

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [30] Calcule a Série de Taylor da função $f(x) = \int \sinh(x^2) dx$

Lembrete: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Sabemos que a Série de Taylor da função exponencial é

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Primeiro calculamos a Série de Taylor das funções

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

agora da função

$$\begin{aligned} \sinh(x^2) &= \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [x^{2n} - (-1)^n x^{2n}] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n!} x^{2n} \end{aligned}$$

Observando que $1 - (-1)^n = 1 + (-1)^{n+1}$ vale 2 para n ímpar e zero para n par, podemos remover todos os índices pares e fazer a mudança de índice $n = 2k + 1$, obtendo

$$\sinh(x^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)!} x^{2(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(2k+1)!}$$

Agora integramos

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \sinh(x^2) dx \\ &= \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(2k+1)!} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \int x^{4k+2} dx \\ &= C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{x^{4k+3}}{4k+3} \\ &= C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)(2k+1)!} \end{aligned}$$

2 [40] Seja $f(x) = \frac{2}{1+x}$

a) [12] Encontre um padrão para $f^{(n)}(x)$

b) [14] Usando o padrão do item anterior, encontre a Serie de Taylor de $f(x)$, centrada em zero

c) [14] Obtenha o intervalo de convergência da série de potências

a) Calculando as primeiras derivadas

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \frac{2}{1+x} = 2(1+x)^{-1} \\ f^{(1)}(x) &= \frac{d}{dx} [2(1+x)^{-1}] = 2(-1)(1+x)^{-1-1}(1+x)' = -2(1+x)^{-2} \\ f^{(2)}(x) &= \frac{d^2}{dx^2} [2(1+x)^{-1}] = 2 \cdot 2(1+x)^{-3} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{d^3}{dx^3} [2(1+x)^{-1}] = -2 \cdot 2 \cdot 3(1+x)^{-4} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{d^4}{dx^4} [2(1+x)^{-1}] = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(1+x)^{-5} \\ f^{(5)}(x) &= \frac{d^5}{dx^5} [2(1+x)^{-1}] = -2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5(1+x)^{-6} \end{aligned}$$

Por inspeção, vemos que

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} [2(1+x)^{-1}] = 2(-1)^n n! (1+x)^{-n-1} = \frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

b) Os coeficientes da série de Taylor são

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{2(-1)^n n!}{(1-0)^{n+1} n!} = 2(-1)^n$$

Montando a série temos

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n$$

c) Reescrevendo a série temos

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-x)^n$$

que é uma série geométrica com $\alpha = 2$ e $r = -x$, portanto, convergente apenas quando $|r| < 1$ ou seja $x \in (-1, 1)$.

3 [30] Prove que a série de Maclaurin da função cosseno converge para $\cos x$, em todo $x \in \mathbb{R}$

Pelo **Teorema de Taylor**, sabemos que o erro cometido ao aproximarmos $\cos(x)$ pelo seu polinômio de Taylor centrado em zero de grau n é

$$R_n(x) = \frac{\cos^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

para algum ξ entre zero e x . Como todas as derivadas do cosseno são cossenos ou senos alternando os sinais, podemos escrever

$$\left| \cos^{(k)}(t) \right| \leq 1$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$. Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$|R_n(x)| = \frac{|\cos^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x^{n+1}| \leq \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

Calculando o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} = |x^{n+1}| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} = |x^{n+1}| \cdot 0 = 0$$

podemos usar o **Teorema do Confronto** para mostrar que $R_n(x)$ vai para zero, quando n vai para o infinito. Portanto, a série converge para a função.