Vetor Tangente

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Curva Paramétrica

x e y são dados como funções

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad t \in I$$

Vetorialmente escrevemos

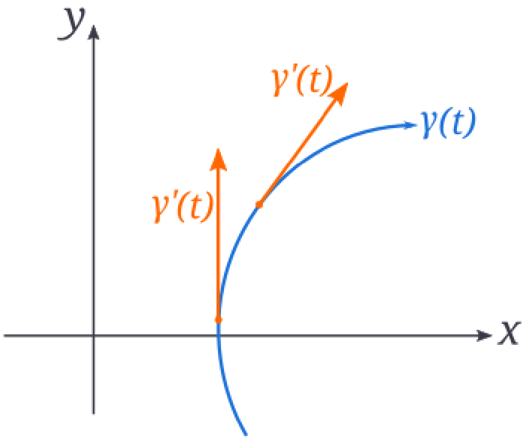
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

Vetor Tangente

Se f e g forem deriváveis em t, o vetor tangente é

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \dfrac{df}{dt} \\ \dfrac{dg}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{bmatrix}$$

Vetor Tangente



Conteúdo

Exemplo 1

Calcule o vetor tangente a curva

$$x = t\cos(t) \qquad y = t\,\mathrm{sen}(t) \qquad 0 \leq t < \infty$$

quando $t = \dfrac{\pi}{2}$

Exemplo 1 – Solução

Derivada da coordenada x

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} t\cos(t) \\ &= 1 \times \cos(t) + t(-\operatorname{sen}(t)) \\ &= \cos(t) - t\operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

Derivada da coordenada y

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} t\operatorname{sen}(t) \\ &= 1 \times \operatorname{sen}(t) + t\cos(t) \\ &= \operatorname{sen}(t) + t\cos(t) \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

Avaliando as funções derivada em $t = \dfrac{\pi}{2}$

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\cos(t) - t\,\mathrm{sen}(t))\bigg|_{\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \frac{\pi}{2} \times 1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\mathrm{sen}(t) + t\cos(t))\bigg|_{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi}{2} \times 0 = 1$$

O vetor tangente é $\begin{bmatrix} -\,{}^{\pi}\!/_{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

Exemplo 2

Calcule o vetor tangente a curva

$$x = \sec(t) \qquad y = \operatorname{tg}(t) \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

no ponto $t = \dfrac{\pi}{4}$

Exemplo 2 – Solução

Derivada da coordenada x

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{dx}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\sec(t) \\
&= \operatorname{tg}(t)\sec(t)
\end{aligned}
$$

Derivada da coordenada y

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= \frac{dy}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\operatorname{tg}(t) \\
&= \sec^2(t)
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Solução

Avaliando as derivadas em $t = \dfrac{\pi}{4}$

$$x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

O vetor tangente é $\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$

Exemplo 3

Exemplo 3 Calcule o vetor tangente a curva

$$\begin{cases} x &= e^{2t}\cos(\pi t) \\ y &= e^{t}\,\mathrm{sen}(\pi t) \end{cases}$$

em $t = \dfrac{3}{4}$

Exemplo 3 – Solução

Derivada da coordenada x

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{dx}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left(e^{2t}\cos(\pi t)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(e^{2t}\right)\cos(\pi t) + e^{2t}\frac{d}{dt}\left(\cos(\pi t)\right) \\
&= e^{2t}\frac{d}{dt}\left(2t\right)\cos(\pi t) - e^{2t}\operatorname{sen}(\pi t)\frac{d}{dt}\left(\pi t\right) \\
&= 2e^{2t}\cos(\pi t) - \pi e^{2t}\operatorname{sen}(\pi t)
\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

Derivada da coordenada y

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= \frac{dy}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left(e^t \operatorname{sen}(\pi t)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(e^t\right) \operatorname{sen}(\pi t) + e^t \frac{d}{dt}\left(\operatorname{sen}(\pi t)\right) \\
&= e^t \operatorname{sen}(\pi t) + e^t \cos(\pi t) \frac{d}{dt}\left(\pi t\right) \\
&= e^t \operatorname{sen}(\pi t) + \pi e^t \cos(\pi t)
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

Avaliando a derivada de $x(t)$ em $t = {}^3/_4$

$$
\begin{aligned}
x'\left(\frac{3}{4}\right) &= \left(2e^{2t}\cos(\pi t) - \pi e^{2t}\,\mathrm{sen}(\pi t)\right)\Big|_{t={}^3/_4} \\
&= 2e^{2\frac{3}{4}}\cos\left(\pi\frac{3}{4}\right) - \pi e^{2\frac{3}{4}}\,\mathrm{sen}\left(\pi\frac{3}{4}\right) \\
&= 2e^{{}^3/_2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \pi e^{{}^3/_2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\
&= 2e^{{}^3/_2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) - \pi e^{{}^3/_2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= -\sqrt{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)e^{{}^3/_2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

Avaliando a derivada de $y(t)$ em $t = {}^3\!/_4$

$$
\begin{aligned}
y'\left(\frac{3}{4}\right) &= \left(e^t \operatorname{sen}(\pi t) + \pi e^t \cos(\pi t)\right)\Big|_{t={}^3\!/_4} \\
&= e^{3/4} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \pi e^{3/4} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\
&= e^{3/4} \frac{\sqrt{2}}{2} - \pi e^{3/4} \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \sqrt{2}\,\frac{1-\pi}{2} e^{3/4}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

O vetor tangente no ponto $t = {}^3\!/_4$ é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right) e^{3/2} \\ \\ \sqrt{2}\,\dfrac{1-\pi}{2} e^{3/4} \end{pmatrix}$$

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 11.2

1. Estudar todo o texto da seção
2. Calcule o vetor tangente das funções dos exercícios: 2, 8, 12, 16, 18, 20 (Ignore o enunciado original dos exercícios)

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações