

Diferenciais

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

Conteúdo

Variação em uma Direção

Diferenciais

Lista Mínima

Variação em uma Dimensão

Em uma dimensão podemos estimar o valor da função em um ponto próximo à x_0 usando a derivada em x_0

$$df = f'(x_0)ds$$

$$ds = x - x_0$$

$$df \approx f(x) - f(x_0)$$

Variação em Várias Dimensões

Em várias dimensões usamos a derivada direcional

$$df = \left(D_u f \Big|_{(x_0, y_0)} \right) ds = \left(\nabla f \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot u \right) ds$$

$$ds = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$df \approx f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

Exemplo 1

Calcule quanto

$$f(x, y, z) = y \operatorname{sen}(x) + 2yz$$

irá variar se nos movermos 0,1 unidades a partir de $P_0(0, 1, 0)$
na direção do ponto $P_1(2, 2, -2)$

Exemplo 1 – Direção do movimento

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Normalizando o vetor

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

Exemplo 1 – Derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (y \operatorname{sen}(x) + 2yz) = y \cos(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y \operatorname{sen}(x) + 2yz) = \operatorname{sen}(x) + 2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (y \operatorname{sen}(x) + 2yz) = 2y$$

Exemplo 1 – Gradiente de f

$$\nabla f = (y \cos(x))\mathbf{i} + (\sin(x) + 2z)\mathbf{j} + (2y)\mathbf{k} = \begin{pmatrix} y \cos(x) \\ \sin(x) + 2z \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0, 1, 0) = (1 \cos(0))\mathbf{i} + (\sin(0) + 2 \times 0)\mathbf{j} + (2 \times 1)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1 – Derivada direcional

$$\begin{aligned} D_u f \Big|_{(0,1,0)} &= \left(\nabla f \Big|_{(0,1,0)} \cdot u \right) = (\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right) \\ &= 1 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Variação

$$df = \left(D_u f \Big|_{(0,1,0)} \right) ds = -\frac{2}{3} \times 0,1 = -\frac{2}{3} \frac{1}{10} = -\frac{2}{30} = -\frac{1}{15} \approx -0,067$$

Conteúdo

Variação em uma Direção

Diferenciais

Lista Mínima

Diferencial em Uma Dimensão

Quando x varia de x_0 para $x_0 + \Delta x$

A variação da função f é $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

A diferencial de f é $df = f'(x_0)\Delta x$

Diferencial em Uma Dimensão

Quando x varia de x_0 para $x_0 + dx$

A variação da função f é $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$

A diferencial de f é $df = f'(x_0)dx$

Diferencial em Duas Dimensão

Quando (x, y) varia de (x_0, y_0) para $(x_0 + dx, y_0 + dy)$

A variação da função f é $\Delta f = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0)$

A diferencial de f é $df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$

As diferenciais dx e dy são variáveis independentes

$$dx = x - x_0 \quad dy = y - y_0$$

Definição

Se movemos de (x_0, y_0) para um ponto próximo $(x_0 + dx, y_0 + dy)$

A Diferencial Total de f é

$$df = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy$$

Exemplo 2

Uma lata de formato cilíndrico foi projetada para ter um raio de 1 pol. e uma altura de 5 pol., mas o raio tem um erro de $dr = 0,03$ e a altura tem um erro de $dh = -0,1$.

Qual a variação resultante no volume da lata?

Exemplo 2 – Variação exata

$$\begin{aligned}\Delta V &= V(r_0 + dr, h_0 + dh) - V(r_0, h_0) \\&= V(1 + 0,03, 5 - 0,1) - V(1, 5) \\&= V(1,03, 4,9) - V(1, 5) \\&= \pi(1,03)^2 \times 4,9 - \pi 1^2 \times 5 \\&\approx 16,3313 - 15,7080 \\&= 0,6233\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Variação usando o diferencial

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx dV = V_r(r_0, h_0)dr + V_h(r_0, h_0)dh \\&= (2\pi rh) \Big|_{(r_0, h_0)} dr + (\pi r^2) \Big|_{(r_0, h_0)} dh \\&= (2\pi rh) \Big|_{(1,5)} (0,03) + (\pi r^2) \Big|_{(1,5)} (-0,1) \\&= (2\pi 1 \times 5) (0,03) - (\pi 1^2) (0,1) \\&= 0,3\pi - 0,1\pi \\&= 0,2\pi \\&\approx 0,6283\end{aligned}$$

Conteúdo

Variação em uma Direção

Diferenciais

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 14.6

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações