Revisão de Limites

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

23 de agosto de 2025

https://material-didatico.github.io/cfvv1

Conteúdo

Limite de uma Função

Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de a,

exceto, possivelmente, no próprio a

O limite de $f(x)$ quando x tende para a é o número L

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, para cada $\epsilon > O$, existir $\delta > O$, tais que

$$0 < |x - a| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon$$

Limites de algumas funções

$$\lim_{x \to a} c = c$$

$$\lim_{x \to a} x = a$$

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$ n número inteiro positivo

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$ n número inteiro positivo, se n for par precisamos impor $a \geq 0$

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$$ onde $p(x)$ é um polinômio em x

Limites de algumas funções

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Propriedades de Limites

Se os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existirem, então:

1. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ Soma
2. $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$ Diferença
3. $\lim_{x\to a}(cf(x)) = c\lim_{x\to a} f(x), \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$ Multiplicação por escalar
4. $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$ Produto
5. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ desde que $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$ Quociente

Teorema do confronto

Se $g(x) < j(x) < h(x)$

para todo x em um intervalo aberto contendo a, exceto $x = a$, e

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

então

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Conteúdo

Estratégia Geral para Cálculo de Limites

1. Substituir diretamente o valor da variável no limite
2. Identificar o resultado: número finito, $\pm\infty$ ou indeterminação
3. Em caso de indeterminação:
   - aplicar manipulações algébricas
   - utilizar fatorações
   - racionalizações
   - dividir pelo termo de maior grau

Indeterminações Comuns

- $\dfrac{0}{0}$ indeterminação algébrica
- $\dfrac{\infty}{\infty}$ formas racionais
- $\infty - \infty$ diferença de infinitos
- $0 \cdot \infty$
- $1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}$

Exemplo 1

Avalie o limite $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Exemplo 1 – Solução

Substituindo diretamente

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \left.\frac{x^2-4}{x-2}\right|_{x=2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$

Indeterminação ${}^0\!/_0$,

não podemos dizer nada sobre o limite

Exemplo 1 – Solução

Fatorando o numerador

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\
&= \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \\
&= x + 2
\end{aligned}
$$

Calculando o Limite

$$\lim_{x \to 2} f(x) \;=\; \lim_{x \to 2} (x+2) \;=\; (x+2)\Big|_{x=2} \;=\; 4$$

Exemplo 2

Calcule o limite $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x}{2x^2-x}$

Exemplo 2 – Solução

Não podemos substituir diretamente, mas sabemos que

$$\lim_{x\to\infty} 3x^2 + 5x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} 2x^2 - x = \infty$$

portanto temos uma indeterminação ${}^{\infty}/_{\infty}$

e não podemos dizer nada sobre o limite

Exemplo 2 – Solução

Dividindo o numerador e o denominador pelo termo de maior grau, x^2

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x}{2x^2 - x} = \frac{\left(3x^2 + 5x\right) / x^2}{\left(2x^2 - x\right) / x^2} = \frac{3 + 5/x}{2 - 1/x}$$

Sabemos que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$, então

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{3 + 5/x}{2 - 1/x} = \frac{3 + 0}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$

Exemplo 3

Avalie $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right)$

Exemplo 3 – Solução

Não podemos substituir diretamente, mas sabemos que

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 3x} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty$$

portanto temos uma indeterminação $\infty - \infty$

e não podemos dizer nada sobre o limite

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x^2+3x} - x \\
&= \left(\sqrt{x^2+3x} - x\right) \frac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{x^2+3x}+x} \\
&= \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} \\
&= \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} \\
&= \frac{3x}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}+x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3x}{x\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+x} \\
&= \frac{3x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+1\right)} \\
&= \frac{3}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+1}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}\right)}+1}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{3}{2}$$

Exemplo 4

Avalie $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x)$

Exemplo 4 – Solução

Não podemos substituir diretamente, mas sabemos que

$$\lim_{x \to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

portanto temos uma indeterminação $0(-\infty)$

e não podemos dizer nada sobre o limite

Exemplo 4 – Solução

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{{}^{1}\!/\!{}_{x}}$$

indeterminação $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(x))'}{(x^{-1})'}$$

Regra de L'Hôpital

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{-x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Exemplo 5

Calcule $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Dica: use o Teorema do Confronto

Exemplo 5 – Solução

Como

$$-1 \leq \operatorname{sen}(u) \leq 1 \qquad \forall u \in \mathbb{R}$$

para $x \neq 0$

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

portanto

$$-|x| \leq x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$$

Exemplo 5 – Solução

Sabemos que

$$\lim_{x\to 0}|x| \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} -|x| \;=\; 0$$

Portanto, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Técnicas principais

- Substituição direta
- Fatoração e simplificação algébrica
- Divisão por maior potência para limites no infinito
- Racionalização em diferenças envolvendo raízes
- Reescrita de produtos em quocientes
- Uso da Regra de L'Hôpital

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 1 do Thomas 12ª ed.

1. Revisar atentamente texto do Capítulo 2

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações