



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Luis A. D'Afonseca

Equações Diferenciais Parciais

Luis A. D'Afonseca

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – [CEFET-MG](#)
16 de outubro de 2024

Apostila para a disciplina “Equações Diferenciais Parciais” do CEFET-MG.



A versão mais recente desta apostila pode ser baixada clicando ou escaneando o código QR.

Arte da capa: [Imagen de Merlin Lightpainting](#) baixada de [Pexels](#)



Esta obra tem a licença [Creative Commons “Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional”](#).

Prefácio

Esse texto ainda está em construção e portanto está incompleto e contém erros, ele não é um substituto para as aulas e livros da bibliografia.

Essa apostila foi idealizada para apresentar o conteúdo programático previsto para a disciplina de **Equações Diferenciais** no **CEFET-MG**, cuja ementa contém os tópicos:

1. séries de Fourier;
2. transformada de Fourier;
3. equações diferenciais parciais;
4. equações da onda, do calor e de Laplace.

Porém, não conhecemos um livro didático que apresente esses assuntos de forma adequada para a disciplina. Tradicionalmente os professores responsáveis por ministrá-la recorrem a diferentes materiais bibliográficos extraíndo apenas uma parte de cada. Nossa objetivo é suprir a ausência de um material compatível com a ementa, produzindo uma apostila específica para a disciplina.

O conteúdo dessa apostila está distribuído nos seguintes capítulos:

1. Séries de Fourier

2. Equações Diferenciais Parciais
3. Equação do Calor
4. Equação da Onda
5. Equação de Laplace
6. Transformada de Fourier

Cada capítulo apresenta a teoria, exemplos e exercícios sobre o tópico correspondente. Sempre que possível apresentamos também exemplos e ilustrações implementadas em Python disponibilizadas como *notebooks* no Google Colaboratory ou Colab. Nenhuma das atividades em Python é necessária para o estudo da apostila, elas foram criadas apenas como atividades complementares para os alunos interessados. A seguir está o link para o *notebook* que apresenta as bibliotecas NumPy, usada para computação numérica, e SymPy, usada para computação simbólica.



Notebook introduz as bibliotecas NumPy e SymPy.

Como os textos matemáticos costumam ser muito densos em informação, não absorvemos todas as sutilezas apenas em uma leitura. Por isso, fazer exercícios é parte fundamental do processo de aprendizado, ao manipularmos os conceitos no processo de resolução do exercício somos forçados a utilizar os resultados e a explorar suas sutilezas. A regra geral é que cada passagem da resolução precisa ser embasada em um resultado verdadeiro explicitamente descrito antes, essa é a razão pela qual os textos numeraram os resultados e fórmulas. Mesmo que não escrevamos essas referências, precisamos estar plenamente conscientes delas.

Uma sugestão é utilizar os exemplos contidos no texto como exercícios, tente resolver o problema proposto antes de ler a resolução apresentada. Depois dessa tentativa leia a resolução e a compare criticamente à sua resposta. Seu resultado coincide com o apresentado? Se sim verifique se você apresentou todos os argumentos necessários para embasar sua resposta. Quando os resultados ou argumentos não coincidirem revise sua resolução e verifique se ela corresponde a uma solução alternativa ou contém algum erro. Nas disciplinas de Matemática, na maioria das vezes, a argumentação é muito mais importante do que o resultado.

Nesse texto foi inserida uma lista de exercícios após cada seção e uma lista de revisão no final de cada capítulo. Ao estudar uma seção, teste sua compreensão resolvendo

alguns exercícios da seção. Ao fazer uma revisão ou se preparar para uma avaliação, resolva os exercícios da revisão. O fato deles não estarem organizados por temas introduz o processo de identificação do problema e escolha da teoria adequada para resolvê-los.

Alguns exercícios possuem resposta no final da apostila, nesses casos o *link* [resp] no enunciado do exercício leva para sua resposta. Para retornar ao enunciado clique no número da resposta. Em alguns casos a resposta consiste apenas do resultado final, em outros toda a resolução está escrita.

Alguns resultados matemáticos necessários para a disciplina, como números complexos e funções hiperbólicas, são apresentados sucintamente no apêndice [Conteúdo Complementar](#). O apêndice [Referências e Recursos Online](#) apresenta diversos materiais complementares, como videoaulas e atividades *online*, que podem ser acessados gratuitamente e contribuir para o estudo de cada tópico. O [Índice Remissivo](#) traz *links* para os principais termos discutidos dentro do texto.

Agradeço aos professores *André Ferreira e Pereira, Éden Amorim e José Luiz Acebal* pela valiosa contribuição para a confecção desse material.

Sumário

1 Séries de Fourier	1
1.1 Introdução	1
1.2 Funções Senoidais	2
1.3 Séries de Fourier	10
1.4 Convergência da Série de Fourier	25
1.5 Série de Fourier de Funções Pares e Ímpares	31
1.6 Fenômeno de Gibbs	42
1.7 Revisão	44
2 Equações Diferenciais Parciais	46
2.1 Introdução	46
2.2 EDO's e o Problema de Autovalores	51
2.3 Método de Separação de Variáveis	64
2.4 Revisão	66
3 Equação do Calor	69
3.1 Introdução	69
3.2 Condição de Dirichlet Homogênea	72
3.3 Condição de Dirichlet Não Homogênea	79
3.4 Condição de Neumann	82
4 Equação da Onda	89
4.1 Introdução	89
4.2 Solução	90

5 Equação de Laplace	105
5.1 Introdução	105
5.2 Condição de Dirichlet no Retângulo	106
5.3 Equação de Laplace em Coordenadas Polares	118
5.4 No Disco com Fronteira de Dirichlet	122
6 Transformada de Fourier	130
6.1 Introdução	130
6.2 Série de Fourier Complexa	132
6.3 Transformada de Fourier	138
6.4 Equação do Calor em uma Barra Infinita	143
6.5 Convergência da Transformada de Fourier	148
6.6 Teorema da Convolução	152
6.7 Propriedades da Transformada de Fourier	154
6.8 Calculando a Transformada de Fourier	158
6.9 Tabelas de Transformadas de Fourier	166
6.10 Revisão	169
A Conteúdo Complementar	171
A.1 Notação Matemática	171
A.2 Revisão de Alguns Conceitos de Álgebra	174
A.3 Revisão de Algumas Funções	176
A.4 Indução Finita	186
A.5 Sistemas de Coordenadas	187
A.6 Números Complexos	189
A.7 Álgebra Linear	195
A.8 Cálculo de Funções Reais	200

B Referências e Recursos Online	213
B.1 Recursos Online	213
B.2 Séries de Fourier	214
B.3 Equações Diferenciais Parciais	215
B.4 Transformada de Fourier	216
Respostas	217
Referências	220
Índice Remissivo	223

Listas de Tabelas

6.1	Tabela 6.1: Transformadas de Fourier	167
6.2	Tabela 6.2: Propriedades da Transformadas de Fourier	168
A.1	Tabela A.1: Tabela de Derivadas	208
A.2	Tabela A.2: Tabela de Integrais	210

1

Séries de Fourier

2.1	Introdução	46
2.2	EDO's e o Problema de Autovalores	51
2.3	Método de Separação de Variáveis	64
2.4	Revisão	66

1.1 Introdução

Nesse capítulo apresentamos a Série de Fourier, que tem como característica decompor funções periódicas em suas frequências constituintes. Começamos com um estudo sobre as funções senoidais na Seção 1.2, depois definimos a Série de Fourier na Seção 1.3 e discutimos sua convergência na Seção 1.4. A Seção 1.5 mostra como podemos tirar proveito da simetria de algumas funções para simplificar os cálculos dos coeficientes de Fourier. Por fim a Seção 1.6 discute uma característica particular das somas parciais da Série de Fourier, conhecida como Fenômeno de Gibbs. Usamos esse fenômeno para discutir mais alguns detalhes importantes da aproximação de funções pela sua Série de Fourier.

1.2 Funções Senoidais

No estudo das Séries de Fourier vamos decompor funções periódicas em suas frequências constituintes, para isso precisamos ter um entendimento claro do significado de alguns termos. Vamos começar apresentando o conceito de **Senoide** ou **Função senoidal**, essas são funções que possuem a mesma forma de uma função seno, podemos representar essas funções de diversas formas, por exemplo

$$f(t) = a \cos(2\pi\omega t) + b \sin(2\pi\omega t).$$

Essa função representa uma oscilação suave que se repete com **Frequência** ω . A multiplicação por 2π serve para ajustar as unidades, com esse ajuste se t representar o tempo medido em segundos, a frequência, ω , será medida em hertz. Sem esse fator ω representaria uma frequência angular.

As funções senoidais podem ser escritas alternativamente como

$$f(t) = A \cos(2\pi\omega t + \varphi)$$

essa forma tem a vantagem de explicitar a **Amplitude**, A , e a **Fase**, φ , da senoide. Podemos transformar esta expressão na anterior usando as relações entre os coeficientes

$$a = A \cos(\varphi) \quad b = -A \sin(\varphi).$$

Assim como, podemos fazer a transformação inversa

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(-\frac{b}{a} \right).$$

EXEMPLO 1.2.1: Mostre que as expressões

$$f(t) = a \cos(2\pi\omega t) + b \sin(2\pi\omega t)$$

$$g(t) = A \cos(2\pi\omega t + \varphi)$$

são equivalentes.

Vamos partir da segunda expressão e mostrar que ela é igual a primeira

$$g(t) = A \cos(2\pi\omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned}
 &= A(\cos(2\pi\omega t) \cos(\varphi) - \sin(2\pi\omega t) \sin(\varphi)) \\
 &= A \cos(\varphi) \cos(2\pi\omega t) - A \sin(\varphi) \sin(2\pi\omega t) .
 \end{aligned}$$

Fazendo

$$a = A \cos(\varphi) \quad b = -A \sin(\varphi)$$

concluímos que

$$g(t) = a \cos(2\pi\omega t) + b \sin(2\pi\omega t) = f(t) .$$

EXEMPLO 1.2.2: Mostre que $\sin(2\pi\omega t) = \cos\left(2\pi\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Começamos pela expressão do lado direto e obtemos o seno

$$\begin{aligned}
 \cos\left(2\pi\omega t + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(2\pi\omega t) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(2\pi\omega t) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
 &= \sin(2\pi\omega t) .
 \end{aligned}$$

A Figura 1.1 compara algumas funções senoidais. No gráfico (a) está a função $\cos(2\pi t)$ que possui amplitude $A = 1$, frequência $\omega = 1$ e fase $\varphi = 0$. Em (b) está a função $\cos(2\pi 3t)$ com frequência $\omega = 3$, note que o gráfico indica o **Período** T da senoide que é igual ao inverso da frequência

$$T = \frac{1}{\omega} .$$

Em (c) temos $2 \cos(2\pi t)$ com amplitude $A = 2$ enquanto que (d) exibe $\cos(2\pi t + 2\pi/3)$ com fase $\varphi = 2\pi/3$.

Outra forma para representar funções senoidais é empregando a exponencial complexa e a Identidade de Euler,

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) .$$

Porém, apesar de possuir a mesma frequência, essa não é a mesma função, visto que possui partes real e imaginária. Essa representação possui algumas vantagens, mas vamos postergar seu uso até o capítulo sobre a Transformada de Fourier.

Neste capítulo vamos representar as funções senoidais como a soma de um seno e um

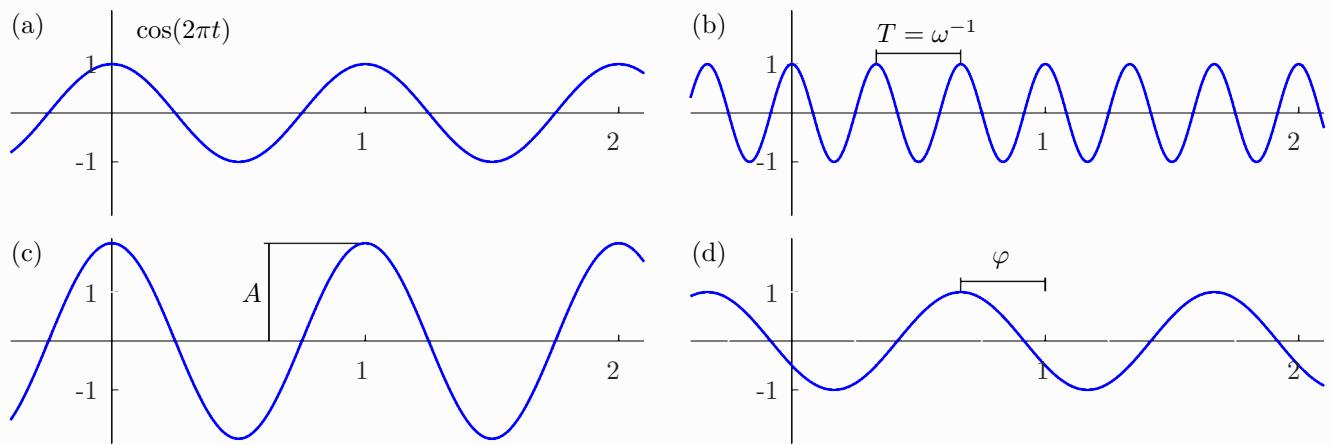


Figura 1.1: Comparação de Funções Senoidais

cosseno, pois dessa forma podemos utilizar as propriedades de ortogonalidade dessas funções.

DEFINIÇÃO 1.1: FUNÇÃO SENOINAL

Uma **Função Senoidal** f , de frequência ω , é uma função da forma

$$f(t) = a \cos(2\pi\omega t) + b \sin(2\pi\omega t) \quad (1.1)$$

onde a , b e ω são constantes reais.



Código Python para ilustrar as funções senoidais.

A proposição a seguir resume algumas relações que foram descritas nessa seção.

PROPOSIÇÃO 1.2: AMPLITUDE, FASE E PERÍODO

Dada uma função senoidal de **Frequência** ω

$$f(t) = a \cos(2\pi\omega t) + b \sin(2\pi\omega t)$$

podemos calcular suas características com as fórmulas

Amplitude $A = \sqrt{a^2 + b^2}$

Fase $\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{-b}{a} \right)$

Período $T = \frac{1}{\omega}$.

A propriedade de ser periódica não se restringe apenas às senoidais. A definição a seguir generaliza o conceito de periodicidade de forma que podemos usá-lo para verificar se uma função qualquer é periódica ou não.

DEFINIÇÃO 1.3: FUNÇÕES PERIÓDICAS

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **periódica** de período $T > 0$ se

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observe que uma função que possui período T também possui período kT , com $k = 1, 2, \dots$. O menor valor que é um período de f é chamado de **Período Fundamental** de f .

A proposição a seguir lista algumas propriedades de funções periódicas.

PROPOSIÇÃO 1.4: PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES PERIÓDICAS

Sejam f e g funções periódicas de período T , então o produto

$$h(x) = f(x)g(x)$$

é periódico de período T .

Sejam f_k funções periódicas de período T , então a combinação linear

$$h(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k f_k(x)$$

é periódica de período T . A série de funções

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(x)$$

se for convergente, é periódica de período T .

Demonstração

Podemos demonstrar essas propriedades por substituição

$$h(x + T) = f(x + T)g(x + T) = f(x)g(x) = h(x)$$

portanto $h(x + T) = h(x)$. De modo similar

$$h(x + T) = \sum_{k=1}^N \alpha_k f_k(x + T) = \sum_{k=1}^N \alpha_k f_k(x) = h(x)$$

portanto $h(x + T) = h(x)$.

A **Função Constante** $f(x) = c$ é periódica para qualquer período, pois, para qualquer número T temos

$$f(x + T) = c = f(x) .$$

No estudo das Séries de Fourier estaremos interessados em senoides que possuem um período específico. Precisamos, então, determinar quais são as funções trigonométricas com período T . Por simplicidade escolheremos trabalhar no intervalo de comprimento T centrado em zero, isso é, o intervalo $[-L, L]$ onde $L = T/2$. Temos que impor as condições

$$\begin{aligned}\cos(\alpha L) &= \cos(-\alpha L) , \\ \operatorname{sen}(\alpha L) &= \operatorname{sen}(-\alpha L) ,\end{aligned}$$

que correspondem a

$$\begin{aligned}\cos(\alpha L) &= \cos(\alpha L) , \\ \operatorname{sen}(\alpha L) &= -\operatorname{sen}(\alpha L) .\end{aligned}$$

O cosseno não impõe nenhuma restrição, mas o seno precisa ser zero, $\operatorname{sen}(\alpha L) = 0$, isso será verdade quando

$$\alpha L = n\pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots .$$

Isolando α temos

$$\alpha = \frac{n\pi}{L} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Concluímos que as funções trigonométricas com período T são

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Comparando os parâmetros dessas funções com a Definição das Funções Senoidais 1.1 podemos explicitar o valor da frequência para cada n

$$2\pi\omega = \frac{n\pi}{L}$$

$$\omega = \frac{n}{2L}$$

consequentemente o período fundamental será

$$T = \omega^{-1} = \frac{2L}{n}.$$



Código Python para ilustrar as funções seno e cosseno.

A próxima propriedade que queremos analisar é a **ortogonalidade** dessas funções. Nesse momento estamos pensando no conjunto das funções reais como um **Espaço Vetorial**, como definido em Álgebra Linear, onde cada função é pensada como um vetor e as funções seno e cosseno são linearmente independentes e compõem uma base ortogonal para o espaço. A Seção A.7 apresenta um resumo dos resultados da Álgebra Linear que serão utilizados aqui.

Para quem ainda não estudou Álgebra Linear a propriedade que realmente precisamos é que quando integramos funções seno e cosseno com frequências diferentes o resultado é zero. A próxima definição e a proposição seguinte apresentam essa propriedade com clareza.

DEFINIÇÃO 1.5: FUNÇÕES ORTOGONALIS

Duas funções reais u e v são **ortogonais** em um intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ se a integral abaixo está bem definida e vale zero

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x) v(x) dx = 0 .$$

Com a escolha adequada do intervalo e das frequências as funções seno e cosseno são funções ortogonais entre si.

PROPOSIÇÃO 1.6: ORTOGONALIDADE DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As funções

$$\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

com $m = 1, 2, \dots$, formam um conjunto ortogonal no intervalo $-L \leq x \leq L$, isso é

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 0 \quad \text{para todo } m, n$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ L, & \text{se } n = m \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ L, & \text{se } n = m \end{cases}$$

Demonstração

Vamos demonstrar aqui a relação de ortogonalidade entre as funções cosseno. As demonstrações das demais relações são análogas.

Para avaliar as integrais vamos usar o fato que

$$2 \cos(\theta) \cos(\phi) = \cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi) .$$

No caso $m = n$ temos que

$$\begin{aligned}
 & \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{(m+n)\pi}{L}x\right) + \cos\left(\frac{(m-n)\pi}{L}x\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{2m\pi}{L}x\right) + \cos(0) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{L}{2m\pi} \sin\left(\frac{2m\pi}{L}x\right) + x \right] \Big|_{-L}^L \\
 &= \frac{1}{2}(L - (-L)) \\
 &= L .
 \end{aligned}$$

No caso $m \neq n$ temos que

$$\begin{aligned}
 & \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{(m+n)\pi}{L}x\right) + \cos\left(\frac{(m-n)\pi}{L}x\right) dx \\
 &= \frac{L}{2\pi} \left[\frac{1}{m+n} \sin\left(\frac{(m+n)\pi}{L}x\right) + \frac{1}{m-n} \sin\left(\frac{(m-n)\pi}{L}x\right) \right] \Big|_{-L}^L \\
 &= 0 .
 \end{aligned}$$

Exercícios Seção 1.2

1) Determine os zeros e extremos locais de cada função

a) $f(x) = \sin(x)$

b) $f(x) = 2 \sin(2\pi x)$

c) $f(x) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$

2) Determine se a função é periódica, se for encontre seu período fundamental

a) $f(x) = \sin(5x)$

b) $f(x) = \cos(2\pi x)$

c) $f(x) = \operatorname{senh}(2x)$

d) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

e) $f(x) = \operatorname{tg}(\pi x)$

f) $f(x) = x^2$

g) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

h) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)$

i) $f(x) = \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

j) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)$

k) $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$

3) Escreva a função

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$$

na forma $f(x) = A\sin(x + \varphi)$, onde A e φ são constantes.

4) Escreva a função

$$f(x) = 2\cos(x + \pi) + \sqrt{3}\sin(x + \pi)$$

na forma $f(x) = A\cos x + B\sin x$, onde A e B são constantes.

5) Determine o valor de k para que a função $f(x) = \sin kx$ tenha período $\frac{\pi}{2}$.

6) Seja f definida para $-L < x < L$ como $f(x) = -x$ e tal que $f(x + 2L) = f(x)$, encontre uma fórmula para f no intervalo $L < x < 2L$ e no intervalo $-3L < x < -2L$.

7) Seja f definida para $0 < x < 2L$ como $f(x) = L - x$ e tal que $f(x + 2L) = f(x)$, encontre uma fórmula para f no intervalo $-L < x < 0$.

1.3 Séries de Fourier

Assim como no estudo das Séries de Taylor, vamos primeiro definir as Séries de Fourier, em seguida associar essas séries à funções e depois estudar sua convergência. Começamos pela seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1.7: SÉRIE FOURIER

Sejam a_n e b_n sequências de números reais e $L > 0$ um número real, a **Série de Fourier** é uma série na forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \quad (1.2)$$

para $x \in \mathbb{R}$.

Podemos usar a Série de Fourier para construir novas funções especificando os coeficientes que desejamos. Os próximos exemplos empregam essa técnica e nos dão uma noção do potencial da Série de Fourier.

EXEMPLO 1.3.1: Sintetizando funções.

Utilizando a Série de Fourier podemos criar funções com o espectro de frequências que desejarmos. Nesse exemplo vamos nos limitar a somas finitas, isso é, escolhemos sequências de coeficientes que são zero para todo índice maior do que um valor fixado, especificamente teremos $a_n = b_n = 0$ para todo $n > 7$.

Ao criar as funções fixamos $L = 1$ e especificamos os valores da amplitude A e fase φ para cada frequência. Depois calculamos os coeficientes da série pelas fórmulas

$$a_n = A_n \cos(\varphi_n) \quad b_n = -A_n \sin(\varphi_n)$$

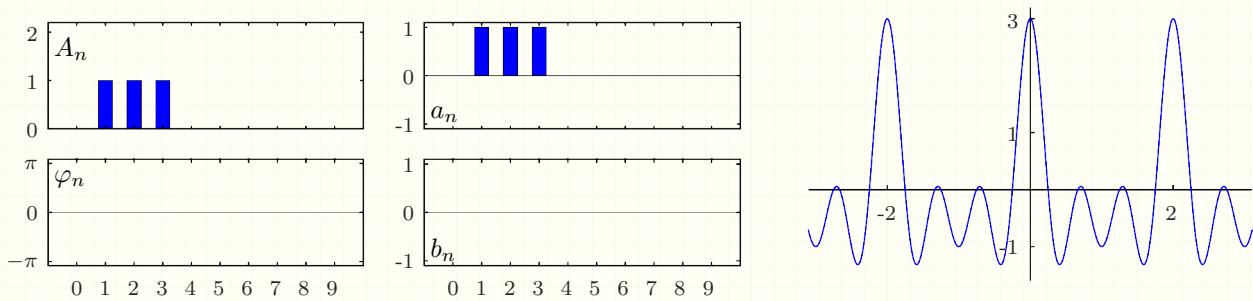
Podemos calcular a frequência associada a cada termo da série simplesmente comparando os parâmetros das funções seno e cosseno na definição da série com a Definição das Funções Senoidais 1.1

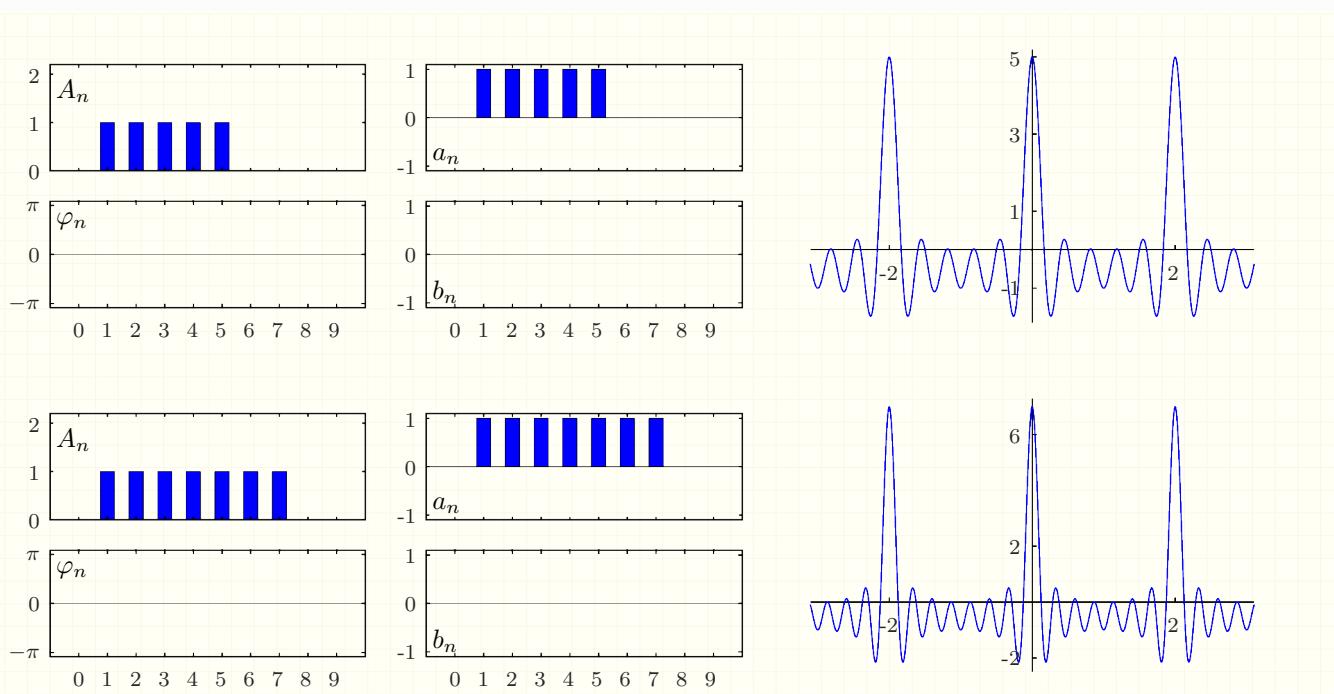
$$\omega_n = \frac{n}{2L} = \frac{n}{2}$$

então, se a variável x representar o tempo em segundos, as frequências de cada termo é

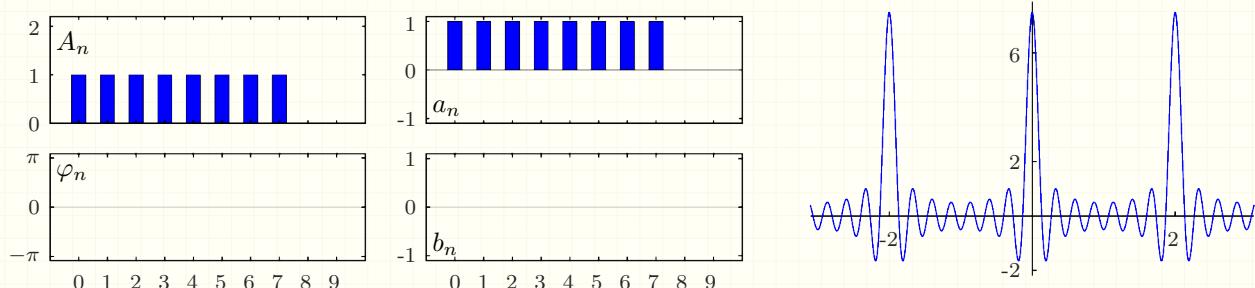
$$(\omega_n) = \left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots\right).$$

Para cada função sintetizada apresentamos graficamente os valores da amplitude e fase, os coeficientes e finalmente três períodos da função. Observe as relações entre os espectros e o comportamento da função. Nas primeiras 3 funções mantemos a fase nula e atribuímos 1 para os primeiros valores da amplitude exceto o termo A_0 .





Observe nos casos anteriores que pela fase ser sempre zero a_n coincide com A_n e b_n é sempre nulo. Outro ponto relevante é que essas funções tem sempre média zero, pois o termo constante, $n = 0$, não está presente. Para que a função oscile em torno do zero vamos incluir a amplitude $A_0 = 1$. Obtemos assim a próxima função.

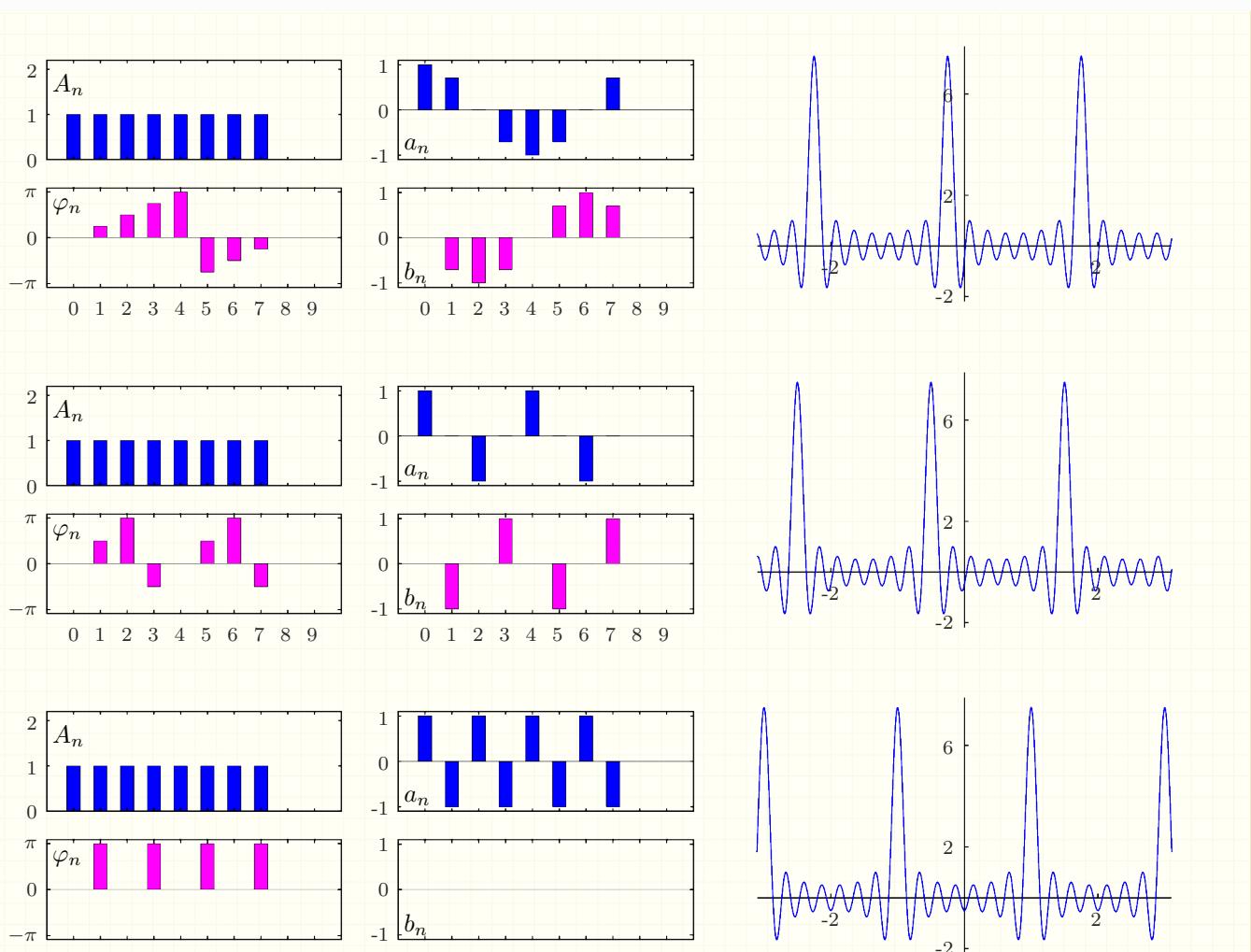


Para explorar o efeito da fase escolhemos usar os seguintes valores

$$\varphi_n = np \quad n = 0, 1, \dots, 7$$

onde o parâmetro p assume os valores $p = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ e π .

Assim os valores da fase crescem linearmente com o índice segundo a velocidade p . Cada função a seguir corresponde a um dos valores para p . Observe que e no gráficos da fase φ_n estamos usando a periodicidade para representar os valores maiores do que π dentro do intervalo $[-\pi, \pi]$.



Note que a fase distribui a amplitude entre os coeficientes a_n e b_n . Observe também o efeito da fase no gráfico da função, quanto maior o valor de p mais o gráfico é deslocado para a esquerda.

Código Python para ilustrar a síntese de funções com a Série de Fourier.



EXEMPLO 1.3.2: Função de Weierstrass.

A função de Weierstrass é uma função contínua para todo $x \in \mathbb{R}$ mas que não é derivável em nenhum ponto. Ela foi criada para derrubar a conjectura, que se tentava verificar na época, de que toda função contínua é derivável exceto em

pontos isolados. Essa função é definida como a soma da Serie de Fourier

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cos(\beta^n \pi x)$$

onde os parâmetros a e b satisfazem as condições

$$0 < \alpha < 1 \quad \beta > 1 \quad \alpha\beta > 1 .$$

As figuras a seguir mostram o gráfico de $W(x)$, para $\alpha = 0,79$ e $\beta = 1,56$. A primeira mostra a função no intervalo entre 0 e 1, enquanto que, as duas seguintes mostram ampliações ilustrando a autossimilaridade característica de fractais.





Código Python para calcular a Função de Weierstrass.

Vamos agora relacionar o valor dos coeficientes a_m e b_m de uma Série de Fourier convergente com integrais da função que representa a soma da série. Comparando com as fórmulas dos coeficiente da Série de Taylor, percebemos que lá eles eram calculados com derivadas da função em um único ponto, isso é, eles consideram apenas informação local da função. Em oposição, os coeficientes para a Série de Fourier dependem da integral ao longo de um intervalo.

TEOREMA 1.8: FÓRMULA DE EULER-FOURIER

Se a Série de Fourier (1.2) converge, então podemos definir a função

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (1.3)$$

que possui período $T = 2L$ e os coeficientes a_n e b_n são dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.4)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.5)$$

Demonstração

Que o período de f é $2L$ segue do fato que as funções

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

são periódicas com período $2L/n$ então $2L$ também é um período.

Para demonstrar as fórmulas (1.4) e (1.5) precisamos supor que podemos integrar a série termo a termo, assim como fizemos para as séries de potências. A ideia é utilizar as relações de ortogonalidade da Proposição 1.6.

Para mostrar (1.4), multiplicamos a equação (1.3) por $\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ para $k = 0, 1, 2, \dots$, e integramos sobre $[-L, L]$, obtendo assim

$$\begin{aligned}
 & \int_{-L}^L \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) f(x) dx \\
 &= \int_{-L}^L \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] dx \\
 &= \int_{-L}^L \left[\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \frac{a_0}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] dx \\
 &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \right. \\
 &\quad \left. + b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \right].
 \end{aligned}$$

Se $k = 0$, usando que a integral sobre $[-L, L]$ das funções

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

são nulas, temos

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos(0) dx = \frac{a_0}{2}(L - (-L)) = a_0 L$$

Se $k \neq 0$, utilizando as propriedades de ortogonalidade, obtemos

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) f(x) dx = a_k \int_{-L}^L \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = a_k L$$

Isolando a_k e mudando o índice para n temos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

Para mostrar a fórmula de b_n basta multiplicar (1.3) por

$$\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

integrar sobre $[-L, L]$ e usar as relações de ortogonalidade.

Dada uma função f que é periódica de período $2L$, queremos saber se essa função pode ser representada por uma Série de Fourier. Aliás, sempre que for possível calcular as integrais em (1.4) e (1.5), podemos dizer que a série em (1.2) com os coeficientes dados por (1.4) e (1.5) é a **Série de Fourier** de f . Note que ainda não temos nenhuma garantia de que a Série de Fourier de f coincide com a própria f . Porém, antes de iniciarmos a discussão sobre a convergência vamos definir a Série de Fourier de uma função f e ilustrar como podemos calculá-la.

DEFINIÇÃO 1.9: SÉRIE DE FOURIER DE UMA FUNÇÃO

Seja f uma função periódica de período $2L$. Se f é integrável no intervalo $[-L, L]$, então a **Série de Fourier** de f é a série (1.2)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

com os coeficientes dados por (1.4) e (1.5)

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Os exemplos a seguir ilustram o uso desse resultado para construir a Série de Fourier de algumas funções.

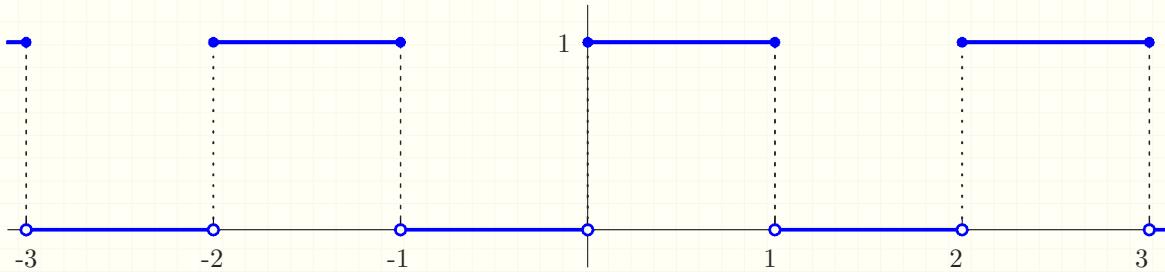
EXEMPLO 1.3.3: Encontre a série de Fourier gerada pela função periódica

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad f(x+2) = f(x) .$$

Analizando essa função verificamos que ela é periódica com período $T = 2$ então

$$L = \frac{T}{2} = 1$$

e seu gráfico é



A Série de Fourier da função f é dada por (1.3) substituindo o valor de $L = 1$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$$

onde os coeficientes são calculados pelas fórmulas de Euler-Fourier (1.4) e (1.5)

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx ,$$

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx .$$

Note que ainda não podemos dizer se a soma da série, $S(x)$, será igual a função que deu origem a série $f(x)$.

Substituindo a função f nas fórmulas para os coeficientes encontramos

$$a_n = \int_0^1 \cos(n\pi x) dx ,$$

$$b_n = \int_0^1 \sin(n\pi x) dx .$$

Para $n = 0$ temos

$$a_0 = \int_0^1 \cos(0) dx = \int_0^1 dx = x \Big|_0^1 = 1 .$$

Para $n \neq 0$ temos

$$a_n = \int_0^1 \cos(n\pi x) dx = \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \Big|_0^1 = 0 ,$$

$$b_n = \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^1 = -\frac{1}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) .$$

Como $\cos(n\pi)$ oscila entre 1 e -1

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & n \text{ par} , \\ -1 & n \text{ ímpar} . \end{cases}$$

Podemos reescrever b_n como

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} , \\ \frac{2}{n\pi} & n \text{ ímpar} . \end{cases}$$

Substituindo os coeficientes na série temos

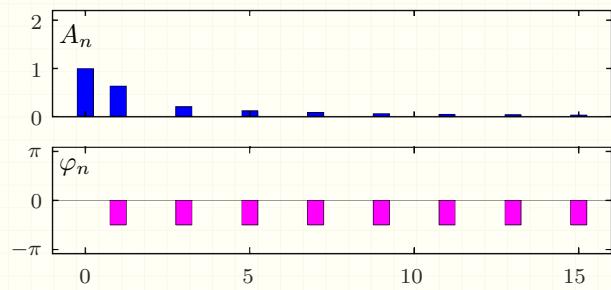
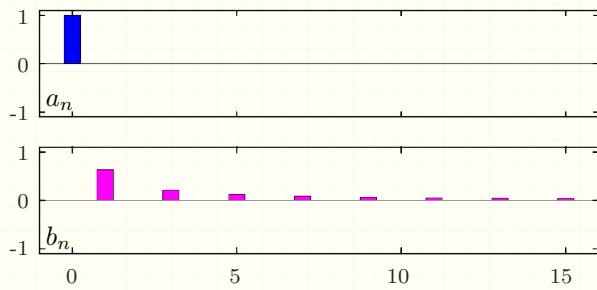
$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) . \end{aligned}$$

Removendo todos os índices n pares e fazendo a mudança de índices $n = 2k - 1$ temos

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} \sin((2k-1)\pi x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)\pi x) . \end{aligned}$$

Os gráficos a seguir mostram os primeiros coeficientes, a_n e b_n , dessa série, assim

como os valores da amplitude, A_n , e fase, φ_n , correspondentes.



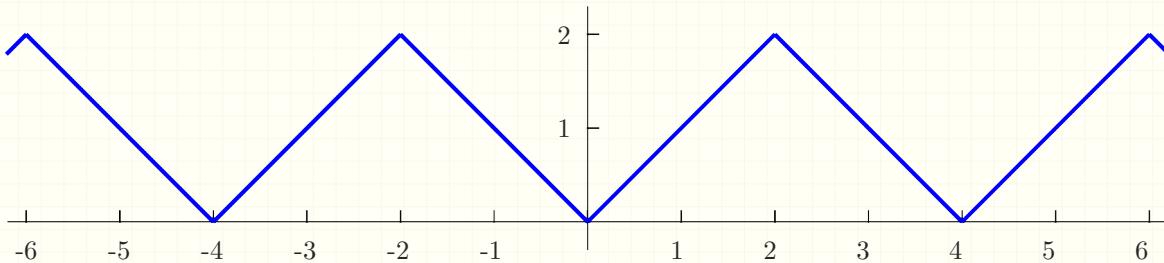
EXEMPLO 1.3.4: Encontre a série de Fourier gerada pela função periódica

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 < x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 2 \end{cases} \quad f(x+4) = f(x).$$

Analizando essa função verificamos que ela é periódica com período $T = 4$ então

$$L = \frac{T}{2} = 2$$

e seu gráfico é



A Série de Fourier dessa função é dada por (1.3) substituindo o valor de $L = 2$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

onde os coeficientes são calculados pelas fórmulas de Euler-Fourier (1.4) e (1.5)

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx.$$

Precisamos agora calcular as integrais e encontrar os valores dos coeficientes. Começamos calculando a_0

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos\left(\frac{0\pi}{2}x\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^2 -x dx + \int_0^2 x dx \right) \\ &= \int_0^2 x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0}{2} = 2 . \end{aligned}$$

O próximo passo é calcular a_n para $n \neq 0$. Repetindo a substituição de f e a manipulação das integrais nos intervalos $[-2, 0]$ e $[0, 2]$ temos

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = \int_0^2 x \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx .$$

Vamos agora calcular a primitiva dessa função

$$H(x) = \int x \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx$$

para isso aplicamos a integração por partes

$$u = x \quad dv = \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx \quad du = dx \quad v = \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

que nos leva a

$$\begin{aligned} H(x) &= uv - \int v du \\ &= \frac{2x}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) - \frac{2}{n\pi} \int \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx \\ &= \frac{2x}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) + \frac{4}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) . \end{aligned}$$

Empregando a primitiva para calcular a_n temos

$$\begin{aligned}
 a_n &= \int_0^2 x \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = H(2) - H(0) \\
 &= \frac{2 \cdot 2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}2\right) + \frac{4}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}2\right) \\
 &\quad - \left[\frac{2 \cdot 0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}0\right) + \frac{4}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}0\right) \right] \\
 &= \frac{4}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{2n\pi}{2}\right) + \frac{4}{(n\pi)^2} \cos(0) \\
 &= \frac{4}{(n\pi)^2} (\cos(n\pi) - 1) .
 \end{aligned}$$

Notando que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ -1 & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

podemos simplificar a expressão para a_n

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par}, \\ \frac{-8}{(n\pi)^2} & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Precisamos calcular os valores de b_n , para isso empregamos manipulações similares e obtemos

$$b_n = \frac{2}{n\pi} (\cos(-n\pi) - \cos(n\pi)) = 0 .$$

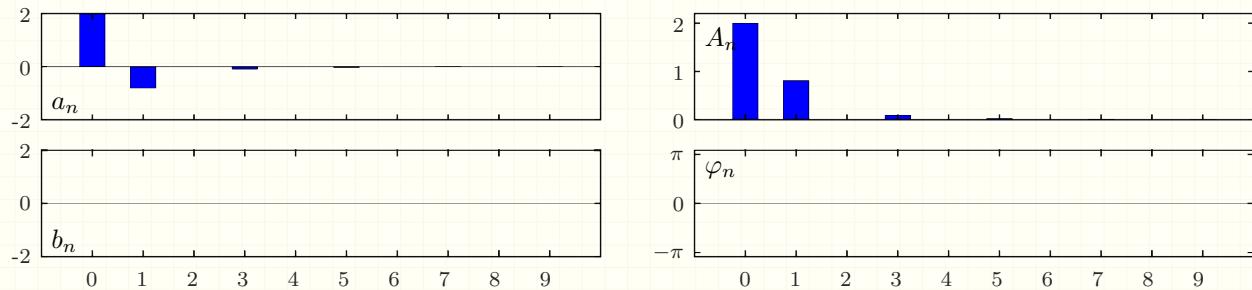
O último passo é substituir os coeficientes calculados na expressão da série e simplificar os termos

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) .
 \end{aligned}$$

Removendo todos os índices n pares e fazendo a mudança de índices $n = 2k - 1$ temos

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cos \left((2k-1) \frac{\pi}{2} x \right) \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \left((2k-1) \frac{\pi}{2} x \right). \end{aligned}$$

Os gráficos a seguir mostram os primeiros coeficientes, a_n e b_n , dessa série, assim como os valores da amplitude, A_n , e fase, ϕ_n , correspondentes.

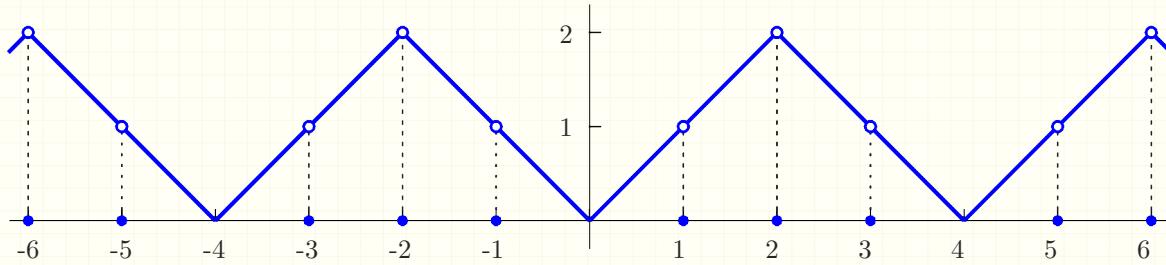


O próximo exemplo apresenta uma função muito similar a do anterior e explicita uma característica fundamental da convergência das Séries de Fourier.

EXEMPLO 1.3.5: Encontre a série de Fourier gerada pela função periódica

$$g(x) = \begin{cases} -x, & -2 < x < -1 \text{ ou } -1 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1 \text{ ou } 1 < x < 2 \\ 0, & x = -2, -1, 0, 1, 2 \end{cases} \quad g(x+4) = g(x)$$

Na figura a seguir vemos o gráfico da função g , note que essa função é idêntica a função, f , do exemplo anterior exceto pelos seus pontos de descontinuidade.



Ao cacularmos os coeficientes da Série de Fourier dessa função

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx$$

vamos obter exatamente os mesmos valores do exemplo anterior, pois os pontos de descontinuidade isolados não alteram os valores das integrais. Portanto, a Série de Fourier dessa função é a mesma do exemplo anterior.

$$S(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2}x\right)$$

Os dois exemplos anteriores apresentam uma questão fundamental sobre a convergência da Série de Fourier. As funções f e g , apesar de similares, são funções diferentes que possuem exatamente a mesma Série de Fourier. Ficamos assim com a questão de determinar para qual função a série converge e porque. Essa discussão será feita na próxima seção onde apresentamos a convergência da Série de Fourier.

Exercícios Seção 1.3

- 1) Esboce o gráfico da função por três períodos e encontre a sua Série de Fourier.

a) $f(x) = -x \quad -L \leq x < L$
 $f(x+2L) = f(x)$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & -L \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < L \end{cases}$
 $f(x+2L) = f(x)$

c) $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$
 $f(x+2\pi) = f(x)$

d) $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$
 $f(x+2) = f(x)$

e) $f(x) = \begin{cases} x+L, & -L \leq x \leq 0 \\ L, & 0 < x < L \end{cases}$

$$f(x+2L) = f(x)$$

f) $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq -1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

$$f(x+4) = f(x)$$

g) $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$

$$f(x+4) = f(x)$$

h) $f(x) = x \quad -1 \leq x < 1$
 $f(x+2) = f(x)$

i) $f(x) = \frac{x^2}{2} \quad -2 \leq x < 2$
 $f(x+4) = f(x)$

j) $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x < 0 \\ 2-2x, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$
 $f(x+4) = f(x)$

k) $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & -2 \leq x < 0 \\ 2x - \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$
 $f(x+4) = f(x)$

l) $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leq x \leq 0 \\ x^2(3-x), & 0 < x < 3 \end{cases}$
 $f(x+6) = f(x)$

1.4 Convergência da Série de Fourier

Queremos estabelecer quando a Série de Fourier gerada por uma determinada função f converge e em quais pontos essa série coincide com a função. Porém, para podermos apresentar os critérios de convergência precisamos de alguns resultados preliminares.

A primeira observação que precisamos fazer é que se duas funções f e g são iguais em todos os pontos de um intervalo $[a, b]$, exceto por um único ponto $c \in [a, b]$, a integral das duas funções é a mesma nesse intervalo. Essa igualdade vale mesmo que elas sejam diferentes em um conjunto finito de pontos, c_n . A versão mais geral desse resultado diz que a integral das funções será igual, mesmo que elas sejam diferentes em um conjunto de medida nula contido no intervalo. Essa propriedade é relevante nesse momento pois as fórmulas para os coeficientes de Fourier, (1.4) e (1.5), são integrais e portanto não podem distinguir funções que sejam diferentes apenas em um conjunto finito de pontos dentro do intervalo $[-L, L]$.

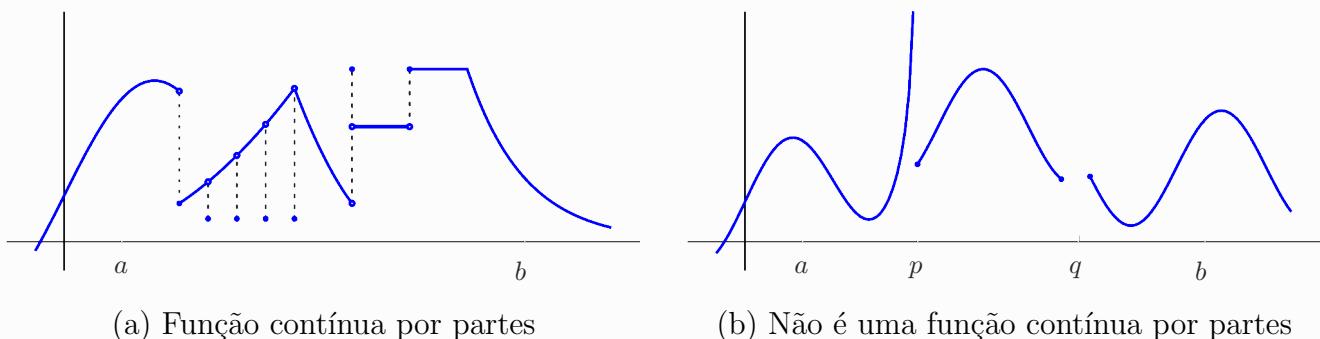


Figura 1.2: Continuidade por partes

Para apresentarmos o critério de convergência da Série de Fourier precisamos definir uma função que é contínua em quase todos os pontos de um intervalo, que chamamos de função contínua por partes. A Figura 1.2a ilustra uma função contínua por partes no intervalo $[a, b]$. Enquanto função da Figura 1.2b não é contínua por partes pois tem assintota vertical em p e não está definida em uma vizinhança de q . O resultado a seguir apresenta os detalhes dessa definição.

DEFINIÇÃO 1.10: FUNÇÃO SECCIONALMENTE CONTÍNUA

Uma função f é **Seccionalmente Contínua**, ou **Contínua por Partes**, em um intervalo $a \leq x \leq b$ se o intervalo pode ser dividido por um número finito de pontos

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

de modo que

1. f é contínua em cada subintervalo aberto $x_{k-1} < x < x_k$
2. f tem limites laterais finitos nas extremidades de cada subintervalo, quando aproximadas pelo interior do subintervalo.

Na apresentação que se segue, será conveniente utilizarmos a seguinte notação para os **Límites Laterais** de uma função $f(x)$

$$f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

note que se f é contínua

$$f(x^+) = f(x^-) = f(x).$$

Podemos agora apresentar um critério de convergência para a Série de Fourier.

TEOREMA 1.11: CONVERGÊNCIA DA SÉRIE DE FOURIER

Seja f uma função periódica, de período $2L$, e seccionalmente contínua no intervalo $[-L, L]$. Suponha que sua derivada, f' , existe nos pontos onde f é contínua e que f' também seja seccionalmente contínua em $[-L, L]$. Então a Série de Fourier de f converge para f , onde ela é contínua, e para

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

onde a função for descontínua.

Vamos agora voltar a questão deixada em aberto no final da seção anterior, onde,

nos dois últimos exemplos 1.3.4 e 1.3.5, vimos que a Série de Fourier das funções

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 < x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 2 \end{cases} \quad f(x+4) = f(x)$$

$$g(x) = \begin{cases} -x, & -2 < x < -1 \text{ ou } -1 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1 \text{ ou } 1 < x < 2 \\ 0, & x = -2, -1, 0, 1, 2 \end{cases} \quad g(x+4) = g(x)$$

são idênticas. Nesse caso, para qual função a série converge?

A resposta vem da aplicação do Teorema 1.11, como a função f é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$ a série

$$S(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2}x\right)$$

converge para f para todo $x \in \mathbb{R}$. Entretanto, permanece a questão da relação entre a série e a função g . Nos pontos onde g é contínua ela é igual a f e portanto a série também converge para g para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pela periodicidade da função precisamos analisar apenas os pontos $p = -2, -1, 1, 2$, nesses casos o Teorema 1.11 diz que a série converge para a média entre os limites laterais, ou seja

$$S(p) = \frac{g(p^+) + g(p^-)}{2}.$$

Lembrando que, ao calcularmos limites nunca avaliamos a função no ponto para o qual a variável está tendendo, temos que

$$g(p^+) = f(p^+) \quad \text{e} \quad g(p^-) = f(p^-).$$

Portanto, pela continuidade de f

$$S(p) = \frac{g(p^+) + g(p^-)}{2} = \frac{f(p^+) + f(p^-)}{2} = f(p)$$

como esperado, chegamos ao mesmo resultado aplicando o teorema na função g .

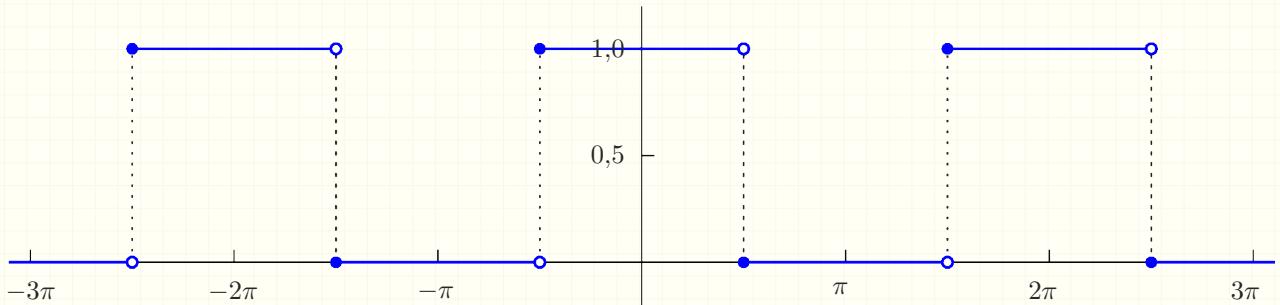
O próximo exemplo calcula a Série de Fourier de uma função com descontinuidades não removíveis.

EXEMPLO 1.4.1: Calcule a Série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < -\pi/2 \\ 1, & -\pi/2 \leq x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

e verifique para qual função a série converge.

Primeiro verificamos que essa função tem período $T = 2\pi$ e portanto $L = \pi$, observamos também que ela é descontínua em $x = \pm\pi/2$ e em todas as repetições periódicas desses pontos. Vemos a seguir o gráfico dessa função



Usando as fórmulas de Euler-Fourier, temos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = 1$$

assim como

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Note que, $\sin(n\pi/2)$ é zero se n é par e fica alternando entre 1 e -1 se n é

ímpar, mais precisamente

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ \frac{2(-1)^{n-1/2}}{n\pi}, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Calculando as integrais correspondentes verificamos que $b_n = 0$ para todo n . Então para todos os pontos onde f é contínua temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos \left(\frac{(2n-1)\pi}{\pi} x \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cos((2k-1)x). \end{aligned}$$

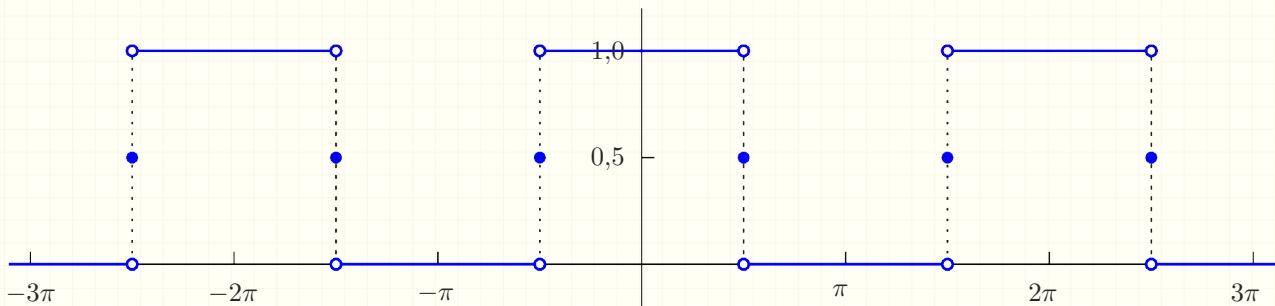
A diferença entre o gráfico de f e o gráfico da série ocorre apenas nos pontos de descontinuidade, no nosso caso esses pontos são da forma

$$x = \frac{(2k-1)\pi}{2}.$$

Nestes pontos a série de Fourier converge para

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto a Série de Fourier de f converge para a função mostrada no gráfico a seguir



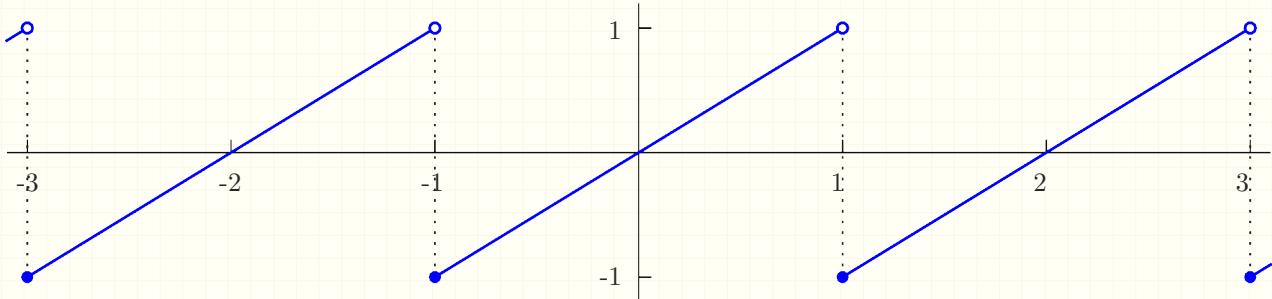
Note que, apesar de fazermos todos os cálculos no intervalo $[-L, L]$, as funções com as quais estamos trabalhando estão definidas em toda a reta. Portanto, ao buscarmos os pontos de descontinuidade não basta verificar apenas o interior do intervalo, precisamos analisar a função como um todo. O próximo exemplo ilustra essa análise.

EXEMPLO 1.4.2: Qual a soma da Serie de Fourier da função

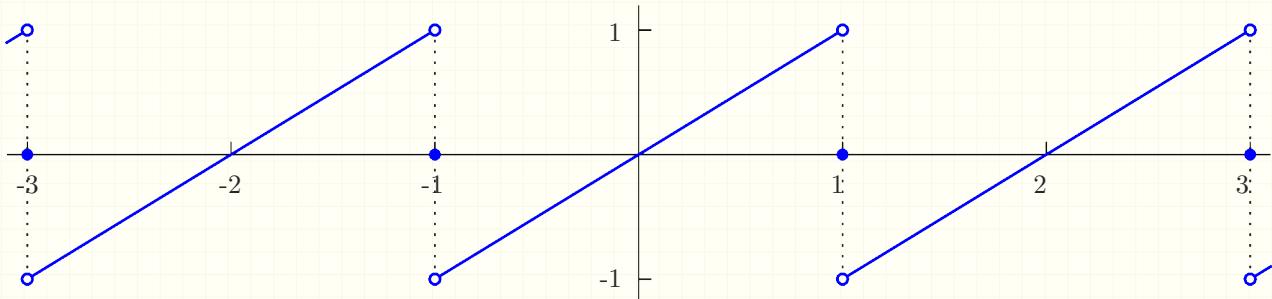
$$f(x) = x \quad \text{para } x \in [-1, 1]$$

$$f(x) = f(x + 2).$$

Observamos que essa função tem período $T = 2$, portanto $L = 1$, e que seu gráfico é



Como f e sua derivada são seccionalmente contínuas podemos aplicar o Teorema 1.11, que garante a convergência para a função ilustrada do gráfico a seguir. Observe o valor da função nas descontinuidades.



A convergência da Série de Fourier apresenta algumas sutilezas que estão além do escopo dessa disciplina, especialmente quando desejamos aproximar a função por uma soma parcial da sua Série de Fourier. A Seção 1.6 faz uma discussão introdutória o Fenômeno de Gibbs que pode ocorrer nesses casos.

Exercícios Seção 1.4

- 1) Suponha que cada função é estendida periodicamente fora do intervalo original, calcule sua Série de Fourier e esboce o gráfico da função **para qual a série converge** por três períodos.

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} L+x & -L \leq x < 0 \\ L-x & 0 \leq x < L \end{cases}$

d) $f(x) = 1 - x^2 \quad -1 \leq x < 1$

$$e) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < -\pi/2 \\ 1 & -\pi/2 \leq x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$f) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$g) \quad f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$h) \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 - x & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$i) \quad f(x) = x \quad -1 \leq x < 1$$

$$j) \quad f(x) = \begin{cases} x + 2 & -2 \leq x < 0 \\ 2 - 2x & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$k) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$l) \quad f(x) = x - x^3 \quad -1 \leq x < 1$$

1.5 Série de Fourier de Funções Pares e Ímpares

Ao calcularmos os coeficientes da Série de Fourier, podemos tirar proveito de algumas simetrias da função f , por exemplo, se ela é uma função par ou ímpar. Além disso, muitas vezes, estamos interessados em estudar uma função que não é periódica dentro do intervalo onde ela está definida. Nesses casos podemos estender a função criando uma nova função que seja periódica, ao fazermos isso temos a escolha de criar uma extensão par ou ímpar. Faremos uso dessa técnica para escrever as soluções das Equações Diferenciais Parciais no Capítulo 2.

DEFINIÇÃO 1.12: FUNÇÃO PAR E FUNÇÃO ÍMPAR

Uma função real f é **par** se

$$f(-x) = f(x)$$

e é **ímpar** se

$$f(-x) = -f(x).$$

A forma direta para verificar se uma função é par ou ímpar é partir da expressão de $f(-x)$ e manipulá-la até encontrar $f(x)$ ou $-f(x)$. Os próximos exemplos mostram algumas funções pares e ímpares e funções que não possuem essas simetrias.

EXEMPLO 1.5.1: Mostre que $(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, é par quando n for par e é ímpar quando n for ímpar.

Considerando primeiro o caso n par, isso é, $n = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$

$$f(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = (-1)^{2k} x^n = x^n = f(x).$$

Considerando agora n ímpar temos $n = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$

$$f(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = (-1)^{2k+1} x^n = -x^n = -f(x).$$

O exemplo anterior apresenta o caso mais comum e o motivo para dizermos que a função é par ou ímpar.

Devido a suas definições a função seno é ímpar e a função cosseno é par. O próximo exemplo generaliza essas afirmações.

EXEMPLO 1.5.2: Mostre as que, para $\alpha \neq 0$, a função $\operatorname{sen}(\alpha x)$ é ímpar e a função $\cos(\alpha x)$ é par.

Sabemos que a função $\operatorname{sen}(x)$ é ímpar e a função $\cos(x)$ é par, isso é

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) \quad \text{e} \quad \cos(-x) = \cos(x).$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, temos que

$$\operatorname{sen}(\alpha(-x)) = \operatorname{sen}(-(\alpha x)) = -\operatorname{sen}(\alpha x).$$

Ao mesmo tempo, temos que

$$\cos(\alpha(-x)) = \cos(-(\alpha x)) = \cos(\alpha x).$$

EXEMPLO 1.5.3: Mostre que se f é par, a função

$$g(x) = f(x) \cos(\alpha x)$$

também é par e a função

$$h(x) = f(x) \operatorname{sen}(\alpha x)$$

é ímpar.

Partindo de $g(-x)$ vamos tentar chegar em $g(x)$, conseguimos isso usando que $f(-x) = f(x)$ e que $\cos(-\alpha x) = \cos(\alpha x)$

$$g(-x) = f(-x) \cos(-\alpha x) = f(x) \cos(\alpha x) = g(x) .$$

Repetimos o processo para h , mas agora usamos que $\sin(-\alpha x) = -\sin(\alpha x)$

$$h(-x) = f(-x) \sin(-\alpha x) = f(x) (-\sin(\alpha x)) = -h(x) .$$

EXEMPLO 1.5.4: Mostre que se f é ímpar, a função

$$g(x) = f(x) \cos(\alpha x)$$

também é ímpar e a função

$$h(x) = f(x) \sin(\alpha x)$$

é par.

Usando os mesmos procedimentos do exemplo anterior temos que

$$g(-x) = f(-x) \cos(-\alpha x) = (-f(x)) \cos(\alpha x) = -g(x) ,$$

$$h(-x) = f(-x) \sin(-\alpha x) = (-f(x)) (-\sin(\alpha x)) = h(x) .$$

EXEMPLO 1.5.5: Mostre que $f(x) = x + b$ é ímpar se, e somente se, $b = 0$.

Precisamos verificar a implicação nos dois sentidos para podermos afirmar que a relação é “se, e somente se”. Vamos primeiro mostrar que se $b = 0$ então a função é ímpar. Essa verificação é simples e direta

$$f(-x) = -x = -f(x) .$$

Agora vamos mostrar que se f é ímpar b precisa ser zero. Como f é ímpar sabemos que $f(-x) = -f(x)$ substituindo a expressão da função e manipulando temos

$$f(-x) = -f(x)$$

$$-x + b = -(x + b)$$

$$\begin{aligned} -x + b &= -x - b \\ b &= -b . \end{aligned}$$

O único número que satisfaz essa relação é o zero portanto b só pode ser zero.
Com isso concluímos a demonstração.

O resultado importante para o cálculo da Série de Fourier de funções pares ou ímpares está na consequência que essas simetrias tem no cálculo de integrais em domínios simétricos em relação a origem, como descrito no próximo teorema.

TEOREMA 1.13: INTEGRAIS DE FUNÇÕES PARES E IMPARES

Se f é uma função par, então

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx .$$

Se f é uma função ímpar, então

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0 .$$

Demonstração

Note que

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx .$$

Fazendo a mudança de variável $y = -x$ na primeira integral, obtemos $dy = -dx$ e os limites de integração $x = -L$ e $x = 0$ se transformam em $y = L$ e $y = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= - \int_L^0 f(-y) dy + \int_0^L f(x) dx \\ &= \int_0^L f(-y) dy + \int_0^L f(x) dx \\ &= \int_0^L f(-x) + f(x) dx . \end{aligned}$$

Se f for par temos que $f(-y) = f(y)$ portanto

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx .$$

Se f for ímpar temos que $f(-y) = -f(y)$ portanto

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0 .$$

Observe que a integral ser zero **não** garante que a função seja ímpar. Esse resultado tem um impacto direto tanto na forma da Série de Fourier quanto no cálculo dos coeficientes. Os próximos dois teoremas apresentam a forma que a Série de Fourier assume no caso de funções pares ou ímpares.

TEOREMA 1.14: COEFICIENTES DE FOURIER DE FUNÇÕES PARES

Se f é uma função par integrável no intervalo $[-L, L]$ os coeficientes da Série de Fourier de f são

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Consequentemente a série de Fourier de uma função par f é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) .$$

Dizemos que essa é uma **Série de Fourier em Cossenos**.

Demonstração

Esse resultado é uma consequência direta do Teorema 1.13 e do fato que a função

$$f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

é par, enquanto a função

$$f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

é ímpar.

TEOREMA 1.15: COEFICIENTES DE FOURIER DE FUNÇÕES ÍMPARES

Seja f uma função ímpar integrável no intervalo $[-L, L]$ os coeficientes da série de Fourier de f são

$$a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Consequentemente a série de Fourier de uma função ímpar f é

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right).$$

Dizemos que essa é uma **Série de Fourier em Senos**

Demonstração

Como no teorema anterior esse resultado é uma consequência direta do Teorema 1.13 e do fato que a função

$$f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

é ímpar, enquanto a função

$$f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

é par.

Note que, nas fórmulas para os coeficientes a_m e b_m nos dois teoremas a integral é realizada apenas entre zero e L . Dessa forma, podemos calcular esses coeficientes para uma função f que esteja definida apenas no intervalo $[0, L]$. Nesse caso, temos a liberdade para usar a série de Fourier de Cossenos ou a de Senos. Se usarmos a Série de Fourier em Cossenos, ela converge para a extensão par da função f no intervalo

$[-L, L]$. Se usarmos a Série de Fourier em Senos, ela converge para a extensão ímpar nesse intervalo. Em ambos os casos a série converge para a extensão periódica, de período $2L$, nos pontos fora do intervalo $[-L, L]$.

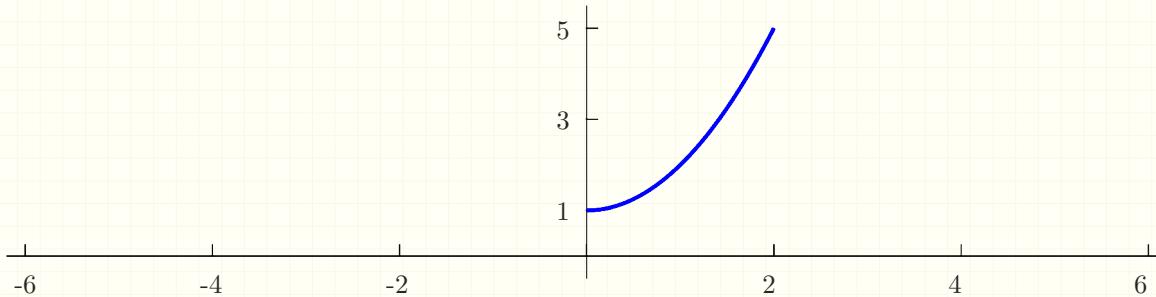
Em outras palavras se temos uma função definida apenas e um intervalo, a princípio, não podemos calcular uma Série de Fourier para ela. Porém, podemos estender a definição da função para toda a reta fazendo com que a extensão seja periódica e calculamos a série para a extensão. Como a função e sua extensão coincidem no intervalo onde a função é originalmente definida, depois de ter calculado a série, podemos ignorar a extensão e retornar ao domínio original com uma Série de Fourier para a função. Podemos definir a função no intervalo $[-L, 0]$ de qualquer forma que desejássemos, porém se escolhermos estende-la como uma função par ou ímpar podemos tirar proveito da simetria e simplificar os cálculos necessários para obter a série, o próximo exemplo ilustra essas extensões.

EXEMPLO 1.5.6: Construa as extensões periódicas par e ímpar da função

$$f(x) = 1 + x^2$$

definida no intervalo $[0, 2]$.

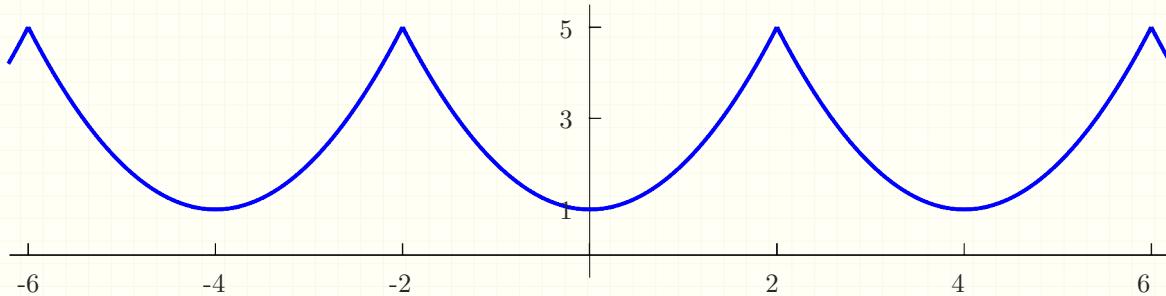
A função f não é periódica e não está definida fora do intervalo $[0, 2]$, seu gráfico está na próxima imagem.



Primeiro vamos estender a função para um intervalo simétrico com relação a origem, nesse caso $[-2, 2]$, depois estendemos a função periodicamente, com período $T = 4$, para toda a reta real. A **extensão par** é definida como

$$f_{\text{par}}(x) = \begin{cases} f(-x), & x \in [-2, 0] \\ f(x), & x \in [0, 2] \end{cases} \quad f_{\text{par}}(x) = f_{\text{par}}(x + 4)$$

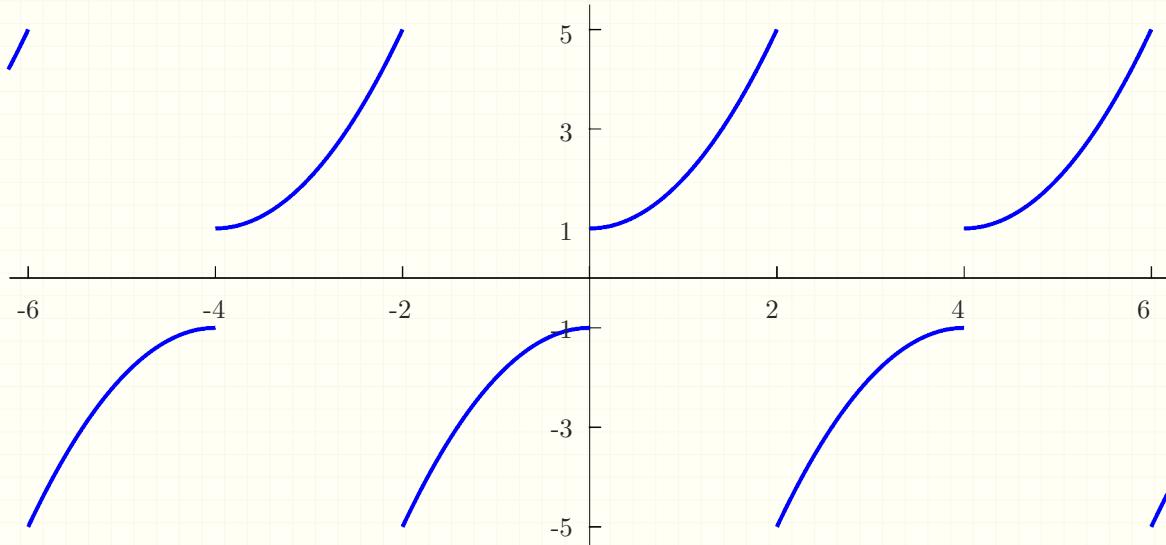
e seu gráfico está esboçado a seguir.



A **extensão ímpar** é definida como

$$f_{\text{ímpar}}(x) = \begin{cases} f(-x), & x \in [0, 2] \\ -f(-x), & x \in [-2, 0] \end{cases} \quad f_{\text{ímpar}}(x) = f_{\text{ímpar}}(x + 4)$$

e seu gráfico está esboçado a seguir.

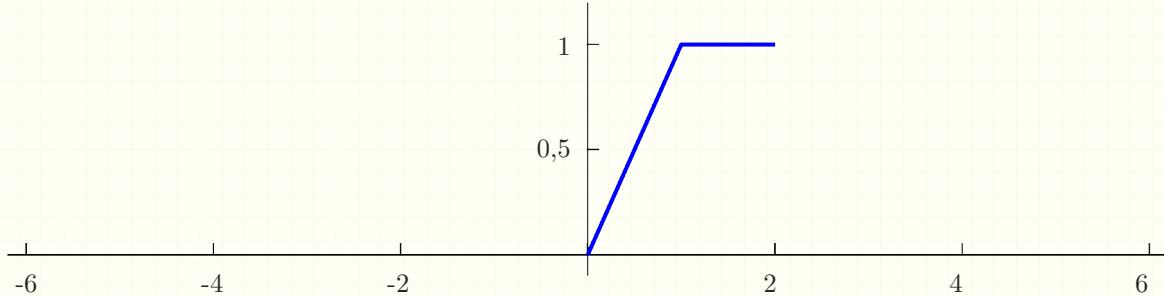


Nos próximos dois exemplos calculamos as Séries de Fourier de senos e cossenos para uma função. Note que, a pesar de no exemplo anterior termos explicitado as expressões das extensões, para calcular os coeficientes da série, essas expressões não são necessárias, pois vamos usar as fórmulas dos Teoremas 1.14 e 1.15.

EXEMPLO 1.5.7: Encontre a Série de Senos da função

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Note que essa função está definida apenas no intervalo $[0, 2]$. Seu gráfico tem a forma ilustrada a seguir.



Como queremos a Série de Senos, isso é, a Série de Fourier da extensão ímpar da função que só contém termos envolvendo senos, usamos as fórmulas do Teorema 1.15, com $L = 2$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx \\ &= \int_0^1 x \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx + \int_1^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx. \end{aligned}$$

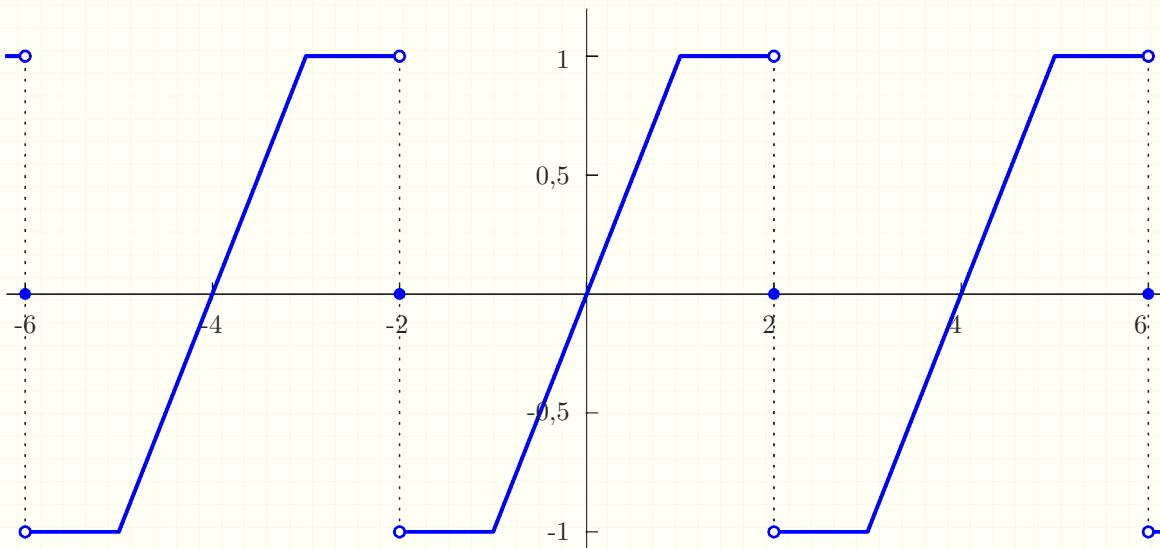
Integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{n\pi} \left(\frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi) \right) \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{n\pi} & n \text{ par}, \\ \frac{2}{n\pi} \left(\frac{2}{n\pi}(-1)^{(n-1)/2} + 1 \right) & n \text{ ímpar}. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, a série em senos fica da seguinte forma

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \left(\frac{2(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} + 1 \right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right) - \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}. \end{aligned}$$

Essa série vai convergir para a função ilustrada a seguir.



O próximo exemplo calcula a série de cossenos para a mesma função, produzindo uma extensão par.

EXEMPLO 1.5.8: Encontre a Série em Cossenos da função f do exemplo anterior.

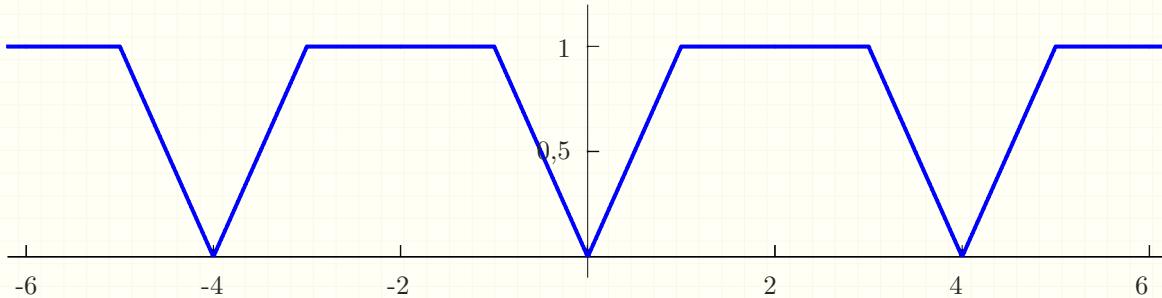
Como queremos a Série de Cossenos, isso é, a Série de Fourier da extensão par da função que só contém termos envolvendo cossenos, usamos as fórmulas do Teorema 1.14, com $L = 2$

$$a_n = \int_0^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Após as integrações e simplificações concluímos que Série de Cossenos é dada por

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(n\pi x) \\ &\quad - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right). \end{aligned}$$

O gráfico da soma dessa série é



Note que nos dois últimos exemplos construímos as séries de senos e cossenos de uma mesma função definida no intervalo $[0, 2]$, em cada caso a série converge para a extensão par ou ímpar da função, mas em nenhum momento precisamos escrever essas extensões. Elas são construídas automaticamente ao escolhermos um dos dois tipos de série.

Exercícios Seção 1.5

- 1)** Determine se a função é par, ímpar ou nenhuma das duas.

a) $f(x) = x^3 - 2x$ d) $f(x) = \sec(x)$
 b) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ e) $f(x) = |x|^3$
 c) $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$ f) $f(x) = e^{-x}$

- 2)** Dada a função f definida em um intervalo entre zero e L , esboce os gráficos das extensões par e ímpar de f de período $2L$. Desenhe três períodos da função estendida.

a) $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

c) $f(x) = 2 - x \quad 0 \leq x < 2$

d) $f(x) = x - 3 \quad 0 \leq x < 4$

e) $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

f) $f(x) = 4 - x^2 \quad 0 \leq x < 1$

- 3)** Encontre os coeficientes para as séries em senos e em cossenos para as extensões par e

ímpar da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

- 4)** Para cada função, encontre a Série de Fourier indicada e esboce o gráfico da função para qual a série converge em um intervalo de três períodos.

- a) Série de cossenos com período 4

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

- b) Série de senos com período 4

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

- c) Série de senos com período 2π

$$f(x) = 1 \quad 0 \leq x < \pi$$

- d) Série de cossenos com período 2π

$$f(x) = 1 \quad 0 \leq x < \pi$$

e) Série de senos com período 6π

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \pi \\ 1 & \pi \leq x < 2\pi \\ 2 & 2\pi \leq x < 3\pi \end{cases}$$

f) Série de cossenos com período 2

$$f(x) = x \quad 0 \leq x < 1$$

g) Série de cossenos com período $2L$

$$f(x) = L - x \quad 0 \leq x < L$$

h) Série de senos com período $2L$

$$f(x) = L - x \quad 0 \leq x < L$$

1.6 Fenômeno de Gibbs

Essa seção discute o **Fenômeno de Gibbs** que ocorre com as somas parciais da Série de Fourier de funções com descontinuidades tipo salto. Nesses casos, mesmo que a série converja para a função, as somas parciais apresentam um salto excessivo em torno da descontinuidade da função. Vamos ilustrar esse fenômeno usando uma onda quadrada com um exemplo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad f(x-2) = f(x) . \quad (1.6)$$

As somas parciais da série de Fourier dessa função são

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)\pi x)}{2k-1} . \quad (1.7)$$

Como f é contínua por partes, sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

para todo x onde f é contínua. A Figura 1.3 mostra a função f , em preto, e as somas parciais S_3 , em azul, e S_7 , em magenta. Observe que um pouco antes e um pouco depois de cada descontinuidade de f as somas parciais se afastam do valor da função.

Para facilitar a visualização a Figura 1.4 amplia o gráfico da Figura 1.3 na região logo após uma descontinuidade, $0 \leq x \leq 0,4$, e acrescenta o gráfico de S_{45} . Observe que com o aumento do número de termos a soma parcial se aproxima da função, porém, o pico do salto não diminui, sempre alcançando um valor máximo próximo de 1,09. Esse comportamento se mantém não importando quantos termos sejam

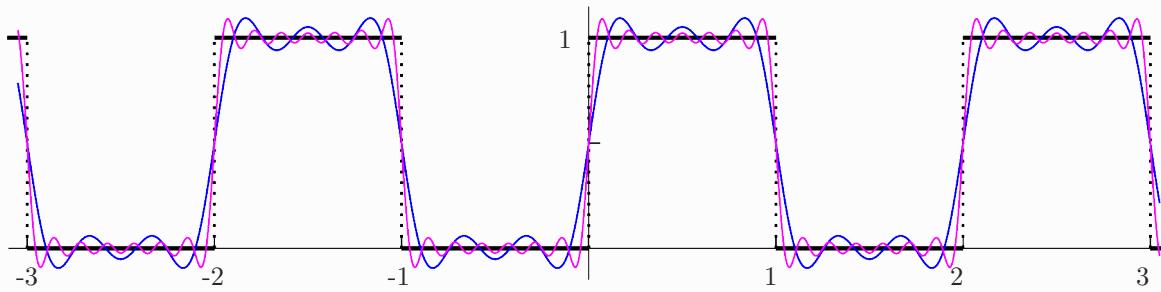


Figura 1.3: Função f e as somas parciais S_3 e S_7 .

acrescentados na soma parcial e é a ele que damos o nome de **Fenômeno de Gibbs**. Esse fenômeno nos obriga a repensar como entendemos a convergência da Série de Fourier e se é possível usar suas somas parciais como aproximações para a função.

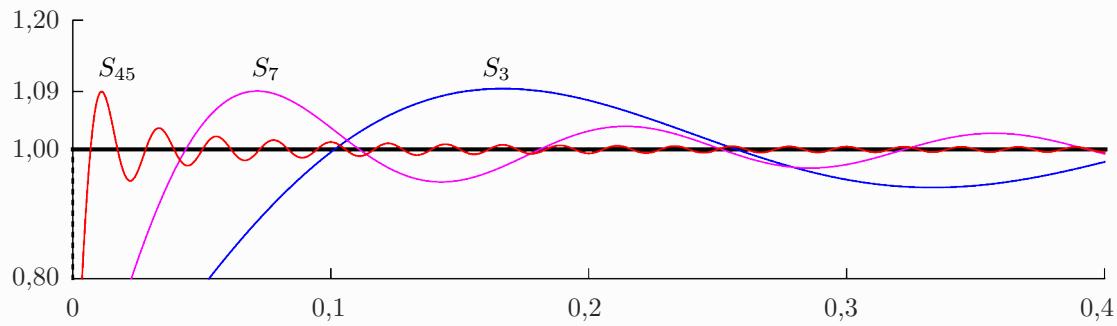


Figura 1.4: Ampliação do gráfico da função f e das somas parciais S_3 , S_7 e S_{45} . na região logo após a descontinuidade

Para entendermos em que sentido a Série de Fourier converge e suas somas parciais são aproximações da função, vamos definir a distância entre duas funções u e v em um intervalo $[a, b]$ e usar esse valor como medida do erro entre as somas parciais e a função. Uma definição possível é dizer que a distância é igual à maior diferença entre as funções, isso é

$$d_\infty(u, v) = \max_{x \in [a, b]} |u(x) - v(x)| .$$

Essa definição é baseada na **Norma Infinito** e, em geral, funciona muito bem para decidirmos se duas funções estão próximas ou não. Porém, devido ao Fenômeno de Gibbs se calcularmos a distância entre uma função com descontinuidade tipo salto e as somas parciais da sua Série de Fourier veremos que a distância tende para um valor finito, no caso do nosso exemplo um valor pouco menor do que 0,09. Como o erro não tende a zero somos forçados a concluir que as somas parciais não se aproximam da função o que contradiz o teorema da convergência da Série de Fourier e também vai contra nossa percepção visual de que as somas parciais estão se aproximando da função.

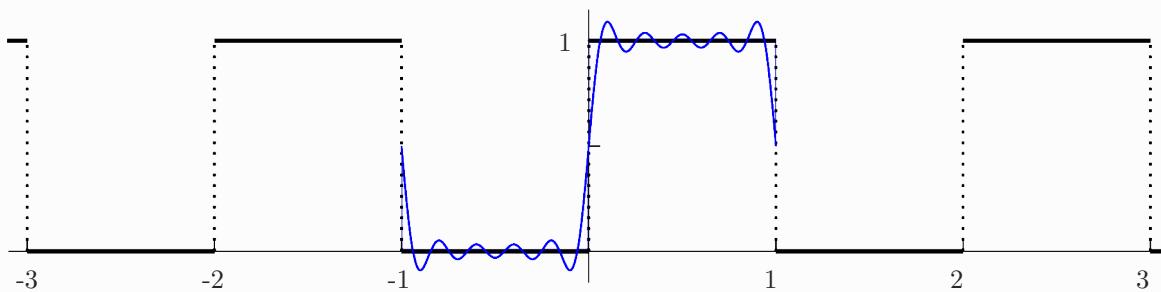


Figura 1.5: Calculo da diferença pela área.

A solução para esse aparente paradoxo é perceber que devemos medir a distância entre a função e as somas parciais como sendo a área entre elas, como mostra a Figura 1.5. Definimos então uma nova medida de distância

$$d_2(u, v) = \int_a^b (u(x) - v(x))^2 dx$$

que é baseada na **Norma 2**. Existe uma definição similar substituindo a elevação ao quadrado pelo módulo que corresponde a **Norma 1**. Porém, o quadrado é preferível pois é derivável e possui outras propriedades desejáveis que estão além da discussão dessa seção.

Usando essa medida de distância para calcular o erro, a diferença entre as somas parciais e a função tende a zero, como esperado, independentemente da função possuir descontinuidades ou não. Analisando novamente a Figura 1.4 podemos perceber que a área entre as somas parciais e a função realmente está diminuindo. Mesmo que o ponto máximo do pico não diminua sua base diminui e portanto sua área tende a zero.

1.7 Revisão

- 1) [resp]** Obtenha a série de Fourier para as funções apresentadas abaixo.

a) $q(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

b) $g(x) = -x, \quad -2 \leq x \leq 2$

- 2) [resp]** (Estudando uma função por sua série de Fourier) Considere uma função f contínua, com derivada contínua, definida em intervalo simétrico. A série de Fourier de sua extensão

periódica é dada por

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \cos nx$$

Com base nessa série, vamos obter algumas informações sobre a função f .

- a) A função f possui alguma simetria (par ou ímpar)? Se sim, qual?
- b) Qual o período (da extensão) de f ?

c) Qual o valor de f para $x = \pi$?

d) Obtenha os pontos críticos da função f .

3) Seja $f(x) = x^2$ para $-1 \leq x < 1$ e $f(x) = f(x + 2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

a) Encontre a série de Fourier de f de período 2.

b) Esboce o gráfico da função definida pela série de Fourier de f em um intervalo de três períodos.

c) Há alguma diferença entre o gráfico de f e da série de Fourier de f ?

4) Seja $f(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < 0 \\ L, & 0 < x < L \end{cases}$

a) Encontre a série de Fourier de f de período $2L$.

b) Esboce o gráfico da função definida pela série de Fourier de f em um intervalo de três períodos.

c) Nos pontos onde a extensão periódica de f de período $2L$ não está definido a série de Fourier converge?

5) Seja $f(x) = \begin{cases} L + x, & -L \leq x < 0 \\ L - x, & 0 \leq x < L \end{cases}$ e $f(x) = f(x + 2L)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Encontre a série de Fourier de f de período $2L$.

b) Esboce o gráfico da função definida pela série de Fourier de f em um intervalo de três períodos.

c) Há alguma diferença entre o gráfico de f e da série de Fourier de f ?

2

Equações Diferenciais Parciais

3.1	Introdução	69
3.2	Condição de Dirichlet Homogênea	72
3.3	Condição de Dirichlet Não Homogênea	79
3.4	Condição de Neumann	82

2.1 Introdução

Vamos começar com uma breve apresentação sobre o que são equações diferenciais e como podemos classificá-las. Uma equação diferencial é uma equação que envolve derivadas de uma função que queremos determinar. Se todas as derivadas são em relação a uma única variável, isso é, todas as derivadas são ordinárias, dizemos que a equação é uma **Equação Diferencial Ordinária** (EDO). Por outro lado, se a equação envolver derivadas em mais do que uma variável da função, isso é, as derivadas envolvidas são parciais, dizemos que a equação é uma **Equação Diferencial Parcial** (EDP).

Uma função que satisfaz a equação é chamada de **Solução** da equação. Em geral equações diferenciais não possuem solução única, isso é, impondo apenas a equação diferencial teremos uma família de soluções possíveis. Para determinar uma função dentro das soluções possíveis precisamos impor condições extras que chamamos de **Condições de Fronteira** ou **Condições Iniciais**.

As equações diferenciais podem ser classificadas segundo vários critérios, já descrevemos a classificação com relação ao número de variáveis, onde as equações podem ser ordinárias, por exemplo

$$\text{Determinar } u(x) \text{ tal que} \quad u' + 2u = 1$$

ou parciais, por exemplo

$$\text{Determinar } u = y(x, y, z, t) \text{ tal que} \quad u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

Note que, para que a expressão ficasse mais legível suprimimos as variáveis da função $u(x, y, z, t)$ e indicamos as derivadas como índices

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y, z, t) .$$

Outro critério utilizado para classificar equações diferenciais é a derivada de maior ordem, dizemos que uma equação diferencial que envolve apenas derivadas de primeira ordem é uma **Equação Diferencial de Primeira Ordem**, por exemplo

$$\mathcal{L}(u) = au_x + bu + c = 0$$

da mesma forma nos referimos como uma **Equação Diferencial de Segunda Ordem** aquelas equações cuja derivada mais alta seja a segunda, por exemplo,

$$\mathcal{L}(u) = pu_{xx} + qu_x + ru + s = 0 .$$

Nesses exemplos, e em outras ocasiões, utilizamos a notação $\mathcal{L}(u)$ para indicar as operações aplicadas na função u .

Outro critério importante é a linearidade. Dizemos que uma equação diferencial é uma **Equação Diferencial Linear** se para quaisquer funções u e v e números a e b , vale a relação de linearidade

$$\mathcal{L}(au + bv) = a\mathcal{L}(u) + b\mathcal{L}(v) . \tag{2.1}$$

Uma propriedade extremamente importante das equações diferenciais lineares é que a combinação linear de soluções também é solução, isso é

$$\mathcal{L}(u) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(au + bv) = 0$$

Se a relação de linearidade (2.1) não for verdadeira dizemos que a equação é uma

Equação Diferencial Não-Linear.

Também podemos classificar as equações lineares como **Homogêneas** ou **Não Homogêneas**, uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem

$$p(t)y''(t) + q(t)y'(t) + r(t)y(t) = s(t)$$

será homogênea se $s(t) = 0$ e não homogênea caso contrário.

Nesse material vamos nos restringir ao estudo de Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem Lineares. Essas equações podem ser classificadas também segundo a “propagação da informação”, por esse critério, as equações serão divididas em três classes que, por questões históricas, são chamadas de Hiperbólicas, Parabólicas e Elípticas.

Uma **Equação Hiperbólica** é uma equação que modela uma evolução temporal com velocidade finita. Normalmente, essas equações precisam ser complementadas por condições iniciais e de fronteira. A **Equação da Onda**, que vamos estudar, é o exemplo mais simples dessa classe

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} s \tag{2.2}$$

Essa equação modela, por exemplo, a oscilação de uma corda elástica esticada, neste caso, o coeficiente α^2 é dado por

$$\alpha^2 = \frac{T}{\rho}$$

onde T é a tensão na corda e ρ é a massa por unidade de comprimento do material da corda.

Uma **Equação Parabólica** modela fenômenos que acontecem muito mais rápido do que a escala de tempo do observador, nesse caso a informação se propaga com “velocidade infinita”, esse tipo de equação também precisa de condições iniciais e de fronteira. Aqui vamos estudar a **Equação do Calor**

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{2.3}$$

como exemplo dessa classe de equações. Entre outros fenômenos essa equação modela a condução de calor em uma barra finita, neste caso a constante α^2 é conhecida como difusibilidade térmica e depende apenas do material do qual a barra é feita e pode

ser obtida por

$$\alpha^2 = \frac{k}{\rho s}$$

onde k é a condutividade térmica, ρ é a densidade e s é o calor específico do material na barra.

A terceira classe, das **Equações Elípticas**, modela situações de equilíbrio. Como as soluções dessas equações representam estados estacionários nenhuma das variáveis é interpretada como o tempo. Essas equações precisam apenas de condições de fronteira. A equação dessa categoria que vamos estudar é a **Equação de Laplace**

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 . \quad (2.4)$$

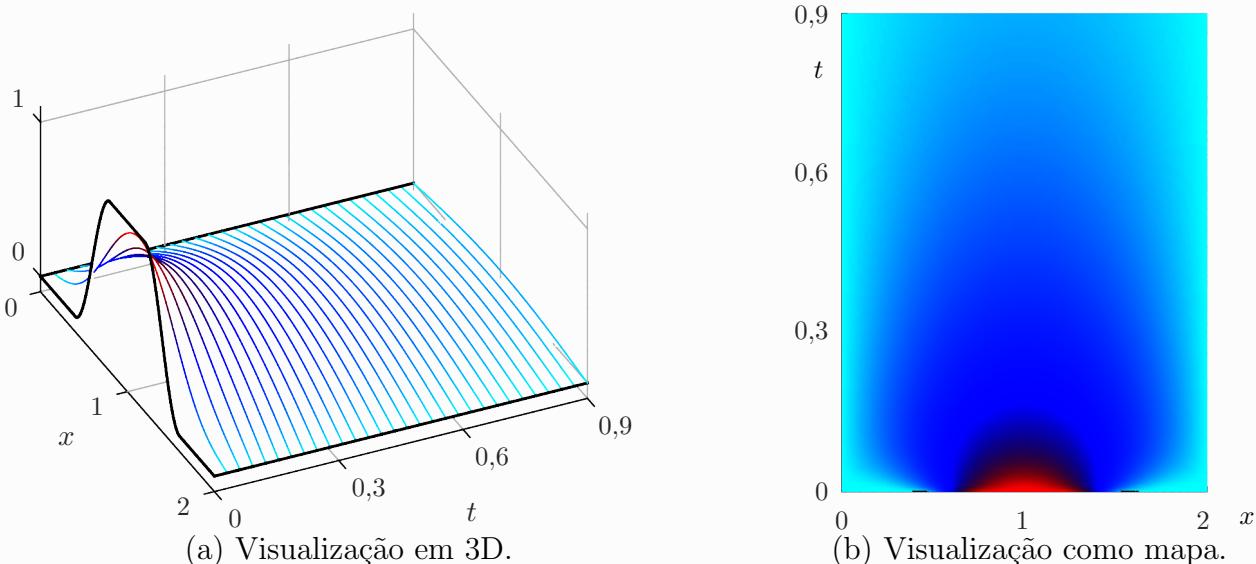
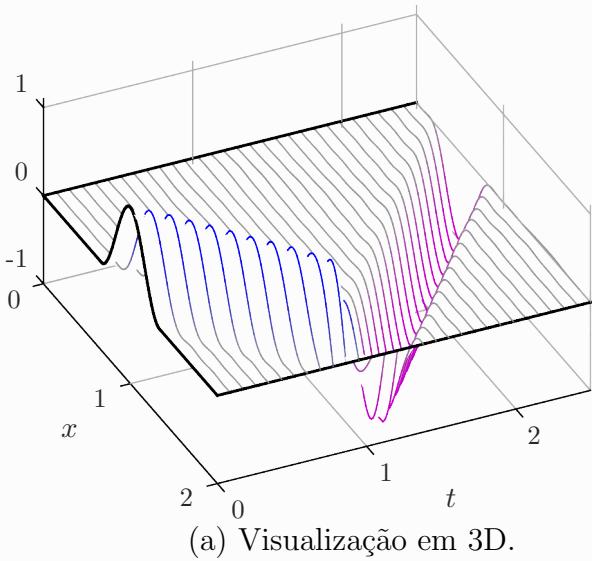


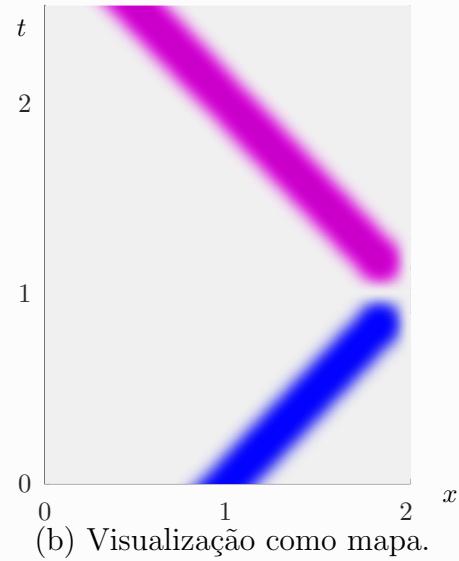
Figura 2.1: Exemplo de solução da equação do calor.

