a_k + \cdots + a_{-1}) = L + (a_k + \cdots + a_{-1}) \ .$$

Proposição 6.11: Alterando os Termos de uma Série

Adicionar, retirar ou permutar um número finito de termos em uma série, não altera o fato da série convergir ou divergir.

Porém, pode alterar o valor da soma da série, caso ele exista.

Exemplo 6.2.3: Verifique a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=-3}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

converge, pois é uma série geométrica com $r = 1/2$. Portanto, a série

$$\sum_{n=-3}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

também converge. Além disso,

$$\begin{aligned}\sum_{n=-3}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= 2^3 + 2^2 + 2^1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 8 + 4 + 2 + \frac{1}{1 - 1/2} \\ &= 14 + 2 \\ &= 16\,.\end{aligned}$$

Proposição 6.12: Reindexando uma Série

Alterar o índice inicial de uma série da seguinte maneira

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

não altera a convergência ou a soma da série, caso ela exista.

Note que, quando $k < 0$, estamos iniciando a série com índices menores do que zero. Por outro lado, se $k > 0$, estamos começando a série com índices positivos. Claro que esse tipo de mudança nos índices também podem ser feitas em séries indexadas a partir de $n \neq 0$. De forma geral temos

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=m+k}^{\infty} a_{n-k}\,.$$

Note que não é necessário decorar essa fórmula, basta fazer um mudança de variáveis.

Exemplo 6.2.4: Reescreva a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)}$ indexando-a a partir de -1.

Como n começa em 1 e queremos indexar a partir de -1, basta introduzir um novo índice $m = n - 2$, então $n = m + 2$ e $m = -1, \ldots, \infty$. Assim, a série indexada a partir de -1 é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} = \sum_{m=-1}^{\infty} \frac{5}{(m+2)(m+3)}.$$

Exemplo 6.2.5: Reindexe a série do exemplo anterior a partir 20.

Para indexar a partir de 20, queremos que $m = 20$ corresponda a $n = 1$, ou seja, quando $m = 20$ devemos ter $m + a = n = 1$ e $m + b = n + 1 = 2$. Assim os valores de a e b devem ser -19 e -18. Concluímos que a nova série é escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} = \sum_{m=20}^{\infty} \frac{5}{(m-19)(m-18)}.$$

Exercícios Seção 6.2

1) Calcule a soma da série.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}\right)$

6.3 Teste de Divergência

A partir desse ponto começamos a construir um conjunto de ferramentas que nos ajudam a decidir se uma série converge ou não. Note que, por enquanto, não estamos preocupados com a soma da série, queremos apenas saber se a soma existe. O primeiro desses resultados, que chamamos de Teste de Divergência ou Teste do Termo Geral, nos ajuda a identificar muitas séries que não podem ser convergentes com relativa facilidade . Dessa forma, sempre o aplicamos primeiro para descartar rapidamente essas séries. O teorema a seguir é o principal resultado que nos permite construir o teste da divergência.

Teorema 6.13: Limite do Termo Geral

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente a_n tende para zero.

Demonstração

Como a série é convergente, a sequência de somas parciais S_n é convergente, ou seja,

$$\lim S_n = \lim S_{n-1} = L$$

observando que $S_n - S_{n-1} = a_n$ concluirmos que

$$\lim a_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = L - L = 0\,.$$

O teste de divergência é uma consequência direta desse teorema.

Teorema 6.14: Teste de Divergência

Se a sequência a_n não converge para zero, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Uma forma para provar que uma série diverge é mostrar que o seu termo geral a_n ou converge para um limite diferente de zero ou diverge. Mas tome cuidado, isso não quer dizer que toda série que diverge satisfaz a propriedade que o termo geral não converge para zero, ou, analogamente, não é verdade que toda série cujo termo geral converge para zero é uma série convergente. Os próximos exemplos ilustram o uso desse teste em algumas séries específicas.

Exemplo 6.3.1: Mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ diverge quando $|r| \geq 1$.

A série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

diverge quando $|r| \geq 1$, pois, nesse caso, ar^{n-1} não converge para zero. Verificamos isso observando que se $r = 1$

$$ar^n \to a \neq 0$$

enquanto que, se $|r| > 1$ ou $r = -1$, ar^{n-1} diverge.

Exemplo 6.3.2: Verificar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n$

A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n$ diverge, uma vez que $\lim \left(\sqrt{2}\right)^n = \infty$ pois $\sqrt{2} > 1$.

Exemplo 6.3.3: Verificar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi)$

Essa série diverge, pois $\lim \cos(n\pi)$ não existe, já que

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

que alterna entre -1 e 1.

Exemplo 6.3.4: Verificar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ diverge, pois $\lim \dfrac{n^n}{n!} = \infty$. De fato, note que, se $n \geq 2$,

$$n! \;=\; 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \;\leq\; \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{n-1 \text{ fatores}} \;=\; n^{(n-1)}$$

Então, multiplicando ambos os lados por n

$$n\,n! \leq n^n \qquad \Rightarrow \qquad n \leq \frac{n^n}{n!}$$

Como $n \to \infty$, seque que $\dfrac{n^n}{n!} \to \infty$.

Exemplo 6.3.5: Verificar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$.

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$ diverge, pois

$$\lim \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right) = \ln\left(\lim \frac{n}{2n+1}\right) = \ln\frac{1}{2} \neq 0\,.$$

A seguir apresentamos um exemplo clássico de uma série cujo termo geral converge para zero mas a série diverge. Primeiro vamos apresentar a definição dessa série e em seguida verificamos que ela é divergente.

Definição 6.15: Série Harmônica

A Série Harmônica é a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Exemplo 6.3.6: Verificar a convergência da série harmônica.

Para ver que essa série diverge, observe que

$$\begin{aligned}
S_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} \\
&= 1 + \frac{n}{2} \to \infty\,.
\end{aligned}$$

Portanto a série diverge, mesmo que ${}^1\!/\!_n \to 0$.

Exercícios Seção 6.3

1) [resp] A série converge ou diverge? Justifique sua resposta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$$

2) [resp] Use o teste do n-ésimo termo para divergência para mostrar que a série é divergente ou afirmar que o teste não é conclusivo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$$

3) [resp] Verifique se a série é convergente, caso seja calcule seu limite.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{3}{2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi)$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{5^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{3^n}\right)$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n}$

j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} \quad |x| > 1$

k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{3^n + 4^n}$

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$

s) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$

t) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}$

6.4 Teste da Integral

Nesta seção e nas próximas vamos apresentar alguns testes que podem ser utilizados para verificar se séries com termos não-negativos são convergentes. Começamos definindo esse caso particular de séries.

Definição 6.16: Série com Termos Não Negativos

Uma série $\sum a_n$ onde todos os termos da sequência a_n são não negativos, isso é,

$$a_n \geq 0 \qquad \forall n$$

é chamada de Série de Termos Não Negativos.

Note que se quisermos estudar uma série com ternos não positivos $a_n \leq 0$ podemos remover todos os sinais negativos e estudar a série de termos não negativos correspondente. Uma das razões para começarmos o estudo da convergência das séries por esse caso particular é que podemos usar o Teorema da Sequência Monotônica 5.12 na sequência das somas parciais o que produz o seguinte corolário.

Corolário 6.17: Convergência de Série com Termos Não Negativos

Uma série $\sum a_n$ de Termos Não Negativos, $a_n \geq 0$, é convergente se, e somente se, sua sequência de somas parciais é uma sequência limitada.

Demonstração

Basta ver que a sequência de somas parciais é crescente, já que a sequência do termo geral é não negativa. Assim, S_n é monotônica e portanto convergente. Por outro lado, se a série é convergente, então a sequência S_n é convergente e, portanto, limitada.

Os próximos exemplos ilustram o uso desse resultado. No início do Capítulo definimos a Série do Inverso do Quadrado (Definição 6.7) e apresentamos sua soma sem demonstração, vamos agora mostrar que ela converge.

Exemplo 6.4.1: Mostre que a Série do Inverso do Quadrado é convergente.

Verificamos facilmente que todos os termos são positivos e construímos a sequência de somas parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{n^2}\,.$$

Começamos manipulando S_n

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&= 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{nn} \\
&< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\
&= 1 + \sigma_n
\end{aligned}$$

onde σ_n são todos os termos exceto o primeiro

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k}\,,
\end{aligned}$$

ou seja, σ_n é a sequência de somas parciais da série com termos

$$a_k = \frac{1}{(k-1)k}\,.$$

Decompondo a_k em frações parciais

$$a_k = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

verificamos que essa é uma Série Telescópica e portanto podemos calcular seu limite

$$\sigma = \lim_{n \to \infty} \sigma_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n}$$

$$= 1 \,.$$

Retornando a S_n, para todo $n \geq 2$ podemos escrever

$$S_n < 1 + \sigma_n$$

calculando o limite nos dois lados da desigualdade verificamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;<\; 2\,,$$

ou seja, a série é limitada. Portanto pelo Corolário 6.17 ela é convergente.

Vamos também mostrar que a Série do Inverso do Fatorial 6.8 é convergente.

Exemplo 6.4.2: Mostre que a Série do Inverso do Fatorial é convergente.

Também nesse caso é fácil verificar que os termos da série são todos positivos e começamos manipulando suas somas parciais

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2} + \frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 2\cdots 2\cdot 2}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\,.$$

Observe que, removendo o primeiro termo, a última expressão é a n-ésima soma parcial da série geométrica com $\alpha = 1$ e $r = 1/2$,

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} ,$$

cuja soma é

$$\sigma = \frac{\alpha}{1-r} = \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{1/2} = 2 .$$

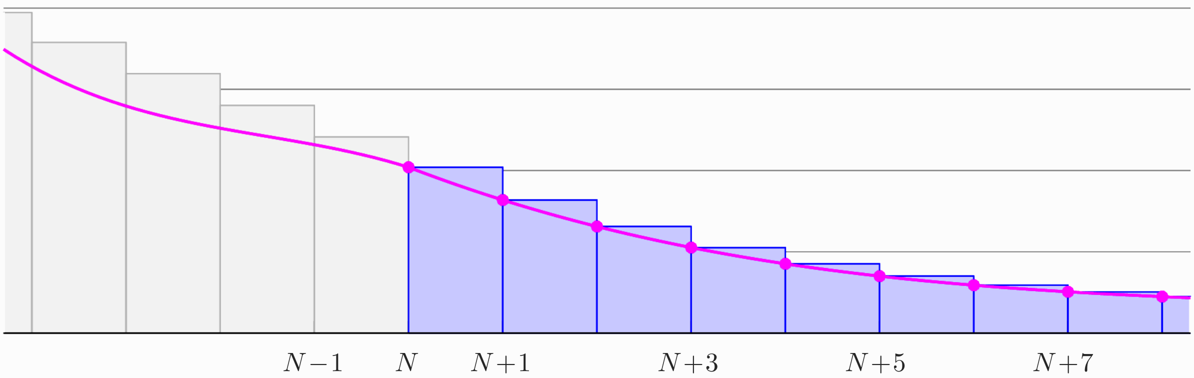
Retornando a S_n, temos que, para todo $n \geq 2$ vale a seguinte desigualdade

$$S_n < 1 + \sigma_n .$$

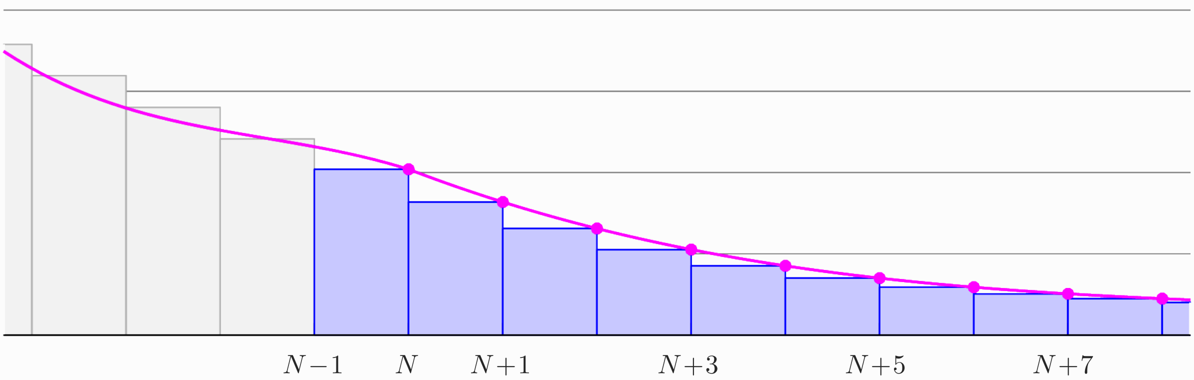
Calculando o limite dos dois lados da desigualdade verificamos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 3 .$$

Como a série só tem termos não negativos e é limitada, usamos o Corolário 6.17 para concluir que a série é convergente.



(a) Construindo os retângulos a direita a série é maior do que a integral.



(b) Construindo os retângulos a esquerda a série é menor do que a integral.

Figura 6.2: Ilustração do teste da integral.

Vamos agora apresentar o teste da integral que compara a soma da série com a Integral Imprópria **??** de uma função f. Porém, antes de apresentar esse resultado, vamos explorar as ideias envolvidas analisando a Figura 6.2. Estamos assumindo que, pelo menos a partir de algum ponto $n \geq N$, os termos da série sejam dados pela função, $a_n = f(n)$, e que a função é contínua e decrescente para $x \geq N$. Vamos representar os termos da série por retângulos de largura um e altura a_n, que podem ser construídos a direita ou a esquerda do ponto $x = n$. Como f é decrescente, se os retângulos estão na direita como no Gráfico 6.2a, a área do retângulo é maior do que a integral de f em cada intervalo $[n, n+1]$. Enquanto que, se desenharmos o retângulo à esquerda como no Gráfico 6.2b, a integral será maior do que a área do retângulo. O próximo teorema usa essas relações para associar a convergência da integral imprópria com a existência da soma da série.

Teorema 6.18: Teste da Integral

Seja a_n uma sequência tal que para todo $n \geq N$, onde N é um número natural, $a_n \geq 0$. Seja f uma função contínua, positiva e decrescente para $x \geq N$, satisfazendo $f(n) = a_n$, para todo $n \geq N$. Então, a série

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

converge se, e somente se, a integral

$$\int_N^{\infty} f(x)\,dx$$

converge.

Demonstração

Prova da Ida

Vamos mostrar primeiro que a convergência da série garante a convergência da integral. Seja $n > N$ e considere a partição do intervalo $[N, n]$ dada por

$$[N, N+1] \cup [N+1, N+2] \cup \cdots \cup [n-1, n]\,.$$

Como cada intervalo tem comprimento igual a 1, a função f é decrescente e estamos considerando os retângulos a direita do ponto $x = n$, segue que a soma parcial

$$S_{N,n-1} = a_N + a_{N+1} + \cdots + a_{n-1}$$

nos dá um limite superior para área abaixo do gráfico da função f dentro do intervalo $[N, n]$, isso é,

$$\int_N^n f(x)\,dx \leq S_{N,n-1}\,.$$

Como a série converge a sequência de somas parciais $S_{N,n-1}$ converge para algum valor L. Além disso, como a_n é não negativo a sequência $S_{N,n-1}$ é crescente, então para todo $n > N$

$$I_n = \int_N^n f(x)\,dx \leq L\,,$$

ou seja, a sequência I_n é uma sequência limitada, além disso como f é positiva I_n é crescente e podemos concluir que a sequência I_n é convergente e portanto a integral imprópria

$$\int_N^\infty f(x)\,dx$$

é convergente.

Verificando a Volta

Agora mostraremos que se a integral converge a série também converge. Para isso vamos construir os retângulos que representam os termos da série à esquerda do ponto $x = n$, nesse caso a soma parcial correspondente ao intervalo $[N, n]$ é dada por

$$S_{N+1,n} = a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n\,.$$

Usando novamente o fato que a função é decrescente, essa soma parcial nos dá um limite inferior para a integral, ou seja

$$S_{N+1,n} \leq \int_N^n f(x)\,dx\,.$$

Somando a_N dos dois lados temos que

$$S_{N,n} = a_N + S_{N+1,n} \leq a_N + \int_N^n f(x)\,dx\,.$$

Como a função f é positiva e a integral imprópria é convergente

$$\int_N^\infty f(x)\,dx = L$$

temos, para todo $n > N$, que

$$S_{N,n} \leq L\,.$$

Como a_k é não negativo e a série é limitada usando o Corolário 6.17 concluímos que a série é convergente.

Note que também podemos reescrever a tese do teorema acima como: a série

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

diverge se, e somente se, a integral

$$\int_N^\infty f(x)\,dx$$

diverge. O próximo exemplo aplica essa versão do teorema.

Exemplo 6.4.3: Verificar a convergência da integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.

Verificamos que a Série Harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge, assim, pela observação acima, podemos concluir que a integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

também diverge.

É importante destacar que o valor a integral não é uma boa aproximação para a soma da série. Podemos observar isso na Figura 6.3 comparando a área sob o gráfico da função $f(x) = x^{-2}$ entre os pontos n e $n+1$ que é data pela integral

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n^2+n}$$

com os termos da série

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

representados pelos retângulos.

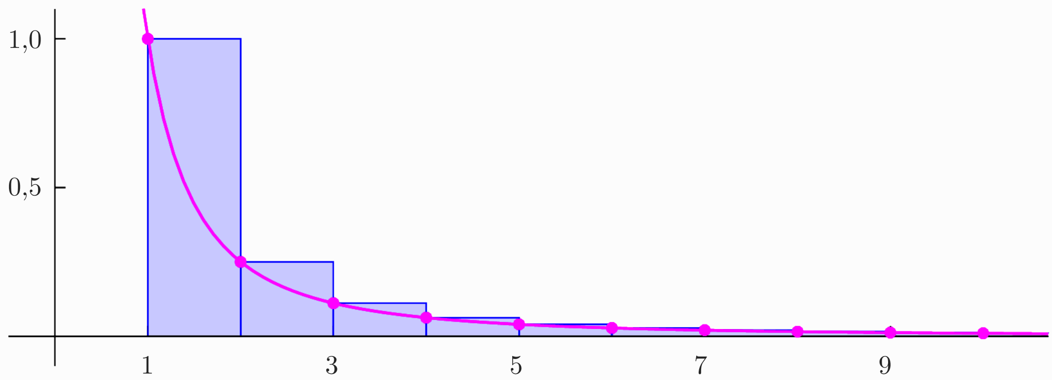


Figura 6.3: Comparação do valor da integral com a soma da série, mostrando que a integral não é uma boa aproximação para a soma.

A tabela a seguir reproduz a mesma comparação apresentando os valores numéricos dos sete primeiros termos e sua soma. Note que os termos são significativamente diferentes no início e só começam a se aproximar posteriormente. Note também que o erro acumulado no início nunca é compensado não importando o número de termos somado.

n	a_n	I_n	$a_n - I_n$
1	1,000	0,500	0,500
2	0,250	0,167	0,083
3	0,111	0,083	0,028
4	0,062	0,050	0,012
5	0,040	0,033	0,007
6	0,028	0,024	0,004
7	0,020	0,018	0,003
Soma	1,512	0,875	0,637

Mais a frente vamos apresentar o Teorema 6.22, que nos mostra como podemos usar o valor da integral para obter estimativas de erro para a aproximação da soma da série por suas somas parciais.

Podemos agora utilizar o Teste da Integral para verificar a convergência de uma classe importante de séries, que chamamos de Serie p. Primeiro apresentamos a definição dessas séries e depois aplicamos o teste para verificar em quais condições elas convergem.

Definição 6.19: Série p

Uma série com a forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é chamada de Série p ou p-série.

Essas séries são importantes pois existe uma forma simples para verificar quando elas são convergentes. O próximo resultado apresenta esse critério.

Proposição 6.20: Convergência da Série p

Uma série p converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Demonstração

Quando $p = 1$ temos a série harmônica que diverge, como já vimos.

Suponha então que $p \neq 1$, nesse caso temos

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^b \right]$$
$$= \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) . \tag{6.3}$$

Quando $p > 1$ temos que $p - 1 > 0$, então

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{p-1}} = 0 .$$

Assim, da equação (6.3) temos que a integral converge e

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} .$$

Concluímos então que para $p > 1$ a série p converge. Quando $p < 1$ temos que $p - 1 < 0$, então

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{p-1}}$$

diverge, portanto a integral diverge e consequentemente a série também.

EXEMPLO 6.4.4: Verifique a convergência série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ não é um série p, mas como $n^2 + 1 > n^2$, segue que

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} .$$

Entretanto, pela Proposição 6.20, temos que a série p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge, pois $p = 2 > 1$. Dessa forma a sequência de somas parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1}$$

é limitada, e como os termos da série são não negativos, usamos o Corolário 6.17 para verificar que a série converge.

Estimativa de Erro

Para analisarmos o erro cometido ao aproximarmos a soma de uma série S por uma soma parcial S_n vamos definir o erro ou resto da série.

Definição 6.21: Resto da Série

Dada uma série convergente, cuja soma é S

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

podemos usar suas somas parciais

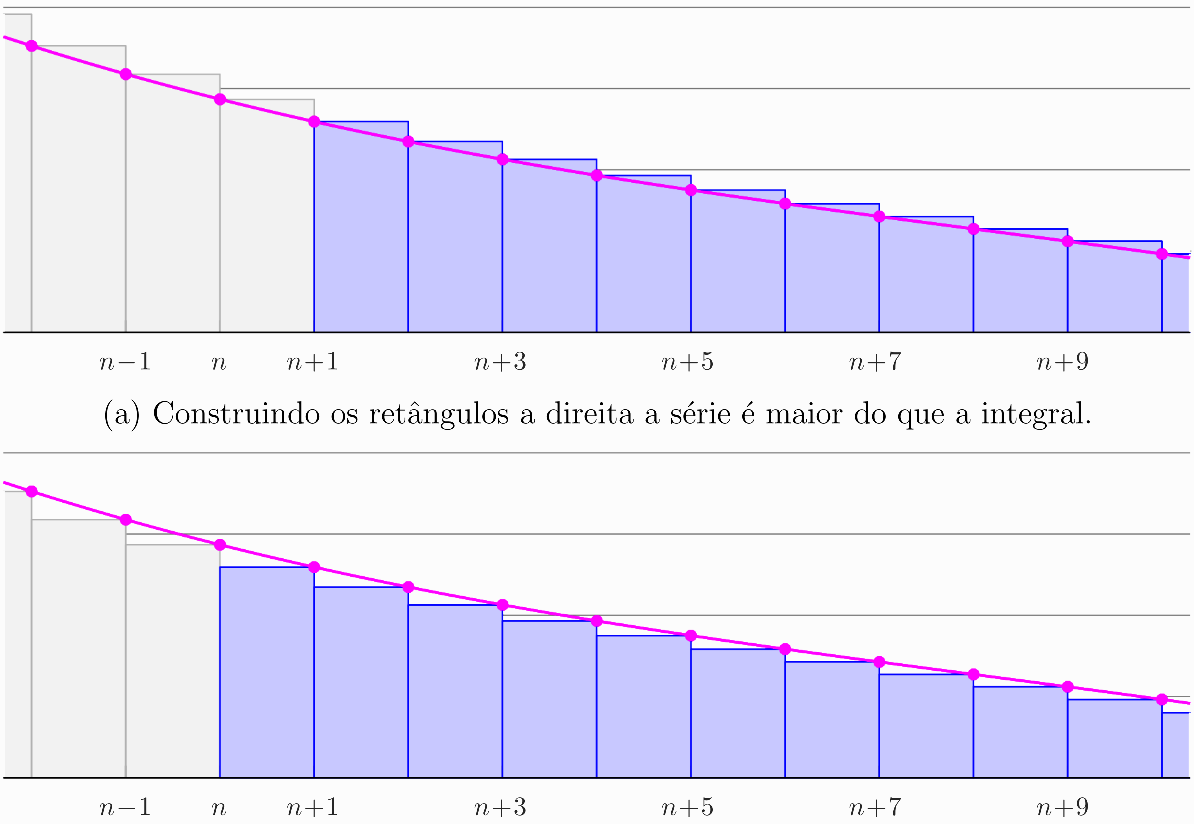
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

como aproximações para S. Ao fazermos isso estamos cometendo um erro igual ao Resto da Série, isso é, o erro é igual a todos os termos que não foram somados

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \,.$$

Quando verificamos que uma série é convergente pelo teste da integral podemos obter também estimativas para o erro cometido ao aproximarmos a soma da série por uma das suas somas parciais. Observe os gráficos da Figura 6.4 que indicam o resto da série, R_n, após calcularmos a n-ésima soma parcial, S_n. No Gráfico 6.4a os retângulos com área a_k estão desenhados a direita do ponto $x = k$ e podemos perceber que

$$R_n > \int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx \,.$$



(a) Construindo os retângulos a direita a série é maior do que a integral.

(b) Construindo os retângulos a esquerda a série é menor do que a integral.

Figura 6.4: Estimativa do erro pelo testo da integral.

Fazendo a mesma comparação no Gráfico 6.4b, onde os retângulos estão a esquerda, vemos que

$$R_n < \int_n^\infty f(x)\,dx\,.$$

Note a mudança no início do intervalo de integração. Temos assim limites inferior e superior para o erro cometido ao aproximarmos a soma da série por uma soma parcial. O próximo teorema formaliza esse resultado.

Teorema 6.22: Estimativa de Erro

Seja a_k uma sequência tal que $a_k \geq 0$, para todo $k \geq N$, onde N é um número natural. Seja f uma função contínua, positiva e decrescente para $x \geq N$, satisfazendo $f(k) = a_k$, para todo $k \geq N$. Suponha que a série com termos a_k

converge para S, isso é,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

então o resto

$$R_n = S - S_n$$

satisfaz

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \;\leq\; R_n \;\leq\; \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

Consequentemente,

$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \;\leq\; S \;\leq\; S_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

Demonstração

A demonstração é parecida com a demonstração do Teorema 6.18. Basta reparar que R_n é uma aproximação por baixo da integral

$$\int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

já que representa a soma de retângulos de base 1 e altura $a_k = f(k)$, para $k = n+1, n+2, \ldots$ Por outro lado, R_n é uma aproximação por cima da integral

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx$$

A última desigualdade segue somando S_n na desigualdade anterior e usando que

$$R_n = S - S_n\,.$$

Exemplo 6.4.5: Sabemos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge, pois é uma série p, com $p = 2$. Descubra n tal que o resto R_n da aproximação S_n seja menor que 0,01.

Sabemos que o Teste da Integral pode ser aplicado, pois

$$\int_n^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n}.$$

Assim, pelo Teorema 6.22,

$$\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}.$$

Para garantir que $R_n < 0{,}01$ impomos que

$$\frac{1}{n} < 0{,}01$$

isolando n optemos $n > 100$. Concluímos então que a aproximação S_{100} tem um erro menor do que 0,01.

Exercícios Seção 6.4

1) [resp] Use o teste da integral para determinar se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge ou diverge. Certifique-se de que as condições do teste da integral sejam satisfeitas.

2) [resp] Use o teste da integral para determinar se a série converge ou diverge. Certifique-se de que as condições do teste da integral sejam satisfeitas.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$$

3) Use o teste da integral para determinar se cada série converge ou diverge. Certifique-se de que as condições do teste da integral sejam satisfeitas.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0,2}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n^2)}{n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n/3}}$

h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-4}{n^2-2n+1}$

4) [resp] A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$$

converge ou diverge? Justifique sua resposta.

5) Verifique se cada série converge ou diverge? Justifique sua resposta.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n}}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{8^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{n}$

h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4n+3}$

l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{n+1}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(\sqrt{n}+1)}$

p) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

6) Verifique se cada série converge ou diverge? Justifique sua resposta.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 3)^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1+\ln^2(n)\right)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+e^n}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\operatorname{arctg}(n)}{1+n^2}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{senh}(n)$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}^2(n)$

l) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1/n}{\ln(n)\sqrt{\ln^2(n)-1}}$

7) Determine para quais valores de a cada série converge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1}-\frac{2a}{n+1}\right)$

8) [resp] Quantos termos da série convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,1}}$$

devem ser utilizados para estimar seu valor com erro de no máximo 0,000 01?

9) Quantos termos da série convergente

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^3}$$

devem ser utilizados para estimar seu valor com erro de no máximo 0,01?

10) Calcule a soma da série com a precisão solicitada.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 0,01

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ 0,1

6.5 Teste da Comparação

Nessa seção apresentamos um resultado que nos permite comparar séries conhecidas com séries que queremos analisar, o Teste da Comparação. Existem duas versões desse teste o Teste da Comparação apresentado no teorema a seguir e o Teste da Comparação no Limite apresentado no Teorema 6.24.

Teorema 6.23: Teste da Comparação

Sejam

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=N}^{\infty} b_n$$

séries tais que $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$. Suponha que para algum N,

$$a_n \leq b_n, \qquad \forall n \geq N$$

então,

1. se $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge;
2. se $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ diverge.

Demonstração

Parte 1

Como

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq N$$

temos que

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leq \sum_{k=N}^{n} b_k \qquad \forall n \geq N\,.$$

Somando $b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1}$ de ambos os lados, obtemos

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1} + \sum_{k=N}^{n} a_k \; \leq \; \sum_{k=1}^{n} b_k = B_n \qquad \forall n \geq N\,.$$

O termo B_n, do lado direito da desigualdade acima, é a sequência de somas parciais da série $\sum b_n$, como essa série converge e $b_n \geq 0$ (ou seja a B_n é crescente), segue que

$$0 \; \leq \; b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1} + \sum_{k=N}^{n} a_k \; \leq \; \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B \qquad \forall n \geq N\,,$$

ou seja, a sequência

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1} + \sum_{k=N}^{n} a_k$$

é limitada e crescente, pois $a_n \geq 0$, portanto esta é uma sequência convergente, ou seja, a série

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1} + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

converge. Mas como já discutimos anteriormente, adicionar e retirar um número finito determos em uma série não muda sua natureza, de modo que podemos retirar os termos $b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1}$ e adicionar os termo $a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}$ e concluir que a série $\sum a_n$ é convergente.

Parte 2

Suponha por absurdo que $\sum b_n$ converge, então, pelo item anterior, segue que $\sum a_n$ converge. O que é um absurdo, pois por hipótese $\sum a_n$ diverge. Segue que $\sum b_n$ diverge.

Exemplo 6.5.1: Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^4+2}$ converge.

Veja que

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{n^4+2} &= \frac{n}{n^4+2} - \frac{1}{n^4+2} \\ &\leq \frac{n}{n^4+2} \\ &= \frac{1}{n^3 + {}^2\!/n} \\ &\leq \frac{1}{n^3}\,.\end{aligned}$$

Como a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

é uma série p com $p = 3 > 1$, ela é convergente. Assim, pelo teste de comparação a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^4+2}$$

também converge.

EXEMPLO 6.5.2: Verifique a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n-1}$.

