Integrais e Séries – Prova 4 – Turma 8 14/02/2025

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25] Escreva o polinômio de Taylor de quarto grau, centrado no zero, da função cosseno hiperbólico $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

O polinômio de Taylor de quarto grau, centrado em zero, é

$$P_4(x) = \cosh(0) + \cosh'(0)x + \frac{\cosh''(0)}{2}x^2 + \frac{\cosh^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{\cosh^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

Calculando as derivadas

$$\cosh^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

$$\cosh^{(2)}(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

$$\cosh^{(3)}(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

$$\cosh^{(4)}(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

Avaliando as derivadas em zero

$$\cosh^{(0)}(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\cosh^{(1)}(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$\cosh^{(2)}(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\cosh^{(3)}(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$\cosh^{(4)}(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Portanto

$$P_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

2 [25] Considerando a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$

a) [15] determine seu raio de convergência

b) [10] calcule sua derivada

a) Usando o teste da razão

$$a_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \qquad |a_n| = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(n+1)!} \qquad |a_n| = \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)(n+1)!}$$

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)(n+1)!} \, \frac{(2n+1)n!}{|x|^{2n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{(2n+3)(n+1)} |x|^2 \\
&= |x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n^2+5n+3} \\
&= |x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2/n + 1/n^2}{2 + 5/n + 3/n^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto o raio de convergência é infinito $R = \infty$

b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} \frac{d}{dx} x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} (2n+1) x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}
\end{aligned}$$

Curiosidade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} = e^{2x}$$

3 [25] Seja $f(x) = \ln(x+1)$

a) [10] Encontre um padrão para $f^{(n)}(x)$

b) [15] Usando o padrão do item anterior, encontre a Serie de Maclaurin de $f(x)$

a) Calculando as primeiras derivadas

$$f^{(0)}(x) = \ln(x+1)$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}\ln(x+1) = \frac{1}{x+1}(x+1)' = (x+1)^{-1}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}\ln(x+1) = -(x+1)^{-2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^3}{dx^3}\ln(x+1) = \quad 2\,(x+1)^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4}{dx^4}\ln(x+1) = -2\cdot 3\,(x+1)^{-4}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{d^5}{dx^5}\ln(x+1) = \quad 2\cdot 3\cdot 4\,(x+1)^{-5}$$

Vemos que, para $\boldsymbol{n \geq 1}$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\ln(x+1) = (-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+1)^n}$$

b) O primeiro coeficiente, $n = 0$, da Série de Maclaurin é

$$c_0 = \frac{\ln(0+1)}{0!} = \frac{0}{1} = 0$$

portanto, a série começa com $n = 1$. Os demais coeficientes, $n \geq 1$, são

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(0+1)^n n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Montando a série temos

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

4 [25] Use o polinômio de Taylor de segundo grau, centrado em 1, para aproximar o valor de $\sqrt{2}$, estime o erro cometido. Não é necessário encontrar a representação decimal dos valores numéricos. Dica: O valor máximo vai acontecer em um dos pontos extremos do intervalo.

Polinômio de Taylor

$$P_2(x) = f^{(0)}(1) + f^{(1)}(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2}(x-1)^2$$

Calculando as derivadas

$$f^{(0)}(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{x^{-1/2}}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^{-1/2}}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\,x^{-1/2-1} = \frac{-x^{-3/2}}{4}$$

Avaliando para $x = 1$

$$f^{(0)}(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$f^{(1)}(1) = \left.\frac{x^{-1/2}}{2}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(1) = \left.\frac{-x^{-3/2}}{4}\right|_{x=1} = \frac{-1}{4}$$

Então

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &= 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} \end{aligned}$$

Avaliando em 2

$$\begin{aligned} P_2(2) &= 1 + \frac{2-1}{2} - \frac{(2-1)^2}{8} \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{8+4-1}{8} \\ &= \frac{11}{8} \end{aligned}$$

Pelo **Teorema de Taylor**, sabemos que o erro cometido ao aproximarmos $\sqrt{x}$ pelo seu polinômio de Taylor centrado em 1 de grau 2 é

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}\,(x-1)^3$$

para algum c entre zero e x e

$$f^{(3)}(x) = \frac{d}{dx}\frac{-x^{-3/2}}{4} = \frac{-1}{4}\,\frac{-3}{2}\,x^{-3/2-1} = \frac{3}{8}\,x^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$$

Entre 1 e 2 o maior valor de $\left|f^{(3)}(x)\right|$ acontece em $x = 1$, portanto

$$\left|f^{(3)}(x)\right| \leq \left.\frac{3}{8\sqrt{x^5}}\right|_{x=1} = \frac{3}{8}$$

$$|R_2(2)| \leq \left|\frac{f^{(3)}(c)}{3!}\,(2-1)^3\right| = \frac{3/8}{3!} = \frac{3}{8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{16}$$