# Integrais e Séries – Prova Substitutiva – Turma 6 21/02/2025

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

O exercício correspondente a prova que vai ser substituída vale 40 pontos.

Tabela de integrais

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+c \qquad \int \operatorname{cossec}^2(x)\,dx = -\cot(x)+c$$

Não é necessário encontrar a representação decimal dos valores calculados, mas é necessário realizar as simplificações elementares.

**1** [20] Encontre o volume do sólido obtido pela rotação do triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(2,-1)$ em torno da reta $x=-1$

Dividimos o sólido em duas partes com $0 \le x \le 1$ e $1 < x \le 2$
Em ambas as partes vamos calcular o volume por cascas cilíndricas

$$V = \int_a^b 2\pi r(x)h(x)\,dx$$

A função afim que liga os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$ é $f(x)=x$
A função afim que liga os pontos $(0,0)$ e $(2,-1)$ é $g(x)=-\frac{x}{2}$
A função afim que liga os pontos $(1,1)$ e $(2,-1)$ é $p(x)=3-2x$
**Primeira parte** $0 \le x \le 1$

$$r(x) = x+1$$
$$h(x) = f(x)-g(x) = x-\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{3}{2}x$$
$$a = 0$$
$$b = 1$$

$$\begin{aligned}
V_1 &= 2\pi \int_a^b r(x)h(x)\,dx \\
&= 2\pi \int_0^1 (x+1)\frac{3x}{2}\,dx \\
&= 3\pi \int_0^1 x^2 + x\,dx
\end{aligned}$$

$$= 3\pi \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1$$
$$= 3\pi \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)$$
$$= \frac{5\pi}{2}$$

**Segunda parte** $1 < x \leq 2$

$$r(x) = x + 1$$
$$h(x) = p(x) - g(x) = (3 - 2x) - \left(-\frac{x}{2}\right) = 3 - 2x + \frac{x}{2} = 3\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$
$$a = 1$$
$$b = 2$$

$$V_2 = 2\pi \int_a^b r(x)h(x)\, dx$$
$$= 2\pi \int_1^2 (x+1)3\left(1 - \frac{x}{2}\right)\, dx$$
$$= 6\pi \int_1^2 x - \frac{x^2}{2} + 1 - \frac{x}{2}\, dx$$
$$= 6\pi \int_1^2 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\, dx$$
$$= 6\pi \left( x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_1^2$$
$$= 6\pi \left[ \left( 2 + \frac{2^2}{4} - \frac{2^3}{6} \right) - \left( 1 + \frac{1^2}{4} - \frac{1^3}{6} \right) \right]$$
$$= 6\pi \left( 2 + 1 - \frac{4}{3} - 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right)$$
$$= 6\pi \, \frac{24 - 16 - 3 + 2}{12}$$
$$= 6\pi \, \frac{7}{12}$$
$$= \frac{7\pi}{2}$$

**Volume total**

$$V = V_1 + V_2 = \frac{5\pi}{2} + \frac{7\pi}{2} = 6\pi$$

**2** [20] Calcule a integral $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3\cos(x)}\,dx$

$$F = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3\cos(x)}\,dx$$

$$u = \cos(x) \qquad\qquad du = -\operatorname{sen}(x)du$$

$$F = \int \frac{-du}{u^2 - 3u} = \int \frac{du}{3u - u^2}$$

Por frações parciais temos

$$\frac{1}{3u - u^2} = \frac{1}{u(3-u)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{3-u}$$

$$1 = a(3-u) + bu = 3a + u(b-a)$$

$$3a = 1 \qquad b - a = 0$$

$$a = \frac{1}{3} \qquad b = a = \frac{1}{3}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
F &= \int \frac{1/3}{u} + \frac{1/3}{3-u} du \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} + \frac{1}{3}\int \frac{du}{3-u} \\
&= \frac{1}{3}\ln|u| - \frac{1}{3}\ln|3-u| + c \\
&= \frac{1}{3}\big(\ln|\cos(x)| - \ln|3-\cos(x)|\big) + c \\
&= \ln \sqrt[3]{\left|\frac{\cos(x)}{3-\cos(x)}\right|} + c
\end{aligned}$$

**3** [20] Analise a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$

Vamos usar o teste da integral com a função $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

A função $f$ é sempre positiva

A função $f$ é contínua para todo $x$ real

Derivando $f$ temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right) \\
&= \frac{(e^x)'\left(1+e^{2x}\right) - e^x\left(1+e^{2x}\right)'}{\left(1+e^{2x}\right)^2} \\
&= \frac{e^x + e^x e^{2x} - e^x e^{2x} 2}{\left(1+e^{2x}\right)^2} \\
&= \frac{e^x + e^{3x} - 2e^{3x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2} \\
&= \frac{e^x - e^{3x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2} \\
&= \frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)^2}\left(1-e^{2x}\right)
\end{aligned}$$

A derivada será negativa sempre que $e^{2x} > 1$, ou seja, sempre que $x > 0$

Calculando a primitiva

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \qquad\qquad u = e^x \qquad du = e^x\,dx \\
&= \int \frac{du}{1+u^2} \\
&= \operatorname{arctg}(u) + c \\
&= \operatorname{arctg}(e^x) + c
\end{aligned}$$

Calculando a integral imprópria

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(e^x)\Big|_1^b\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(e^b\right) - \operatorname{arctg}(e)\right) \qquad\qquad p = e^b \\
&= \lim_{p\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(p) - \operatorname{arctg}(e)\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(e)
\end{aligned}$$

Como a integral converge a série também converge.

**4** [20] Sabendo que $f(1) = 0$ e que, para $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{(-1)^n (n-1)!}{(3-x)^n}$$

a) [04] Construa a Série de Taylor de $f(x)$ centrada em 1

b) [04] Determine o intervalo aberto onde a série converge absolutamente

c) [06] Use o polinômio de Taylor de terceiro grau para aproximar $f(2)$

d) [06] Estime o erro cometido na aproximação

a) Para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$f^{(n)}(1) = \left. \frac{(-1)^n (n-1)!}{(3-x)^n} \right|_1 = \frac{(-1)^n (n-1)!}{(3-1)^n} = \frac{(-1)^n (n-1)!}{2^n}$$

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)!}{2^n} \frac{(x-1)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n} (x-1)^n \end{aligned}$$

b)

$$|a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n2^n} (x-1)^n \right| = \frac{|x-1|^n}{n2^n}$$

$$|a_{n+1}| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} (x-1)^{n+1} \right| = \frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \\ &= \lim \frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \frac{n2^n}{|x-1|^n} \\ &= \lim \frac{|x-1|}{2} \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{|x-1|}{2} \lim \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{|x-1|}{2} \end{aligned}$$

A série converge absolutamente no intervalo definido por $\rho < 1$

$$\begin{aligned} \rho &< 1 \\ \frac{|x-1|}{2} &< 1 \\ |x-1| &< 2 \\ -2 < x-1 &< 2 \\ -1 < x &< 3 \end{aligned}$$

O intervalo é $I = (-1, 3)$

c)

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^n}{n2^n}(x-1)^n \\ &= \frac{(-1)^1}{1 \times 2^1}(x-1)^1 + \frac{(-1)^2}{2 \times 2^2}(x-1)^2 + \frac{(-1)^3}{3 \times 2^3}(x-1)^3 \\ &= -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{24}(x-1)^3 \end{aligned}$$

$$P_3(2) = -\frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{8}(2-1)^2 - \frac{1}{24}(2-1)^3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = -\frac{5}{12}$$

d)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad c \text{ entre } a \text{ e } x$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-1)^4 = \frac{(-1)^4(4-1)!}{(3-c)^4\, 4!}(x-1)^4 = \frac{(x-1)^4}{4(3-c)^4} \qquad c \text{ entre } 1 \text{ e } x$$

$$R_3(2) = \frac{(2-1)^4}{4(3-c)^4} = \frac{1}{4(3-c)^4} \qquad c \text{ entre } 1 \text{ e } 2$$

$$|R_3(2)| = \frac{1}{4|3-c|^4} < \frac{1}{4|3-2|^4} = \frac{1}{4}$$