IS – Exame Especial – Turma 7 17/09/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [20] Calcule o volume do sólido formado pela rotação da região entre as curvas

$$y = x + 2 \qquad y = x^2$$

em torno da reta $x = -1$.

Vamos usar cascas cilíndricas, para isso precisamos encontrar o raio e a altura da casca cilindica

$$r(x) = x - (-1) = x + 1$$

$$h(x) = (x + 2) - x^2 = 2 + x - x^2$$

O intervalo de integração, $[a, b]$, vai ser entre os pontos comuns entre as curvas $y = x + 2$ e $y = x^2$, ou seja $a = 0$ e

$$(x + 2) = x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 9 \qquad \sqrt{\Delta} = 3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm 3}{2 \times 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

portanto

$$x_1 = \frac{1 - 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad x_2 = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

O intervalo de integração é $[-1, 2]$

Calculando o volume

$$V = \int_a^b 2\pi\, r(x)\, h(x)\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{2} (x + 1)(2 + x - x^2)dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{2} 2x + x^2 - x^3 + 2 + x - x^2 dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{2} 2 + 3x - x^3 dx$$

$$= 2\pi \left(2x + 3\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-1}^{2}$$

$$= 2\pi \left(\left[2 \times 2 + 3\frac{2^2}{2} - \frac{2^4}{4} \right] - \left[2(-1) + 3\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^4}{4} \right] \right)$$

$$= 2\pi \left([4 + 6 - 4] - \left[-2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right] \right)$$

$$= 2\pi \left(6 - \frac{-8 + 6 - 1}{4} \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{24 + 3}{4} \right)$$

$$= \frac{27 \times 2\pi}{4}$$

$$= \frac{27\pi}{2}$$

2 [20] Calcule a integral $\displaystyle\int_1^e x^3 \ln(x)dx$

Para calcular a primitiva

$$F(x) = \int x^3 \ln(x)dx$$

vamos usar integração por partes com

$$u = \ln(x) \qquad du = \frac{dx}{x} \qquad\qquad dv = x^3 dx \qquad v = \frac{x^4}{4}$$

obtendo

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x^3 \ln(x)dx \\ &= \ln(x)\frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4}\frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^4 \ln(x)}{4} - \frac{1}{4}\int x^3 dx \\ &= \frac{x^4 \ln(x)}{4} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} + C \\ &= \frac{x^4}{4}\left(\ln(x) - \frac{1}{4}\right) + C \end{aligned}$$

Agora podemos calcular

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e x^3 \ln(x)dx \\ &= F(x)\Big|_1^e \\ &= \left(\frac{x^4}{4}\left(\ln(x) - \frac{1}{4}\right)\right)\Big|_1^e \\ &= \left(\frac{e^4}{4}\left(\ln(e) - \frac{1}{4}\right)\right) - \left(\frac{1^4}{4}\left(\ln(1) - \frac{1}{4}\right)\right) \\ &= \frac{e^4}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(0 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{e^4}{4}\,\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} \\ &= \frac{3e^4 + 1}{16} \end{aligned}$$

3 [20] Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$

Por frações parciais

$$\frac{6}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$$

$$\begin{aligned} 6 &= A(2n+1) + B(2n-1) \\ &= 2(A+B)n + (A-B) \end{aligned}$$

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2A + 2B = 0 \\ \;\;A - \;\;B = 6 \end{cases}$$

Que podemos reescrever como

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 6 \end{cases}$$

Da primeira equação temos que $B = -A$. Substituindo na segunda temos

$$6 = A - B = A - (-A) = 2A$$

portanto $A = 3$ e $B = -3$
Podemos agora reescrever a série como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n-1} - \frac{3}{2n+1}$$

que é uma série telescópica com soma parcial igual a

$$S_n = \left(\frac{3}{2n-1}\right)\bigg|_{n=1} - \frac{3}{2n+1} = 3 - \frac{3}{2n+1}$$

Calculando o limite das somas parciais temos o valor da soma

$$S = \lim_{n\infty} S_n = \lim_{n\infty}\left(3 - \frac{3}{2n+1}\right) = 3 - 3\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 3$$

4 [20] Encontre o interiror do intervalo de convergêcia da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{\sqrt{n^2+3}}$

