CFVVI – Prova 2 – Turma 7

04/06/2025

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25] Considere que a equação $\ln(z) + xyz = y^2$ defina z como função de x e y, encontre $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

$$\begin{aligned}
\ln(z) + xyz &= y^2 \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(z) + xyz\right) &= \frac{\partial}{\partial x} y^2 \\
\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} + yz + xy\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\
\left(\frac{1}{z} + xy\right)\frac{\partial z}{\partial x} &= -yz \\
\frac{1+xyz}{z}\,\frac{\partial z}{\partial x} &= -yz \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-yz^2}{1+xyz}
\end{aligned}$$

2 [25] Seja $f(x,y) = \sqrt{4x+y^2}$, use a aproximação linear de f no ponto $(1,2)$ para estimar $f(1{,}02; 1{,}98)$

Calculando as derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{4x+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{4x+y^2}}$$

Avaliando a função e as derivadas no ponto $(1,2)$

$$f(1,2) = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A aproximação linear é

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) \\ &= f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2) \\ &= 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(y-2) \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{x+y-3}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{x+y+1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$L(1{,}02; 1{,}98) = \frac{1{,}02 + 1{,}98 + 1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2.8284$$

Comparando com o valor exato

$$f(1{,}02; 1{,}98) = 2.8285$$

3 [25] Seja $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

a) Calcule o gradiente de f

b) Calcule a derivada de f no ponto $(1,2)$ na direção do vetor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Vetor gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{x^2+y^2+1} \\ \dfrac{2y}{x^2+y^2+1} \end{pmatrix}$$

b) Gradiente no ponto $(1,2)$

$$\nabla f(x,y)(1,2) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{6} \\ \dfrac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Calculando um vetor unitário na direção de v

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Derivada direcional

$$\begin{aligned} D_u f(1,2) &= \nabla f(1,2) \cdot u \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{-2}{3} + \frac{2}{3} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

4 [25] Seja $f(x,y,z) = x^2 \operatorname{sen}(yz)$, calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ no ponto $(1, \pi, 0)$. Efetue as derivadas na ordem especificada pela notação.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 \operatorname{sen}(yz)\right) \\
&= x^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\operatorname{sen}(yz)\right) \\
&= x^2 \cos(yz) \frac{\partial}{\partial z}(yz) \\
&= x^2 \cos(yz) y \\
&= x^2 y \cos(yz)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y \cos(yz)\right) \\
&= x^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(y \cos(yz)\right) \\
&= x^2 \left[\frac{\partial y}{\partial y} \cos(yz) + y \frac{\partial}{\partial y} \cos(yz)\right] \\
&= x^2 \left[\cos(yz) - y \operatorname{sen}(yz) \frac{\partial}{\partial y}(yz)\right] \\
&= x^2 \left[\cos(yz) - y \operatorname{sen}(yz) z\right] \\
&= x^2 \left[\cos(yz) - yz \operatorname{sen}(yz)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1, \pi, 0) &= x^2 \left[\cos(yz) - yz \operatorname{sen}(yz)\right]\Big|_{(1,\pi,0)} \\
&= 1^2 \left[\cos(\pi \times 0) - \pi \times 0 \operatorname{sen}(\pi \times 0)\right] \\
&= 1 \left[\cos(0) - 0\right] \\
&= 1
\end{aligned}
$$