A Figura 2.1 mostra um exemplo de solução para a Equação do Calor em uma barra de comprimento 2 e com o tempo entre zero e 0,9. No instante inicial a parte central da barra tem temperatura igual a 1, com o avanço do tempo a temperatura se dissipa ficando mais próxima de zero. Os Gráficos 2.1a e 2.1b apresentam a mesma solução de formas alternativas.

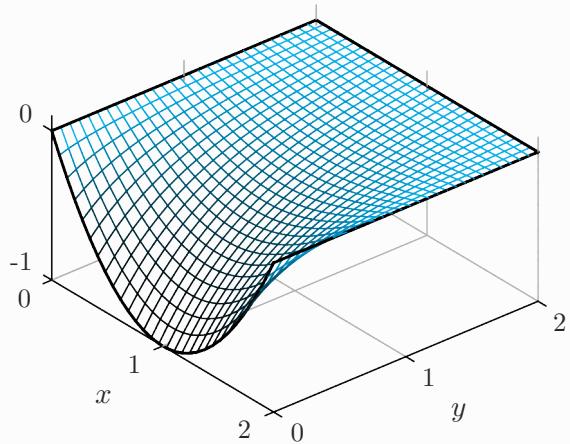
A Figura 2.2 mostra um exemplo de solução para a Equação a Onda com um pulso centrado em $x = 1$ no instante inicial $t = 0$ que se propaga para a direita até encontrar a fronteira e ser refletido com o sinal trocado. Os Gráficos 2.2a e 2.2b mostram a solução também em duas representações alternativas.



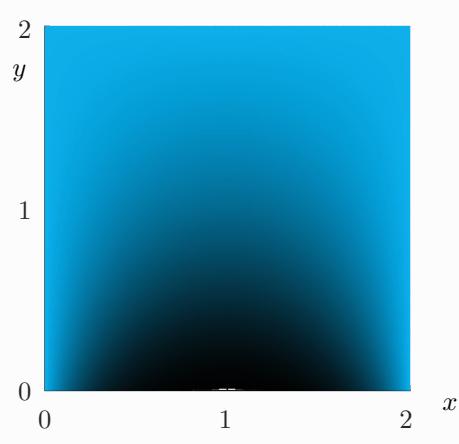
(a) Visualização em 3D.



(b) Visualização como mapa.

Figura 2.2: Exemplo de solução da equação da onda.

(a) Visualização em 3D.



(b) Visualização como mapa.

Figura 2.3: Exemplo de solução da equação de Laplace.

A Figura 2.3 mostra um exemplo de solução para equação de Laplace. Podemos considerar que essa solução representa uma membrana esticada com as extremidades presas no formato determinado pelas condições de fronteira. Novamente os gráficos, 2.3a e 2.3b mostram a solução de formas alternativas.

Existem diversas técnicas para obter soluções exatas ou aproximadas para EDP's, aqui vamos explorar a técnica de Separação de Variáveis e expansão da solução em Séries de Fourier. Para atingir esse objetivo vamos iniciar com uma revisão de equações diferenciais ordinárias e problemas de autovalores, em seguida apresentamos a técnica de Separação de Variáveis e, por fim, aplicamos essa técnica em cada uma das três EDP's descritas.

2.2 EDO's e o Problema de Autovalores

Apresentamos aqui uma revisão sobre as equações diferenciais ordinárias homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes. Assim como dos problemas de valor inicial, de valores de contorno e de autovalores. Esses resultados serão importantes para resolvemos as equações diferenciais parciais mais a frente.

Uma equação diferencial ordinária linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes para a função $y = y(x)$ pode ser escrita como

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2.5)$$

onde $a \neq 0$, b e c são constantes reais. Para resolvemos essa equação, fazemos $y(x) = e^{rx}$ para alguma constante r , calculamos suas derivadas e substituímos em (2.5) obtendo

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 .$$

Usando o fato que a exponencial não é nula, transformamos essa expressão na **Equação Característica** da EDO (2.5)

$$ar^2 + br + c = 0 .$$

Ao buscarmos os valores de r que satisfazem essa equação do segundo grau temos três possibilidades dependendo do valor de delta $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ existem duas raízes reais distintas,

$\Delta = 0$ existe apenas uma raiz real,

$\Delta < 0$ existem duas raízes complexas conjugadas.

A seguir analisaremos o que ocorre em cada um desses casos. Para algumas análises será necessário utilizar números complexos, na Seção A.6 existe um resumo dos resultados necessários.

No caso em que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, temos duas raízes reais distintas, que denotaremos por r_1 e r_2 , então

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

são as **Soluções Fundamentais** da equação. Além disso, qualquer solução da equação diferencial pode ser escrita como uma combinação linear dessas funções, portanto sua **Solução Geral** tem a forma

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \tag{2.6}$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

Assim como podemos mudar a base em um subespaço vetorial, também podemos mudar nossa escolha de soluções fundamentais. Uma escolha alternativa, que é bastante útil, é utilizar as **Funções Hiperbólicas** (veja (A.2) e (A.3)) que são combinações lineares da função exponencial

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Com essa escolha a solução geral é escrita como

$$y(x) = \tilde{c}_1 \cosh(r_1 x) + \tilde{c}_2 \operatorname{senh}(r_2 x) \tag{2.7}$$

para novas constantes \tilde{c}_1 e \tilde{c}_2 .

EXEMPLO 2.2.1: Dado $\sigma > 0$, encontrar a solução geral da equação

$$y'' - \sigma^2 y = 0.$$

A equação característica dessa equação diferencial é

$$r^2 - \sigma^2 = 0$$

suas raízes são

$$r_1 = \sigma \quad \text{e} \quad r_2 = -\sigma$$

portanto, a solução geral é dada por

$$y(x) = c_1 e^{\sigma x} + c_2 e^{-\sigma x}$$

com c_1 e c_2 constantes.

No caso em que $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ temos

$$r = -\frac{b}{2a}$$

como raiz da equação característica, nesse caso as soluções fundamentais são

$$y_1(x) = e^{-bx/2a} = \exp\left(\frac{-bx}{2a}\right) \quad \text{e} \quad y_2(x) = xe^{-bx/2a} = x \exp\left(\frac{-bx}{2a}\right)$$

portanto a solução geral é dada por

$$y(x) = c_1 \exp\left(\frac{-bx}{2a}\right) + c_2 x \exp\left(\frac{-bx}{2a}\right) \quad (2.8)$$

com c_1 e c_2 constantes.

EXEMPLO 2.2.2: Encontrar a solução geral da equação

$$y'' = 0 .$$

A equação característica dessa equação diferencial é

$$r^2 = 0$$

cuja raiz é zero, neste caso, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} \\ &= c_1 + c_2 x \end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes.

Quando $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a equação característica tem duas raízes complexas

conjugadas

$$r_1 = u + iw \quad \text{e} \quad r_2 = u - iw$$

Nesse caso podemos escolher as funções

$$y_1(x) = e^{ux} \sin(wx) \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{ux} \cos(wx).$$

como soluções fundamentais, obtendo assim, a solução geral

$$y(x) = c_1 e^{ux} \sin(wx) + c_2 e^{ux} \cos(wx). \quad (2.9)$$

Note que a parte real das raízes, u , aparece como coeficiente na função exponencial e portanto determina o crescimento ou decrescimento exponencial da solução, enquanto que a parte imaginária, w , aparece nas funções trigonométrica e portanto controla a frequência de oscilação da solução.

EXEMPLO 2.2.3: Dado $\sigma > 0$, encontrar a solução geral da equação

$$y'' + \sigma^2 y = 0.$$

A equação característica é

$$r^2 + \sigma^2 = 0$$

cujas raízes complexas, calculadas por Bhaskara, são

$$r_1 = i\sigma \quad \text{e} \quad r_2 = -i\sigma$$

portanto, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{0x} \sin(\sigma x) + c_2 e^{0x} \cos(\sigma x) \\ &= c_1 \sin(\sigma x) + c_2 \cos(\sigma x) \end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes.

O Teorema a seguir resume o que discutimos até aqui sobre as soluções para essas equações.

TEOREMA 2.1: SOLUÇÃO GERAL PARA EDO's

Dada uma equação diferencial ordinária linear homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0$$

para a função real $y = y(x)$, onde $a \neq 0$, b e c são constantes reais, sua equação característica é

$$ar^2 + br + c = 0$$

com soluções r_1 e r_2 . A solução geral da EDO se enquadra em um dos três casos a seguir.

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

Nesse caso as soluções r_1 e r_2 são reais e distintas, portanto

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\ &= \tilde{c}_1 \cosh(r_1 x) + \tilde{c}_2 \sinh(r_2 x) \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

Temos uma única raiz real $r = r_1 = r_2 = -b/2a$, portanto

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Aqui as soluções da equação característica são complexas

$$r_1 = u + iw \quad \text{e} \quad r_2 = u - iw$$

e produzem a solução geral

$$y(x) = c_1 e^{ux} \operatorname{sen}(wx) + c_2 e^{ux} \operatorname{cos}(wx)$$

Note que as soluções gerais dessas EDO's sempre possuem constantes arbitrárias e, portanto, representam famílias de funções. Para determinarmos uma função dentro dessas famílias precisamos impor condições extras. No caso dessas EDO's podemos impor essas condições em um único ponto ou em dois pontos distintos.

Ao impormos as condições em um único ponto criamos um **Problema de Valor**

Início (PVI), devido a suas aplicações na Física, costumamos pensar que a variável independente desses problemas é o tempo t , como nesse exemplo

Determinar $u(t)$ tal que

$$au'' + bu' + cu = 0$$

$$u(t_0) = u_0$$

$$u'(t_0) = v_0$$

onde t_0 é o ponto onde a **Condição Inicial** é imposta e u_0 e v_0 são os valores impostos para a função e sua derivada nesse ponto.

EXEMPLO 2.2.4: Determine a solução do problema de valor inicial

$$u'' - 4u = 0$$

$$u(0) = 3$$

$$u'(0) = 2 .$$

Nesse caso

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16$$

e as raízes da equação característica são

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{16}}{2} = -2$$

assim a solução geral para a equação diferencial é

$$u(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} .$$

Temos agora que determinar os valores para as constantes c_1 e c_2 . Começamos avaliando a solução geral no ponto inicial $t = 0$

$$u(0) = c_1 e^{2 \cdot 0} + c_2 e^{-2 \cdot 0} = c_1 + c_2$$

calculamos agora a derivada da solução geral

$$u'(t) = 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t}$$

e a avaliamos em zero

$$u'(0) = 2c_1 e^{2 \cdot 0} - 2c_2 e^{-2 \cdot 0} = 2c_1 - 2c_2 .$$

Impondo as condições iniciais obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ 2c_1 - 2c_2 = 2 \end{cases}$$

cuja solução é

$$c_1 = 2 \quad \text{e} \quad c_2 = 1$$

assim a solução do PVI é

$$u(t) = 2e^{2t} + e^{-2t} .$$

Outra forma de impor as condições extras é fixando o valor da função, ou da sua derivada, em dois pontos distintos, esse tipo de problema é chamado de **Problema de Valores de Contorno (PVC)**

Determinar $u(x)$ tal que

$$au'' + bu' + cu = p \tag{2.10}$$

$$u(x_1) = u_1$$

$$u(x_2) = u_2 .$$

Também devido a suas aplicações na Física, tipicamente interpretamos a variável independente de um problema de valores de contorno como uma variável espacial x . Nesse exemplo x_1 e x_2 são os pontos onde as condições de fronteira estão impostas e em geral estaremos interessados em obter uma solução no intervalo entre esses pontos.

Podemos classificar os problemas de valores de contorno como homogêneos ou não homogêneos. Considerando o problema (2.10) como exemplo, se $p = 0$ temos uma equação diferencial homogênea. Se u_1 e u_2 também forem zero dizemos que o PVC é **homogêneo**. Note que todo problema de valores de contorno homogêneo admite a solução identicamente nula $u(x) = 0$ que chamamos de **Solução Trivial**.

Determinar a existência da solução para um problema de valores de contorno pode ser mais complexo do que para um problema de valores iniciais, além disso os PVC

podem ter ou não solução e se tiverem ela pode ser única ou não. Os próximos exemplos ilustram a solução desses problemas.

EXEMPLO 2.2.5: Resolver o problema de valores de contorno

$$u'' + 2u = 0$$

$$u(0) = 1$$

$$u(\pi) = 0 .$$

Começamos resolvendo a equação característica onde

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -8$$

e as raízes da equação característica são

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{-8}}{2} = i\sqrt{2}$$

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{-8}}{2} = -i\sqrt{2}$$

portanto, a solução geral para a equação diferencial é

$$u(x) = c_1 \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \sin(\sqrt{2}x) .$$

Impondo a condição em $x = 0$ temos

$$u(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 = 1$$

portanto $c_1 = 1$. Podemos agora impor a segunda condição

$$u(\pi) = \cos(\sqrt{2}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{2}\pi) = 0$$

isolando c_2 temos

$$c_2 = -\frac{\cos(\sqrt{2}\pi)}{\sin(\sqrt{2}\pi)} = -\cot(\sqrt{2}\pi)$$

portanto a solução para o PVC é

$$u(x) = \cos(\sqrt{2}x) - \cot(\sqrt{2}\pi) \sin(\sqrt{2}x) .$$

O próximo exemplo é um caso onde o problema pode não ter solução ou ter infinitas soluções.

EXEMPLO 2.2.6: Resolver o problema de valores de contorno

$$u'' + u = 0$$

$$u(0) = 1$$

$$u(\pi) = a .$$

Sabemos que a solução geral da equação diferencial é

$$u(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) .$$

Impondo a primeira condição temos

$$u(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 = 1$$

portanto $c_1 = 1$. Ao impormos a segunda condição obtemos

$$u(\pi) = c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) = -c_1 = a$$

Se $a \neq -1$ essa condição não pode ser satisfeita e não existe nenhuma solução para o problema.

Se $a = -1$ a segunda condição é satisfeita, mas teremos infinitas soluções, pois c_2 pode assumir qualquer valor

$$u(x) = \cos(x) + c_2 \sin(x) .$$

Como veremos a frente, ao aplicarmos o método de Separação de Variáveis vamos obter um tipo de problema envolvendo equações diferenciais ordinárias que chamamos de **Problema de Autovalores**. Esses problemas consistem em determinar as condições em que um tipo específico de problema de valores de contorno possui soluções não triviais. Ao invés de apresentar uma teoria geral vamos explorar esse conceito através de um exemplo, nesse caso queremos determinar para quais valores de λ o seguinte problema de valores de contorno possui soluções não triviais.

Determinar $u(x)$ tal que

$$u'' + \lambda u = 0 \tag{2.11}$$

$$u(x_1) = 0$$

$$u(x_2) = 0$$

Note que esse problema sempre possui a solução trivial $u(x) = 0$, mas essa solução raramente é relevante, por isso, estamos interessados na existência de outras soluções. Observe a semelhança com o problema de encontrar os autovalores e autovetores de uma matriz, A , onde buscamos os valores λ tais que o sistema linear

$$Av = \lambda v$$

possua soluções não triviais. Cada valor para λ que satisfaz essa condição é chamado **Autovalor** e o vetor v correspondente é chamado **Autovetor**. O próximo exemplo ilustra as possibilidades de solução dos problemas de valores de contorno dados valores diferentes para λ .

EXEMPLO 2.2.7: Resolver o problema de valores de contorno

$$u'' + \lambda u = 0$$

$$u(0) = 0$$

$$u(\pi) = 0$$

para $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$.

Sabemos que a solução geral da equação diferencial é

$$u(x) = c_1 \cos(\sigma x) + c_2 \sin(\sigma x)$$

onde fizemos $\sigma = \sqrt{\lambda}$ para evitar a repetição da raiz.

Impondo a primeira condição temos

$$u(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 = 0 .$$

Assim a segunda condição pode ser escrita como

$$u(\pi) = c_2 \sin(\sigma\pi) = 0 .$$

Se $\lambda = 1$ temos que $\sigma = 1$ e o seno se anula, pois

$$\sin(\sigma\pi) = \sin(\pi) = 0 .$$

Portanto a condição será satisfeita para qualquer valor de c_2 e o PVC possui

infinitas soluções

$$u(x) = c_2 \sin(x) .$$

Porém, se $\lambda = 2$ temos que $\sigma = \sqrt{2}$ e portanto

$$\sin(\sigma\pi) = \sin(\sqrt{2}\pi) \neq 0$$

assim, para satisfazer a segunda condição precisamos impor $c_2 = 0$ e o PVC possui apenas a solução trivial

$$u(x) = 0 .$$

Nosso objetivo é encontrar todos os valores de λ para os quais o PVC (2.11) possui soluções não triviais. Sem perda de generalidade vamos escolher o domínio como sendo o intervalo $[0, L]$, ou seja $x_1 = 0$ e $x_2 = L$.

$$\begin{aligned} u'' + \lambda u &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ u(L) &= 0 . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Além disso, vamos dividir o problema em três casos $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$, pois a solução geral para a equação diferencial será diferente em cada um.

Ao abordarmos o primeiro caso, $\lambda > 0$, definimos $\sigma^2 = \lambda$, para simplificar as expressões evitando a repetições de raízes quadradas. Note que $\sigma \neq 0$ e podemos considerá-lo sempre positivo. Nesse caso o problema (2.11) assume a forma

$$\begin{aligned} u'' + \sigma^2 u &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ u(L) &= 0 . \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.1 sua solução geral é

$$u(x) = c_1 \cos(\sigma x) + c_2 \sin(\sigma x) .$$

Como vimos no Exemplo 2.2.7 a condição $u(0) = 0$ implica que $c_1 = 0$, portanto a solução assume a forma

$$u(x) = c_2 \sin(\sigma x)$$

como queremos soluções não triviais c_2 não pode ser zero, assim ao impormos a segunda condição

$$u(L) = c_2 \operatorname{sen}(\sigma L) = 0$$

precisamos que

$$\operatorname{sen}(\sigma L) = 0 .$$

Sabemos que a função seno se anula para todo múltiplo inteiro de π portanto essa condição será satisfeita sempre que

$$\sigma_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Como $\lambda = \sigma^2$ temos que os **Autovalores** são

$$\lambda_n = \sigma_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.13)$$

para cada autovalor temos uma **Autofunção** correspondente

$$u_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) . \quad (2.14)$$

Como as autofunções são determinadas a menos de uma constante multiplicativa escolhemos a constante c_2 igual a 1.

Considerando agora o caso $\lambda < 0$, fazemos agora $\lambda = -\sigma^2$, e o problema (2.11) é escrito como

$$u'' - \sigma^2 u = 0$$

$$u(0) = 0$$

$$u(L) = 0 .$$

Nesse momento escolhemos escrever a solução geral em termos das funções hiperbólicas (2.7) pois elas serão mais convenientes quando aplicarmos as condições de fronteira

$$u(x) = c_1 \cosh(\sigma x) + c_2 \operatorname{senh}(\sigma x) .$$

Aplicando a primeira condição verificamos que

$$u(0) = c_1 \cosh(0) + c_2 \operatorname{senh}(0) = c_1 = 0$$

então a solução geral passa a ser

$$u(x) = c_2 \operatorname{senh}(\sigma x)$$

A segunda condição impõe que

$$u(L) = c_2 \operatorname{senh}(\sigma L) = 0$$

porém, a função $\operatorname{senh}(x)$ só é zero quando $x = 0$ e portanto a única solução possível para essa condição é $c_2 = 0$. Como, para todo $\lambda < 0$, a única solução possível é a solução trivial, não existem autovalores negativos para o problema (2.11).

O último caso a ser considerado é $\lambda = 0$, agora o problema (2.11) se resume a

$$u'' = 0$$

$$u(0) = 0$$

$$u(L) = 0$$

cuja solução geral é

$$u(x) = c_1 x + c_2 .$$

Ao impormos as condições verificamos que $c_1 = c_2 = 0$ e, portanto, $\lambda = 0$ não é um autovalor do problema (2.11).

Ao longo desse capítulo precisaremos resolver diversos problemas de autovalores similares a esse, o método de solução sempre será o mesmo discutido aqui.

Exercícios Seção 2.2

- 1) [resp]** Encontre a solução geral da equação

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

- 2) [resp]** Encontre a solução para o problema de valor inicial

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 3$$

- 3) [resp]** Encontre a solução para o problema de valor inicial

$$4y'' - 8y' + 3y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = \frac{1}{2}$$

- 4) [resp]** Encontre a solução geral para cada equação diferencial

a) $y'' + 2y' - 3y = 0$

b) $y'' + 3y' + 2y = 0$

c) $6y'' - y' - y = 0$

d) $2y'' - 3y' + y = 0$

e) $y'' + 5y' = 0$

f) $4y'' - 9y = 0$

g) $y'' - 9y' + 9y = 0$

h) $y'' - 2y' - 2y = 0$

5) Encontre a solução de cada problema de valor inicial

a) $y'' + y' - 2y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$

b) $y'' + 4y' + 3y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = -1$

c) $6y'' - 5y' + y = 0 \quad y(0) = 4 \quad y'(0) = 0$

d) $y'' + 3y' = 0 \quad y(0) = -2 \quad y'(0) = 3$

e) $y'' + 5y' + 3y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

f) $2y'' + y' - 4y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

g) $y'' + 8y' - 9y = 0 \quad y(1) = 1 \quad y'(1) = 0$

h) $4y'' - y = 0 \quad y(-2) = 1 \quad y'(-2) = -1$

6) Para cada problema de valores de contorno encontre a solução ou mostre que não existe uma solução

a) $y'' + y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(\pi) = 1$

b) $y'' + 2y = 0 \quad y'(0) = 1 \quad y'(\pi) = 0$

c) $y'' + y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(L) = 0$

d) $y'' + y = 0 \quad y'(0) = 1 \quad y(L) = 0$

e) $y'' + y = x \quad y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$

f) $y'' + 2y = x \quad y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$

g) $y'' + 4y = \cos(x) \quad y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$

h) $y'' + 4y = \sin(x) \quad y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$

i) $y'' + 4y = \cos(x) \quad y'(0) = 0 \quad y'(\pi) = 0$

j) $y'' + 3y = \cos(x) \quad y'(0) = 0 \quad y'(\pi) = 0$

7) Encontre os autovalores e as autofunções para cada problema de valores de contorno, assuma que todos os autovalores, λ , são reais.

a) $y'' + \lambda y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(\pi) = 0$

b) $y'' + \lambda y = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$

c) $y'' + \lambda y = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y'(\pi) = 0$

d) $y'' + \lambda y = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y(L) = 0$

e) $y'' + \lambda y = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y'(L) = 0$

f) $y'' - \lambda y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(L) = 0$

2.3 Método de Separação de Variáveis

O método de **Separação de Variáveis** consiste essencialmente em supor que existe uma solução da equação diferencial parcial que pode ser escrita como o produto de outras funções, onde cada uma dessas novas funções depende de uma única variável. Claro que essa suposição nem sempre é verdadeira mas, como veremos, ela é muito eficaz para os problemas que desejamos resolver.

Vamos apresentar esse método aplicando-o na equação do calor (2.3) como um exemplo

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} . \quad (2.15)$$

Começamos supondo que podemos escrever a solução da equação diferencial parcial como o produto de duas funções, onde cada função depende de uma única variável

$$u(x, t) = X(x)T(t) .$$

Derivando u uma vez com relação a t e duas vezes com relação a x , obtemos expressões para as derivadas de u envolvidas na equação do calor

$$u_t(x, t) = X(x)T'(t) \quad \text{e} \quad u_{xx}(x, t) = X''(x)T(t) .$$

Substituindo essas derivadas na equação (2.15) obtemos

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) .$$

Agrupando os termos que dependem de x ou t , chegamos a

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} .$$

Note que essa equação consiste de uma igualdade entre uma função que só depende de t e outra que só depende de x , a única forma para essa igualdade ser verdadeira é que ambas sejam constantes. Dessa forma podemos escrever

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

para alguma constante λ . O sinal negativo foi escolhido para simplificar as equações ordinárias que serão produzidas. Podemos agora desmembrar essa equação em uma envolvendo apenas x e outra envolvendo apenas t , cada uma dessas novas equações é uma EDO linear com coeficientes constantes que podem ser resolvidas com as técnicas da Seção 2.2

$$X'' + \lambda X = 0 , \tag{2.16}$$

$$T' + \alpha^2 \lambda T = 0 . \tag{2.17}$$

Nas próximas seções vamos aplicar essa técnica para resolver a equação do Calor, da Onda e de Laplace.

Exercícios Seção 2.3

1) Determine se o método de separação de variáveis pode ser aplicado a cada EDP para obter um par de EDO's. Caso seja possível, encontre as EDO's.

- a) $xu_{xx} + u_t = 0$
- b) $tu_{xx} + xu_t = 0$

- c) $u_{xx} + u_{xt} + u_t = 0$
- d) $[p(x)u_x]_x - r(x)u_{tt} = 0$
- e) $u_{xx} + (x+y)u_{yy} = 0$
- f) $u_{xx} + u_{yy} + xu = 0$

2.4 Revisão

1) [resp] (Calor em um fio) Considere um fio reto uniforme, de material homogêneo, com comprimento $L = \pi$ metros. A temperatura na posição x , em metros, do fio no instante t , em segundos, é dada por uma função $u(x,t)$, em graus Celsius, com $0 \leq x \leq \pi$ e $t \geq 0$. Sabe-se que a evolução do calor nesse fio satisfaz a EDP

$$u_t = u_{xx}$$

Sabe-se também que a temperatura nas extremidades do fio são mantidas constantes em 0°C e que a temperatura no fio no instante inicial é dada por

$$f(x) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

Com base nessas informações:

- a) Apresente as condições de fronteira e condição inicial para esse problema, em termos da função u .
- b) Obtenha a função u que é solução para esse problema.

Dica: $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$

2) [resp] (Equação de Laplace) Seja $u = u(x,y)$ função definida no retângulo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Considere a equação de Laplace com as condições de fronteira

$$(I) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(0,y) = 0 \\ u(1,y) = 0 \\ u_y(x,0) = \ell(x) \\ u_y(x,1) = 0 \end{cases}$$

onde ℓ é definida em $0 \leq x \leq 1$.

a) Supondo a separação de variáveis $u(x,y) = F(x)G(y)$, apresente os PVI's que as funções F e G satisfazem (não é necessário resolvê-los).

b) Sejam $u_n(x,y) = \sin(n\pi x) \cosh[n\pi(1-y)]$, para cada $n = 1, 2, 3, \dots$, as soluções fundamentais baseadas nos PVI's do item anterior. Apresente a solução em série para o

problema (I) , explicitando as fórmulas para os coeficientes.

3) [resp] Considere o seguinte problema de valor inicial e de contorno:

$$u_{tt} = 4u_{xx} \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0 = u(2,t) \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 5 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 2 \sin(2\pi x) \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$u_t(x,0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 2$$

- a) Mostre que se existe uma solução do problema na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, então existe uma constante λ tal que

$$X'' + \lambda X = 0 \quad X(0) = X(2) = 0$$

$$T'' + 4\lambda T = 0 \quad T'(0) = 0$$

- b) Admita que apenas $\lambda > 0$ gera soluções admissíveis para o problema. Neste caso, qual a solução geral do problema $X'' + \lambda X = 0$? Utilize as condições iniciais para mostrar que apenas $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{4}$.

- c) Mostre que

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \cos(n\pi t) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

são as soluções fundamentais do problema.

- d) Use o item anterior e a condição inicial para encontrar a solução $u(x,t)$.

4) Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \pi^2 u & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = -1 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- a) Suponha que $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, onde v é a solução do problema estacionário

$$v_{xx} + \pi^2 v = 0, \quad v(0) = 1 \quad \text{e} \quad v(1) = -1$$

Mostre que para toda constante c ,

$$v(x) = c \operatorname{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)$$

é solução do problema estacionário.

b) Mostre que w satisfaz o problema homogêneo com condição inicial

$$w(x,0) = c \operatorname{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)$$

c) Use os itens anteriores e os resultados da questão anterior para encontrar a solução $u(x,t)$.

Dica: lembre que as funções $\operatorname{sen}(n\pi x)$ e $\cos(m\pi x)$ são ortogonais.

5) Mostre que a equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

em coordenadas polares é

$$v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + \frac{1}{r} v_r = 0$$

onde $v(r,\theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

6) [resp] Considere o seguinte problema de valor inicial e de contorno:

$$u_t = u_{xx} + \pi^2 u \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(0,t) = 0 = u(1,t), t > 0$$

$$u(x,0) = -\operatorname{sen}(\pi x) + 2 \operatorname{sen}(3\pi x), 0 \leq x \leq 1$$

a) Mostre que se existe uma solução do problema na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, então existe uma constante λ tal que

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + (\lambda - \pi^2)T = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

b) Admita que apenas $\lambda > 0$ gera soluções admissíveis para o problema. Neste caso, qual a solução geral do problema $X'' + \lambda X = 0$? Utilize as condições iniciais para mostrar que apenas $\lambda = n^2\pi^2$.

c) Mostre que $u_n(x,t) = e^{\pi^2(1-n^2)t} \operatorname{sen}(n\pi x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, são as soluções fundamentais do problema.

d) Use o item anterior e a condição inicial para encontrar a solução $u(x,t)$.

7) Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \pi^2 u, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = 1, u(1,t) = -1, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Suponha que $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, onde v é a solução do problema estacionário

$$v_{xx} + \pi^2 v = 0, \quad v(0) = 1 \text{ e } v(1) = -1$$

Mostre que para toda constante c , $v(x) = c \operatorname{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)$ é solução do problema estacionário.

b) Mostre que w satisfaz o problema homogêneo com condição inicial

$$w(x,0) = c \operatorname{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)$$

c) Use os itens anteriores e os resultados da questão anterior para encontrar a solução $u(x,t)$.

Dica: Lembre que as funções $\operatorname{sen}(n\pi x)$ e $\cos(m\pi x)$ são ortogonais.

8) Considere o problema

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Admita que a solução do problema tem transformada de Fourier e que

$$\lim_{w \rightarrow \pm\infty} \hat{u}(w,y) = 0$$

Mostre que

$$\hat{u}(w,t) = e^{-w^2} e^{-|w|y}$$

b) Mostre que

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(w,t))(x) \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{4}} \frac{y}{z^2 + y^2} dz \end{aligned}$$

c) Mostre que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

9) Considere o seguinte problema de valor inicial e de contorno:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(1,t), & t > 0 \\ u(x,0) = 3 - \cos(\pi x) + 2 \cos(3\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Mostre que se existe uma solução do problema na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, então existe uma constante λ tal que

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + \lambda T = 0 \\ X'(0) = X'(1) = 0 \end{cases}$$

b) Admita que apenas $\lambda \geq 0$ gera soluções admissíveis para o problema. Para $\lambda > 0$, qual a solução geral do problema $X'' + \lambda X = 0$? Utilize as condições iniciais para mostrar que, neste caso, apenas $\lambda = n^2\pi^2$.

c) Use o item anterior e o fato que $\lambda = 0$ gera apenas soluções constantes para mostrar que $u_n(x,t) = e^{-\pi^2 n^2 t} \cos(n\pi x)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, são as soluções fundamentais do problema.

d) Use o item anterior e a condição inicial para encontrar a solução $u(x,t)$.

10) Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \pi^2 u, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = 1, u(1,t) = -1, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Suponha que $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, onde v é a solução do problema estacionário

$$v_{xx} + \pi^2 v = 0, \quad v(0) = 1 \text{ e } v(1) = -1$$

Mostre que para toda constante c , $v(x) = c \operatorname{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)$ é solução do problema estacionário.

b) Mostre que w satisfaz o problema homogêneo com condição inicial

$$w(x,0) = c \operatorname{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)$$

c) Use os itens anteriores e os resultados da questão anterior para encontrar a solução $u(x,t)$. Dica: lembre que as funções $\operatorname{sen}(n\pi x)$ e $\cos(m\pi x)$ são ortogonais.

3

Equação do Calor

4.1	Introdução	89
4.2	Solução	90

3.1 Introdução

A equação diferencial parcial linear de segunda ordem (2.3)

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

é chamada de **Equação do Calor**, pois, entre outros fenômenos, ela modela a dissipação de calor em uma barra de material homogêneo com seção plana pequena. A seção plana deve ser pequena o suficiente para que possamos desprezar a dissipação nas direções perpendiculares ao comprimento da barra. Nesse caso a constante α^2 é conhecida como difusividade térmica e depende apenas do material do qual a barra é feita e pode ser obtida por

$$\alpha^2 = \frac{k}{\rho s}$$

onde k é a condutividade térmica, ρ é a densidade e s é o calor específico do material na barra. Note que se t for o tempo medido em segundos e x a distância medida em metros α^2 tem a unidade de metros ao quadrado por segundo.

A dissipação de calor na barra depende da sua temperatura inicial e do ambiente onde ela está inserida, essa informação é fornecida pelas condição inicial e de fronteira. Ao

agregarmos essas condições à equação diferencial criamos o **Problema de Dissipação do Calor em uma Barra Finita**

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < t \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 \leq x \leq L \\ \text{Condição em } x = 0 & \quad 0 < t \\ \text{Condição em } x = L & \quad 0 < t . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nesse problema consideramos uma barra de comprimento $L > 0$ e a representamos no intervalo $0 \leq x \leq L$. Iniciamos a observação no instante $t = 0$ e seguimos por todo o tempo. A função $u(x, t)$ indica a temperatura da barra na posição x e instante t . Note que essa função obedece a equação diferencial no interior do domínio e as condição inicial e de fronteira nas bordas do domínio. A distribuição de temperatura inicial é determinada pela condição inicial $u(x, 0) = f(x)$.

Falta determinar quais são as condições nos extremos da barra. Existem várias escolhas possíveis para essas condições que dependem do que se deseja modelar, podemos impor condições de simetria, de entrada ou saída de calor ou impor uma temperatura fixa entre outras possibilidades. Aqui vamos apresentar os casos que podem ser resolvidos mais facilmente pelas técnicas que estamos empregando.

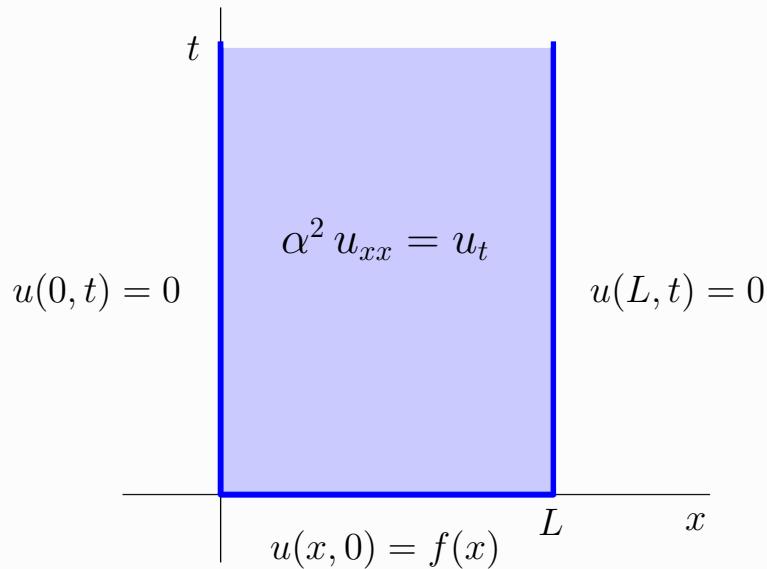


Figura 3.1: Domínio e condições do problema de dissipação do calor com fronteiras de Dirichlet homogêneas.

O primeiro tipo de condição de fronteira que vamos considerar é a **Condição de Dirichlet Homogênea**. Essa condição impõe que a temperatura é sempre zero nos

dois extremos da barra o que nos leva ao problema

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < t \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) &= 0 & 0 < t \\ u(L, t) &= 0 & 0 < t . \end{aligned} \tag{3.2}$$

A Figura 3.1 ilustra esse problema mostrando seu domínio, condição inicial e de fronteira. Se a temperatura inicial for nula, isso é, $f(x) = 0$ a solução desse problema é trivial $u(x, t) = 0$ o que não fornece nenhuma informação relevante. Dessa forma, impomos que $f(x)$ não seja nula e portanto a solução trivial não pode satisfazer esse problema.

Se escolhemos impor um valor de temperatura diferente de zero em um dos extremos da barra temos as **Condição de Dirichlet Não Homogênea**, que nos leva ao problema

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < t \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) &= u_1 & 0 < t \\ u(L, t) &= u_2 & 0 < t \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde u_1 e u_2 indicam as temperaturas fixas em cada extremo da barra.

Outra escolha possível é impor fluxos constantes como condições de fronteira, fazemos isso impondo valores para as derivadas da função u em relação a variável x . Essa é a **Condição de Neumann** e define o problema

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < t \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 \leq x \leq L \\ u_x(0, t) &= v_1 & 0 < t \\ u_x(L, t) &= v_2 & 0 < t \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde v_1 e v_2 indicam as variações de temperatura em cada extremo da barra. Se um desses valores for nulo ele indica que não há fluxo nesse extremo o que representa uma condição de simetria.

Na próxima subseção mostramos como resolver a equação do calor com condição de Dirichlet homogênea. Na Subseção 3.3 apresentamos o problema com condição de Dirichlet não homogênea e na Subseção 3.4 com condição de Neumann.

3.2 Condição de Dirichlet Homogênea

Nessa subseção vamos resolver o problema de dissipação de calor com condição de Dirichlet homogênea (3.2).

DEFINIÇÃO 3.1: PROBLEMA DO CALOR COM FRONTEIRA DE DIRICHLET HOMOGÊNEA

O problema de propagação de calor com fronteira de Dirichlet homogênea consiste da equação do calor com as seguintes condições iniciais e de fronteira

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < L & \text{e} & 0 < t \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 & 0 < t \end{aligned}$$

onde $L > 0$ e f não é identicamente nula no intervalo $[0, L]$.

Como vimos na Seção 2.3, sobre separação de variáveis, ao supormos que é possível escrever a função u como o produto de duas funções onde cada uma depende de uma única variável $u(x, t) = X(x)T(t)$ a equação diferencial parcial se transforma em duas equações diferenciais ordinárias (2.16) e (2.17)

$$X'' + \lambda X = 0 ,$$

$$T' + \alpha^2 \lambda T = 0 .$$

Consideraremos primeiro a equação em x e as condições de fronteira do Problema (3.1)

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad 0 < t$$

reescrevendo essas condições em termos das funções X e T temos as expressões

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0$$

$$u(L, t) = X(L)T(t) = 0$$

que devem valer para todo $t > 0$. Como fazer $T(t) = 0$ para todo t leva à solução trivial devemos impor

$$X(0) = X(L) = 0 .$$

Assim chegamos a um problema de autovalores para determinar a função X

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (3.5)$$

$$X(0) = 0$$

$$X(L) = 0 .$$

Note que esse é exatamente o problema (2.12) que resolvemos na Seção 2.2. Sabemos então que soluções não triviais para esse problema só existem para os **autovalores**

$$\lambda_n = \sigma_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

que nos fornecem as **autofunções**

$$X_n(x) = \sin(\sigma_n x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) . \quad (3.7)$$

Os gráficos do lado esquerdo da Figura 3.2 mostram as sete primeiras funções X_n . Note que, todas essas funções valem zero nos extremos do intervalo, $x = 0$ e $x = L$, atendendo a condição de fronteira de Dirichlet homogênea. Além disso, podemos ver que o valor de n determina o número de oscilações dentro do intervalo.

Agora que os valores possíveis para λ estão estabelecidos, podemos voltar na equação envolvendo o tempo

$$T' + \alpha^2 \sigma_n^2 T = 0$$

cuja solução é

$$T_n(t) = e^{-\alpha^2 \sigma_n^2 t} = \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right) . \quad (3.8)$$

Os gráficos do lado direito da Figura 3.2 mostram as sete primeiras funções T_n . Note que, todas essas funções são exponenciais decrescentes que valem 1 quando $t = 0$ e o valor de n determina a rapidez com que elas decrescem.

Podemos agora desfazer a separação de variáveis $u(x, t) = X(x)T(t)$ usando as soluções (3.7) e (3.8) e obter a seguinte lista de soluções para a equação do calor

$$u_n(x, t) = \exp\left(-\alpha^2 \sigma_n^2 t\right) \sin\left(\sigma_n x\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.9)$$

Qualquer uma das funções u_n satisfaz a equação diferencial e as condições de fronteira do problema de dissipação do calor com condição de Dirichlet homogênea, por isso

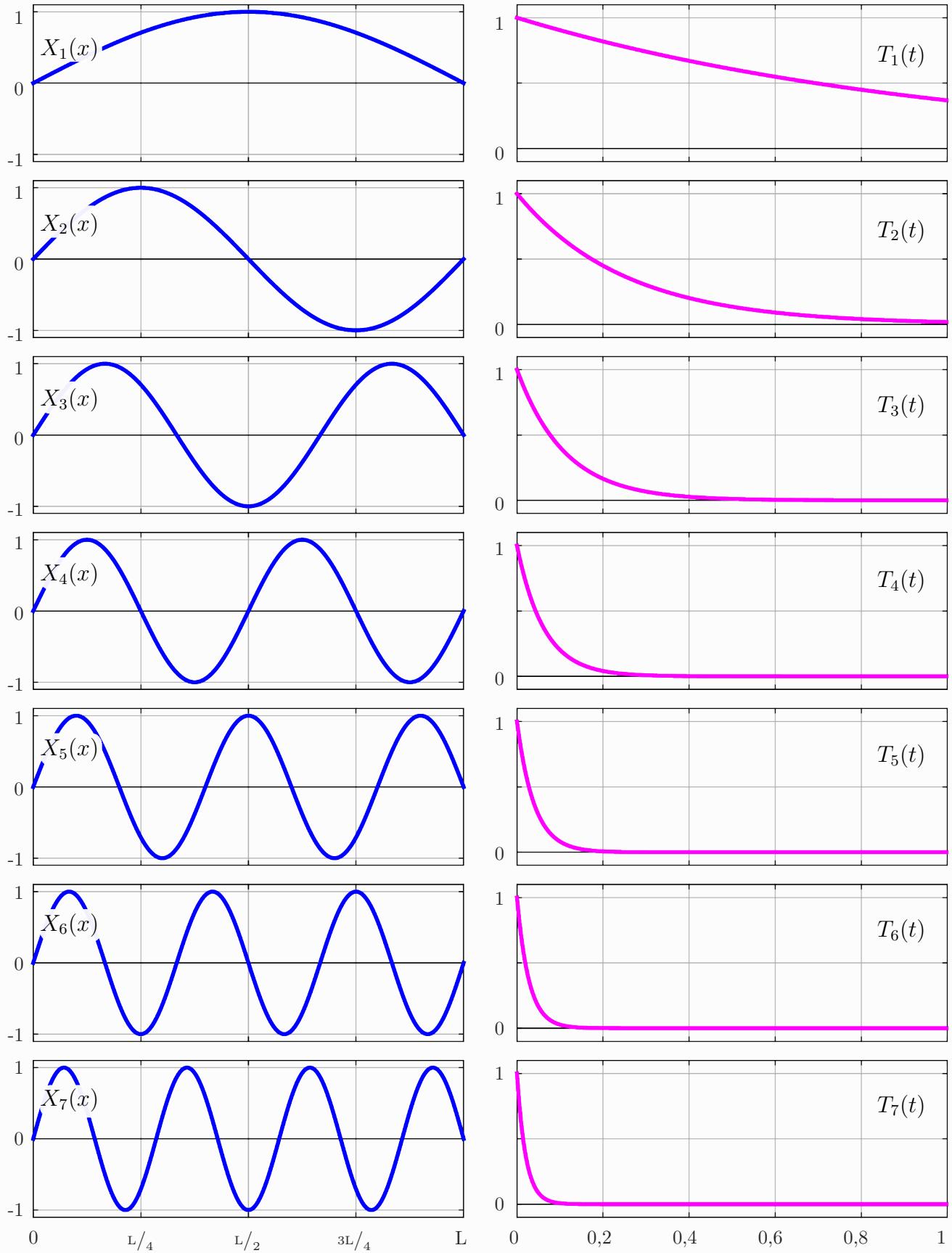


Figura 3.2: Autofunções (3.7), X_n , e soluções (3.8) da EDO para o tempo, T_n , da equação do calor com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas.

elas são chamadas de **Soluções Fundamentais** do Problema 3.1. A Figura 3.3 exibe as seis primeiras soluções fundamentais para a equação do calor com $L = 2$ e $\alpha = 0,5$.

Porém, exceto em casos muito particulares nenhuma delas vai satisfazer a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$. Para satisfazer a condição inicial, observamos que a equação diferencial é linear e as condições de fronteira são homogêneas, portanto qualquer combinação linear da funções (3.9) também é solução da equação diferencial e satisfaz as condições de fronteira. Podemos então escrever a **Solução Geral** como a série de funções

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-\alpha^2 \sigma_n^2 t) \sin(\sigma_n x) . \quad (3.10)$$

Temos agora que impor a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ para $x \in [0, L]$. Começamos avaliando $u(x, 0)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\sigma_n x)$$

e escrevendo a condição como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\sigma_n x) \quad x \in [0, L] .$$

Comparando com a Série de Fourier de Senos descrita no Teorema 1.15 percebemos que os coeficientes c_n podem ser calculados pela fórmula

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\sigma_n x) dx \quad (3.11)$$

desde que a a série de Fourier da função f seja exista.

A proposição a seguir apresenta a solução do Problema 3.1 obtida.

PROPOSIÇÃO 3.2: SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO CALOR COM FRONTEIRA DE DIRICHLET HOMOGÊNEA

A solução do Problema 3.1 é dada pela solução geral (3.10)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

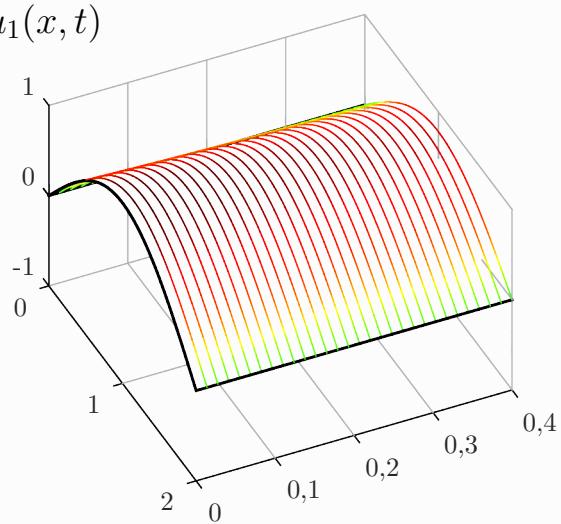
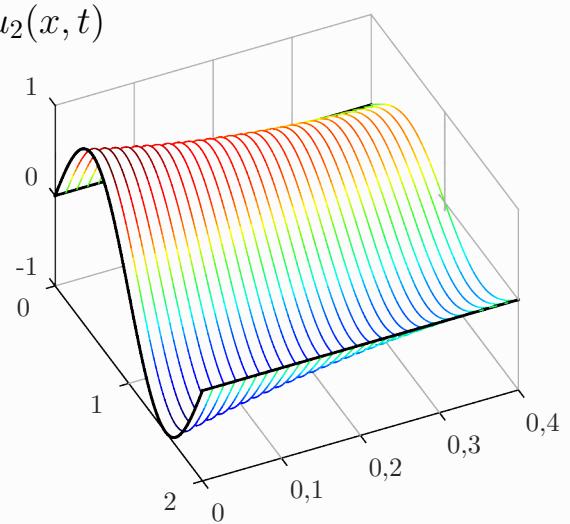
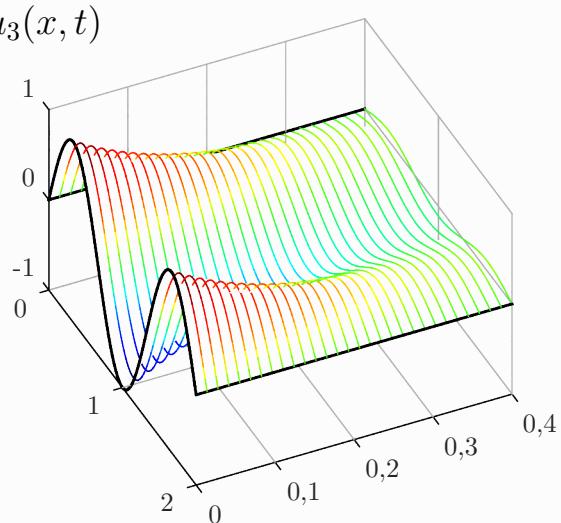
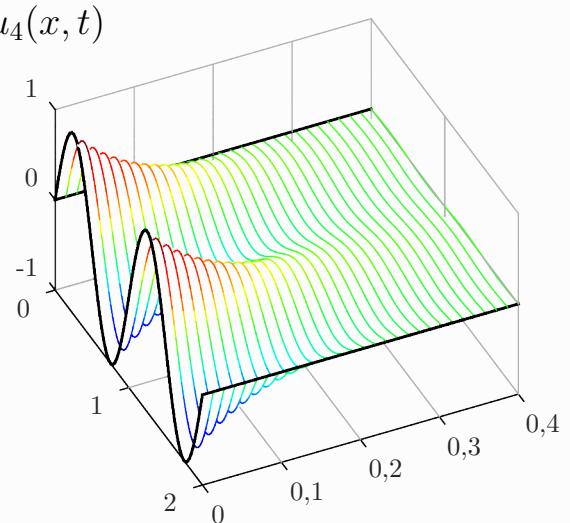
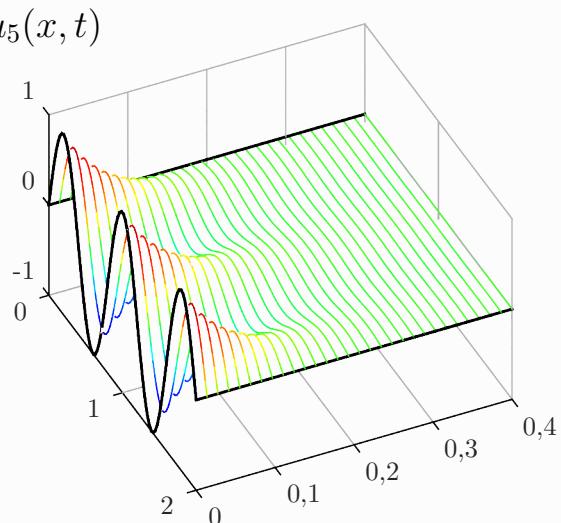
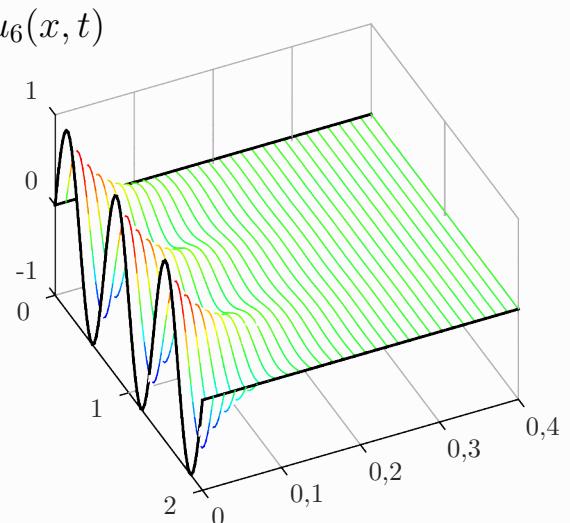
$u_1(x, t)$  $u_2(x, t)$  $u_3(x, t)$  $u_4(x, t)$  $u_5(x, t)$  $u_6(x, t)$ 

Figura 3.3: Soluções fundamentais (3.9) da equação do calor com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas.

com os coeficientes c_n determinados pela Série de Fourier (3.11) da expansão ímpar da função f

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx .$$

O próximo exemplo ilustra a aplicação dessa proposição para obter a solução de um problema envolvendo a equação do calor.

EXEMPLO 3.2.1: Encontre a solução para o problema de dissipação de calor

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < 5 \quad \text{e} \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 2 \quad 0 \leq x \leq 5$$

$$u(0, t) = u(5, t) = 0 \quad 0 < t .$$

O primeiro passo é reconhecer que esse é um problema do tipo 3.1 com

$$\alpha = 1 \quad L = 5 \quad f(x) = 2$$

cuja solução é descrita pela Proposição 3.2. Portanto sua solução geral é

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2}{25} t \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{5} x \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp \left(-\left(\frac{n\pi}{5} \right)^2 t \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{5} x \right) \end{aligned}$$

e os coeficientes c_n são dados por

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{2}{5} \int_0^5 2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{5} \right) dx \\ &= \frac{4}{5} \int_0^5 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{5} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{5} \left[-\frac{5}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right) \right] \Big|_0^5 \\
&= -\frac{4}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right) \right] \Big|_0^5 \\
&= -\frac{4}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi 5}{5}\right) - \cos\left(\frac{n\pi 0}{5}\right) \right] \\
&= -\frac{4}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] \\
&= \frac{4}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] \\
&= \begin{cases} \frac{8}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} . \end{cases}
\end{aligned}$$

Obtemos a solução do problema substituindo c_n na solução geral. Primeiro removemos os termos ímpares, pois $c_n = 0$ nesses casos, e mudamos o índice dos termos pares para $n = 2p$

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{5}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{5} x\right) \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} c_{2p} \exp\left(-\left(\frac{2p\pi}{5}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{2p\pi}{5} x\right) .
\end{aligned}$$

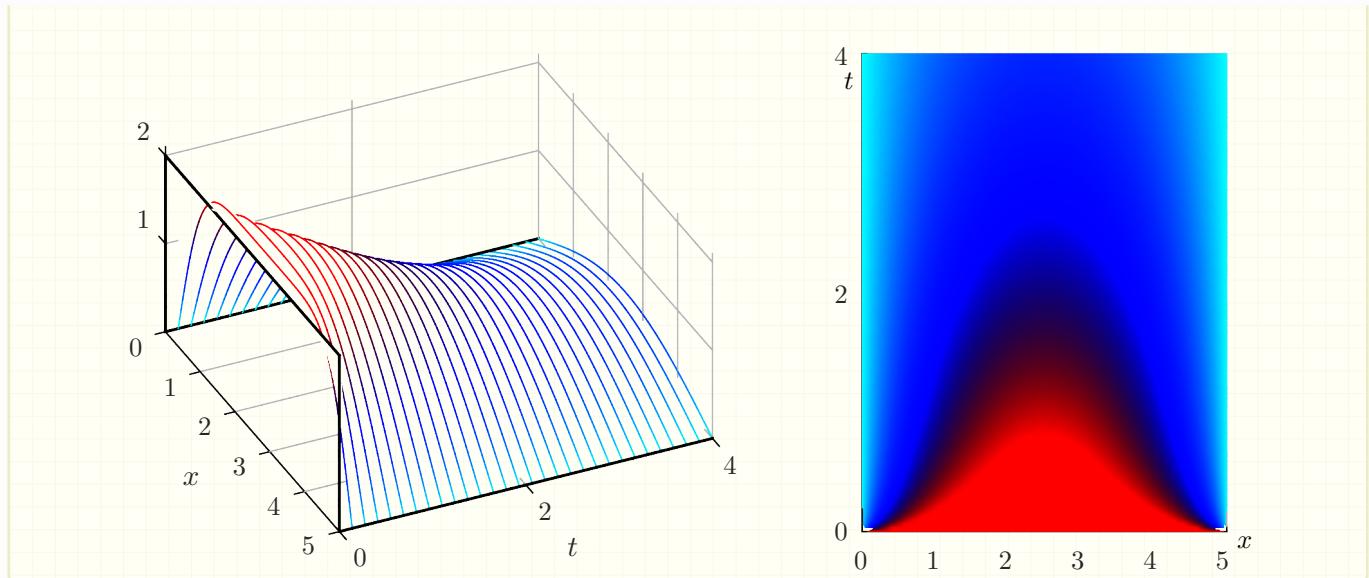
Depois usamos que

$$c_{2p} = \frac{8}{2p\pi} = \frac{4}{p\pi}$$

obtendo a solução do problema

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \exp\left(-\left(\frac{2\pi p}{5}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{2\pi p}{5} x\right) .$$

A figura a seguir mostra a solução de duas formas alternativas.



3.3 Condição de Dirichlet Não Homogênea

Vamos agora buscar a solução para o problema de propagação do calor em uma barra onde os extremos são mantidos a temperaturas constantes diferentes de zero. A definição a seguir apresenta os detalhes de problema e a Figura 3.4 ilustra seu domínio e condições de fronteira e inicial.

**DEFINIÇÃO 3.3: PROBLEMA DO CALOR COM
FRONTEIRA DE DIRICHLET NÃO HOMOGÊNEA**

O problema de propagação de calor com fronteira de Dirichlet não homogênea consiste da equação do calor com as seguintes condições inicial e de fronteira

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < L & \text{e} & 0 < t \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) &= u_1 & 0 < t \\ u(L, t) &= u_2 & 0 < t \end{aligned}$$

onde $L > 0$, enquanto u_1 e u_2 são os valores da temperatura fixos nos extremos da barra.

Como os valores impostos nos extremos do intervalo não são zero, se aplicarmos o mesmo procedimento usado para o problema com condição de Dirichlet homogênea não poderemos somar as soluções fundamentais para obter a solução geral. Precisamos,

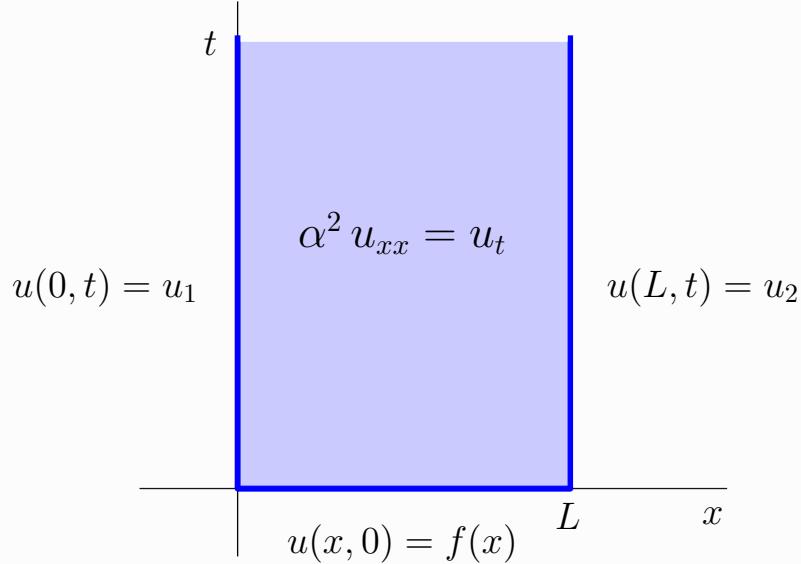


Figura 3.4: Domínio e condições do problema de dissipação do calor com fronteiras de Dirichlet não homogêneas.

então, transformar esse problema de alguma forma que nos permita somar as soluções fundamentais. Nossa abordagem será separar a solução em duas partes

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t) \quad (3.12)$$

onde a função w é a solução do problema com condições homogêneas 3.1 enquanto v faz o ajuste para atender as condições não homogêneas.

Para determinar v impomos a equação diferencial ordinária e as condições de fronteira não homogêneas

$$\begin{aligned} v_{xx} &= 0 \\ v(0) &= u_1 \\ v(L) &= u_2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

a solução para esse problema de valores de contorno é

$$v(x) = \frac{u_2 - u_1}{L} x + u_1 .$$

Calculada dessa forma v é a solução estacionária do problema satisfazendo as condições não homogêneas. Precisamos agora determinar a função w , para isso substituí-

mos (3.12) no Problema 3.3. Começamos pela equação diferencial

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} \\ v_t + w_t &= \alpha^2 (v_{xx} + w_{xx}) \\ w_t &= \alpha^2 w_{xx} \end{aligned}$$

onde usamos que v não depende de t e é solução de (3.12). As condições de fronteira podem ser escritas como

$$\begin{aligned} w(0, t) &= u(0, t) - v(0) = u_1 - u_1 = 0 \\ w(L, t) &= u(L, t) - v(L) = u_2 - u_2 = 0 \end{aligned}$$

que como desejado são homogêneas. Falta apenas calcularmos a nova condição inicial

$$w(x, 0) = u(x, 0) - v(x) = f(x) - \frac{u_2 - u_1}{L} x - u_1 .$$

Agrupando a equação e as condições para w obtemos o problema

$$\begin{aligned} w_t &= \alpha^2 w_{xx} & 0 < x < L & \text{e} & 0 < t \\ w(x, 0) &= g(x) & 0 \leq x \leq L \\ w(0, t) &= 0 & 0 < t \\ w(L, t) &= 0 & 0 < t \end{aligned}$$

que é um problema de propagação do calor com fronteira de Dirichlet homogênea 3.1 com a condição inicial dada por

$$g(x) = f(x) - \frac{u_2 - u_1}{L} x - u_1 .$$

Usando o resultado da Proposição 3.2 sabemos que w é dado por

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

com os coeficientes c_n determinados por

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \left(f(x) - \frac{u_2 - u_1}{L} x - u_1\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Podemos agora retornar ao problema original 3.3 e escrever sua solução

$$\begin{aligned} u(x, t) &= v(x) + w(x, t) \\ &= \frac{u_2 - u_1}{L} x + u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde os coeficientes c_n são dados por (3.14).

PROPOSIÇÃO 3.4: SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO CALOR COM FRONTEIRA DE DIRICHLET NÃO HOMOGÊNEA

A solução do Problema 3.3 é dada pela solução geral (3.15)

$$u(x, t) = \frac{u_2 - u_1}{L} x + u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

com os coeficientes c_n determinados pela Série de Fourier da expansão ímpar da função g

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left(f(x) - \frac{u_2 - u_1}{L} x - u_1 \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx .$$

O próximo exemplo ilustra a aplicação dessa proposição para obter a solução de um problema envolvendo a equação do calor.

3.4 Condição de Neumann

Nas subseções anteriores resolvemos o problema da propagação do calor fixando o valor da temperatura nos extremos da barra, agora vamos impor que não haja variação de temperatura no extremo da barra, isso é o fluxo de calor é zero. Fazemos isso impondo que as derivadas de u por x sejam zero na fronteira, como descrito no problema a seguir. A Figura 3.5 ilustra o domínio e condições desse problema.

**DEFINIÇÃO 3.5: PROBLEMA DO CALOR COM
FRONTEIRA DE NEUMANN HOMOGÊNEA**

O problema de propagação de calor com fronteira de Neumann consiste da equação do calor com as seguintes condições iniciais e de fronteira

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$u_x(0, t) = 0 \quad 0 < t$$

$$u_x(L, t) = 0 \quad 0 < t$$

onde $L > 0$ e f não é identicamente nula no intervalo $[0, L]$.

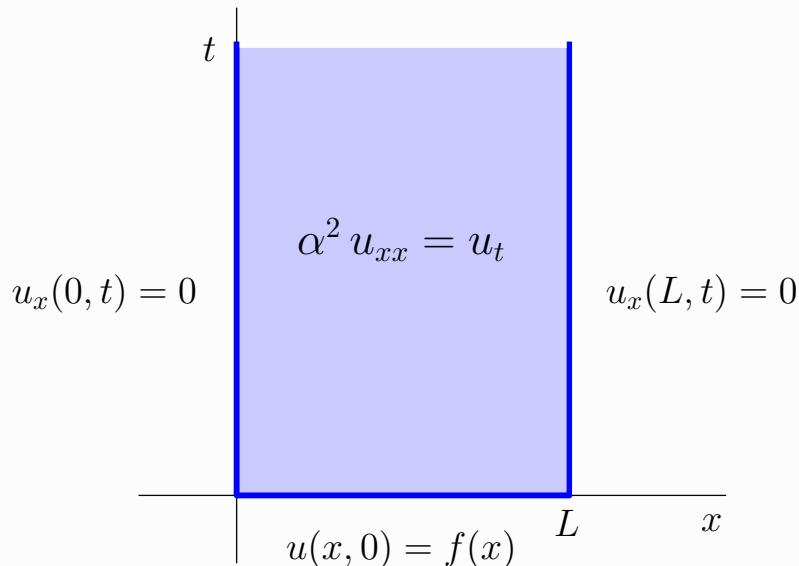


Figura 3.5: Domínio e condições do problema de dissipação do calor com fronteiras de Neumann homogêneas.

Para resolver esse problema aplicamos diretamente o método de separação de variáveis supondo que $u(x, t) = X(x)T(t)$ e transformando a equação do calor nas equações diferenciais ordinárias

$$X'' + \lambda X = 0 , \tag{3.16}$$

$$T' + \alpha^2 \lambda T = 0 . \tag{3.17}$$

Como antes precisamos aplicar as condições de fronteira em u para obtermos

$$X'(0)T(t) = 0 = X'(L)T(t)$$

como a solução identicamente nula é incompatível com a condição inicial, segue que $T(t) \neq 0$, e portanto

$$X'(0) = X'(L) = 0$$

Temos agora um problema de autovalores para X

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (3.18)$$

$$X'(0) = 0$$

$$X'(L) = 0 .$$

Porém as condições de contorno são diferentes do problema que resolvemos da Seção 2.2, dessa forma precisamos reproduzir os passos e obter a solução para esse novo problema. Como antes, vamos considerar os três casos onde λ é menor, igual ou maior do que zero buscando pelas soluções não triviais do problema (3.18).

No caso $\lambda < 0$ definimos $\sigma^2 = -\lambda$ e usamos a solução geral

$$X(x) = c_1 \exp(\sigma x) - c_2 \exp(-\sigma x) .$$

Para impor as condições do problema (3.18) derivamos a solução geral obtendo

$$X'(x) = c_1 \sigma \exp(\sigma x) - c_2 \sigma \exp(-\sigma x) .$$

Calculando a derivada em zero e L temos as condições

$$c_1 \sigma - c_2 \sigma = 0$$

$$c_1 \sigma \exp(\sigma L) - c_2 \sigma \exp(-\sigma L) = 0 .$$

Dividindo a primeira equação por σ e a segunda por $\sigma \exp(\sigma L)$, obtemos

$$c_1 - c_2 = 0$$

$$c_1 - c_2 \exp(-2\sigma L) = 0 .$$

A primeira condição determina que $c_1 = c_2$ substituindo na segunda equação temos

$$c_2 [1 - \exp(-2\sigma L)] = 0 .$$

Como $L \neq 0$ e $\sigma \neq 0$ a exponencial não pode ser 1 e portanto c_2 precisa ser zero. Consequentemente c_1 também é zero e não temos nenhuma solução não trivial.

Consideramos agora o segundo caso $\lambda = 0$ que tem solução geral

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

cuja derivada é

$$X'(x) = c_2 .$$

Assim as condições do problema (3.18) impõem que $c_2 = 0$, mas deixam o coeficiente c_1 livre. Portanto temos uma autofunção constante $X(x) = c_1$. Nesse caso a equação (3.17) se reduz a

$$T'(t) = 0$$

cuja solução também é uma função constante. Com isso temos o primeiro autovalor, $\lambda = 0$, e sua solução fundamental

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} .$$

Essa função poderia ser igual a qualquer constante, escolhemos $1/2$ por motivos que ficarão evidentes em breve.

No terceiro caso temos $\lambda > 0$ e definimos $\sigma^2 = \lambda$, assim a solução geral é

$$X(t) = c_1 \sin(\sigma x) + c_2 \cos(\sigma x)$$

derivando temos

$$X'(t) = c_1 \sigma \cos(\sigma x) - c_2 \sigma \sin(\sigma x) .$$

Avaliando a derivada nos extremos do intervalo e impondo as condições de contorno, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} c_1 \sigma \cos(0) - c_2 \sigma \sin(0) &= 0 \\ c_1 \sigma \cos(\sigma L) - c_2 \sigma \sin(\sigma L) &= 0 . \end{aligned}$$

A primeira condição determina que $c_1 = 0$, substituindo na segunda temos

$$-c_2 \sigma \sin(\sigma L) = 0 .$$

Como $c_2 = 0$ produz a solução trivial precisamos impor que

$$\sin(\sigma L) = 0$$

que será verdade quando σL for um múltiplo inteiro de π , portanto

$$\sigma_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

que produz os autovalores

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo esses valores na solução geral da EDO temos suas autofunções

$$X_n(x) = \cos(\sigma_n x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.19)$$

Precisamos agora das soluções associadas para a equação do tempo (3.17), substituindo λ temos as equações

$$T' + \alpha^2 \sigma_n^2 T = 0.$$

As soluções dessa EDO são as funções

$$T_n(t) = e^{-\alpha^2 \sigma_n^2 t} = \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right). \quad (3.20)$$

Temos assim as soluções fundamentais

$$u_n(x, t) = \exp(-\alpha^2 \sigma_n^2 t) \cos(\sigma_n x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Tendo construído todas as soluções fundamentais do Problema 3.5 e usando o fato que a equação do calor é linear e as condições de fronteira são homogêneas podemos escrever a **solução geral** como a combinação linear

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x, t) \\ &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-\alpha^2 \sigma_n^2 t) \cos(\sigma_n x). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Falta impor a **condição inicial**, primeiro calculamos a solução geral em $t = 0$ e impomos $u(x, 0) = f(x)$

$$f(x) = u(x, 0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\sigma_n x) \quad x \in [0, L].$$

Note que do lado direito temos uma Série de Fourier em cossenos, assim, segundo o Teorema 1.14 os coeficientes c_n são determinados pelas fórmulas

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(\sigma_n x) dx \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A proposição a seguir resume o resultado desenvolvido nessa subseção.

PROPOSIÇÃO 3.6: SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO CALOR COM FRONTEIRA DE NEUMANN HOMOGENEA

A solução do Problema 3.5 é dada pela solução geral (3.21)

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

com os coeficientes c_n determinados pela Série de Fourier de cossenos da função f

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

O próximo exemplo ilustra a aplicação dessa proposição para obter a solução de um problema envolvendo a equação do calor.

Exercícios Seção 3.4

- 1)** Encontre a solução do problema de condução de calor

$$\begin{aligned} 100u_{xx} &= u_t, & 0 < x < 1 \text{ e } 0 < t \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, & 0 < t \end{aligned}$$

$$f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x) - \operatorname{sen}(5\pi x)$$

- 2)** Encontre a solução do problema de condução de calor

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 4u_t, & 0 < x < 2 \text{ e } 0 < t \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq 2 \\ u(0, t) &= u(2, t) = 0, & 0 < t \end{aligned}$$

$$f(x) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \operatorname{sen}(\pi x) + 4 \operatorname{sen}(2\pi x)$$

- 3)** Para cada condição inicial descrita, resolva o

problema de condução do calor em uma barra com 40 cm de comprimento e composta de um material com difusibilidade térmica $\alpha^2 = 1 \text{ cm}^2/\text{s}^2$. Além disso, as extremidades da barra são mantidas à temperatura constante de 0 °C.

a) $u(x, 0) = 50, \quad 0 < x < 40$

b) $u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$

c) $u(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 10 \\ 50, & 10 \leq x \leq 30 \\ 0, & 30 < x \leq 40 \end{cases}$

d) $u(x, 0) = x, \quad 0 < x < 40$

- 4)** (Problema de Dirichlet homogêneo)
Considere uma função $u(x, t)$, duas vezes

diferenciável, com domínio $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$, onde $L > 0$. Resolva a Equação do Calor

$$u_t = Ku_{xx} \quad K > 0$$

para cada uma das condições iniciais e de fronteira dadas.

a) $u(0,t) = 0, u(L,t) = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 \leq x < L \end{cases}$$

b) $u(0,t) = 0, u(L,t) = 0, u(x,0) = x(L-x)$

c) $u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0, u(x,0) = x$, com $0 \leq x \leq \pi$

5) (Problema de Dirichlet não homogêneo)

Considere uma função $u(x,t)$, duas vezes diferenciável, com domínio $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$, onde $L > 0$. Resolva a Equação do Calor

$$u_t = Ku_{xx} \quad K > 0$$

para cada uma das condições iniciais e de fronteira dadas.

a) $u(0,t) = 100, u(1,t) = 100, u(x,0) = 0$

b) $u(0,t) = 0, u(10,t) = 100$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 5 \\ 100, & 5 \leq x < 10 \end{cases}$$

6) (Problema de Neumann homogêneo)

Considere uma função $u(x,t)$, duas vezes diferenciável, com domínio $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$,

onde $L > 0$. Resolva a Equação do Calor

$$u_t = Ku_{xx} \quad K > 0$$

para cada uma das condições iniciais e de fronteira dadas.

a) $u_x(0,t) = 0, u_x(2,t) = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

7) Para cada condição inicial $u(x,0) = f(x)$.

Resolva o problema de condução do calor em uma barra de comprimento L cujas extremidades são mantidas à temperatura constante igual a zero.

a) $L = 3 \quad f(x) = 3 - x$

b) $L = 2 \quad f(x) = x - 2$

c) $L = 2 \quad f(x) = x$

d) $L = \pi \quad f(x) = \sin(x)$

e) $L = \pi \quad f(x) = 4 \sin(x) + \sin(4x)$

f) $L = 2a \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & a \leq x < 2a \end{cases}$

g) $L = 4 \quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

h) $L = 2 \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

4

Equação da Onda

5.1	Introdução	105
5.2	Condição de Dirichlet no Retângulo	106
5.3	Equação de Laplace em Coordenadas Polares	118
5.4	No Disco com Fronteira de Dirichlet	122

4.1 Introdução

Vamos analisar o problema de propagação da onda em uma corda elástica tensionada de comprimento L com os extremos em $x = 0$ e $x = L$ fixos, isso é, com condições de Dirichlet homogêneas. A constante a representa a velocidade de propagação da onda ao longo da corda, como essa equação modela uma onda perfeitamente elástica todas as frequências propagam a mesma velocidade e não precisamos distinguir entre a velocidade de fase e velocidade de grupo, ambas são iguais a a . No instante inicial, $t = 0$, a posição da corda é descrita pela função f e sua velocidade pela função g . A Figura 4.1 ilustra o domínio e as condições para esse problema.

Como a condição inicial $f(x) = g(x) = 0$ para $x \in [0, L]$ produz uma solução trivial, $u(x, t) = 0$, vamos desconsiderar esse caso. Para isso impomos que pelo menos uma das condições iniciais não seja identicamente nula, ou seja, $f(x) \neq 0$ ou $g(x) \neq 0$ para algum $x \in [0, L]$.

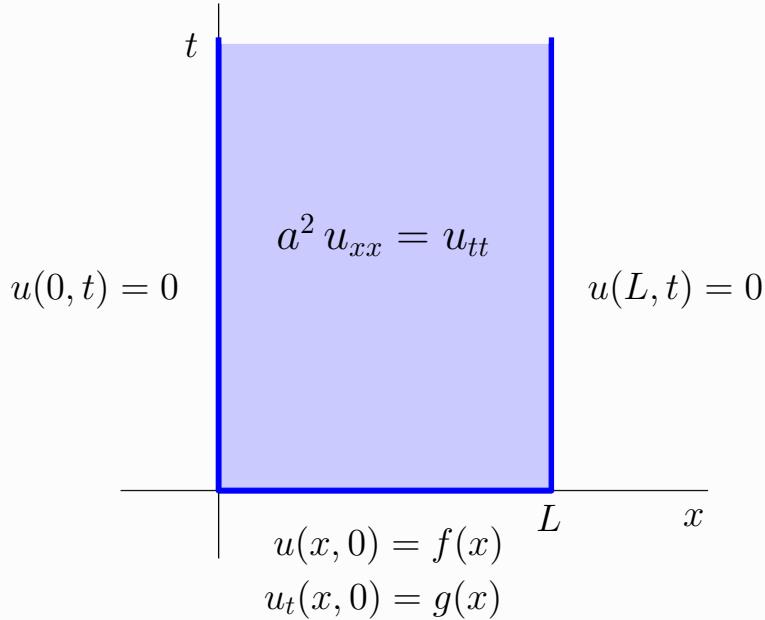


Figura 4.1: Domínio e condições do problema de propagação da onda com fronteiras de Dirichlet homogêneas.

4.2 Solução

A definição a seguir apresenta os detalhes desse problema.

DEFINIÇÃO 4.1: PROBLEMA DE PROPAGAÇÃO DA ONDA

O problema de Propagação da Onda com condição homogênea de Dirichlet consiste da equação da onda com as seguintes condições iniciais e de fronteira

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$u_t(x, 0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$u(0, t) = 0 \quad 0 < t$$

$$u(L, t) = 0 \quad 0 < t$$

onde $L > 0$ e f e g não são simultaneamente nulas no intervalo $[0, L]$.

Note ainda que, por uma questão de compatibilidade entre as condições iniciais e as de fronteira, o problema só está bem posto se f e g forem nulas nas extremidades da

corda

$$f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0 . \quad (4.1)$$

Como no caso da Equação do Calor, para resolver este problema aplicamos o método de **Separação de Variáveis**, supondo que $u(x, t) = X(x)T(t)$. Substituindo essa expressão para u na equação da onda

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

obtemos

$$XT'' = a^2 X'' T$$

que pode ser rearranjada como

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} .$$

Como o lado esquerdo da igualdade só depende de x e o lado direito só depende de t , é necessário que exista uma constante λ tal que

$$X'' + \lambda X = 0 , \quad (4.2)$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0 . \quad (4.3)$$

Tendo separado a equação diferencial parcial em duas equações diferenciais ordinárias, podemos impor as **Condições de Fronteira** $u(0, t) = u(L, t) = 0$, que determinam

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 ,$$

$$u(L, t) = X(L)T(t) = 0 .$$

Como $T(t)$ não pode ser identicamente nula, essas condições impõem que

$$X(0) = X(L) = 0 . \quad (4.4)$$

Obtemos então exatamente o mesmo problema de autovalores que havíamos encontrado ao resolver a Equação do Calor com fronteiras de Dirichlet (3.5)

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (4.5)$$

$$X(0) = 0$$

$$X(L) = 0 .$$

Reproduzindo os mesmos passos, determinamos que não existem soluções não triviais

para $\lambda \leq 0$. Além disso, sabemos que quando $\lambda > 0$ podemos fazer $\sigma^2 = \lambda$ e a solução geral da EDO (4.5) é

$$X(x) = c_1 \sin(\sigma x) + c_2 \cos(\sigma x) .$$

Impondo a condição $X(0) = 0$ temos que $c_2 = 0$. Porém, ao impor $X(L) = 0$ precisamos garantir que c_1 não seja nulo também, assim precisamos impor que $\sin(\sigma L) = 0$ e consequentemente temos que $\sigma L = n\pi$. Concluímos então que os **autovalores** e **autofunções** do problema (4.5) são

$$\lambda_n = \sigma_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.6)$$

$$X_n(x) = \sin(\sigma_n x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.7)$$

Vamos agora resolver a **equação no tempo** (4.3). Cada autovalor λ_n determina uma equação diferencial ordinária para a função $T(t)$

$$T'' + a^2 \sigma_n^2 T = 0$$

cuja solução geral é

$$T_n(t) = p \sin(a\sigma_n t) + q \cos(a\sigma_n t) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.8)$$

onde p e q são constantes arbitrárias.

Conhecendo as autofunções (4.7) do problema de autovalores em x e a solução geral (4.8) da equação no tempo podemos escrever as **soluções fundamentais** do Problema da Propagação de Onda 4.1

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= \sin(\sigma_n x) [p \sin(a\sigma_n t) + q \cos(a\sigma_n t)] \\ &= p \sin(\sigma_n x) \sin(a\sigma_n t) + q \sin(\sigma_n x) \cos(a\sigma_n t) . \end{aligned}$$

Cada função u_n é solução da equação da onda e atende as condições de fronteiras de Dirichlet. Como a equação é linear e as condições são homogêneas qualquer combinação linear das soluções fundamentais também satisfaz a equação e as condições. Assim podemos escrever a **solução geral** do Problema 4.1 como a série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) \operatorname{sen}(a\sigma_n t) + Q_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) \cos(a\sigma_n t) \quad (4.9)$$

onde fizemos $P_n = c_n p$ e $Q_n = c_n q$.

Falta agora impor as **condições iniciais**

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

para todo x no intervalo $[0, L]$. Começando com a condição no valor da função, $u(x, 0) = f(x)$, temos

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) \operatorname{sen}(0) + Q_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) \cos(0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) . \end{aligned}$$

Portanto a condição $u(x, 0) = f(x)$ corresponde a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) .$$

Podemos agora determinar os coeficientes Q_n considerando a extensão ímpar de f e calculando os coeficientes da série de Fourier de senos

$$Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(\sigma_n x) dx . \quad (4.10)$$

Temos também que impor a condição no valor da derivada da função, $u_t(x, 0) = g(x)$, para isso precisamos avaliar sua derivada. Lembrando que a solução geral é a soma das soluções fundamentais e assumindo que seja possível derivar a série termo a termo temos

$$u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) .$$

O próximo passo é derivar as soluções fundamentais u_n

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = p \operatorname{sen}(\sigma_n x) \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{sen}(a\sigma_n t) + q \operatorname{sen}(\sigma_n x) \frac{\partial}{\partial t} \cos(a\sigma_n t)$$

$$= p \operatorname{sen}(\sigma_n x) a \sigma_n \cos(a \sigma_n t) - q \operatorname{sen}(\sigma_n x) a \sigma_n \operatorname{sen}(a \sigma_n t) .$$

Avaliando cada uma dessas derivadas em $t = 0$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) &= pa\sigma_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) \cos(0) - qa\sigma_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) \operatorname{sen}(0) \\ &= pa\sigma_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) .\end{aligned}$$

Podemos agora avaliar $u_t(x, 0)$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n a \sigma_n \operatorname{sen}(\sigma_n x)$$

onde novamente fizemos $P_n = c_n p$. Assim a condição $u_t(x, 0) = g(x)$ é escrita como

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n a \sigma_n \operatorname{sen}(\sigma_n x) .$$

Como antes, usamos a série de Fourier da expansão ímpar da função g para determinar os coeficientes P_n , porém, nesse caso os coeficientes de Fourier são $P_n a \sigma_n$ o que nos leva a

$$P_n a \sigma_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}(\sigma_n x) dx$$

isolando P_n temos

$$P_n = \frac{2}{a \sigma_n} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}(\sigma_n x) dx . \quad (4.11)$$

Temos agora a solução geral para o problema da propagação da onda e fórmulas para determinar os coeficientes envolvidos. A proposição a seguir resume esses resultados.

PROPOSIÇÃO 4.2: SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE PROPAGAÇÃO DA ONDA

A solução do Problema 4.1 é dada pela solução geral (4.9)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L} t\right) + Q_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{an\pi}{L} t\right) \right]$$

com os coeficientes P_n e Q_n determinados pelas séries de Fourier em senos da

função f , equação (4.10), e da função g , equação (4.11),

$$Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx ,$$

$$P_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx .$$

Essa proposição apresenta a solução para o problema completo, mas é comum que uma das condições iniciais seja nula. Por exemplo, se considerarmos o caso onde a velocidade inicial é nula, $g(x) = 0$, os coeficientes P_n são todos automaticamente zero e a solução é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) \quad (4.12)$$

$$Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (4.13)$$

Por outro lado se o deslocamento inicial for nulo, $f(x) = 0$, os coeficientes Q_n são zero e a solução pode ser escrita como

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}t\right) \quad (4.14)$$

$$P_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (4.15)$$

A Figura 4.2 apresenta as funções T_n em cada um desses casos. Os gráficos do lado esquerdo mostram as funções T_n quando impomos que a velocidade inicial é nula, observe que todas essas funções tem derivada zero quando $t = 0$. Os gráficos do lado direito apresentam as funções T_n quando impomos que o deslocamento inicial é nulo, observe que todas essas funções valem zero quando $t = 0$.

A Figura 4.3 mostra as soluções fundamentais para a equação da onda quando a velocidade inicial for nula. A Figura 4.4 mostra as soluções fundamentais para a equação da onda quando o deslocamento inicial for nulo.

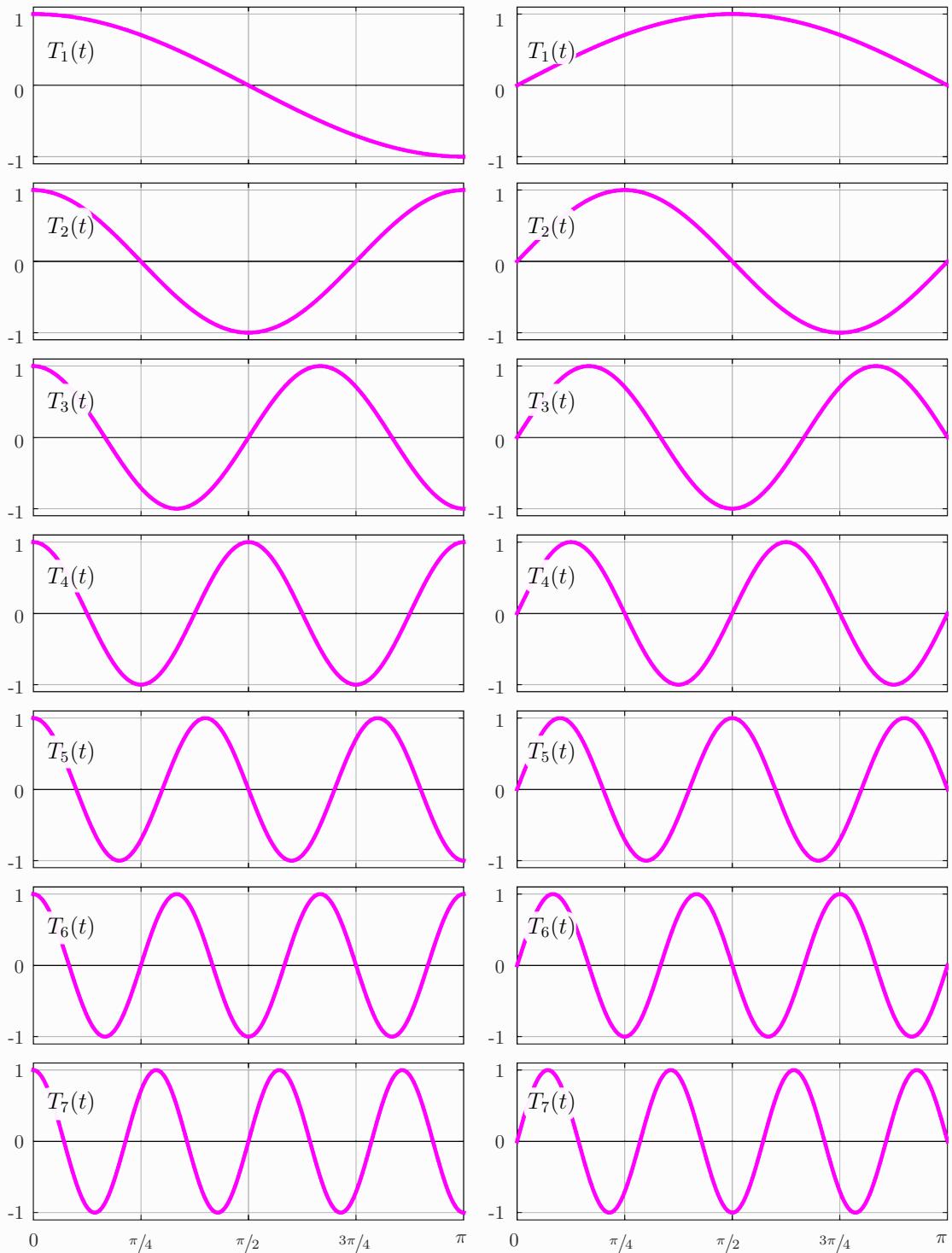


Figura 4.2: Funções T_n da equação da onda com velocidade inicial nula (esquerda) e com deslocamento inicial nulo (direita).

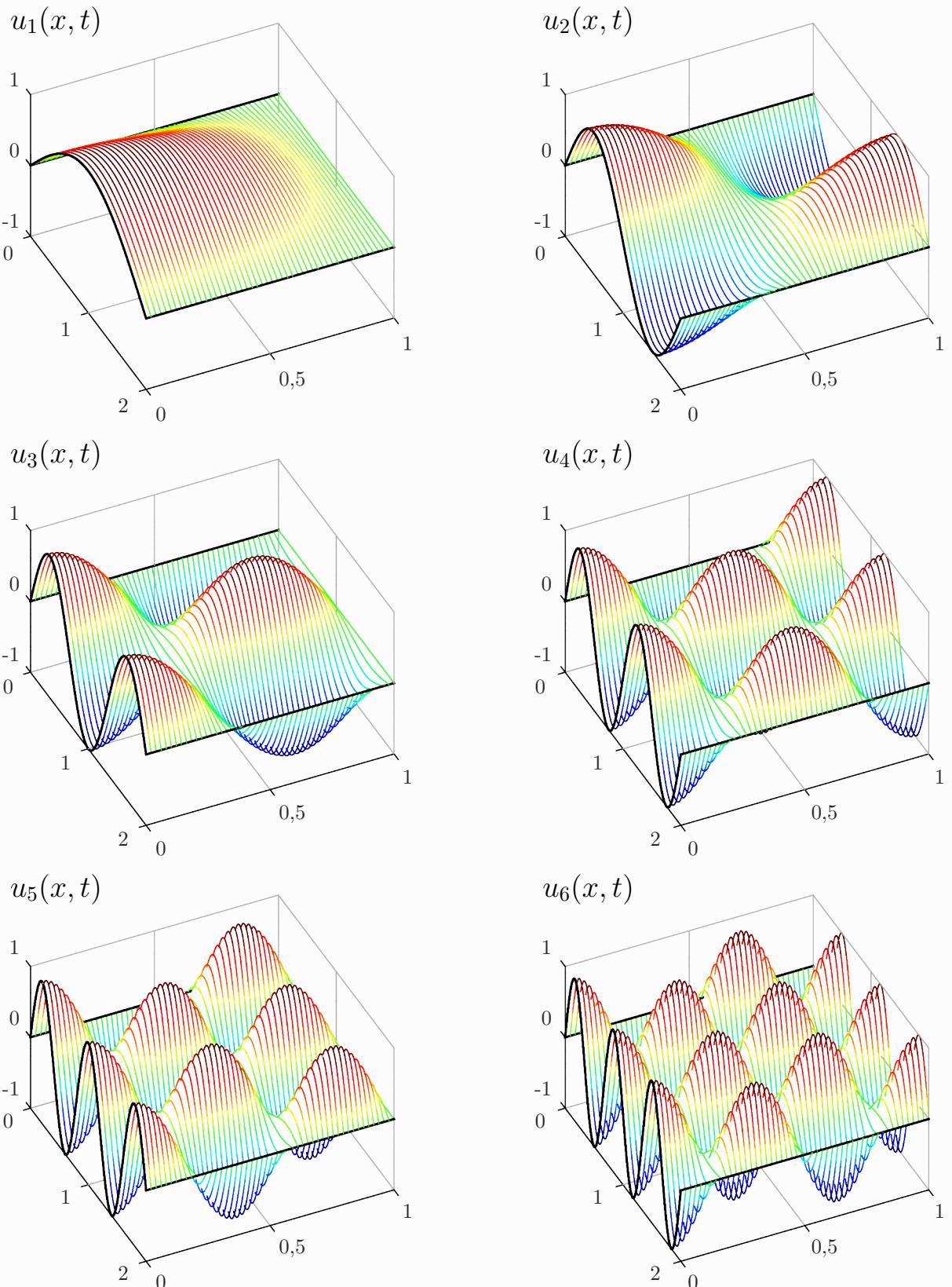


Figura 4.3: Soluções fundamentais da equação da onda com condições de Dirichlet e velocidade inicial nula (4.12).

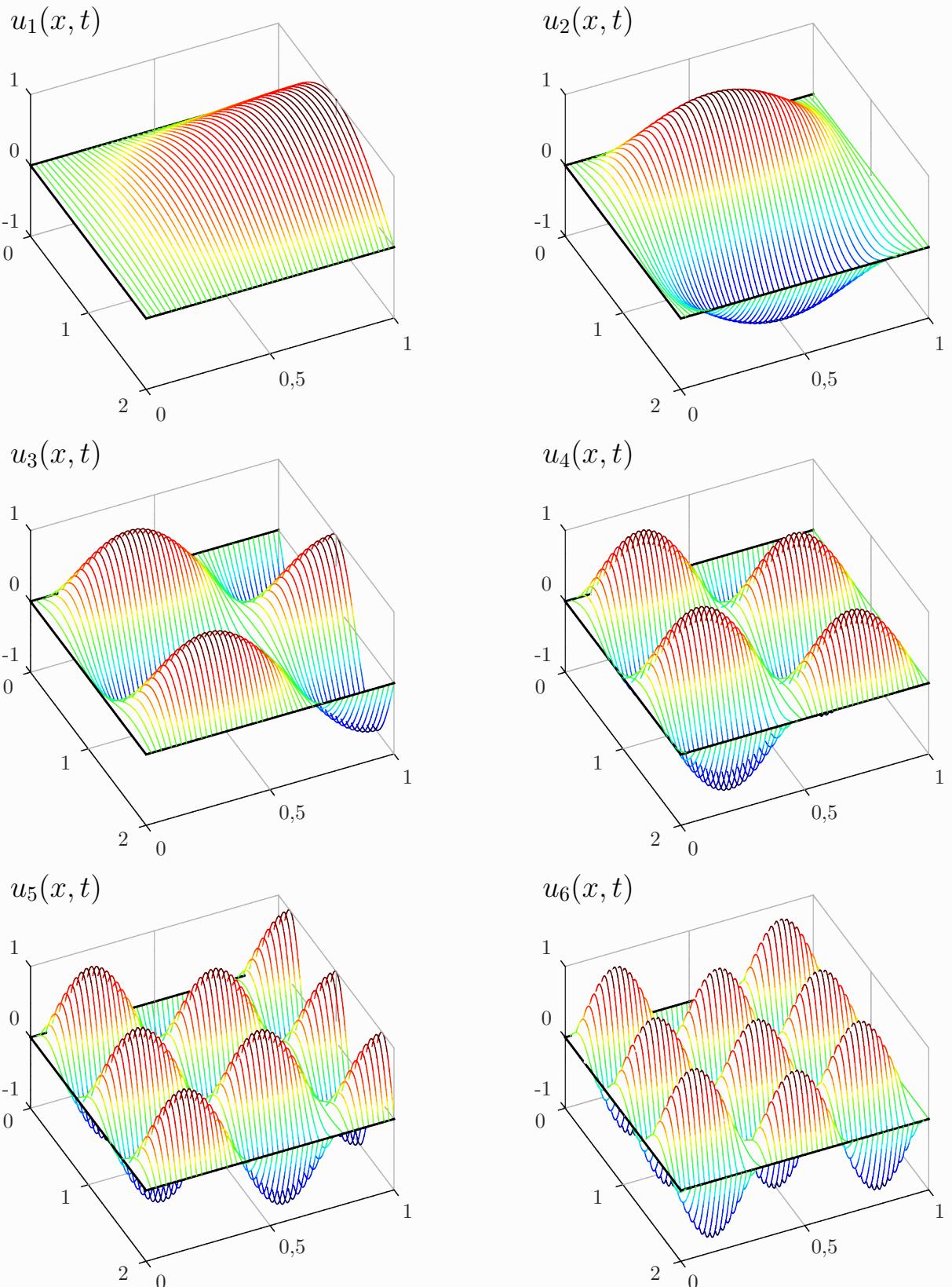


Figura 4.4: Soluções fundamentais da equação da onda com condições de Dirichlet e deslocamento inicial nulo (4.14).

O próximo exemplo ilustra a utilização dos resultados dessa seção.

EXEMPLO 4.2.1: Considere uma corda elástica de comprimento $L = 10$ cujas extremidades são mantidas fixas, com $T = \rho$, onde T é a tensão e ρ a densidade de massa da corda, ou seja, $a^2 = T/\rho = 1$. Suponha que a velocidade inicial da corda é zero e que a posição inicial é dada por

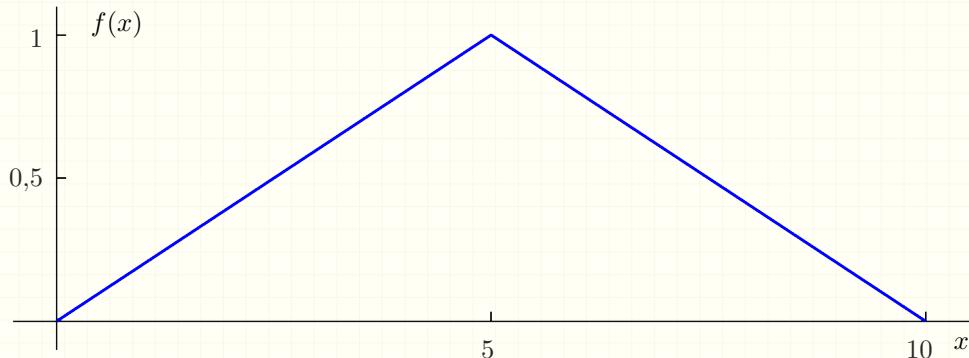
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5}, & 0 \leq x \leq 5, \\ \frac{10-x}{5}, & 5 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

Encontre o deslocamento da corda ao longo do tempo em cada posição $u(x, t)$.

O primeiro passo é reconhecer que a oscilação na corda é modelada pela equação da onda, também sabemos que $a^2 = 1$, que o comprimento da corda é $L = 10$ e que nas extremidades $u(0, t)$ e $u(10, t)$ são zero. Portanto o comportamento da corda é modelado pelo Problema 4.1, que, nesse caso, assume a forma

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} & 0 < x < 10 \quad \text{e} \quad 0 < t \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 \leq x \leq 10 \\ u_t(x, 0) &= 0 & 0 \leq x \leq 10 \\ u(0, t) &= 0 & 0 < t \\ u(10, t) &= 0 & 0 < t \end{aligned}$$

onde f é dada no enunciado e seu gráfico é mostrado na figura a seguir.



A Proposição 4.2 nos dá a solução desse problema, mas como $g(x) = 0$ o problema se simplifica e sua solução geral é dada por (4.12)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{10} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{10} t \right).$$

Enquanto que, os coeficientes Q_n são dados por (4.13)

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{10} f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{10} x \right) dx. \end{aligned}$$

Substituindo a expressão da função f temos

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{1}{5} \left[\int_0^5 \frac{x}{5} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{10} x \right) dx + \int_5^{10} \frac{10-x}{5} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{10} x \right) dx \right] \\ &= \frac{1}{25} \left[\int_0^5 x \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{10} x \right) dx \right. \\ &\quad + 10 \int_5^{10} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{10} x \right) dx \\ &\quad \left. - \int_5^{10} x \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{10} x \right) dx \right]. \end{aligned}$$

Precisamos agora calcular as três integrais. Começamos encontrando as primitivas, note que a integral do seno é

$$\int \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{10} x \right) dx = -\frac{10}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi}{10} x \right).$$

Para encontrar a primitiva do produto do seno por x , usamos a integral por partes

$$u = x \quad \text{e} \quad dv = \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{10} x \right) dx$$

de modo que

$$H(x) = \int x \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{10} x \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int u dv = uv - \int v du \\
&= -\frac{10}{n\pi} x \cos\left(\frac{n\pi}{10}x\right) + \frac{10}{n\pi} \int \cos\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx \\
&= \frac{100}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) - \frac{10}{n\pi} x \cos\left(\frac{n\pi}{10}x\right) .
\end{aligned}$$

Precisamos agora calcular as integrais definidas, começamos pela integral do seno, que vamos denominar S

$$\begin{aligned}
S &= \int_5^{10} \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx \\
&= -\frac{10}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{10}x\right) \Big|_5^{10} \\
&= -\frac{10}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{10}10\right) + \frac{10}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{10}5\right) \\
&= \frac{10}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi) \right] .
\end{aligned}$$

Calculamos agora as integrais do produto de x pelo seno, que vamos denotar R

$$\begin{aligned}
R &= \int_0^5 x \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx - \int_5^{10} x \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx \\
&= H(5) - H(0) - (H(10) - H(5)) \\
&= 2H(5) - H(0) - H(10) \\
&= 2 \left[\frac{100}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{10}5\right) - \frac{10 \cdot 5}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{10}5\right) \right] \\
&\quad - \left[\frac{100}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{10}0\right) - \frac{10 \cdot 0}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{10}0\right) \right] \\
&\quad - \left[\frac{100}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{10}10\right) - \frac{10 \cdot 10}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{10}10\right) \right] \\
&= 2 \left[\frac{100}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{50}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] - \left[-\frac{100}{n\pi} \cos(n\pi) \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{200}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{100}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{100}{n\pi} \cos(n\pi) .$$

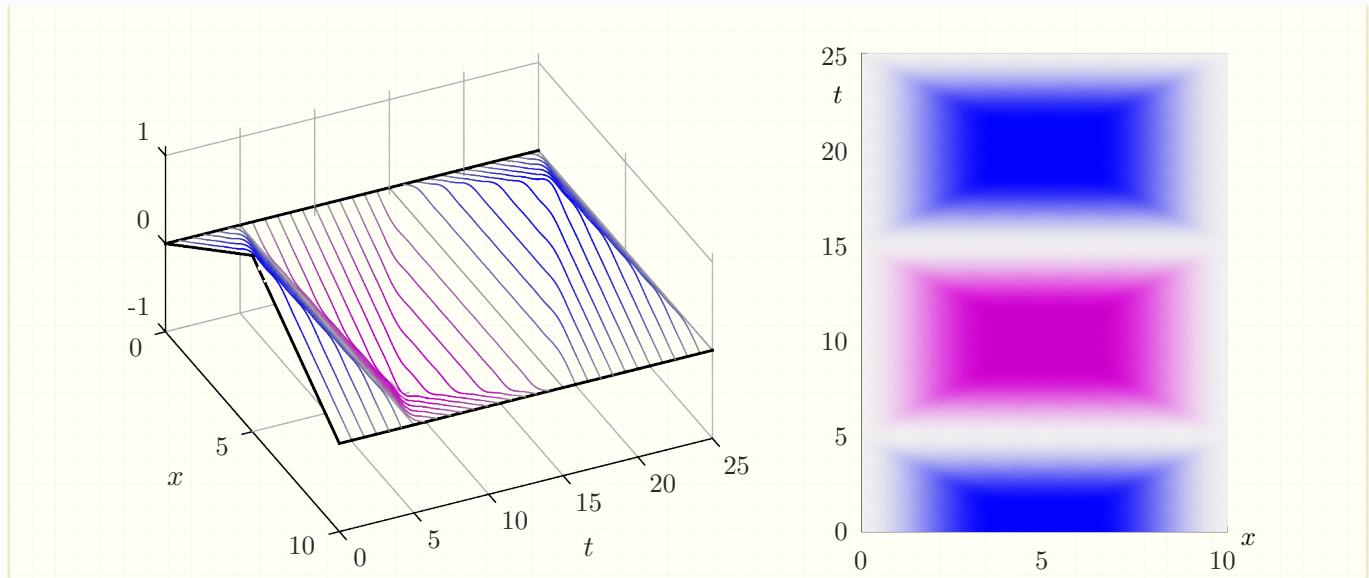
Podemos agora calcular os coeficientes Q_n

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{1}{25} (10S + R) \\ &= \frac{2}{5}S + \frac{1}{25}R \\ &= \frac{2}{5} \frac{10}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi) \right] \\ &\quad + \frac{1}{25} \left[\frac{200}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{100}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{100}{n\pi} \cos(n\pi) \right] \\ &= \frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{n\pi} \cos(n\pi) \\ &\quad + \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n\pi} \cos(n\pi) \\ &= \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) . \end{aligned}$$

Concluímos então que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{10}t\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{10}t\right) \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{10}t\right) . \end{aligned}$$

A figura a seguir mostra dois gráficos dessa solução. Note que nesse caso temos uma onda estacionária oscilando entre os extremos fixos do domínio.



Exercícios Seção 4.2

- 1)** Em cada caso, escreva o problema que modela a situação e determine:
- as equações diferenciais ordinárias produzidas pela separação de variáveis;
 - o problema de autovalores, assim como seus autovalores e autofunções;
 - as soluções fundamentais;
 - a solução geral;
 - as fórmulas para os coeficientes que determinam a solução, basta explicitar a fórmula não é necessário calcular as integrais.
- a) Propagação da onda em uma corda elástica tensionada, com as extremidades fixas, de comprimento 5 m, deslocamento inicial de $f(x) = 5x - x^2$, velocidade inicial nula e onde a velocidade de propagação é igual 2 m/s.
- b) Propagação da onda em uma corda elástica tensionada, com as extremidades fixas, de comprimento π metros, deslocamento inicial de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, velocidade inicial $g(x) = -\operatorname{sen}(x)$ metros por segundo e onde a velocidade de propagação é igual 1 m/s.
- c) Propagação da onda em uma corda elástica tensionada, com as extremidades fixas, de comprimento 1 m, deslocamento inicial de $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x)$, velocidade inicial

$g(x) = \cos(4\pi x)$ e onde a velocidade de propagação é igual 2 m/s.

- 2)** Calcule a solução do problema de propagação da onda

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} && 0 < x < 2 \text{ e } 0 < t \\ u(x, 0) &= f(x) && 0 \leq x \leq 2 \\ u_t(x, 0) &= 0 && 0 \leq x \leq 2 \\ u(0, t) &= 0 && 0 < t \\ u(2, t) &= 0 && 0 < t \end{aligned}$$

onde $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

- 3)** Ignorando a condição de compatibilidade (4.1), calcule a solução para o problema de propagação da onda

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} && 0 < x < 2 \text{ e } 0 < t \\ u(x, 0) &= f(x) && 0 \leq x \leq 2 \\ u_t(x, 0) &= g(x) && 0 \leq x \leq 2 \\ u(0, t) &= 0 && 0 < t \\ u(2, t) &= 0 && 0 < t \end{aligned}$$

para cada condição inicial.

- $f(x) = x \quad g(x) = x$
- $f(x) = x \quad g(x) = x - 2$
- $f(x) = x - 2 \quad g(x) = x$

d) $f(x) = x - 2$ $g(x) = x - 2$

e) $f(x) = x$ $g(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

f) $f(x) = x - 2$ $g(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ $g(x) = x$

h) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ $g(x) = x - 2$

5

Equação de Laplace

6.1	Introdução	130
6.2	Série de Fourier Complexa	132
6.3	Transformada de Fourier	138
6.4	Equação do Calor em uma Barra Infinita	143
6.5	Convergência da Transformada de Fourier	148
6.6	Teorema da Convolução	152
6.7	Propriedades da Transformada de Fourier	154
6.8	Calculando a Transformada de Fourier	158
6.9	Tabelas de Transformadas de Fourier	166
6.10	Revisão	169

5.1 Introdução

Nessa seção vamos estudar a [Equação de Laplace](#) (2.4)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{5.1}$$

que é um exemplo de uma equação diferencial linear de segunda ordem [elíptica](#), e portanto, representa situações de equilíbrio ou estacionárias. Dessa forma, interpretamos as variáveis como dimensões espaciais e todas as condições são de fronteiras.

O [Problema de Laplace](#) consiste em encontrar uma função $u: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que resolva a equação de Laplace (5.1) no interior do domínio D e que atenda condições

adequadas na fronteira do domínio, que denotamos por ∂D . Nesse capítulo vamos impor **Condições de Dirichlet**, isso é, vamos fixar o valor da função u na fronteira do domínio ∂D .

A forma de resolução para a equação depende da geometria do domínio e das condições de fronteira. Na Subseção 5.2 apresentamos a solução para o problema de Laplace em uma região retangular. Na Subseção 5.3 calculamos a equação de Laplace em coordenadas polares e usamos esse resultado na Subseção 5.4 para resolver o problema de Laplace em um disco.

5.2 Condição de Dirichlet no Retângulo

Queremos resolver a equação de Laplace (5.1) com condições de Dirichlet em um domínio retangular com a forma

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < a \text{ e } 0 < y < b \} .$$

Nesse caso as condições sobre a fronteira são

$$u(x, 0) = f_0(x), \quad u(x, b) = f_1(x), \quad u(0, y) = g_0(y), \quad u(a, y) = g_1(y),$$

onde f_0, f_1, g_0 e g_1 são funções contínuas. Para que o problema seja bem posto queremos que a junção dessas condições seja contínua, assim devemos impor a condição de compatibilidade entre elas

$$f_0(0) = g_0(0), \quad f_0(a) = g_1(0), \quad g_0(b) = f_1(0), \quad g_1(b) = f_1(a).$$

A Figura 5.1 ilustra o domínio do problema de Laplace no retângulo e suas condições de fronteira.

A estratégia para resolver esse problema consiste em decompô-lo em quatro problemas, onde escolhemos condições de fronteira nula em três lados e uma condição não homogênea no lado restante. A solução para o problema original será construída com soma das quatro soluções obtidas. Dessa forma, vamos começar buscando a solução para um desses problemas reduzidos, isso é, vamos escolher

$$f_0(x) = f(x), \quad f_1(x) = 0, \quad g_0(y) = 0, \quad g_1(y) = 0.$$

Como queremos excluir a solução trivial vamos supor que f não seja identicamente nula no intervalo $[0, a]$. A definição a seguir apresenta esse problema.

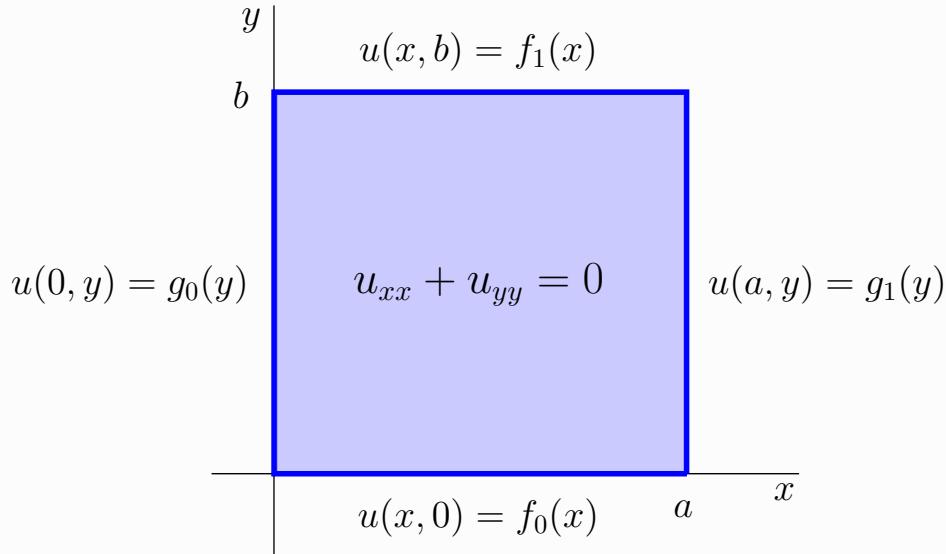


Figura 5.1: Domínio e condições do problema de Laplace com fronteiras de Dirichlet.

DEFINIÇÃO 5.1: PROBLEMA DE LAPLACE NO RETÂNGULO

O Problema de Laplace no Retângulo consiste da equação de Laplace com as seguintes condições de fronteira

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 & (x, y) \in D \\ u(x, 0) &= f(x) & x \in [0, a] \\ u(x, b) &= 0 & x \in [0, a] \\ u(0, y) &= 0 & y \in [0, b] \\ u(a, y) &= 0 & y \in [0, b] \end{aligned}$$

onde escolhemos a fronteira em $y = 0$ para a condição de Dirichlet não homogênea. A função f não pode ser identicamente nula no intervalo $[0, a]$ e D representa o domínio retangular

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < a \text{ e } 0 < y < b \} .$$

A Figura 5.2 ilustra o domínio e as condições do problema de Laplace no retângulo com condições de Dirichlet homogêneas em três lados, descrito na Definição 5.1. Note que esse é um dos quatro casos com três lados com condição de Dirichlet homogêneas. No final dessa seção apresentamos outro caso como um exemplo, os demais casos são explorados nos exercícios.

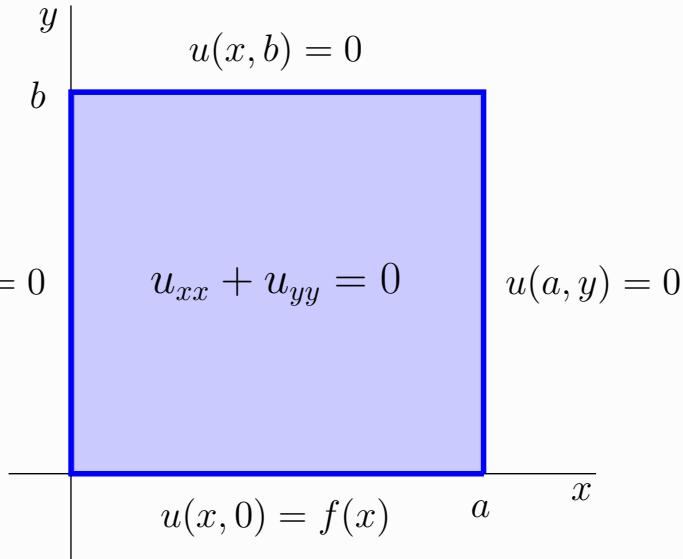


Figura 5.2: Domínio e condições do problema de Laplace com fronteiras de Dirichlet, homogêneas em três lados.

Como nas equações anteriores, aplicamos o método de [Separação de Variáveis](#), supondo que $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Assim, a equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

se transforma em

$$X''Y + XY'' = 0 .$$

Portanto, deve existir uma constante λ tal que

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

assim, podemos desmembrar a equação parcial nas equações ordinárias

$$X'' + \lambda X = 0 , \tag{5.2}$$

$$Y'' - \lambda Y = 0 . \tag{5.3}$$

Precisamos agora aplicar as condições de fronteira e começamos pelas [condições homogêneas](#)

$$u(x,b) = u(0,y) = u(a,y) = 0$$

que podem ser escritas como

$$X(x)Y(b) = X(0)Y(y) = X(a)Y(y) = 0 .$$

Como não estamos interessados no problema trivial, $u(x, y) = 0$, não queremos que as funções X ou Y sejam nulas, portanto essas condições implicam em

$$Y(b) = 0 , \tag{5.4}$$

$$X(0) = X(a) = 0 . \tag{5.5}$$

Podemos agora escrever o **Problema de Autovalores** para x , com a equação diferencial ordinária (5.2) e as condições de contorno obtidas para X

$$X'' + \lambda X = 0 , \tag{5.6}$$

$$X(0) = X(a) = 0 .$$

Esse é exatamente o mesmo problema de autovalores obtido ao resolvemos o problema de dissipação do calor com condição de Dirichlet homogênea na Subseção ???. Nesse problema verificamos que não existem autovalores menores ou iguais a zero e podemos nos restringir a $\lambda > 0$ onde fazemos $\sigma^2 = \lambda$. Além disso, sabemos que a solução da equação diferencial ordinária é

$$X(x) = c_1 \sin(\sigma x) + c_2 \cos(\sigma x) .$$

Consequentemente, as condições de contorno impõem que σ assuma os valores

$$\sigma_n = \frac{n\pi}{a} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Podemos agora escrever os autovalores e autofunções do problema (5.6)

$$\lambda_n = \sigma_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$$

$$X_n(x) = \sin\left(\sigma_n x\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Os gráficos do lado esquerdo da Figura 5.3 mostram as primeiras funções X_n . Note que, todas essas funções valem zero nos extremos do intervalo, $x = 0$ e $x = a$ atendendo as condições de fronteira de Dirichlet homogêneas. Além disso, podemos ver que o valor de n determina o número de oscilações dentro do intervalo.

Passamos agora a buscar as soluções da **equação para Y** (5.3) para os valores de λ_n

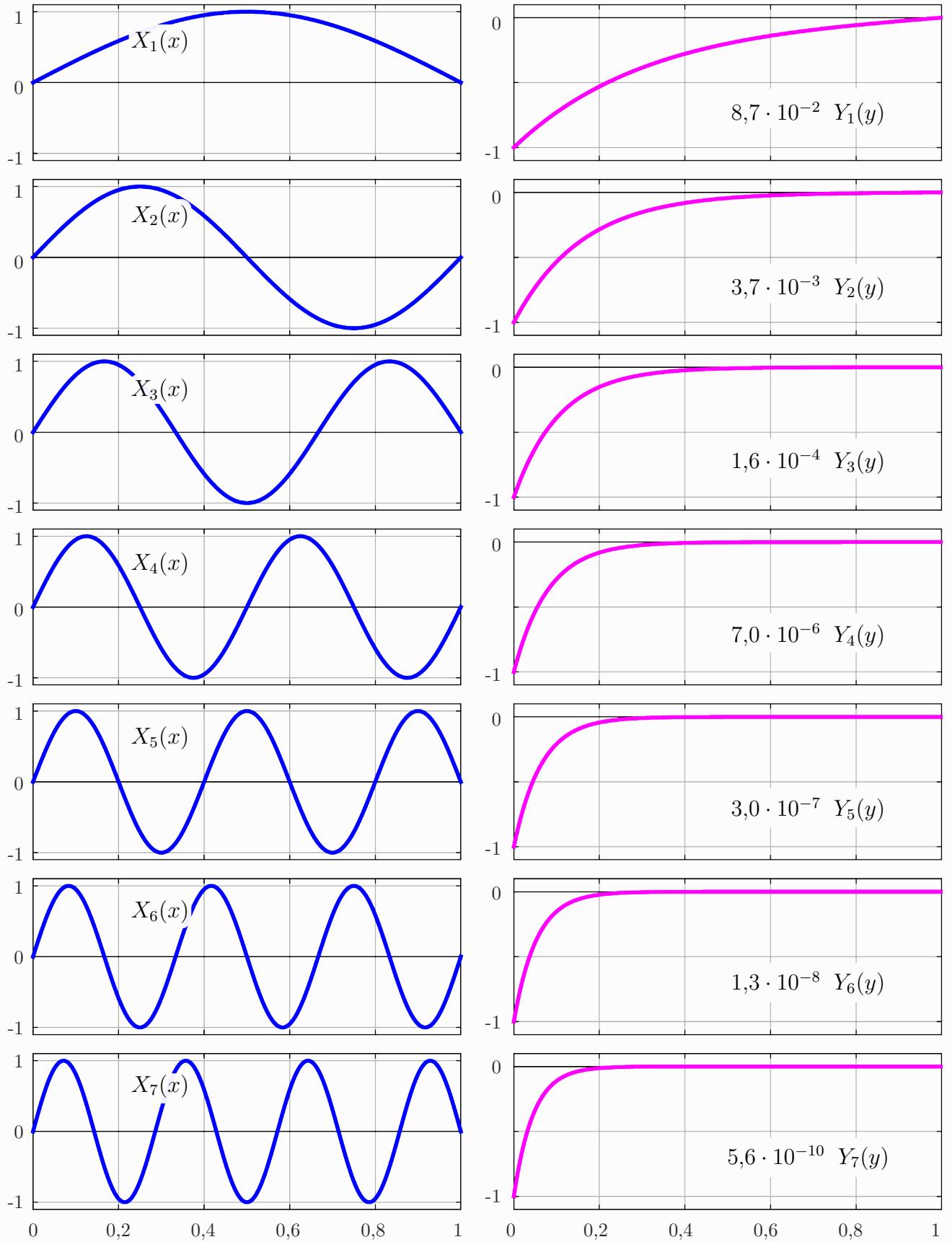


Figura 5.3: Autofunções, X_n , e soluções da EDO em y , Y_n , da equação de Laplace.

encontrados

$$Y'' - \sigma_n^2 Y = 0 .$$

Como vimos na Seção 2.2 a solução geral para essa equação diferencial ordinária tem a forma

$$Y(y) = c_1 \exp(\sigma_n y) + c_2 \exp(-\sigma_n y)$$

onde c_1 e c_2 são constantes. Impondo a condição (5.4), $Y(b) = 0$, temos que

$$Y(b) = c_1 \exp(\sigma_n b) + c_2 \exp(-\sigma_n b) = 0$$

que podemos reescrever como

$$c_2 \exp(-\sigma_n b) = -c_1 \exp(\sigma_n b)$$

multiplicando os dois lados por $\exp(\sigma_n b)$ temos

$$c_2 = -c_1 \exp(2\sigma_n b) .$$

Substituindo c_2 na solução geral para Y temos

$$\begin{aligned} Y(y) &= c_1 \exp(\sigma_n y) + c_2 \exp(-\sigma_n y) , \\ &= c_1 \exp(\sigma_n y) - c_1 \exp(2\sigma_n b) \exp(-\sigma_n y) . \end{aligned}$$

colocando $\exp(\sigma_n b)$ em evidência essa expressão assume a forma

$$Y(y) = c_1 \exp(\sigma_n b) \left[\exp(-\sigma_n b) \exp(\sigma_n y) - \exp(\sigma_n b) \exp(-\sigma_n y) \right]$$

aplicando propriedades da exponencial reescrevemos $Y(y)$ como

$$Y(y) = c_1 \exp(\sigma_n b) \left[\exp(\sigma_n(y - b)) - \exp(-\sigma_n(y - b)) \right] .$$

Notando a semelhança da expressão entre colchetes com a definição do seno hiperbólico (A.2) podemos escrever

$$Y(y) = 2c_1 \exp(\sigma_n b) \operatorname{senh}(\sigma_n(y - b)) .$$

Desprezando a constante $2c_1 \exp(\sigma_n b)$ temos as soluções para a equação (5.3) e a condição (5.4)

$$Y_n(y) = \operatorname{senh}(\sigma_n(y - b)) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Os gráficos do lado direito da Figura 5.3 mostram as primeiras funções Y_n . Como essas funções assumem valores muito altos em módulo, elas foram escaladas para assumir o valor -1 em zero, observe os fatores de escala multiplicando dada uma. Como o seno hiperbólico é uma combinação de exponenciais podemos dizer que essas funções decaem exponencialmente com grande rapidez para zero, o valor de n controla essa rapidez.

Podemos agora escrever as **Soluções Fundamentais** do Problema 5.1

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \sin(\sigma_n x) \operatorname{senh}(\sigma_n(y - b)) . \quad (5.7)$$

A Figura 5.4 exibe as seis primeiras soluções fundamentais para a equação de Laplace com $a = b = 2$. Observe que como essas funções assumem valores muito altos elas foram escaladas para que seu valor máximo seja 1, os fatores de escala estão escritos em cada gráfico.

Pelo princípio da superposição, podemos escrever a **Solução Geral** como a combinação linear das soluções fundamentais

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\sigma_n x) \operatorname{senh}(\sigma_n(y - b)) . \quad (5.8)$$

Qualquer escolha das constantes c_n nos fornece uma função que é solução da equação de Laplace e que atende as condições homogêneas

$$u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0 .$$

Temos agora que impor a **condição de Dirichlet não homogênea**, $u(x, 0) = f(x)$. Começamos avaliando $u(x, 0)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\sigma_n x) \operatorname{senh}(-\sigma_n b)$$

que nos leva a condição

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}(-\sigma_n b) \sin(\sigma_n x) .$$

Observando que $c_n \operatorname{senh}(\sigma_n b)$ são constantes com relação a x percebemos que essa

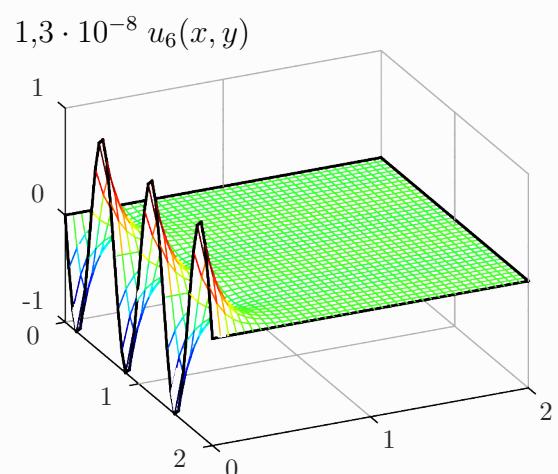
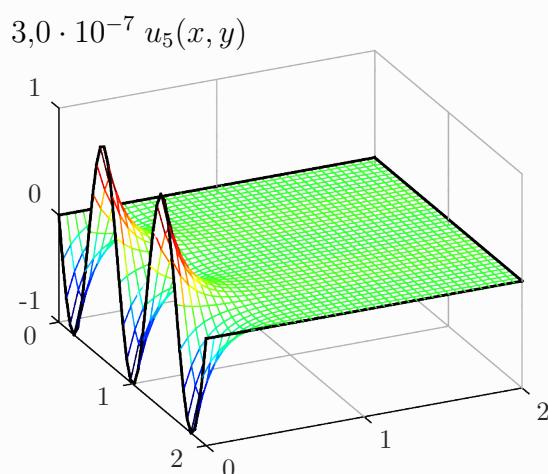
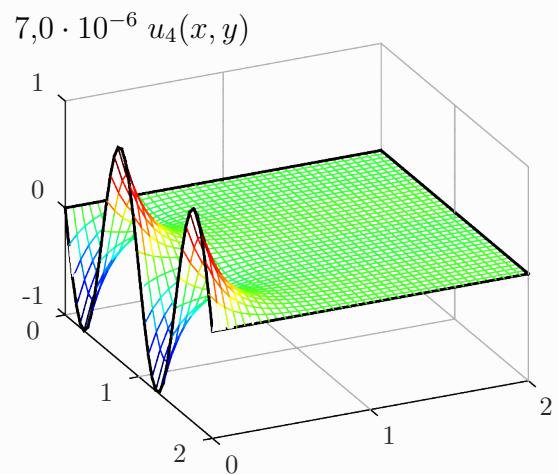
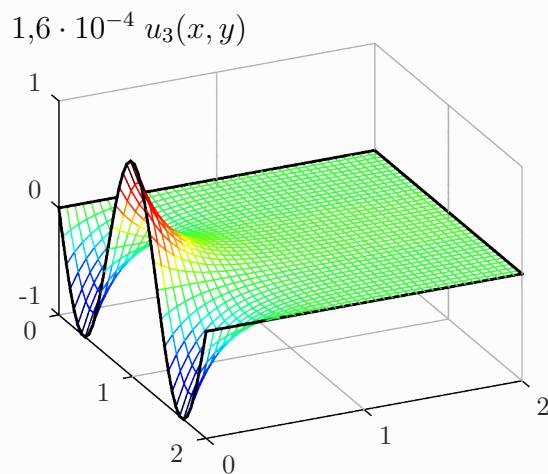
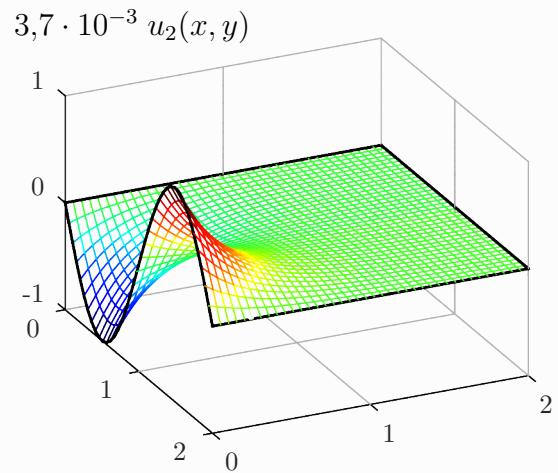
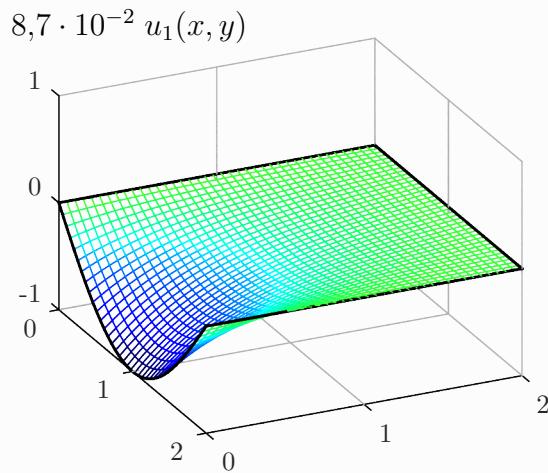


Figura 5.4: Soluções fundamentais (5.7) da equação de Laplace com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas em três lados.

expressão é exatamente a série de Fourier de senos da função $f(x)$ e podemos escrever

$$c_n \operatorname{senh}(-\sigma_n b) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen}(\sigma_n x) dx$$

isolando os coeficientes c_n temos

$$c_n = \frac{2}{a \operatorname{senh}(-\sigma_n b)} \int_0^a f(x) \operatorname{sen}(\sigma_n x) dx . \quad (5.9)$$

Com isso temos que a solução para o Problema 5.1 é dada pela função (5.8) com os coeficientes calculados por (5.9), a proposição a seguir apresenta essa solução.

PROPOSIÇÃO 5.2: SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE LAPLACE NO RETÂNGULO

A solução do Problema 5.1 é dada pela solução geral (5.8)

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)$$

com os coeficientes c_n determinados pela Série de Fourier (5.9) da expansão ímpar da função f

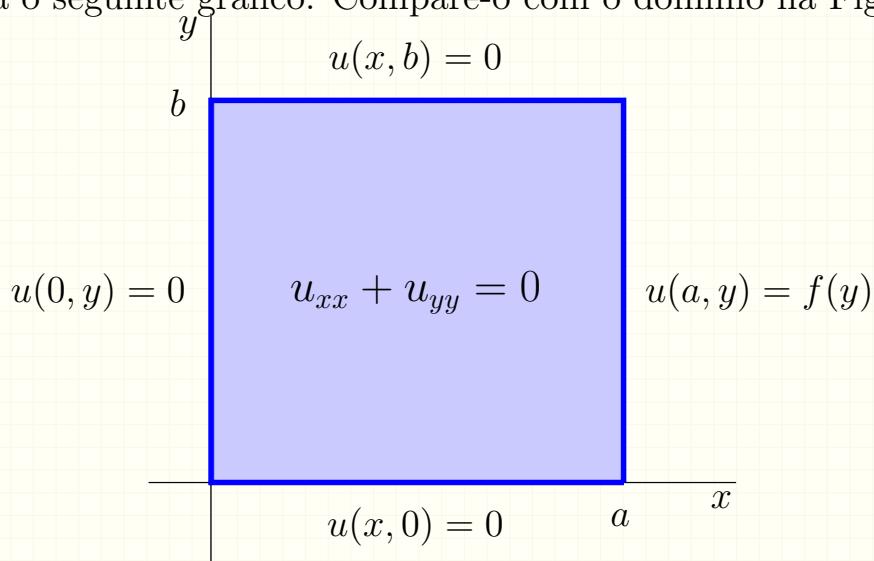
$$c_n = \frac{2}{a} \left[\operatorname{senh}\left(-\frac{n\pi}{a}b\right) \right]^{-1} \int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx .$$

Esse resultado corresponde a escolha que a condição não homogênea seja a fronteira em $y = 0$, o próximo exemplo ilustra como o mesmo procedimento pode ser utilizado para obter a solução geral para o caso onde a condição não homogênea está na fronteira $x = a$.

EXEMPLO 5.2.1: Encontrar a solução geral para o problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 & 0 < x < a \text{ e } 0 < y < b \\ u(x, 0) &= 0 & x \in [0, a] \\ u(x, b) &= 0 & x \in [0, a] \\ u(0, y) &= 0 & y \in [0, b] \\ u(a, y) &= f(y) & y \in [0, b] . \end{aligned}$$

Como em todos os exercícios que buscam a solução de uma equação diferencial parcial, começamos identificando a equação, que nesse caso é a equação de Laplace. Para esse caso particular, temos que verificar a forma do domínio que é um retângulo. Em seguida analisamos as condições de fronteira impostas e identificamos que se trata de condições de Dirichlet nos quatro lados e que essas condições são homogêneas (iguais a zero) em três desses lados. Comparando com o Problema 5.1 observamos que nosso problema é muito similar, mas que a condição não homogênea, $u(a, y) = f(y)$, está em outro lado do retângulo, como mostra o seguinte gráfico. Compare-o com o domínio na Figura 5.2.



Como estamos diante de um novo caso precisamos reproduzir todos os passos para obter a solução do problema, isso é, devemos aplicar a técnica de separação de variáveis, encontrar os autovalores e autofunções, as soluções fundamentais e a solução geral.

Aplicando a **Separação de Variáveis** $u(x, y) = X(x)Y(y)$ obtemos a condição

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

onde podemos escolher o sinal da constante λ que for mais conveniente. Temos também que usar as condições de fronteira homogêneas do problema original para obter as condições de contorno para as EDOs. Obtemos então os problemas para as funções X e Y

$$X'' - \lambda X = 0$$

$$X(0) = 0$$

$$Y'' + \lambda Y = 0$$

$$Y(0) = 0$$

$$Y(b) = 0 .$$

Identificamos que o problema de autovalores está na equação para Y , pois essa é a equação que possui as duas condições necessárias. A escolha do sinal de λ vai determinar qual dessas duas EDOs será uma soma e qual uma subtração. Tendo escolhido o sinal para que o **problema de autovalores** fosse uma soma obtemos exatamente o mesmo problema que foi resolvido anteriormente, cuja solução é

$$\lambda_n = \sigma_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{b^2},$$

$$Y_n(y) = \sin(\sigma_n y) = \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

Vamos agora resolver o problema para X para cada autovalor λ_n

$$X'' - \sigma_n^2 X = 0.$$

Essa também é uma EDO conhecida cuja solução geral é

$$X(x) = k_1 \cosh(\sigma_n x) + k_2 \sinh(\sigma_n x).$$

Impondo a condição $X(0) = 0$ verificamos que $k_1 = 0$ e portanto

$$X(x) = k_2 \sinh(\sigma_n x).$$

Podemos agora escrever as **Soluções Fundamentais** para o problema original

$$u_n(x, y) = \sinh(\sigma_n x) \sin(\sigma_n y).$$

Cada solução fundamental resolve a equação diferencial e atende as condições homogêneas

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad u(0, y) = 0.$$

A **Solução Geral** será a combinação linear de todas as soluções fundamentais

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh(\sigma_n x) \sin(\sigma_n y).$$

O último passo consiste na imposição da **Condição Não Homogênea** $u(a, y) = f(y)$ que nos leva a

$$u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh(\sigma_n a) \sin(\sigma_n y) = f(y).$$

Comparando a série obtida com a série de senos da função $f(y)$ com período $2b$, concluímos que os coeficientes c_n são obtidos da relação

$$c_n \operatorname{senh}(\sigma_n a) = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen}(\sigma_n y) dy .$$

Existem mais duas possibilidades para o lado onde impomos a condição não homogênea no problema de Laplace no retângulo. Esses casos são trabalhados nos exercícios e são resolvidos aplicando exatamente os mesmos passos. O próximo exemplo ilustra o uso dos resultados dessa seção para obter a solução de um problema específico.

EXEMPLO 5.2.2: Resolver o Problema

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad 0 < x < 3 \text{ e } 0 < y < 2$$

$$u(x, 0) = 0 \quad x \in [0, 3]$$

$$u(x, 2) = 0 \quad x \in [0, 3]$$

$$u(0, y) = 0 \quad y \in [0, 2]$$

$$u(3, y) = f(y) \quad y \in [0, 2]$$

onde

$$f(y) = \begin{cases} y & 0 \leq y \leq 1 , \\ 2 - y & 1 < y \leq 2 . \end{cases}$$

Começamos identificando que se trata de uma equação de Laplace com domínio retangular, além disso verificamos que as dimensões do retângulo são $a = 3$ e $b = 2$. Verificamos também que as condições do problema são de Dirichlet e que em três lados elas são homogêneas. Comparando com os problemas já resolvidos percebemos que esse problema é equivalente ao problema do Exemplo 5.2, sabemos então que a **Solução Geral** é dada por

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

com os coeficientes dados por

$$c_n = \frac{2}{b} \left[\operatorname{senh}\left(\frac{an\pi}{b}\right) \right]^{-1} \int_0^b f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy .$$

Substituindo os valores $a = 3$ e $b = 2$ temos

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}y\right)$$

$$c_n = \left[\operatorname{senh}\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right]^{-1} \int_0^2 f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}y\right) dy.$$

O último passo consiste em calcular os coeficientes c_n para a função f dada. Começamos calculando os coeficientes da série de Fourier de senos e obtemos

$$b_n = \int_0^2 f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}y\right) dy = \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Agora aplicamos a fórmula para c_n

$$c_n = \frac{b_n}{\operatorname{senh}\left(\frac{3n\pi}{2}\right)} = \frac{8 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2 \operatorname{senh}\left(\frac{3n\pi}{2}\right)}.$$

Podemos escrever agora a solução completa para o problema

$$u(x, y) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2 \operatorname{senh}\left(\frac{3n\pi}{2}\right)} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

5.3 Equação de Laplace em Coordenadas Polares

Para resolver a equação de Laplace em um disco de raio L , podemos definir o domínio como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq L\}.$$

Porém, as técnicas que estamos usando não se adequam a esse domínio, a solução é mudarmos nosso sistema de coordenadas para **Coordenadas Polares**

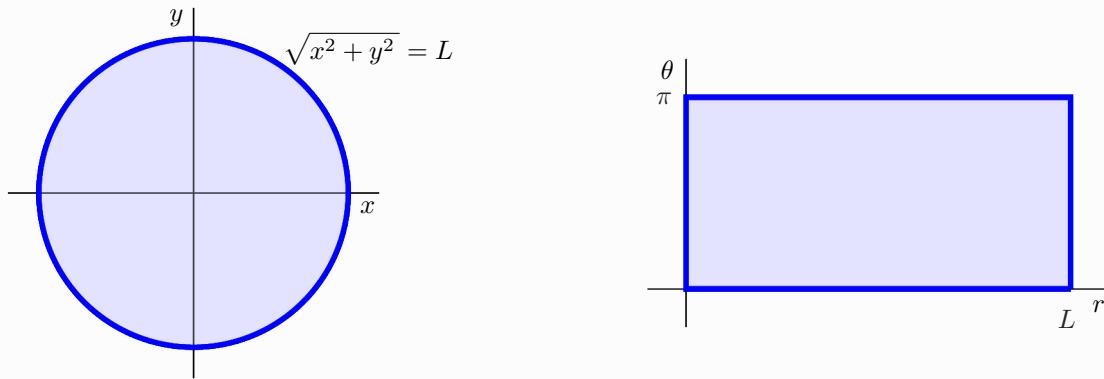
$$x = r \cos(\theta),$$

$$y = r \operatorname{sen}(\theta).$$

Nesse novo sistema o domínio passa a ser a região

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < L \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

que é melhor adaptada a técnica de separação de variáveis. A Figura 5.5 representa o domínio nos dois sistemas de coordenadas. Mais informações sobre as coordenadas polares podem ser encontradas na Seção A.5.



(a) Disco de raio L em coordenadas cartesianas

(b) Disco de raio L em coordenadas polares

Figura 5.5: Domínio em forma de disco representado em coordenadas cartesianas e polares.

A mudança de coordenadas transforma também a equação pois as derivadas precisam respeitar a regra da cadeia. Assim precisamos determinar a forma que a equação de Laplace assume em coordenadas polares. Começamos escrevendo a relação entre uma função escrita em coordenadas cartesianas, $u(x, y)$, e sua correspondente em coordenadas polares, $v(r, \theta)$

$$u(x, y) = v(r, \theta) = v(r(x, y), \theta(x, y)) .$$

Como a equação de Laplace envolve as derivadas segundas de u em x e em y precisamos encontrar as derivadas correspondentes em coordenadas polares. Vamos calcular essas derivadas usando a regra da cadeia. Derivando u por x temos

$$u_x = v_r r_x + v_\theta \theta_x .$$

Aplicando novamente a regra da cadeia, segue que

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (v_r r_x + v_\theta \theta_x)_x \\ &= (v_r)_x r_x + v_r r_{xx} + (v_\theta)_x \theta_x + v_\theta \theta_{xx} \\ &= (v_{rr} r_x + v_{r\theta} \theta_x) r_x + v_r r_{xx} + (v_{\theta r} r_x + v_{\theta\theta} \theta_x) \theta_x + v_\theta \theta_{xx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v_{rr}(r_x)^2 + v_{r\theta}\theta_x r_x + v_r r_{xx} + v_{\theta r} r_x \theta_x + v_{\theta\theta}(\theta_x)^2 + v_\theta \theta_{xx} \\
&= v_{rr}(r_x)^2 + v_{\theta\theta}(\theta_x)^2 + 2v_{r\theta}\theta_x r_x + v_r r_{xx} + v_\theta \theta_{xx} .
\end{aligned}$$

Repetindo os mesmos cálculos para as derivadas em y obtemos

$$u_{yy} = v_{rr}(r_y)^2 + v_{\theta\theta}(\theta_y)^2 + 2v_{r\theta}\theta_y r_y + v_r r_{yy} + v_\theta \theta_{yy} .$$

Podemos agora escrever a equação de Laplace somando as duas derivadas

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= v_{rr}((r_x)^2 + (r_y)^2) + v_{\theta\theta}((\theta_x)^2 + (\theta_y)^2) \\
&\quad + 2v_{r\theta}(\theta_x r_x + \theta_y r_y) + v_r(r_{xx} + r_{yy}) + v_\theta(\theta_{xx} + \theta_{yy})
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Para simplificar essa equação, usamos as fórmulas da transformação

$$x = r \cos(\theta) \quad \text{e} \quad y = r \sin(\theta)$$

e verificamos que

$$r^2 = x^2 + y^2 .$$

Derivando essa relação em x e depois em y obtemos

$$(r^2)_x = 2rr_x = 2x \quad \text{e} \quad (r^2)_y = 2rr_y = 2y .$$

Isolando as derivadas de r temos

$$r_x = \frac{x}{r} \quad \text{e} \quad r_y = \frac{y}{r} .$$

Agora somando seu quadrados encontramos

$$(r_x)^2 + (r_y)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1 .$$

Substituindo essa expressão em (5.10) obtemos

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= v_{rr} + v_{\theta\theta}((\theta_x)^2 + (\theta_y)^2) \\
&\quad + 2v_{r\theta}(\theta_x r_x + \theta_y r_y) + v_r(r_{xx} + r_{yy}) + v_\theta(\theta_{xx} + \theta_{yy}) .
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Continuando o processo de simplificação da equação somamos as derivadas segundas de r por x e y

$$r_{xx} + r_{yy} = \left(\frac{x}{r}\right)_x + \left(\frac{y}{r}\right)_y$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r - xr_x}{r^2} + \frac{r - yr_y}{r^2} \\
&= \frac{1}{r} - \frac{xr_x}{r^2} + \frac{1}{r} - \frac{yr_y}{r^2} \\
&= \frac{2}{r} - \frac{xr_x + yr_y}{r^2} \\
&= \frac{2}{r} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r} \right) \\
&= \frac{2}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{r^2}{r} \\
&= \frac{1}{r} .
\end{aligned}$$

Substituindo essa expressão em (5.11) obtemos

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= v_{rr} + v_{\theta\theta}((\theta_x)^2 + (\theta_y)^2) \quad (5.12) \\
&\quad + 2v_{r\theta}(\theta_x r_x + \theta_y r_y) \\
&\quad + \frac{v_r}{r} \\
&\quad + v_\theta(\theta_{xx} + \theta_{yy}) .
\end{aligned}$$

Podemos ainda simplificar as derivadas de θ , para isso vamos usar a relação

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) .$$

Derivando essa relação por x e y e somando seus quadrados temos

$$\begin{aligned}
(\theta_x)^2 + (\theta_y)^2 &= \left(\frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{-y}{x^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{1}{x} \right)^2 \\
&= \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)^2 \\
&= \frac{y^2 + x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{1}{r^2} .
\end{aligned}$$

Novamente, substituímos na equação (5.12)

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{v_{\theta\theta}}{r^2} + 2v_{r\theta}(\theta_x r_x + \theta_y r_y) + \frac{v_r}{r} + v_\theta(\theta_{xx} + \theta_{yy}) . \quad (5.13)$$

Os próximos passos são calcular a soma das derivadas segundas de θ

$$\begin{aligned}\theta_{xx} + \theta_{yy} &= \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right)_x + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)_y \\ &= \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

e a soma das derivadas de r e θ

$$\begin{aligned}\theta_x r_x + \theta_y r_y &= \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \frac{x}{r} + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \frac{y}{r} \\ &= \frac{xy - yx}{r^4} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Substituímos essas duas últimas relações na equação (5.13) temos a **Equação de Laplace em Coordenadas Polares**

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + \frac{1}{r} v_r. \quad (5.14)$$

Na próxima subseção vamos usar essa equação para resolver um problema de Laplace em um disco.

5.4 No Disco com Fronteira de Dirichlet

Vamos agora resolver o problema de Laplace com fronteira de Dirichlet no disco. Já verificamos que devemos usar coordenadas polares onde o domínio tem a forma

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < L \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi\},$$

a equação de Laplace é escrita como

$$v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + \frac{1}{r} v_r = 0$$

e a condição de fronteira será aplicada na circunferência de raio L impondo que

$$v(L, \theta) = f(\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

onde, para eliminarmos a solução trivial, determinamos que $f(\theta) \neq 0$ para algum $\theta \in [0, 2\pi]$. Além dessas, precisamos impor algumas condições para que o problema seja bem posto no sistema de coordenadas polares. A solução v precisa ser periódica de período 2π na variável θ e ser limitada na variável r , especialmente quando r se aproxima de zero. O ponto $r = 0$ é uma singularidade do sistema de coordenadas, mas é um ponto normal para o problema de Laplace. A Figura 5.6 ilustra o domínio e as condições desse problema e a seguir apresenta todos os detalhes.

DEFINIÇÃO 5.3: PROBLEMA DE LAPLACE NO DISCO COM FRONTEIRA DE DIRICHLET

O problema de Laplace no disco com condição de Dirichlet consiste em resolver a equação

$$v_{rr} + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} + \frac{1}{r}v_r = 0 \quad (r, \theta) \in D$$

$$v(L, \theta) = f(\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

onde $f(\theta) \neq 0$ para algum $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < L \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

e a função v é limitada em r e periódica com período 2π em θ .

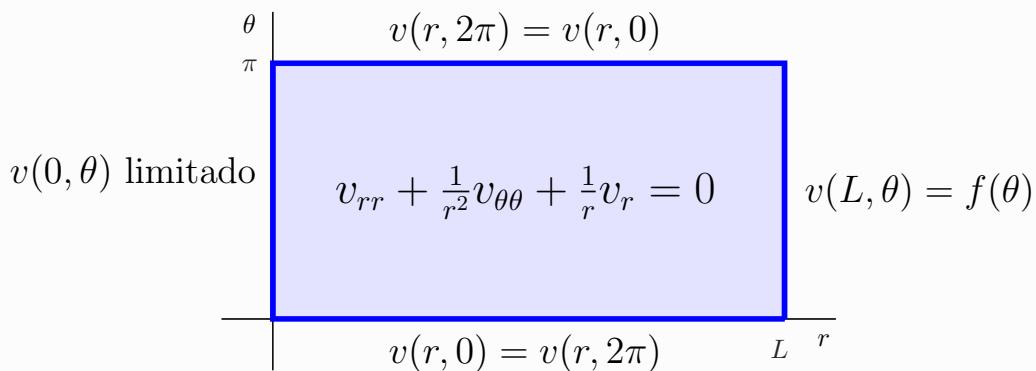


Figura 5.6: Domínio e condições do problema de Laplace no Disco com condições de Dirichlet.

Para resolver esse problema vamos seguir os mesmos passos que empregamos para os casos anteriores. Começamos aplicando o método de **Separação de Variáveis**, supondo

que $v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ e substituindo na equação diferencial parcial

$$R''\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' + \frac{1}{r}R'\Theta = 0 .$$

Rearranjando podemos isolar os termos que dependem de r dos que dependem de θ

$$\left(R'' + \frac{1}{r}R' \right) \Theta = -\frac{1}{r^2}R\Theta'' ,$$

$$\left(R'' + \frac{1}{r}R' \right) \frac{r^2}{R} = \frac{-\Theta''}{\Theta} .$$

Então, existe uma constante λ tal que a equação diferencial parcial pode ser escrita como duas equações diferenciais ordinárias

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 ,$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0 .$$

Vamos tomar a equação para Θ com a condição de periodicidade como nosso [Problema de Autovalores](#), note que temos exatamente a mesma EDO do problema do calor com a condição de periodicidade como condição de fronteira.

Nesse caso, se $\lambda < 0$ a solução geral é

$$\Theta(\theta) = pe^{\sigma\theta} + qe^{-\sigma\theta}$$

onde $\sigma^2 = -\lambda$. Como essa função só será periódica se for nula, $p = q = 0$, ela não é compatível com as condições do problema.

Para $\lambda = 0$ a solução geral é

$$\Theta(\theta) = p + q\theta ,$$

que será periódica se $q = 0$. Temos então o autovalor $\lambda_0 = 0$ e escolhemos a autofunção

$$\Theta_0(\theta) = 1 .$$

Para $\lambda > 0$ a solução geral é

$$\Theta(\theta) = p \cos(\sigma\theta) + q \sin(\sigma\theta)$$

onde $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Como essa função precisa ter período igual a 2π , impomos a condição $\sigma_n = n$ e os autovalores e autofunções são

$$\lambda_n = \sigma_n^2 = n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Theta_n(\theta) = p \cos(n\theta) + q \sin(n\theta) .$$

Vamos agora resolver a equação em R para cada valor de λ_n

$$r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0 .$$

Essa é uma **Equação de Euler** que podemos resolver buscamos uma solução na forma $R(r) = r^s$, que substituindo na equação produz

$$r^2 s(s-1)r^{s-2} + rsr^{s-1} - n^2 r^s = 0 .$$

Colocando r^s em evidência e simplificando temos

$$r^s (s(s-1) + s - n^2) = r^s (s^2 - n^2) = 0 .$$

Como r^s não é uma função nula concluímos que

$$s^2 - n^2 = 0$$

obtendo as soluções $s = \pm n$, que produzem

$$\begin{aligned} R_+(r) &= r^n , \\ R_-(r) &= r^{-n} . \end{aligned}$$

Porém, as funções $R_-(r)$ não são limitadas quando $r \rightarrow 0$, temos então que eliminá-las.

Podemos agora construir as **Soluções Fundamentais** associadas aos autovalores e autofunções do problema em θ . Começando pelo caso $\lambda > 0$ temos

$$\begin{aligned} v_n(r, \theta) &= R_n(r)\Theta_n(\theta) \\ &= r^n (p \cos(n\theta) + q \sin(n\theta)) \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$

No caso $\lambda = 0$, com a autofunção $\Theta_0(\theta) = 1$, precisamos substituir o valor de λ na

equação para R , obtendo

$$r^2 R'' + r R' = 0 .$$

Para resolver essa EDO fazemos a mudança de variável $S(r) = R'(r)$, que leva à equação separável

$$r^2 S' + rS = 0$$

que reescrevemos como

$$\frac{S'}{S} = -\frac{1}{r}$$

e resolvemos integrando os dois lados

$$\int \frac{dS}{S} = - \int \frac{dr}{r}$$

$$\ln(S) = -\ln(r) + c .$$

Isolando S e usando a relação $R' = S$, encontramos

$$\begin{aligned} R'(r) &= S(r) \\ &= \exp(-\ln(r) + c) \\ &= \exp(-\ln(r)) \exp(c) \\ &= \frac{e^c}{r} = \frac{p}{r} \end{aligned}$$

onde $p = e^c$. Integrando temos

$$R(r) = p \ln(r) + q .$$

Como R deve ser limitada, segue que $p = 0$ e portanto R é constante. Assim a **Solução Fundamental** associada com $\lambda = 0$ é uma função constante

$$v_0(r, \theta) = \frac{1}{2} .$$

Escolhemos a constante igual a $1/2$ para ajustá-la as fórmulas da Série de Fourier que usaremos.

Podemos agora escrever a **Solução Geral** para o problema de Laplace no disco

$$\begin{aligned} v(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n v_n(r, \theta) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde denotando $a_n = c_n p$ e $b_n = c_n q$. Qualquer escolha dos coeficientes a_n e b_n produz uma função que é solução da equação diferencial, é limitada em $r = 0$ e periódica em θ .

Falta apenas impor a **Condição de Fronteira** $v(L, \theta) = f(\theta)$ que escrevemos como

$$f(\theta) = v(L, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)).$$

Note que essa é uma série de Fourier de período 2π . Desse modo, estendendo f periodicamente, os coeficientes da série são dados pelas fórmulas de Euler-Fourier

$$L^n a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$L^n b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Como a expressão de f é dada no intervalo $[0, 2\pi]$, podemos reescrever as fórmulas acima de maneira mais conveniente usando o fato que a integral de uma função periódica em um intervalo cujo comprimento é o período da função independe do início do intervalo

$$a_n = \frac{1}{\pi L^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.16)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi L^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.17)$$

A proposição a seguir resume os resultados obtidos nessa subseção.

**PROPOSIÇÃO 5.4: SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE LAPLACE NO DISCO
COM FRONTEIRA DE DIRICHLET**

A solução do Problema 5.3 é dada pela solução geral (5.15)

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

com os coeficientes determinados pelas fórmulas (5.16) e (5.17) baseadas na Série de Fourier da função f

$$a_n = \frac{1}{\pi L^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi L^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Exercícios Seção 5.4

1) Para cada conjunto de condições de fronteira, obtenha os itens solicitados para a solução da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$.

- i) As equações diferenciais ordinárias produzidas pela separação de variáveis.
- ii) O problema de autovalores, assim como seus autovalores e autofunções.
- iii) As soluções fundamentais.
- iv) A solução geral.
- v) As fórmulas para os coeficientes que determinam a solução.

a) $u(x, 0) = f(x)$ $u(x, b) = 0$ $0 \leq x \leq a$
 $u(0, y) = 0$ $u(a, y) = 0$ $0 < y < b$

b) $u(x, 0) = 0$ $u(x, b) = g(x)$ $0 \leq x \leq a$
 $u(0, y) = 0$ $u(a, y) = 0$ $0 < y < b$

c) $u(x, 0) = 0$ $u(x, b) = 0$ $0 \leq x \leq a$
 $u(0, y) = r(y)$ $u(a, y) = 0$ $0 < y < b$

d) $u(x, 0) = 0$ $u(x, b) = 0$ $0 \leq x \leq a$
 $u(0, y) = 0$ $u(a, y) = s(y)$ $0 < y < b$

2) Encontre a solução para a equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$ que satisfaz as condições

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 & u(x, b) &= g(x) & 0 \leq x \leq a \\ u(0, y) &= 0 & u(a, y) &= 0 & 0 < y < b \end{aligned}$$

onde

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < a/2 \\ a - x, & a/2 \leq x \leq a \end{cases}$$

3) Calcule a solução da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$ com as condições dadas.

a) $u(x, 0) = 0$ $u(x, 1) = 0$ $a = 1$
 $u(0, y) = 0$ $u(1, y) = \operatorname{sen}(\pi y)$ $b = 1$

b) $u(x, 0) = 0$ $u(x, 1) = \operatorname{sen}(\pi x)$ $a = 1$
 $u(0, y) = 0$ $u(1, y) = 0$ $b = 1$

c) $u(x, 0) = 0$ $u(x, 1) = \operatorname{sen}(5\pi x)$ $a = 1$
 $u(0, y) = 0$ $u(1, y) = 0$ $b = 1$

d) $u(x, 0) = 0$ $u(x, \pi) = 0$ $a = 2$
 $u(0, y) = 0$ $u(2, y) = y(y - \pi)$ $b = \pi$

e) $u(x, 0) = 0$ $u(x, \pi) = 0$ $a = 2$
 $u(0, y) = y(y - \pi)$ $u(2, y) = 0$ $b = \pi$

f) $u(x, 0) = x^2 - x$ $u(x, 2) = 0$ $a = 1$
 $u(0, y) = 0$ $u(1, y) = 0$ $b = 2$

g) $u(x, 0) = 0$ $u(x, 2) = x^2 - x$ $a = 1$
 $u(0, y) = 0$ $u(1, y) = 0$ $b = 2$

6

Transformada de Fourier

A.1 Notação Matemática	171
A.2 Revisão de Alguns Conceitos de Álgebra	174
A.3 Revisão de Algumas Funções	176
A.4 Indução Finita	186
A.5 Sistemas de Coordenadas	187
A.6 Números Complexos	189
A.7 Álgebra Linear	195
A.8 Cálculo de Funções Reais	200

6.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos a **Transformada de Fourier** que é uma generalização da Série de Fourier para funções não periódicas. A principal consequência dessa generalização é que as frequências passam a assumir valores reais. Isso ocorre porque para representar funções periódicas a série utilizava um conjunto contável de frequências, isso é, as frequências assumiam valores ω_n para $n \in \mathbb{N}$ e a função era descrita pelo conjunto de coeficientes a_n e b_n . Porém, para representar funções não periódicas a transformada precisará de frequências assumindo valores reais $\omega \in \mathbb{R}$. Dessa forma o somatório em n para as frequências ω_n se transforma em uma integral em ω e as funções passam a ser representadas por uma nova função em ω . Como podemos ver na expressão que define a Transformada de Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

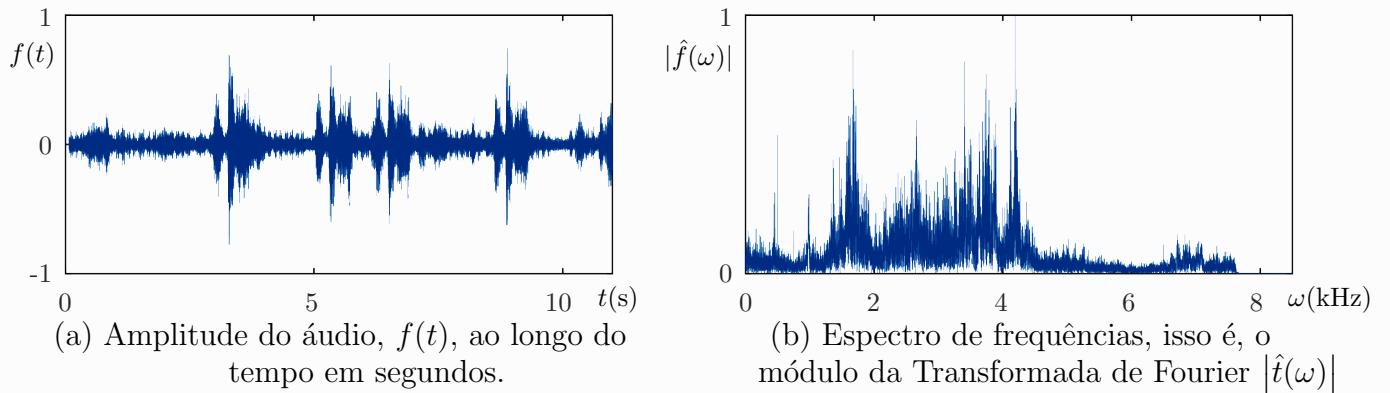


Figura 6.1: Áudio do piado do Bem-Te-Vi no domínio do tempo e da frequência.

A Transformada de Fourier pode ser interpretada como uma decomposição de uma função, ou sinal, em suas componentes senoidais, dessa forma ela transforma uma função no tempo, $f(t)$, em sua representação em frequências, $\hat{f}(\omega)$. Essa mudança da forma de representar a função sem perder sua informação original se mostrou uma ferramenta extremamente poderosa e possui inúmeras aplicações. Quando aliarmos o poder da transformada com a existência de um algoritmo extremamente eficiente para calculá-la computacionalmente, a FFT (Fast Fourier Transform) implementada em praticamente qualquer linguagem de programação existente, temos uma das ferramentas matemáticas mais aplicadas. A Figura 6.1 é um exemplo do uso da Transformada de Fourier, a Figura 6.1a representa a amplitude do áudio como função do tempo do piado do Bem-Te-Vi [71], enquanto a Figura 6.1b mostra a distribuição de amplitudes por frequências.

Como a Transformada de Fourier e sua inversa nos permitem ir e voltar da função original $f(t)$ para sua transformada $\hat{f}(\omega)$ é comum pensarmos que essas são duas representações distintas da mesma função. Dessa forma dizemos que $f(t)$ é a representação da função no **Domínio do Tempo** e $\hat{f}(\omega)$ é a representação da mesma função no **Domínio da Frequência**.

Para fazer a transição da Série para a Transformada de Fourier precisamos primeiro reescrever a série em um novo formato que chamamos de **Série de Fourier Complexa**. A Seção 6.2 apresenta os cálculos que transformam os coeficientes a_n e b_n reais em coeficientes c_n complexos, além de substituir as funções seno e cosseno pela função exponencial complexa. A Seção A.6, dos apêndices, faz uma introdução aos números complexos e apresenta resultados necessários para a compreensão deste capítulo. Com a Série de Fourier Complexa em mãos vamos definir a Transformada de Fourier e sua inversa na Seção 6.3.

A Seção 6.4 ilustra como podemos chegar a definição da Transformada de Fourier buscando a solução para o problema de dissipação do calor em uma barra infinita. O principal objetivo dessa seção é mostrar como a Transformada de Fourier surge como uma ferramenta para a solução desse tipo de problema. A parte inicial desses cálculos também é utilizada para a construção da Formulação Fraca da equação, necessária para o emprego do Método de Elementos Finitos, muito utilizado na engenharia para resolver equações diferenciais, especialmente em domínios geometricamente complexos.

Durante a construção da solução para o problema do calor na barra infinita surge a necessidade de calcular a inversa da Transformada de Fourier de um produto de funções. Essa operação está ligada ao importante [Teorema da Convolução 6.8](#). A convolução é uma operação muito utilizada em tratamento de sinais e imagens, sendo base para muitos filtros. Um fato importante é que computacionalmente é mais eficiente calcular a Transformada de Fourier dos sinais de entrada, calcular a convolução nos sinais transformados e aplicar transformada a inversa para obter o resultado do que calcular a convolução diretamente nos sinais originais. Na Seção 6.6 definimos a convolução, apresentamos suas propriedades e apresentamos o Teorema da Convolução que a relaciona com a Transformada de Fourier.

A Seção 6.5 discute a convergência da Transformada e a necessidade de usarmos funções generalizadas como o Delta de Dirac. A Seção 6.7 apresenta as principais propriedades da transformada e a Seção 6.8 apresenta os exemplos do cálculo da transformada de algumas funções importantes. As Tabelas 6.1 e 6.2 resumem esses resultados.

6.2 Série de Fourier Complexa

Apresentamos nessa seção a [Série de Fourier Complexa](#) que é uma forma alternativa para a Série de Fourier, definida em 1.7, onde substituímos as funções seno e cosseno reais por uma exponencial complexa. Escrita dessa forma fica mais fácil comparar a Série com a Transformada de Fourier. Observe que a versão complexa da série tem exatamente as mesmas propriedades da série escrita na sua forma original, estamos apenas fazendo uma transformação sem alterar a série.

Começamos com as expressões para a Série de Fourier e as fórmulas para o cálculo dos seus coeficientes. Usamos aqui $t \in \mathbb{R}$ como variável independente pois uma das

principais aplicações da transformada de Fourier é a conversão de sinais no tempo para seu espectro de frequências

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right), \quad (6.1)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.2)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.3)$$

Usamos a Identidade de Euler para escrever as funções seno e cosseno em termos da exponencial. Primeiro calculamos a exponencial de it e de $-it$

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos(t) + i \sin(t), \\ e^{-it} &= \cos(t) - i \sin(t). \end{aligned}$$

Somando e subtraindo essas expressões obtemos duas novas relações

$$\begin{aligned} e^{it} + e^{-it} &= 2 \cos(t), \\ e^{it} - e^{-it} &= 2i \sin(t). \end{aligned}$$

Agora basta isolarmos o seno e o cosseno em cada relação

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad (6.4)$$

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}. \quad (6.5)$$

Note a semelhança com as definições das funções $\operatorname{senh}(t)$ e $\cosh(t)$, equações (A.2) e (A.3).

Combinando as funções seno e cosseno com mesma frequência podemos escrever

$$\begin{aligned} a \cos(kt) + b \sin(kt) &= a \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} + b \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \\ &= \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2i}\right) e^{ikt} + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2i}\right) e^{-ikt} \\ &= \frac{a - bi}{2} e^{ikt} + \frac{a + bi}{2} e^{-ikt}. \end{aligned}$$

Criando a constante complexa $c = (a - bi)/2$, temos que

$$a \cos(kt) + b \sin(kt) = c e^{ikt} + \bar{c} e^{-ikt} \quad (6.6)$$

onde \bar{c} é o complexo conjugado de c (veja a Definição A.2).

Podemos então reescrever os termos do somatório (6.1) como exponenciais, nesse processo escolhemos usar

$$\omega = \frac{\pi}{L}$$

e obtemos

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = c_n \exp(in\omega t) + \bar{c}_n \exp(-in\omega t).$$

Substituindo em (6.1) temos

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(in\omega t) + \bar{c}_n \exp(-in\omega t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(in\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n \exp(-in\omega t). \end{aligned}$$

Na última passagem assumimos que todos os limites convergem e separamos a série em duas partes. Vamos agora reorganizar os termos para escrever as duas séries com índices entre um e infinito em uma única série com índices entre menos e mais infinito. Começamos trocando o índice da segunda série de n para $-n$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(in\omega t) + \sum_{n=-1}^{-\infty} \bar{c}_{-n} \exp(in\omega t)$$

Note que para $n > 0$ os valores de c_n são definidos pelas fórmulas dos coeficientes da Série de Fourier. Para os índices $n < 0$ definimos que

$$c_n = \bar{c}_{-n} \quad \forall n < 0$$

e podemos escrever a série como

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(in\omega t) + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n \exp(in\omega t) .$$

Fazendo $c_0 = a_0/2$, podemos agrupar todos os termos em um único somatório construindo a **Série de Fourier Complexa**

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t) .$$

Vamos agora ajustar as fórmulas dos coeficientes reais, a_n e b_n , para o cálculo direto dos **coeficientes complexos** c_n . Para $n \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos(n\omega t) dt - \frac{i}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin(n\omega t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) [\cos(n\omega t) - i \sin(n\omega t)] dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \exp(-in\omega t) dt . \end{aligned}$$

A proposição a seguir resume os resultados dessa seção.

PROPOSIÇÃO 6.1: SÉRIE DE FOURIER COMPLEXA

A **Série de Fourier Complexa** é uma série da forma

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} , \quad (6.7)$$

onde os coeficientes c_n são calculados por

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-in\omega t} dt & n \geq 0 , \\ \bar{c}_{-n} & n < 0 . \end{cases} \quad (6.8)$$

Observe que, a Série de Fourier só pode ser usada para representar funções periódicas, com período $2L$, e que as senoides somadas tem frequências discretas $n\omega$ para $n = 0, 1, 2, \dots$

EXEMPLO 6.2.1:

Calcule a Série de Fourier Complexa da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad f(x+2) = f(x).$$

Note que já calculamos a Série de Fourier dessa função no exemplo 1.3.3, onde encontramos que

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ 0 & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par}, \\ \frac{2}{n\pi} & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Como conhecemos os coeficientes reais podemos calcular diretamente os coeficientes complexos. Para $n = 0$ temos

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Para $n > 0$ e ímpar vamos fazer a mudança de índices $n = 2k - 1$ para escrever

$$c_n = c_{2k-1} = \frac{a_{2k-1} + ib_{2k-1}}{2} = \frac{ib_{2k-1}}{2} = \frac{2i}{(2k-1)\pi} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Enquanto que para $n < 0$ e ímpar temos

$$c_n = \bar{c}_{-n} = \bar{c}_{2k-1} = \frac{-2i}{(2k-1)\pi} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Vamos agora escrever a série

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{in\omega t} + c_0 e^0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n e^{-in\omega t} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t}.$$

Removendo todos os termos pares e fazendo a mudança de índices $n = 2k - 1$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_{2k-1} e^{-i(2k-1)\omega t} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} e^{i(2k-1)\omega t} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2i}{(2k-1)\pi} e^{-i(2k-1)\omega t} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i}{(2k-1)\pi} e^{i(2k-1)\omega t}. \end{aligned}$$

Retornamos os índices do primeiro somatório para valores negativos fazendo a transformação $k = -p$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{p=-\infty}^{-1} \frac{-2i}{(-2p-1)\pi} e^{-i(-2p-1)\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i}{(2k-1)\pi} e^{i(2k-1)\omega t} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{p=-\infty}^{-1} \frac{2i}{(2p+1)\pi} e^{i(2p+1)\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i}{(2k-1)\pi} e^{i(2k-1)\omega t}. \end{aligned}$$

Para agruparmos todos os termos em um único somatório mudamos mais uma vez o índice do primeiro somatório fazendo $p = k - 1$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^0 \frac{2i}{(2k-1)\pi} e^{i(2k-1)\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i}{(2k-1)\pi} e^{i(2k-1)\omega t} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2i}{(2k-1)\pi} e^{i(2k-1)\omega t}. \end{aligned}$$

Exercícios Seção 6.2

- 1) Encontre a Série de Fourier complexa de cada função.

a) $f(x) = -x \quad -L \leq x < L$

$$f(x+2L) = f(x)$$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & -L \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < L \end{cases}$

$$f(x+2L) = f(x)$$

c) $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$
 $f(x+2\pi) = f(x)$

d) $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$
 $f(x+2) = f(x)$

e) $f(x) = \begin{cases} x + L, & -L \leq x \leq 0 \\ L, & 0 < x < L \end{cases}$
 $f(x + 2L) = f(x)$

f) $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq -1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$
 $f(x + 4) = f(x)$

g) $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$
 $f(x + 4) = f(x)$

h) $f(x) = x \quad -1 \leq x < 1$
 $f(x + 2) = f(x)$

i) $f(x) = \frac{x^2}{2} \quad -2 \leq x < 2$
 $f(x + 4) = f(x)$

j) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 \leq x < 0 \\ 2 - 2x, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$
 $f(x + 4) = f(x)$

k) $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & -2 \leq x < 0 \\ 2x - \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$
 $f(x + 4) = f(x)$

l) $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leq x \leq 0 \\ x^2(3 - x), & 0 < x < 3 \end{cases}$
 $f(x + 6) = f(x)$

6.3 Transformada de Fourier

Quando usamos a Série de Fourier estamos considerando valores discretos para a frequência, isso é, a série só representa frequências associadas aos coeficientes

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Essa restrição é aceitável em algumas aplicações mas em algumas situações precisamos levar em conta todas as frequências possíveis. Para esses casos usamos a Transformada de Fourier que é definida a seguir.

DEFINIÇÃO 6.2: TRANSFORMADA DE FOURIER

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definimos a **Transformada de Fourier** de f por

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

desde que a integral converja.

Note que f é uma função complexa, nesse contexto não há razão para introduzirmos essa definição apenas para funções reais. Mesmo porque, independentemente de f

ser ou não uma função real, o que aparece dentro do integrando na definição da transformada será necessariamente uma função complexa, já que envolve $e^{-i\omega t}$.

Usamos \mathcal{F} para denotar a aplicação da transformada em uma função e o chapéu para indicar a função representada no domínio da frequência.

EXEMPLO 6.3.1: Calcular da Transformada de $f(t)$ data por

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -a \leq t \leq a, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usando a definição temos

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \int_{-a}^a \exp(-i\omega t) dt.\end{aligned}$$

Calculando primeiro para $\omega = 0$ temos

$$\hat{f}(0) = \int_{-a}^a \exp(0) dt = \int_{-a}^a dt = 2a.$$

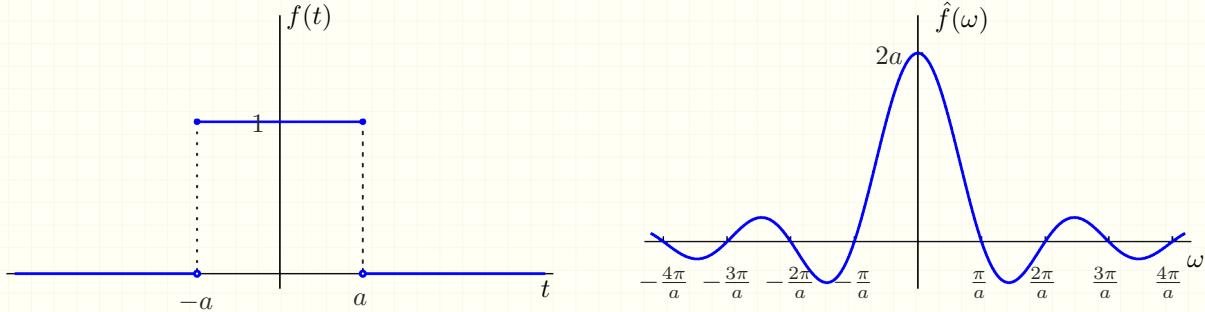
Calculando agora para $\omega \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-a}^a \exp(-i\omega t) dt \\ &= \frac{\exp(-i\omega a)}{-i\omega} - \frac{\exp(i\omega a)}{-i\omega} \\ &= \frac{1}{i\omega} (\exp(i\omega a) - \exp(-i\omega a)) \\ &= \frac{1}{i\omega} (\cos(\omega a) + i \sin(\omega a) - \cos(\omega a) + i \sin(\omega a)) \\ &= \frac{2}{\omega} \sin(a\omega).\end{aligned}$$

Encontramos assim a transformada de Fourier de $f(t)$ que é dada por

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 2a, & \omega = 0, \\ \frac{2 \operatorname{sen}(a\omega)}{\omega}, & \omega \neq 0. \end{cases}$$

Os gráficos a seguir mostram a função $f(x)$ e sua transformada $\hat{f}(\omega)$.



Usando a função **função seno cardinal** (A.4)

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

podemos escrever que a Transformada de Fourier da função f do último exemplo como

$$\hat{f}(\omega) = 2a \operatorname{sinc}(a\omega).$$

Na próxima seção apresentamos como essa definição surge ao resolvemos o problema de dissipação do calor em uma barra infinita. Nas seções seguintes exploramos as propriedades da convergência dessa transformada e a Seção 6.8 traz outros exemplos do cálculo da Transformadas de Fourier.

Uma característica fundamental da Transformada de Fourier é que podemos desfazê-la retornando a função original. A definição a seguir apresenta **Transformada Inversa de Fourier**.

DEFINIÇÃO 6.3: TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER

Se f é seccionalmente contínua e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty,$$

então \hat{f} tem **Transformada Inversa de Fourier** e

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

No próximo exemplo calculamos a transformada inversa de uma função dada no domínio da frequência.

EXEMPLO 6.3.2: Calcular da transformada inversa de $2 \operatorname{sinc}(\omega)$.

Nesse caso temos a função no espaço transformado $\hat{f}(\omega) = 2 \operatorname{sinc}(\omega)$ e queremos encontrar a função no tempo $f(t)$. Para isso podemos utilizar a definição da transformada inversa e calcular a integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \operatorname{sinc}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Porém, essa não é a melhor abordagem. Neste caso vale a pena observar que o último exemplo nos diz que $\hat{h}_a(\omega) = 2a \operatorname{sinc}(a\omega)$ é a transformada da função

$$h_a(t) = \begin{cases} 1, & -a \leq t \leq a, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $\hat{f}(\omega) = \hat{h}_1(\omega)$, podemos afirmar diretamente que

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O fato de podemos transformar uma função definida no tempo para uma equivalente definida na frequência e invertermos a transformação, nos permite dizer que as duas funções representam a mesma informação ou o mesmo sinal. Podemos pensar que f e sua transformada \hat{f} são a mesma “função” representada em domínios diferentes.

Formas Alternativas da Transformada de Fourier

Nesse texto definimos a transformada de Fourier e sua inversa como

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{e} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Porém, dependendo da área de conhecimento e do material utilizado a transformada pode ser definida de formas equivalentes mas distintas. Em geral são usados casos particulares da fórmula

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ib\omega t} dt.$$

Aqui optamos por utilizar $a = 1$ e $b = -1$. Seguem alguns exemplos de outras opções comumente utilizadas e as respectivas fórmulas para a transformada e sua inversa.

Forma normal ou unitária onde $a = 0$ e $b = -1$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{e} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Invertendo o sinal na exponencial onde $a = 0$ e $b = 1$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad \text{e} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Mudando de frequência angular para frequência onde $a = 1$ e $b = -2\pi$

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i\nu t} dt \quad \text{e} \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) e^{2\pi i\nu t} d\nu.$$

onde $\nu = \frac{1}{\text{período}} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Todas essas formas são equivalentes, porém, é necessário estar atendo a qual forma está sendo utilizada em cada contexto e fixar-se a ela.

Exercícios Seção 6.3

1) Determine a transformada de Fourier das funções

a) $f(t) = 1$

2) Determine a transformada inversa de Fourier das funções

a) $\hat{f}(\omega) = 1$

6.4 Equação do Calor em uma Barra Infinita

Queremos, nessa seção, justificar a definição da Transformada de Fourier dada na seção anterior. Para isso vamos apresentar um método para resolver o problema de dissipação do calor em uma barra infinita

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (6.9)$$

com a condição inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.10)$$

Vamos proceder formalmente, isso é, sem muito rigor, tentando fazer com que a transformada de Fourier apareça de modo relativamente natural como solução para o problema.

O método utilizado para encontrar a solução de uma equação diferencial parcial pela Transformada de Fourier é muito semelhante à utilização da Transformada de Laplace para a solução de equações diferenciais ordinárias. Em ambos os casos, aplicamos a transformada para modificar o problema em outro mais simples, encontramos a solução do problema mais simples e calculamos a transformada inversa para encontrar a solução do problema original. Muitos passos que realizaremos parecem artificiais e estranhos a primeira vista. Eles só vão realmente fazer sentido quando concluirmos todo o processo.

Iniciamos multiplicando a equação (6.9) por uma função arbitrária $\phi = \phi(x, \omega)$ que depende de x e de uma nova variável que queremos introduzir

$$u_t(x, t) \phi(x, \omega) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) \phi(x, \omega).$$

Agora integramos o resultado em todos os valores reais da variável x

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) \phi(x, \omega) dx = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x, t) \phi(x, \omega) dx.$$

Note que essa operação tem uma certa imprecisão, uma vez que, dependendo da função ϕ escolhida, as integrais acima podem não existir, mas estamos fazendo apenas contas formais com o objetivo de induzir uma boa candidata para a função ϕ .

Observe que, como ϕ não depende de t podemos passar a derivação em t para fora da integral do lado esquerdo da equação

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \phi(x, \omega) dx = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x, t) \phi(x, \omega) dx. \quad (6.11)$$

Aplicando o Teorema de Integração por Partes A.27

$$\int_{-\infty}^{\infty} p dq = pq \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} q dp$$

com $p = \phi(x, \omega)$ e $dq = u_{xx}(x, t) dx$, na integral do lado direito da equação (6.11) temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx} \phi dx = u_x \phi \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u_x \phi_x dx.$$

Repetindo o processo com $p = \phi_x(x, \omega)$ e $dq = u_x(x, t) dx$ temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx} \phi dx = u_x \phi \Big|_{-\infty}^{\infty} - u \phi_x \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} u \phi_{xx} dx.$$

Dessa forma a equação (6.11) se torna

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u \phi dx = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} u \phi_{xx} dx + \alpha^2 u_x \phi \Big|_{-\infty}^{\infty} - \alpha^2 u \phi_x \Big|_{-\infty}^{\infty}. \quad (6.12)$$

Aparentemente estamos complicando o problema, porém, não estamos interessados em todas as funções u e ϕ existentes. Estamos interessados em resolver a equação do calor, ou seja, devemos impor restrições compatíveis com o problema. Primeiro vamos impor que ϕ seja uma função limitada com relação a variável x , isso é, que ϕ não vai para o infinito quando variamos x . Vamos também impor que a função u , e

sua derivada com relação a x , sejam zero no infinito,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |u| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = 0.$$

Fisicamente, isso equivale a dizer que u possui energia finita, o que é uma hipótese bastante razoável.

Essas restrições implicam que os dois últimos termos da equação (6.12) sejam nulos, ou seja

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u \phi dx = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} u \phi_{xx} dx. \quad (6.13)$$

Para podermos continuar manipulando a equação (6.13) precisamos que as integrais em ambos os lados da equação sejam iguais, isso é, queremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \phi dx = \int_{-\infty}^{\infty} u \phi_{xx} dx.$$

Para isso vamos impor que ϕ satisfaça a equação

$$\phi_{xx} = -\omega^2 \phi(x, \omega),$$

essa equação pode ser facilmente resolvida, obtendo

$$\phi(x, \omega) = e^{-i\omega x}.$$

Calculando a derivada segundas dessa solução e substituindo em (6.13) temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-i\omega x} dx = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} u (-\omega^2) e^{-i\omega x} dx,$$

que podemos simplificar para

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-i\omega x} dx = -\alpha^2 \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-i\omega x} dx. \quad (6.14)$$

Note que, como temos a mesma integral dos dois lados, podemos escrevê-la como

$$\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx \quad (6.15)$$

e a equação (6.14) torna-se

$$\frac{d}{dt} \hat{u}(\omega, t) = -\alpha^2 \omega^2 \hat{u}(\omega, t).$$

que é a **Equação do Calor no Domínio da Frequência**. Nesse momento transformamos a equação diferencial parcial (6.9) com derivadas em x e t em uma equação diferencial ordinária com derivada em t para cada valor de ω .

Compare a equação (6.15) com a Definição 6.2, observe que temos exatamente a mesma transformação escrita com variáveis diferentes. Essa diferença ocorre porque nesta seção escrevemos a Transformada de Fourier para a função u que é candidata a solução da equação (6.9), entretanto, a variável t não tem papel algum na transformação.

Voltando para o problema da condução do calor, precisamos agora aplicar a Transformada de Fourier na condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, obtendo assim o seguinte problema de valor inicial, para cada valor de ω ,

$$\begin{aligned}\hat{u}_t(\omega, t) &= -\alpha^2 \omega^2 \hat{u}(\omega, t), \\ \hat{u}(\omega, 0) &= \hat{f}(\omega).\end{aligned}$$

Para resolver esse problema, buscamos uma solução da forma

$$\hat{u}(\omega, t) = C(\omega) e^{-\alpha^2 \omega^2 t}.$$

Como $C(\omega)$ é uma constante na variável t , temos que

$$\begin{aligned}\hat{u}_t(\omega, t) &= \frac{d}{dt} C(\omega) e^{-\alpha^2 \omega^2 t} \\ &= C(\omega) \frac{d}{dt} e^{-\alpha^2 \omega^2 t} \\ &= C(\omega) e^{-\alpha^2 \omega^2 t} \frac{d}{dt} (-\alpha^2 \omega^2 t) \\ &= C(\omega) e^{-\alpha^2 \omega^2 t} (-\alpha^2 \omega^2) \\ &= \hat{u}_t(\omega, t) (-\alpha^2 \omega^2) \\ &= -\alpha^2 \omega^2 \hat{u}_t(\omega, t).\end{aligned}$$

Avaliando \hat{u} para $t = 0$ temos

$$\hat{u}(\omega, 0) = C(\omega) e^{-\alpha^2 \omega^2 \times 0} = C(\omega)$$

portanto, a condição inicial se torna

$$C(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

Isso determina a solução do problema transformado

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{-\alpha^2 \omega^2 t}. \quad (6.16)$$

O último passo é retornar ao domínio original desfazendo a Transformada de Fourier, isso é, usando a **Transformada Inversa de Fourier** para calcular a solução $u(x, t)$ a partir de $\hat{u}(\omega, t)$

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](x, t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega) e^{-\alpha^2 \omega^2 t}] \quad (6.17)$$

Desse modo, se soubermos calcular a transformada inversa que aparece na equação (6.17), temos o resultado desejado, ou seja, a solução da equação do calor em uma barra infinita. Sabemos que a transformada inversa de \hat{f} é f e como o termo $e^{-\alpha^2 \omega^2 t}$ é sempre o mesmo podemos calcular sua inversa de registrá-la em uma tabela (veja a Seção 6.8). Porém, a transformada inversa do produto não é o produto das funções. Nesse caso, vamos utilizar um resultado muito útil, o **Teorema da Convolução**, que estabelece o resultado da transformada inversa do produto de duas funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)](x) = (f * g)(x) \quad (6.18)$$

onde $f * g$ é a convolução entre as funções que é definida como

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y) dy \quad (6.19)$$

Agora podemos voltar na equação (6.17) e aplicar esse resultado.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)] \\ &= (f * g)(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y) dy \end{aligned}$$

onde escrevemos $\hat{g}(\omega, t) = e^{-\alpha^2 \omega^2 t}$. Note que \hat{g} é uma gaussiana na variável ω , como veremos na Seção 6.8 sua transformada inversa g também será uma gaussiana em x .

Essa seção mostrou a aplicação da transformada de Fourier como ferramenta para a solução de equações diferenciais parciais. Esse exemplo foi utilizado para justificar a definição da transformada e ilustrar seu uso. Nas próximas seções serão trabalhados cuidadosamente os resultados utilizados aqui.

6.5 Convergência da Transformada de Fourier

Uma discussão completa sobre a convergência da transformada de Fourier demanda recursos matemáticos mais avançados do que o disponível para um curso de Cálculo. Apresentamos a seguir um teorema que nos dá uma condição na qual podemos garantir a convergência, porém como veremos, ele não abrange todos os casos necessários para o nosso estudo.

TEOREMA 6.4: CONVERGÊNCIA DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Se $f(t)$ é seccionalmente contínua em todo intervalo finito $[-a, a]$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Então as integrais impróprias convergem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt$$

e portanto a Transformada de Fourier converge.

Note que a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

implica que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0,$$

isso é, a função $f(t)$ precisa tender a zero no infinito para que sua transformada seja convergente. Porém, muitas funções importantes como o seno e o cosseno não convergem para zero no infinito. Para calcularmos a transformada de Fourier dessas funções precisamos redefinir o conceito de função e trabalhar com Funções

Generalizadas. Um exemplo, muito utilizado, é a **Delta de Dirac**, $\delta(t - a)$, que representa um **Impulso Unitário Instantâneo** em $t = a$ definida a seguir.

DEFINIÇÃO 6.5: DELTA DE DIRAC

A função generalizada **Delta de Dirac** centrada em $t = a$ é definida pela propriedade de que para qualquer $f(x)$ adequada vale a propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) f(t) dt = f(a).$$

Cuidado com a delta pois ela **não é uma função**, isso é, ela não atende a definição utilizada no Cálculo A.14. Como as ferramentas de que dispomos aqui, seu significado fora da integral é impreciso. Mesmo assim, podemos obter uma interpretação para ela usando as funções

$$d_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & -h \leq t \leq h, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

para um número real positivo h .

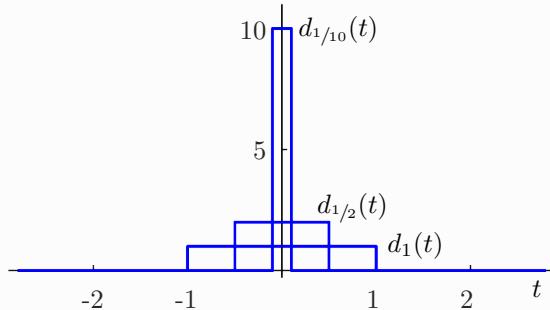


Figura 6.2: Gráficos de três funções d_h indicando o limite $h \rightarrow 0^+$

A Figura 6.2 mostra três dessas funções. Note que, por construção, para qualquer h a integral de d_h ao longo da reta real é sempre um. Vamos agora calcular a integral do produto de d_h com uma função f

$$I_h = \int_{-\infty}^{\infty} d_h(t) f(t) dt = \int_{-h}^h \frac{f(t)}{2h} dt = \frac{F(h) - F(-h)}{2h},$$

onde F é a primitiva de f . Calculamos agora o limite de I_h quando $h \rightarrow 0$ por valores

positivos

$$I = \lim_{h \rightarrow 0^+} I_h = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(h) - F(-h)}{2h}.$$

Note que essa expressão é uma variação da definição da derivada de F em zero, portanto

$$I = \left. \frac{dF}{dt} \right|_{t=0} = f(0).$$

Porém, o limite de d_h quando h tende a zero não existe no conjunto das funções reais, como definidas no Cálculo, pois

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} d_h(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} = \infty \notin \mathbb{R}.$$

Mesmo assim, baseados em uma teoria mais elaborada, escrevemos informalmente

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} d_h(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0, \\ \infty & t = 0. \end{cases}$$

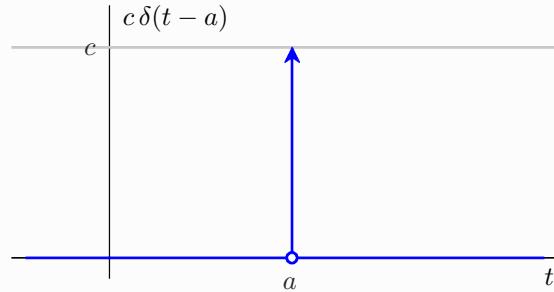


Figura 6.3: Representação da Delta de Dirac centrada em a e multiplicada por c

A Figura 6.3 é a representação gráfica da Delta de Dirac, note que não podemos dizer que esse seja o gráfico dela. A seta indica que o valor da delta, no ponto onde ela está centrada, não é um número real e a altura da seta indica o valor que a multiplica, nesse caso c .

Uma propriedade interessante da Delta de Dirac é que ela nos permite derivar funções com descontinuidades do tipo salto. Como a demonstração dessa propriedade pedente de resultados mais avançados, vamos apresentar apenas uma justificativa baseada no Teorema Fundamental do Cálculo A.28. Segundo esse teorema, para uma função f

com condições adequadas e sua derivada f' , podemos escrever

$$f(x) = \int_{-\infty}^x f'(t) dt .$$

Ignorando as sutilezas matemáticas, aplicamos esse teorema na Delta de Dirac

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt .$$

Note que, para todo $x < 0$ a integral vale zero, pois $\delta(t)$ é sempre zero para todo $t < 0$. Porém, para $x > 0$ o intervalo de integração passa pelo centro da Delta de Dirac $t = 0$, nesse caso aplicamos a Definição 6.5, considerando que a delta está sendo multiplicada pela função contante igual a um. Portanto, para todo $x > 0$ a integral vale um.

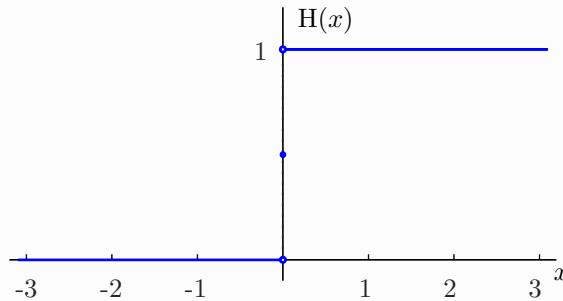


Figura 6.4: Gráfico da função de Heaviside

A função que vale zero para x negativo e um para x positivo é chamada de **Função de Heaviside** ou **Degrau Unitário**, $H(x)$. Neste contexto o valor da função em $x = 0$ não é importante, mas uma escolha comum é defini-lo como $1/2$. O gráfico dessa função está na Figura 6.4 e ela pode ser escrita como

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1/2 & x = 0, \\ 1 & x > 0 . \end{cases} \quad (6.20)$$

Podemos agora escrever que

$$H'(x) = \delta(x) . \quad (6.21)$$

6.6 Teorema da Convolução

Assim como na derivação e na integração, a transformada do produto de funções não é o produto das transformadas. No caso da Transformada Inversa de Fourier o produto de duas funções no domínio da frequência é levado na convolução das funções no domínio do tempo. Esse é o resultado que vamos apresentar nessa seção, começamos definindo a operação de convolução entre duas funções.

DEFINIÇÃO 6.6: CONVOLUÇÃO DE DUAS FUNÇÕES

A **Convolução** de duas funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, seccionalmente contínuas, limitadas e tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$$

é definida por

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

A proposição a seguir apresenta algumas propriedades da convolução.

PROPOSIÇÃO 6.7: PROPRIEDADES DA CONVOLUÇÃO

Se a convolução entre as funções f e g existem, então

1. $f * g = g * f$ a convolução é comutativa
2. $f(t) * \delta(t - a) = f(t - a)$ propriedade de deslocamento
3. $f(t) * \delta(t) = f(t)$ δ é a identidade

A seguir apresentamos o Teorema da Convolução.

TEOREMA 6.8: TEOREMA DA CONVOLUÇÃO – TRANSFORMADA INVERSA DO PRODUTO

Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ seccionalmente contínuas, limitadas e tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$$

Então, $\mathcal{F}^{-1} [\hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)](t) = (f * g)(t)$

onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$

Demonstração

Veja que o resultado fica demonstrado se provarmos que

$$\mathcal{F} [(f * g)(t)](\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$$

Isso de fato ocorre, pois

$$\mathcal{F} [(f * g)(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau e^{-i\omega t} dt$$

Aqui, apesar de precisar de alguns argumentos mais técnicos que passam pelo teorema de Fubini, podemos trocar a ordem de integração e então fazer a mudança de variável $t - \tau = z$, de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [(f * g)(t)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) e^{-i\omega t} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-i\omega(\tau+z)} dz d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-i\omega z} dz \\ &= \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) \end{aligned}$$

6.7 Propriedades da Transformada de Fourier

Supondo que as condições adequadas sejam atendidas, podemos listar várias propriedades da Transformada de Fourier.

PROPOSIÇÃO 6.9: A TRANSFORMADA DE FOURIER É LINEAR

$$\mathcal{F}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega)$$

Demonstração

A linearidade da transformada de Fourier segue direto da definição e da linearidade da integração.

Normalmente, a transformada de Fourier assumirá valores complexos, mesmo para funções reais, temos então que $\operatorname{Re}(\hat{f}(\omega))$ é a parte real da transformada e $\operatorname{Im}(\hat{f}(\omega))$ é a parte imaginária. Podemos então escrever

$$\hat{f}(\omega) = \operatorname{Re}(\hat{f}(\omega)) + \operatorname{Im}(\hat{f}(\omega))i$$

PROPOSIÇÃO 6.10: PARTES REAL E IMAGINÁRIA DA TRANSFORMADA DE FOURIER

$$\operatorname{Re}(\hat{f}(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

$$\operatorname{Im}(\hat{f}(\omega)) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

Demonstração

Essas fórmulas seguem da definição da exponencial complexa

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) dt\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

PROPOSIÇÃO 6.11: PROPRIEDADES DAS PARTES REAL E IMAGINÁRIA

Aproveitando a paridade das funções seno e cosseno

$$\begin{aligned}\hat{f}(-\omega) &= \operatorname{Re}(\hat{f}(-\omega)) + \operatorname{Im}(\hat{f}(-\omega))i \\ &= \operatorname{Re}(\hat{f}(-\omega)) - \operatorname{Im}(\hat{f}(-\omega))i\end{aligned}$$

Consequências da paridade da função $f(t)$

- ◊ Se $f(t)$ é par $\hat{f}(\omega)$ é real, isso é, $\operatorname{Im}(\hat{f}(\omega)) = 0$
- ◊ Se $f(t)$ é ímpar $\hat{f}(\omega)$ é imaginário, isso é, $\operatorname{Re}(\hat{f}(\omega)) = 0$

Quando fazemos algumas manipulações específicas com as variáveis a transformada é alterada de formas previsíveis.

PROPOSIÇÃO 6.12: TRANSFORMAÇÕES NAS VARIÁVEIS

Mudando a escala no tempo

$$\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (6.22)$$

Mudando o sinal do tempo

$$\mathcal{F}[f(-t)](\omega) = \hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)} \quad (6.23)$$

Aplicando uma translação no tempo

$$\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) = \hat{f}(\omega) e^{-ia\omega} \quad (6.24)$$

Aplicando uma translação na frequência

$$\hat{f}(\omega - a) = \mathcal{F}[f(t)e^{iat}](\omega) \quad (6.25)$$

Demonstração

Translação no tempo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u+a)} du \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u} du \right) e^{-i\omega a} \\ &= \hat{f}(\omega) e^{-ia\omega}\end{aligned}$$

Translação na frequência

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t) e^{iat}] (\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iat} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega-a)t} dt \\ &= \hat{f}(\omega - a)\end{aligned}$$

Existe uma simetria entre a transformada de Fourier e sua inversa, quando aplicamos a transformada duas vezes voltamos para uma função similar a função original.

PROPOSIÇÃO 6.13: SIMETRIA DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Ao calcularmos a transformada da transformada retornamos para uma função equivalente a função original

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(t)]](\omega) = 2\pi f(-\omega)$$

Demonstração

Sabemos que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

substituindo t por $-\omega$ temos

$$\begin{aligned} 2\pi f(-\omega) &= 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{i(-\omega)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(t)] e^{-i\omega t} dt \\ &= \mathcal{F}[\mathcal{F}[f(t)]](\omega) \end{aligned}$$

As operações de derivação e integração no tempo correspondem a produtos e divisões na frequência.

PROPOSIÇÃO 6.14: DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO

Transformada da derivada de $f(t)$

$$\mathcal{F}[f'(t)](\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$$

Transformada da primitiva de $f(t)$

$$\mathcal{F}\left[\int f(t)dt\right](\omega) = \frac{1}{i\omega} \hat{f}(\omega)$$

Podemos repetir essas operações para encontrar relações para as derivadas e integrais de maior ordem, por exemplo

$$\mathcal{F}[f''(t)](\omega) = (i\omega)^2 \hat{f}(\omega) = -\omega^2 \hat{f}(\omega)$$

Além disso, usando a linearidade das operações podemos transformar expressões inteiras

$$\mathcal{F}[af''(t) + bf'(t) + cf(t)](\omega) = (-a\omega^2 + b\omega i + c)\hat{f}(\omega)$$

Em muitos casos desejamos modelar os efeitos após uma causa inicial, por exemplo, o comportamento de um circuito após ele ser ligado. A seguinte propriedade da transformada de Fourier pode ser empregada nesse contexto.

PROPOSIÇÃO 6.15: CAUSALIDADE

Se $f(t) = 0$ para todo $t < 0$ então temos que

$$\mathcal{F}[f'(t)](\omega) = i\omega \hat{f}(\omega) - f(0^+)$$

$$\mathcal{F}[f''(t)](\omega) = -\omega^2 \hat{f}(\omega) - i\omega f(0^+) - f'(0^+)$$

onde

$$g(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$$

6.8 Calculando a Transformada de Fourier

Nessa seção apresentamos os cálculos para a obtenção das transformadas de Fourier de algumas funções.

Vamos começar pela função característica (A.5) em um intervalo entre zero e $a > 0$.

EXEMPLO 6.8.1:

Calcular a transformada de Fourier da função característica $\chi_{[0,a]}(t)$ com $a > 0$

A função característica de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é definida pela expressão (A.5), para o caso $A = [0, a]$ ela assume a forma

$$\chi_{[0,a]}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Começamos aplicando a definição da transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_{[0,a]}(\omega) &= \mathcal{F}[\chi_{[0,a]}(t)](\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,a]}(t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \int_0^a \exp(-i\omega t) dt \end{aligned}$$

Se $\omega = 0$ temos que

$$\hat{\chi}_{[0,a]}(0) = \int_0^a \exp(-i\omega t) dt = \int_0^a dt = a$$

Para $\omega \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_{[0,a]}(\omega) &= \int_0^a \exp(-i\omega t) dt \\ &= \frac{\exp(-i\omega t)}{-i\omega} \Big|_0^a \\ &= \frac{1 - \exp(-ia\omega)}{i\omega}\end{aligned}$$

Concluímos então que

$$\hat{\chi}_{[0,a]}(\omega) = \begin{cases} a & \omega = 0 \\ \frac{1 - \exp(-ia\omega)}{i\omega} & \omega \neq 0 \end{cases}$$

Uma função particularmente importante é a **Delta de Dirac**.

