CFVVI – Prova 3 – Turma 6 09/09/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [50] Encontre o ponto do plano $x + 2y + 3z = 13$ mais próximo do ponto $(1, 1, 1)$.

Queremos minimizar a distância

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$$

Como a função raiz quadrada é crescente podemos minimizar a função

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

suas derivadas parciais são

$$f_x(x, y, z) = 2(x-1) \qquad f_y(x, y, z) = 2(y-1) \qquad f_z(x, y, z) = 2(z-1)$$

As derivadas parciais da função $g(x, y, z) = x + 2y + 3z$ são

$$g_x(x, y, z) = 1 \qquad g_y(x, y, z) = 2 \qquad g_z(x, y, z) = 3$$

Aplicando os Multiplicadores de Lagrange, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2(x-1) = \lambda \\ 2(y-1) = 2\lambda \\ 2(z-1) = 3\lambda \\ x + 2y + 3z = 13 \end{cases}$$

Das três primeiras equações obtemos

$$2(x-1) = \lambda \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\lambda}{2} + 1$$

$$2(y-1) = 2\lambda \quad \Rightarrow \quad y = \lambda + 1$$

$$2(z-1) = 3\lambda \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3\lambda}{2} + 1$$

Substituindo na última equação

$$x + 2y + 3z = 13$$

$$\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right) + 2(\lambda + 1) + 3\left(\frac{3\lambda}{2} + 1\right) = 13$$

$$\frac{\lambda}{2} + 1 + 2\lambda + 2 + \frac{9\lambda}{2} + 3 = 13$$

$$\lambda + 2 + 4\lambda + 4 + 9\lambda + 6 = 13 \times 2$$

$$14\lambda + 12 = 26$$

$$14\lambda = 14$$

$$\lambda = 1$$

Portanto

$$x = \frac{\lambda}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$y = \lambda + 1 = 2$$

$$z = \frac{3\lambda}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

O ponto mais próximo é o ponto $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$

2 [25] Encontre as raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 10x$

Queremos resolver a equação

$$x^3 - 6x^2 + 10x = 0$$

que podemos escrever como

$$x\left(x^2 - 6x + 10\right) = 0$$

Uma das raízes é $x = 0$, usamos Bhaskara para encontrar as demais

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 36 - 40 = -4$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i$$

Temos então

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm 2i}{2} = 3 \pm i$$

Portanto as raízes de p são

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 3 - i \qquad x_3 = 3 + i$$

3 [25] Encontre as raízes cúbicas complexas do número $z = -27$.

Escrevemos $z = -27$ na forma trigonométrica

$$z = 27\left[\cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}\,(\pi)\right]$$

As raízes cúbicas são

$$\begin{aligned} u_k &= \sqrt[3]{27}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right] \qquad k = 0, 1, 2 \\ &= 3\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right] \end{aligned}$$

Para cada valor de k

$$\begin{aligned} u_0 &= 3\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\times 0\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 2\times 0\pi}{3}\right)\right] \\ &= 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 3\left[\cos(60^\circ) + i\,\mathrm{sen}\,(60^\circ)\right] \\ &= 3\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\ &= \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 3\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\times 1\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 2\times 1\pi}{3}\right)\right] \\ &= 3\left[\cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}\,(\pi)\right] \\ &= 3\left[-1 + i0\right] \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= 3\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\times 2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 2\times 2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 3\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] \\ &= 3\left[\cos(300^\circ) + i\,\mathrm{sen}\,(300^\circ)\right] \\ &= 3\left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\ &= \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$