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n-1}$$

diverge, pois

$$\frac{3^n}{2^n-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

e a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

diverge, pois $|r| = {}^3\!/_2 > 1$.

Apresentamos agora a segunda versão do teste da comparação. nessa versão substituímos a necessidade de verificar se $a_n \leq b_n$ ou $a_n \geq b_n$ pelo cálculo de um limite. Ao aplicarmos o teste em uma série específica podemos escolher a versão que necessitar de cálculos mais simples.

Teorema 6.24: Teste da Comparação no Limite

Sejam $a_n > 0$ e $b_n > 0$, para todo $n \geq N$, $N \in \mathbb{N}$.

1. Se $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = c > 0$ então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.
2. Se $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
3. Se $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demonstração

Parte 1

A demonstração da Parte 1 está no Teorema 11 na Seção 10.4 no livro do Thomas [70].

Parte 2

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_1 \geq N$, tal que

$$\frac{a_n}{b_n} = \left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq N_1$$

ou seja,

$$a_n \leq \varepsilon b_n \qquad \forall n \geq N_1 \,.$$

Assim, pelo teorema anterior, se $\sum \varepsilon b_n$ converge, então $\sum a_n$ também converge, mas é claro que $\sum \varepsilon b_n$ converge, pois $\sum b_n$ converge e ε é uma constante.

Parte 3

Para todo $M > 0$ dado, existe $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_1 \geq N$, tal que

$$\frac{a_n}{b_n} > M \qquad \forall n > N_1 \,,$$

ou seja,

$$a_n > M b_n \qquad \forall n > N_1 \,.$$

Como $\sum b_n$ diverge e M é constante, segue que $\sum M b_n$ também diverge. Pelo teorema anterior, como $\sum M b_n$ diverge, segue que $\sum a_n$ também diverge.

Exemplo 6.5.3: Verificar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3+4^n}$.

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3+4^n}$$

converge, pois tomando

$$b_n = \frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2^n}$$

temos

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{4^n}{3+4^n} = \lim \frac{1}{{}^3\!/\!_{4^n} + 1} = 1 \,.$$

Como a série

$$\sum \frac{1}{2^n}$$

converge, pois é uma série geométrica com $|r| = 1/2 < 1$, segue, usando o item 1 do teorema, que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3+4^n}$$

também converge.

Exemplo 6.5.4: Use o fato que $\ln n$ cresce mais lentamente que n^c para qualquer constante positiva c para provar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}.$$

Para verificarmos que $\ln n$ cresce mais lentamente que n^c para qualquer constante positiva c usamos a regra de L'Hôpital para mostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^c} = 0.$$

Usando esse fato podemos escrever que para qualquer $c > 0$ vale a desigualdade

$$\frac{(\ln n)^2}{n^3} < \frac{n^{2c}}{n^3} = \frac{1}{n^{3-2c}}.$$

Queremos agora escolher a constante c tal que a expressão do lado direito seja o termo geral de uma série convergente. Observando que esses são os termos de uma série-p com $p = 3 - 2c$, precisamos impor que $3 - 2c > 1$ ou seja $c < 1$, escolhemos então $c = 1/2$. Dessa forma construímos uma série convergente com termos

$$b_n = \frac{1}{n^{3-2c}} = \frac{1}{n^2}.$$

Podemos aplicar o Teste da Comparação no Limite

$$\begin{aligned}\lim \frac{a_n}{b_n} &= \lim \frac{(\ln n)^2}{n} \\ &= 2 \lim \frac{\ln n}{n}\end{aligned}$$

$$= 2 \lim \frac{1}{n} = 0\,.$$

Pelo item 2 do Teorema 6.24, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge, segue que a série em questão também converge.

EXEMPLO 6.5.5: Verifique que série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$ diverge.

Com efeito, comparando o termo geral $a_n = \left(\dfrac{2n+3}{5n+4}\right)^n$ com $b_n = \left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{5n}\right)^n$, temos

$$\begin{aligned}
\lim \frac{a_n}{b_n} &= \lim \left(\frac{2n+3}{5n+4}\,\frac{5n}{2n+3}\right)^n \\
&= \lim \left(\frac{5n}{5n+4}\right)^n \\
&= \lim \left(\frac{1}{1 + {}^4\!/_{5n}}\right)^n \\
&= \frac{1}{e^{4/5}}\,.
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{1}{e^{4/5}} > 0$, pelo primeiro item do teorema, segue que o comportamento de $\sum a_n$ é o mesmo de $\sum b_n$, mas $\sum b_n$ diverge, pois

$$b_n = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5n}\right)^n \to e^{6/25} \neq 0\,.$$

Para verificar as passagens desse exemplo, é possível utilizar a expressão

$$\lim \left(\frac{1}{1 + {}^4\!/_{5n}}\right)^n = \exp\left[\lim \ln \left(\frac{1}{1 + {}^4\!/_{5n}}\right)^n\right].$$

Exercícios Seção 6.5

1) [resp] Utilize o teste da comparação para determinar se a série converge ou diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^{3/2}}$$

2) [resp] Utilize o teste da comparação para determinar se a série converge ou diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+4}{n^4+4}}$$

3) [resp] Aplicando os testes de convergência verifique se a série numérica abaixo é convergente ou divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$$

4) Utilize o teste da comparação para determinar se cada série converge ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+30}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^4+2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^2+3}}$

5) [resp] Utilize o teste da comparação no limite para determinar se a série converge ou diverge.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

Dica: *compare no limite com* $\sum {}^1/_n$

6) [resp] A série converge ou diverge?

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n^3-3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}$$

7) Use o teste da comparação no limite para determinar se cada série é convergente ou divergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^3-n^2+3}$

Dica: *Compare com* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+2}}$

Dica: *Compare com* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n^2+1)(n-1)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3+4^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n\sqrt{n}}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

Dica: *Compare com* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

8) Utilize qualquer método para determinar se a série converge ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+\sqrt{n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{n^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n-1}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$

h) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n^3-3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln\big(\ln(n)\big)}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big(\ln(n)\big)^2}{n^3}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,\ln(n)}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big(\ln(n)\big)^2}{n^{3/2}}$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\ln(n)}$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

r) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{2^n n}$

t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2^n}{2^n n^2}$

9) Utilize qualquer método para determinar se a série converge ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}+1}{3^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+3n}\,\frac{1}{5n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-n}{2^n\,n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}$

Dica: *mostre que* $\dfrac{1}{n!}\le\dfrac{1}{n(n-1)}$ *para* $n\ge 2$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(n)}{n^{1,1}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tgh}(n)}{n^2}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arcsec}(n)}{n^{1,3}}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\coth(n)}{n^2}$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4+9+\cdots+n^2}$

6.6 Teste da Razão

Nessa seção apresentamos mais teste que pode ser aplicado a séries de termos positivos, o Teste da Razão. Nesse teste estamos verificando se os termos da série caem com velocidade suficiente calculando a razão entre um termo e seu antecessor.

Teorema 6.25: Teste da Razão

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série tal que $a_n > 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

então,

1. se $\rho < 1$ a série converge;
2. se $\rho > 1$ ou $\rho = \infty$ a série diverge;
3. se $\rho = 1$ o teste é inconclusivo.

Demonstração

Parte 1

Como $\rho < 1$ podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que $\rho + \varepsilon < 1$, e como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho \right| < \varepsilon\,.$$

Dessa forma, denotando $r = \varepsilon + \rho < 1$, temos em particular que

$$a_{n+1} < (\varepsilon + \rho)a_n = a_n r \qquad \forall n \geq N\,.$$

Repetindo essa relação para todo n a partir de N temos

$$\begin{aligned}
&a_{N+1} < a_N r \\
&a_{N+2} < a_{N+1} r < a_N r^2 \\
&a_{N+3} < a_{N+2} r < a_N r^3 \\
&a_{N+k} < a_N r^k\,.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de índices $n = N + k$ podemos escrever

$$a_n < a_N r^{n-N} \qquad \forall n > N$$

e consequentemente temos que

$$\sum_{n=N+1}^{m} a_n < \sum_{n=N+1}^{m} a_N r^{n-N} = \sum_{k=1}^{m-N} a_N r^k \qquad \forall m > N\,.$$

Como $|r| < 1$, a sequência de somas parciais da série geométrica do lado direito converge. Então, a sequência de somas parciais do lado esquerdo está limitada pela soma da série geométrica e é crescente, pois os termos gerais são positivos. Portanto a sequência do lado esquerdo converge, quando $m \to \infty$, ou seja, a série

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

converge. Podemos concluir então que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

também converge, pois ela coincide com a série anterior exceto por um número finito de termos.

No caso em que $\rho = 1$, não podemos tirar conclusão alguma com base no teste da razão. De fato para todo p, a série p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)^p}}{\dfrac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$$

entretanto, como já vimos anteriormente, a série p converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Exemplo 6.6.1: Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$.

Seja $a_n = \dfrac{n!}{(2n)!}$, então

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \; \frac{(2n)!}{n!} \\ &= \frac{(n+1)\,n! \;\; (2n)!}{(2n+2)(2n+1)\,(2n)! \;\; n!} \\ &= \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \to 0 < 1\,.\end{aligned}$$

Assim, a série converge.

EXEMPLO 6.6.2: Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$.

Seja $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{\ln(n)}$, então

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)} \; \frac{\ln(n)}{3^{n+2}} \\ &= \frac{3\ln(n)}{\ln(n+1)}\,.\end{aligned}$$

Usando L'Hôpital, obtemos que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{3(n+1)}{n} = 3 > 1\,.$$

Portanto, a série diverge.

EXEMPLO 6.6.3: Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Seja $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, então

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} \\
&= \frac{(n+1)\,n!\,n^n}{(n+1)^n\,(n+1)\,n!} \\
&= \frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= \left(\frac{1}{1+{}^1\!/n}\right)^n \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.
\end{aligned}
$$

Podemos agora calcular o limite

$$
\begin{aligned}
\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \\
&= \lim \exp\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right] \\
&= \lim \exp\left[-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right] \\
&= \exp\left[-\ln \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right] \\
&= \exp\left[-\ln\left(e^1\right)\right] \\
&= \exp(-1)
\end{aligned}
$$

onde usamos a relação (1.1). Temos então que

$$
\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-1} \approx 0{,}3679 < 1
$$

portanto a série converge.

Exemplo 6.6.4: Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$.

Veja que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \to \frac{1}{2} < 1$$

então a série converge.

Exercícios Seção 6.6

1) [resp] Aplicando os testes de convergência verifique se a série numérica abaixo é convergente ou divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n}{3^n}$$

2) Utilize o teste da razão para determinar se cada série converge ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)^2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}\, n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+2)!}{n!\, 3^{2n}}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\, n}{(2n+3)\ln(n+1)}$

3) Determine se a série converge ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{1{,}25^n}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ln(n)}{2^n}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}\, n^3$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!\, n!\, 3^n}$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,2^n\,(n+1)!}{3^n\,n!}$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n}$

s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)(2^n+3)}{3^n+2}$

4) Determine se as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cujos termos são definidos pelas relações de recorrência são convergentes ou divergentes.

a) $a_1 = 2$ $\quad a_{n+1} = \dfrac{1+\operatorname{sen}(n)}{n} a_n$

b) $a_1 = 1$ $\quad a_{n+1} = \dfrac{1+\operatorname{arctg}(n)}{n} a_n$

c) $a_1 = \dfrac{1}{3}$ $\quad a_{n+1} = \dfrac{3n-1}{2n+5} a_n$

d) $a_1 = 3$ $\quad a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_n$

e) $a_1 = 2$ $\quad a_{n+1} = \dfrac{2}{n} a_n$

f) $a_1 = 5$ $\quad a_{n+1} = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$

g) $a_1 = 1$ $\quad a_{n+1} = \dfrac{1+\ln(n)}{n} a_n$

h) $a_1 = \dfrac{1}{2}$ $\quad a_{n+1} = \dfrac{n+\ln(n)}{n+10} a_n$

i) $a_1 = \dfrac{1}{3}$ $\quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$

j) $a_1 = \dfrac{1}{2}$ $\quad a_{n+1} = (a_n)^{n+1}$

6.7 Teste da Raiz

O Teste da Raiz é similar ao Teste da Razão, ele é útil quando calcular a raiz n-ésima for mais fácil do que calcular a razão ente os termos da série.

Teorema 6.26: Teste da Raiz

Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série tal que $a_n \geq 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

então,

1. se $\rho < 1$ a série converge;
2. se $\rho > 1$ ou $\rho = \infty$ a série diverge;
3. se $\rho = 1$ o teste é inconclusivo.

Demonstração

Parte 1

Nesse caso, temos que $\rho < 1$, assim podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que $\rho + \varepsilon < 1$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$

$$|\sqrt[n]{a_n} - \rho| \;<\; \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} \;<\; \varepsilon + \rho \quad \Rightarrow \quad a_n \;<\; (\varepsilon + \rho)^n \,.$$

Dessa forma, pelo teste da comparação, temos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge, pois seu termo geral, a_n está limitado pelo termo geral da série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon + \rho)^n$$

que é convergente pois $\varepsilon + \rho < 1$.

Assim como no Teste da Razão, no Teste da Raiz o teorema é inconclusivo quando $\rho = 1$. Observe as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

em ambos os casos temos que $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ entretanto, a série harmônica diverge e a série p, com $p = 2$, converge.

Note o Teste da Raiz continua válido mesmo trocando a hipótese de que

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

por

$$\lim \sqrt[n+k]{a_n} = \rho \qquad \forall k \in \mathbb{N} \,. \tag{6.4}$$

Para ver que isso é verdade basta notar na demonstração que o termo geral da série continua limitado pelo termo geral de uma série geométrica.

Seguem agora alguns exemplos do uso desse teste.

EXEMPLO 6.7.1: Use o teste da raiz para analisar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(3n)^n}.$$

Seja

$$a_n = \frac{4^n}{(3n)^n}$$

então

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{4^n}{(3n)^n}} = \frac{4}{3n} \to 0 < 1$$

portanto a série converge.

EXEMPLO 6.7.2: Use o teste da raiz para analisar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}}.$$

Observe que, fazendo uma mudança de índice, podemos reescrever a série como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^n}.$$

Podemos agora tomar

$$a_n = \frac{1}{(n-1)^n}$$

que nos leva a

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n-1} \to 0 < 1$$

o que nos permite concluir que série converge.

Exemplo 6.7.3: Use o teste da raiz para analisar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(e^2+\frac{1}{n}\right)\right]^{n+1}.$$

Fazendo uma transformação no índice podemos reescreve a série da seguinte forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(e^2+\frac{1}{n}\right)\right]^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\ln\left(e^2+\frac{1}{n-1}\right)\right]^{n}.$$

Dessa forma temos que

$$a_n = \left[\ln\left(e^2+\frac{1}{n-1}\right)\right]^{n}.$$

Aplicando o Teste da Raiz temos

$$\sqrt[n]{a_n} = \ln\left(e^2+\frac{1}{n-1}\right) \to \ln\left(e^2\right) = 2 > 1\,.$$

Portanto essa série diverge.

Exercícios Seção 6.7

1) Utilize o teste da raiz para determinar se cada série converge ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{(2n+5)^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(3n)^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+3}{3n-5}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(e^2+\frac{1}{n}\right)\right]^{n+1}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(3+1/n)^{2n}}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Dica: *Use* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+n}}$

2) Determine se a série converge ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln(n))^n}{n^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\big(\ln(n)\big)^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\big(\ln(n)\big)^{n/2}}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\ln(n)}{n(n+2)!}$

6.8 Série Alternada e Teste de Leibniz

Nas seções anteriores apresentamos vários testes que verificam se uma série de termos não negativos é convergente. Agora vamos discutir séries que possuem termos positivos e negativos. Nesta seção estudaremos o caso particular onde os sinais se alternam produzindo o que chamamos de série alternada. Na próxima seção apresentamos os conceitos de convergência absoluta e condicional que vamos usar para os outros casos.

Definição 6.27: Série Alternada

Uma série com a forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

onde $a_n > 0$ para todo n é chamada de Série Alternada.

Para esse caso particular de série temos um teste de convergência bastante simples, o Teste de Leibniz 6.28, e também uma forma de estimar o erro ao aproximarmos a soma da série por uma soma parcial 6.30.

Teorema 6.28: Teste de Leibniz

Seja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,a_n$$

uma Série Alternada, Definição 6.27, se

1. $a_n > 0$,
2. $a_n \geq a_{n+1}$,
3. $a_n \to 0$

para todo $n \geq N$, então a série converge.

Demonstração

Vamos assumir que $N = 1$, isso é, as condições do teste valem para todos os termos da série. Escolhendo n par e escrevendo $n = 2m$, temos que a soma dos n primeiros termos é

$$S_n = S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots + a_{2m-1} - a_{2m}\,.$$

Como essa é uma soma finita podemos agrupar os termos dois a dois

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})\,.$$

Cada termo entre parenteses é positivo ou zero, pois $a_k \geq a_{k+1}$, então podemos concluir que $S_{2m+2} \geq S_{2m}$ para todo m, ou seja, a sequência S_{2m} é crescente. Vamos agora agrupar os termos de S_{2m} de outra forma

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$

dessa igualdade concluímos que $S_{2m} \leq a_1$. Como a sequência S_{2m} é crescente e limitada, pelo Teorema 5.12, concluirmos que ela é convergente e podemos escrever

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = L \tag{6.5}$$

para algum $L \in \mathbb{R}$. Considerando agora o caso onde n é ímpar, $n = 2m + 1$, temos que a soma dos n primeiros termos é

$$S_n = S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$$

como $a_n \to 0$ temos que

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = L + 0 = L\,. \tag{6.6}$$

A equação (6.5) nos informa que a subsequência dos termos pares tende para L, enquanto que, a equação (6.6) garante que os termos impares convergem para o mesmo valor. Podemos concluir então que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = L\,.$$

Para aplicarmos o Teste de Leibniz precisamos garantir que $a_n \geq a_{n+1}$, o que pode ser complicado em alguns casos. Porém, se conhecermos uma função f tal que $f(n) = a_n$, podemos verificar se a função é decrescente calculando sua derivada. Se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \leq N$ podemos concluir que $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \geq N$.

Um resultado que podemos extrair do Teste de Leibniz é o critério de convergência da Série-p com termos alternados.

PROPOSIÇÃO 6.29: CONVERGÊNCIA DA SÉRIE p ALTERNADA

Observe que $a_n = {}^1/_{n^p}$ com $p > 0$, satisfaz todas as hipóteses do Teorema 6.28, então a Série p Alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

é convergente para todo $p > 0$.

Note para $0 < p \leq 1$ a série p não converge, entretanto a série p alternada converge.

Apresentamos a seguir alguns exemplos do uso do Teste de Leibniz.

EXEMPLO 6.8.1: Use o Teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\,.$$

Seja

$$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\,,$$

note que $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$, pois $1+\dfrac{1}{n} > 1$, note também que se definirmos

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

temos

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2+x} < 0 \qquad \forall x \geq 1$$

o que mostra que $a_{n+1} < a_n$. Então a_n é decrescente. Além disso, como a função $\ln(x)$ é contínua em 1 segue que

$$\lim a_n = \ln \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0\,.$$

Assim, podemos aplicar o Teste de Leibniz e concluir que a série alternada converge.

Exemplo 6.8.2: Use o Teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{(\ln n)^2}\,.$$

Como $\ln n$ é crescente,

$$a_n = \frac{4}{(\ln n)^2}$$

é decrescente. Além disso $a_n > 0$ para todo $n \geq 2$ e $a_n \to 0$, pois

$$(\ln n)^2 \to \infty\,.$$

Dessa forma, podemos aplicar o teste de Leibniz para concluir que a série alternada converge.

Exemplo 6.8.3: Use o teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10^n}{(n+1)!}\,.$$

Seja $a_n = \dfrac{10^n}{(n+1)!}$. Veja que se $n \geq 8$, então $n+2 \geq 10$ e $1 \geq \dfrac{10}{n+2}$. Assim,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{10^{n+1}}{(n+2)!} \\ &= \frac{10^n}{(n+1)!}\frac{10}{(n+2)} \\ &\leq \frac{10^n}{(n+1)!} \\ &= a_n \end{aligned}$$

ou seja, a_n é decrescente a partir de $n = 8$.

Para verificar que $a_n \to 0$, note que se $n \geq 10$,

$$\begin{aligned} (n+1)! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) \\ &\geq 10!\ 10^{n-10}\,(n+1)\,. \end{aligned}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{10^n}{(n+1)!} \\ &\leq \frac{10^n}{10!\ 10^{n-10}\,(n+1)} \\ &= \frac{10^{10}}{10!\,(n+1)}\,. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema do Confronto 5.14 temos que $a_n \to 0$.

Desse modo, todas as hipóteses do teorema são satisfeitas, de forma que podemos concluir que essa série alternada converge.

Estimativa de Erro

Assim como no Teste da Integral o Teste de Leibniz também nos fornece uma estimativa para o erro R_n de uma série que atende às condições do teste.

Proposição 6.30: Erro de uma Série Alternada

Seja $a_k > 0$ tal que $a_{k+1} \leq a_k$ e que a série alternada converge para S

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \,.$$

Nesse caso, o erro cometido ao aproximarmos S por uma soma parcial

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

é o resto da série (Definição 6.21) e está limitado pelo primeiro termo não incluído na soma parcial

$$|R_n| = |S - S_n| \leq |a_{n+1}| \,.$$

Demonstração

Note que, o resto da série

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

pode ser expandido em

$$R_n = \begin{cases} a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots \,, & \text{se } n \text{ é par} \\ -a_{n+1} + a_{n+2} - a_{n+3} + \cdots \,, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Podemos escrever então que

$$|R_n| = |\, a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots | \,.$$

Agora, usando que todos os termos entre parênteses são positivos, pois $a_n > a_{n+1}$, temos que

$$|R_n| < |a_{n+1}|$$

o que demonstra o teorema.

Exercícios Seção 6.8

1) Determine se as séries satisfazem as condições para serem séries alternadas e se convergem ou divergem.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{3/2}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3^n\,n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{4}{(\ln n)^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2+1}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+5}{n^2+4}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n^2}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{10^n}{(n+1)!}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{10}\right)^n$

j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n)}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$

2) Estime a magnitude do erro quando aproximamos o valor da soma de cada série pela soma dos seus quatro primeiros termos.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{10^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0{,}01)^n}{n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\,t^n$
onde $0 < t < 1$

3) Determine quantos termos devem ser somados para aproximar a soma da série com erro menor do que 0,001.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2+3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,n}{n^2+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\left(n+3\sqrt{n}\right)^3}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\ln\big(\ln(n+2)\big)}$

6.9 Convergência Absoluta e Condicional

Testar diretamente a convergência de séries com termos positivos e negativos arbitrários precisa considerar o arranjo particular de sinais, assim não temos testes gerais para esses casos. A solução que empregaremos é comparar as séries com termos quaisquer com séries com termos não negativos. A definição a seguir define os conceitos de convergência condicional e absoluta que empregaremos para esse fim.

Definição 6.31: Convergência Absoluta e Condicional

Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Converge Absolutamente, ou é Absolutamente Convergente, se a série com os valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Uma série que converge mas não é absolutamente convergente é chamada Condicionalmente Convergente.

Quando queremos verificar a convergência de uma série com termos positivos e negativos podemos construir a série que soma os módulos dos termos dessa série e verificar a convergência dessa nova série usando um dos testes para as séries de termos não negativos. Se essa série convergir usamos o teorema a seguir para garantir que a série original também converge.

Teorema 6.32: Teste da Convergência Absoluta

Uma série absolutamente convergente é convergente.

Demonstração

Seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

uma série absolutamente convergente. Observando que

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

e somando $|a_n|$ em todos os termos temos

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|\,.$$

Como a série é absolutamente convergente, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$$

converge. Assim, pelo Teste da Comparação a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n + |a_n|\big)$$

converge. Consequentemente, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n + |a_n|\big) - |a_n|$$

e as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n + |a_n|\big) \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

convergem.

Note que não é possível afirmar que uma série que converge também converge absolutamente. Como exemplo, observe a série p alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\,.$$

Essa série converge se $0 < p \leq 1$, entretanto esta série não é absolutamente convergente, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

e a série p não converge se $p \leq 1$, ou seja, a série p alternada, com $0 < p \leq 1$, é condicionalmente convergente.

Observe que dada uma série convergente de termos não negativos a_n, então, a série alternada

$$\sum (-1)^{n+1} a_n$$

é absolutamente convergente. Note que, todas as séries convergentes com termo geral não negativo que vimos anteriormente, tem sua respectiva série alternada absolutamente convergente.

Os exemplos a seguir mostram como usar o teste da convergência absoluta.

Exemplo 6.9.1: Use o teste da convergência absoluta para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2\, 3^n}{(2n+1)!}$$

é uma série convergente.

Mostraremos que a série é absolutamente convergente, ou seja, que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$$

converge. Para isso aplicaremos o Teste da Razão

$$\begin{aligned}
\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{\big((n+1)!\big)^2\, 3^{n+1}}{(2n+3)!}\, \frac{(2n+1)!}{(n!)^2\, 3^n} \\
&= \frac{(n+1)^2 (n!)^2\, 3^n 3\, (2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!\, (n!)^2\, 3^n} \\
&= \frac{3(n+1)^2}{2(n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{3(n+1)}{2(2n+3)}
\end{aligned}$$

Assim, aplicando L'Hôpital, segue que

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{3(n+1)}{2(2n+3)} = \frac{3}{4} < 1 \, .$$

Portanto, pelo Teste da Razão a série $\sum |a_n|$ é convergente. Então, pelo Teste da Convergência Absoluta, concluímos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$$

é absolutamente convergente.

Exemplo 6.9.2: Verifique se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg}(n)}{n^2+1}$ é absolutamente convergente.

Temos que verificar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n)}{n^2+1} \, .$$

Pelo Teste da Integral sabemos que essa série converge se, e somente se, a integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2+1} \, dx$$

for convergente. Para calcular a integral usamos a mudança de variáveis

$$u = \operatorname{arctg}(x) \qquad du = \frac{dx}{x^2+1}$$

que leva aos novos limites de integração

$$\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} \qquad \lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$$

segue que

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2+1} \, dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} u \, du$$

$$= \frac{u^2}{2}\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16}\right)$$

$$= \frac{3\pi^2}{32}\,.$$

Como a integral é convergente a série é absolutamente convergente.

Exercícios Seção 6.9

1) Determine se as séries convergem absolutamente, convergem ou divergem.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(0{,}1)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0{,}1)^n}{n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+1}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n+3}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{n^2}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt[n]{10}$

2) Determine se as séries convergem absolutamente, apenas convergem ou divergem.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln(n)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\operatorname{arctg}(n)}{n^2+1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln(n)}{n-\ln(n)}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-5)^{-n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-100)^n}{n!}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+2n+1}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n\sqrt{n}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{(2n)^n}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n\, n!\, n}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2\, 3^n}{(2n+1)!}$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$

6.10 Revisão

1) Calcule a soma das séries.

a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{n(n+1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{(3n-1)(3n+2)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{-8}{(4n-3)(4n+1)}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{4^n}$

2) Determine se as séries convergem absolutamente, convergem condicionalmente ou divergem.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-5}{n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\big(\ln(n)\big)^2}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$

h) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\ln\big(\ln(n)\big)}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 3\, n^2}{n^3+1}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2+1)}{2n^2+n-1}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, 3^n}{n^n}$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

p) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

3) [resp] Considere as sequências

$$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{n^2}$$

a) Quais das seguintes séries convergem e quais divergem? No item (i) use o teste da integral diretamente, não use que é uma série p.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$

b) Use o teste de Leibniz para mostrar que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge.

c) Mostre que o teste da raiz não é conclusivo para a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]^n$$

Por que o teste da raiz é inconclusivo neste caso? Dica: *Dê exemplos de duas séries que satisfazem* $\sqrt[n]{a_n} \to 1$, *onde* a_n *é o termo geral, mas uma converge e a outra diverge.*

4) Considere as sequências

$$a_n = \frac{n!}{5^n} \qquad b_n = \frac{1}{n\ln n} \qquad c_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/\ln(n)}$$

Use o teste indicado entre parenteses para verificar se as séries convergem ou divergem. No(s) caso(s) que converge(m) justifique se é absolutamente ou condicionalmente convergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (teste do termo geral)

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ (teste da razão)

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ (teste da integral)

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ (teste de Leibniz)

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (teste do termo geral)

5) Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)}{\ln(n+2)\ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$$

Encontre o limite desta série.

6) Considere as sequências

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad c_n = \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$$

Use o teste indicado entre parenteses para verificar se as séries convergem ou divergem. No(s) caso(s) que converge(m) justifique se é absolutamente ou condicionalmente convergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (teste da razão)

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (teste da integral)

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{2/n}$ (teste do termo geral)

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n$ (teste da comparação no limite)

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ (teste de Leibniz)

7) Encontre o limite da seguinte série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$$

8) Encontre o limite da seguinte série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$$

9) Determine quais séries são convergentes ou divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n!\, n!}{(2n)!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{4^n\, 2^n\, n!}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{\big(2\cdot 4\cdots(2n)\big)\,(3^n+1)}$

10) Determine quais séries são convergentes ou divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)^{n+1/2}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(\operatorname{arctg}(n)\big)^2}{n^2+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tgh}(n)$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log_n(n!)}{n!}$

11) Considere as somas das sequências dadas a seguir, quais delas convergem?

a) $a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \dfrac{n(n+1)a_n}{(n+2)(n+3)}$

Dica: *escreva os primeiros termos e generalize os cancelamentos*

b) $a_1 = 7 \qquad a_{n+1} = \dfrac{n a_n}{(n+1)(n-1)}$

c) $a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$

d) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3^n}, & n \text{ ímpar} \\ \dfrac{n}{3^n}, & n \text{ par} \end{cases}$

7

Séries de Potências

7.1 Séries de Potências

Nesse capítulo vamos utilizar a teoria desenvolvida para o estudo de séries numéricas para construir as Séries de Potências, que podemos imaginar como polinômios de grau infinito. Para estudar a convergência das Séries de Potência, vamos considerar que para cada valor fixo de x temos uma série numérica que pode ser analisada com os resultados do capítulo anterior. Porém, estaremos também interessados em estudar essas séries como funções de x. Na próxima seção apresentaremos as Séries de Taylor, que nos mostram como construir séries de potência para funções que conhecemos, desejamos estudar ou aproximar. Começamos apresentando a definição da Série de Potências.

Definição 7.1: Série de Potências

Série de Potências centrada em a é uma série de funções da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

onde c_n e a são constantes e $x \in \mathbb{R}$ é uma variável.

A seguir temos um exemplo de uma Série de Potências e a função que corresponde a sua soma.

Exemplo 7.1.1: Determine a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Primeiro note que essa é uma Série de Potências centrada em $a = 0$ com coeficientes $c_n = 1$, para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$ Consideramos agora o valor de x fixo e observamos que essa é uma Série Geométrica com $r = x$, portanto convergente para todo x tal que $|x| < 1$. Além disso, usando a fórmula da soma da Série Geométrica (6.2), nos pontos onde a série converge, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \,.$$

Como essa série diverge para todo $|x| \geq 1$ essa igualdade só vale para o intervalo $(-1, 1)$.

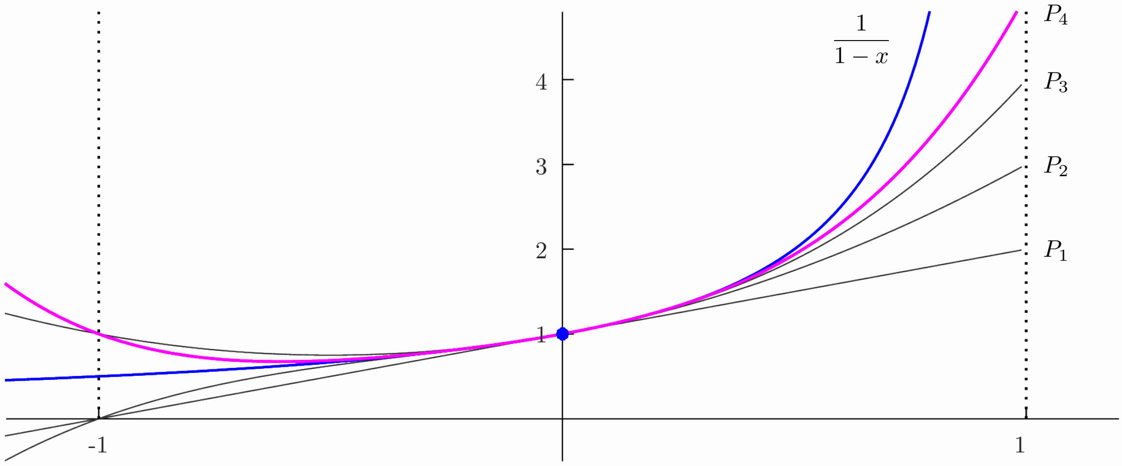


Figura 7.1: Comparação da função $1/(1-x)$ com seus Polinômios de Taylor.

A Figura 7.1 exibe o gráfico da função $1/(1-x)$ e as quatro primeiras somas parciais da série de potências.

Com base no resultado desse exemplo podemos usar a série truncada como uma aproximação para a função, desde que $|x| < 1$, isso é,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \approx \sum_{n=0}^{N} x^n \,.$$

O próximo exemplo apresenta uma generalização desse resultado.

Exemplo 7.1.2: Para quaisquer constantes reais a e $\beta \neq 0$, calcule a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n \,.$$

Essa é uma Série de Potências centrada em a com coeficientes $c_n = \beta^n$ que podemos escrever como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(\beta(x-a)\big)^n \,.$$

Para cada x fixo, esta é uma série geométrica com $r = \beta(x-a)$. Ela converge se, e somente se, $|r| < 1$, ou seja, quando

$$\begin{aligned} |\beta(x-a)| &< 1 \\ -\frac{1}{|\beta|} < x - a &< \frac{1}{|\beta|} \\ a - \frac{1}{|\beta|} < x &< a + \frac{1}{|\beta|} \,. \end{aligned}$$

Novamente usamos a fórmula da soma da Série Geométrica (6.2) nos pontos onde a série converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\beta(x-a)\big)^{n-1} = \frac{1}{1-\beta(x-a)} \,.$$

Exemplo 7.1.3: Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n$.

Essa série é um caso particular do exemplo anterior com $\beta = 1/2$ e $a = 2$, temos então que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{x-2}{2}} = \frac{2}{4-x} \,,$$

que converge para

$$a - \frac{1}{|\beta|} < x < a + \frac{1}{|\beta|} \,,$$

$$2 - \left|\frac{1}{1/2}\right| < x < 2 + \left|\frac{1}{1/2}\right| \,,$$

$$0 < x < 4 \,.$$

Código Python para ilustrar algumas séries de potências.

Os exemplos anteriores mostraram como podemos usar a definição de convergência de séries numéricas para estudar a convergência das séries de potências. Porém, existem resultados específicos que podemos utilizar para as Séries de Potência, por exemplo, toda série de potências converge no seu centro, chamamos esse caso de Convergência Trivial. Podemos comprovar isso simplesmente avaliando cada termo da série em $x = a$

$$\left.\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right|_{x=a} = c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + \cdots = c_0 \,.$$

O teorema a seguir apresenta uma propriedade das séries de potências que simplifica a analise de convergência.

Teorema 7.2: Convergência da Série de Potências

Se a Série de Potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

converge em $x - a = L \neq 0$, então ela converge absolutamente para todo x com

$$|x-a| < |L| \ .$$

Se a série diverge em $x - a = M$, então ela diverge para todo x tal que

$$|x-a| > |M| \ .$$

Demonstração

Parte 1

Suponha que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n L^n$$

converge, então, pelo Teste de Divergência 6.14 $\lim(c_n L^n) = 0$. Assim, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|c_n L^n| < 1 \qquad \forall n > N \ .$$

Dividindo os dois lados por $|L|^n$ e multiplicando por $|x-a|^n$, temos

$$|c_n||x-a|^n \ < \ \left|\frac{x-a}{L}\right|^n \qquad \forall n > N \ . \tag{7.1}$$

Note que, se x é tal que $|x-a| < |L|$, a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x-a}{L}\right|^n$$

converge. Então, pelo Teste da Comparação 6.23 usando a desigualdade (7.1) a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||x-a|^n$$

converge. Isso é o mesmo que dizer que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

converge absolutamente.

Parte 2

Assuma que a série diverge para

$$r - a = M \neq 0$$

e suponha, por absurdo, que existe s satisfazendo

$$|s - a| > |M|$$

onde a série converge. Usando a primeira parte do teorema sabemos que se a série converge em s ela deve convergir para todo x tal que

$$|x - a| < |s - a|$$

Em particular deve convergir em r o que é uma contradição. Provamos então que não pode existir nenhum ponto s convergente tal que

$$|s - a| > |M| \, .$$

Esse teorema é útil para encontrar intervalos onde a série converge absolutamente e onde a série diverge, o próximo exemplo emprega esse resultado.

Exemplo 7.1.4: Determine para quais valores de x a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{n}$$

é convergente.

Note que quando $x - 2 = \pm 1$ podemos decidir com facilidade se a série converge ou não. Considerando o caso $x - 2 = 1$ temos $x = 3$ que gera a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

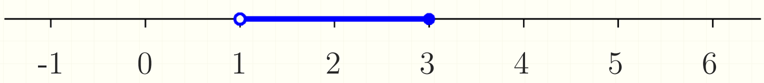
que converge pois é a Série Harmônica Alternada. Assim, pelo Teorema 7.2, podemos afirmar que essa série converge absolutamente para todo x tal que

$|x-2|<1$, ou seja, a série converge absolutamente no intervalo $(1,3)$. Note que no ponto $x=3$ a série converge condicionalmente, por se tratar da Série Harmônica Alternada.

Tomando agora $x-2=-1$, isso é $x=1$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n}\,.$$

Como a Série Harmônica diverge, essa última série também diverge. Assim pelo Teorema 7.2, a série diverge sempre que $|x-a|>1$, ou seja, a série diverge em $(-\infty,1]\cup(3,\infty)$. O gráfico a seguir exibe a região de convergência dessa série. No interior do intervalo a convergência é absoluta e no ponto $x=3$ é condicional.



Note que o último teorema garante que os pontos onde uma série de potências converge estão sempre em um intervalo, que chamamos de intervalo de convergência.

Definição 7.3: Intervalo de convergência

O intervalo dos pontos onde uma Série de Potências converge é chamado de Intervalo de Convergência.

O teorema sobre a convergência das séries de potências pode ser reescrito de uma forma mais poderosa, apresentada a seguir.

Teorema 7.4: Raio de Convergência

O Intervalo de Convergência de uma Série de Potências centrada em a

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

sempre será um intervalo centrado em a com raio R. Chamamos o número R de Raio de Convergência da Série de Potências e ele se enquadra em um dos casos:

$R = 0$ Convergência trivial, a série converge apenas em $x = a$;

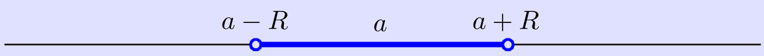
$R = \infty$ A série converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$;

$R > 0$ A série converge absolutamente para todo x satisfazendo

$$|x - a| < R$$

e diverge para todo x tal que

$$|x - a| > R\ .$$



Demonstração

Queremos mostrar que se não estivermos em um dos dois primeiros casos precisamos estar no terceiro, isso é, se o conjunto dos valores de x onde a série converge

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}\ \Big/\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ converge} \right\}$$

não for $\Omega = \{a\}$ nem $\Omega = \mathbb{R}$ ele precisa ser o intervalo

$$\Omega = [\, a - R, a + R \,]$$

para algum número finito R.

Como não estamos na situação em que a convergência ocorre para toda a reta, existe um ponto u onde a série diverge, Assim, pelo Teorema 7.2, temos que a série diverge para todo x tal que $|x - a| > d$, onde $d = |u - a|$. Concluímos então que Ω é um conjunto limitado

$$\Omega \subset [\, a - d, a + d \,]\ .$$

Como também não estamos na situação de convergência trivial, existe $x \in \Omega$ diferente de a. Tomamos então R como o menor número maior ou igual a $|x - a|$ para todo $x \in \Omega$, isso é, (veja a Definição A.1)

$$R = \sup_{x \in \Omega} |x - a|\ . \tag{7.2}$$

Como Ω é limitado e existe $x \neq a$ em Ω sabemos que $R > 0$ e é finito. Agora, vamos mostrar que a série converge para qualquer x tal que $|x - a| < R$. Como R é tal que a condição (7.2) vale, existe $u \in \Omega$ tal que

$$|x - a| < |u - a| \leq R$$

então, pelo Teorema 7.2, a série converge absolutamente em x. Por outro lado, se v é tal que

$$R < |v - a|$$

então a série tem que divergir em v, pois caso contrário $v \in \Omega$ o que contraria (7.2).

Usando o Teorema 7.2 ao identificarmos o intervalo onde a série converge absolutamente, $|x - a| < R$, sabemos automaticamente que a série diverge para $|x - a| > R$. Entretanto, o teorema não diz nada sobre os extremos do intervalo de convergência, $|x - a| = R$, precisamos analisar individualmente esses pontos. Para determinar R podemos usar os testes de convergência, em especial o Teste da Razão (Teorema 6.25) ou o Teste da Raiz (Teorema 6.26). Os próximos exemplos mostram como determinar o intervalo de convergência de algumas séries.

Exemplo 7.1.5: Analise a convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$.

O termo geral dessa série é

$$a_n = \frac{(x-2)^n}{10^n}$$

então podemos aplicar o Teste da Raiz no módulo do termo geral, ou seja,

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(x-2)^n}{10^n}\right|} = \sqrt[n]{\left|\frac{x-2}{10}\right|^n} = \frac{|x-2|}{10} \to \frac{|x-2|}{10}$$

Então a série converge absolutamente desde que

$$\frac{|x-2|}{10} < 1$$

ou seja, converge pare $|x - 2| < 10$ e diverge sempre que $|x - 2| > 10$. Assim, o raio de convergência é $R = 10$.

Resta analisar o que ocorre nos extremos $x - 2 = \pm 10$. Se $x - 2 = 10$ temos a série

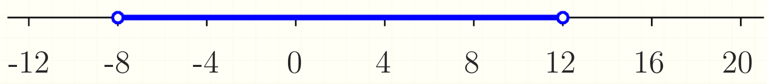
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

que diverge pelo Teste da Divergência. No caso $x - 2 = -10$, obtemos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

que também diverge pelo Teste da Divergência.

Em resumo a série converge absolutamente no intervalo $(-8, 12)$ e diverge em $(-\infty, -8] \cup [12, \infty)$. O gráfico a seguir ilustra os intervalo de convergência da série.



Código Python para ilustrar o raio de convergência das séries de potências.

Exemplo 7.1.6: Analise a convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$.

Aplicando o Teste da Razão para encontrar o raio de convergência obtemos,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \left| \frac{x}{(n+1)} \right| \to 0 \; .$$

Como o limite é menor do que 1 para qualquer valor de x concluímos que a série converge em toda a reta real, ou seja, o raio de convergência da série é $R = \infty$.

Exemplo 7.1.7: Analise a convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} |n^n x^n|$.

Aplicando o Teste da Raiz para a série obtemos, para todo $x \neq 0$, que

$$\sqrt[n]{|n^n x^n|} = n|x| \ \rightarrow \ \infty \ .$$

Então essa série de potências converge apenas em $x = 0$, isto é, seu raio de convergência é $R = 0$.

Resumindo, quando queremos testar a convergência de uma Série de Potências, normalmente empregamos os seguintes passos:

1. Usar o teste da razão, ou da raiz, para encontrar o intervalo onde a série converge absolutamente

$$|x - a| < R \qquad \text{ou} \qquad a - R < x < a + R$$

2. Se o intervalo de convergência absoluta for finito precisamos testar a convergência em cada extremo. Nesses pontos os testes da razão ou raiz provavelmente serão inconclusivos, portanto devemos usar o teste da comparação, integral ou série alternada.

Observe que se o intervalo de convergência absoluta for finito, $|x - a| < R$, podemos afirmar diretamente que a série diverge para $|x - a| > R$.

Exercícios Seção 7.1

1) [resp] Encontre o raio e o intervalo de convergência da série de potências.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{n\sqrt{n}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$

k) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{4^n \ln n}$

l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

n) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n+1}$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{n}}$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{4^n}$

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$

r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n \sqrt{n}}$

s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-a)^n}{b^n} \quad b > 0$

t) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n (x-a)^n}{\ln n}, \quad b > 0$

u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$

w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-4)^n}{n^3}$

x) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$

z) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$

2) Encontre o raio e o intervalo de convergência da série de potências. Para quais valores de x a série converge absolutamente e para quais valores ela converge condicionalmente.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n\sqrt{n}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^{2n}}{n}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3 3^n}$

o) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

p) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{\sqrt{n}+3}$

q) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$

r) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}$

s) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n\sqrt{n}}{3^n}$

t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}(2x+5)^n$

7.2 Operações com Séries de Potências

Apresentamos nessa seção alguns resultados que nos auxiliam a realizar operações em Séries de Potências. Começamos pela importante propriedade que nos permite derivar e integrar essas séries termo a termo. Se uma Série de Potências possui um raio de convergência $R > 0$, então a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

está definida no intervalo $(a-R, a+R)$ e é infinitamente derivável, isso é, tem as derivadas de todas as ordens, neste mesmo intervalo. Além disso, podemos calcular as derivadas ou integrais de f derivando ou integrando a série termo a termo como descrito nos próximos dois teoremas

Teorema 7.5: Derivação de Série de Potências Termo a Termo

Se o raio de convergência, R, não for nulo, podemos calcular a derivada da função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

derivando a série termo a termo dentro do intervalo $(a-R, a+R)$

$$f'(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(c_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n\, (x-a)^{n-1}\,.$$

Essa série também converge em $(a-R, a+R)$.

Observe que o primeiro termo da série é uma constante, portanto quando derivamos a série ele desaparece e o índice da série para a derivada começa em um. Note também que podemos aplicar a derivação termo a termo repetidas vezes para calcular a k-ésima derivada de f

$$
\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n (x-a)^n\right)^{(k)} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)\cdots\big(n-(k-1)\big)\, c_n\,(x-a)^{n-k}\,.
\end{aligned}
$$

Teorema 7.6: Integração de Série de Potências Termo a Termo

Se o raio de convergência, R, não for nulo, podemos calcular a primitiva da função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

integrando a série termo a termo dentro do intervalo $(a-R, a+R)$

$$\int f(x)\,dx \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n (x-a)^n dx \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

onde C é a constante de integração. Esta série também converge em $(a-R, a+R)$.

Esses teoremas, combinados com a fórmula que temos para a Série Geométrica, são úteis para encontrar a função que representa uma dada série, ou para encontrar uma série para uma dada função. Claro que isso só será possível quando operações de integração ou derivação nos dão ou uma série geométrica ou uma função que pode ser vista como limite de uma série geométrica. Os próximos exemplos ilustram essa aplicação.

Exemplo 7.2.1: Encontre uma série de potências centrada em $x = 0$ para a função $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$.

Note que

$$\frac{d}{dx}\ln\left(1+x^2\right)=\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2x}{1-(-x^2)}\,.$$

Comparando essa expressão com a fórmula da soma Série Geométrica com $r=-x^2$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\frac{1}{1-(-x^2)}$$

percebemos que, nos pontos onde a série converge,

$$\frac{d}{dx}\ln\left(1+x^2\right)=2x\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,x^{2n+1}\,.$$

Integrando e simplificando temos

$$\ln\left(1+x^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{n+1}+C$$

onde C é uma constante. Avaliando a série em $x=0$ verificamos que $C=\ln(1)=0$, portanto

$$\ln\left(1+x^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{n+1}\,.$$

Note que provamos a validade dessa fórmula apenas para $x\in(-1{,}1)$, pois usamos o limite da Série Geométrica que converge apenas para valores de x tais que $|r|=\left|-x^2\right|<1\,.$. Porém, série que aparece na última equação converge no intervalo $[-1,1]$, entretanto, neste momento só podemos afirmar que a igualdade vale para $x\in(-1,1)$. Os casos $x=-1$ e $x=1$ precisariam ser analisados separadamente.

No próximo exemplo faremos o caminho inverso do anterior, ou seja, começaremos com uma série e procuraremos uma função que represente essa série em algum intervalo.

EXEMPLO 7.2.2: Encontre uma função $f(x)$ que represente a série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

em um intervalo contendo a origem.

Se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

podemos derivar f termo a termo

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n .$$

Rearranjando temos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-x^2\right)^{n-1} .$$

Comparando com uma Série Geométrica observamos que $a = 1$ e $r = -x^2$. Usando a fórmula para a soma da série temos que, para $x \in (-1, 1)$,

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} .$$

Veja que $f(0) = 0$, então integrando $f'(t)$ sobre $[0, x]$ e usando o Teorema Fundamental do Cálculo **??**, obtemos que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x f'(t)\, dt \\
&= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt \\
&= \operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(0) \\
&= \operatorname{arctg}(x) .
\end{aligned}$$

Note que só podemos garantir que a função $\operatorname{arctg}(x)$ representa a série no intervalo $(-1, 1)$, pois utilizamos o limite da Série Geométrica, que só converge neste intervalo. Observe ainda que podemos afirmar que essa série converge no extremo $x = 1$, usando o Teste de Leibniz 6.28. Entretanto, neste momento, não podemos afirmar que em $x = 1$ essa série converge para $\operatorname{arctg}(1)$.

Apresentamos a seguir algumas operações que podem ser realizadas em séries de potências dentro do seu intervalo de convergência.

Teorema 7.7: Multiplicação de Séries de Potências

Se as séries

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{e} \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

convergem absolutamente para $|x| < R$, e

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \ ,$$

então

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = A(x)B(x) \qquad |x| < R \ ,$$

ou seja, podemos escrever

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ .$$

Observe que esse resultado nos diz que o produto de duas séries de potencia convergentes também converge no mesmo intervalo. Porém, calcular os valores c_n pode ser uma tarefa extremamente complexa.

Podemos também fazer uma mudança de variáveis trocando x por uma função $f(x)$.

Teorema 7.8: Mudança de Variáveis em uma Série de Potências

Se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge absolutamente para $|x| < R$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \big(f(x) \big)^n$$

converge absolutamente desde que f seja uma função contínua e $|f(x)| < R$.

Exercícios Seção 7.2

1) Utilize o Teorema 7.8 para encontrar o intervalo de convergência da série. Encontre também a soma da série, como uma função de x, dentro do intervalo de convergência.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (e^x - 4)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{9^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^n$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n$

h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$

2) Calcule a derivada e a primitiva de cada função definida por série de potência.

a) $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

b) $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

c) $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

d) $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$

e) $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

f) $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}$

7.3 Revisão

1) Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (5x-5)^n}{n5^n}$$

a) Qual o centro a da série?

b) Qual o raio de convergência?

c) Qual o intervalo de convergência da série?

d) Encontre uma função $f(x)$ que coincide com a série no interior do intervalo de convergência.

2) Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

a) Encontre o intervalo de convergência da série.

b) Encontre uma função f tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

no interior do intervalo de convergência.

8

Séries de Taylor

8.1 Séries de Taylor

Nessa seção definiremos as Séries de Taylor e mostraremos como calcular seus coeficientes. Um ponto importante é que construir uma série de Taylor para uma função não garante a convergência da série para essa função, a série pode, por exemplo, convergir para outra função. Essa questão será discutida na próxima seção. Apresentamos primeiro a definição dos Polinômios de Taylor que podem ser construídos para quaisquer funções que possuam o número necessário de derivadas no ponto a.

Definição 8.1: Polinômio de Taylor

Se uma função real f tem derivadas até ordem n em uma vizinhança de a, definimos o Polinômio de Taylor de f e ordem n centrado em a como

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \,.$$

Quando a função possuir derivadas de todas as ordens em a podemos definir sua Série de Taylor.

Definição 8.2: Série de Taylor

Dada uma função real f infinitamente derivável em uma vizinhança de a, sua Série de Taylor centrada em a, é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$
$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

A Série de Maclaurin é um caso particular da Série de Taylor.

Definição 8.3: Série de Maclaurin

A Série de Maclaurin é uma Série de Taylor centrada na origem, isso é, $a = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Observe que estamos usando a notação de derivada zero $f^{(0)}$ para indicar a própria função f, isso é,

$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

Apresentamos como primeiro exemplo o cálculo da Série de Taylor da função e^x centrada na origem, isso é, sua Série de Maclaurin.

Exemplo 8.1.1: Calcule a Série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$.

O primeiro passo é calcular as derivadas da função. Esse exemplo foi escolhido pela simplicidade em calcular as derivadas da função exponencial que têm sempre a mesma expressão

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k e^x}{dx^k} = e^x \ .$$

Como queremos a série centrada em $x = 0$, precisamos avaliar as derivadas nesse ponto

$$f^{(k)}(0) = e^0 = 1 \ .$$

Podemos agora calcular os coeficientes da Série de Taylor

$$c_0 = f(0) = 1 \ ,$$

$$c_1 = f'(0) = 1 \ ,$$

$$c_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = \frac{1}{2} \ ,$$

$$c_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{1}{6} \ .$$

Repetindo essas operações observamos que

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} \ .$$

Podemos agora construir a Série de Taylor da função exponencial

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \end{aligned}$$

Ainda não podemos dizer que a série calculada nesse exemplo seja igual a função e^x. Entretanto ela aproxima muito bem a função como podemos ver na Figura 8.1, onde a função e^x está mostrada em azul. Nesse gráfico também estão as primeiras somas parciais da série, correspondentes aos Polinômio de Taylor com graus de 1 a 5. O gráfico em magenta exibe P_5, observe que a partir de $x = -1$ esse gráfico sobrepõe o

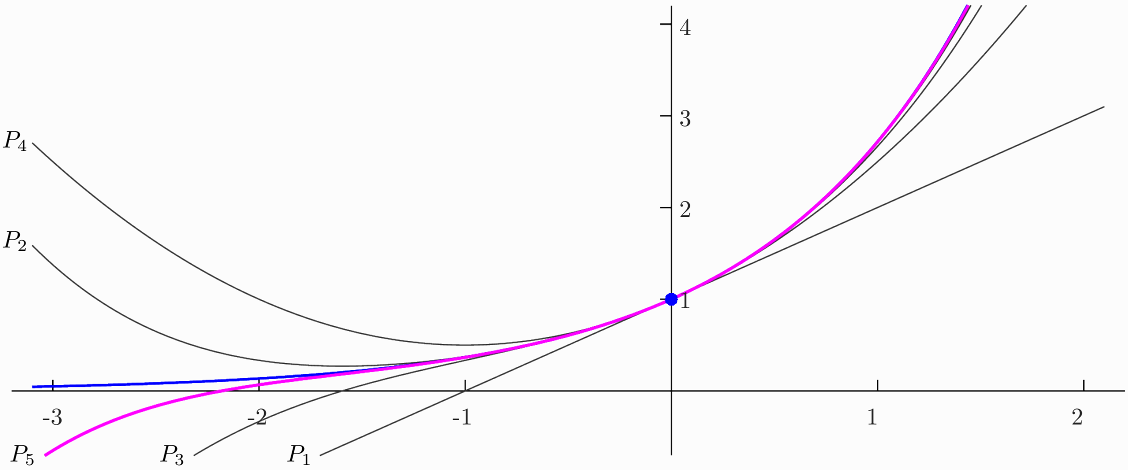


Figura 8.1: Comparação da função exponencial com seus polinômios de Taylor.

da função exponencial.

Código Python para ilustrar algumas séries de Taylor.

Séries Binomiais

Vamos agora apresentar um caso particular de grande importância histórica e prática a Série Binomial. Começamos apresentando o Binômio de Newton que é a expansão de um binômio elevado a uma potência inteira, $(a-b)^m$, estamos interessados no caso particular

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k \qquad \forall\, m \in \mathbb{N} \tag{8.1}$$

onde

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \tag{8.2}$$

é o Número de Combinações de m elementos tomados k a k. Observe que, para qualquer m

$$\binom{m}{0} = 1\ .$$

Podemos verificar a fórmula (8.1) calculando a Serie de Taylor da função

$$f(x) = (1+x)^m$$

onde m é um número inteiro positivo. Começamos calculando as derivadas de f em $x = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^m & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= m(1+x)^{m-1} & f'(0) &= m \\ f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2} & f''(0) &= m(m-1)\ . \end{aligned}$$

Repetindo o processo observamos que para todo k

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}$$

portanto

$$f^{(k)}(0) = m(m-1)\cdots(m-k+1)\ .$$

Note que para todo $k > m$ teremos que $f^{(k)}(0) = 0$. Dessa forma, a Série de Taylor de f centrada em zero é uma soma finita

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=1}^{m} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}\, x^k$$

onde os coeficientes são exatamente o número de combinações de m elementos tomados k a k. Assim, podemos escrever que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k \qquad m \in \mathbb{N}\ . \tag{8.3}$$

Como o somatório é finito temos apenas uma igualdade entre polinômios e podemos escrever que a soma é igual a função

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k \qquad m \in \mathbb{N}\ .$$

Queremos agora generalizar esse resultado para $m \in \mathbb{R}$. Essa generalização é a Série Binomial. Com m real as derivadas de f continuam com as mesmas expressões

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}$$

$$f^{(k)}(0) = m(m-1)\cdots(m-k+1)\ .$$

Porém, $f^{(k)}(0)$ deixa de ser zero para $k > m$. Isso transforma a soma (8.3) em uma série propriamente dita

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$$

onde

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \qquad\qquad m \in \mathbb{R}\ .$$

Observe que como m não é um inteiro positivo não podemos calcular seu fatorial. Outro ponto fundamental é que com infinitos termos na Série de Taylor não podemos afirmar que ela é igual a função sem verificar sua convergência. O próximo teorema conclui a generalização da equação (8.1) para todo m real, mostrando que a Série de Taylor de $f(x) = (1+x)^m$ converge para a função.

Teorema 8.4: Série Binomial

Para qualquer número $m \in \mathbb{R}$ e todo $x \in (-1, 1)$, vale que

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k}\, x^k$$

onde

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}\ .$$

Demonstração

Vamos aplicar o Teste da Razão nos termos da série

$$a_k = \binom{m}{k} x^k = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k\ .$$

A razão entre os módulos dos termos é

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left| \binom{m}{k+1} x^{k+1} \left[\binom{m}{k} x^k\right]^{-1} \right|$$

$$= \left| \frac{m(m-1)\cdots(m-k)}{(k+1)!} \; \frac{k!}{m(m-1)\cdots(m-k+1)} \; \frac{x^{k+1}}{x^k} \right|$$
$$= \frac{|m-k|}{k+1}|x| \; .$$

O limite dessa razão, quando $k \to \infty$, é igual a $|x|$. Então, a série converge absolutamente quando $|x| < 1$, ou seja, o intervalo de convergência é $(-1, 1)$. Isso significa que nesse intervalo podemos definir a função

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k \; .$$

Nosso objetivo agora é mostrar que

$$h(x) = (1+x)^m$$

Para verificar essa igualdade, vamos usar uma expressão equivalente

$$g(x) = \frac{h(x)}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m} h(x) = 1$$

Avaliando g em zero temos

$$g(0) = (1+0)^{-m} h(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} 0^k = \binom{m}{0} 0^0 = 1 \; .$$

Agora basta provar que g é uma função constante, ou seja, vamos mostrar que $g'(x) = 0$ para todo $x \in (-1, 1)$. Calculando a derivada e igualando a zero temos

$$g'(x) = -m(1+x)^{-m-1} h(x) + (1+x)^{-m} h'(x) = 0 \; .$$

Rearranjando a equação

$$\begin{aligned} -m(1+x)^{-m-1} h(x) + (1+x)^{-m} h'(x) &= 0 \\ (1+x)^{-m} h'(x) &= m(1+x)^{-m-1} h(x) \\ (1+x)^{-m}(1+x)^{m+1} h'(x) &= m h(x) \\ (1+x) h'(x) &= m h(x) \; . \end{aligned}$$

obtemos que $g'(x)$ será zero se

$$(1+x)h'(x) = mh(x)$$

Para demonstrar essa igualdade vamos partir da expressão do lado esquerdo e mostrar que ela é igual a do lado direito. Começamos por derivar a série $h(x)$ termo a termo

$$h'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} kx^{k-1} \,.$$

Podemos agora escrever

$$\begin{aligned}(1+x)h'(x) &= h'(x) + xh'(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} kx^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} kx^{k} \,.\end{aligned}$$

Para somar as duas séries precisamos igualar o expoente de x, para isso alteramos o índice da primeira série

$$(1+x)h'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k+1} (k+1)x^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} kx^{k}$$

Agora igualamos os índices das séries separando o termo $k = 0$ da primeira e agrupamos os somatórios

$$(1+x)h'(x) = m + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{m}{k+1} (k+1) + \binom{m}{k} k \right] x^{k} \,.$$

Vamos agora substituir as fórmulas para as combinações

$$\begin{aligned}(1+x)h'(x) = m + \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg[& \frac{m(m-1)\cdots(m-k)}{(k+1)!}(k+1) \\ & + \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} k \Bigg] x^{k} \,.\end{aligned}$$

Podemos agora simplificar os coeficientes de x^k e colocar em evidência a parte comum

$$\begin{aligned}(1+x)h'(x) &= m + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m(m-1)\cdots(m-k)}{k!}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{(k-1)!}\right]x^k\\ &= m + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{(k-1)!}\left[\frac{(m-k)}{k}+1\right]x^k\\ &= m + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{(k-1)!}\,\frac{m}{k}\,x^k\\ &= m + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}\,mx^k\,.\end{aligned}$$

Colocando a constante m em evidencia e notando que a fração é a expressão da combinação temos que

$$\begin{aligned}(1+x)h'(x) &= m + m\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k\\ &= m\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k\right]\\ &= m\left[\binom{m}{0}+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k\right]\\ &= m\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k\\ &= mh(x)\,.\end{aligned}$$

Isso mostra que, para $x \in (-1,1)$,

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k\,.$$

As Funções Potência, $f(x) = x^r$, são muito comuns em diversas áreas e aplicações da Matemática. Se o expoente r for um número inteiro elas também são fáceis para avaliar. Porém, em casos como

$$f(x) = x^{\sqrt{2}} \qquad\qquad f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad\qquad f(x) = x^{5/7}$$

precisamos aproximar o valor da função por seu Polinômio de Taylor. O próximo exemplo mostra como calcular a Série de Taylor para essas funções.

Exemplo 8.1.2: Encontre a Série de Taylor da função $\sqrt[3]{x}$.

Primeiro escrevemos a função na forma binomial

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3} = \big(1 + (x-1)\big)^{1/3} = (1+y)^{1/3}$$

onde $y = x - 1$. Usando o Teorema 8.4 podemos escrever

$$(1+y)^{1/3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/3}{k} y^k \qquad y \in (-1, 1)\ .$$

Desfazendo a mudança de variáveis, concluímos que, para $x \in (0, 2)$,

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/3}{k} (x-1)^k \\
&= \binom{1/3}{0}(x-1)^0 + \binom{1/3}{1}(x-1)^1 + \binom{1/3}{2}(x-1)^2 + \binom{1/3}{3}(x-1)^3 + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{3}(x-1) \\
&\qquad + \frac{1/3\,(1/3 - 1)}{2}(x-1)^2 \\
&\qquad + \frac{1/3\,(1/3 - 1)\,(1/3 - 2)}{3!}(x-1)^3 + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Exercícios Seção 8.1

1) [resp] Encontre a série de Maclaurin para $f(x)$, e o raio de convergência da série de potências.

a) $f(x) = (1-x)^{-2}$

b) $f(x) = \ln(1+x)$

c) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$

d) $f(x) = e^{-2x}$

e) $f(x) = 2^x$

f) $f(x) = x\cos(x)$

g) $f(x) = \operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

h) $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

2) [resp] Encontre a série de Taylor para $f(x)$ centrada em a, e o raio de convergência da série de potências.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1 \quad a = 1$

b) $f(x) = x - x^3 \quad a = -2$

c) $f(x) = \ln x \quad a = 2$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad a = -3$

e) $f(x) = e^{2x} \quad a = 3$

f) $f(x) = \operatorname{sen} x \quad a = \pi/2$

g) $f(x) = \cos x \quad a = \pi$

h) $f(x) = \sqrt{x} \quad a = 16$

3) Encontre os polinômios de Taylor de ordens 0, 1, 2 e 3 gerados por f em a.

a) $f(x) = e^{2x} \quad a = 0$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(x) \quad a = 0$

c) $f(x) = \ln(x) \quad a = 1$

d) $f(x) = \ln(1+x) \quad a = 0$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad a = 2$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x+2} \quad a = 0$

g) $f(x) = \operatorname{sen}(x) \quad a = \pi/4$

h) $f(x) = \operatorname{tg}(x) \quad a = \pi/4$

i) $f(x) = \sqrt{x} \quad a = 4$

j) $f(x) = \sqrt{1-x} \quad a = 0$

4) Encontre as Séries de Maclaurin das funções

a) $f(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = xe^x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{2+x}{1-x}$

e) $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$

f) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

g) $f(x) = 7\cos(-x)$

h) $f(x) = 5\cos(\pi x)$

i) $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

j) $f(x) = \operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

k) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x + 4$

l) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

5) Encontre as Séries de Taylor gerada por f centrada em a.

a) $f(x) = x^3 - 2x + 4 \quad a = 2$

b) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 8 \quad a = 1$

c) $f(x) = x^4 + x^2 + 1 \quad a = -2$

d) $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2 \quad a = -1$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \quad a = 1$

f) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^3} \quad a = 0$

g) $f(x) = e^x \quad a = 2$

h) $f(x) = 2^x \quad a = 1$

i) $f(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) \quad a = \dfrac{\pi}{4}$

j) $f(x) = \sqrt{x+1} \quad a = 0$

6) Encontre os três primeiros termos diferentes de zero da Série de Maclaurin para cada função e determine os valores de x para os quais a série converge absolutamente.

a) $f(x) = \cos(x) - \dfrac{2}{1-x}$

b) $f(x) = \left(1 - x + x^2\right) e^x$

c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)\ \ln(1+x)$

d) $f(x) = x \operatorname{sen}^2(x)$

7) Aplique a série binomial com $m = -1$ e $x = -r$ para obter que se $|r| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

8) Use a série binomial para expandir a função f em uma série de potências.

a) $f(x) = \sqrt[4]{1-x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$

c) $f(x) = (2+x)^{-3}$

d) $f(x) = (1-x)^{2/3}$

9) Use uma tabela de séries de Maclaurin para construir as séries de Maclaurin para a função f.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$

b) $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

c) $f(x) = e^x + e^{2x}$

d) $f(x) = e^x + 2e^{-x}$

e) $f(x) = x \cos\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$

f) $f(x) = x^2 \ln(1 + x^3)$

g) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2+x}}$

i) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ Dica: $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

j) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} & x \neq 0 \\ {}^1\!/_6 & x = 0 \end{cases}$

10) Encontre o polinômio de Taylor de terceiro grau 3 da função $f(x)$ centrado em a.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad a = 2$

b) $f(x) = x + e^{-x}$ $\quad a = 0$

c) $f(x) = \cos(x)$ $\quad a = \pi/2$

d) $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen}(x)$ $\quad a = 0$

e) $f(x) = \ln x$ $\quad a = 1$

f) $f(x) = x \cos(x)$ $\quad a = 0$

g) $f(x) = xe^{-2x}$ $\quad a = 0$

h) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ $\quad a = 1$

11) Encontre a série de Maclaurin para f e determine seu raio de convergência.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

b) $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$

c) $f(x) = \ln(4-x)$

d) $f(x) = xe^{2x}$

e) $f(x) = \operatorname{sen}(x^4)$

f) $f(x) = 10^x$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{16-x}}$

h) $f(x) = (1-3x)^{-5}$

8.2 Convergência da Série de Taylor

Uma consequência da definição da Série de Taylor é que se uma função pode ser representada por uma Série de Potências essa série coincide com a Série de Taylor da função. Esse fato é apresentado com precisão pela proposição a seguir.

Proposição 8.5: Igualdade das Séries de Potências e Taylor

Se a função f for igual a uma Série de Potências, no intervalo de convergência da série,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

então os coeficientes da série são os coeficientes de Taylor

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Demonstração

A função f é infinitamente derivável, pois as séries de potências são infinitamente deriváveis em seu intervalo de convergência. Calculando a n-ésima derivada de f, temos

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)c_k(x-a)^{k-n} \\ &= n!c_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)c_k(x-a)^{k-n} \end{aligned}$$

Avaliando a derivada em a temos

$$f^{(n)}(a) = n!c_n$$

Isolando c_n concluímos a demonstração

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

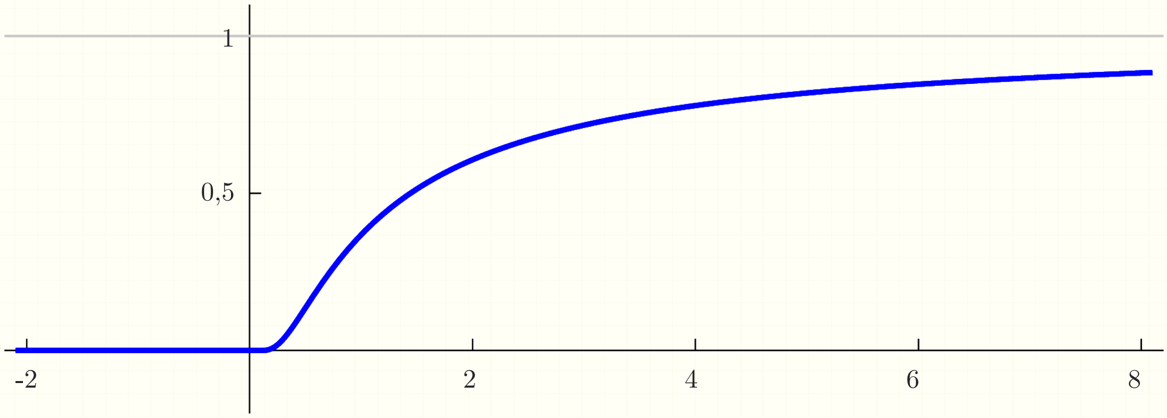
A utilidade dessa última proposição é limitada, pois precisamos saber de antemão que a função pode ser escrita como uma Série de Potências e essa verificação não é trivial. Por exemplo, existem funções infinitamente deriváveis, cujas séries de Taylor são convergentes mas não convergem para a função. O próximo exemplo apresenta uma dessas funções.

Exemplo 8.2.1: Calcule a Série de Taylor centrada na origem, $a = 0$, da função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-1/x} & x > 0 \end{cases}$$

Calcule a soma da série e compare com a função.

Essa é uma função suave, infinitamente derivável, cujo gráfico está ilustrado na figura a seguir.



Primeiro calculamos as derivadas de f em zero. Como a função é definida com expressões diferentes de cada lado da origem precisamos calcular as derivadas de cada lado e verificar que ambas coincidem em $x = 0$.

Calcular as derivadas do lado esquerdo, $x < 0$, é trivial pois a função é constante e portanto todas as suas derivadas são nulas. Consequentemente, o limite na origem também é zero

$$\lim_{x \to 0^-} f^{(k)}(x) = 0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Do lado direito, $x > 0$, a função tem a forma $f(x) = e^{-1/x}$, calculando as primeiras derivadas obtemos

$$f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^4}(1 - 2x)$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^6}(6x^2 - 6x + 1)$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^8}(-24x^3 + 36x^2 - 12x + 1)$$

Observamos, sem demonstrar, que a n-ésima derivada será sempre a exponencial dividida por uma potência de x e multiplicada por um poliônimo. Ao calcularmos o limite $x \to 0^+$ o polinômio sempre produzirá um valor finito, enquanto

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^k} = 0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Concluímos que todas as derivadas de $f(x)$ são zero na origem. Assim todos os coeficientes da sua Série de Taylor são nulos e a soma da série é a função constante igual a zero, que, evidentemente, não é igual a f.

Uma função f cuja Série de Taylor converge para f é chamada de Função Analítica. Nosso objetivo aqui é poder determinar quais funções são analíticas.

O próximo exemplo mostra uma forma direta para demonstrarmos que a Série de Taylor de uma função coincide com a função. Ainda nessa seção apresentaremos o Teorema de Taylor que simplifica essa verificação.

Exemplo 8.2.2: Seja $f(x) = \ln(x)$ encontre a série de Taylor de f centrada em $a = 1$. Encontre o intervalo onde a série converge absolutamente e mostre que neste intervalo a série coincide com f.

Note que

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) & f(1) &= 0 \\ f^{(1)}(x) &= x^{-1} & f^{(1)}(1) &= 1 \\ f^{(2)}(x) &= -x^{-2} & f^{(2)}(1) &= -1 \\ f^{(3)}(x) &= 2x^{-3} & f^{(3)}(1) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= -2 \cdot 3\, x^{-4} & f^{(4)}(1) &= -6\,. \end{aligned}$$

Podemos escrever, para todo $n \geq 1$, que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

portanto

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)! \qquad n \geq 1 \,.$$

Então, a série de Taylor de $\ln(x)$ em $a = 1$ é dada por

$$\begin{aligned}
T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \\
&= \frac{(-1)^0 f(1)}{0!}(x-1)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \,.
\end{aligned}$$

Para encontrarmos o raio de convergência da série vamos aplicar o Teste da Raiz, ou seja, vamos calcular o limite

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{|a_n|} &= \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n\right|} \\
&= \sqrt[n]{\frac{|x-1|^n}{n}} \\
&= \frac{|x-1|}{\sqrt[n]{n}} \\
&\to |x-1|
\end{aligned}$$

onde usamos que $\sqrt[n]{n} \to 1$. Verificamos que o raio de convergência da série é $R = 1$, portanto a série converge absolutamente para x tal que $|x-1| < 1$, ou seja, para $x \in (0, 2)$. Poderíamos analisar os extremos desse intervalo, mas para identificar a série com a função f vamos precisar derivar a série termo a termo e esse procedimento só está garantido no intervalo aberto.

Derivando $T(x)$ temos

$$\begin{aligned} T'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{d}{dx} \frac{(x-1)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (x-1)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^{n-1} \,. \end{aligned}$$

Observe que essa última série é uma Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = 1 - x$. Como era de se esperar ela converge para $|r| = |1 - x| < 1$. Além disso, nesse intervalo sua soma é dada por

$$T'(x) = \frac{\alpha}{1-r} = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x} \,.$$

Então, integrando $g'(t)$ sobre $[1, x]$ e usando que $g(1) = 0$, obtemos

$$T(x) = g(x) - g(1) = \int_1^x g'(t)\, dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(x) \,.$$

Dessa forma, fica provado que, no intervalo $(0, 2)$, a função $\ln(x)$ coincide com sua Série de Taylor centrada em $x = 1$.

A Figura 8.2 mostra a função $\ln(x)$, em azul, e seus polinômios de Taylor de ordens 1, 2, 3 e 6, o último desses polinômios está desenhado em magenta. Observe que para x entre zero e dois os polinômios se aproximam da função logaritmo, porém a partir de $x = 2$ eles se afastam rapidamente.

O método usado no último exemplo funcionou bem para a função logaritmo, mas buscar uma estratégia especifica para cada função pode ser bastante complicado. Felizmente, o Teorema de Taylor fornece uma forma relativamente simples para verificar a convergência da série para uma classe muito grande de funções.

A ideia do teorema é que podemos escrever uma função f em uma vizinhança de $x = a$ como sendo o seu polinômio de Taylor de ordem n, $P_n(x)$, somado com o erro,

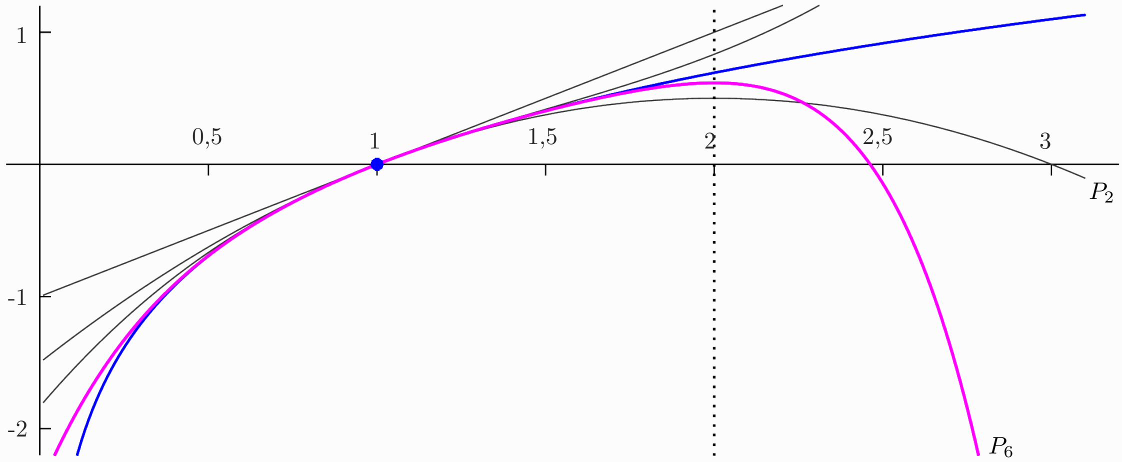


Figura 8.2: Comparação da função logaritmo com seus polinômios de Taylor.

$R_n(x)$, ou seja,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \ .$$

Se formos capazes de encontrar os valores de x para os quais $R_n(x)$ tende a zero quando o grau do polinômio vai para infinito, podemos concluir que f coincide com sua Série de Taylor nestes valores. Verificamos isso observando que

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \big(P_n(x) + R_n(x)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} P_n(x) + \lim_{n\to\infty} R_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} P_n(x) + 0 \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ . \end{aligned}$$

A importância do Teorema de Taylor está exatamente no fato que ele fornece uma fórmula para o resto $R_n(x)$.

TEOREMA 8.6: TEOREMA DE TAYLOR

Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função que tem $n+1$ derivadas contínuas no intervalo aberto I, então para a, $x \in I$, podemos escrever que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

onde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para algum c entre a e x.

Demonstração

Dado um x fixo, que podemos considerar sem perda de generalidade menor do que a, definimos a constante K, de modo que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{K}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

Precisamos mostrar que existe $c \in (x, a)$ tal que

$$K = f^{(n+1)}(c)\,.$$

Para isso definimos a função

$$\phi(y) = f(x) - \Bigg[f(y) + f'(y)(x-y) + \cdots + \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n + \frac{K}{(n+1)!}(x-y)^{n+1} \Bigg]\,.$$

Por construção essa função é tal que

$$\phi(a) = \phi(x) = 0\,.$$

Então, pelo Teorema de Rolle 1.10, existe $c \in (x, a)$ tal que $\phi'(c) = 0$. Calculando a derivada de $\phi(y)$ obtemos

$$\begin{aligned}\phi'(y) = -\Big[\quad & f^{(1)}(y) \\ & + f^{(2)}(y)(x-y) - f^{(1)}(y) \\ & + \frac{f^{(3)}(y)}{2}(x-y)^2 - f^{(2)}(y)(x-y) \\ & + \cdots \\ & + \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - \frac{f^{(n)}(y)}{n!}n(x-y)^{n-1} \\ & - (n+1)\frac{K}{(n+1)!}(x-y)^n \Big] \ .\end{aligned}$$

Subtraindo os termos repetidos obtemos

$$\phi'(y) = -\left[\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - (n+1)\frac{K}{(n+1)!}(x-y)^n\right]$$

rearranjando podemos escrever

$$\phi'(y) = \left(K - f^{(n+1)}(y)\right)\frac{(x-y)^n}{n!} \ .$$

Avaliando essa derivada em c temos

$$\phi'(c) = \left(K - f^{(n+1)}(c)\right)\frac{(x-c)^n}{n!} = 0 \ .$$

Como $c \in (x, a)$, ou seja, $c \neq x$, segue que

$$K = f^{(n+1)}(c) \ .$$

Para garantirmos que uma Série de Taylor converge para a sua função, podemos mostrar que a diferença entre as somas parciais, $P_n(x)$, e a função, f, tende à zero, para algum intervalo contendo a, quando o número de termos vai para infinito, isso é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0 \ .$$

Porém, não existe uma forma sistemática para encontrar o valor correto para c, o que normalmente fazemos é analisar todos os valores possíveis e considerar o pior caso, o próximo resultado formaliza esse procedimento.

Proposição 8.7: Desigualdade de Taylor

Se para $|x-a| \le d$ vale a desigualdade

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M\,.$$

Então o erro da Série de Taylor de f centrada em a satisfaz a Desigualdade de Taylor

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

para todo x tal que $|x-a| \le d$.

O próximo exemplo ilustra como podemos verificar quando a Série de Taylor de uma função converge para a própria função.

Exemplo 8.2.3: Mostre que a Série de Taylor da função exponencial converge para a função exponencial.

Vimos no Exemplo 8.1.1 que a Série de Taylor da função exponencial, e^x, centrada na origem, $a=0$, é convergente para todo $x \in \mathbb{R}$ e tem a forma

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Vamos demonstrar agora que a série converge para a função, isso é,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Para qualquer valor $x \in \mathbb{R}$ tomamos d tal que $|x| \le d$ temos então que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = e^x \le e^d\,.$$

Podemos agora usar a Desigualdade de Taylor 8.7 com $M = e^d$ obtendo

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} .$$

Calculamos o limite encontramos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 .$$

Usando o Teorema do Confronto concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

e portanto a Série de Taylor converge para a função

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

Temos agora os resultados necessários para demonstrar o cálculo da soma da Série do Inverso do Fatorial apresentada na Definição 6.8.

Exemplo 8.2.4: Mostre que a soma da Série do Inverso do Fatorial é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e .$$

Basta observarmos que a Série do Inverso do Fatorial coincide com a Série de Taylor da função exponencial em $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = e^1 = e .$$

A seguir apresentamos mais um exemplo de como podemos verificar que a Série de Taylor converge para a sua função.

Exemplo 8.2.5: Encontre a série de Taylor de $\cos(x)$ centrada em $x = {}^{\pi}/_{2}$. Mostre que essa série converge para $\cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Calculando as derivadas de $f(x) = \cos(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= -\operatorname{sen}(x) \\ f^{(2)}(x) &= -\cos(x) \\ f^{(3)}(x) &= \operatorname{sen}(x)\ . \end{aligned}$$

Repetindo o processo percebemos que

$$\begin{aligned} f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \quad \cos(x) \\ f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} \operatorname{sen}(x)\ . \end{aligned}$$

Calculando em ${}^{\pi}/_{2}$ temos

$$\begin{aligned} f^{(2n)}\left({}^{\pi}/_{2}\right) &= 0 \\ f^{(2n+1)}\left({}^{\pi}/_{2}\right) &= (-1)^{n+1}\ . \end{aligned}$$

Desse modo, a série de Taylor em $x = {}^{\pi}/_{2}$ é

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}\ .$$

Pelo teorema de Taylor, sabemos que existe $c \in ({}^{\pi}/_{2}, x)$, ou $c \in (x, {}^{\pi}/_{2})$, tal que

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} + R_{2k+1}(x)$$

onde

$$\begin{aligned} R_{2k+1}(x) &= \frac{f^{(2k+2)}(c)}{(2k+2)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\cos(c)}{(2k+2)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k+2}\ . \end{aligned}$$

Como $|\cos(c)| \leq 1$, segue que, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$0 \ \leq\ |R_{2k+1}(x)| \ \leq\ \frac{|x - {}^{\pi}/_{2}|^{2k+2}}{(2k+2)!} \ \to\ 0\ .$$

Assim, $R_{2k+1}(x) \to 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isso implica que

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

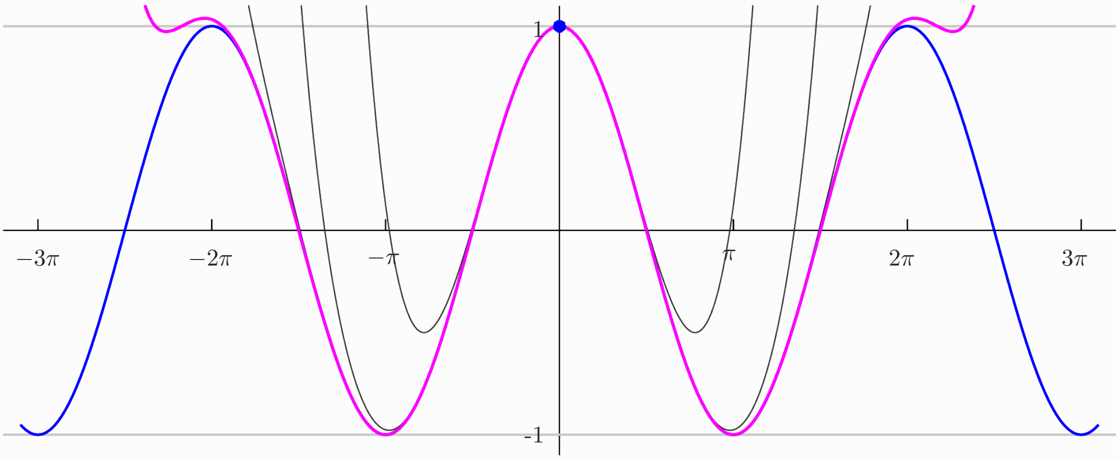


Figura 8.3: Comparação da função cosseno com seus polinômios de Taylor.

A Figura 8.3 mostra o gráfico do cosseno em azul e os polinômios de Taylor de graus 4, 8, 12 e 16, sendo que esse último destacado em magenta.

Exercícios Seção 8.2

1) Encontre a série de Taylor de $\cos(x)$ centrada em $x = 0$, mostre que o $\cos(x)$ coincide com a série obtida para todo $x \in \mathbb{R}$.

2) Calcule a série de Maclaurin ou Taylor da função, determine seu raio de convergência e prove que a série converge para a função no intervalo de convergência.

a) $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$

b) $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ $\quad a = \pi/2$

c) $f(x) = \mathrm{senh}(x)$

d) $f(x) = \cosh(x)$

8.3 Aproximações por Polinômios de Taylor

Uma das principais aplicações das Séries de Taylor é calcular aproximações para uma função com o auxilio dos Polinômios de Taylor. Se a série converge temos a fórmula para o erro do Teorema de Taylor 8.6 para estimarmos o erro cometido ou determinarmos o número de termos necessários para garantir que o erro é menor do que a tolerância aceitável. Apresentamos a seguir alguns exemplos desse uso das Séries de Taylor.

Exemplo 8.3.1: Escreva $\int_0^y e^{-x^2}dx$ como uma série de potências centrada em $x = 0$. Use a série obtida para encontrar uma aproximação para $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ somando os quatro primeiros termos da série.

Primeiro vamos encontrar a série de Taylor de $f(x) = e^x$. Como a k-ésima derivada $f^{(k)}(x) = e^x$ e $e^0 = 1$, segue que

$$e^x = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} + R_k(x)\ .$$

Verificamos que $R_k(x) \to 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois $f^{(k)}(c) = e^c$ para todo k, ou seja, as derivadas são limitadas por $|e^c|$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ .$$

Seja $u(x) = -x^2$. Note que $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\ .$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\int_0^y e^{-x^2}dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^y x^{2n}dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{y^{2n+1}}{2n+1}\ .\end{aligned}$$

Usando a série obtida, temos

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

$$\approx \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!\,5} - \frac{1}{3!\,7}$$

$$= \frac{26}{35}$$

$$\approx 0{,}7429\ .$$

No último exemplo encontramos uma aproximação para o valor de

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

entretanto não sabemos o erro cometido ao fazer essa aproximação. Como se trata de uma série alternada, podemos usar a Proposição 6.30 que nos dá uma estimativa superior para esse erro.

Exemplo 8.3.2: Estimar o erro cometido na aproximação do exemplo anterior.

Vimos no último exemplo que

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.7429\ .$$

Com o uso da Proposição 6.30 temos o seguinte limitante para o erro

$$R_3 \leq a_4 = \frac{(-1)^4}{4!(2\cdot 4+1)} = \frac{1}{4!\,9} \approx 0{,}0046\ .$$

Exemplo 8.3.3: Aproxime o valor de $\sqrt[3]{3/2}$ usando Polinômio de Taylor de grau 3 da função $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$. Obtenha uma estimativa para o erro cometido.

Podemos construir a Série de Taylor para a função $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ utilizando a

Série Binomial

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} x^n$$

onde

$$\binom{1/3}{0} = 1$$
$$\binom{1/3}{1} = \frac{1}{3}$$
$$\binom{1/3}{2} = \frac{1/3(1/3-1)}{2} = -\frac{1}{9}$$
$$\binom{1/3}{3} = \frac{1/3(1/3-1)(1/3-2)}{6} = \frac{5}{81}\ .$$

Assim

$$\sqrt[3]{1+x} \approx P_3(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}\ .$$

Tomando $x = 1/2$, temos

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{1+\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} + \frac{5}{648} \approx 1{,}1466\ .$$

Como a série é alternada podemos estimar o erro cometido por

$$R_3 \leq a_4 = \left|\binom{1/3}{4}\right| \left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0{,}0026\ .$$

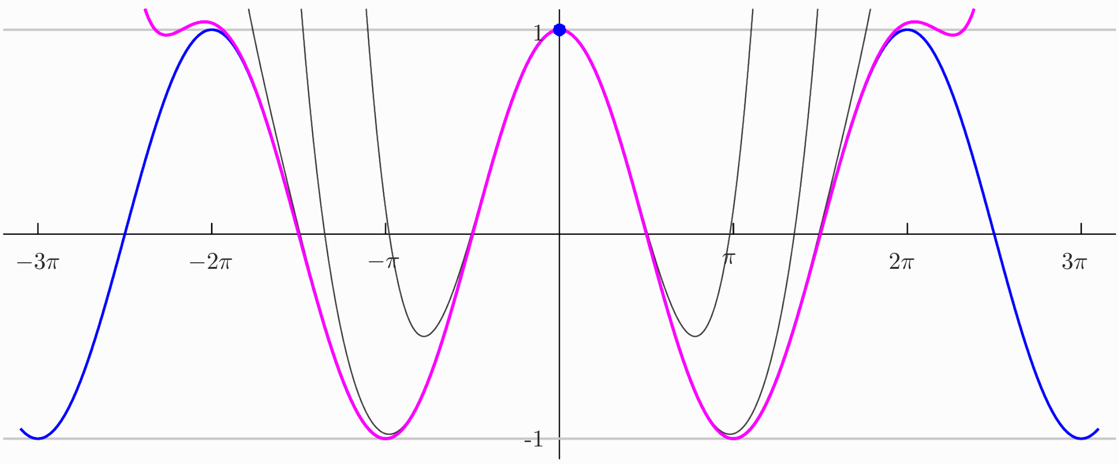


Figura 8.4: Comparação da raiz cúbica com seu polinômio de Taylor.

A Figura 8.4 mostra o gráfico da função $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ e o Polinômio de Taylor P_3, assim como a aproximação de $f(1/2)$ por $P_3(1/2)$.

