Funções de Várias Variáveis

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Funções

$f : A \to B$

- A domínio
- B contradomínio
- f relação que associa elementos do domínio a elementos do contradomínio
- Cada elemento do domínio deve estar associado a um único elemento do contradomínio
- A imagem é um subconjunto de B composto dos elementos que são imagem de algum elemento de A

Domínio

- Precisa ser dado a priori
- Geralmente é determinado pela aplicação
- Se nada for dito, assumimos o domínio "natural",
  ie, todos os valores onde podemos efetuar as contas

Imagem

- Subconjunto do contradomínio
- O contradomínio é definido a priori
- Pode ser difícil identificar a imagem de uma função
- Dada uma função $f\colon D \to C$
  y pertence a imagem de f, se existe $x \in D$ tal que

  $$y = f(x)$$

Nomenclatura – Curiosidade

Função real

$$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Função de várias variáveis

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Função vetorial ou paramétrica

$$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

Campo vetorial

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Conteúdo

Funções de Várias Variáveis

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = x + y$$

$$f(\vec{r}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} r_k^2}$$

Funções de Várias Variáveis

Suponha que D seja um conjunto de n-uplas de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Uma função a valores reais f em D é uma regra que associa um único número real

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

a cada elemento em D

O conjunto D é o domínio da função

O conjunto de valores de w assumidos por f é a imagem da função

O símbolo w é a variável dependente de f, e dizemos que f é função de n variáveis independentes x_1 a x_n

Também chamamos os x_j de variáveis de entrada da função e denominamos w a variável de saída da função

Intervalos

Subconjuntos contínuos de $\mathbb{R}$

Intervalo fechado

$$[0, 1] = \left\{x \in \mathbb{R} \;\Big/\; 0 \leq x \leq 1\right\}$$

Intervalo aberto

$$(-2, 2) = \left\{x \in \mathbb{R} \;\Big/\; -2 < x < 2\right\}$$

Aberto a esquerda e fechado a direita

$$(1, 5] = \left\{x \in \mathbb{R} \;\Big/\; 1 < x \leq 5\right\}$$

Interior e Fronteira de um Conjunto

Um ponto (x_0, y_0) em uma região (conjunto) R no plano xy é um ponto interior de R se é o centro de um disco de raio positivo que está inteiramente em R

Um ponto (x_0, y_0) é um ponto de fronteira de R se todo disco centrado em (x_0, y_0) contém ao mesmo tempo pontos que estão em R e fora de R

O ponto de fronteira não precisa pertencer a R

Interior e Fronteira de um Conjunto

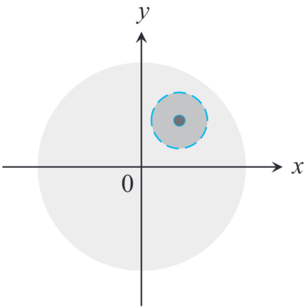
Os pontos interiores de uma região, como um conjunto, formam o interior da região

Os pontos de fronteira da região formam sua fronteira

Uma região é aberta se consiste apenas de pontos interiores

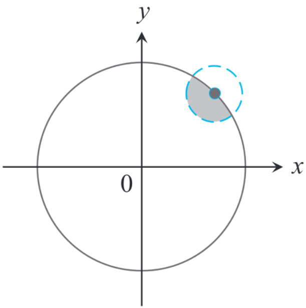
Uma região é fechada se contem todos os seus pontos de fronteira

Regiões no Plano



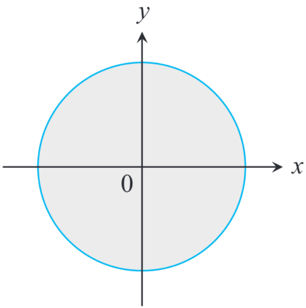
$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$

Disco unitário aberto. Todo ponto é um ponto interior.



$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Fronteira do disco unitário. (Círculo unitário.)



$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Disco unitário fechado. Contém todos os pontos de fronteira.

Regiões Limitadas

Uma região do plano é limitada se está dentro de um disco de raio fixo

Caso contrário ela é ilimitada

Exemplo 1

Descreva o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$

1. Qual a condição que os pontos do domínio deve satisfazer?
2. Que região é essa? Represente-a graficamente.
3. Qual o interior da região?
4. Qual a fronteira da região?
5. A região é aberta ou fechada?
6. A região é limitada?

Exemplo 1 – Solução

Condição que deve ser satisfeita para um ponto estar no domínio

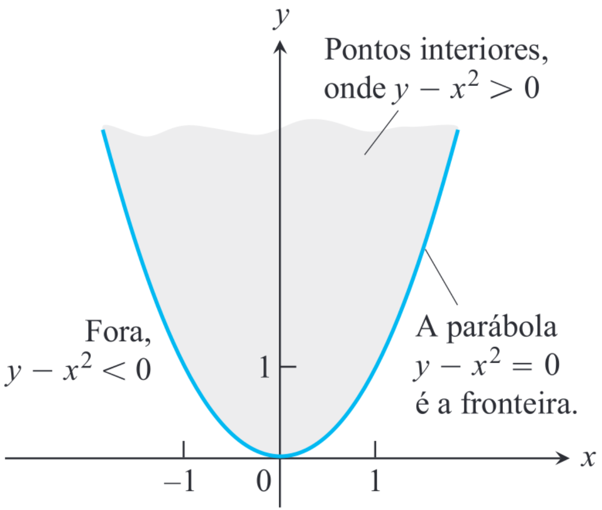
$$y - x^2 \geq 0$$

$$y \geq x^2$$

Domínio

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq x^2\right\}$$

Exemplo 1 – Representação Gráfica



Exemplo 1 – Solução

1. Interior da região
   $y > x^2$
2. Fronteira da região
   $y = x^2$
3. A região é aberta ou fechada?
   Fechada, pois $y = x^2$ pertence ao domínio
4. A região é limitada?
   Ilimitada, pois dado qualquer disco sempre teremos um ponto fora dele

Exemplo 2

Encontre e esboce o domínio da função

$$f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2 - 4\right)$$

Exemplo 2 – Solução

Condição

$$x^2 + y^2 - 4 > 0$$

$$x^2 + y^2 > 4$$

Pontos exteriores ao circulo centrado na origem e raio 2

Domínio

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \Big/ \ x^2 + y^2 > 4\right\}$$

Exemplo 3

Encontre e esboce o domínio da função $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\ln(y - 1)}$

Exemplo 3 – Solução

Condições para avaliar a função $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\ln(y - 1)}$

1. $x^2 - 4 \geq 0$
2. $\ln(y - 1) \neq 0$
3. $y - 1 > 0$

Exemplo 3 – Solução

Condição 1

$$x^2 - 4 \geq 0$$
$$x^2 \geq 4$$
$$|x| \geq 2$$
$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2$$

Condição 2

$$\ln(y-1) \neq 0$$
$$y - 1 \neq 1$$
$$y \neq 2$$

Condição 3

$$y - 1 > 0$$
$$y > 1$$

Exemplo 3 – Solução

Domínio

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\;/\;\; |x| \geq 2 \;\text{ e }\; y > 1 \;\text{ e }\; y \neq 2\right\}$$

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.1

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 1-2, 5-9

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações