CFVVI – Prova 3 – Turma 7

14/07/2025

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [20] Converta a equação para coordenadas cartesianas e mostre que a solução é uma cônica

$$r = \frac{8}{3 + 2\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta}$$

Queremos mostrar que a equação, escrita em coordenadas cartesianas, (x, y), é uma expressão com termos de segundo grau em x e y

$$r = \frac{8}{3 + 2\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta}$$

$$r(3 + 2\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta) = 8$$

$$3r + 2r\cos\theta + 2r\operatorname{sen}\theta = 8$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2} + 2x + 2y = 8$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2} = 8 - 2x - 2y$$

$$9(x^2 + y^2) = (8 - 2x - 2y)^2$$

$$9x^2 + 9y^2 = 64 - 32x - 32y + 4x^2 + 8xy + 4y^2$$

$$5x^2 + 5y^2 - 8xy + 32x + 32y - 64 = 0$$

2 [20] Determine todas as raízes cúbicas de $z = -8i$

Converter para forma polar

$$x = \mathrm{Re}(z) = 0$$

$$y = \mathrm{Im}(z) = -8$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-8)^2} = 8$$

$$\varphi = \arg(z) = -\frac{\pi}{2}$$

Aplicar a fórmula de De Moivre para as raízes cúbicas

$$u_k = 2\left[\cos\left(\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right] \qquad k = 0{,}1{,}2$$

Calculando os argumentos das raízes

$$\varphi_0 = \frac{-\pi/2 + 2 \times 0\pi}{3} = \frac{-\pi}{6}$$

$$\varphi_1 = \frac{-\pi/2 + 2 \times 1\pi}{3} = \frac{-\pi/2 + 4\pi/2}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_2 = \frac{-\pi/2 + 2 \times 2\pi}{3} = \frac{-\pi/2 + 8\pi/2}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

As raízes são

$$u_0 = 2\left[\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right] = 2e^{-\,i\pi/6} = \sqrt{3} - i$$

$$u_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2e^{\pi/2} = 2i$$

$$u_2 = 2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right] = 2e^{7i\pi/6} = -\sqrt{3} - i$$

3 [30] Encontre e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

Calculando as **derivadas primeiras** de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 - 12xy + 8y^3\right)$$

$$= 3x^2 - 12y + 0$$

$$= 3x^2 - 12y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 - 12xy + 8y^3\right)$$

$$= 0 - 12x + 8 \times 3y^2$$

$$= 24y^2 - 12x$$

Encontrando os **pontos críticos**. As derivadas parciais de f existem em todo o plano, temos então que resolver o sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 12y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - 12x = 0$$

Simplificando

$$x^2 - 4y = 0$$

$$2y^2 - x = 0$$

Isolando x na segunda equação e substituindo na primeira temos

$$x = 2y^2$$

$$x^2 - 4y = 0$$

$$\left(2y^2\right)^2 - 4y = 0$$

$$4y^4 - 4y = 0$$

$$y\left(y^3 - 1\right) = 0$$

As soluções são $y = 0$ e $y = 1$.
Se $y = 0$, temos

$$x = 2 \times 0^2 = 0$$

e o ponto $P_1 = (0,0)$
Se $y = 1$, temos

$$x = 2 \times 1^2 = 2$$

e o ponto $P_2 = (2,1)$
Para **classificar** os pontos críticos precisamos do determinante da Hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 - 12y\right) = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(24y^2 - 12x\right) = 48y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 - 12y\right) = -12$$

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2$$

$$= (6x)(48y) - (-12)^2$$

$$= 144(2xy - 1)$$

Classificando o ponto P_1

$$D\,(0,0) = 144(2 \times 0 \times 0 - 1) = -144 < 0$$

P_1 é ponto de sela
Classificando o ponto P_2

$$D\,(2,1) = 144(2 \times 2 \times 1 - 1) = 144(4-1) > 0$$

$$f_{xx}\,(2,1) = 6 \times 2 = 12 > 0$$

O ponto P_2 é um mínimo local

4 [30] Encontre os valores máximo e mínimo de $3x + y$ sujeitos a $x^2 + y^2 = 10$

Queremos encontrar os valores máximo e mínimo da função

$$f(x,y) = 3x + y$$

sujeitos a restrição

$$g(x,y) = x^2 + y^2 = 10$$

Gradiente de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x + y) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x + y) = 1$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gradiente de g

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2\right) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2\right) = 2y$$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Precisamos resolver o sistema

$$3 = \lambda 2x$$

$$1 = \lambda 2y$$

$$x^2 + y^2 = 10$$

Da primeira equação verificamos que $x \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, da segunda verificamos que $y \neq 0$.

Isolando x e y nas duas primeiras equações e substituindo na terceira, temos

$$x = \frac{3}{2\lambda}$$

$$y = \frac{1}{2\lambda}$$

$$x^2 + y^2 = 10$$

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 10$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 10$$

$$\frac{10}{4\lambda^2} = 10$$

$$4\lambda^2 = 1$$

$$\lambda = \pm\frac{1}{2}$$

Se $\lambda = \frac{1}{2}$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2^1/2} = 3$$

$$y = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2^1/2} = 1$$

Então o primeiro ponto é $P_1 = (3,1)$
Se $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2\left(-1/2\right)} = -3$$

$$y = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2\left(-1/2\right)} = -1$$

Então o primeiro ponto é $P_1 = (-3,-1)$
Avaliando a função nos pontos

$$f(3,1) = 3 \times 3 + 1 = 10$$

$$f(-3,-1) = 3 \times (-3) + (-1) = -10$$

O valor mínimo da função é -10 e o valor máximo é 10