O módulo do termo geral é

$$u_n = \left| \frac{(-1)^n x^{n+1}}{\sqrt{n^2+3}} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n^2+3}}$$

o módulo do seu sucessor é

$$u_{n+1} = \frac{|x|^{n+2}}{\sqrt{(n+1)^2+3}} = \frac{|x|^{n+2}}{\sqrt{n^2+2n+1+3}} = \frac{|x|^{n+2}}{\sqrt{n^2+2n+4}}$$

USando o teste da razão temos

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|^{n+2}}{\sqrt{n^2+2n+4}} \frac{\sqrt{n^2+3}}{|x|^{n+1}} = |x| \frac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{n^2+2n+4}} = |x| \sqrt{\frac{n^2+3}{n^2+2n+4}}$$

Calculando o ρ

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \\
&= \lim_{n\infty} \left(|x| \sqrt{\frac{n^2+3}{n^2+2n+4}} \right) \\
&= |x| \sqrt{\lim_{n\infty} \frac{n^2+3}{n^2+2n+4}} && \text{Pois a raiz é uma função contínua} \\
&= |x| \sqrt{\lim_{n\infty} \frac{1+{}^3/_{n^2}}{1+2{}^2/_n+{}^4/_{n^2}}} \\
&= |x|\sqrt{1} \\
&= |x|
\end{aligned}$$

A condição de convergência do teste da razão é $\rho < 1$, ou seja

$$\begin{aligned}
\rho &< 1 \\
|x| &< 1 \\
-1 < x &< 1
\end{aligned}$$

O interiror do intervalo de convergência é o intervalo aberto $(-1, 1)$

5 [20] Encontre a série de Taylor, centrada em $a = -1$, da função $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2$

Calculando as derivadas da função

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2 \\
f^{(1)}(x) &= 15x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2x \\
f^{(2)}(x) &= 60x^3 - 12x^2 + 12x + 2 \\
f^{(3)}(x) &= 180x^2 - 24x + 12 \\
f^{(4)}(x) &= 360x - 24 \\
f^{(5)}(x) &= 360 \\
f^{(n)}(x) &= 0 \qquad n > 5
\end{aligned}
$$

Avaliando as derivadas em $a = -1$

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(-1) &= 3(-1)^5 - (-1)^4 + 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2 \\
&= -3 - 1 - 2 + 1 - 2 \\
&= -7 \\
f^{(1)}(-1) &= 15(-1)^4 - 4(-1)^3 + 6(-1)^2 + 2(-1) \\
&= 15 + 4 + 6 - 2 \\
&= 23 \\
f^{(2)}(-1) &= 60(-1)^3 - 12(-1)^2 + 12(-1) + 2 \\
&= -60 - 12 - 12 + 2 \\
&= -82 \\
f^{(3)}(-1) &= 180(-1)^2 - 24(-1) + 12 \\
&= 180 + 24 + 12 \\
&= 216 \\
f^{(4)}(-1) &= 360(-1) - 24 \\
&= -360 - 24 \\
&= -384 \\
f^{(5)}(-1) &= 360 \\
f^{(n)}(-1) &= 0 \qquad n > 5
\end{aligned}
$$

A série de Taylor é

$$
\begin{aligned}
T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{5} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n \qquad \text{Pois as demais derivadas são zero} \\
&= \frac{f^{(0)}(-1)}{0!}(x+1)^0 + \frac{f^{(1)}(-1)}{1!}(x+1)^1 + \frac{f^{(2)}(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f^{(3)}(-1)}{3!}(x+1)^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \frac{f^{(4)}(-1)}{4!}(x+1)^4 + \frac{f^{(1)}(-1)}{5!}(x+1)^5 \\
&= f^{(0)}(-1) + f^{(1)}(-1)(x+1) + \frac{f^{(2)}(-1)}{2}(x+1)^2 + \frac{f^{(3)}(-1)}{6}(x+1)^3 \\
&\quad + \frac{f^{(4)}(-1)}{24}(x+1)^4 + \frac{f^{(1)}(-1)}{120}(x+1)^5 \\
&= -7 + 23(x+1) - \frac{82}{2}(x+1)^2 + \frac{216}{6}(x+1)^3 - \frac{384}{24}(x+1)^4 + \frac{360}{120}(x+1)^5 \\
&= -7 + 23(x+1) - 41(x+1)^2 + 36(x+1)^3 - 16(x+1)^4 + 3(x+1)^5
\end{aligned}
$$