Integrais e Séries – Prova Substitutiva – Turma 4 14/12/2023

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

Substitui a prova ________

Os exercícios 1 e 2 valem 30 para quem perdeu a prova 1 ou 2
O exercício 3 vale 40 para quem perdeu a prova 3
O exercício 4 vale 40 para quem perdeu a prova 4

1 [20] Calcule a integral $\displaystyle\int_0^3 x^2 \ln(x)dx$. *Atenção ao intervalo de integração.*

Calculando a primitiva $F(x) = \displaystyle\int x^2 \ln(x)dx$, por integral por partes

$$u = \ln(x) \qquad dv = x^2 dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int x^2 \ln(x)dx \\
&= \ln(x)\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} \\
&= \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx \\
&= \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C \\
&= \frac{x^3}{3^2}\big(3\ln(x) - 1\big) + C
\end{aligned}$$

Para calcular a integral definida precisamos observar que temos uma assintota vertical em $x = 0$, portanto, essa é uma integral imprópria

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^3 x^2 \ln(x)dx \\
&= \lim_{t\to 0}\int_t^3 x^2 \ln(x)dx
\end{aligned}$$

$$= \lim_{t \to 0} \left[\frac{x^3}{3^2} \big(3 \ln(x) - 1\big) \Big|_t^3 \right]$$

$$= \lim_{t \to 0} \left[\frac{3^3}{3^2} \big(3 \ln(3) - 1\big) - \frac{t^3}{3^2} \big(3 \ln(t) - 1\big) \right]$$

$$= 3\big(3 \ln(3) - 1\big) - \frac{1}{3^2} \lim_{t \to 0} \left[t^3 \big(3 \ln(t) - 1\big) \right]$$

Precisamos calcular o limite

$$L = \lim_{t \to 0} t^3 \big(3 \ln(t) - 1\big)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{3 \ln(t) - 1}{t^{-3}} \qquad \text{usando l'Hopital}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{3t^{-1}}{-3t^{-4}}$$

$$= \lim_{t \to 0} -t^3 = 0$$

Portando

$$I = \int_0^3 x^2 \ln(x) dx = 3\big(3 \ln(3) - 1\big) = 9 \ln(3) - 3$$

2 [20] Calcule o volume do sólido construído pela rotação, em torno do eixo x, da região contida entre as curvas $y = x$ e $y = x^2$

Integrando por seções transversais em x temos

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

Calculando os pontos de intersecção das curvas

$$\begin{aligned} x &= x^2 \\ x^2 - x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

temos $x = 0$ ou $x = 1$, então $a = 0$, $b = 1$. A área da seção transversal é

$$A(x) = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi \left(x^2 - x^4\right)$$

Assim

$$V = \int_0^1 \pi \left(x^2 - x^4\right) dx$$

$$= \pi \int_0^1 x^2 - x^4 dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 \\
&= \pi \left[\left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5} \right) - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^5}{5} \right) \right] \\
&= \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15}
\end{aligned}
$$

3 [20] Analise a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

Usando o teste da integral com a **função real** $f(x) = xe^{-x^2}$ que é:

1. **contínua** para todo x real
2. **positiva** para $x > 0$
3. para verificar se é **decrescente** vamos calcular sua derivada

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx} x e^{-x^2} \\
&= e^{-x^2} + x \frac{d}{dx} e^{-x^2} \\
&= e^{-x^2} + x e^{-x^2} \frac{d}{dx} \left(-x^2 \right) \\
&= e^{-x^2} + x e^{-x^2} (-2x) \\
&= e^{-x^2} \left(1 - 2x^2 \right)
\end{aligned}
$$

A função será decrescente para

$$
\begin{aligned}
1 - 2x^2 &< 0 \\
x^2 &> \frac{1}{2} \\
x &> \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7
\end{aligned}
$$

Temos então que a série converge, se e somente, se a integral

$$
\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx
$$

converge. Calculando a primitiva por substituição simples

$$
u = -x^2 \qquad du = -2x dx \qquad dx = \frac{du}{-2x}
$$

temos

$$
F(x) = \int x e^{-x^2} dx
$$

$$= \int xe^u \frac{du}{-2x}$$

$$= \frac{-1}{2} \int e^u du$$

$$= \frac{-e^u}{2} + C$$

$$= \frac{-e^{-x^2}}{2} + C$$

Calculando a integral imprópria

$$I = \int_1^\infty xe^{-x^2} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^b xe^{-x^2} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-e^{-x^2}}{2} \right) \Bigg|_1^b$$

$$= \frac{-1}{2} \lim_{b\to\infty} \left(e^{-x^2} \right) \Big|_1^b$$

$$= \frac{-1}{2} \lim_{b\to\infty} \left(e^{-b^2} - e^{-1^2} \right)$$

$$= \frac{-1}{2} \left(\lim_{b\to\infty} \left(e^{-b^2} \right) - e^{-1} \right)$$

$$= \frac{1}{2e} \in \mathbb{R}$$

Como a integral converge a série também converge.

4 [20] Sabendo que $f^{(n)}(x) = 2^x \ln(2)^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) Construa a Série de Taylor de f centrada em zero

b) Mostre que a Série de Taylor de f converge para f em $[0, 10]$

a) A Série de Taylor para essa função é

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \ln(2)^n}{n!} x^n$$

b) Para provarmos que a Série de Taylor converge para a função devemos mostrar que $R_n(x) \to 0$.
Pelo Teorema de Taylor temos

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

com ξ entre zero e x, em nosso caso

$$R_n(x) = \frac{2^\xi \ln(2)^n}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\ln(2)^n}{(n+1)!}\, 2^\xi\, x^{n+1}$$

Portanto

$$|R_n(x)| = \frac{\ln(2)^n}{(n+1)!}\, 2^\xi\, |x|^{n+1}$$

Como $0 \le \xi \le x \le 10$ temos

$$2^\xi \le 2^{10} \qquad \text{e} \qquad |x|^{n+1} = x^{n+1} \le 10^{n+1}$$

Assim

$$|R_n(x)| \le \frac{\ln(2)^n}{(n+1)!}\, 2^{10}\, 10^{n+1} = 10 \cdot 2^{10}\, \frac{\ln(2)^n\, 10^n}{(n+1)!} = 10 \cdot 2^{10}\, \frac{\big(10 \ln(2)\big)^n}{(n+1)!}$$

como

$$\lim_{n\to\infty} 10 \cdot 2^{10}\, \frac{\big(10 \ln(2)\big)^n}{(n+1)!} = 0$$

o Teorema do Confronto garante que $R_n(x) \to 0$ e portanto a Série de Taylor converge para a função.