Séries Numéricas – Teste da Comparação

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Teste da Comparação

Sejam três séries com termos não negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

com $\quad p_n \leq a_n \leq q_n \quad$ para todo $n > N$

1. se $\sum q_n$ convergir então $\sum a_n$ converge
2. se $\sum p_n$ divergir então $\sum a_n$ diverge

Exemplo 1

Para analisar a série do inverso do fatorial

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

comparamos com a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots \qquad r = \frac{1}{2}$$

A série geométrica converge e $\displaystyle \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ para $n > 2$

Então a série do inverso do fatorial converge

Conteúdo

Teste da Comparação no Limite

Sejam as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ com $a_n > 0$ e $b_n > 0$ para todo $n > N$

1. Se $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = c > 0$ então ambas convergem ou ambas divergem
2. Se $\sum b_n$ converge e $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ então $\sum a_n$ também converge
3. Se $\sum b_n$ diverge e $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ então $\sum a_n$ também diverge

Exemplo 2

Verificar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3+4^n}$

A série converge, pois, tomando

$$b_n = \frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2^n}$$

temos

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\dfrac{2^n}{3+4^n}}{\dfrac{1}{2^n}} = \lim \frac{4^n}{3+4^n} = \lim \frac{1}{{}^3\!/_{4^n}+1} = 1$$

Exemplo 2

A série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge

Pois é uma série geométrica com $|r| = \frac{1}{2} < 1$

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3+4^n}$ também converge

Conteúdo

Exemplo 3

Use o teste da comparação para mostrar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^4+2}$$

converge

Exemplo 3

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{n-1}{n^4+2} \\
&= \frac{n}{n^4+2} - \frac{1}{n^4+2} \\
&\leq \frac{n}{n^4+2} \\
&= \frac{1}{n^3 + {}^{2}/_{n}} \\
&\leq \frac{1}{n^3}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é uma série p com $p = 3 > 1$, portanto convergente

Pelo teste de comparação a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^4+2}$ também converge

Exemplo 4

Use o teste da comparação para verificar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n - 1}$

A série diverge, pois

$$a_n = \frac{3^n}{2^n - 1} \geq \frac{3^3}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

e a série geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ diverge, pois $\quad |r| = \dfrac{3}{2} > 1$

Exemplo 5

Utilize o teste da comparação para determinar se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^{3/2}}$$

converge ou diverge

Exemplo 5

Sabemos que $|\cos x| \leq 1$, portanto

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

como $n^{3/2}$ é sempre positivo para $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{\cos^2}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

Exemplo 5

Analisando a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

percebemos que é uma série p com $p = \dfrac{3}{2} > 1$ e portanto convergente

Assim a série original é convergente

Exemplo 6

Verifique a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$

Comparamos no limite com a Série Harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)n}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{2n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{2} = 2$$

Como a soma de b_n diverge então a de a_n também diverge

Exemplo 7

Utilize o teste da comparação no limite para determinar se a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

converge ou diverge

Observe que $n = 1$ não pode fazer parte da série pois $\ln 1 = 0$

Exemplo 7

A série harmônica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente

Os termos da série original e da série harmônica são sempre positivos para $n \geq 2$.

Exemplo 7

Aplicando o teste da comparação no limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1/x}$$ Usando l'Hopital

$$= \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

Concluímos que a série diverge

Exemplo 8

A série

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n^3 - 3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}$$

converge ou diverge?

Exemplo 8

Para n suficientemente grande a_n se comporta como

$$b_n = \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}$$

A série b_n é uma série p com $p = 2 > 1$ e portanto convergente

Além disso, a_n e b_n são maiores do que zero para todo n suficientemente grande

Exemplo 8

Pelo teste da comparação no limite

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{5n^3 - 3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}}{\dfrac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 - 3n}{(n-2)(n^2+5)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 - 3n}{n^3 - 2n^2 + 5n - 10}$$

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{5n^3}{n^3} - \dfrac{3n}{n^3}}{\dfrac{n^3}{n^3} - \dfrac{2n^2}{n^3} + \dfrac{5n}{n^3} - \dfrac{10}{n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5 - \dfrac{3}{n^2}}{1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{5}{n^2} - \dfrac{10}{n^3}}$$

$$= 5$$

Portanto a série original converge

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar as Seção 6.5 da Apostila

Exercícios: 4, 7

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações