

Integração por Substituição Trigonométrica

1 – Substituição pelo seno

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Integração por Substituição Trigonométrica

Exemplo 1

Exemplo 2

Lista Mínima

Substituição Simples

Calculando

$$F = \int x \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

substituição $u = a^2 - x^2$ $du = -2x dx$ $x dx = -\frac{du}{2}$

$$F = -\frac{1}{2} \int \sqrt{u} du$$

Substituição Simples – Problema

Calculando

$$F = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

substituição $u = a^2 - x^2$ $du = -2x dx$ $dx = -\frac{du}{2x}$

$$F = -\frac{1}{2} \int \sqrt{u} \frac{du}{\textcolor{red}{x}} = \textcolor{red}{?}$$

Segunda Tentativa

Calculando

$$F = \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$$

substituição $x = a \operatorname{sen}(\theta)$ $dx = a \cos(\theta) d\theta$

$$F = \int \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen}(\theta))^2} \, a \cos(\theta) d\theta$$

Segunda Tentativa

$$F = \int \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen}(\theta))^2} a \cos(\theta) d\theta$$

$$= \int \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2(\theta))} a \cos(\theta) d\theta$$

$$= \int a^2 \sqrt{\cos^2(\theta)} \cos(\theta) d\theta$$

$$a > 0$$

$$= \int a^2 \cos^2(\theta) d\theta$$

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= a^2 \int \cos^2(\theta) d\theta$$

Segunda Tentativa

$$F = a^2 \int \cos^2(\theta) d\theta$$

$$F = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos(2\theta)) d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} (\theta + \sin(\theta) \cos(\theta)) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right] + C$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\alpha))$$

Justificativa em breve

Transformação Inversa

Substituição simples – a nova variável é função da original

$$u = f(x)$$

Substituição inversa – a variável original é função da nova

$$x = g(u)$$

É necessário inverter g

Substituições Trigonômétricas

Expressão	Substituição	Intervalo	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen}(\theta)$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2(\theta) = \cos^2(\theta)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \operatorname{tg}(\theta)$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2(\theta) = \sec^2(\theta)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec(\theta)$	$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2(\theta) - 1 = \operatorname{tg}^2(\theta)$

Conteúdo

Integração por Substituição Trigonométrica

Exemplo 1

Exemplo 2

Lista Mínima

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx$

Note $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{3^2-x^2}$

Substituição inversa

$$x = 3 \sin(\theta) \qquad dx = 3 \cos(\theta) d\theta \qquad \text{com} \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx & x &= 3 \operatorname{sen}(\theta) \\ &= \int \frac{\sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2(\theta)}}{9 \operatorname{sen}^2(\theta)} 3 \cos(\theta) d\theta \\ &= \int \frac{3 \times 3}{9} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)}}{\operatorname{sen}^2(\theta)} \cos(\theta) d\theta \\ &= \int \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)}}{\operatorname{sen}^2(\theta)} \cos(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Exemplo 1

$$F = \int \frac{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}}{\sin^2(\theta)} \cos(\theta) d\theta$$

$$1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$$

$$= \int \frac{\sqrt{\cos^2(\theta)}}{\sin^2(\theta)} \cos(\theta) d\theta$$

$$= \int \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} d\theta$$

$$= \int \cot^2(\theta) d\theta$$

Exemplo 1

$$F = \int \cot^2(\theta) d\theta \qquad \cot^2(\theta) = \operatorname{cosec}^2(\theta) - 1$$

$$= \int \operatorname{cosec}^2(\theta) - 1 d\theta \qquad (\cot(\theta))' = -\operatorname{cosec}^2(\theta)$$

$$= -\cot(\theta) - \theta + C$$

Precisamos voltar para a variável original $x = 3 \operatorname{sen}(\theta)$

$$\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$F = -\cot\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right) + C \qquad \text{Forma ruim}$$

Exemplo 1

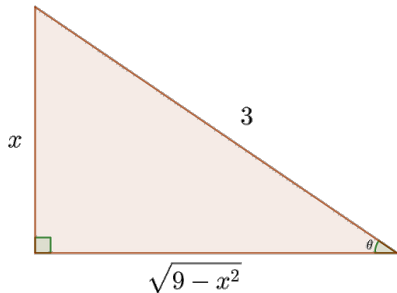
$$x = 3 \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta) = \frac{x}{3} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Por Pitágoras, o cateto adjacente é $\sqrt{9 - x^2}$

Portanto

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\operatorname{cot}(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$$



Exemplo 1

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx = -\cot(\theta) - \theta + C$$

$$= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Conteúdo

Integração por Substituição Trigonométrica

Exemplo 1

Exemplo 2

Lista Mínima

Exemplo 2

Calcule $\int x \arcsen(x) dx$

Vários métodos serão necessários

Exemplo 2 – Integral por Partes

$$F = \int x \arcsen(x) dx$$

Integral por partes

$$u = \arcsen(x)$$

$$dv = x dx$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$v = \frac{x^2}{2}$$

$$F = uv - \int v du = \frac{x^2}{2} \arcsen(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Exemplo 2 – Substituição Trigonométrica

Resolver $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Substituição inversa

$$x = \text{sen}(\theta) \quad dx = \cos(\theta) d\theta \quad \text{com} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$G = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\text{sen}^2(\theta)}{\sqrt{1-\text{sen}^2(\theta)}} \cos(\theta) d\theta$$

Exemplo 2 – Substituição Trigonométrica

$$\begin{aligned} G &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}} \cos(\theta) d\theta \\ &= \int \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\sqrt{\cos^2(\theta)}} \cos(\theta) d\theta \\ &= \int \operatorname{sen}^2(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Integral Trigonométrica

Calcular $G = \int \sin^2(\theta) d\theta$

Manipulação algébrica

$$\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$$

Exemplo 2 – Integral Trigonométrica

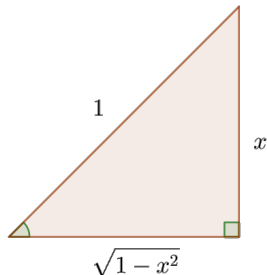
$$\begin{aligned} G &= \int \sin^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} (\theta - \sin(\theta) \cos(\theta)) + C \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Desfazendo a Transformação Trigonométrica

$$x = \text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \quad \theta = \arcsen(x)$$

$$\cos(\theta) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\begin{aligned} G &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} (\theta - \text{sen}(\theta) \cos(\theta)) \\ &= \frac{1}{2} (\arcsen(x) - x\sqrt{1 - x^2}) + C \end{aligned}$$



Exemplo 2 – Retornando a Integral Original

$$\begin{aligned} F &= \int x \arcsen(x) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsen(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsen(x) - \frac{1}{4} \left(\arcsen(x) - x\sqrt{1-x^2} \right) + C \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \arcsen(x) + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

Conteúdo

Integração por Substituição Trigonométrica

Exemplo 1

Exemplo 2

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 4.4 da Apostila

Exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações