Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

Se f for contínua em $[a, b]$, então a função F definida por

$$F(\boldsymbol{x}) = \int_a^{\boldsymbol{x}} f(t)\,dt \qquad\qquad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

Em outras palavras

Se

$$F(\boldsymbol{x}) = \int_a^{\boldsymbol{x}} f(t)\,dt$$

então

$$\frac{d}{d\boldsymbol{x}}\left[\int_a^{\boldsymbol{x}} f(t)\,dt\right] = f(\boldsymbol{x})$$

Conteúdo

Demonstração

Queremos mostrar que, se

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

então

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

Demonstração

Sejam x e $x+h$ em (a,b)

$$\begin{aligned} F(x+h)-F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

Demonstração

Dividindo por $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

No limite $h \to 0$

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

Falta mostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt \stackrel{?}{=} f(x)$$

Demonstração

Pelo Teorema Valor Médio, existe $c \in [x, x+h]$ tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c)h$$

portanto

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c)$$

Quando $h \to 0$, necessariamente $c \to x$, assim

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x)$$

Conteúdo

Exemplo 1

Calcule a derivada da função $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$

Exemplo 1

Sendo

$$f(t) = \sqrt{1 + t^2}$$

contínua em todo o conjunto dos números reais

Pela parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 2.5 da Apostila

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações