IS – Prova 3 – Turma 8 10/09/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [25] Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n-2}{n^3-n^2+3}$ covnerge ou diverge. Explicite o teste usado.

Vamos usar o teste da comparação no limite, comparando com a série

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$$

que é uma série convergente pois é uma série p com $p = 2 > 1$.

Calculando o limite

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n^3-n^2+3}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)n^2}{n^3-n^2+3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-2n^2}{n^3-n^2+3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-{}^2/_n}{1-{}^1/_n+{}^3/_{n^3}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Como o $L = 1 > 0$ a série $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n-2}{n^3-n^2+3}$ converge.

2 [25] Determine o interior do intervalo onde a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+2)^n}{n}$ converge.

Vamos aplicar o teste da razão (seria possível aplicar o teste da raiz também).
O termo geral da série é

$$u_n = \frac{(-1)^n(x+2)^n}{n}$$

seu sucessor é

$$u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^{n+1}}{n+1}$$

Calculando o quociente dos módulos

$$\begin{aligned} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \left|\frac{(-1)^{n+1}(x+2)^{n+1}}{n+1}\right| \left|\frac{n}{(-1)^n(x+2)^n}\right| \\ &= \frac{|x+2|^{n+1}}{n+1}\,\frac{n}{|x+2|^n} \\ &= \frac{|x+2|n}{n+1} \end{aligned}$$

Calculando o limite

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+2|n}{n+1} = |x+2| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x+2|$$

A condição de convergência do teste da razão é $\rho < 1$ portanto

$$\begin{aligned} \rho &< 1 \\ |x+2| &< 1 \\ -1 < x+2 &< 1 \\ -1-2 < x &< 1-2 \\ -3 < x &< -1 \end{aligned}$$

A série converge absolutamente no intervalo $(-3, -1)$.

3 [25] Calcule a integral indefinida da função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{2^n (2n)!}$

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{2^n (2n)!} \right) dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int \frac{(n!)^2 x^n}{2^n (2n)!} dx \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^n (2n)!} \int x^n dx \\
&= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^n (2n)!} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^{n+1}}{2^n (n+1)(2n)!}
\end{aligned}
$$

4 [25] Encontre a Série de Taylor, centrada em 2, da função $f(x) = e^x$

Calculando as derivadas de $f(x) = e^x$ temos

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

Avaliando em $x = 2$ temos

$$f^{(n)}(2) = e^2$$

O coeficiente da Série de Taylos será

$$c_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{e^2}{n!}$$

A Série de Taylor é

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$