

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

O exercício correspondente a prova que vai ser substituída vale 40 pontos.

Tabela de integrais

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad \int \operatorname{cosec}^2(x) dx = -\cot(x) + c$$

Não é necessário encontrar a representação decimal dos valores calculados, mas é necessário realizar as simplificações elementares.

- 1 [20] Encontre o volume do sólido obtido pela rotação do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, -1)$ em torno da reta $x = -1$

Dividimos o sólido em duas partes com $0 \leq x \leq 1$ e $1 < x \leq 2$

Em ambas as partes vamos calcular o volume por cascas cilíndricas

$$V = \int_a^b 2\pi r(x)h(x) dx$$

A função afim que liga os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$ é $f(x) = x$

A função afim que liga os pontos $(0, 0)$ e $(2, -1)$ é $g(x) = -\frac{x}{2}$

A função afim que liga os pontos $(1, 1)$ e $(2, -1)$ é $p(x) = 3 - 2x$

Primeira parte $0 \leq x \leq 1$

$$r(x) = x + 1$$

$$h(x) = f(x) - g(x) = x - \left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{3}{2}x$$

$$a = 0$$

$$b = 1$$

$$\begin{aligned} V_1 &= 2\pi \int_a^b r(x)h(x) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (x+1)\frac{3x}{2} dx \\ &= 3\pi \int_0^1 x^2 + x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3\pi \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\
&= 3\pi \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{5\pi}{2}
\end{aligned}$$

Segunda parte $1 < x \leq 2$

$$r(x) = x + 1$$

$$h(x) = p(x) - g(x) = (3 - 2x) - \left(-\frac{x}{2}\right) = 3 - 2x + \frac{x}{2} = 3 \left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

$$a = 1$$

$$b = 2$$

$$\begin{aligned}
V_2 &= 2\pi \int_a^b r(x)h(x) \, dx \\
&= 2\pi \int_1^2 (x+1)3 \left(1 - \frac{x}{2}\right) \, dx \\
&= 6\pi \int_1^2 x - \frac{x^2}{2} + 1 - \frac{x}{2} \, dx \\
&= 6\pi \int_1^2 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \, dx \\
&= 6\pi \left(x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_1^2 \\
&= 6\pi \left[\left(2 + \frac{2^2}{4} - \frac{2^3}{6} \right) - \left(1 + \frac{1^2}{4} - \frac{1^3}{6} \right) \right] \\
&= 6\pi \left(2 + 1 - \frac{4}{3} - 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) \\
&= 6\pi \frac{24 - 16 - 3 + 2}{12} \\
&= 6\pi \frac{7}{12} \\
&= \frac{7\pi}{2}
\end{aligned}$$

Volume total

$$V = V_1 + V_2 = \frac{5\pi}{2} + \frac{7\pi}{2} = 6\pi$$

2 [20] Calcule a integral $\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3 \cos(x)} dx$

$$F = \int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3 \cos(x)} dx$$

$$u = \cos(x) \quad du = -\text{sen}(x) du$$

$$F = \int \frac{-du}{u^2 - 3u} = \int \frac{du}{3u - u^2}$$

Por frações parciais temos

$$\frac{1}{3u - u^2} = \frac{1}{u(3 - u)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{3 - u}$$

$$1 = a(3 - u) + bu = 3a + u(b - a)$$

$$3a = 1 \quad b - a = 0$$

$$a = \frac{1}{3} \quad b = a = \frac{1}{3}$$

Portanto

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{1/3}{u} + \frac{1/3}{3 - u} du \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} + \frac{1}{3} \int \frac{du}{3 - u} \\ &= \frac{1}{3} \ln|u| - \frac{1}{3} \ln|3 - u| + c \\ &= \frac{1}{3} (\ln|\cos(x)| - \ln|3 - \cos(x)|) + c \\ &= \ln \sqrt[3]{\left| \frac{\cos(x)}{3 - \cos(x)} \right|} + c \end{aligned}$$

3 [20] Analise a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$

Vamos usar o teste da integral com a função $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

A função f é sempre positiva

A função f é contínua para todo x real

Derivando f temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x}{1+e^{2x}} \right) \\ &= \frac{(e^x)'(1+e^{2x}) - e^x(1+e^{2x})'}{(1+e^{2x})^2} \\ &= \frac{e^x + e^x e^{2x} - e^x e^{2x} 2}{(1+e^{2x})^2} \\ &= \frac{e^x + e^{3x} - 2e^{3x}}{(1+e^{2x})^2} \\ &= \frac{e^x - e^{3x}}{(1+e^{2x})^2} \\ &= \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2} (1 - e^{2x}) \end{aligned}$$

A derivada será negativa sempre que $e^{2x} > 1$, ou seja, sempre que $x > 0$

Calculando a primitiva

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx & u = e^x & \quad du = e^x dx \\ &= \int \frac{du}{1+u^2} \\ &= \operatorname{arctg}(u) + c \\ &= \operatorname{arctg}(e^x) + c \end{aligned}$$

Calculando a integral imprópria

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg}(e^x) \Big|_1^b \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg}(e^b) - \operatorname{arctg}(e) \right) & p = e^b \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg}(p) - \operatorname{arctg}(e)) \\ &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(e) \end{aligned}$$

Como a integral converge a série também converge.

4 [20] Sabendo que $f(1) = 0$ e que, para $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{(-1)^n (n-1)!}{(3-x)^n}$$

- a) [04] Construa a Série de Taylor de $f(x)$ centrada em 1
- b) [04] Determine o intervalo aberto onde a série converge absolutamente
- c) [06] Use o polinômio de Taylor de terceiro grau para aproximar $f(2)$
- d) [06] Estime o erro cometido na aproximação

a) Para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$f^{(n)}(1) = \left. \frac{(-1)^n (n-1)!}{(3-x)^n} \right|_1 = \frac{(-1)^n (n-1)!}{(3-1)^n} = \frac{(-1)^n (n-1)!}{2^n}$$

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)!}{2^n} \frac{(x-1)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} (x-1)^n \end{aligned}$$

b)

$$|a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n2^n} (x-1)^n \right| = \frac{|x-1|^n}{n2^n}$$

$$|a_{n+1}| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} (x-1)^{n+1} \right| = \frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \\ &= \lim \frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \frac{n2^n}{|x-1|^n} \\ &= \lim \frac{|x-1|}{2} \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{|x-1|}{2} \lim \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{|x-1|}{2} \end{aligned}$$

A série converge absolutamente no intervalo definido por $\rho < 1$

$$\begin{aligned}\rho &< 1 \\ \frac{|x-1|}{2} &< 1 \\ |x-1| &< 2 \\ -2 &< x-1 < 2 \\ -1 &< x < 3\end{aligned}$$

O intervalo é $I = (-1, 3)$

c)

$$\begin{aligned}P_3(x) &= \sum_{n=1}^3 \frac{(-1)^n}{n2^n} (x-1)^n \\ &= \frac{(-1)^1}{1 \times 2^1} (x-1)^1 + \frac{(-1)^2}{2 \times 2^2} (x-1)^2 + \frac{(-1)^3}{3 \times 2^3} (x-1)^3 \\ &= -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{24}(x-1)^3 \\ P_3(2) &= -\frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{8}(2-1)^2 - \frac{1}{24}(2-1)^3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = -\frac{5}{12}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad c \text{ entre } a \text{ e } x \\ R_3(x) &= \frac{f^{(4)}(c)}{4!} (x-1)^4 = \frac{(-1)^4(4-1)!}{(3-c)^4 4!} (x-1)^4 = \frac{(x-1)^4}{4(3-c)^4} \quad c \text{ entre } 1 \text{ e } x \\ R_3(2) &= \frac{(2-1)^4}{4(3-c)^4} = \frac{1}{4(3-c)^4} \quad c \text{ entre } 1 \text{ e } 2 \\ |R_3(2)| &= \frac{1}{4|3-c|^4} < \frac{1}{4|3-2|^4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$