EXEMPLO 6.8.2:

Calcular a transformada de Fourier da Delta de Dirac.

Substituindo a delta na definição da transformada de Fourier temos

$$\mathcal{F}[\delta(t-a)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) \exp(-i\omega t) dt$$

agora calculamos a integral usando a definição da delta obtendo

$$\mathcal{F}[\delta(t-a)] = \exp(-ia\omega)$$

Um caso particular relevante é a delta centrada na origem, isso é, $a = 0$, nesse caso sua transformada é a função constante igual a 1

$$\hat{\delta}(\omega) = \mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

Isso significa que a delta composta pela soma de todas as frequências.

EXEMPLO 6.8.3:

Calcular a transformada inversa da função $\hat{f}(\omega) = 1$

Substituindo da fórmula para a transformada inversa temos

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega$$

Observando que $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ podemos escrever uma fórmula alternativa para a Delta de Dirac

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega$$

EXEMPLO 6.8.4:

Calcular a transformada da função $f(t) = 1$

Substituindo na definição temos

$$\mathcal{F}[1](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) dt$$

No exemplo anterior verificamos que

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega$$

Isolando a integral e trocando as variáveis t por ω temos

$$2\pi\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) dt$$

Comparando essa expressão com $\mathcal{F}[1](\omega)$ verificamos que

$$\mathcal{F}[1](\omega) = 2\pi\delta(-\omega)$$

Como o sinal de ω não interfere na delta podemos escrever

$$\mathcal{F}[1](\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

EXEMPLO 6.8.5:

Calcular a transformada da função gaussiana $f(t) = e^{-at^2}$

Substituindo na definição temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{-at^2}](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-at^2) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(at^2 + i\omega t)) dt\end{aligned}\tag{6.26}$$

A função dentro da integral também é uma gaussiana para verificarmos esse fato primeiro vamos reescrever a expressão $at^2 + i\omega t$ em uma forma mais conveniente. Começamos completando o quadrado

$$\begin{aligned}at^2 + i\omega t &= (at^2 + i\omega t + B^2) - B^2 \\ &= (A^2 + 2AB + B^2) - B^2 \\ &= (A + B)^2 - B^2\end{aligned}$$

onde

$$A^2 = at^2 \quad \text{e} \quad 2AB = i\omega t$$

portanto

$$A = \sqrt{a}|t| \quad \text{e} \quad B = \frac{i\omega t}{2\sqrt{a}|t|}$$

Podemos agora escrever

$$\begin{aligned}at^2 + i\omega t &= (A + B)^2 - B^2 \\ &= \left(\sqrt{a}|t| + \frac{i\omega t}{2\sqrt{a}|t|}\right)^2 - \left(\frac{i\omega t}{2\sqrt{a}|t|}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{a}t + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4a}\end{aligned}$$

Voltando para o cálculo da transformada (6.26) temos

$$\mathcal{F}[e^{-at^2}](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(at^2 + i\omega t)) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(- \left(\sqrt{a}|t| + \frac{i\omega t}{2\sqrt{a}|t|} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4a} \right) dt \\
&= \exp \left(- \frac{\omega^2}{4a} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(- \left(\sqrt{a}t + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}} \right)^2 \right) dt \quad (6.27)
\end{aligned}$$

Precisamos agora que calcular a integral, para isso utilizamos a mudança de variáveis

$$x = \sqrt{a}t + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}} \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{a}}$$

temos então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(- \left(\sqrt{a}t + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}} \right)^2 \right) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (6.28)$$

Para obtermos o valor dessa integral dependemos de manipulação cuidadosamente escolhidas. Primeiro vamos indicar o valor da integral por I

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Agora buscaremos o valor do quadrado de i , pois isso nos permitirá realizar as manipulações necessárias

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy
\end{aligned}$$

mudando para coordenadas polares temos

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr
\end{aligned}$$

Para calcular essa última integral usamos a mudança de variáveis

$$v = r^2 \quad dv = 2rdr$$

que nos leva a

$$I^2 = 2\pi \int_0^\infty e^{-v} \frac{dv}{2} = \pi (-e^{-v}) \Big|_0^\infty = \pi$$

Obtemos então que $I = \sqrt{\pi}$ e portanto a integral (6.28) é

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\sqrt{a}t + \frac{i\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2\right) dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Retornando ao cálculo da transformada (6.27) temos

$$\mathcal{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)$$

Nesse exemplo, verificamos que a transformada de uma gaussiana é outra gaussiana. Para visualizarmos melhor o resultado do último exemplo podemos fixar valores para a e construir as gaussianas para esses casos. Começando com $a = 1$ temos que

$$f(x) = e^{-t^2} \quad \text{e} \quad \hat{f}(\omega) = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right)$$

para $a = 2$ temos

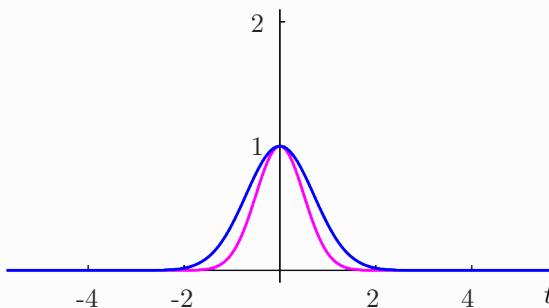
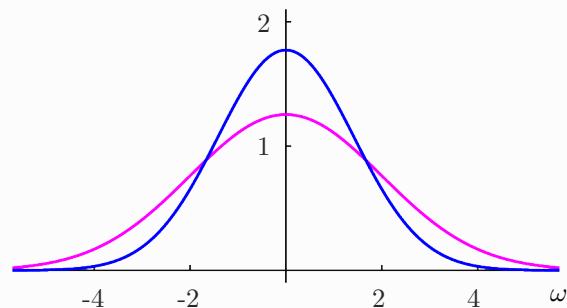
$$f(x) = e^{-2t^2} \quad \text{e} \quad \hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{8}\right)$$

A Figura 6.5 apresenta os gráficos dessas funções gaussianas e suas transformadas de Fourier.

Queremos agora calcular a transformada das funções senoidais, vamos começar pela exponencial complexa e depois calculamos a transformada da função seno.

EXEMPLO 6.8.6:

Calcular a transformada de Fourier da senoide complexa e^{iat}

(a) Funções gaussianas com $a = 1$, azul, e $a = 2$, magenta(b) Transformadas das funções gaussianas com $a = 1$, azul, e $a = 2$, magenta**Figura 6.5:** Gráficos da gaussiana e sua transformada

Queremos calcular a transformada de $f(t) = e^{iat}$ isso é

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[\exp(iat)](\omega)$$

Ao invés de aplicarmos a definição diretamente, usaremos o fato que

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega$$

permutando ω e t temos

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) dt$$

Agora fazendo a mudança de variáveis de t para $-t$ na integral, obtemos

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) dt = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[1](\omega)$$

Isolando $\mathcal{F}[1]$ temos

$$\mathcal{F}[1](\omega) = 2\pi \delta(\omega)$$

Usando a propriedade de translação na frequência (6.25) essa expressão se torna

$$\mathcal{F}[1](\omega - a) = \mathcal{F}[1 \exp(iat)](\omega) = \mathcal{F}[\exp(iat)](\omega)$$

O que nos dá a transformada de Fourier da função e^{iat}

$$\mathcal{F}[e^{iat}](\omega) = 2\pi \delta(\omega - a)$$

Vemos então que a transformada de Fourier da senoide complexa contem uma

única frequência descrita pelo impulso δ em $\omega = a$.

Usamos a transformada da exponencial complexa para calcular a transformada do seno como mostra o próximo exemplo.

EXEMPLO 6.8.7: Calcular a transformada da função seno $\sin(at)$

Usamos aqui a identidade que relaciona a função seno com a exponencial (6.5)

$$\sin(at) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$$

e escrevemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\sin(at)] &= \mathcal{F}\left[\frac{\exp(iat) - \exp(-iat)}{2i}\right] \\ &= \frac{1}{2i} \left(\mathcal{F}[\exp(iat)] - \mathcal{F}[\exp(-iat)] \right)\end{aligned}$$

onde usamos a linearidade da transformada. O próximo passo é usar a transformada da função exponencial.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\sin(at)] &= \frac{1}{2i} [2\pi \delta(\omega - a) - 2\pi \delta(\omega + a)] \\ &= \frac{\pi}{i} [\delta(\omega - a) - \delta(\omega + a)] \\ &= i\pi [\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)]\end{aligned}$$

Assim como a transformada da senoide complexa a transformada do seno é composta por impulsos associados a frequência $\omega = a$, porém, o seno contém dois impulsos com sinais trocados nas frequências a e $-a$.

Exercícios Seção 6.8

- 1) Determine a transformada de Fourier das funções

a) $f(t) = \left(1 - \frac{|t|}{a}\right) \chi_{[-a,a]}(t)$

b) $f(t) = \sin(at) \chi_{[-b,b]}(t)$

c) $f(t) = te^{-t^2}$

d) $f(t) = t^2 e^{-t^2}$

e) $f(t) = e^{-(a+ib)t} H(t)$

f) $f(t) = e^{(a+ib)t} H(-t)$

6.9 Tabelas de Transformadas de Fourier

A Tabela 6.1 apresenta a transformada de Fourier de algumas funções, nessa tabela $a > 0$ em todas as fórmulas. A Tabela 6.2 resume as principais propriedades da transformada.

TABELA 6.1: TRANSFORMADAS DE FOURIER

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)](t) \quad \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -a \leq t \leq a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \hat{f}(\omega) = 2a \operatorname{sinc}(a\omega)$$

$$f(t) = \delta(t) \quad \hat{f}(\omega) = 1$$

$$f(t) = \delta(t - a) \quad \hat{f}(\omega) = e^{-ia\omega}$$

$$f(t) = 1 \quad \hat{f}(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$f(t) = e^{iat} \quad \hat{f}(\omega) = 2\pi\delta(\omega - a)$$

$$f(t) = \operatorname{sen}(at) \quad \hat{f}(\omega) = i\pi[\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)]$$

$$f(t) = \cos(at) \quad \hat{f}(\omega) = \pi[\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)]$$

$$\chi_{[0,a]}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < a \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \frac{1 - e^{-ia\omega}}{i\omega}$$

$$e^{-at} H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-at} & t \geq 0 \end{cases} \quad \frac{1}{a + i\omega}$$

$$\frac{1}{t^2 + a^2} \quad \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$$

$$e^{-at^2} \quad e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

TABELA 6.2: PROPRIEDADES DA TRANSFORMADAS DE FOURIER

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)](t) \quad \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)$$

$$f(at) \quad a \neq 0 \quad \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$tf(t) \quad i \frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega)$$

$$f'(t) \quad i\omega \hat{f}(\omega)$$

$$f''(t) \quad -\omega^2 \hat{f}(\omega)$$

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \quad \frac{1}{i\omega} \hat{f}(\omega)$$

$$f(t-a) \quad e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$$

$$e^{iat} f(t) \quad \hat{f}(\omega - a)$$

$$\hat{f}(t) \quad f(-\omega)$$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau) d\tau \quad 2\pi \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

6.10 Revisão

1) [resp] (Transformada de Fourier) Usando a definição da transformada de Fourier, verifique as igualdades abaixo.

a) Se

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & x \leq 0, x \geq 2 \end{cases}$$

verifique que

$$\mathcal{F}[g(x)] = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i2\omega} - 1}{\omega}$$

b) Verifique que, se $a \in \mathbb{R}$ e

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(x)]$$

então

$$\mathcal{F}[e^{iax} f(x)] = \widehat{f}(\omega - a)$$

2) [resp] (Equação de corda infinita em repouso) Seja $u = u(x, t)$ função definida em $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Considere então a equação da onda com suas condições iniciais

$$(I) \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = v_0(x) \end{cases}$$

onde $v_0(x)$ é definida em $x \in \mathbb{R}$. Denote por $\widehat{u}(\omega, t)$ e $\widehat{v}_0(\omega)$ as transformadas de Fourier de $u(x, t)$ e $v_0(x)$, em relação à variável x .

- a) Aplicando a transformada de Fourier, obtenha o PVI correspondente para \widehat{u} em relação à variável t .
- b) Resolvendo o PVI do item anterior, mostre que

$$\widehat{u}(\omega, t) = \frac{\widehat{v}_0(\omega)}{\omega} \sin \omega t$$

- c) Obtenha a solução $u(x, t)$ para o problema (I) (em forma integral).

3) Considere o problema

$$\begin{cases} u_x + u_y = f(x), & x \in \mathbb{R}, \quad y > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a) Admita que f é a solução do problema têm transformada de Fourier. Mostre que

$$\widehat{u}(w, y) = \widehat{f}(w) \left(\frac{1 - e^{-iwy}}{iw} \right)$$

b) Use a tabela para encontrar

$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}(w, t)](x)$$

em função de f .

c) Tome o caso particular $f(x) = x$ e mostre (diretamente) que neste caso a solução encontrada no item anterior é uma solução do problema

$$\begin{cases} u_x + u_y = x, & x \in \mathbb{R}, \quad y > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

4) Considere o problema

$$\begin{cases} u_x + u_y = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad y > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a) Admita que a solução do problema e f têm transformada de Fourier. Mostre que

$$\widehat{u}(w, y) = \widehat{f}(w) e^{-iwy}$$

b) Use a tabela para encontrar

$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}(w, y)](x)$$

em função de f .

c) Tome em particular $f(x) = x^2 + e^x$ e verifique (diretamente) que a solução obtida no item anterior satisfaz:

$$\begin{cases} u_x + u_y = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad y > 0 \\ u(x, 0) = x^2 + e^x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- 5) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = -2xf(x)$. Suponha que $\widehat{f}(0) = 1$. Mostre que $f(x) = e^{-x^2}$.

A

Conteúdo Complementar

B.1 Recursos Online	213
B.2 Séries de Fourier	214
B.3 Equações Diferenciais Parciais	215
B.4 Transformada de Fourier	216

A.1 Notação Matemática

Símbolos Matemáticos

A lista a seguir inclui vários símbolos matemáticos comumente utilizados e seus significados

- ∞ Indica uma quantidade infinita. Observe que ∞ não é um número e portanto não podemos realizar operações algébricas com ele.
- ∀ Para todo
- ∃ Existe
- Esse símbolo pode indicar um limite, $x \rightarrow 0$, ou ser usado na definição de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ele **não** pode substituir outros símbolos como a igualdade e também **não** deve ser usado para indicar o sentido de leitura.

A seguir apresentamos símbolos que indicam relações. Note que cada um tem um significado específico, um **não** pode substituir o outro.

- = Símbolo de igualdade, ele indica que as duas expressões são completamente equivalentes.
- \Leftrightarrow Esse símbolo significa “se, e somente se”. Ele só pode ser utilizado entre duas afirmações lógicas, isso é, que podem ser verdadeiras ou falsas, e indica que ambas são simultaneamente verdadeiras ou simultaneamente falsas.
- \Rightarrow Assim como \Leftrightarrow , esse símbolo indica uma relação lógica entre duas afirmações. Porém, seu significado é mais sutil, ele indica que se a primeira afirmação for verdadeira a segunda também precisa ser. Se a primeira afirmação for falsa não sabemos nada sobre a segunda.
- \Leftarrow Tem o mesmo significado que \Rightarrow , porém com os papéis trocados para as afirmações.

Conjuntos e Intervalos

Os conjuntos numéricos mais utilizados são:

\mathbb{N}	Números naturais	$\{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Z}	Números inteiros	$\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Q}	Números racionais	Razões, ou frações, de números inteiros
\mathbb{R}	Números reais	A caracterização dos reais é mais complexa, para o Cálculo, podemos pensar que eles correspondem aos pontos da reta e que não há buracos entre eles
\mathbb{C}	Números complexos	Extensão dos reais para incluir raízes de números negativos

As operações com conjuntos mais comuns são

- ∈ Indica que um elemento pertence a um conjunto
- ∪ União de conjuntos, representa os elementos que pertencem a um ou outro conjunto
- ∩ Intersecção de conjuntos, representa os elementos que pertencem a ambos conjuntos
- ⊂ Subconjunto, indica que todos os elementos do conjunto da esquerda pertencem também ao conjunto da direita.

Intervalos são um caso particular de subconjuntos dos números reais, eles indicam um conjunto de números reais “consecutivos” e “sem buracos”. Normalmente os intervalos são definidos por desigualdades

$$\begin{aligned} I &= \{ x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5 \} \\ J &= \{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2 \} \\ K &= \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2 \} \end{aligned}$$

Como esses conjuntos são muito utilizados no Cálculo existe uma notação específica para eles. A notação para intervalos precisa indicar quais são seus extremos e se esses extremos pertencem ou não ao intervalo, um colchete [ou] indica que o extremo correspondente pertence ao intervalo enquanto que um parenteses (ou) indica que os extremos não pertence ao intervalo

$$\begin{aligned} (3, 5) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5 \} \\ [-1, 2] &= \{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2 \} \\ [-2, 2] &= \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2 \} \\ (a, b] &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \} \\ [a, b) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \} \end{aligned}$$

Quando ambos extremos pertencem ao intervalo dizemos que ele é um **Intervalo Fechado** quando nenhum extremo pertence ao intervalo dizemos que ele é um **Intervalo Aberto**.

Um intervalo aberto que contém um ponto a é chamado de **Vizinhança** de a .

DEFINIÇÃO A.1: ÍNFIMO E SUPREMO

O **Ínfimo** de $A \subset \mathbb{R}$, $\inf(A)$, é o maior número real menor ou igual a todos os elementos de A .

O **Supremo** de $A \subset \mathbb{R}$, $\sup(A)$, que é o menor número real maior ou igual a todos os elementos de A .

Para observarmos a diferença entre o ínfimo e o mínimo considere o intervalo aberto entre zero e um, $A = (0, 1)$. Nenhum elemento $x \in A$ pode ser o mínimo de A , pois $x/2$ é menor do que x e pertence a A , portanto, esse conjunto não possui um menor elemento. O zero seria o candidato para ser o mínimo, mas ele não pertence a A , nesse caso dizemos que zero é o ínfimo de A . Uma análise equivalente vai nos mostrar que A também não possui um máximo e que 1 é seu supremo. Podemos escrever em tâo que

$$\begin{array}{ll} \inf((0, 1)) = 0 & \min((0, 1)) \text{ não existe} \\ \sup((0, 1)) = 1 & \max((0, 1)) \text{ não existe} \end{array}$$

Em um intervalo fechado o ínfimo coincide com o mínimo e o supremo coincide com o máximo, por exemplo, considere $[0, 1]$

$$\begin{array}{l} \inf([0, 1]) = \min([0, 1]) = 0 \\ \sup([0, 1]) = \max([0, 1]) = 1 \end{array}$$

A.2 Revisão de Alguns Conceitos de Álgebra

Incluímos aqui uma pequena revisão de alguns conceitos de álgebra que são necessários para a compreensão do texto.

Operações Aritméticas

Para números a, b, c e d , reais ou complexos, valem as propriedades das operações aritméticas, desde as divisões sejam possíveis.

$$a(b + c) = ab + ac \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a + c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \quad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Expoentes e Radicais

Para números x , y , m e n , reais, valem as propriedades de expoentes e raízes, desde as divisões e raízes sejam possíveis.

$$x^m x^n = x^{m+n}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(xy)^n = x^n y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Desigualdades e Módulo

Ao manipular desigualdades vales as seguintes regras

1. Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$
2. Se $a < b$, então $a + c < b + c$
3. Se $a < b$ e $c > 0$, então $ca < cb$
4. Se $a < b$ e $c < 0$, então $ca > cb$

Para $a > 0$

$|x| = a$ significa que $x = a$ ou $x = -a$

$|x| < a$ significa que $-a < x < a$

$|x| > a$ significa que $x < -a$ ou $x > a$

Note que os complexos não são ordenados, isso é, não existem as relações $>$ ou $<$ entre números complexos.

A.3 Revisão de Algumas Funções

Incluímos aqui uma pequena revisão de algumas funções que são importantes para o estudo dos tópicos desse trabalho.

Funções Exponencial e Logarítmica

A **Função Exponencial** pode ser definida de diversas formas, por exemplo, pela sua série de Taylor

$$e^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para todo x real. Consequentemente, o número e é a soma da série

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

e tem o valor

$$e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ 69995\ \dots$$

A imagem da função exponencial é o conjunto dos números reais positivos. O gráfico dessa função pode ser visto na Figura A.1. Alternativamente podemos definir essa função pelo limite

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{A.1}$$

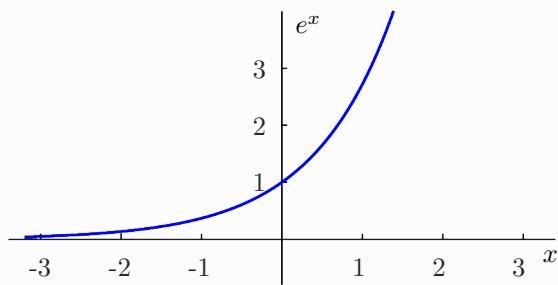
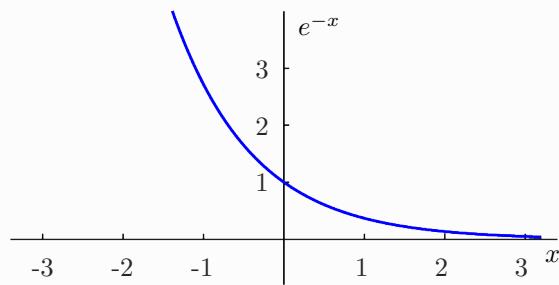
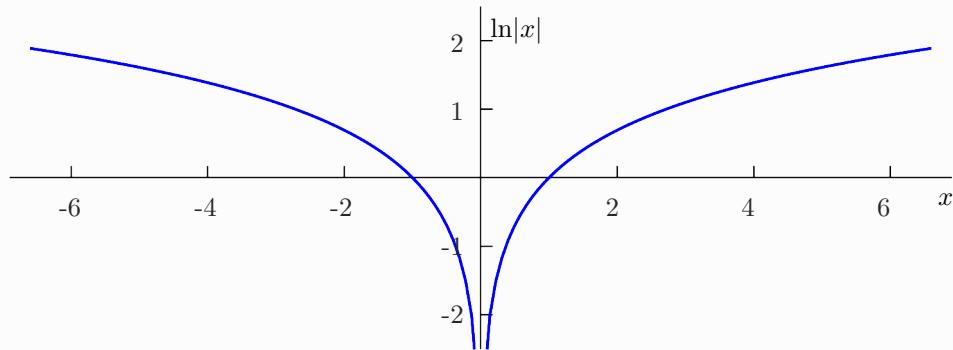
A derivada e a integral da função exponencial são

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad \int e^x dx = e^x + C$$

A **Função Logaritmo Natural** é a função inversa da exponencial e é o valor y tal que

$$y = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad e^y = x$$

o domínio dessa função são os números reais positivos e sua imagem são todos os reais. A Figura A.2 mostra o gráfico dessa função calculada em $|x|$ estendendo assim o domínio para valores negativos de x .

(a) Gráfico da função e^x (b) Gráfico da função e^{-x} **Figura A.1:** Gráficos da função exponencial**Figura A.2:** Gráfico da função $\ln|x|$

A série de Taylor da função logaritmo normalmente é escrita como

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

e tem raio de convergência $R = 1$. A derivada e a integral da função exponencial são

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} \quad \int \ln(x) dx = x(\ln(x) - 1) + C$$

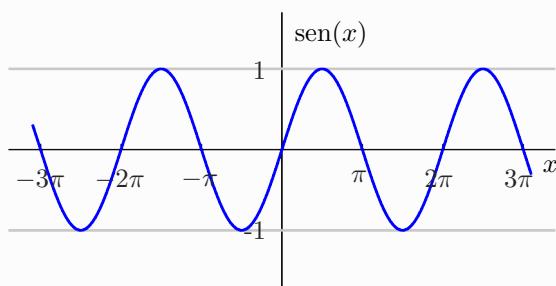
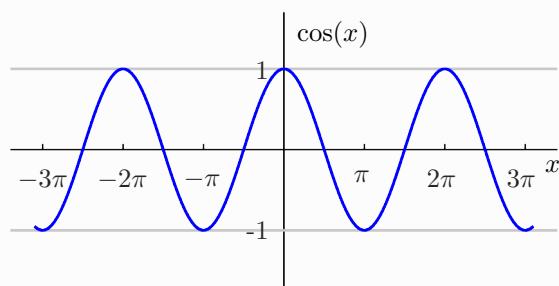
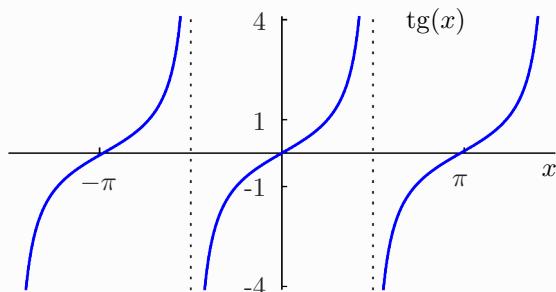
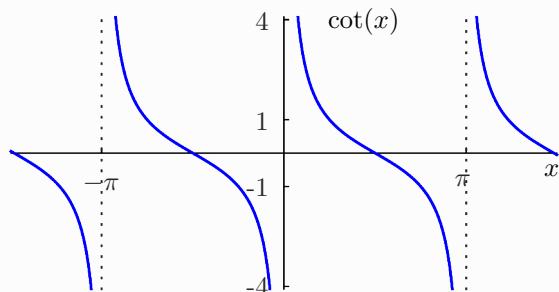
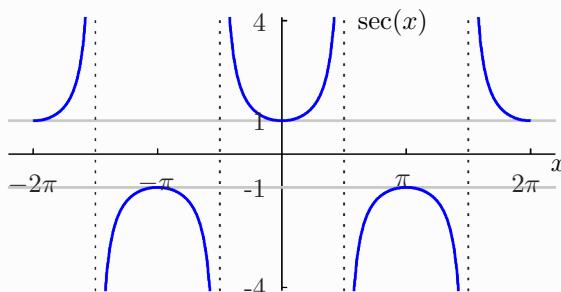
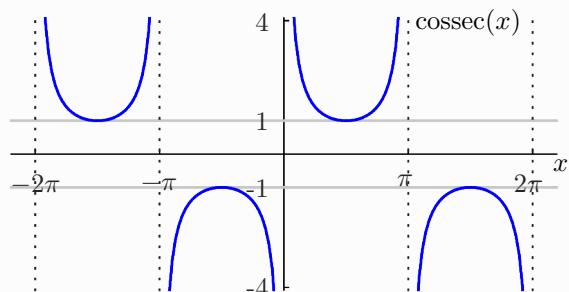
Funções Trigonométricas

Tradicionalmente pensamos nas funções trigonométricas como combinações das funções seno e cosseno

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \operatorname{cossec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

Os gráficos dessas funções podem ser vistos na Figura A.3.

(a) Gráfico da função $\sin(x)$ (b) Gráfico da função $\cos(x)$ (c) Gráfico da função $\tan(x)$ (d) Gráfico da função $\cot(x)$ (e) Gráfico da função $\sec(x)$ (f) Gráfico da função $\operatorname{cosec}(x)$ **Figura A.3:** Gráficos das funções trigonométricas

Identidade Pitagórica

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad 1 + \tan^2(x) = \sec^2(x) \quad 1 + \cot^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)$$

Algumas identidades trigonométricas

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad \tan(-x) = -\tan(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$$

Fórmulas de soma e subtração

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$

$$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

Fórmulas de ângulo duplo

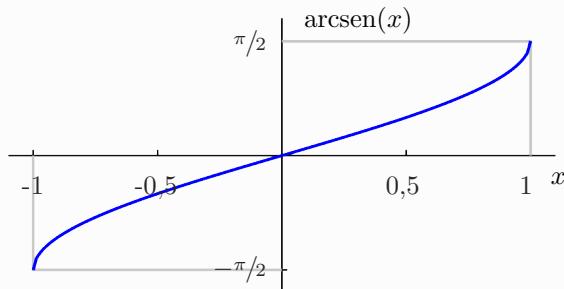
$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2\cos^2(x) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(x)\end{aligned}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

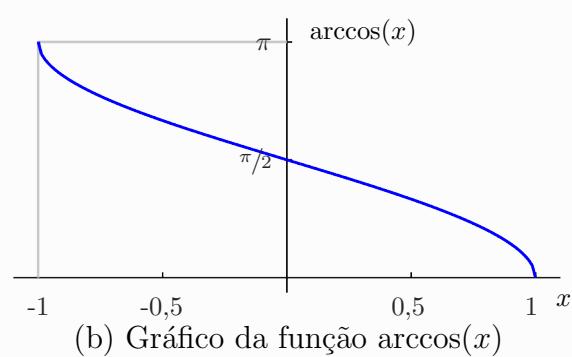
Fórmulas de metade do ângulo

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$$

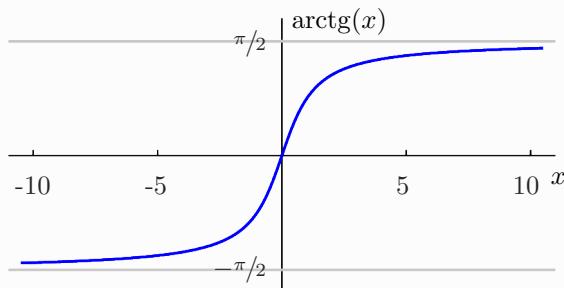
$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$$



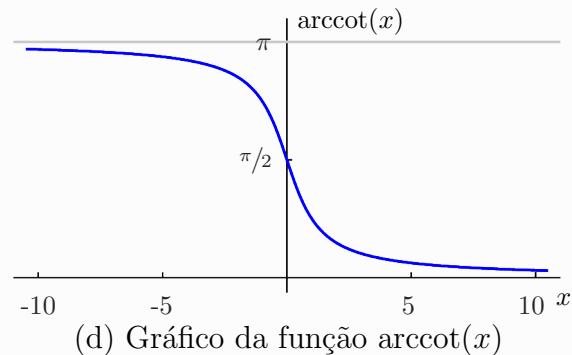
(a) Gráfico da função $\text{arcsen}(x)$



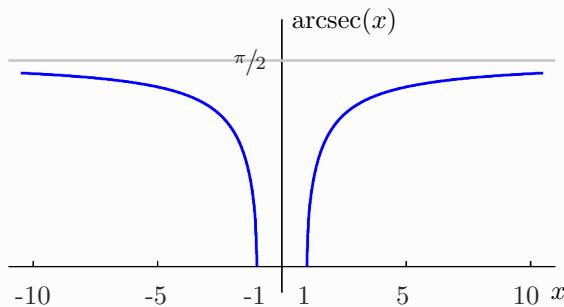
(b) Gráfico da função $\text{arccos}(x)$



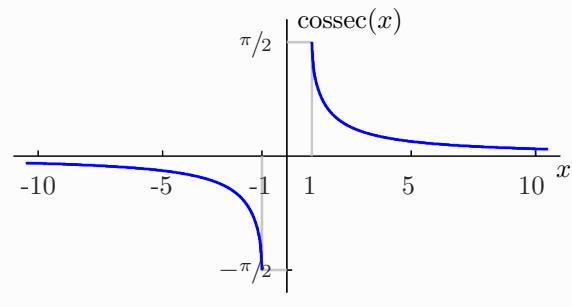
(c) Gráfico da função $\text{arctg}(x)$



(d) Gráfico da função $\text{arccot}(x)$



(e) Gráfico da função $\text{arcsec}(x)$



(f) Gráfico da função $\text{arccossec}(x)$

Figura A.4: Gráficos das funções trigonométricas inversas

Funções Trigonométricas Inversas

Os gráficos dessas funções podem ser vistos na Figura A.4.

Derivadas as funções trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccos}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec}(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccossec}(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Funções Hiperbólicas

As **funções hiperbólicas** são funções análogas às funções trigonométricas ordinárias, que recebem esse nome por estarem relacionadas às hipérboles de modo similar a a relação entre as funções trigonométrica e a circunferência. Porém, em nosso contexto essa interpretação geométrica não será utilizada. Aqui elas são importantes por representarem funções exponenciais em um arranjo similar às trigonométricas.

Definição do seno e cosseno hiperbólicos

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{A.2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{A.3}$$

Os gráficos dessas funções podem ser vistos na Figura A.5.

Também podemos definir essas funções com o uso de expressões envolvendo números complexos

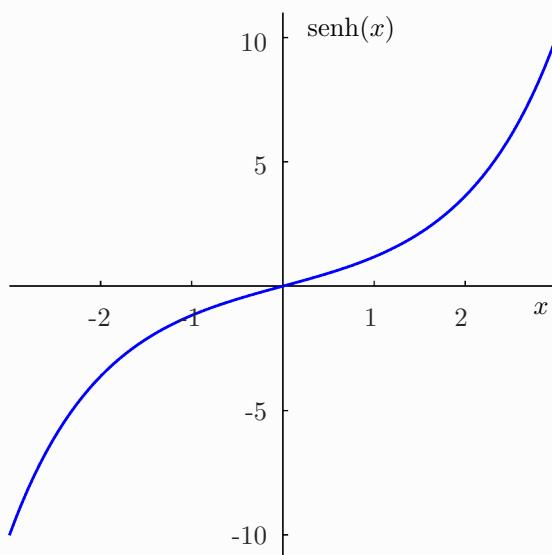
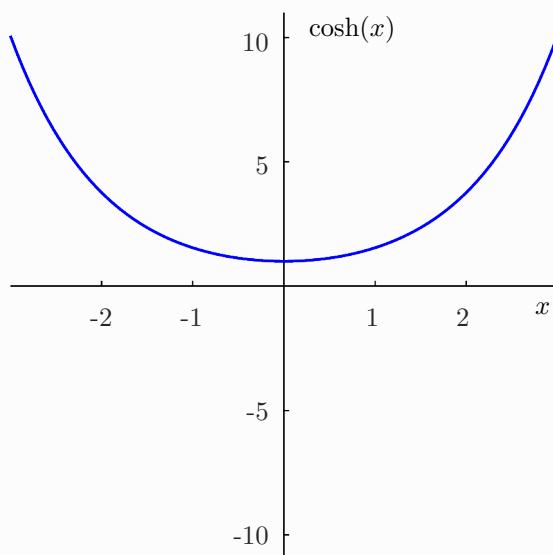
$$\operatorname{senh}(x) = -i \operatorname{sen}(ix)$$

$$\cosh(x) = \cos(ix)$$

Derivadas das funções hiperbólicas

$$\frac{d}{dx} \operatorname{senh}(x) = \cosh(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \operatorname{senh}(x)$$

(a) Gráfico da função $\text{senh}(x)$ (b) Gráfico da função $\cosh(x)$ **Figura A.5:** Gráficos das funções hiperbólicas

$$\frac{d^2}{dx^2} \text{senh}(x) = \text{senh}(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \cosh(x) = \cosh(x)$$

essas derivadas podem ser calculadas de modo simples apenas substituindo a definição da função, por exemplo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \text{senh}(x) &= \frac{d}{dx} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{de^x}{dx} - \frac{de^{-x}}{dx} \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \\ &= \cosh(x) \end{aligned}$$

Algumas relações úteis

$$\text{senh}(-x) = -\text{senh}(x)$$

$$\cosh(-x) = \cosh(x)$$

Relação com a exponencial e **Fórmula de Euler**

$$\begin{aligned} e^x &= \cosh(x) + \text{senh}(x) \\ e^{-x} &= \cosh(x) - \text{senh}(x) \\ e^{-ix} &= \cos(x) + i \sin(x) \end{aligned}$$

Identidade similar a relação pitagórica

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Somando e subtraindo os argumentos

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$

$$\sinh(x-y) = \sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(x-y) = \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y)$$

Séries de Taylor

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Da mesma forma como as funções trigonométricas podem ser definidas a partir do seno e cosseno, podemos definir as seguintes funções hiperbólicas

$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{1}{\operatorname{tgh}(x)}$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \quad \operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$$

Os gráficos dessas funções podem ser vistos na Figura A.6.

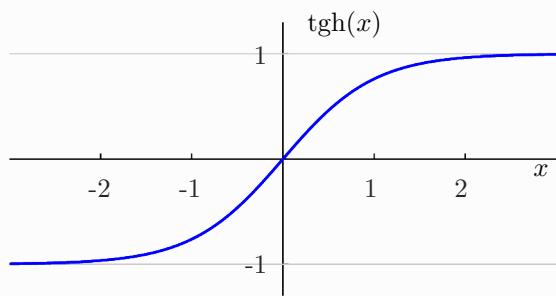
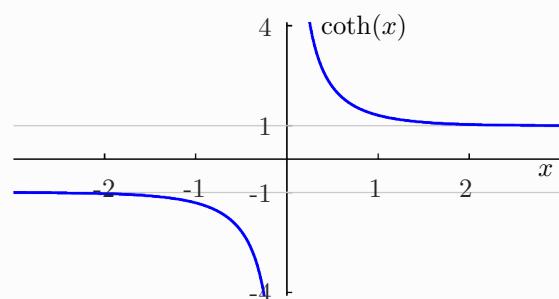
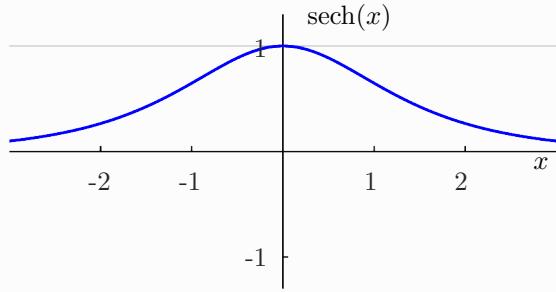
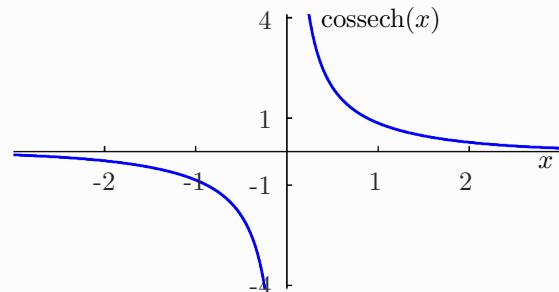
Função sinc _____

O termo **sinc** é uma contração do nome da função em latim *sinus cardinalis* (seno cardinal), essa função é definida como

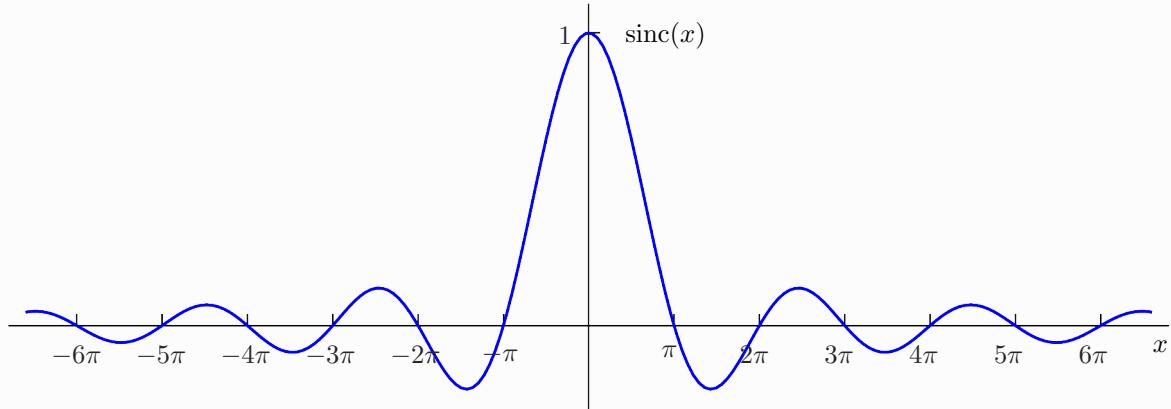
$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Porém, por simplicidade, é comum escrevermos apenas

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

(a) Gráfico da função $\tgh(x)$ (b) Gráfico da função $\coth(x)$ (c) Gráfico da função $\operatorname{sech}(x)$ (d) Gráfico da função $\operatorname{cossech}(x)$ **Figura A.6:** Gráficos das funções hiperbólicas compostas

O gráfico dessa função pode ser visto na Figura A.7.

**Figura A.7:** Gráfico da função $\operatorname{sinc}(x)$

Derivada da sinc

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sinc}(x) = \frac{\cos(x) - \operatorname{sinc}(x)}{x}$$

Série de Taylor da sinc

$$\operatorname{sinc}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Cuidado para não confundir a definição utilizada aqui com uma definição alternativa comumente utilizada no processamento digital de sinais, da função **sinc normalizada**

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Outras Funções

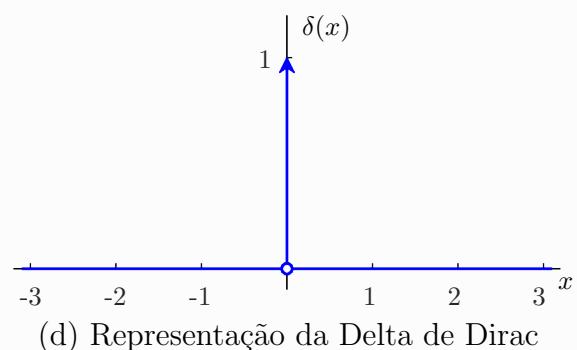
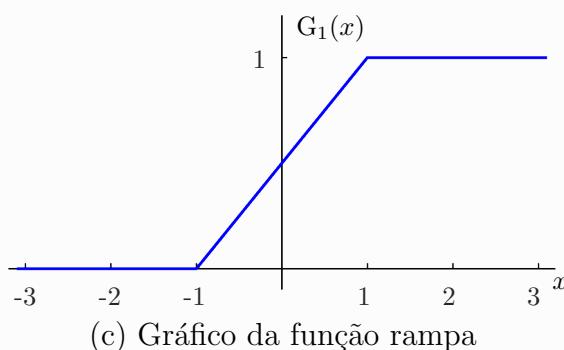
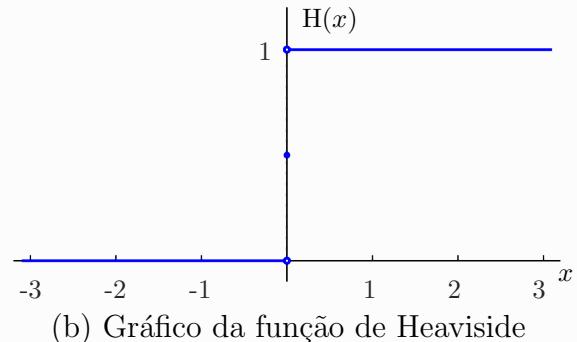
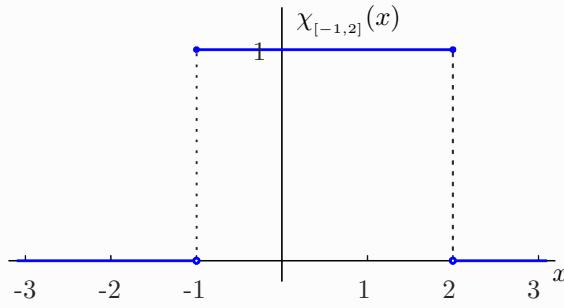


Figura A.8: Gráficos das funções característica, Heaviside, rampa e Delta de Dirac

Definimos a **Função Característica** de um subconjunto A dos números reais \mathbb{R} como a função χ_A que vale 1 em A e zero fora dele

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

A **Função de Heaviside** ou **Degrau Unitário** $H(x)$, vale 1 para x positivo, zero para x negativo.

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Essa função não precisa ser definida em $x = 0$, mas dependendo do contexto ela pode assumir algum valor específico nesse ponto. Um exemplo é escolher o valor $1/2$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Também podemos escrever essa função como $H(t) = \chi_{[0,\infty)}(t)$.

A **Função Rampa** é uma aproximação contínua para a função de Heaviside, que é definida por

$$G_\varepsilon = \begin{cases} 0 & x < -\varepsilon \\ \frac{t}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > \varepsilon \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

A **Delta de Dirac**, $\delta(t)$, que representa um **Impulso Unitário Instantâneo** em $t = 0$. Ela é definida pela propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \quad (\text{A.8})$$

Cuidado com o delta pois ele **não é uma função** segundo a definição empregada no Cálculo. Esclarecer seu significado preciso demanda a teoria de distribuições. Mesmo assim, baseados em uma teoria matemática mais elaborada, escrevemos informalmente que

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} d_h(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

A Seção 6.5 discute um pouco mais sobre essa função.

A Figura A.8 mostra o gráfico dessas funções. Porém, não podemos dizer que a Figura A.8d seja o gráfico do Delta de Dirac. Essa é uma representação onde a seta indica que a função não assume um valor real nesse ponto. Normalmente o valor y onde a seta aponta indica a constante multiplicando o delta.

A.4 Indução Finita

Demonstração por **Indução Finita** ou **Indução Matemática** é uma técnica para demonstrar afirmações que dependem de um índice que segue para o infinito, por exemplo $n \in \mathbb{N}$.

Para mostrar que uma afirmação, P_n , é verdadeira para todo n devemos provar que:

1. ela é verdadeira para o primeiro n , por exemplo se o índice começa em $n = 1$ temos que mostrar que P_1 é verdade;
2. se ela for verdadeira para n então também será verdadeira para o próximo índice, $n + 1$, isso é

$$P_n \Rightarrow P_{n+1}.$$

O exemplo a seguir ilustra a técnica provando a **Desigualdade de Bernoulli**.

EXEMPLO A.4.1: Demonstrar a Desigualdade de Bernoulli

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

para todo $x > -1$ e n inteiro não negativo.

Primeiro vamos identificar qual é o índice envolvido e qual a afirmação que deve ser verificada para cada valor do índice

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$P_n: (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Provamos agora o primeiro caso, $n = 0$, por simples substituição

$$(1 + x)^0 = 1 \geq 1 + 0x = 1$$

O próximo passo é assumir que a afirmação é verdadeira para P_n , que chamamos de **Hipótese de Indução**, e provar que ela é verdadeira para P_{n+1} . Neste exemplo queremos provar que

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \Rightarrow \quad (1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$$

Começamos manipulando o lado esquerdo da desigualdade que queremos de-

monstrar

$$(1+x)^{(n+1)} = (1+x)^n(1+x)$$

Como $(1+x) > 0$, pois por hipótese $x > -1$, podemos usar a hipótese de indução, $(1+x)^n \geq 1 + nx$, para escrever

$$(1+x)^{(n+1)} \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2$$

Rearranjando temos

$$(1+x)^{(n+1)} \geq 1 + (1+n)x + nx^2$$

Como nx^2 é sempre não negativo, podemos remove-lo mantendo a relação de desigualdade

$$(1+x)^{(n+1)} \geq 1 + (1+n)x$$

Provamos assim que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, o que completa a prova por indução finita e garante que a desigualdade é verdadeira para todo $n \geq 0$.

A.5 Sistemas de Coordenadas

O sistema de **Coordenadas Polares** é definido a partir do sistema de coordenadas cartesiano (x, y) pela transformação de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \end{aligned} \tag{A.9}$$

onde um ponto P com coordenadas (x, y) pode ser representado também pelas coordenadas (r, θ) , como mostra a Figura A.9. A transformação inversa é dada por

$$\begin{aligned} \theta &= \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \tag{A.10}$$

Note que todo o plano cartesiano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é mapeado na região

$$\begin{aligned} r &\in [0, \infty) \\ \theta &\in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

onde o intervalo para θ pode ser substituído por qualquer outro intervalo de comprimento 2π . Apesar da origem $(0, 0)$ ser um ponto ordinário no plano, sua representação em coordenadas polares é singular, pois se $r = 0$ todos os valores de θ representam o mesmo ponto.

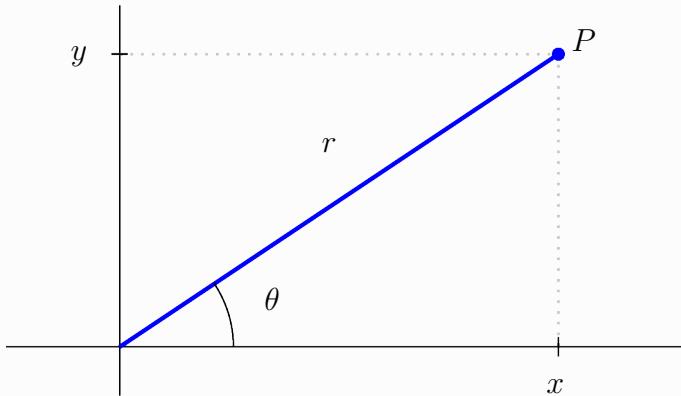


Figura A.9: Sistema de coordenadas polares

As derivadas de uma função em coordenadas cartesianas e polares estão ligadas pela regra da cadeia. Considere a função

$$g(x, y) = f(r(x, y), \theta(x, y))$$

pela regra da cadeia em duas dimensões sabemos que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Calculando as derivadas da transformação (A.10) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{A.11}$$

Note que nessas expressões r e θ são pensados como funções de x e y , isso é, $r = r(x, y)$

e $\theta = \theta(x, y)$. Podemos reproduzir esses cálculos para obter relação recíproca

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \cos \theta \frac{\partial g}{\partial x} + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= -r \operatorname{sen} \theta \frac{\partial g}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial g}{\partial y}\end{aligned}\tag{A.12}$$

Uma aplicação das coordenadas polares é a integração em regiões que são mais facilmente descritas nessas coordenadas. Por exemplo, o disco de raio ρ centrado na origem, D , é descrito em coordenadas cartesianas como

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\rho \leq x \leq \rho \quad \text{e} \quad -\sqrt{\rho^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{\rho^2 - x^2} \right\}$$

enquanto que em coordenadas polares ele pode ser descrito como

$$D = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq \rho \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

Assim a integral de uma função f nessa região assume a forma

$$I = \int_D f ds = \int_{-\rho}^{\rho} \int_{-\sqrt{\rho^2 - x^2}}^{\sqrt{\rho^2 - x^2}} f(x, y) dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} f(r, \theta) r dr d\theta$$

Cuidado para não esquecer que a mudança de variáveis transforma o diferencial $dxdy$ em $rdrd\theta$.

A.6 Números Complexos

Essa seção introduz o conceito de **Números Complexos** e apresenta os resultados utilizados nesse material.

Como uma motivação para a criação dos números complexos considere a equação

$$x^2 + 1 = 0$$

manipulando formalmente obtemos a solução

$$x = \sqrt{-1}$$

Porém, para qualquer número real a sabemos que $a^2 \geq 0$ o que implica que não existe o número $\sqrt{-1}$ dentro do conjunto dos números reais e portanto a equação não possui solução.

Uma forma para contornar essa limitação é criar um novo número, denotado por i e que chamamos de **Unidade imaginária**, de forma que

$$i^2 = -1$$

Além disso, determinamos que as operações com esse número obedecem as mesmas regras das operações com os números reais. Por exemplo, podemos calcular as potências de i

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$$

$$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 i = i$$

$$i^6 = i^5 i = i^2 = -1$$

Como o número i não pertence aos reais estamos criando um novo conjunto numérico conhecido como o **Conjunto dos Números Complexos**

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

Note que, identificarmos os números reais, a , com os números complexos $(a + 0i)$ e dessa forma entendemos os números reais como um subconjunto dos complexos.

No números complexos as operações de soma e produto são definidas de modo compatível com as operações nos números reais. A **soma** de dois números complexos $v = a + bi$ e $w = c + di$ é definida por

$$v + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Enquanto o **produto** é definido por

$$\begin{aligned} vw &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= a \cdot (c + di) + bi \cdot (c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Propriedades das operações de números complexos. Sejam u , v e w números complexos, então

- a) $v + w = w + v$
- b) $v + (w + u) = (v + w) + u$
- c) $v + 0 = 0 + v = v$ sendo que $0 = 0 + 0i$
- d) Para todo $v = a + bi \in \mathbb{C}$, o número

$$-v = -a - bi \quad \text{é tal que} \quad v + (-v) = 0$$

- e) $vw = wv$
- f) $v(wu) = (vw)u$
- g) $1v = v$ sendo que $1 = 1 + 0i$
- h) Se $v = a + bi \neq 0$ então

$$v^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \quad \text{é tal que} \quad vv^{-1} = v^{-1}v = 1$$

i) $v(w + u) = vw + vu$

Como as operações de soma e produto nos complexos possui a essas propriedades dizemos que o conjunto dos números complexos, com essas operações, é um **corpo**. Os números reais, \mathbb{R} , e os racionais, \mathbb{Q} , também são corpos.

EXEMPLO A.6.1: Calculo das raízes da equação quadrática.

Considere a seguinte equação algébrica

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde $a \neq 0$. Sabemos que suas soluções são dadas pela fórmula de Bhaskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Quando os coeficientes a , b e c são reais a função $y(x) = ax^2 + bx + c$ representa uma parábola do plano e as soluções da equação quadrática são as os pontos onde o gráfico cruza o eixo x . Nesse contexto, buscamos soluções reais e quando

$\Delta < 0$ dizemos que o gráfico não cruza o eixo x .

Porém, usando os números complexos, podemos calcular a raiz quadrada de números negativos obtendo

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{|\Delta|} i$$

e as soluções para a equação quadrática são o par conjugado

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} i$$

$$x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} i$$

É possível mostrar que no, conjunto dos números complexos, todo polinômio de grau n possui exatamente n raízes. Além disso, se os coeficientes do polinômio forem números reais então suas raízes serão números reais ou números complexos conjugadas.

Assim como representamos os números reais em uma reta, a Reta Real, representamos os complexos no **Plano Complexo**. Cada número $u = x + yi$ é associado ao ponto (x, y) do plano. A Figura A.10 ilustra essa associação.

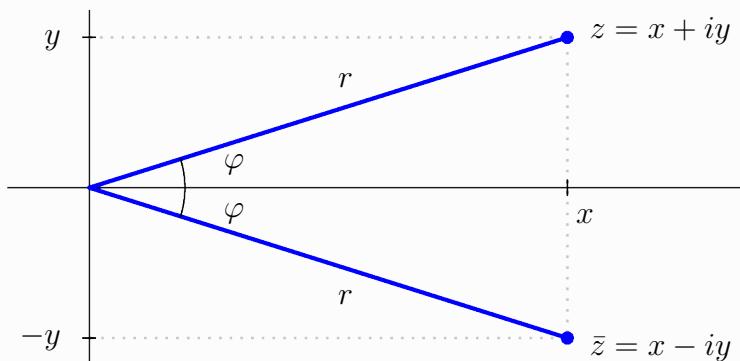


Figura A.10: Representação dos Números Complexos em um Plano

Além das operações de soma e produto, também definimos outras operações para os complexos.

DEFINIÇÃO A.2: OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS

Para um número $z = x + yi \in \mathbb{C}$ definimos as operações:

Parte real	$\operatorname{Re}(z) = x$
Parte imaginária	$\operatorname{Im}(z) = y$
Conjugado	$\bar{z} = x - yi$
Módulo	$ z = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Argumento	$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

A Figura A.10 mostra a interpretação geométrica dessas operações.

É possível demonstrar as seguintes propriedades desses operações, para os números complexos v e w .

- a) $v\bar{v} = |v|^2$
- b) $\overline{v+w} = \bar{v} + \bar{w}$
- c) $\overline{vw} = \bar{v}\bar{w}$

Um estudo do cálculo em variáveis complexas está além do escopo desse texto, porém, para podemos introduzir a Transformada de Fourier, vamos precisar da definição de algumas funções com variáveis complexas.

As funções algébricas, aquelas que utilizam apenas operações como soma, produto, e potências, não precisam de uma definição especial, basta realizar as operações definidas para os complexos. Porém, para as demais funções precisamos de outras técnicas. Para as funções analíticas, isso é, as funções cujas Séries de Taylor convergem para a própria função, podemos usar essa série para definir as funções nos complexos. As funções que vamos utilizar com maior frequência são o seno, cosseno e a exponencial

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} - \dots \quad (\text{A.13})$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^8}{8!} - \dots \quad (\text{A.14})$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (\text{A.15})$$

Comparando as séries de Taylor dessas funções podemos demonstrar a **Identidade de Euler** que associa a exponencial com as funções seno e cosseno

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad (\text{A.16})$$

Com essa identidade podemos interpretar a **Exponencial Complexa** como sendo uma oscilação com decrescimento ou decaimento exponencial, pois

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a [\cos(b) + i \sin(b)]$$

Dessa forma e^a determina o crescimento ou decrescimento, enquanto $\cos(b) + i \sin(b)$ determina a oscilação.

Cálculo com Funções e Variáveis Complexas

Ao longo desse texto diversas vezes utilizamos funções de uma variável real que assumem valores complexos, $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, nesses casos podemos aplicar as técnicas do Cálculo de funções reais considerando a i como uma constante, por exemplo,

$$\frac{d}{dx} (ax^2 + ix + 3i) = 2ax + i$$

$$\frac{d}{dx} \sin(ix) = i \cos(ix)$$

$$\int ax^2 + ix + 3i \, dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{ix^2}{2} + 3ix + C$$

$$\int \sin(ix) \, dx = -\frac{\cos(ix)}{i} = i \cos(ix)$$

Porém, **não** podemos utilizar as mesmas regras para funções de variáveis complexas, $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Para esses casos precisamos da teoria própria para as variáveis complexas.

A.7 Álgebra Linear

Apresentamos nessa seção algumas definições e propriedades estudadas na Álgebra Linear. A finalidade destes resultados é generalizar o conceito de vetores, da Geometria Analítica. Em essência dizemos que qualquer entidade matemática que tenha propriedades semelhantes as propriedades dos vetores da geometria também são vetores, com isso podemos utilizar resultados oriundos da geometria em contextos mais abstratos.

Para a Álgebra Linear as propriedades fundamentais dos vetores são as operações que podemos realizar com eles. Assim definimos um espaço vetorial como sendo um conjunto de elementos nos quais podemos realizar operações semelhantes as operações com vetores. O termo espaço é utilizado sempre que tivermos um conjunto onde é possível realizar alguma operação em todos os seus elementos. A definição a seguir explicita o que é um espaço vetorial.

DEFINIÇÃO A.3: ESPAÇO VETORIAL

Um **Espaço Vetorial** real é um conjunto V , não vazio, onde as operações de **Soma** e **Produto por Escalar** estão definidas. Além disso, para quaisquer u, v e $w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ é sempre verdade que

1. $v + w \in V$
2. $\alpha v \in V$
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$
4. $v + w = w + v$
5. Existe $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$
6. Existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$
7. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
8. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
9. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
10. $1v = v$

Não importa a natureza dos elementos ou das operações utilizadas, se as propriedades forem atendidas dizemos que V é um **Espaço Vetorial**, $v \in V$ é um **Vetor** e $\alpha \in \mathbb{R}$ é

um **Escalar**. A definição de espaços vetoriais complexos é equivalente substituindo os escalares reais por números complexos. No contexto dessa apostila estamos interessados em espaços vetoriais onde os vetores são funções definidas em um intervalo, que chamaremos de **Espaços de Funções**.

Uma característica importante dos espaços vetoriais, reais ou complexos, é que novos vetores podem ser construídos pela combinação linear de vetores dados.

DEFINIÇÃO A.4: COMBINAÇÃO LINEAR

Dados os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ o vetor

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

também é um elemento de V e é chamado de **Combinação Linear** dos vetores v_i .

Uma questão que muitas vezes precisamos responder é se um vetor é ou não gerado por uma combinação linear de outros vetores. Se ele puder ser gerado dessa forma, dizemos que ele é **Linearmente Dependente** dos vetores que o geram e em geral ele pode ser considerado supérfluo. Se tivermos um conjunto de vetores onde nenhum pode ser gerado pelos demais dizemos que esse conjunto é linearmente independente, como descrito na definição a seguir.

DEFINIÇÃO A.5: INDEPENDÊNCIA LINEAR

Dados os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é **Linearmente Independente** (LI) se a equação

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Se existir uma solução onde algum escalar não é nulo o conjunto de vetores é **Linearmente Dependente** (LD).

Uma consequência da propriedade de que vetores podem ser gerados pela combinação de outros é que podemos selecionar um conjunto de vetores para gerar todo o espaço vetorial. O menor conjunto que gera todo o espaço é chamado de base, como descrito na próxima definição.

DEFINIÇÃO A.6: BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

Um conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vetores em V é uma **Base** de V se:

1. for um conjunto linearmente independente
2. todo vetor de V pode ser gerado como combinação linear dos vetores do conjunto.

Um tipo de operação que pode ser estudada no contexto da Álgebra Linear são as transformações lineares, que podem ser definidas como segue.

DEFINIÇÃO A.7: TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Dados dois espaços vetoriais V e W , uma **Transformação Linear** é uma função de V em W , $T : V \rightarrow W$ que satisfaz:

1. para quaisquer v e $w \in V$

$$T(v + w) = T(v) + T(w)$$

2. Para qualquer escalar α e $v \in V$

$$T(\alpha v) = \alpha T(v)$$

Derivadas e integrais são exemplos de transformações lineares no espaço de funções, assim como, as equações diferenciais lineares. Um problema importante que surge no contexto de transformações lineares é o problema de autovalores e autovetores.

DEFINIÇÃO A.8: AUTOVALORES E AUTOVETORES

Dada uma transformação linear de um espaço vetorial V nele mesmo, $T : V \rightarrow V$, se existir um **vetor não nulo** $v \in V$ e um escalar λ tais que

$$T(v) = \lambda v$$

dizemos que λ é um **Autovalor** de T e v é o **Autovetor** de T associado a λ .

No contexto dos espaços de função é comum chamar os autovetores de **Autofunções**.

Além das operações de soma e produto por escalar, a Álgebra Linear também

generaliza outros conceitos como comprimento e ângulo entre vetores. Nesse momento é útil fazermos uma comparação com o plano cartesiano, \mathbb{R}^2 , onde calculamos o produto escalar, ou produto interno, dos vetores $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ como

$$v \cdot w = \langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

Com o produto escalar podemos calcular a norma, ou tamanho, de um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Com a norma podemos calcular a distância entre dois vetores, ou pontos,

$$d(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2}$$

Podemos também calcular o ângulo entre dois vetores usando a relação entre o produto escalar e a norma

$$v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos \theta$$

Finalmente dizemos que os vetores v e w são ortogonais se o ângulo entre eles for 90° , ou seja, se

$$v \cdot w = 0$$

Vamos agora generalizar essas definições para espaços vetoriais quaisquer.

DEFINIÇÃO A.9: PRODUTO INTERNO

Dado um espaço vetorial real V , um **Produto Interno** sobre V é uma função, $\langle v, w \rangle$, que associa um número real a cada par de vetores v e $w \in V$, satisfazendo as propriedades

1. $\langle v, v \rangle \geq 0$ para todo $v \in V$
2. $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$
3. $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$ para todo escalar α
4. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
5. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

Se o espaço vetorial V possui uma definição de produto interno dizemos que ele é

um **Espaço Vetorial com Produto Interno**. No estudo da transformada de Fourier utilizamos o produto interno

$$\langle v, w \rangle = \int_a^b v(x) w(x) dx \quad (\text{A.17})$$

para o espaço de funções no intervalo $[a, b]$

DEFINIÇÃO A.10: ORTOGONALIDADE

Em um espaço vetorial com produto interno \langle , \rangle , dizemos que dois vetores v e w são **Ortogonais** se

$$\langle v, w \rangle = 0$$

Para indicar que os vetores v e w são ortogonais podemos utilizar a notação $v \perp w$. A proposição a seguir apresenta as propriedades de vetores ortogonais.

PROPOSIÇÃO A.11: PROPRIEDADES DA ORTOGONALIDADE

Em um espaço vetorial com produto interno, V , valem as propriedades de ortogonalidade

1. $0 \perp v$ para todo $v \in V$
2. $v \perp w$ implica que $w \perp v$
3. Se $v \perp w$ para todo $w \in V$, então $v = 0$
4. Se $u \perp w$ e $v \perp w$, então $(u + v) \perp w$
5. Se $v \perp w$, então $(\lambda v) \perp w$ para todo escalar λ

No caso do espaço de funções a condição de ortogonalidade oriunda do produto interno (A.17) é

$$\langle v, w \rangle = \int_a^b v(x) w(x) dx = 0$$

No estudo das séries de Fourier usamos o fato de que as funções seno e cosseno com a escolha adequada de frequências são ortogonais.

Se o espaço vetorial possui um produto interno podemos definir uma norma, como descrito na próxima definição

DEFINIÇÃO A.12: NORMA

Dado um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definimos a **Norma** de um vetor $v \in V$ em relação a esse produto interno como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Se $\|v\| = 1$ para algum vetor v dizemos que ele é um **Vetor Unitário**.

A norma induzida no espaço de funções pelo produto interno (A.17) é

$$\|v\| = \langle v, v \rangle = \int_a^b v(x)^2 dx = 0$$

Podemos agora definir a distância entre dois vetores em um espaço vetorial.

DEFINIÇÃO A.13: DISTÂNCIA

Dado um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definimos a **Distância** entre vetores v e $w \in V$ em relação a esse produto interno como

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

A distância induzida no espaço de funções pelo produto interno (A.17) é

$$d(v, w) = \|v - w\| = \int_a^b (v(x) - w(x))^2 dx = 0$$

Essa definição de distância é usada na Seção 1.6, sobre o fenômeno de Gibbs, para esclarecer o significado apropriado a convergência da série de Fourier.

A.8 Cálculo de Funções Reais

Apresentamos nessa seção algumas definições e propriedades do Cálculo de funções reais que podem ser úteis para o estudo dos conteúdos desse material. Começamos pela definição de uma função real.

DEFINIÇÃO A.14: FUNÇÃO

Uma **Função** f de um conjunto D para um conjunto E é uma regra que associa, sem ambiguidade, um único elemento $y = f(x) \in E$ para cada elemento $x \in D$. Denotamos uma função por

$$f : D \rightarrow E$$

Dizemos que D é o **Domínio** e E o **Contra Domínio** de f , enquanto o conjunto de todos os valores $y = f(x)$ correspondentes a algum $x \in D$ é a **Imagen** de f .

DEFINIÇÃO A.15: FUNÇÃO REAL

Uma **Função Real** é uma função cujo domínio e contra domínio são subconjuntos dos reais \mathbb{R} .

A seguir apresentamos a definição formal do limite de uma função real.

DEFINIÇÃO A.16: LIMITE DE FUNÇÃO REAL

Seja f uma função definida em intervalo aberto que contém do ponto $a \in \mathbb{R}$, podendo não ser definida em a . Dizemos que o **Limite** de $f(x)$ quando x se aproxima de a é $L \in \mathbb{R}$ e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se para cada $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Essa definição pode ser estendida para o caso em que a é $\pm\infty$. Quando o limite existe ele possui as propriedades descritas na proposição a seguir.

PROPOSIÇÃO A.17: PROPRIEDADES DO LIMITE DE FUNÇÕES REAIS

Supondo que c é uma constante, f e g são funções reais e que os limites

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

existem, então valem as **Propriedades do Limite**

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ desde que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

Uma propriedade de algumas funções reais é não possuir buracos ou saltos em seu gráfico. Dizemos que essa funções são contínuas e a próxima definição nos fornece uma caracterização para essas funções.

DEFINIÇÃO A.18: CONTINUIDADE DE FUNÇÃO REAL

Uma função real é **Contínua** em um ponto a se

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Um resultado importante sobre funções contínuas é o Teorema do Valor Intermediário.

TEOREMA A.19: TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

Suponha que a função f é contínua em todos os pontos de um intervalo fechado $[a, b]$ e que $f(a) \neq f(b)$. Assuma que p é um valor entre $f(a)$ e $f(b)$ então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = p$.

Com o limite podemos definir a derivada de uma função real que nos fornece o valor da inclinação da reta tangente ao gráfico da função em cada ponto.

DEFINIÇÃO A.20: DERIVADA DE FUNÇÃO REAL

A **Derivada** de uma função real $f(x)$ em relação a variável x é a função f' cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista.

Ao calcularmos derivadas usamos as regras de derivação listadas na proposição a seguir.

PROPOSIÇÃO A.21: REGRAS DE DERIVAÇÃO

Sejam f e g funções deriváveis, c e r constantes, então temos que

- | | |
|---|--|
| 1. $\frac{d}{dx}c = 0$
2. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
3. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
4. $(cf)' = cf'$
5. $(f+g)' = f' + g'$ | 6. $(f-g)' = f' - g'$
7. $(fg)' = f'g + fg'$
8. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
9. Se $h(x) = f(g(x))$ então
$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ |
|---|--|

Uma propriedade importante de funções deriváveis é o Teorema de Rolle ou Teorema do Valor Médio.

TEOREMA A.22: TEOREMA DE ROLLE

Suponha que f é uma função

1. contínua no intervalo fechado $[a, b]$
2. derivável no intervalo aberto (a, b)
3. e $f(a) = f(b)$
então existe $c \in (a, b)$ onde $f'(c) = 0$.

A operação inversa da derivação e a integração e é apresentadas nos próximos resultados.

DEFINIÇÃO A.23: PRIMITIVA DE FUNÇÃO REAL

A **Primitiva**, **Antiderivada** ou **Integral Indefinida** de uma função f é a função F tal que

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

Denotamos a primitiva por

$$F(x) = \int f(x) dx$$

É importante observar que a primitiva não é única, se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ então $F(x) + c$ também será para qualquer constante c . A proposição a seguir apresenta algumas propriedades da primitiva.

PROPOSIÇÃO A.24: PROPRIEDADES DA PRIMITIVA

Dadas funções integráveis f e g e a constante c temos que

1. $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
2. $\int f(x) - g(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$
3. $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$

Uma operação relacionada é o cálculo da área entre o gráfico da função f e o eixo- x , chamamos essa operação de integral definida como descrito na próxima definição.

DEFINIÇÃO A.25: INTEGRAL DEFINIDA

A **Integral Definida** de uma função real f é a área, considerando o sinal, entre o gráfico da função e o eixo- x no intervalo $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Essa área é o limite da **Soma de Riemann** correspondente.

A integral definida possui as propriedades descritas na proposição a seguir.

PROPOSIÇÃO A.26: PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA

Dadas funções integráveis f e g e a constante c temos que

1. $\int_a^b c \, dx = c(b - a)$
2. $\int_a^b f(x) + g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$
3. $\int_a^b f(x) - g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx$
4. $\int_a^b cf(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx$
5. $\int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$

PROPOSIÇÃO A.27: INTEGRAÇÃO POR PARTES

Dadas funções integráveis p e q , podemos escrever a seguinte relação entre as integrais indefinidas

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du .$$

De modo equivalente temos a relação entre as integrais definidas

$$\int_{-\infty}^{\infty} p \, dq = pq \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} q \, dp .$$

O Teorema Fundamental do Cálculo é o resultado que determina as relações entre a derivada e as integrais definida e indefinida de uma função.

TEOREMA A.28: TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Parte 1 Se f é uma função contínua em $[a, b]$ então a função F definida

por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e

$$F'(x) = f(x)$$

Parte 2 Se f é contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

onde F é qualquer primitiva de f .

As integrais definidas são calculadas em um intervalo finito e a função f não deve ter nenhuma descontinuidade infinita. Porém, mesmo se o intervalo for infinito ou f possuir uma descontinuidade infinita, em alguns casos, é possível calcular a área sob o gráfico usando a integral imprópria.

DEFINIÇÃO A.29: INTEGRAL IMPRÓPRIA – TIPO 1

A **Integral Imprópria** do tipo 1 é a integral definida de uma função f em um intervalo infinito.

Se $\int_a^b f(x) dx$ existe para todo $b \geq a$ e o limite existir, temos que

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Se $\int_a^b f(x) dx$ existe para todo $a \leq b$ e o limite existir, temos que

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Se $\int_a^\infty f(x) dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ são convergentes, então

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx$$

DEFINIÇÃO A.30: INTEGRAL IMPRÓPRIA – TIPO 2

Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b , e o limite existir, temos que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

Se f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a , e o limite existir, temos que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

TABELA A.1: TABELA DE DERIVADAS

Funções exponenciais e logarítmicas

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln(a)$$

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$$

Funções trigonométricas

$$\frac{d}{dx} \sen(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} \tg(x) = \sec^2(x)$$

$$\frac{d}{dx} \sec(x) = \sec(x) \tg(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sen(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cot(x) = -\operatorname{cossec}^2(x)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cossec}(x) = -\operatorname{cossec}(x) \cot(x)$$

Funções trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx} \sen^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \tg^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1}(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \cot^{-1}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cossec}^{-1}(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Funções hiperbólicas

$$\frac{d}{dx} \operatorname{senh}(x) = \cosh(x)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tgh}(x) = \operatorname{sech}^2(x)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}(x) = -\operatorname{sech}(x) \operatorname{tgh}(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \operatorname{senh}(x)$$

$$\frac{d}{dx} \coth(x) = -\operatorname{cossech}^2(x)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cossech}(x) = -\operatorname{cossech}(x) \coth(x)$$

Funções hiperbólicas inversas

$$\frac{d}{dx} \operatorname{senh}^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tgh}^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1}(x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} \coth^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cossech}^{-1}(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$$

TABELA A.2: TABELA DE INTEGRAIS

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int e^u \, du = e^u + C$$

$$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$$

$$\int \ln(u) \, du = u(\ln(u) - 1) + C$$

$$\int \sin(u) \, du = -\cos(u) + C$$

$$\int \cos(u) \, du = \sin(u) + C$$

$$\int \sec^2(u) \, du = \tan(u) + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(u) \, du = -\cot(u) + C$$

$$\int \sec(u) \tan(u) \, du = \sec(u) + C$$

$$\int \operatorname{cossec}(u) \cot(u) du = -\operatorname{cossec}(u) + C$$

$$\int \operatorname{tg}(u) du = \ln|\sec(u)| + C$$

$$\int \cot(u) du = \ln|\operatorname{sen}(u)| + C$$

$$\int \sec(u) du = \ln|\sec(u) + \operatorname{tg}(u)| + C$$

$$\int \operatorname{cossec}(u) du = \ln|\operatorname{cossec}(u) - \cot(u)| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

$$\int u \operatorname{sen}(u) du = \operatorname{sen}(u) - u \cos(u) + C$$

$$\int u \cos(u) du = \cos(u) + u \operatorname{sen}(u) + C$$

$$\int u^2 \operatorname{sen}(u) du = 2 \cos(u) + 2u \operatorname{sen}(u) - u^2 \cos(u) + C$$

$$\int u^2 \cos(u) du = -2 \operatorname{sen}(u) + 2u \cos(u) + u^2 \operatorname{sen}(u) + C$$

$$\int u^n \operatorname{sen}(u) du = -u^n \cos(u) + n \int u^{n-1} \cos(u) du$$

$$\int u^n \cos(u) du = u^n \operatorname{sen}(u) - n \int u^{n-1} \operatorname{sen}(u) du$$

B

Referências e Recursos Online

B.1 Recursos Online

Existem muitos recursos *online* que servem como apoio ao estudo de Matemática e Cálculo. Utilizar esses recursos é altamente recomendável, porém lembre-se que apenas assistir vídeos passivamente não é suficiente para aprender Matemática, da mesma forma que, assistir atletas olímpicos não nos torna atletas também.

Alguns recursos *online* que podem ser uteis:

- ◊ www.wolframalpha.com

WolframAlpha é um mecanismo de conhecimento computacional que é capaz de fazer muitos cálculos.

- ◊ pt.khanacademy.org

A Khan Academy é uma ONG educacional criada e sustentada por Sal Khan. Com a missão de fornecer educação de alta qualidade para qualquer um, em qualquer lugar, oferece uma coleção grátis de vídeos de matemática, medicina e saúde, economia e finanças, física, química, biologia, ciência da computação, entre outras matérias.

- ◊ www.mathway.com/pt

A Mathway fornece aos alunos ferramentas para compreender e resolver problemas matemáticos. As resoluções são apresentadas passo a passo.

Nas seções desse capítulo indicamos alguns vídeos e atividades relacionados com os conteúdos de cada capítulo dessa apostila. Esses conteúdos podem ser muito úteis como auxílio no estudo de cada tópico. Note, porém, que a organização ou ordem dos tópicos varia de curso para curso. Algumas vezes notações também variam e em casos extremos definições distintas podem ser empregadas.

B.2 Séries de Fourier

As principais referências para esse tópico são:

- 1) Boyce, Equações Diferenciais Elementares [[boyce](#)] – Capítulo 10, Seções 10-2 até 10-4

Aulas da disciplina de Cálculo 4 do CEFET-MG gravadas pelo professor J. L. Acebal:

- 1) [Aula 14 - Série de Fourier e Propriedades](#)
- 2) [Aula 15 - Série de Fourier e Espaços Vetoriais de Funções](#)
- 3) [Aula 16 - Série de Fourier - Teorema de Fourier e Simetrias](#)

Aulas do Khan Accademy:

- 1) [Engenharia elétrica - Unidade: Sinais e sistemas](#)

Note que o Khan Academy insere as Séries de Fourier dentro do curso de Engenharia Elétrica, o que mostra sua aplicabilidade. Porém, o enfoque das aulas pode ser diferente do Cálculo 4. Além disso, a notação pode diferir em alguns pontos, por exemplo, o número imaginário na Matemática é denotado por i e na Engenharia Elétrica por j . Isso acontece pois a Engenharia Elétrica usa i para representar a corrente elétrica.

Aulas da disciplina Cálculo IV para a Engenharia (MAT-2456) ministrada no segundo semestre de 2014 pelo Prof. Claudio Possani da USP: [MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV](#)

Séries de Fourier. Convergência pontual:

- 1) [Aula 11 - Séries de Fourier - Parte 1 de 8](#)
- 2) [Aula 11 - Séries de Fourier - Parte 2 de 8](#)
- 3) [Aula 11 - Séries de Fourier - Parte 3 de 8](#)
- 4) [Aula 12 - Séries de Fourier - Parte 4 de 8](#)

- 5) Aula 12 - Séries de Fourier - Parte 5 de 8
- 6) Aula 12 - Séries de Fourier - Parte 6 de 8
- 7) Aula 13 - Séries de Fourier - Parte 7 de 8
- 8) Aula 13 - Séries de Fourier - Parte 8 de 8

Revisão e Aprofundamento:

- 1) Aula 15 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Fourier - Parte 1 de 4
- 2) Aula 15 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Fourier - Parte 2 de 4
- 3) Aula 15 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Fourier - Parte 3 de 4
- 4) Aula 15 - Revisão e Aprofundamento - Séries de Fourier - Parte 4 de 4

Aulas do curso de Cálculo III (MA311) na Unicamp ministrado pela Professora Ketty A. de Rezende: [Cursos Unicamp - Cálculo III](#)

Séries de Fourier:

- 1) Séries de Fourier - Parte 1
- 2) Séries de Fourier - Parte 2
- 3) Funções Pares e Ímpares; Extensão Periódica - Parte 1
- 4) Funções Pares e Ímpares; Extensão Periódica - Parte 2

B.3 Equações Diferenciais Parciais

As principais referências para esse tópico são:

- 1) Boyce, Equações Diferenciais Elementares [**boyce**] – Capítulo 10 – Seções 10-1, 10-5 até 10-8

Aulas da disciplina de Cálculo 4 do CEFET-MG gravadas pelo professor J. L. Acebal:

- 1) Aula 17 - Problemas de Valor de Contorno - Equações Diferenciais Parciais - Difusão
- 2) Aula 18 - PVC EDP Propagação Unidimensional de Onda
- 3) Aula 19 - Problema de valor de Contorno - Equação de Difusão - Condições de Contorno de Isolamento
- 4) Aula 20 - Equações Diferenciais Parciais Problema de Valor de Contorno não Homogêneo

Aulas do curso de Cálculo III (MA311) na Unicamp ministrado pela Professora Ketty A. de Rezende: [Cursos Unicamp - Cálculo III](#).

Equações Diferenciais Parciais:

- 1) [Separação de Variáveis; Equação do Calor - Parte 1](#)
- 2) [Separação de Variáveis; Equação do Calor - Parte 2](#)
- 3) [Equação da Onda e de Laplace - Parte 1](#)
- 4) [Equação da Onda e de Laplace - Parte 2](#)

B.4 Transformada de Fourier

As principais referências para esse tópico são:

- 1) [Introdução aos números complexos do Prof. Reginaldo](#)
- 2) [Apostila sobre Transformada de Fourier do Prof. Reginaldo](#)

Aulas da disciplina de Cálculo 4 do CEFET-MG gravadas pelo professor J. L. Acebal:

- 1) [Aula21 - Uma rota de compreensão das Transformadas de Fourier a partir da Série de Fourier](#)
- 2) [Aula22 - Transformadas de Fourier: tabela, propriedades, teorema de existência](#)
- 3) [Aula23 - Transformadas de Fourier de Funções Especiais e Propriedades](#)
- 4) [Aula24 - Transformadas de Fourier: Aplicações](#)

Respostas

Capítulo 1

Seção 1.7

- 1) a) Função sem simetria, $L = \pi$. Assim,

$$q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

onde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \left(- \int_{-\pi}^0 2 dx + \int_0^\pi 1 dx \right) \\ &= -1 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \left(- \int_{-\pi}^0 2 \cos nx dx + \int_0^\pi \cos nx dx \right) \\ &= 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \left(- \int_{-\pi}^0 2 \sin nx dx + \int_0^\pi \sin nx dx \right) \\ &= \frac{3}{n\pi} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} q(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x \end{aligned}$$

Solução alternativa: Considerar a função $\bar{q}(x) = q(x) + \frac{1}{2}$, que tem simetria ímpar.

- b) Função ímpar, $L = 2$. Portanto, $a_n = 0$, para todo n e

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{2} x$$

onde

$$b_n = - \int_0^2 x \sin \frac{n\pi}{2} x dx = \frac{4(-1)^n}{n\pi}$$

Logo

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi}{2} x$$

- 2) a) É par, uma vez que só apresenta os coeficientes a_n , ou seja, é uma série de constante e cossenos, todas funções pares.

b) Como o argumento do cosseno é nx , temos $L = \pi$ e portanto o período é 2π .

c) Nas condições dadas, a série de Fourier de f converge para f em todo x . Assim, o valor de $f(\pi)$ pode ser obtido aplicando $x = 0$ na série de Fourier, resultando na série numérica

$$f(\pi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

que é uma série geométrica de soma $\frac{1}{1 - (1/2)} = 2$.

d) *Conhecimento extra requerido:* Nas condições dadas sobre f , a série de Fourier para (a extensão periódica de) f' é obtida pela derivação termo a termo da série de f . Assim

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^n} \sin nx$$

Como $\sin nx$ se anula se x é múltiplo de π , temos que $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, são zeros de f' e portanto, pontos críticos de f .

Capítulo 2

Seção 2.2

1) $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$

2) $y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$

3) $y(t) = -\frac{1}{2}e^{3t/2} + \frac{5}{2}e^{t/2}$

iv) *Por cálculo direto:* aplicando integração por partes, duas vezes

De qualquer modo, concluímos que $u(x,t) = e^{-t} \sin x$.

2) a) Substituindo u na EDP

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)} = \sigma \in \mathbb{R}$$

Substituindo nas condições de fronteira

$$0 = u(0,y) = F(0)G(y) \Rightarrow F(0) = 0$$

$$0 = u(1,y) = F(1)G(y) \Rightarrow F(1) = 0$$

$$0 = u_y(x,1) = F(x)G'(1) \Rightarrow G'(1) = 0$$

Assim temos as EDO's com as condições

$$(i) \quad \begin{cases} F''(x) - \sigma F(x) = 0 \\ F(0) = 0 \\ F(1) = 0 \end{cases}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} G''(y) + \sigma G(y) = 0 \\ G'(1) = 0 \end{cases}$$

b) Pelo princípio da superposição (combinação linear das soluções fundamentais), temos

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) \cosh[n\pi(1-y)]$$

Para obter c_n , usamos a condição de contorno

$$\ell(x) = u_y(x,0) = -\sum_{n=1}^{\infty} n\pi c_n \sin(n\pi x) \operatorname{senh}(n\pi)$$

e pela série de Fourier (da extensão ímpar) de ℓ

$$c_n = -\frac{2}{n\pi \operatorname{senh}(n\pi)} \int_0^1 \ell(x) \sin(n\pi x) dx$$

se $n = 1$ e 0, caso contrário.

iii) *Por cálculo direto, usando a identidade fornecida:*

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(1-n)x - \cos(1+n)x] dx \end{aligned}$$

Calculando explicitamente temos $c_n = 0$, se $n \neq 1$ e $c_1 = 1$.

3) A solução do problema é

$$u(x,t) = -\sin(\pi x) + 2e^{-8\pi^2 t} \sin(3\pi x)$$

6) A solução do problema é

$$u(x,t) = -\sin(\pi x) + 2e^{-8\pi^2 t} \sin(3\pi x)$$

Capítulo 6

Seção 6.10

transformada das derivadas, temos

$$\hat{u}_{tt} = -\omega^2 \hat{u}$$

- 1) a) Por definição

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi} \mathcal{F}\{g(x)\} &= \int_0^2 e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \Big|_{x=0}^{x=2} \\ &= i \frac{e^{-i2\omega} - 1}{\omega}\end{aligned}$$

- b) Por definição

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^{iax} f(x)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\omega-a)x} dx \\ &= \hat{f}(\omega - a)\end{aligned}$$

- 2) a) Aplicando \mathcal{F} na EDP, usando a linearidade e a

Aplicando \mathcal{F} nas condições iniciais

$$\begin{aligned}\hat{u}(\omega, 0) &= 0 \\ \hat{u}_t(\omega, 0) &= \hat{v}_0(\omega)\end{aligned}$$

- b) Como as raízes da equação característica da EDO linear são $r = \pm i\omega$, temos

$$\hat{u}(\omega, t) = c_1(\omega) \cos \omega t + c_2(\omega) \sin \omega t$$

e pelas condições iniciais obtemos

$$c_1(\omega) \equiv 0 \text{ e } c_2(\omega) = \frac{\hat{v}_0(\omega)}{\omega}$$

- c) Aplicando \mathcal{F}^{-1} , temos

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{v}_0(\omega)}{\omega} \sin \omega t \cdot e^{i\omega x} d\omega$$

Referências

- 1 ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. v. 2.
- 2 ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- 3 APOSTOL, T. M. A proof that Euler missed: evaluating $\zeta(2)$ the easy way. *The Mathematical Intelligencer*, v. 5, n. 3, 1983. DOI: [10.1007/bf03026576](https://doi.org/10.1007/bf03026576).
- 4 ÁVILA, G. *Variáveis complexas e aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- 5 AVRITZER, DAN. *geometria analítica e álgebra linear: uma visão geométrica*. 2011.
- 6 BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo, 1986.
- 7 BOULOS, P. *Cálculo diferencial e integral*. São Paulo: Makron Books, 1999. v. 1.
- 8 BOYCE, W. E.; DI PRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- 9 BUTKOV, E. *Física matemática*. LTC, 1988.
- 10 CAMARGO, I.; BOULOS, P. *Geometria Analítica – Um Tratamento Vetorial*. 3. ed. São Paulo: Prentice-Hall, 2005.
- 11 CAPELAS DE OLIVEIRA, E.; JR., R.; A., W. *Funções Analíticas com Aplicações*. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2006.
- 12 CHURCHILL, R. V. *Serries de Fourier e problemas de valores de contorno*. 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1978.
- 13 CHURCHILL, R. V. *Variáveis complexas e aplicações*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1975.
- 14 DEMANA, F. D. et al. *Pré-cálculo*. 1. ed. São Paulo: Pearson, 2008.
- 15 EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E. *Cálculo com geometria analítica*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1994. v. 1.
- 16 EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E. *Cálculo com geometria analítica*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1994. v. 2.
- 17 EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E. *Cálculo com geometria analítica*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1994. v. 3.
- 18 EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E. *Equações diferenciais elementares com problemas de valores de contorno*. 3. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1995.
- 19 FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A: funções, limite, derivação e integração*. São Paulo: Prentice-Hall, 2007.
- 20 FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais duplas e triplas*. São Paulo: Prentice-Hall, 2007.
- 21 FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo C: funções vetoriais, integrais curvilíneas, integrais de superfície*. São Paulo: Prentice-Hall, 2007.
- 22 GIORDANO, F. R.; WEIR, M. D.; FOX, W. P. *A first course in mathematical modeling*. 3. ed. Pacific Grove: Thomson, 2003.
- 23 GOMES, F. M. *Matemática básica: Operações, equações, funções e sequências*. IMECC – UNICAMP, 2017. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091/page14.html>>.
- 24 HSU, H. P. *Análise de Fourier*. Rio de Janeiro: LTC, 1973.

- 25 IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações*. Atual, 2013. v. 6. ISBN 9788535717525. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=I1iZDAEACAAJ>>.
- 26 IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar, 7: geometria analítica*. Atual, 2005. v. 7. ISBN 9788535705461. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=nFByPgAACAAJ>>.
- 27 IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos*. Atual, 2013. v. 2. ISBN 9788535716825. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=rZkGkAEACAAJ>>.
- 28 IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas*. Atual, 2013. v. 4. ISBN 9788535717488. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=3CW4jwEACAAJ>>.
- 29 IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSAJN, D. *Fundamentos de matemática elementar, 11: matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva*. Atual, 2013. v. 11. ISBN 9788535717600. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=6SEJkAEACAAJ>>.
- 30 IEZZI, G.; MACHADO, N.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar, 8: limites, derivadas, noções de integral*. Atual, 2013. v. 8. ISBN 9788535717563. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=IzLUjwEACAAJ>>.
- 31 IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções*. Atual, 2004. v. 1. ISBN 9788535704556. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=gMuCPgAACAAJ>>.
- 32 IÓRIO, V. *EDP: Um Curso de Graduação*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.
- 33 JESUS SANTOS, R. DE. *Convergência Pontual da Série de Fourier*. 10 jul. 2010. Disponível em: <<https://regijs.github.io/eqdif/teofourier.pdf>>. Acesso em: 10 out. 2021.
- 34 JESUS SANTOS, R. DE. *Introdução às equações diferenciais ordinárias*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária UFMG, 2006. Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/~regi>>.
- 35 JESUS SANTOS, R. DE. *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária UFMG, 2007. Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/~regi>>.
- 36 JESUS SANTOS, R. DE. *Propriedades de Séries de Potências*. 2 out. 2011. Disponível em: <<https://regijs.github.io/eqdif/propserpot.pdf>>. Acesso em: 10 out. 2021.
- 37 JESUS SANTOS, R. DE. *Séries de Fourier*. 23 abr. 2002. Disponível em: <<https://regijs.github.io/eqdif/sfourier.pdf>>. Acesso em: 10 out. 2021.
- 38 JESUS SANTOS, R. DE. *Séries de Fourier de Senos e de Cossenos de Índices Ímpares*. 17 ago. 2010. Disponível em: <<https://regijs.github.io/eqdif/serfourespec.pdf>>. Acesso em: 10 out. 2021.
- 39 JESUS SANTOS, R. DE. *Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 16 out. 2007. Disponível em: <<https://regijs.github.io/eqdif/sfouriereqparc.pdf>>. Acesso em: 10 out. 2021.
- 40 JESUS SANTOS, R. DE. *Transformada de Fourier*. 15 out. 2010. Disponível em: <<https://regijs.github.io/eqdif/transfourier.pdf>>. Acesso em: 10 out. 2021.
- 41 JESUS SANTOS, R. DE. *Um curso de geometria analítica e álgebra linear*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária UFMG, 2010. Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/~regi>>.
- 42 JÚNIOR, F. A. *Equações diferenciais*. São Paulo: McGraw-Hill, 1959.
- 43 KOLMAN, B. *Álgebra Linear*. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987.
- 44 LANG, S. *Álgebra Linear*. São Paulo: Edgard Blucher, 1971.
- 45 LEIGHTON, W. *Equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: LTC, 1970.
- 46 LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.
- 47 LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 2.
- 48 LEON, S. J. *Álgebra Linear com aplicações*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

- 49 MEDEIROS, v. z. et al. *Pré-cálculo*. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- 50 MUROLO, A.; BONETTO, G.; BONETTO, G. *Matemática Aplicada à Administração, Economia e Contabilidade*. Pioneira Thomson Learning, 2004. ISBN 9788522103997. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=JFXWf98X5IQC>>.
- 51 NAGLE, R. K.; SAFF E. B. AND SNIDER, A. D. *Equações Diferenciais*. 8. ed.: Pearson, 2012.
- 52 PATRICK D. SHANAHAN, D. G. Z. E. *Curso Introdutório à Análise Complexa com Aplicações*. 2. ed.: TLC, 2011.
- 53 POOLE, D. *Álgebra Linear*. São Paulo: Thomson, 2006.
- 54 ROJAS, M. R. A. *Introdução às equações diferenciais parciais*. InterSaber, 2020.
- 55 SANTOS, N. M. *Vetores e matrizes: uma introdução à álgebra linear*. 4. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2005.
- 56 SIMMONS, G. F. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Pearson Makron Books, 1988. v. 1.
- 57 SIMMONS, G. F. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Pearson Makron Books, 1988. v. 2.
- 58 SOARES, M. *Cálculo em Uma Variável Complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. (Coleção Matemática Universitária).
- 59 SPIEGEL, M. R. *Análise de Fourier*. São Paulo: MacGraw-Hill, 1976. (Schaum).
- 60 STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: Pearson Education, 1987.
- 61 STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Geometria Analítica*. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1987.
- 62 STEWART, J. *Cálculo: Volume I*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. v. 1.
- 63 STEWART, J. *Calculus: Volume II*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. v. 2.
- 64 STRANG, G. *Álgebra Linear e suas aplicações*. São Paulo: Cengage Learning, 2009.
- 65 SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1995. v. 1.
- 66 SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1995. v. 2.
- 67 TAN, S. *Matemática aplicada à administração e economia*. Pioneira Thomson Learning, 2001. ISBN 9788522102457. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=d6QjAgAACAAJ>>.
- 68 THIM, J. *Continuous Nowhere Differentiable Functions*. 2003. 94 f. Diss. (Mestrado) – Luleå University of Technology, Luleå, Sweden. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/255669824_Continuous_Nowhere_Differentiable_Functions_MS_Thesis>. Acesso em: 1 out. 2001.
- 69 THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo Volume 1*. 12. ed. São Paulo, 2012. v. 1.
- 70 THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo Volume 2*. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. v. 2.
- 71 WIKIMEDIA COMMONS. *File:Pitangus-3.ogg — Wikimedia Commons, the free media repository*. 2020. Disponível em: <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Pitangus-3.ogg&oldid=426366139>>. Acesso em: 10 out. 2021.
- 72 WINTERLE, P. *Vetores e geometria analítica*. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2000.
- 73 ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. 9. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

Índice Remissivo

- Amplitude, 2, 4
Antiderivada, 204
Autofunção, 62, 197
Autovalor, 60, 62, 197
Autovetor, 60, 197

Base, 197
Bernoulli
 desigualdade, 186

Combinação Linear, 196
Condição
 Dirichlet, 72, 90, 106, 107, 123
 homogênea, 70
 não homogênea, 71, 79
 fronteira, 46, 70, 71, 79, 90, 91, 107, 108
 inicial, 46, 56
 Neumann, 71, 83
Contra Domínio, 201
Convergência
 transformada de Fourier, 148
Convolução, 147, 152
Coordenadas polares, 118, 187
Corpo, 191
Cosseno hiperbólico, 180

Delta de Dirac, 149, 159, 185
Derivada, 203
Desigualdade
 Bernoulli, 186
Dirichlet
 condição, 72, 123
 homogênea, 70
 não homogênea, 71, 79
Distância, 200

Domínio, 201
 da frequência, 131
 do tempo, 131

EDO, 46, 51
EDP, 46
Equação
 calor, 48, 69
 característica, 51
 diferencial
 linear, 47
 não-linear, 48
 ordinária, 46, 51
 parcial, 46
 primeira ordem, 47
 segunda ordem, 47
 elíptica, 49, 105
 Euler, 125
 hiperbólica, 48
 homogênea, 48
 Laplace, 49, 105, 107
 onda, 48, 90
 parabólica, 48
Equação de Laplace em
 Coordenadas Polares, 122
Escalar, 196
Espaço de Funções, 196
Espaço Vetorial, 7, 195
 com produto interno, 199
Exponencial Complexa, 194

Fase, 2, 5
Fenômeno de Gibbs, 42, 43
Fourier
 série, 10, 17
 complexa, 132
 cossenos, 35
 senos, 36

transformada, 130, 138
transformada inversa, 141, 147
Frequência, 2, 4
Função, 201
 característica, 184
 contínua, 202
 contínua por partes, 26
 de Weierstrass, 13
 degrau unitário, 151, 184
 exponencial, 176
 Heaviside, 151, 184
 hiperbólica, 52, 180
 impar, 31
 coeficiente Fourier, 36
 integral, 34
 logaritmo, 176
 ortogonal, 8
 par, 31
 coeficiente Fourier, 35
 integral, 34
 periódica, 5
 rampa, 185
 real, 201
 seccionalmente contínua, 26
 seno cardinal, 140
 senoidal, 2, 4
 sinc, 140
 trigonométrica, 8
Fórmula
 Euler, 181
 Euler-Fourier, 15

Hipótese de indução, 186

Identidade de Euler, 133, 194
Imagen, 201

- Impulso unitário instantâneo, [149, 185](#)
- Indução
 - finita, [186](#)
 - matemática, [186](#)
- Ínfimo, [173](#)
- Integral
 - definida, [204](#)
 - imprópria, [206](#)
 - indefinida, [204](#)
- Intervalo, [173](#)
 - aberto, [173](#)
 - fechado, [173](#)
- Limite
 - função real, [201](#)
 - lateral, [26](#)
- Linearmente
 - dependente, [196](#)
 - independente, [196](#)
- Neumann
 - condição, [71, 83](#)
- Norma, [200](#)
 - 1, [44](#)
 - 2, [44](#)
 - infinito, [43](#)
- Número complexo, [189](#)
 - argumento, [193](#)
 - conjugado, [193](#)
- conjunto, [190](#)
- módulo, [193](#)
- parte imaginária, [193](#)
- parte real, [193](#)
- produto, [190](#)
- soma, [190](#)
- Ortogonalidade, [199](#)
- Período, [3, 5](#)
 - fundamental, [5](#)
- Plano complexo, [192](#)
- Primitiva, [204](#)
- Problema
 - autovalores, [59](#)
 - Laplace, [105](#)
 - Laplace n disco, [123](#)
 - valor inicial, [56](#)
 - valores de contorno, [57](#)
 - homogêneo, [57](#)
- Produto
 - interno, [198](#)
 - por escalar, [195](#)
- Seno hiperbólico, [180](#)
- Senoide, [2](#)
- Separação de variáveis, [64, 91, 108](#)
- sinc, [182](#)
 - normalizada, [184](#)
- Solução
- fundamental, [52, 75, 92](#)
- geral, [52, 75, 127](#)
- trivial, [57](#)
- Soma, [195](#)
- Supremo, [174](#)
- Série
 - Fourier, [10, 17](#)
 - coeficientes, [15](#)
 - complexa, [132, 135](#)
 - convergência, [26](#)
 - cossenos, [35](#)
 - senos, [36](#)
- Teorema
 - convolução, [147](#)
 - de Rolle, [203](#)
 - fundamental do Cálculo, [205](#)
 - valor intermediário, [202](#)
 - valor médio, [203](#)
- Transformada de Fourier, [130, 138](#)
 - convergência, [148](#)
 - inversa, [141, 147](#)
- Transformação Linear, [197](#)
- Unidade Imaginária, [190](#)
- Vetor, [195](#)
 - unitário, [200](#)
- Vizinhança, [173](#)

Equações Diferenciais Parciais

Luis A. D'Afonseca

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – [CEFET-MG](#)
16 de outubro de 2024

Apostila para a disciplina “Equações Diferenciais Parciais” do CEFET-MG.



A versão mais recente desta apostila pode ser baixada clicando ou escaneando o código QR.

Arte da capa: [Imagen de Merlin Lightpainting](#) baixada de [Pexels](#)



Esta obra tem a licença [Creative Commons “Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional”](#).