Exercícios Seção 8.3

1) [resp] Encontre o polinômio de Taylor de segundo grau da função $f(x)$ centrado em a. Use o Teorema de Taylor para estimar o erro no intervalo $\mathcal{I}$.

a) $f(x) = \sqrt{x}$

$a = 4 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 4 \leq x \leq 4{,}2\}$

b) $f(x) = x^{-2}$

$a = 1 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 0{,}9 \leq x \leq 1{,}1\}$

c) $f(x) = x^{2/3}$

$a = 1 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 0{,}8 \leq x \leq 1{,}2\}$

d) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

$a = \frac{\pi}{6} \qquad \mathcal{I} = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right\}$

e) $f(x) = \sec(x)$

$a = 0 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; -0{,}2 \leq x \leq 0{,}2\}$

f) $f(x) = \ln(1+2x)$

$a = 1 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 0{,}5 \leq x \leq 1{,}5\}$

g) $f(x) = e^{x^2}$

$a = 0 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 0 \leq x \leq 0{,}1\}$

h) $f(x) = x\ln(x)$

$a = 1 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 0{,}5 \leq x \leq 1{,}5\}$

i) $f(x) = x\operatorname{sen}(x)$

$a = 0 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; -1 \leq x \leq 1\}$

j) $f(x) = \operatorname{senh}(2x) = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$

$a = 0 \qquad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; -1 \leq x \leq 1\}$

2) Calcule a integral indefinida como uma série infinita.

a) $\displaystyle\int x\cos\left(x^3\right)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\cos(x) - 1}{x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(x^2)\,dx$

3) Use séries para aproximar a integral definida com erro menor do que a tolerância, ε, indicada. Dica: *Use a estimativa de erros das séries alternadas e uma calculadora.*

a) $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{arctg}(x)\,dx \qquad \varepsilon = 10^{-4}$

b) $\displaystyle\int_0^{1} \operatorname{sen}(x^4)\,dx \qquad \varepsilon = 10^{-4}$

c) $\displaystyle\int_0^{0{,}4} \sqrt{1+x^4}\,dx \qquad \varepsilon = 5\cdot 10^{-6}$

4) Encontre uma série cuja soma seja o valor da integral definida

$$\int_0^{0{,}5} x^2 e^{-x^2}\,dx$$

5) Use séries para calcular o limite.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{1+x-e^x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x + x^3/6}{x^5}$

A Tabela 8.1 lista algumas séries de Maclaurin importantes e seus raios de convergência.

Tabela 8.1: Séries de Maclaurin

$\dfrac{1}{1-x}$	$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$R = 1$
e^x	$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$= 1 + \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$	$R = \infty$
$\operatorname{sen}(x)$	$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$= x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$	$R = \infty$
$\cos(x)$	$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$= 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$	$R = \infty$
$\operatorname{arctg}(x)$	$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	$= x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots$	$R = 1$
$\ln(x+1)$	$= \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$	$= x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$	$R = 1$
$(1+x)^k$	$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$	$= 1 + kx + \dfrac{k(k-1)}{2}x^2 + \cdots$	$R = 1$

8.4 Revisão

1) [resp] Para cada função abaixo, apresente sua série de Taylor com o centro indicado. Apresente também o raio de convergência das séries.

a) $q(x) = \dfrac{1}{5-x}$, centrada em 4

b) $E(x) = \displaystyle\int e^{-x^2}\,dx$, centrada em 0

c) $d(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, centrada em 0

2) [resp] Considere a função

$$\begin{aligned} L(x) &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \end{aligned}$$

para $|x| < 1$ Ela é utilizada para obter séries numéricas que aproximam os valores de $\ln 2$ e $\ln 3$. Nessa questão vamos explorar essa utilização.

a) Obtenha os valores de x para os quais $L(x) = \ln 2$ e $L(x) = \ln 3$.

b) Obtenha uma série de potências para L centrada em zero, explicitando seu raio de convergência.

c) Com base nos itens anteriores, apresente séries numéricas que convergem para $\ln 2$ e $\ln 3$

3) Seja $f(x) = \ln(x)$.

a) Mostre que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$$

para $x \in (0{,}2)$

b) Mostre que a série no item anterior converge absolutamente em $x \in (0{,}2)$. Analise se a série converge nos extremos $x = 0$ e $x = 2$. É possível afirmar que a série diverge em $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$?

c) Some os quatro primeiros termos da série do item (a) para encontrar uma aproximação para o valor de $\ln(3/2)$. Estime o erro cometido.

4) Seja $f(x) = \dfrac{2}{1-x}$

a) Encontre um padrão para $f^{(n)}(x)$ e use isso para construir a série de Taylor de f centrada em $x = -1$.

b) Mostre que $f(x) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{x+1}{2}}$

c) Tomando $r = \dfrac{x+1}{2}$, para quais valores de x a função f pode ser vista como o limite da série geométrica $\sum r^n$?

d) Use os itens (a) e (b) para concluir que $R_n(x) \to 0$ se $x \in (-3, 1)$, onde $R_n(x)$ é o resto dado pelo teorema de Taylor.

5) Seja $f(x) = e^x$

a) Encontre a série de Taylor de f centrada em $x = 0$ e mostre que f coincide com a série em todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Escreva

$$\int_0^y f(-x^3)\,dx = \int_0^y e^{-x^3}\,dx$$

como uma série de potências centrada em $y = 0$.

c) Calcule uma aproximação para

$$\int_0^{1/2} f(-x^3)\,dx$$

fazendo a soma dos três primeiros termos da série obtida no item anterior.

d) Estime o erro cometido na aproximação do item anterior.

6) Seja $f(x) = \cos(x)$.

a) Encontre um padrão para $f^{(n)}(x)$ e use isso para encontrar a série de Taylor de f centrada em $x = 0$. Mostre que $f(x)$ coincide com sua série de Taylor para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Escreva

$$\int_0^x \cos(t^2)\,dt$$

como uma série de potências centrada em $x = 0$.

c) Encontre uma aproximação para

$$\int_0^1 \cos(t^2)\,dt$$

somando até o terceiro termo da série obtida no item anterior. Estime o erro cometido.

9

Usos da Série de Taylor

Neste capítulo apresentamos alguns exemplos de uso das Séries de Taylor para resolver problemas matemáticos importantes.

9.1 Avaliando Integrais Não Elementares

Podemos utilizar as Séries de Taylor para calcular integrais de funções cuja integração seja muito complexa ou que a primitiva não pode ser expressa como uma combinação finita de funções elementares. Para ilustrar essa técnica vamos aplicá-la para uma função

Exemplo 9.1.1: Calcule a Série de Taylor para a primitiva da função

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(x^2\right) \; .$$

Sabemos que a função seno é igual a sua Série de Taylor para todo número real, isso é, podemos escrever

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \cdots$$

Fazendo $\alpha = x^2$ temos

$$\operatorname{sen}\left(x^2\right) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots$$

Substituindo a função pela sua série dentro da integral e integrando termo a termo, obtemos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}\left(x^2\right)\, dx &= \int x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots\, dx \\
&= \int x^2\, dx - \int \frac{x^6}{3!}\, dx + \int \frac{x^{10}}{5!}\, dx - \int \frac{x^{14}}{7!}\, dx + \cdots \\
&= C + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \cdots
\end{aligned}$$

onde C é a constante de integração. Para escrevermos essa série em um somatório, colocamos x^3 em evidência e escrevemos as potências em termos de x^4

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}\left(x^2\right)\, dx &= x^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{x^4}{7 \cdot 3!} + \frac{x^8}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{12}}{15 \cdot 7!} + \cdots\right) \\
&= x^3 \left(\frac{\left(-x^4\right)^0}{3} + \frac{\left(-x^4\right)^1}{7 \cdot 3!} + \frac{\left(-x^4\right)^2}{11 \cdot 5!} + \frac{\left(-x^4\right)^3}{15 \cdot 7!} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

onde escolhemos $C = 0$ para simplificar as expressões. Precisamos agora identificar as sequências que constroem os valores necessários

k	$3 + 4k$	$1 + 2k$
0	3	1
1	7	3
2	11	5
3	15	7

Temos então que

$$\int \operatorname{sen}\left(x^2\right)\, dx = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-x^4\right)^k}{(3+4k)(1+2k)!} \; .$$

Note que continuamos sem uma expressão fechada e finita para a integral. Porém, mesmo a série sendo uma representação infinita, ela pode ser utilizada para aproximar o valor da integral em qualquer ponto com a precisão que desejarmos.

9.2 Avaliando Formas Indeterminadas

Outra operação que pode ser complexa é o cálculo de limites indeterminados, nesse caso a Série de Taylor também pode ajudar. Vamos ilustrar a técnica caculando o limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \; .$$

Esse é um limite, com indeterminação do tipo $^0/_0$, onde podemos utilizar a regra de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{^1/_x}{1} = 1 \; .$$

Entretanto, a Série de Taylor oferece uma forma alternativa para calcular esse limite que pode ser útil em outras situações.

Exemplo 9.2.1: Calcule o limite $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$.

Primeiro obtemos a Série de Taylor da função $\ln(x)$ com centro em $a = 1$

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$$

a igualdade é verdadeira para todo x tal que $|x-1| < 1$. Agora substituímos o logaritmo pela sua série na função original

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{x-1}\left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots\right) \; .$$

Manipulamos os termos da série obtemos

$$\frac{\ln x}{x-1} = 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(x-1)^3}{4} + \cdots$$

Agora calculamos o limite desejado

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \left(1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(x-1)^3}{4} + \cdots\right)$$

como todos os termos da série, com exceção do primeiro, vão para zero, quando $x \to 1$, temos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \ .$$

9.3 Definição de Novas Funções

Podemos definir novas funções como a soma de uma Série de Taylor, essa é uma forma para definir as funções reais conhecidas para variáveis complexas, como ilustrado na próxima subseção, e também é como definimos várias funções especiais. Como exemplo vamos definir uma das Funções de Bessel, que são as soluções da equação de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \ . \tag{9.1}$$

Exemplo 9.3.1: Exiba a Função de Bessel de Primeira Espécie de Ordem Zero, $J_0(x)$.

Essa função é uma solução da equação de Bessel (9.1) com $\alpha = 0$

$$\mathcal{L}[y] = x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 \ .$$

Vamos buscar a solução com a forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ .$$

Calculando as derivadas de y obtemos

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} \, .$$

Substituindo na equação temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y] &= x^2 y'' + x y' + x^2 y \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \, .
\end{aligned}$$

Queremos agrupar todos os termos em um único somatório, para isso fazemos uma mudança de índice no último para igualar as potências de x

$$\mathcal{L}[y] = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \, .$$

Precisamos agora fazer o índice do segundo somatório começar em $n = 2$, conseguimos isso movendo o termo $n = 1$ para fora

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y] &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^n + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
&= a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \big(a_n n(n-1) + a_n n + a_{n-2} \big) x^n \\
&= a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \big(a_n n^2 + a_{n-2} \big) x^n \, .
\end{aligned}$$

Para que $\mathcal{L}[y] = 0$ precisamos que o coeficiente de cada potência de x seja zero. Ao analisarmos o coeficiente de x verificamos que

$$a_1 = 0 \, .$$

Para as demais potências, x^n, temos a condição

$$a_n n^2 + a_{n-2} = 0$$

que produz a relação de recorrência

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2} \, .$$

Usando essa relação e a condição $a_1 = 0$ concluímos que todos os coeficientes ímpares são nulos

$$a_n = 0 \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

Para encontrarmos os coeficientes pares fazemos $n = 2k$

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k)^2} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Observando que

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = -\frac{1}{4^2}\left(-\frac{a_0}{2^2}\right) = \frac{a_0}{2^6}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{1}{6^2}\left(\frac{a_0}{2^6}\right) = -\frac{a_0}{2^6(3 \cdot 2)^2}$$

$$a_8 = -\frac{a_6}{8^2} = -\frac{1}{8^2}\left(-\frac{a_0}{2^6(3 \cdot 2)^2}\right) = \frac{a_0}{2^8(4 \cdot 3 \cdot 2)^2} \, .$$

Generalizando temos

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k!)^2} a_0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Podemos agora escrever

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k!)^2}\, x^{2k} \, .$$

A Função de Bessel de Primeira Espécie de Ordem Zero é definida como

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k!)^2}\, x^{2k} \, .$$

Vamos agora analisar a convergência dessa série usando o Teste da Razão

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+2}}{2^{2k+2}\,((k+1)!)^2}\,\frac{2^{2k}\,(k!)^2}{(-1)^k x^{2k}}\right| = \frac{x^2}{2^2(k+1)^2}$$

Quando $k \to \infty$ essa expressão vai para zero independentemente do valor de x, portanto a série converge para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

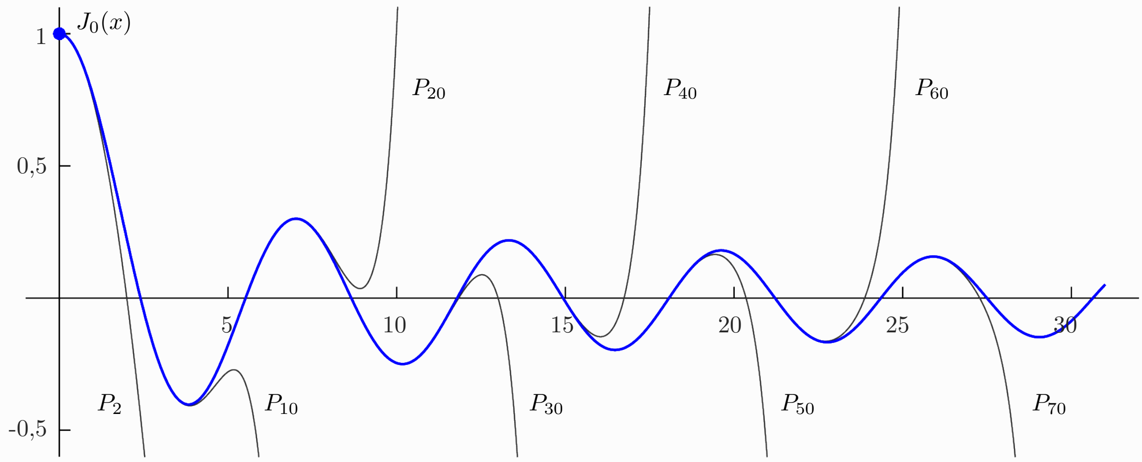


Figura 9.1: Comparação da função de Bessel com seus polinômios de Taylor.

A Figura 9.1 a seguir mostra o gráfico da função $J_0(x)$ e alguns dos seus Polinômios de Taylor.

9.4 Identidade de Euler

Com os devidos cuidados, os resultados sobre sequências e séries valem também para os números ou funções complexos. Vamos apresentar aqui a Identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \, .$$

Na Seção **??** apresentamos um resumo sobre os números complexos, aqui vamos utilizar que um número complexo pode ser escrito como

$$z = a + bi$$

onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária

$$i = \sqrt{-1}\,.$$

As operações de soma e produto com números complexos obedecem as mesmas propriedades conhecidas para os números reais. Aplicando essas propriedades podemos calcular as potências da unidade imaginária, por exemplo,

$$i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1, \qquad i^5 = i\,.$$

Vamos estender a definição das funções seno, cosseno e exponencial para variáveis complexas, isso é, queremos avaliar essas funções para qualquer valor complexo $z \in \mathbb{C}$. Fazemos isso substituindo o x real pelo z complexo nas Séries de Taylor dessas funções

$$\mathrm{sen}(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \cdots$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

Note que, estamos apresentando esse resultado sem a devida justificativa. Para sermos rigorosos precisamos verificar que todas as operações estão bem definidas e que as séries convergem, porém, essa analise foge ao escopo desse curso.

Para verificarmos a Identidade de Euler escrevemos Série de Taylor da exponencial de $z = i\theta$, com $\theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \cdots$$

Utilizando a propriedade de potências $(xy)^r = x^r y^r$ reescrevemos essa expressão como

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \cdots$$

Utilizando o cálculo das potencias de i obtemos

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

Nessa expressão, os termos com potências impares contém i e os termos com potências pares não. Vamos agrupar esses dois tipos de termos e colocar i em evidência

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) .$$

Os termos dentro do primeiro par de parênteses são os termos da Série de Taylor do cosseno e os termos dentro do segundo par de parênteses são a série do seno. Podemos, então, escrever a Identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \ .$$

Uma consequência interessante dessa identidade é que podemos escrever uma relação envolvendo "Todas as Constantes da Matemática". Para isso basta escolher $\theta = \pi$

$$e^{i\pi} \;=\; \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi \;=\; -1 + i0 \;=\; -1$$

ou seja

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \ .$$

9.5 Cálculo da Série de Taylor para o Arco Tangente

Vamos ilustrar uma forma alternativa para calcular a Série de Taylor da função $\operatorname{arctg}(x)$ para ilustrar algumas manipulações possíveis quando precisamos obter uma Série de Taylor. Vamos começar, como em outros casos, calculando as derivadas da função

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x) &= \frac{1}{1+x^2}\\
\frac{d^2}{dx^2}\operatorname{arctg}(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\\
\frac{d^3}{dx^3}\operatorname{arctg}(x) &= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}\\
\frac{d^4}{dx^4}\operatorname{arctg}(x) &= \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} \ .
\end{aligned}$$

Não precisamos ir mais longe para perceber que esse não é um bom método, as expressões estão se tornando cada vez mais complexas, portanto, precisamos tentar outra abordagem.

Inicialmente, nesse desenvolvimento, não vamos nos preocupar com o rigor matemático para obter uma candidata a Série de Taylor, depois justificamos o processo utilizado demonstrando a convergência da série. Começamos observando que a derivada da função arco tangente é igual a soma de uma Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = -x^2$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{\alpha}{1-r} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Escrevemos então que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

integrando os dois lados temos a candidata a Série de Taylor para $\operatorname{arctg}(x)$

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

Temos uma Série de Taylor, porém, nossos cálculos não foram cuidadosos. Precisamos demonstrar que a série obtida converge para a função. Faremos isso voltando para a fórmula da soma da Série Geométrica

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1} x^{2(n+1)} + \cdots \tag{9.2}$$

Note que para qualquer n o resto dessa série, R_n, é uma Série Geométrica com $r = -x^2$ e $\alpha = (-1)^{n+1}x^{2(n+1)}$

$$R_n = (-1)^{n+1}x^{2(n+1)} + (-1)^{n+2}x^{2(n+2)} + (-1)^{n+3}x^{2(n+3)} + \cdots$$

Utilizando a fórmula da soma dos termos dessa série obtemos

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}.$$

Podemos então escrever a série em (9.2) como uma soma finita

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}$$

Temos agora uma expressão finita para a derivada da função arco tangente

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}$$

Por ser uma soma finita podemos integrar termo a termo sem preocupações com a convergência

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} u^{2(n+1)}}{1+u^2}\, du\,.$$

Estamos agora em uma situação similar ao Teorema de Taylor 8.6, onde podemos concluir que a série converge para a função se o erro

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} u^{2(n+1)}}{1+u^2}\, du$$

convergir para zero, quando $n \to \infty$.

Para garantirmos que R_n tende para zero, basta verificar que seu módulo tente a zero, ou seja, queremos calcular o limite de

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} u^{2(n+1)}}{1+u^2}\, du \right| \\ &= \int_0^{|x|} \left| \frac{(-1)^{n+1} u^{2(n+1)}}{1+u^2} \right| du \\ &= \int_0^{|x|} \frac{u^{2(n+1)}}{1+u^2}\, du \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Como $1 + u^2 \geq 1$ temos que

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} u^{2(n+1)}\, du = \left. \frac{u^{2n+3}}{2n+3} \right|_0^{|x|} = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}\,.$$

Portanto, para todo $|x| \leq 1$ sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

e podemos concluir que, para todo $x \in [-1, 1]$ a Série de Taylor da função arco tangente converge para a função

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

9.6 Problema de Basileia

O Problema de Basileia consiste em encontrar a soma da Série de Inversos do Quadrado, apresentada na Definição 6.7,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

A solução desse problema obtida por Euler em 1735 o tornou conhecido na comunidade Matemática da época e é de grande importância por estar relacionada ao estuda da Função Zeta de Riemann, $\zeta(z)$, pois

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} .$$

Entre as aplicações desse resultado está o cálculo da probabilidade de dois números escolhidos ao acaso serem primos entre si. A verificação dos cálculos realizados por Euler usa a decomposição do seno em um produto infinito que depende no Teorema de Fatoração de Weierstrass para funções holomorfas em todo o plano complexo, evidentemente além do escopo dessa disciplina. Dessa forma, vamos apresentar apenas os passos principais desse desenvolvimento e em seguida apresentamos uma demonstração publicada por T. M. Apostol [**Apostol-Proof-Euler-Missed**] em 1983 que envolve operações mais simples.

O desenvolvimento dos cálculos de Euler começa com a Série de Taylor da função seno

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

dividindo ambos os lados por x temos

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Usando o Teorema de Fatoração de Weierstrass nessa função, podemos escrever

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdots$$

Igualando a Série de Taylor da função com sua fatoração temos

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \tag{9.3}$$

Como essa igualdade é válida sabemos que o coeficiente de cada potência de x é igual nas duas expressões. Extraímos diretamente o coeficiente de x^2 da Série de Taylor obtendo

$$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}\,.$$

Multiplicando os termos do produto e coletando apenas os coeficientes de x^2 temos

$$-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,.$$

Igualando os coeficientes temos que

$$-\frac{1}{6}=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,.$$

Isolando a série chegamos ao resultado desejado

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\,.$$

Apresentamos agora a demostração alternativa proposta por Apostol, que se baseia na avaliação da integral

$$I=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}\,dxdy\,.$$

O primeiro passo é verificar que essa integral é igual a $\zeta(2)$. Note que a fração é a soma da Série Geométrica com $\alpha=1$ e $r=xy$, como os valores de x e y na integral estão entre zero e um podemos escrever

$$I=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}\,dxdy\;=\;\int_0^1\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}x^ny^n\,dxdy\,.$$

Como essa série é absolutamente convergente podemos trocar a ordem da soma com a integração

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n \, dx dy \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{y^n}{n+1} \, dy \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \zeta(2) \; .
\end{aligned}
$$

A segunda parte consiste em calcular a integral e mostrar que

$$
I = \frac{\pi^2}{6} \; .
$$

Aplicamos uma mudança de variáveis rotacionando os eixos 45° no sentido horário

$$
x = \frac{u-v}{\sqrt{2}} \qquad\qquad y = \frac{u+v}{\sqrt{2}}
$$

de modo que

$$
\frac{1}{1-xy} = \frac{2}{2-u^2+v^2}
$$

e a nova região de integração seja o quadrado, Ω, com vértices opostos em $(0,0)$ e $\left(\sqrt{2},0\right)$. O Jacobiano dessa transformação é

$$
J = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{-1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \; .
$$

Assim a integral assume a forma

$$
I = \iint_\Omega \frac{2}{2-u^2+v^2} \, dudv \; .
$$

Usando a simetria de reflexão do quadrado em relação ao eixo u podemos escrever a integral como

$$
I = 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{u} \frac{1}{2-u^2+v^2} \, dvdu + 4\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{1}{2-u^2+v^2} \, dvdu \; .
$$

Usando

$$\int_0^x \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$$

temos que

$$\int_0^u \frac{dv}{2-u^2+v^2} = \frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right),$$

$$\int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{dv}{2-u^2+v^2} = \frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right).$$

Voltando para o cálculo de I fazemos $I = I_1 + I_2$ onde

$$I_1 = 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right)\frac{du}{\sqrt{2-u^2}}$$

$$I_2 = 4\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right)\frac{du}{\sqrt{2-u^2}}$$

Para calcularmos I_1 usamos a transformação

$$u = \sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta) \qquad du = \sqrt{2}\cos(\theta)\, d\theta = \sqrt{2-u^2}\, d\theta$$

que produz

$$I_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{2}\cos(\theta)}\right) d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta\, d\theta = 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{2\pi^2}{6^2}.$$

Para I_2 usamos $u = \sqrt{2}\cos(2\theta)$ que produz

$$\begin{aligned} du &= -2\sqrt{2}\operatorname{sen}(2\theta)\, d\theta \\ &= -2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2(2\theta)}\, d\theta \\ &= -2\sqrt{2}\sqrt{1-u^2/2}\, d\theta \\ &= -2\sqrt{2-u^2}\, d\theta \end{aligned}$$

e também

$$\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} = \frac{\sqrt{2}(1-\cos(2\theta))}{\sqrt{2-2\cos^2(2\theta)}}$$
$$= \sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{1+\cos(2\theta)}}$$
$$= \sqrt{\frac{2\,\mathrm{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}$$
$$= \mathrm{tg}(\theta)\ .$$

Temos então

$$I_2 = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{0} \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}(\theta)\right)(-2)\,d\theta \ = \ 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta\,d\theta \ = \ 4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \ = \ \frac{4\pi^2}{6^2}\ .$$

Calculando I temos

$$I = I_1 + I_2 = \frac{2\pi^2}{6^2} + \frac{4\pi^2}{6^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

o que conclui nossa demostração.

A

Conteúdo Complementar

A.1 Notação Matemática

Símbolos Matemáticos

A lista a seguir inclui vários símbolos matemáticos comumente utilizados e seus significados

- ∞ Indica uma quantidade infinita. Observe que ∞ não é um número e portanto não podemos realizar operações algébricas com ele.
- $\forall$ Para todo
- $\exists$ Existe
- $\to$ Esse símbolo pode indicar um limite, $x \to 0$, ou ser usado na definição de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ele não pode substituir outros símbolos como a igualdade e também não deve ser usado para indicar o sentido de leitura.

A seguir apresentamos símbolos que indicam relações. Note que cada um tem um significado específico, um não pode substituir o outro.

$=$	Símbolo de igualdade, ele indica que as duas expressões são completamente equivalentes.
$\Leftrightarrow$	Esse símbolo significa "se, e somente se". Ele só pode ser utilizado entre duas afirmações lógicas, isso é, que podem ser verdadeiras ou falsas, e indica que ambas são simultaneamente verdadeiras ou simultaneamente falsas.
$\Rightarrow$	Assim como $\Leftrightarrow$, esse símbolo indica uma relação lógica entre duas afirmações. Porém, seu significado é mais sutil, ele indica que se a primeira afirmação for verdadeira a segunda também precisa ser. Se a primeira afirmação for falsa não sabemos nada sobre a segunda.
$\Leftarrow$	Tem o mesmo significado que $\Rightarrow$, porém com os papeis trocados para as afirmações.

Conjuntos e Intervalos

Os conjuntos numéricos mais utilizados são:

$\mathbb{N}$	Números naturais	$\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Números inteiros	$\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	Números racionais	Razões, ou frações, de números inteiros
$\mathbb{R}$	Números reais	A caracterização dos reais é mais complexa, para o Cálculo, podemos pensar que eles correspondem aos pontos da reta e que não há buracos entre eles
$\mathbb{C}$	Números complexos	Extensão dos reais para incluir raízes de números negativos

As operações com conjuntos mais comuns são

$\in$ Indica que um elemento pertence a um conjunto

$\cup$ União de conjuntos, representa os elementos que pertencem a um ou outro conjunto

$\cap$ Intersecção de conjuntos, representa os elementos que pertencem a ambos conjuntos

$\subset$ Subconjunto, indica que todos os elementos do conjunto da esquerda pertencem também ao conjunto da direita.

Intervalos são um caso particular de subconjuntos dos números reais, eles indicam um conjunto de números reais "consecutivos" e "sem buracos". Normalmente os intervalos são definidos por desigualdades

$$\begin{aligned} I &= \{\, x \in \mathbb{R} \ / \ 3 < x < 5 \,\} \\ J &= \{\, x \in \mathbb{R} \ / \ -1 \leq x \leq 2 \,\} \\ K &= \{\, x \in \mathbb{R} \ / \ |x| < 2 \,\} \end{aligned}$$

Como esses conjuntos são muito utilizados no Cálculo existe uma notação específica para eles. A notação para intervalos precisa indicar quais são seus extremos e se esses extremos pertencem ou não ao intervalo, um colchete [ou] indica que o extremo correspondente pertence ao intervalo enquanto que um parenteses (ou) indica que os extremos não pertence ao intervalo

$$\begin{aligned} (3,5) &= \{\, x \in \mathbb{R} \ / \ 3 < x < 5 \,\} \\ [-1,2] &= \{\, x \in \mathbb{R} \ / \ -1 \leq x \leq 2 \,\} \\ [-2,2] &= \{\, x \in \mathbb{R} \ / \ |x| < 2 \,\} \\ (a,b] &= \{\, x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b \,\} \\ [a,b) &= \{\, x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b \,\} \end{aligned}$$

Quando ambos extremos pertencem ao intervalo dizemos que ele é um Intervalo Fechado quando nenhum extremo pertence ao intervalo dizemos que ele é um Intervalo Aberto.

Um intervalo aberto que contém um ponto a é chamado de Vizinhança de a.

Definição A.1: Ínfimo e Supremo

O Ínfimo de $A \subset \mathbb{R}$, $\inf(A)$, é o maior número real menor ou igual a todos os elementos de A.

O Supremo de $A \subset \mathbb{R}$, $\sup(A)$, que é o menor número real maior ou igual a todos os elementos de A.

Para observamos a diferença entre o ínfimo e o mínimo considere o intervalo aberto entre zero e um, $A = (0, 1)$. Nenhum elemento $x \in A$ pode ser o mínimo de A, pois $x/2$ é menor do que x e pertence a A, portanto, esse conjunto não possui um menor elemento. O zero seria o candidato para ser o mínimo, mas ele não pertence a A, nesse caso dizemos que zero é o ínfimo de A. Uma análise equivalente vai nos mostrar que A também não possui um máximo e que 1 é seu supremo. Podemos escrever em tão que

$$\begin{aligned} \inf\big((0,1)\big) &= 0 \qquad & \min\big((0,1)\big) &\quad \text{não existe} \\ \sup\big((0,1)\big) &= 1 \qquad & \max\big((0,1)\big) &\quad \text{não existe} \end{aligned}$$

Em um intervalo fechado o ínfimo coincide com o mínimo e o supremo coincide com o máximo, por exemplo, considere $[0, 1]$

$$\begin{aligned} \inf\big([0,1]\big) &= \min\big([0,1]\big) = 0 \\ \sup\big([0,1]\big) &= \max\big([0,1]\big) = 1 \end{aligned}$$

A.2 Revisão de Alguns Conceitos de Álgebra

Incluímos aqui uma pequena revisão de alguns conceitos de álgebra que são necessários para a compreensão do texto.

Operações Aritméticas

Para números a, b, c e d, reais ou complexos, valem as propriedades das operações aritméticas, desde as divisões sejam possíveis.

$$a(b+c) = ab + ac \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Expoentes e Radicais

Para números x, y, m e n, reais, valem as propriedades de expoentes e raízes, desde as divisões e raízes sejam possíveis.

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Desigualdades e Módulo

Ao manipular desigualdades vales as seguintes regras

1. Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$
2. Se $a < b$, então $a + c < b + c$
3. Se $a < b$ e $c > 0$, então $ca < cb$
4. Se $a < b$ e $c < 0$, então $ca < cb$

Para $a > 0$

$$\begin{array}{lll} |x| = a & \text{significa que} & x = a \text{ ou } x = -a \\ |x| < a & \text{significa que} & -a < x < a \\ |x| > a & \text{significa que} & x < -a \text{ ou } a < a \end{array}$$

Note que os complexos não são ordenados, isso é, não existem as relações $>$ ou $<$ entre números complexos.

A.3 Indução Finita

Demonstração por Indução Finita ou Indução Matemática é uma técnica para demonstrar afirmações que dependem de um índice que segue para o infinito, por exemplo, $n \in \mathbb{N}$.

Para mostrar que uma afirmação, P_n, é verdadeira para todo n devemos provar que:

1. ela é verdadeira para o primeiro n, por exemplo, se o índice começa em $n = 1$ temos que mostrar que P_1 é verdade;
2. se ela for verdadeira para n então também será verdadeira para o próximo índice, $n + 1$, isso é

$$P_n \Rightarrow P_{n+1}\,.$$

O exemplo a seguir ilustra a técnica provando a Desigualdade de Bernoulli.

Exemplo A.3.1: Demonstrar a Desigualdade de Bernoulli

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

para todo $x > -1$ e n inteiro não negativo.

Primeiro vamos identificar qual é o índice envolvido e qual a afirmação que deve ser verificada para cada valor do índice

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$P_n\colon\ (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Provamos agora o primeiro caso, $n = 0$, por simples substituição

$$(1 + x)^0 = 1 \geq 1 + 0x = 1$$

O próximo passo é assumir que a afirmação é verdadeira para P_n, que chamamos de Hipótese de Indução, e provar que ela é verdadeira para P_{n+1}. Neste exemplo queremos provar que

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \Rightarrow \quad (1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$$

Começamos manipulando o lado esquerdo da desigualdade que queremos demonstrar

$$(1+x)^{(n+1)} = (1+x)^n(1+x)$$

Como $(1+x) > 0$, pois por hipótese $x > -1$, podemos usar a hipótese de indução, $(1+x)^n \geq 1+nx$, para escrever

$$(1+x)^{(n+1)} \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2$$

Rearranjando temos

$$(1+x)^{(n+1)} \geq 1+(1+n)x+nx^2$$

Como nx^2 é sempre não negativo, podemos remove-lo mantendo a relação de desigualdade

$$(1+x)^{(n+1)} \geq 1+(1+n)x$$

Provamos assim que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, o que completa a prova por indução finita e garante que a desigualdade é verdadeira para todo $n \geq 0$.

A.4 Tabela de Derivadas

Tabela A.1: Tabela de Derivadas

Funções exponenciais e logarítmicas	
$\dfrac{d}{dx}\, e^x = e^x$	$\dfrac{d}{dx}\, a^x = a^x \ln(a)$
$\dfrac{d}{dx}\, \ln\lvert x\rvert = \dfrac{1}{x}$	$\dfrac{d}{dx}\, \log_a(x) = \dfrac{1}{x\ln(a)}$
Funções trigonométricas	
$\dfrac{d}{dx}\, \operatorname{sen}(x) = \cos(x)$	$\dfrac{d}{dx}\, \operatorname{tg}(x) = \sec^2(x)$
$\dfrac{d}{dx}\, \sec(x) = \sec(x)\operatorname{tg}(x)$	$\dfrac{d}{dx}\, \cos(x) = -\operatorname{sen}(x)$
$\dfrac{d}{dx}\, \cot(x) = -\operatorname{cossec}^2(x)$	$\dfrac{d}{dx}\, \operatorname{cossec}(x) = -\operatorname{cossec}(x)\cot(x)$
Funções trigonométricas inversas	
$\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{d}{dx}\operatorname{tg}^{-1}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
$\dfrac{d}{dx}\sec^{-1}(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\dfrac{d}{dx}\cot^{-1}(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{d}{dx}\operatorname{cossec}^{-1}(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Funções hiperbólicas	
$\dfrac{d}{dx}\,\operatorname{senh}(x) = \cosh(x)$	$\dfrac{d}{dx}\,\operatorname{tgh}(x) = \operatorname{sech}^2(x)$
$\dfrac{d}{dx}\,\operatorname{sech}(x) = -\operatorname{sech}(x)\operatorname{tgh}(x)$	$\dfrac{d}{dx}\,\cosh(x) = \operatorname{senh}(x)$
$\dfrac{d}{dx}\,\coth(x) = -\operatorname{cossech}^2(x)$	$\dfrac{d}{dx}\,\operatorname{cossech}(x) = -\operatorname{cossech}(x)\coth(x)$
Funções hiperbólicas inversas	
$\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{d}{dx}\operatorname{tgh}^{-1}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
$\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\dfrac{d}{dx}\coth^{-1}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{d}{dx}\operatorname{cossech}^{-1}(x) = -\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}}$

A.5 Tabela de Integrais

Tabela A.2: Tabela de Integrais

$\displaystyle\int u\,dv$	$\displaystyle= uv - \int v\,du$	
$\displaystyle\int u^n\,du$	$\displaystyle= \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	$n \neq -1$
$\displaystyle\int \frac{du}{u}$	$= \ln\lvert u\rvert + C$	
$\displaystyle\int e^u\,du$	$= e^u + C$	
$\displaystyle\int a^u\,du$	$\displaystyle= \frac{a^u}{\ln(a)} + C$	
$\displaystyle\int \ln(u)\,du$	$= u\big(\ln(u) - 1\big) + C$	
$\displaystyle\int \operatorname{sen}(u)\,du$	$= -\cos(u) + C$	
$\displaystyle\int \cos(u)\,du$	$= \operatorname{sen}(u) + C$	
$\displaystyle\int \sec^2(u)\,du$	$= \operatorname{tg}(u) + C$	
$\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2(u)\,du$	$= -\cot(u) + C$	
$\displaystyle\int \sec(u)\operatorname{tg}(u)\,du$	$= \sec(u) + C$	

$$\int \operatorname{cossec}(u)\cot(u)\,du = -\operatorname{cossec}(u) + C$$

$$\int \operatorname{tg}(u)\,du = \ln|\sec(u)| + C$$

$$\int \cot(u)\,du = \ln|\operatorname{sen}(u)| + C$$

$$\int \sec(u)\,du = \ln|\sec(u) + \operatorname{tg}(u)| + C$$

$$\int \operatorname{cossec}(u)\,du = \ln|\operatorname{cossec}(u) - \cot(u)| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

$$\int u\operatorname{sen}(u)\,du = \operatorname{sen}(u) - u\cos(u) + C$$

$$\int u\cos(u)\,du = \cos(u) + u\operatorname{sen}(u) + C$$

$$\int u^2 \operatorname{sen}(u)\, du = 2\cos(u) + 2u \operatorname{sen}(u) - u^2 \cos(u) + C$$

$$\int u^2 \cos(u)\, du = -2\operatorname{sen}(u) + 2u \cos(u) + u^2 \operatorname{sen}(u) + C$$

$$\int u^n \operatorname{sen}(u)\, du = -u^n \cos(u) + n \int u^{n-1} \cos(u)\, du$$

$$\int u^n \cos(u)\, du = u^n \operatorname{sen}(u) - n \int u^{n-1} \operatorname{sen}(u)\, du$$

B

Referências e Recursos Online

B.1 Recursos Online

Existem muitos recursos *online* que servem como apoio ao estudo de Matemática e Cálculo. Utilizar esses recursos é altamente recomendável, porém lembre-se que apenas assistir vídeos passivamente não é suficiente para aprender Matemática, da mesma forma que, assistir atletas olímpicos não nos torna atletas também.

Alguns recursos *online* que podem ser uteis:

- www.wolframalpha.com
  WolframAlpha é um mecanismo de conhecimento computacional que é capaz de fazer muitos cálculos.

◇ pt.khanacademy.org
A Khan Academy é uma ONG educacional criada e sustentada por Sal Khan. Com a missão de fornecer educação de alta qualidade para qualquer um, em qualquer lugar, oferece uma coleção grátis de vídeos de matemática, medicina e saúde, economia e finanças, física, química, biologia, ciência da computação, entre outras matérias.

◇ www.mathway.com/pt
A Mathway fornece aos alunos ferramentas para compreender e resolver problemas matemáticos. As resoluções são apresentadas passo a passo.

Nas seções desse capítulo indicamos alguns vídeos e atividades relacionados com os conteúdos de cada capítulo dessa apostila. Esses conteúdos podem ser muito úteis como auxilio no estudo de cada tópico. Note, porém, que a organização ou ordem dos tópicos varia de curso para curso. Algumas vezes notações também variam e em casos extremos definições distintas podem ser empregadas.

B.2 Integração

As principais referências para esse tópico são:

1) Stewart, Cálculo Vol. 1 [62] – Capítulo 5, Seções 5-1 até 5-4
2) Thomas, Cálculo Vol. 1 [69] – Capítulo 5, Seções 5-1 até 5-4; Capítulo 8, Seção 8.8

Aulas gravadas pelo professor Jonathas Douglas Santos de Oliveira:

1) Revisão de Primitivas e Integrais indefinidas
2) Integrais definidas: A ideia de Área sob uma curva
3) O Teorema Fundamental do Cálculo
4) Integrais Impróprias

Aulas e exercícios do Khan Accademy:

1) Introdução ao cálculo integral
2) Introdução à aproximação de Riemann
3) Revisão da notação de somatório
4) Somas de Riemann em notação de somatório
5) Definindo integrais com somas de Riemann

6) Teorema fundamental do cálculo e funções de acumulação
7) Interpretação do comportamento de funções de acumulação
8) Propriedades de integrais definidas
9) Teorema fundamental do cálculo e integrais definidas
10) Regra da potência reversa
11) Integrais indefinidas de funções comuns
12) Integrais definidas de funções comuns
13) Integrais impróprias

B.3 Áreas e Volumes

As principais referências para esse tópico são:

1) Stewart, Cálculo Vol. 1 [62] – Capítulo 6, Seções 6-1 até 6-3
2) Thomas, Cálculo Vol. 1 [69] – Capítulo 5, Seção 5-6; Capítulo 6, Secções 6-1 e 6-2

Aulas gravadas pelo professor Jonathas Douglas Santos de Oliveira:

1) Área Entre Curvas

B.4 Técnicas de Integração

As principais referências para esse tópico são:

1) Stewart, Cálculo Vol. 1 [62] – Capítulo 5, Seção 5-5; Capítulo 7, Seções 7-1 até 7-5
2) Thomas, Cálculo Vol. 1 [69] – Capítulo 8, Seções 8-1 até 8-5

Aulas gravadas pelo professor Jonathas Douglas Santos de Oliveira:

1) Substituição Simples
2) Integração por partes
3) Integrais Trigonométricas
4) Substituição Trigonométrica
5) Integração por frações parciais

6) Exercícios: Técnicas de Integração

Aulas e exercícios do Khan Accademy:

1) Integração por substituição
2) Integração usando divisão longa e o método de completar quadrados
3) Integração usando identidades trigonométricas
4) Substituição trigonométrica
5) Integração por partes
6) Integração usando frações parciais lineares

B.5 Sequências Numéricas

As principais referências para esse tópico são:

1) Stewart, Cálculo Vol. 2 [63] – Capítulo 11, Seção 11-1
2) Thomas, Cálculo Vol. 2 [70] – Capítulo 10, Seção 10-1

Aulas gravadas pelo professor J. L. Acebal:

1) Aula 1 - Motivação para Sequências
2) Aula 2 - Sequências e Definições
3) Aula 3 - Sequências: limites e propriedades (Parte 1)
4) Aula 3 - Sequências: limites e propriedades (Parte 2)

Aulas e exercícios do Khan Accademy:

1) Revisão sobre progressões
2) Sequências infinitas

Aulas da disciplina Cálculo IV para a Engenharia (MAT-2456) ministrada no segundo semestre de 2014 pelo Prof. Claudio Possani da USP: MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV.

1) Aula 1 - Sequências Numéricas I - Parte 1 de 4
2) Aula 1 - Sequências Numéricas I - Parte 2 de 4
3) Aula 1 - Sequências Numéricas I - Parte 3 de 4
4) Aula 1 - Sequências Numéricas I - Parte 4 de 4
5) Aula 2 - Sequências Numéricas II - Parte 1 de 3
6) Aula 2 - Sequências Numéricas II - Parte 2 de 3
7) Aula 2 - Sequências Numéricas II - Parte 3 de 3

B.6 Séries Numéricas

As principais referências para esse tópico são:

1) Stewart, Cálculo Vol. 2 [63] – Capítulo 11, Seções 11-2 até 11-7
2) Thomas, Cálculo Vol. 2 [70] – Capítulo 10, Seções 10-2 até 10-6

Aulas gravadas pelo professor J. L. Acebal:

1) Aula 4 - Sequências de Somas Parciais e Séries
2) Aula 5 - Séries importantes, Teste de Divergência
3) Aula 6 - Testes de Comparação
4) Aula 7 - Séries - Testes da Integral, da Razão e da Raiz
5) Aula 8 - Séries de Termos Positivos e Negativos - Convergência Absoluta e Convergência Condicional

Aulas e exercícios do Khan Accademy:

1) Revisão de séries
2) Séries geométricas finitas
3) Somas parciais
4) Séries geométricas infinitas
5) Desafio de noções básicas de série
6) Testes de convergência básica
7) Testes de comparação
8) Testes da razão e da série alternada
9) Como estimar séries infinitas

Aulas da disciplina Cálculo IV para a Engenharia (MAT-2456) ministrada no segundo semestre de 2014 pelo Prof. Claudio Possani da USP: MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV.

Séries numéricas:

1) Aula 2 - Séries Numéricas - Conceitos Básicos

Critérios de convergência:

1) Aula 3 - Critérios de Convergência - Parte 1 de 8

2) Aula 3 - Critérios de Convergência - Parte 2 de 8
3) Aula 3 - Critérios de Convergência - Parte 3 de 8
4) Aula 3 - Critérios de Convergência - Parte 4 de 8
5) Aula 4 - Critérios de Convergência - Parte 5 de 8
6) Aula 4 - Critérios de Convergência - Parte 6 de 8
7) Aula 4 - Critérios de Convergência - Parte 7 de 8
8) Aula 4 - Critérios de Convergência - Parte 8 de 8

Convergência absoluta e condicional:

1) Aula 5 - Convergência Condicional ou Absoluta I
2) Aula 5 - Convergência Condicional ou Absoluta II

Aulas do curso de Cálculo III (MA311) na Unicamp ministrado pela Professora Ketty A. de Rezende: Cursos Unicamp - Cálculo III

Sequências e séries Numéricas:

1) Séries Numéricas; Testes de Convergência - Parte 1
2) Séries Numéricas; Testes de Convergência - Parte 2
3) Testes de Convergência e das Séries Alternadas - Parte 1
4) Testes de Convergência e das Séries Alternadas - Parte 2

B.7 Séries de Potências e de Taylor

As principais referências para esse tópico são:

1) Stewart, Cálculo Vol. 2 [63] – Capítulo 11, Seções 11-8 até 11-11
2) Thomas, Cálculo Vol. 2 [70] – Capítulo 10, Seções 10-7 até 10-10

Aulas gravadas pelo professor J. L. Acebal:

1) Aula 9 - Séries de Potências - Raio de Convergência
2) Aula 10 - Séries de Potências - Propriedades Diferenciais e Algébricas
3) Aula 11 - Séries de Potências - Coeficientes de Taylor
4) Aula 12 - Séries de Potências - Polinômio de Taylor, resto de Taylor, erros de aproximação, linearização e convergência
5) Aula 13 - Resolução de EDOs por Séries Potências

Aulas e exercícios do Khan Accademy:

1) Introdução à série de potências
2) Introdução aos polinômios de Taylor e Maclaurin
3) Série de Maclaurin de sen(x), cos(x), e e^x
4) Representação de função de série de potência
5) Desafios de séries

Aulas da disciplina Cálculo IV para a Engenharia (MAT-2456) ministrada no segundo semestre de 2014 pelo Prof. Claudio Possani da USP: MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV

Séries de Potências:

1) Aula 5 - Séries de Potências - Introdução I
2) Aula 6 - Séries de Potências - Introdução II
3) Aula 6 - Séries de Potências - Parte 1 de 5
4) Aula 6 - Séries de Potências - Parte 2 de 5 (Continua depois da Aula 7)
5) Aula 7 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Potências - Parte 1 de 7
6) Aula 7 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Potências - Parte 2 de 7
7) Aula 7 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Potências - Parte 3 de 7
8) Aula 7 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Potências - Parte 4 de 7
9) Aula 7 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Potências - Parte 5 de 7
10) Aula 7 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Potências - Parte 6 de 7
11) Aula 7 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Potências - Parte 7 de 7
12) Aula 8 - Séries de Potências - Parte 3 de 5 (Continuação da Aula 6)
13) Aula 8 - Séries de Potências - Parte 4 de 5
14) Aula 8 - Séries de Potências - Parte 5 de 5

Raio de convergência, derivação e integração termo-a-termo, série de Taylor:

1) Aula 9 - Séries de Taylor - Parte 1 de 7
2) Aula 9 - Séries de Taylor - Parte 2 de 7
3) Aula 9 - Séries de Taylor - Parte 3 de 7
4) Aula 9 - Séries de Taylor - Parte 4 de 7
5) Aula 10 - Séries de Taylor - Parte 5 de 7
6) Aula 10 - Séries de Taylor - Parte 6 de 7

7) Aula 10 - Séries de Taylor - Parte 7 de 7

Revisão e Aprofundamento:

1) Aula 13 - Exercícios de Séries de Potências
2) Aula 14 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Taylor - Parte 1 de 4
3) Aula 14 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Taylor - Parte 2 de 4
4) Aula 14 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Taylor - Parte 3 de 4
5) Aula 14 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Taylor - Parte 4 de 4

Aulas do curso de Cálculo III (MA311) na Unicamp ministrado pela Professora Ketty A. de Rezende: Cursos Unicamp - Cálculo III

Séries de Potências e de Taylor:

1) Séries de Potências - Parte 1
2) Séries de Potências - Parte 2
3) Série de Potências em Ponto Ordinário - Parte 1
4) Série de Potências em Ponto Ordinário - Parte 2

Respostas

Capítulo 2

Seção 2.2

1) a) $\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^4}{8} + \dfrac{x^2}{8} - 2x + c$

b) $\dfrac{2}{5}x^{5/2} + \dfrac{3}{5}x^{5/3} + C$

c) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{x} + c$

d) $\dfrac{2}{3}u^3 + \dfrac{9}{2}u^2 + 4u + C$

e) $\dfrac{v^6}{6} + v^4 + 2v^2 + C$

f) $\dfrac{x^3}{3} - 4\sqrt{x} + c$

g) $\dfrac{x^3}{3} + x + \operatorname{arctg}(x) + 100\operatorname{sen}(x) + C$

h) $-\dfrac{\cos(2x)}{2} - \dfrac{2^x}{\ln(2)} + C$

i) $\dfrac{\theta^2}{2} + \operatorname{cossec}(x) + C$

j) $x + 10\sec(x) + C$

k) $-\cot(t) - 2e^t + e^{-t} + C$

l) $\operatorname{tg}(t) + \sec(t) + C$

m) $\ln|x| + x^{-1} - \dfrac{x^{-2}}{2} + C$

n) $2\cos(x) + C$

2) $s(t) = -10\operatorname{sen}(t) - 3\cos(t) + \dfrac{6}{\pi}t + 3$

Seção 2.4

2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos(x)}{x^2}$

4) a) 21

b) 2,5

c) $\dfrac{25\pi}{2}$

d) $-\dfrac{9}{2}$

5) a) 0

b) -8

c) -28

d) 10

e) -3

f) -2

g) 14

Seção 2.5

1) a) $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$

b) $h'(x) = -\cos(\sqrt{x})$

c) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{x} + c$

d) $p'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\dfrac{x^2}{x^4+1}\right) + \dfrac{9}{2}u^2 + 4u + C$

e) $\dfrac{1}{6}v^6 + v^4 + 2v^2 + C$

f) $h'(x) = -3\left(\dfrac{(1-3x)^3}{1+(1-3x)^2}\right)$

g) $\dfrac{-8x^2+2}{1+4x^2}+\dfrac{27x^2-3}{1+9x^2}$

h) $-e^{x^2}+2xe^{x^4}$

i) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{x})\right)+2\operatorname{arctg}(2x)$

j) $-\cos(x)ln(1+2\operatorname{sen}(x))-\operatorname{sen}(x)ln(1+2\cos(x))$

2) a) Pontos críticos: $x=-1$ e $x=1$.

b) f é crescente no intervalo $(-1{,}1)$ e decrescente nos intervalos $(-\infty,-1)$ e $(1,\infty)$.

3) No intervalo $(-4{,}0)$

4) $f'(2)=\frac{2}{17}$

5) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

6) a) 63

b) $\dfrac{52}{3}$

c) $\dfrac{128}{15}$

d) 3

e) $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\dfrac{3}{2}+\ln(2)$

g) $3-2\cos(3)+e^3$

h) $\dfrac{\pi}{3}$

i) e^2-1

j) $\dfrac{4\pi}{3}$

k) $\dfrac{28}{3}$

l) $\dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{\ln(5)}$

m) $\dfrac{55}{63}$

n) $\dfrac{1}{2}$

o) $\dfrac{\pi}{6}$

p) $1-\ln(4)$

q) $-\dfrac{7}{2}$

r) -1

9) a) i) 1 ii) $c=2$ e $c=4$

b) i) $\dfrac{4}{3}$ ii) $c=\dfrac{16}{9}$ e $c=4$

c) i) -2 ii) $c=2$

d) i) $\dfrac{-1}{2}$ ii) $c=-\dfrac{1}{2}$ e $c=\dfrac{1}{2}$

10) a) $0\leq\displaystyle\int_0^2 xe^{-x}dx\leq\dfrac{1}{e}$

b) $\dfrac{\pi}{12}\leq\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\operatorname{tg}(x)dx\leq\dfrac{\pi}{2}\sqrt{3}$

Seção 2.6

1) a) converge para 2

b) converge para $\dfrac{1}{5}e^{-10}$

c) divergente

d) converge para 2

e) divergente

f) divergente

g) divergente

Capítulo 3

Seção 3.2

1) a) $e-\dfrac{1}{e}+\dfrac{4}{3}$

b) $\dfrac{3\pi^2}{8}-1$

c) $\dfrac{125}{3}$

d) $\ln 2-\dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{8}{3}$

f) $\dfrac{64}{3}$

g) 72

h) $\dfrac{1}{2}$

i) $\dfrac{20}{3}$

j) $\ln 2$

k) $\dfrac{1}{2}$

l) $\dfrac{59}{12}$

2) $A = {}^5/_2$

3) ${}^{100}/_3$

4) $c = 1$ e $c = -1$

Seção 3.3

1) a) $\dfrac{19\pi}{12}$

b) $\dfrac{128\pi}{7}$

c) 8π

d) $\dfrac{\pi}{2}$

e) $\dfrac{5\pi}{21}$

f) $\dfrac{94\pi}{3}$

g) $\dfrac{64\pi}{15}$

h) $\dfrac{11\pi}{30}$

i) 162π

j) $\left(2\sqrt{2} - \dfrac{3}{2}\right)\pi$

k) $\dfrac{3\pi}{5}$

l) $\dfrac{176\pi}{6}$

2) a) 8π c) $\dfrac{8\pi}{3}$

b) $\dfrac{32\pi}{5}$ d) $\dfrac{224\pi}{5}$

3) a) $\dfrac{9}{2}$ c) $\dfrac{153\pi}{5}$

b) $\dfrac{108\pi}{5}$ d) $\dfrac{27\pi}{5}$

4) a) $\dfrac{9}{2}$ c) $\dfrac{153\pi}{5}$

b) $\dfrac{108\pi}{5}$ d) $\dfrac{117\pi}{5}$

5) a) $\dfrac{9}{2}$ c) $\dfrac{2\pi}{15}$ e) $\dfrac{\pi}{6}$

b) $\dfrac{\pi}{6}$ d) $\dfrac{\pi}{2}$ f) $\dfrac{\pi}{5}$

6) a) $\dfrac{L^2h}{3}$ c) $\pi h\left(R^2 + Rh + r^2\right)$

b) $\dfrac{1}{3}r^2h$ d) $\pi h^2\left(r - \dfrac{h}{3}\right)$

Seção 3.4

1) a) $\dfrac{6\pi}{7}$ e) 8π i) $\dfrac{32\pi}{15}$

b) 8π f) $\dfrac{21\pi}{2}$ j) $\dfrac{5\pi}{14}$

c) $\pi\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)$ g) $\dfrac{768\pi}{7}$ k) $\dfrac{16\pi}{3}$

d) $\dfrac{16\pi}{3}$ h) $\dfrac{8\pi}{3}$

3) a) $\dfrac{5\pi}{3}$ c) 2π

b) $\dfrac{4\pi}{3}$ d) $\dfrac{2\pi}{3}$

4) $\frac{3\pi}{10}$

5) a) $\dfrac{L^2h}{3}$ c) $\pi h\left(R^2 + Rh + r^2\right)$

b) $\dfrac{1}{3}r^2h$ d) $\pi h^2\left(r - \dfrac{h}{3}\right)$

6) a) 8π

Capítulo 4

Seção 4.1

1) a) $\dfrac{1}{5}x\,\mathrm{sen}(5x) + \dfrac{1}{25}\cos(5x) + c$

b) $-xe^{-x} - e^{-x} + C$

c) $-\dfrac{t^2}{\beta}\cos(\beta t) + \dfrac{2t}{\beta^2}\,\mathrm{sen}(\beta t) + \dfrac{2}{\beta^3}\cos(\beta t) + c$

d) $\left(x^2 + 2x\right)\mathrm{sen}(x) + (2x + 2)\,\mathrm{sen}(x) - 2\,\mathrm{sen}(x) + C$

e) $\dfrac{1}{6}p^6\ln(p) + \dfrac{1}{36}p^6 + C$

f) $x\big(\ln(x)\big)^2 - 2x\ln(x) + 2x + c$

g) $\dfrac{t}{2}\operatorname{tg}(2t) - \dfrac{1}{4}\ln|\sec(x)| + C$

h) $\dfrac{1}{13}e^{2x}\left(2\operatorname{sen}(3x) - 3\cos(3x)\right) + C$

i) $6\ln(9) - 4\ln(4) - 4$

j) $\dfrac{\pi - 2}{\pi^2}$

k) $-\dfrac{6}{e} + 3$

l) $\dfrac{32}{5}\big(\ln(2)\big)^2 - \dfrac{64}{25}\ln(2) + \dfrac{62}{126}$

m) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6} - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln(2)$

n) $x\operatorname{tg}(x) - \ln|\sec(x)| - \dfrac{1}{2}x^2 + C$

2) $A = \pi$

3) $s = 2 - e^{-t}\left(t^2 + 2t + 2\right)$ meter

6) $A = 3e^{-1} - 1$

7) A integral é convergente e vale 2.

8) $2\pi\big(1 - \ln(2)\big)$.

9) a) 1

b) $(e-2)\pi$

c) $\dfrac{\pi}{2}\left(e^2 + 9\right)$

10) $\frac{9}{2}\ln(3) - \frac{13}{9}$

Seção 4.2

1) a) $-\dfrac{1}{2}\cos(x^2) + C$

b) $\dfrac{1}{3}(2x + x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

c) $\dfrac{1}{1 - e^u} + C$

d) $-\dfrac{1}{5}\cos^5(x) + C$

e) $\dfrac{1}{2}(\ln(x))^2 + C$

f) $-\dfrac{1}{\ln(x)}\cos(5^t) + C$

g) $e^{\operatorname{tg}(x)} + C$

h) $\ln(|\operatorname{arcsen}(x)|) + C$

i) $-\dfrac{2}{3}(cotg(x))^{\frac{3}{2}} + C$

j) $-\operatorname{tg}(\cos(x)) + C$

k) $\dfrac{1}{5}(x^2+1)^{\frac{5}{2}} - \dfrac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$

l) $\dfrac{\operatorname{arctg}^2(x)}{2} + C$

m) $\dfrac{1}{a}\ln(|ax + b|)$

n) $\dfrac{2}{\pi}$

o) $e - \sqrt{e}$

p) $\dfrac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)a^3$

q) $-\dfrac{1}{6}$

r) $\dfrac{10}{3}$

s) 2

t) $\dfrac{1}{\pi}$

u) $\dfrac{1}{153}(2^{51} + 1)$

v) $\dfrac{45}{28}$

w) 3

x) $\dfrac{\operatorname{arctg}(3x)}{2} + \ln(|x+1|) + \dfrac{1}{x+1} + K$

y) $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4(\theta) + C$

2) a) $\dfrac{1}{2}$

b) $1 - \cos(1)$

c)

3) $2 - 2\ln 2$

4) a) $2\sqrt{x}\operatorname{sen}(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x}) + C$

b) $\dfrac{1}{2}x\left[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C$

c) $\dfrac{4}{e}$

d) $x\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + C = \operatorname{arctg}(\sqrt{x})(x+1) - \sqrt{x} + C$

5) a) $\operatorname{sen}(5) + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}(x) + c$

b) $e^{e^x} + C$

c) $\dfrac{243}{5}\ln 3 - \dfrac{242}{25}$

d) $-\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{1}{8}\sqrt{3}$

e) $\sqrt{1 + (\ln x)^2} + c$

f) $e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}}$

g) $\frac{1}{3}(1+x^2)^3-(1+x^2)+C$

h) $-\frac{1}{3}e^{-x^3}(x^3+1)+C$

i) $\frac{1}{2}(\pi-2)$

j) $|x|\ln(\sqrt{x})-\sqrt{x}+K$

6) $1-\frac{2}{\pi}\ln 2$

7) a) divergente

b) converge para 0

c) converge para $-\frac{1}{4}$

d) divergente

e) Converge para $\frac{-2}{e}$

Seção 4.3

1) a) $-\frac{1}{3}\cos^2(x)+\frac{1}{5}\cos^5(x)+C$

b) $\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7(x)-\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5(x)+C$

c) $\frac{1}{120}$

d) $\pi+\frac{3}{8}\sqrt{3}$

e) $\frac{3}{8}\pi$

f) $\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t\operatorname{sen}(2t)-\frac{1}{8}\cos(2t)+C$

g) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(\theta)\right)-\frac{2}{3}\operatorname{sen}^5\left(\operatorname{sen}(\theta)\right)+\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5\left(\operatorname{sen}(\theta)\right)+C$

h) $-\frac{1}{2}\cos^4(x)+C$

i) $\frac{1}{9}\operatorname{tg}^9(x)+\frac{2}{7}\operatorname{tg}^7(x)+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5(x)+C$

j) $\frac{117}{8}$

k) $-\frac{1}{6}\cos(3x)-\frac{1}{26}\cos(13x)+C$

l) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x)+C$

m) $\frac{1}{4}\sec^4(x)-\operatorname{tg}^2(x)+\ln|\sec(x)|+C$

n) $\frac{1}{2}(1-\ln(2))$

2) $s=\frac{(1-\cos^3(\omega t))}{3\omega}$

3) Divergente.

4) a) $A=1$ e $V=\frac{\pi^2}{4}$

b) $A=\sqrt{2}-1$ e $V=\pi\left(2\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)$

5) 0

Seção 4.4

1) a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{4}$

c) $\ln(\sqrt{x^2+16}+x)-ln(4)+C$

d) $\frac{\pi}{16}a^4$

e) $\frac{1}{15}\sqrt{t^2+2}(3t^4-8t^2+32)$

f) $\frac{81}{4}(\frac{\pi}{8}+\frac{7}{16}\sqrt{3}-1)$

g) $\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-2}{3}\right)+\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{5+4x-x^2}+C$

h) $\ln\left|\frac{\sqrt{t^2-6t+13}}{2}+\frac{t-3}{2}\right|+C$

5) $\frac{1}{6}(\sqrt{48}-\operatorname{arcsec}(7))$

6) A área dentro do círculo e acima da parábola é $2\pi+\frac{4}{3}$e a área dentro do círculo e abaixo da parábola é $6\pi-\frac{4}{3}$.

7) A integral é divergente.

Seção 4.5

1) a) $2\ln|x+5|-\ln|x-2|+C$

b) $2\ln(\frac{3}{2})$

c) $\frac{7}{6}+\ln(\frac{2}{3})$

d) $10\ln|x-3|-9\ln|x-2|+\frac{5}{x-2}+C$

e) $\frac{3}{8}\pi$

f) $2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+3) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{x}{\sqrt{3}}) + C$

g) $\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x) + C$

h) $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) + C$

i) $\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\ln(x^2+4) + \frac{1}{8(x^2+4)} + C$

j) $\ln|x| - \ln|x-1| + \ln|x-1| + C$

2) $\ln\left(\frac{(e^x+2)^2}{e^x+1}\right) + C$

4) $(x-\frac{1}{2})\ln(x^2-x+2) - 2x + \sqrt{7}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right) + C$

5) $A = -1 + \frac{11}{3}\ln 2$

6) a) converge para $\frac{1}{4}\ln 5$

b) Divergente

8) a) $e^{\frac{\pi}{4}} - 1$

b) $-\frac{1}{5}\cos^5(x) + \frac{2}{7}\cos^7(x) - \frac{1}{9}\cos^9(x) + C$

c) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$

d)

e) $\frac{243}{5}ln3 - \frac{243}{25}$

f) $-\frac{1}{3}ln5$

g) $\frac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C$

h) $2\operatorname{arcsen}(\frac{x+1}{2}) + \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + C$

i) $\frac{1}{4}$

j) $x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$

k) $-\frac{1}{4}t\cos(2t) + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t) + C$

Seção 4.6

1) a) $\frac{1}{5}x\operatorname{sen}(5x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + c$

b) $\frac{1}{6}p^6\ln(p) + \frac{1}{36}p^6 + C$

c)

d) $6\ln(9) - 4\ln(4) - 4$

e) $-\frac{6}{e} + 3$

f) $-\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$

g) $\frac{1}{2}(\ln(x))^2 + C$

h) $e^{\operatorname{tg}(x)} + C$

i) $\ln(|\operatorname{arcsen}(x)|) + C$

j) $-\operatorname{tg}(\cos(x)) + C$

k) $\frac{1}{5}(x^2+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$

l) 2

m) $\frac{1}{153}(2^{51}+1)$

n) $\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7(x) - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5(x) + C$

o) $\frac{3\pi}{8}$

p) $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\theta)) - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^5(\operatorname{sen}(\theta)) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5(\operatorname{sen}(\theta)) + C$

q) $\frac{2}{5}$

r) $\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{4}$

s) $\ln(\sqrt{x^2+16} + x) - \ln(4) + C$

t) $\frac{\pi}{16}a^4$

u) $2\ln|x+5| - \ln|x-2| + C$

v) $2\ln(\frac{3}{2})$

w) $\frac{7}{6} + \ln(\frac{2}{3})$

x) $10\ln|x-3| - 9\ln|x-2| + \frac{5}{x-2} + C$

y) $\frac{3}{8}\pi$

3) a) $s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + C$

b) $\frac{175}{6}m/s$

4) $f(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{1-e^{-x}}$

5) $\frac{\sqrt{1+2^{14}}}{16}$

6) a) Pontos críticos: $x = -1$ e $x = 1$.

b) f é crescente no intervalo $(-1,1)$ e decrescente nos intervalos $(-\infty,-1)$ e $(1,\infty)$.

7) $s(t) = -e^{-t}(t^2+2t+2) + K$

8) $S = \dfrac{1 - \cos^3(\omega t)}{3\omega}$

10) πab

11) $A = 2$

12) a) $V_m = 1 - \dfrac{\ln(4)}{\pi}$

b) $\dfrac{1}{6}(4\sqrt{3} - arcsec(7))$

14) $A = \dfrac{11}{24}$

15) $A = 1/3$

16) $A = 1/2$

17) $A = 2$

19) $\frac{100}{3}$

20) a) $1/12$

b) 0

c) $-2/e$.

d) A integral é divergente.

e) A integral é divergente.

21) A área converge e vale 1

22) $A = \frac{\pi}{2}$

23) A integral é divergente.

Capítulo 5

Seção 5.2

2)

$$a_1 = \left.\frac{1-n}{n^2}\right|_{n=1} = \frac{1-1}{1^2} = 0$$

$$a_2 = \left.\frac{1-n}{n^2}\right|_{n=2} = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \left.\frac{1-n}{n^2}\right|_{n=3} = \frac{1-3}{3^2} = -\frac{2}{9}$$

$$a_4 = \left.\frac{1-n}{n^2}\right|_{n=4} = \frac{1-4}{4^2} = -\frac{3}{16}$$

4)

$$a_1 = -2$$

$$a_2 = \frac{1a_1}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{2+1} = \frac{2(-1)}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{3a_3}{3+1} = \frac{3(-2/3)}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$a_5 = \frac{4a_4}{4+1} = \frac{4(-1/2)}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$a_6 = \frac{5a_5}{5+1} = \frac{5(-2/5)}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$a_7 = \frac{6a_6}{6+1} = \frac{6(-1/3)}{7} = -\frac{2}{7}$$

$$a_8 = \frac{7a_7}{7+1} = \frac{7(-2/7)}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$a_9 = \frac{8a_8}{8+1} = \frac{8(-1/4)}{9} = -\frac{1}{9}$$

$$a_{10} = \frac{9a_9}{9+1} = \frac{9(-1/9)}{10} = -\frac{1}{10}$$

6)

$$a_n = n^2 - 1$$

Verificando

$$a_1 = \left.(n^2-1)\right|_{n=1} = 1^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$$

$$a_2 = \left.(n^2-1)\right|_{n=2} = 2^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

$$a_3 = \left.(n^2-1)\right|_{n=3} = 3^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$$

$$a_4 = \left.(n^2-1)\right|_{n=4} = 4^2 - 1 = 4^2 - 1 = 15$$

$$a_5 = \left.(n^2-1)\right|_{n=5} = 5^2 - 1 = 5^2 - 1 = 24$$

Obs: sem a informação de que a sequência é formada por

"Quadrados dos inteiros positivos menos 1", não existe uma solução única para o problema. A expressão polinomial a seguir é outra solução possível para gerar os valores listados

$$a_n = -\frac{1}{3}n^4 + \frac{10}{3}n^3 - \frac{32}{3}n^2 + \frac{50}{3}n - 9$$

8) Os termos dessa sequência assumem os valores 0 e 2 alternadamente, portanto ela não converge.

9) Iniciamos calculando o limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim 1 - \lim\frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$$

Tomando os termos pares e impares separadamente temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_{2n} &= \lim_{n\to\infty}\left[(-1)^{2n}\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)\\ &= \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right) = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left[(-1)^{2n+1}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty} -\left(1-\frac{1}{2n}\right)\\ &= \lim_{k\to\infty} -\left(1-\frac{1}{k}\right) = -1\end{aligned}$$

Como cada subsequência converge para um valor diferente e o limite é único quando existe concluímos que a sequência diverge.

10) O método de Newton é usado para encontrar os zeros de funções reais, $f(x) = 0$. Se o valor inicial x_0 estiver próximo o suficiente da raiz temos a garantia de convergência do método.

a) A função usada nesse caso é $f(x) = x^2 - 2$ que possui raízes em $x = \pm\sqrt{2}$, portanto se a sequência convergir deve ser para um desses valores. Calculando os primeiros termos obtemos

n	x_n
0	1,000 000 000
1	1,500 000 000
2	1,416 666 667
3	1,414 215 686
4	1,414 213 562
$\sqrt{2}$	1,414 213 562

Observamos que a sequência converge para $1{,}414\,213\,562 \approx \sqrt{2}$.

b) A função usada nesse caso é $f(x) = \text{tg}(x) - 1$ que possui raízes em $x = \pi/4 + 2\pi k$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$, portanto se a sequência convergir deve ser para um desses valores.

n	x_n
0	1,000 000 000
1	0,837 277 868
2	0,788 180 293
3	0,785 405 918
4	0,785 398 163
$\pi/4$	0,785 398 163

A sequência converge para $0{,}785\,3981\,635 \approx \pi/4$

c) A função usada nesse caso é $f(x) = e^x$ que não possui raízes, portanto a série não pode convergir. A sequência diverge, assumindo os valores $1{,}0,-1,-2,-3,-4,-5,\ldots$

11) a) 2

b) 1

c) -1

d) Diverge para menos infinito

e) -5

f) 0

g) Diverge para mais infinito

h) Diverge para mais infinito

i) Diverge

j) Diverge

k) $1/2$

l) 6

13) a) 8

b) 2

c) 4

d) 4

e) 5

f) 9

g) $\sqrt{2}$

h) $1+\sqrt{5}/2$

Seção 5.4

2) Para determinar que a sequência é crescente vamos verificar que $a_n < a_{n+1}$

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1}\\ \frac{(2n+3)!}{(n+1)!} &< \frac{(2(n+1)+3)!}{((n+1)+1)!}\\ \frac{(2n+3)!}{(n+1)!} &< \frac{(2n+5)!}{(n+2)!}\\ \frac{(n+2)!}{(n+1)!} &< \frac{(2n+5)!}{(2n+3)!}\\ \frac{(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} &< \frac{(2n+5)(2n+4)(2n+3)!}{(2n+3)!}\\ (n+2) &< (2n+5)(2n+4)\\ n+2 &< 4n^2+8n+10n+20\\ n+2 &< 4n^2+18n+20\\ 0 &< 4n^2+17n+18\end{aligned}$$

Como todas esses desigualdades são equivalentes ($\Leftrightarrow$) concluímos que a sequência é crescente e portanto monótona.
Para verificar se ela é limitada vamos desenvolver a expressão do termo geral

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2n+3)!}{(n+1)!} \\ &= \frac{(2n+3)(2n+2)\cdots(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} \\ &= (2n+3)(2n+2)\cdots(n+2) \end{aligned}$$

Observamos que o termo geral não é limitado.

Seção 5.5

1) Tentando calcular o limite temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim \frac{n+(-1)^n}{n} \\ &= \lim\left[\frac{n}{n} + \frac{(-1)^n}{n}\right] \\ &= \lim\left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right] \end{aligned}$$

A sequência constante igual a 1 converge, temos que verificar se a sequência ${}^{(-1)^n}/_n$ também converge.
Observe que para todo n temos

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Como $-{}^1/_n$ e ${}^1/_n$ convergem para zero, pelo teorema do confronto para sequências temos que ${}^{(-1)^n}/_n$ também converge para zero. Podemos, então, escrever

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim\left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right] \\ &= \lim 1 + \lim \frac{(-1)^n}{n} \\ &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Capítulo 6

Seção 6.1

3) Observamos que os termos da série são

$$a_n = \frac{9}{100^n} = \frac{9}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}$$

ou seja, essa é uma série geométrica com

$$a = \frac{9}{100} \qquad \text{e} \qquad r = \frac{9}{100}$$

a fórmula para as somas parciais de uma série geométrica é

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

substituindo os valores de a e r temos

$$S_n = \frac{\frac{9}{100}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{100}}$$

calculando o limite

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim \frac{\frac{9}{100}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{100}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{9}{100}}{\frac{100-1}{100}} = \frac{\frac{9}{100}}{\frac{99}{100}} \\ &= \frac{9}{100}\,\frac{100}{99} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11} \end{aligned}$$

5) Denotando a série por S temos

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} \\ &= \frac{(-1)^0}{5^0} + \frac{(-1)^1}{5^1} + \frac{(-1)^2}{5^2} + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots \end{aligned}$$

Observamos que essa série é uma série geométrica, com $|r| = {}^1/_5 < 1$, podemos então usar a formula da soma, porém precisamos primeiro corrigir as potências e índices

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1}$$

Temos $a = 1$ e $r = -{}^1/_5$ e portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-(-{}^1/_5)} = \frac{5}{6}$$

7) Expandindo os temos das somas somas parciais

percebemos que esse é uma série telescópica

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots \\ &\quad +\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Calculando o limite temos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

portanto a série converge para 1.

Seção 6.3

1) Aplicando o teste da divergência temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln x} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}}{x^{-1}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2} = \infty \end{aligned}$$

Como o termo geral não vai para zero a série diverge.

2) Calculando o limite do dos termos da série temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)} &= \lim\frac{n^2+n}{n^2+5n+6} \\ &= \lim\frac{2n+1}{2n+5} \\ &= \lim\frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

em cada passo foi identificado que o limite gerava uma indeterminação do tipo ∞/∞ e usado o método de L'Hôpital. Como o limite do termo geral não é zero a série diverge.

3) a) $2+\sqrt{2}$
b) Diverge
c) 1
d) Diverge
e) Diverge
f) $5/6$
g) e^2/e^2-1
h) Diverge
i) $2/9$
j) $x/x-1$
k) $3/2$
l) Diverge
m) Diverge
n) Diverge
o) 4
p) Diverge
q) Diverge
r) Diverge
s) $\pi/\pi-e$
t) Diverge

Seção 6.4

1) Podemos aplicar o teste da integral pois a função $f(x)=\frac{1}{x^2}$ é positiva, contínua e decrescente para $x\geq 1$. Calculando a integral temos

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_b^1 \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1 \end{aligned}$$

Como a integral converge a série também converge. Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449 \neq 1$$

2) A função $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$ é positiva e contínua para $x\geq 1$. Precisamos verificar se ela é decrescente, para isso calculamos sua derivada

$$f'(x) = \frac{1(x^2+4)-x(2x)}{(x^2+4)^4} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^4}$$

Verificamos que $f'(x)<0$, e portanto f é decrescente, para todo $x>2$, note, porém, que essa propriedade não vale para $x=2$. Como precisamos de um número inteiro N a partir do qual a função seja decrescente escolhemos $N=3$.
Podemos, agora, aplicar o teste da integral. Primeiro calculamos a primitiva de f usando a substituição

$$u = x^2+4 \qquad \text{e} \qquad du = 2x dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+4}\,dx &= \int \frac{1}{2u}\,du \\ &= \frac{1}{2}\ln u + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C \end{aligned}$$

Calculando a integral imprópria temos

$$\begin{aligned} \int_3^\infty \frac{x}{x^2+4}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{x}{x^2+4}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+4)\right)\Big|_b^3 \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{\ln(b^2+4)-\ln(3^2+4)}{2}\right) \\ &= \infty \end{aligned}$$

Como a integral diverge a série também diverge.

4) Esse é uma série convergente pois é uma série geométrica com $r = e^{-1} \approx 0{,}3679$. Sua soma é

$$S = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e - 1} \approx 0{,}5820$$

Alternativamente podemos usar o teste da integral com função $f(x) = e^{-x}$

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty e^{-x}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_b^1 \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b} + e^1\right) \\
&= e \approx 2{,}7183
\end{aligned}$$

8) Sabemos que a série é convergente e que a função $f(x) = x^{-1,1}$ satisfaz as condições do teste a integral. Nesse caso o erro, ou resto, é limitado por

$$R_n = S - s_n < \int_n^\infty \frac{1}{x^{1,1}} dx$$

Calculando a integral temos

$$\begin{aligned}
\int_n^\infty \frac{1}{x^{1,1}} dx &= \lim_{b\to\infty} \int_n^b \frac{1}{x^{1,1}} dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{10}{x^{0,1}}\right)\Big|_b^n \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{10}{b^{0,1}} + \frac{10}{n^{0,1}}\right) \\
&= \frac{10}{n^{0,1}}
\end{aligned}$$

Impondo a condição

$$\begin{aligned}
&\frac{10}{n^{0,1}} < 0{,}000\,01 \\
&n^{0,1} > \frac{10}{0{,}000\,01} = 1\,000\,000 \\
&\quad n > 1\,000\,000^{10} = \left(10^6\right)^{10} = 10^{60}
\end{aligned}$$

Se um computador somasse um termo a cada nanosegundo (10^{-9} s) ele levaria $2{,}3 \cdot 10^{33}$ vezes a idade do universo para concluir essa conta.

Seção 6.5

1) Sabemos que $|\cos x| \le 1$, portanto

$$0 \;\le\; \cos^2 x \;\le\; 1$$

como $n^{3/2}$ é sempre positivo para $n \ge 1$ temos que

$$0 \;\le\; \frac{\cos^2}{n^{3/2}} \;\le\; \frac{1}{n^{3/2}}$$

Analisando a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

percebemos que é uma série p com $p = 3/2 > 1$ e portanto é convergente. Concluímos, assim, que a série original é convergente.

2) Analisando o comportamento dos termos da série para n grande percebemos que eles se comportam como

$$b_n = \sqrt{\frac{\alpha}{n^3}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{n^{3/2}}$$

onde α é uma constante. A série com termos b_n é uma série p com $p = 3/2 > 1$ e portanto convergente. Vamos tentar mostrar que $a_n \le b_n$, o que garantiria a convergência da série original.

$$\begin{aligned}
a_n &\le b_n \\
\sqrt{\frac{n+4}{n^4+4}} &\le \sqrt{\frac{\alpha}{n^3}} \\
\frac{n+4}{n^4+4} &\le \frac{\alpha}{n^3} \\
\frac{n^3(n+4)}{n^4+4} &\le \alpha \\
\frac{n^4+4n^3}{n^4+4} &\le \alpha
\end{aligned}$$

Temos que verificar se a função

$$f(x) = \frac{x^4 + 4x^3}{x^4 + 4}$$

possui limitante superior para $x \ge 1$. Se esse limitante existir escolhemos um valor qualquer maior do que ele para α e teremos demonstrado que $a_n \le b_n$.
Primeiro observamos que a função é contínua para todo x e que $f(0) = 0$ então calculamos o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + 4x^3}{x^4 + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + 4/x}{1 + 4/x^4} = 1$$

Como f é contínua para todo $x \ge 0$, $f(0) = 0$ e tem assintota horizontal $y = 1$, concluímos que ela não pode ir para infinito e portanto tem um limitante superior, o que comprova a desigualdade $a_n \le b_n$. Portanto, pelo teste da comparação concluímos que a série converge.

Uma **solução alternativa** é *adivinhar* que a comparação deve ser feita com a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{n^{3/2}}$$

A demonstração de que a_n é menor do que b_n é feita pelo desenvolvimento

$$\begin{aligned}
n^3 &\leq n^4\\
4n^3 &\leq 4n^4\\
n^4+4n^3 &\leq 5n^4\\
n^4+4n^3 &\leq 5n^4+20 = 5(n^4+4)
\end{aligned}$$

$$\frac{n^4+4n^3}{n^4+4} \leq 5$$

$$\frac{(n+4)n^3}{n^4+4} \leq 5$$

$$\frac{n+4}{n^4+4} \leq \frac{5}{n^3}$$

$$\frac{n+4}{n^4+4} \leq \frac{5}{n^3}$$

$$\sqrt{\frac{n+4}{n^4+4}} \leq \sqrt{\frac{5}{n^3}}$$

Com a desigualdade demonstrada podemos concluir que a série converge.

3) Como $\sum \frac{1}{3^n}$ é convergente e

$$\frac{1}{n+3^n} < \frac{1}{3^n}$$

a série converge pelo teste da comparação.

5) A série harmônica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente, pois é uma série p com $p=1$. Os termos da série original e da série harmônica são sempre positivos para $n \geq 2$. Aplicando o teste da comparação no limite , temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1/x}\\
&= \lim_{x\to\infty} x = \infty
\end{aligned}$$

Concluímos que a série diverge.
Observe que $n=1$ não pode fazer parte da série pois $\ln 1 = 0$.

6) Os termos da série são calculados por uma função racional cuja maior potência de n no numerador é 3 e a maior no denominador é 5, ou seja, para n suficientemente grande a_n deve se comportar como

$$f(x) = \frac{x^3}{x^5} = \frac{1}{x^2}$$

A série com termos $b_n = f(n)$ é uma série p com $p = 2 > 1$ e portanto convergente. Além disso, a_n e b_n são maiores do que zero para todo n suficientemente grande. Usando o teste da comparação no limite temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{5n^3-3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}}{\dfrac{1}{n^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-3n}{(n-2)(n^2+5)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-3n}{n^3-2n^2+5n-10}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-3x}{x^3-2x^2+5x-10}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{15x^2-3}{3x^2-4x+5}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{30x}{6x-4}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{30}{6} = 5
\end{aligned}$$

Portanto a série original converge.

Seção 6.6

1) Pelo teste da razão

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{3} < 1$$

portanto a série converge.

Seção 6.10

3) a)

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right]^n$

Capítulo 7

Seção 7.1

1) a) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)|x|\right] = |x|$$

portanto $R = 1$. Quando $x = \pm 1$, a série diverge pelo teste do n-ésimo termo, pois $|a_n| = n$. Assim o intervalo de convergência é $(-1, 1)$.

b) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{1+1/n}}|x| = |x|$$

portanto $R = 1$. Quando $x = 1$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

converge pelo teste da série alternada. Quando $x = -1$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

diverge pois é uma série p com $p = 1/3$. Assim o intervalo de convergência é $(-1, 1]$.

c) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}|x|\right) = |x|$$

portanto $R = 1$. Quando $x = 1$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$

diverge pelo teste da comparação com a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$$

Quando $x = -1$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$$

converge pelo teste da série alternada. Assim o intervalo de convergência é $[-1, 1)$.

d) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^2|x|\right] = |x|$$

portanto $R = 1$. Quando $x = 1$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

converge pelo teste da série alternada. Quando $x = -1$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$

converge pois é uma série p com $p = 2$. Assim o intervalo de convergência é $[-1, 1]$.

e) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$$

portanto $R = \infty$ e o intervalo de convergência é $(-\infty, \infty)$.

f) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da raiz para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} n|x| = \infty$$

portanto $R = 0$ e o intervalo de convergência é apenas o ponto zero, $\{0\} = [0, 0]$.

g) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{|x|}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right] = \frac{|x|}{2}$$

portanto $R = 2$. Quando $x = \pm 2$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n^2$$

diverge pelo teste do n-ésimo termo. Assim o intervalo de convergência é $(-2, 2)$.

h) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{10|x|}{(1 + {}^1\!/_n)^3} = 10|x|$$

portanto $R = {}^1\!/_{10}$. Quando $x = -{}^1\!/_{10}$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$$

converge pelo teste da série alternada. Quando $x = {}^1\!/_{10}$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

converge pois é uma série p com $p = 3$. Assim o intervalo de convergência é $[-1, 1]$.

i) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left[-3x\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3/2}\right] = 3|x|$$

portanto $R = {}^1\!/_3$. Quando $x = {}^1\!/_3$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$$

converge pelo teste da série alternada. Quando $x = -{}^1\!/_3$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

converge pois é uma série p com $p = {}^3\!/_2$. Assim o intervalo de convergência é $[-{}^1\!/_3, {}^1\!/_3]$.

j) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{|x|}{3}$$

portanto $R = 3$. Quando $x = 3$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge pois é a série harmônica. Quando $x = -3$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge pois é uma série harmônica alternada. Assim o intervalo de convergência é $[-3, 3)$.

k) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \frac{|x|}{4}$$

portanto $R = 4$. Quando $x = -4$ a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

diverge pelo teste da comparação com a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Quando $x = 4$ a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

converge pelo teste da série alternada. Assim o intervalo de convergência é $(-4, 4]$.

l) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0$$

portanto $R = \infty$ e o intervalo de convergência é $(-\infty, \infty)$.

m) Centro da série $a = 2$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= |x-2| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} \\ &= |x-2|\end{aligned}$$

portanto $R = 1$. Quando $x = 1$ a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

converge pelo teste da série alternada. Quando $x = 3$ a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

converge pela comparação com a série p com $p = 2$

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$$

Assim o intervalo de convergência é $[1, 3]$.

n) Centro da série $a = 3$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x-3| \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = |x-3|$$

portanto $R = 1$. Quando $x = 2$ a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

diverge pela comparação no limite com

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ou pelo teste da integral. Quando $x = 4$ a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

converge pelo teste da série alternada. Assim o intervalo de convergência é $(2, 4]$.

o) Centro da série $a = -4$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3|x+4|\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 3|x+4|$$

portanto $R = 1/3$. Quando $x = -\frac{13}{3}$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

converge pelo teste da série alternada. Quando $x = -\frac{11}{3}$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverge pois é uma série p com $p = 1/2$. Portanto o intervalo de convergência é $[-13/3, -11/3)$.

p) Centro da série $a = -1$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+1|(n+1)}{4n} = \frac{|x+1|}{4}$$

portanto $R = 4$. Quando $x = -5$ ou $x = 3$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n$$

diverge pelo teste do n-ésimo termo. Assim o intervalo de convergência é $(-5, 3)$.

q) Centro da série $a = 2$. Usando o teste da raiz para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-2|}{n} = 0$$

portanto $R = \infty$ e o intervalo de convergência é $(-\infty, \infty)$.

r) Centro da série $a = 1/2$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{|2x-1|}{5} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \\ &= \frac{|2x-1|}{5} \end{aligned}$$

portanto $R = 5/2$. Quando $x = -2$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

converge pelo teste da série alternada. Quando $x = 3$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverge pois é uma série p com $p = 1/2$. Assim o intervalo de convergência é $[-2, 3)$.

s) Centro da série a. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{|x-a|}{b} = \frac{|x-a|}{b}$$

portanto $R = b$. Quando $x = a - b$ ou $x = a + b$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

diverge pelo teste do n-ésimo termo. Assim o intervalo de convergência é $(a - b, a + b)$.

t) Centro da série a. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{b|x-a| \ln n}{\ln(n+1)} = b|x-a|$$

portanto $R = 1/b$. Quando $x = a + 1/b$ a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

diverge pelo teste da comparação com a série p com

$p = 1$. Quando $x = a - {}^1\!/_b$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

converge pelo teste da série alternada. Assim o intervalo de convergência é $[a - {}^1\!/_b, a + {}^1\!/_b)$.

u) Centro da série $a = {}^1\!/_2$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|2n-1| = \infty$$

portanto $R = 0$ e o intervalo de convergência é $\{{}^1\!/_2\} = [{}^1\!/_2, {}^1\!/_2]$.

v) Reescrevendo o termo da série temos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)} \\ &= \frac{n^2 x^n}{2^n} \\ &= \frac{n x^n}{2^n (n-1)!} \end{aligned}$$

Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} \frac{|x|}{2} = 0$$

portanto $R = \infty$ e o intervalo de convergência é $(-\infty, \infty)$.

w) Centro da série $a = {}^4\!/_5$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} |5x - 4| \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 \\ &= |5x - 4| \end{aligned}$$

portanto $R = {}^1\!/_5$. Quando $x = {}^3\!/_5$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$$

converge pelo teste da série alternada. Quando $x = 1$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

converge pois é uma série p com $p = 3$. Assim o intervalo de convergência é $[{}^3\!/_5, 1]$.

x) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} x^2 \frac{n(\ln n)^2}{(n+1)[\ln(n+1)]^2} = x^2$$

portanto $R = 1$. Quando $x = \pm 1$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

converge pelo teste a integral. Assim o intervalo de convergência é $[-1, 1]$.

y) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{2n+1} = 0$$

portanto $R = \infty$ e o intervalo de convergência é $(-\infty, \infty)$.

z) Centro da série $a = 0$. Usando o teste da razão para determinar o raio temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|x|}{2n+1} = \frac{|x|}{2}$$

portanto $R = 2$. Quando $x = \pm 2$ a série

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{n!\, 2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)} \\ &= \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n) 2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)} \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)} > 1 \end{aligned}$$

diverge pelo teste do n-ésimo termo. Assim o intervalo de convergência é $(-2, 2)$.

Capítulo 8

Seção 8.1

1) a) Calculando as derivadas

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= (1-x)^{-2} \\ f^{(1)}(x) &= 2(1-x)^{-3} \\ f^{(2)}(x) &= 2 \cdot 3(1-x)^{-4} \\ f^{(3)}(x) &= 2 \cdot 3 \cdot 4(1-x)^{-5} \\ f^{(n)}(x) &= (n+1)!(1-x)^{-n-2} \end{aligned}$$

Avaliando as derivadas em zero

$$f^{(0)}(0) = 1$$
$$f^{(1)}(0) = 2!$$
$$f^{(2)}(0) = 3!$$
$$f^{(3)}(0) = 4!$$
$$f^{(n)}(0) = (n+1)!$$

Série de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(|x|\frac{n+2}{n+1}\right) = |x|$$

portanto $R = 1$.

b) Calculando as derivadas

$$f^{(0)}(x) = \ln(1+x)$$
$$f^{(1)}(x) = (1+x)^{-1}$$
$$f^{(2)}(x) = -(1+x)^{-2}$$
$$f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}$$
$$f^{(4)}(x) = -2\cdot 3(1+x)^{-3}$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$$

Avaliando as derivadas em zero

$$f^{(0)}(0) = 0$$
$$f^{(1)}(0) = 1$$
$$f^{(2)}(0) = -1$$
$$f^{(3)}(0) = 2$$
$$f^{(4)}(0) = -6$$
$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Série de Maclaurin

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{(n-1)}(n-1)!\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \end{aligned}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|}{1+{}^1/_n}\right) = |x|$$

portanto $R = 1$.

c) Calculando as derivadas

$$f^{(0)}(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$$
$$f^{(1)}(x) = \pi\cos(\pi x)$$
$$f^{(2)}(x) = -\pi^2\operatorname{sen}(\pi x)$$
$$f^{(3)}(x) = -\pi^3\cos(\pi x)$$

Avaliando as derivadas em zero

$$f^{(0)}(0) = 0$$
$$f^{(1)}(0) = \pi$$
$$f^{(2)}(0) = 0$$
$$f^{(3)}(0) = -\pi^3$$

Série de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi^2x^2}{(2n+3)(2n+2)}\right) = 0$$

portanto $R = \infty$.

d) Calculando as derivadas

$$f^{(0)}(x) = e^{-2x}$$
$$f^{(1)}(x) = -2e^{-2x}$$
$$f^{(2)}(x) = 4e^{-2x}$$
$$f^{(3)}(x) = -8e^{-2x}$$
$$f^{(4)}(x) = 16e^{-2x}$$

Avaliando as derivadas em zero

$$f^{(0)}(0) = 1$$
$$f^{(1)}(0) = -2$$
$$f^{(2)}(0) = 4$$
$$f^{(3)}(0) = -8$$
$$f^{(n)}(0) = 16$$

Série de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}x^n$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2|x|}{n+1}\right) = 0$$

portanto $R = \infty$.

e) Calculando as derivadas

$$f^{(0)}(x) = 2^x$$
$$f^{(1)}(x) = 2^x(\ln 2)$$
$$f^{(2)}(x) = 2^x(\ln 2)^2$$

$$f^{(3)}(x) = 2^x(\ln 2)^3$$
$$f^{(n)}(x) = 2^x(\ln 2)^n$$

Avaliando as derivadas em zero

$$f^{(0)}(0) = 1$$
$$f^{(1)}(0) = \ln 2$$
$$f^{(2)}(0) = (\ln 2)^2$$
$$f^{(3)}(0) = (\ln 2)^3$$
$$f^{(n)}(0) = (\ln 2)^n$$

Série de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\ln 2)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\ln 2)|x|}{n+1}\right) = 0$$

portanto $R = \infty$.

f) Calculando as derivadas

$$f^{(0)}(x) = x\cos(x)$$
$$f^{(1)}(x) = -x\operatorname{sen} x + \cos x$$
$$f^{(2)}(x) = -x\cos x - 2\operatorname{sen} x$$
$$f^{(3)}(x) = x\operatorname{sen} x - 3\cos x$$
$$f^{(4)}(x) = x\cos x + 4\operatorname{sen} x$$
$$f^{(5)}(x) = -x\operatorname{sen} x + 5\cos x$$
$$f^{(6)}(x) = -x\cos x - 6\operatorname{sen} x$$
$$f^{(7)}(x) = x\operatorname{sen} x - 7\cos x$$

Avaliando as derivadas em zero

$$f^{(0)}(0) = 0$$
$$f^{(1)}(0) = 1$$
$$f^{(2)}(0) = 0$$
$$f^{(3)}(0) = -3$$
$$f^{(4)}(0) = 0$$
$$f^{(5)}(0) = 5$$
$$f^{(6)}(0) = 0$$
$$f^{(7)}(0) = -7$$

Série de Maclaurin

$$f(x)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}\right) = 0$$

portanto $R = \infty$.

g) Calculando as derivadas

$$f^{(0)}(x) = \operatorname{senh}(x)$$
$$f^{(1)}(x) = \cosh(x)$$
$$f^{(2)}(x) = \operatorname{senh}(x)$$
$$f^{(3)}(x) = \cosh(x)$$

Avaliando as derivadas em zero

$$f^{(0)}(0) = 0$$
$$f^{(1)}(0) = 1$$
$$f^{(2)}(0) = 0$$
$$f^{(3)}(0) = 1$$
$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ 1 & n \text{ impar} \end{cases}$$

Série de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{(3n+3)(2n+2)}\right) = 0$$

portanto $R = \infty$.

h) Calculando as derivadas

$$f^{(0)}(x) = \cosh(x)$$
$$f^{(1)}(x) = \operatorname{senh}(x)$$
$$f^{(2)}(x) = \cosh(x)$$
$$f^{(3)}(x) = \operatorname{senh}(x)$$

Avaliando as derivadas em zero

$$f^{(0)}(0) = 1$$
$$f^{(1)}(0) = 0$$
$$f^{(2)}(0) = 1$$
$$f^{(3)}(0) = 0$$
$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$$

Série de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}\right) = 0$$

portanto $R = \infty$.

2) a) Calculando as derivadas no centro da série

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x^4 - 3x^2 + 1 & f^{(0)}(1) &= -1 \\ f^{(1)}(x) &= 4x^3 - 6x & f^{(1)}(1) &= -2 \\ f^{(2)}(x) &= 12x^2 - 6 & f^{(2)}(1) &= 6 \\ f^{(3)}(x) &= 24x & f^{(3)}(1) &= 24 \\ f^{(4)}(x) &= 24 & f^{(4)}(1) &= 24 \\ f^{(n)}(x) &= 0 & f^{(n)}(1) &= 0 \quad n \geq 5 \end{aligned}$$

Série de Taylor

$$\begin{aligned} f(x) = -1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 \\ + 4(x-1)^3 + (x-1)^4 \end{aligned}$$

portanto $R = \infty$.

b) Calculando as derivadas no centro da série

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x - x^3 & f^{(0)}(-2) &= 6 \\ f^{(1)}(x) &= 1 - 3x^2 & f^{(1)}(-2) &= -11 \\ f^{(2)}(x) &= -6x & f^{(2)}(-2) &= 21 \\ f^{(3)}(x) &= -6 & f^{(3)}(-2) &= -6 \\ f^{(n)}(x) &= 0 & f^{(n)}(-2) &= 0 \quad n \geq 4 \end{aligned}$$

Série de Taylor

$$f(x) = 6 - 11(x+2) + 6(x+2)^2 - (x+2)^3$$

portanto $R = \infty$.

c) Calculando as derivadas no centro da série

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \ln x \\ f^{(1)}(x) &= 1/x \\ f^{(2)}(x) &= -1/x^2 \\ f^{(3)}(x) &= 2/x^3 \\ f^{(4)}(x) &= -6/x^4 \\ f^{(5)}(x) &= 24/x^5 \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(0)}(2) &= \ln 2 \\ f^{(1)}(2) &= 1/2 \\ f^{(2)}(2) &= -1/2^2 \\ f^{(3)}(2) &= 2/2^3 \\ f^{(4)}(2) &= -6/2^4 \\ f^{(5)}(2) &= 24/2^5 \\ f^{(n)}(2) &= (-1)^{n-1}(n-1)!/2^n \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Série de Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(x-2)^n}{2^n n!} \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{2^n n} \end{aligned}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{|x-2|}{2} = \frac{|x-2|}{2}$$

portanto $R = 2$.

d) Calculando as derivadas no centro da série

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= 1/x & f^{(0)}(-3) &= -1/3 \\ f^{(1)}(x) &= -1/x^2 & f^{(1)}(-3) &= -1/3^2 \\ f^{(2)}(x) &= 2/x^3 & f^{(2)}(-3) &= -2/3^3 \\ f^{(3)}(x) &= -6/x^4 & f^{(3)}(-3) &= -6/3^4 \\ f^{(4)}(x) &= 24/x^5 & f^{(4)}(-3) &= -24/3^5 \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n n!/x^n & f^{(n)}(-3) &= -n!/3^n \end{aligned}$$

Série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n!(x+3)^n}{3^n n!} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^n}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+3|}{3} = \frac{|x+3|}{3}$$

portanto $R = 3$.

e) Calculando as derivadas no centro da série

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= e^{2x} & f^{(0)}(3) &= e^6 \\ f^{(1)}(x) &= 2e^{2x} & f^{(1)}(3) &= 2e^6 \\ f^{(2)}(x) &= 2^2e^{2x} & f^{(2)}(3) &= 2^2e^6 \\ f^{(3)}(x) &= 2^3e^{2x} & f^{(3)}(3) &= 2^3e^6 \\ f^{(4)}(x) &= 2^4e^{2x} & f^{(4)}(3) &= 2^4e^6 \\ f^{(5)}(x) &= 2^5e^{2x} & f^{(5)}(3) &= 2^5e^6 \\ f^{(n)}(x) &= 2^ne^{2x} & f^{(n)}(3) &= 2^ne^6 \end{aligned}$$

Série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^6 (x-3)^n}{n!}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2|x-3|}{n+1} = 0$$

portanto $R = \infty$

f) Calculando as derivadas no centro da série

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(0)}(\pi/2) &= 1\\ f^{(1)}(x) &= \cos x & f^{(1)}(\pi/2) &= 0\\ f^{(2)}(x) &= -\operatorname{sen} x & f^{(2)}(\pi/2) &= -1\\ f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(3)}(\pi/2) &= 0\\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(4)}(\pi/2) &= 1\\ f^{(5)}(x) &= \cos x & f^{(5)}(\pi/2) &= 0 \end{aligned}$$

Série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\pi/2)^{2n}}{(2n)!}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x-\pi/2|^2}{(2n+2)(2n+1)}\right) = 0$$

portanto $R = \infty$

g) Calculando as derivadas no centro da série

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \cos x & f^{(0)}(\pi) &= -1\\ f^{(1)}(x) &= -\operatorname{sen} x & f^{(1)}(\pi) &= 0\\ f^{(2)}(x) &= -\cos x & f^{(2)}(\pi) &= 1\\ f^{(3)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(3)}(\pi) &= 0\\ f^{(4)}(x) &= \cos x & f^{(4)}(\pi) &= -1 \end{aligned}$$

Série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x-pi|^2}{(2n+2)(2n+1}\right) = 0$$

portanto $R = \infty$

h) Calculando as derivadas no centro da série

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x^{1/2} & f^{(0)}(16) &= 4\\ f^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2} & f^{(1)}(16) &= \frac{1}{2}\frac{1}{4}\\ f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{4}x^{-3/2} & f^{(2)}(16) &= -\frac{1}{4}\frac{1}{4^3}\\ f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8}x^{-5/2} & f^{(3)}(16) &= \frac{3}{8}\frac{1}{4^5}\\ f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16}x^{-7/2} & f^{(4)}(16) &= -\frac{15}{16}\frac{1}{4^7} \end{aligned}$$

Série de Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 + \frac{1}{8}(x-16)\\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{5n-5}}\frac{(x-16)^n}{n!} \end{aligned}$$

Usando o teste da razão para determinar o raio de convergência

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x-16|(2n-1)}{2^5(n+1)}\right)\\ &= \frac{|x-16|}{16} \end{aligned}$$

portanto $R = 16$

Seção 8.3

1) a) Calculando as derivadas de f

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x^{1/2} & f^{(0)}(4) &= 2\\ f^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2} & f^{(1)}(4) &= \frac{1}{4}\\ f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{4}x^{-3/2} & f^{(2)}(4) &= -\frac{1}{32}\\ f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8}x^{-5/2} \end{aligned}$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \le \frac{M}{3!}|x-4|^3$$

Majorando o módulo

$$4 \le x \le 4{,}2$$

$$|x-4| \le 0{,}2 = \frac{2}{10}$$

$$|x-4|^3 \le \frac{2^3}{10^3}$$

Precisamos de M tal que

$$\left|\frac{3}{8}x^{-5/2}\right| \le M \qquad \forall x \in \mathcal{I}$$

Como $\frac{3}{8}x^{-5/2}$ é decrescente em $\mathcal{I}$

$$M = \frac{3}{8}4^{-5/2} = \frac{3}{8\cdot 2^5} = \frac{3}{2^8}$$

portanto

$$\begin{aligned}|R_2(x)| &\le \frac{3}{2^8}\frac{1}{3\cdot 2}\frac{2^3}{10^3}\\ &= \frac{1}{2^6 10^3}\\ &\approx 0{,}000\,016\end{aligned}$$

b) Calculando as derivadas de f

$$\begin{aligned}f^{(0)}(x) &= x^{-2} & f^{(0)}(1) &= 1\\ f^{(1)}(x) &= -2x^{-3} & f^{(1)}(1) &= -2\\ f^{(2)}(x) &= 6x^{-4} & f^{(2)}(1) &= 6\\ f^{(3)}(x) &= -24x^{-5}\end{aligned}$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_2(x) = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \le \frac{M}{3!}|x-1|^3$$

Majorando o módulo

$$0{,}9 \le x \le 1{,}1$$

$$|x-1| \le 0{,}1$$

$$|x-1|^3 \le \frac{1}{10^3}$$

Precisamos de M tal que

$$M \ge \left|-24x^{-5}\right| \qquad \forall x \in \mathcal{I}$$

como $\left|f^{(3)}(x)\right|$ é decrescente em $\mathcal{I}$

$$M = \frac{24}{(0{,}9)^5} = \frac{2^3\cdot 3\cdot 10^5}{9^5}$$

portanto

$$\begin{aligned}|R_2(x)| &\le \frac{2^3\cdot 3\cdot 10^5}{9^5}\frac{1}{3\cdot 2}\frac{1}{10^3}\\ &= \frac{2^2 10^2}{9^5}\\ &\approx 0{,}006\,774\end{aligned}$$

c) Calculando as derivadas de f

$$\begin{aligned}f^{(0)}(x) &= x^{2/3} & f^{(0)}(1) &= 1\\ f^{(1)}(x) &= \frac{2}{3}x^{-1/3} & f^{(1)}(1) &= \frac{2}{3}\\ f^{(2)}(x) &= -\frac{2}{9}x^{-4/3} & f^{(2)}(1) &= -\frac{2}{9}\\ f^{(3)}(x) &= \frac{8}{27}x^{-7/3}\end{aligned}$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_3(x) = 1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \le \frac{M}{3!}|x-1|^3$$

Majorando o módulo

$$0{,}8 \le x \le 1{,}2$$

$$|x-1| \le 0{,}2$$

$$|x-1|^3 \le \left(\frac{2}{10}\right)^3 = \frac{2^3}{10^3}$$

Precisamos de M tal que

$$M \ge \left|\frac{8}{27}x^{-7/3}\right| \qquad \forall x \in \mathcal{I}$$

como $\left|f^{(3)}(x)\right|$ é decrescente em $\mathcal{I}$

$$\begin{aligned}M &= \frac{8}{27}(0{,}8)^{-7/3}\\ &= \frac{8}{27}\left(\frac{10}{8}\right)^{7/3}\\ &= \frac{10^{7/3}}{3^3\cdot 8^{4/3}}\\ &= \frac{10^{7/3}}{3^3\cdot 2^4}\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}|R_2(x)| &\le \frac{10^{7/3}}{3^3\cdot 2^4}\frac{1}{3\cdot 2}\frac{2^3}{10^3}\\ &= \frac{1}{3^4\,2^2\,10^{2/3}}\\ &\approx 0{,}000\,665\end{aligned}$$

d) Calculando as derivadas de f

$$\begin{aligned}f^{(0)}(x) &= \operatorname{sen}(x) & f^{(0)}(\pi/6) &= 1/2\\ f^{(1)}(x) &= \cos(x) & f^{(1)}(\pi/6) &= \sqrt{3}/2\\ f^{(2)}(x) &= -\operatorname{sen}(x) & f^{(2)}(\pi/6) &= -1/2\\ f^{(3)}(x) &= -\cos(x)\end{aligned}$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \le \frac{M}{3!}\left|x - \frac{\pi}{6}\right|^3$$

Majorando o módulo

$$0 \le x \le \frac{\pi}{3}$$

$$\left|x-\frac{\pi}{6}\right| \leq \frac{\pi}{6}$$
$$\left|x-\frac{\pi}{6}\right|^3 \leq \frac{\pi^3}{6^3}$$

Precisamos de M tal que

$$M \geq |-\cos(x)| \qquad \forall x \in \mathcal{I}$$

como $|-\cos(x)|$ é decrescente em $\mathcal{I}$

$$M = \cos(0) = 1$$

portanto

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{6}\frac{\pi^3}{6^3} \approx 0{,}023\,925$$

e) Calculando as derivadas de f

$$f^{(0)}(x) = \sec(x)$$
$$f^{(1)}(x) = \sec(x)\,\mathrm{tg}(x)$$
$$f^{(2)}(x) = \sec(x)(2\sec^2(x) - 1)$$
$$f^{(3)}(x) = \sec(x)\,\mathrm{tg}(x)(6\sec^2(x) - 1)$$

$$f^{(0)}(0) = 1$$
$$f^{(1)}(0) = 0$$
$$f^{(2)}(0) = 1$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x|^3$$

Majorando o módulo

$$-0{,}2 \leq x \leq 0{,}2$$
$$|x| \leq 0{,}2$$
$$|x|^3 \leq \frac{2^3}{10^3}$$

Precisamos de M tal que

$$M \geq \left|\sec(x)\,\mathrm{tg}(x)(6\sec^2(x) - 1)\right| \quad \forall x \in \mathcal{I}$$

Como $f^{(3)}$ é uma função impar e crescente on intervalo $[0; 0{,}2]$

$$M = f^{(3)}(0{,}2)$$

portanto

$$|R_2(x)| \leq$$

f) Calculando as derivadas de f

$$f^{(0)}(x) = \ln(1 + 2x) \qquad f^{(0)}(1) = \ln 3$$
$$f^{(1)}(x) = 2/(1 + 2x) \qquad f^{(1)}(1) = 2/3$$
$$f^{(2)}(x) = -4/(1 + 2x)^2 \qquad f^{(2)}(1) = -4/9$$
$$f^{(3)}(x) = 16/(1 + 2x)^3$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_2(x) = \ln(3) + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x-1|^3$$

Majorando o módulo

$$0{,}5 \leq x \leq 1{,}5$$
$$|x-1| \leq 0{,}5$$
$$|x-1|^3 \leq \frac{1}{2^3}$$

Precisamos de M tal que

$$M \geq \left|\frac{16}{(1+2x)^3}\right| \qquad \forall x \in \mathcal{I}$$

como $f^{(3)}$ é uma função decrescente em $\mathcal{I}$

$$M = \frac{16}{(1 + 2\cdot 0{,}5)^3} = 2$$

portanto

$$|R_2(x)| \leq \frac{2}{3\cdot 2}\frac{1}{2^3} = \frac{1}{3\cdot 2^3} \approx 0{,}041\,667$$

g) Calculando as derivadas de f

$$f^{(0)}(x) = e^{x^2} \qquad f^{(0)}(0) = 1$$
$$f^{(1)}(x) = e^{x^2}(2x) \qquad f^{(1)}(0) = 0$$
$$f^{(2)}(x) = e^{x^2}(2 + 4x^2) \qquad f^{(2)}(0) = 2$$
$$f^{(3)}(x) = e^{x^2}(12x + 8x^3)$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x|^3$$

Majorando o módulo

$$0 \leq x \leq 0{,}1 \;\Rightarrow\; |x| \leq 0{,}1 \;\Rightarrow\; |x|^3 \leq \frac{1}{10^3}$$

Precisamos de M tal que

$$M \geq \left|e^{x^2}(12x + 8x^3)\right| \qquad \forall x \in \mathcal{I}$$

como $f^{(3)}$ é uma função crescente em $\mathcal{I}$

$$\begin{aligned} M &= f^{(3)}(0{,}1) \\ &= e^{0{,}1^2}(12 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot (0{,}1)^3) \\ &\approx 1{,}2201 \end{aligned}$$

portanto

$$|R_2(x)| \leq \frac{1{,}2201}{6 \cdot 10^3} \approx 0{,}000\,203$$

h) Calculando as derivadas de f

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x\ln(x) & f^{(0)}(1) &= 0 \\ f^{(1)}(x) &= \ln(x) + 1 & f^{(1)}(1) &= 1 \\ f^{(2)}(x) &= 1/x & f^{(2)}(1) &= 1 \\ f^{(3)}(x) &= -1/x^2 \end{aligned}$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_2(x) = (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2}$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x-1|^3$$

Majorando o módulo

$$0{,}5 \leq x \leq 1{,}5$$

$$|x-1| \leq 0{,}5$$

$$|x-1|^3 \leq \frac{1}{2^3}$$

Precisamos de M tal que

$$M \geq \left|-1/x^2\right| \qquad \forall x \in \mathcal{I}$$

como $\left|f^{(3)}\right|$ é uma função decrescente em $\mathcal{I}$

$$M = \left|f^{(3)}(0{,}5)\right| = \frac{1}{0{,}5^2} = 2^2$$

portanto

$$|R_2(x)| \leq \frac{2^2}{3 \cdot 2}\frac{1}{2^3} = \frac{1}{3 \cdot 2^2} \approx 0{,}083\,333$$

i) Calculando as derivadas de f

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x\,\mathrm{sen}(x) \\ f^{(1)}(x) &= \mathrm{sen}(x) + x\cos(x) \\ f^{(2)}(x) &= 2\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x) \\ f^{(3)}(x) &= -3\,\mathrm{sen}(x) - x\cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(0)}(0) &= 0 \\ f^{(1)}(0) &= 0 \\ f^{(2)}(0) &= 2 \end{aligned}$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_2(x) = x^2$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x|^3$$

Majorando o módulo

$$-1 \leq x \leq 1 \;\Rightarrow\; |x| \leq 1 \;\Rightarrow\; |x|^3 \leq 1$$

Precisamos de M tal que

$$M \geq |-3\,\mathrm{sen}(x) - x\cos(x)| \qquad \forall x \in \mathcal{I}$$

Após alguns cálculos elaborados obtemos

$$M = 3{,}065$$

portanto

$$|R_2(x)| \leq 3{,}065$$

j) Calculando as derivadas de f

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \mathrm{senh}(2x) & f^{(0)}(0) &= 0 \\ f^{(1)}(x) &= 2\cosh(2x) & f^{(1)}(0) &= 2 \\ f^{(2)}(x) &= 4\,\mathrm{senh}(2x) & f^{(2)}(0) &= 0 \\ f^{(3)}(x) &= 8\cosh(2x) \end{aligned}$$

Polinômio de Taylor

$$f(x) \approx T_2(x) = 2x$$

Pelo teorema de Taylor

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x|^3$$

Majorando o módulo

$$-1 \leq x \leq 1 \;\Rightarrow\; |x| \leq 1 \;\Rightarrow\; |x|^3 \leq 1$$

Precisamos de M tal que

$$M \geq |8\cosh(2x)| \qquad \forall x \in \mathcal{I}$$

$$M = 8\cosh(2) \approx 30.098$$

portanto

$$|R_2(x)| \leq \frac{30{,}098}{6} \approx 5{,}0163$$

Seção 8.4

1) a) Pela série geométrica (razão $= x - 4$):

$$q(x) = \frac{1}{5-x} = \frac{1}{1-(x-4)} = \sum (x-4)^n$$

para $|x - 4| < 1$

b) Pela série de Taylor da exponencial, substituindo $x \to -x^2$ e integrando a série (não afetam o raio, por ser infinito):

$$\begin{aligned} E(x) &= \int \left(\sum \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} \right) dx \\ &= C + \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

para $x \in \mathbb{R}$.

c) Pela série de Taylor do cosseno, substituindo $x \to 2x$ (não afeta o raio, por ser infinito):

$$d(x) = \cos(2x) = \sum \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

para $x \in \mathbb{R}$.

2) a) Por cálculo direto, $x = 1/3$ e $x = 1/2$, respectivamente.

b) Pela série de potências do logaritmo, substituindo $x \to -x$ e somando as séries (não afetam o raio):

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum \frac{1}{n} x^n - \sum \frac{(-1)^n}{n} x^n \\ &= 2 \sum \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} \end{aligned}$$

para $|x| < 1$.

c) Substituindo os valores obtidos no item (a) na série do item (b):

$$\ln 2 = \sum \frac{2}{(2n+1)3^{2n+1}}$$

$$\ln 3 = \sum \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$$

Referências

1 ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. v. 2.

2 ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

3 APOSTOL, T. M. A proof that Euler missed: evaluating $\zeta(2)$ the easy way. *Tht Mathematical Intelligencer*, v. 5, n. 3, 1983. DOI: 10.1007/bf03026576.

4 ÁVILA, G. *Variáveis complexas e aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

5 AVRITZER, DAN. *geometria analítica e álgebra linear: uma visão geométrica*. 2011.

6 BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo, 1986.

7 BOULOS, P. *Cálculo diferencial e integral*. São Paulo: Makron Books, 1999. v. 1.

8 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

9 BUTKOV, E. *Física matemática*. LTC, 1988.

10 CAMARGO, I.; BOULOS, P. *Geometria Analítica – Um Tratamento Vetorial*. 3. ed. São Paulo: Prentice-Hall, 2005.

11 CAPELAS DE OLIVEIRA, E.; JR., R.; A., W. *Funções Analíticas com Aplicações*. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2006.

12 CHURCHILL, R. V. *Series de Fourier e problemas de valores de contorno*. 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1978.

13 CHURCHILL, R. V. *Variáveis complexas e aplicações*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1975.

14 DEMANA, F. D. et al. *Pré-cálculo*. 1. ed. São Paulo: Pearson, 2008.

15 EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E. *Cálculo com geometria analítica*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1994. v. 1.

16 EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E. *Cálculo com geometria analítica*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1994. v. 2.

17 EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E. *Cálculo com geometria analítica*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1994. v. 3.

18 EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E. *Equações diferenciais elementares com problemas de valores de contorno*. 3. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1995.

19 FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A: funções, limite, derivação e integração*. São Paulo: Prentice-Hall, 2007.

20 FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais duplas e triplas*. São Paulo: Prentice-Hall, 2007.

21 FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo C: funções vetoriais, integrais curvilíneas, integrais de superfície*. São Paulo: Prentice-Hall, 2007.

22 GIORDANO, F. R.; WEIR, M. D.; FOX, W. P. *A first course in mathematical modeling*. 3. ed. Pacific Grove: Thomson, 2003.

23 GOMES, F. M. *Matemática básica: Operações, equações, funções e sequências*. IMECC – UNICAMP, 2017. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091/page14.html>.

24 HSU, H. P. *Análise de Fourier*. Rio de Janeiro: LTC, 1973.

25 IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações*. Atual, 2013. v. 6. ISBN 9788535717525. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=I1iZDAEACAAJ>.

26 IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar, 7: geometria analítica*. Atual, 2005. v. 7. ISBN 9788535705461. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=nFByPgAACAAJ>.

27 IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos*. Atual, 2013. v. 2. ISBN 9788535716825. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=rZkGkAEACAAJ>.

28 IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas*. Atual, 2013. v. 4. ISBN 9788535717488. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=3CW4jwEACAAJ>.

29 IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. *Fundamentos de matemática elementar, 11: matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva*. Atual, 2013. v. 11. ISBN 9788535717600. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=6SEJkAEACAAJ>.

30 IEZZI, G.; MACHADO, N.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar, 8: limites, derivadas, noções de integral*. Atual, 2013. v. 8. ISBN 9788535717563. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=IzLUjwEACAAJ>.

31 IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções*. Atual, 2004. v. 1. ISBN 9788535704556. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=gMuCPgAACAAJ>.

32 IÓRIO, V. *EDP: Um Curso de Graduação*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

33 JESUS SANTOS, R. DE. *Convergência Pontual da Série de Fourier*. 10 jul. 2010. Disponível em: <https://regijs.github.io/eqdif/teofourier.pdf>. Acesso em: 10 out. 2021.

34 JESUS SANTOS, R. DE. *Introdução às equações diferenciais ordinárias*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária UFMG, 2006. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~regi>.

35 JESUS SANTOS, R. DE. *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária UFMG, 2007. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~regi>.

36 JESUS SANTOS, R. DE. *Propriedades de Séries de Potências*. 2 out. 2011. Disponível em: <https://regijs.github.io/eqdif/propserpot.pdf>. Acesso em: 10 out. 2021.

37 JESUS SANTOS, R. DE. *Séries de Fourier*. 23 abr. 2002. Disponível em: <https://regijs.github.io/eqdif/sfourier.pdf>. Acesso em: 10 out. 2021.

38 JESUS SANTOS, R. DE. *Séries de Fourier de Senos e de Cossenos de Índices Ímpares*. 17 ago. 2010. Disponível em: <https://regijs.github.io/eqdif/serfourespec.pdf>. Acesso em: 10 out. 2021.

39 JESUS SANTOS, R. DE. *Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 16 out. 2007. Disponível em: <https://regijs.github.io/eqdif/sfouriereqparc.pdf>. Acesso em: 10 out. 2021.

40 JESUS SANTOS, R. DE. *Transformada de Fourier*. 15 out. 2010. Disponível em: <https://regijs.github.io/eqdif/transfourier.pdf>. Acesso em: 10 out. 2021.

41 JESUS SANTOS, R. DE. *Um curso de geometria analítica e álgebra linear*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária UFMG, 2010. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~regi>.

42 JÚNIOR, F. A. *Equações diferenciais*. São Paulo: McGraw-Hill, 1959.

43 KOLMAN, B. *Álgebra Linear*. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987.

44 LANG, S. *Álgebra Linear*. São Paulo: Edgard Blucher, 1971.

45 LEIGHTON, W. *Equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: LTC, 1970.

46 LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.

47 LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 2.

48 LEON, S. J. *Álgebra Linear com aplicações*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

49 MEDEIROS, V. Z. et al. *Pré-cálculo*. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

50 MUROLO, A.; BONETTO, G.; BONETTO, G. *Matemática Aplicada à Administração, Economia e Contabilidade*. Pioneira Thomson Learning, 2004. ISBN 9788522103997. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=JFXWf98X5IQC>.

51 NAGLE, R. K.; SAFF E. B.AND SNIDER, A. D. *Equações Diferenciais*. 8. ed.: Pearson, 2012.

52 PATRICK D. SHANAHAN, D. G. Z. E. *Curso Introdutório à Análise Complexa com Aplicações*. 2. ed.: TLC, 2011.

53 POOLE, D. *Álgebra Linear*. São Paulo: Thomson, 2006.

54 ROJAS, M. R. A. *Introdução às equações diferenciais parciais*. InterSaberes, 2020.

55 SANTOS, N. M. *Vetores e matrizes: uma introdução à álgebra linear*. 4. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2005.

56 SIMMONS, G. F. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Pearson Makron Books, 1988. v. 1.

57 SIMMONS, G. F. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Pearson Makron Books, 1988. v. 2.

58 SOARES, M. *Cálculo em Uma Variável Complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. (Coleção Matemática Universitária).

59 SPIEGEL, M. R. *Análise de Fourier*. São Paulo: MacGraw-Hill, 1976. (Schaum).

60 STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: Pearson Education, 1987.

61 STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Geometria Analítica*. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1987.

62 STEWART, J. *Cálculo: Volume I*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. v. 1.

63 STEWART, J. *Calculo: Volume II*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. v. 2.

64 STRANG, G. *Álgebra Linear e suas aplicações*. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

65 SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1995. v. 1.

66 SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1995. v. 2.

67 TAN, S. *Matemática aplicada à administração e economia*. Pioneira Thomson Learning, 2001. ISBN 9788522102457. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=d6QjAgAACAAJ>.

68 THIM, J. *Continuous Nowhere Differentiable Functions*. 2003. 94 f. Diss. (Mestrado) – Luleå University of Technology, Luleå, Sweden. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/255669824_Continuous_Nowhere_Differentiable_Functions_MS_Thesis>. Acesso em: 1 out. 2001.

69 THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo Volume 1*. 12. ed. São Paulo, 2012. v. 1.

70 THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo Volume 2*. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. v. 2.

71 WIKIMEDIA COMMONS. *File:Pitangus-3.ogg — Wikimedia Commons, the free media repository*. 2020. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Pitangus-3.ogg&oldid=426366139>. Acesso em: 10 out. 2021.

72 WINTERLE, P. *Vetores e geometria analítica*. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2000.

73 ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. 9. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

Índice Remissivo

Integração e Séries

Luis Alberto D'Afonseca
Jônathas Douglas Santos de Oliveira

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG
17 de agosto de 2025

Apostila para a disciplina "Integração e Séries" do CEFET-MG.

A versão mais recente desta apostila pode ser baixada clicando ou escaneando o código QR.

Arte da capa: Fotografia de Pixabay baixada de Pexels