CFVVI – Prova 1 – Turma 6 08/07/2024

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [15] Escreva a equação $x^2 + xy + y^2 = 1$ em coordenadas polares e simplifique.

Sabemos que a relação entre as coordenadas é

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\operatorname{sen}(\theta) \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

Portanto, precisamos substituir as expressões e simplificar o resultado

$$\begin{aligned}
x^2 + xy + y^2 &= 1 \\
(r\cos\theta)^2 + r\cos\theta r\operatorname{sen}\theta + (r\operatorname{sen}\theta)^2 &= 1 \\
r^2\cos^2\theta + r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta &= 1 \\
r^2\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\right) &= 1 \\
r^2\left(1 + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\right) &= 1
\end{aligned}$$

Forma alternativa:

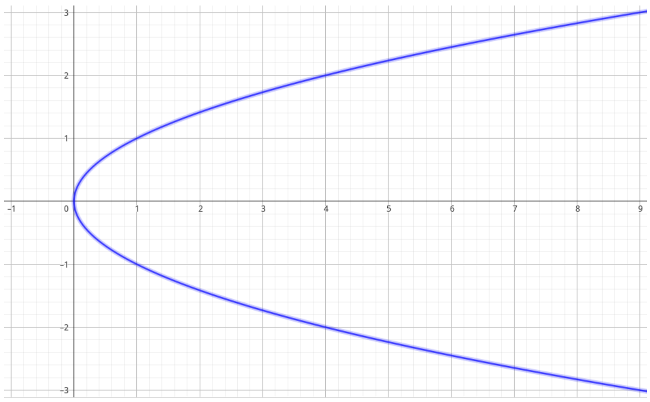
$$\begin{aligned}
r^2\left(1 + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right) &= 1 \\
r^2\left(2 + \operatorname{sen}(2\theta)\right) &= 2
\end{aligned}$$

2 [10] Encontre e corte da quádrica $y + z^2 = x$ pelo plano $z = 0$, identifique a região e a esboce no plano.

Encontramos o corte substituindo $z = 0$ na equação

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 &= x \\ y^2 &= x \\ x &= y^2 \end{aligned}$$

Essa é a expressão da **parábola** ilustrada a seguir



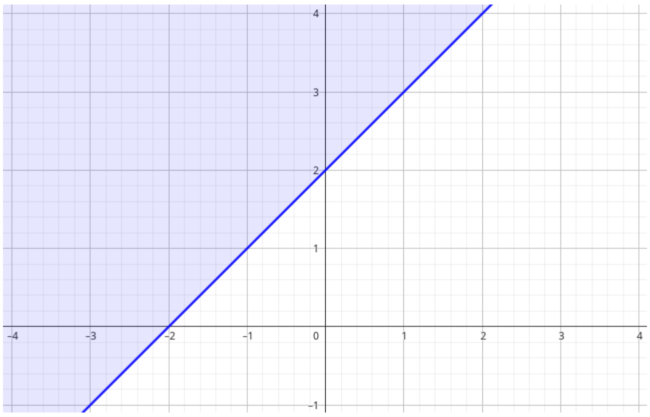
3 [15] Determine e esboce o domínio da função $f(x,y) = \sqrt{y - x - 2}$

A raiz quadrada só está definida para valores maiores ou iguais a zero, assim, seu domínio consiste dos pontos que satisfaçam a condição

$$\begin{aligned} y - x - 2 &\geq 0 \\ y &\geq x + 2 \end{aligned}$$

isso é, os pontos "a cima" da reta $y = x + 2$

$$D_f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R} \ / \ y \geq x + 2\big\}$$



4 [30] Calcule os limites solicitados, ou prove que o limite não existe

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}$ b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{y-x}$

a) Se tentarmos calcular diretamente a fração obtemos uma indeterminação $0/0$. Portanto, precisamos remover a indeterminação manipulando algebricamente a função, assumindo que $(x,y) \neq (1,1)$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{xy-y-2x+2}{x-1} \\ &= \frac{(x-1)y-2(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{(x-1)(y-2)}{x-1} \\ &= y-2 \end{aligned}$$

Onde o cancelamento só foi possível, pois $(x,y) \neq (1,1)$. Agora podemos calcular o limite, pois temos uma função contínua em $(1,1)$,

$$L = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} y-1 = 2$$

b) Se tentarmos calcular diretamente a fração obtemos uma indeterminação $0/0$. Portanto, precisamos remover a indeterminação manipulando algebricamente a função, assumindo que $(x,y) \neq (1,1)$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-y^2}{y-x} \\ &= \frac{(x-y)(x+y)}{y-x} \\ &= -\frac{(x-y)(x+y)}{x-y} \\ &= -(x+y) \\ &= -x-y \end{aligned}$$

Onde o cancelamento só foi possível, pois $(x,y) \neq (1,1)$. Agora podemos calcular o limite, pois temos uma função contínua em $(1,1)$,

$$L = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{y-x} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} -x-y = -2$$

5 [30] Calcule as derivadas solicitadas realizando as contas na ordem indicada

a) [15] $\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(y^2 + y\left(\operatorname{sen}(xy) - x^4\right)\Big)$ b) [15] $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(ye^{x^2-y}\right)$

a)
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\Big(y^2 + y\left(\operatorname{sen}(xy) - x^4\right)\Big) &= \frac{\partial y^2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\Big(y\left(\operatorname{sen}(xy) - x^4\right)\Big) \\
&= 2y + \frac{\partial y}{\partial y}\left(\operatorname{sen}(xy) - x^4\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{sen}(xy) - x^4\right) \\
&= 2y + \operatorname{sen}(xy) - x^4 + y\left(\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{sen}(xy) - 0\right) \\
&= 2y + \operatorname{sen}(xy) - x^4 + y\cos(xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy) \\
&= 2y + \operatorname{sen}(xy) - x^4 + y\cos(xy)x\frac{\partial y}{\partial y} \\
&= 2y - x^4 + \operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy)
\end{aligned}$$

b) Começamos calculando a primeira derivada

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(ye^{x^2-y}\right) &= y\frac{\partial}{\partial x}e^{x^2-y} \\
&= ye^{x^2-y}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - y\right) \\
&= ye^{x^2-y}\left(\frac{\partial x^2}{\partial x} - 0\right) \\
&= ye^{x^2-y}2x \\
&= 2xye^{x^2-y}
\end{aligned}$$

Agora calculamos a derivada segunda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(ye^{x^2-y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(ye^{x^2-y}\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(2xye^{x^2-y}\right) \\
&= 2x\frac{\partial}{\partial y}\left(ye^{x^2-y}\right) \\
&= 2x\left(\frac{\partial y}{\partial y}e^{x^2-y} + y\frac{\partial}{\partial y}e^{x^2-y}\right) \\
&= 2x\left(e^{x^2-y} + ye^{x^2-y}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - y\right)\right) \\
&= 2x\left(e^{x^2-y} + ye^{x^2-y}\left(0 - \frac{\partial y}{\partial y}\right)\right) \\
&= 2x\left(e^{x^2-y} - ye^{x^2-y}\right)
\end{aligned}$$

$$= 2x(1-y)e^{x^2-y}$$