IS – Prova 2 – Turma 7 02/08/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [20] Use substituição simples para calcular a integral $\int \cos(x)e^{\operatorname{sen}(x)}dx$

Queremos calcular

$$F = \int \cos(x)e^{\operatorname{sen}(x)}dx$$

Faremos a substituição

$$u = \operatorname{sen}(x) \qquad du = \cos(x)dx$$

Assim

$$\begin{aligned} F &= \int e^{\operatorname{sen}(x)}\cos(x)dx \\ &= \int e^u du \\ &= e^u + C \\ &= e^{\operatorname{sen}(x)} + C \end{aligned}$$

2 [20] Use integração por partes para calcular a integral $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}dx$

Queremos calcular

$$I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}dx$$

Primeiro vamos encontrar a primitiva

$$F = \int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$$

Usamos

$$u = \ln(x) \qquad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = \frac{1}{x^2}dx \qquad v = \frac{-1}{x}$$

Assim

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{1}{x^2}\ln(x)dx \\
&= -\ln(x)\frac{1}{x} - \int \frac{-1}{x}\frac{1}{x}dx \\
&= -\frac{\ln(x)}{x} + \int x^{-2}dx \\
&= -\frac{\ln(x)}{x} + \frac{x^{-1}}{-1} + C \\
&= -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C
\end{aligned}$$

Agora podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}dx \\
&= F(x)\Big|_1^e \\
&= F(e) - F(1) \\
&= \left(-\frac{\ln(e)}{e} - \frac{1}{e} + C\right) - \left(-\frac{\ln(1)}{1} - \frac{1}{1} + C\right) \\
&= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + \frac{0}{1} + \frac{1}{1} \\
&= -\frac{2}{e} + 1 \\
&= 1 - \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

3 [20] Calcule a integral $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$

$$F = \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$$

$$x = 3\,\mathrm{sen}(\theta) \qquad dx = 3\cos(\theta)d\theta$$

$$\begin{aligned}
F &= \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{9-(3\,\mathrm{sen}(\theta))^2}}3\cos(\theta)d\theta \\
&= \int \frac{3\cos(\theta)}{\sqrt{9-9\,\mathrm{sen}^2(\theta)}}d\theta \\
&= \int \frac{3\cos(\theta)}{\sqrt{9}\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\theta)}}d\theta \\
&= \int \frac{3\cos(\theta)}{3\sqrt{\cos^2(\theta)}}d\theta \\
&= \int \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)}d\theta \\
&= \int d\theta \\
&= \theta + C \\
&= \mathrm{arcsen}(x) + C
\end{aligned}$$

4 [20] Calcule a integral $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2-3x}dx$

$$F = \int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2-3x}dx$$

Vamos aplicar frações parciais, para isso precisamos das raizes de $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$$
$$x(x^2 - 2x - 3) = 0$$

Uma das raizes de Q é zero, $x_1 = 0$, usamos Bhaskara para encontrar as demais

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_3 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Podemos fatorar Q

$$Q(x) = x(x-3)(x+1)$$

Usando frações parciais

$$\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2-3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1}$$

Multiplicando os dois lados por $x(x-3)(x+1)$

$$\begin{aligned}
2x^2 - 3x + 3 &= A(x-3)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-3) \\
&= A(x^2 + x - 3x - 3) + B(x^2 + x) + C(x^2 - 3x) \\
&= Ax^2 - 2Ax - 3A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 3Cx \\
&= (A + B + C)x^2 + (-2A + B - 3C)x - 3A
\end{aligned}$$

Igualando os polinômios construimos o sistema linear

$$\begin{cases} A + B + C = 2 \\ -2A + B - 3C = -3 \\ -3A = 3 \end{cases}$$

Verificamos que $A = -1$ e reduzimos o sistema para

$$\begin{cases} B + C = 3 \\ B - 3C = -5 \end{cases}$$

Isolando B na primeira equação temos $B = 3 - C$, substituindo na segunda temos

$$\begin{aligned} B - 3C &= -5 \\ (3 - C) - 3C &= -5 \\ 3 - C - 3C &= -5 \\ -4C &= -8 \\ C &= 2 \end{aligned}$$

portanto $B = 1$, temos então que

$$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 3} + \frac{2}{x + 1}$$

então

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx &= -\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x - 3} dx + 2 \int \frac{1}{x + 1} dx \\ &= -\ln|x| + \ln|x - 3| + 2\ln|x + 1| + C \\ &= \ln|x - 3| - \ln|x| + 2\ln|x + 1| + C \end{aligned}$$

5 [20] Calcule a limite da sequência $a_k = \dfrac{1-2k}{1+2k}$

$$
\begin{aligned}
\lim a_k &= \lim \frac{1-2k}{1+2k} \\
&= \lim \frac{(1-2k)^1/k}{(1+2k)^1/k} \\
&= \lim \frac{^1/k - 2}{^1/k + 2} \\
&= \frac{\lim {^1/k} - \lim 2}{\lim {^1/k} + \lim 2} \\
&= \frac{0-2}{0+2} \\
&= -1
\end{aligned}
$$