Máximos e Mínimos em Regiões Fechadas

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

23 de agosto de 2025

Conteúdo

Região Fechada e Limitada

Fechada Contém todos os pontos de fronteira

Limitada Está dentro de um círculo centrado na origem

Função Contínua

Uma função contínua em uma região fechada e limitada possui um máximo e um mínimo absolutos (globais)

Encontrando os Extremos Absolutos

Encontrando os extremos absolutos de uma função f
em uma região fechada e limitada R

1. Encontrar os pontos críticos de f no interior de R
2. Encontrar os pontos onde f pode ter máximos ou mínimos na fronteira de R
3. Calcular o valor de f nos pontos encontrados
4. Verificar os valores máximo e mínimo que f assume

Conteúdo

Exemplo 1

Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

na região triangular limitada pelas retas $x = 0$, $y = 0$ e $y = 9 - x$

Exemplo 1 – Pontos críticos interiores

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2 + 2x + 2y - x^2 - y^2\right) = 2 - 2x$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2 + 2x + 2y - x^2 - y^2\right) = 2 - 2y$$

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 0 \\ 2 - 2x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= 0 \\ 2 - 2y &= 0 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

O ponto $(1, 1)$ está no interior da região R

Exemplo 1 – Valor da função

$$f(1,1) = \left(2 + 2x + 2y - x^2 - y^2\right)\Big|_{(1,1)} = 2 + 2 + 2 - 1 - 1 = 4$$

Exemplo 1 – Pontos na fronteira

Vamos tratar cada segmento da fronteira separadamente

1. $y = 0 \qquad 0 \leq x \leq 9$
2. $x = 0 \qquad 0 \leq y \leq 9$
3. $y = 9 - x \qquad 0 \leq x \leq 9$

Exemplo 1 – Primeiro segmento

Segmento: $y = 0\,,\ 0 \leq x \leq 9$

Função de uma variável, x, no intervalo fechado $0 \leq x \leq 9$

$$g(x) = f(x, 0) = \left(2 + 2x + 2y - x^2 - y^2\right)\Big|_{y=0} = 2 + 2x - x^2$$

Pontos críticos de g no interior do intervalo $[0, 9]$

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(2 + 2x - x^2\right)$$
$$= 2 - 2x$$

$$g'(x) = 0$$
$$2 - 2x = 0$$
$$x = 1$$

Exemplo 1 – Valores da função

Ponto crítico e extremos do intervalo $x = 0$, $x = 1$ e $x = 9$

Pontos no plano $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(9, 0)$

Valores da função

$$f(0, 0) = g(0) = \left(2 + 2x - x^2\right)\Big|_0 = 2$$

$$f(1, 0) = g(1) = \left(2 + 2x - x^2\right)\Big|_1 = 3$$

$$f(9, 0) = g(9) = \left(2 + 2x - x^2\right)\Big|_9 = 2 + 2 \times 9 - 9^2 = -61$$

Exemplo 1 – Segundo segmento

Segmento $x = 0\,,\ 0 \leq y \leq 9$

Função de uma variável, y, no intervalo fechado $0 \leq y \leq 9$

$$h(y) = f(0, y) = \left(2 + 2x + 2y - x^2 - y^2\right)\Big|_{x=0} = 2 + 2y - y^2$$

Pontos críticos de h no interior do intervalo $[0, 9]$

$$h'(y) = \frac{d}{dy}\left(2 + 2y - y^2\right)$$

$$= 2 - 2y$$

$$h'(y) = 0$$

$$2 - 2y = 0$$

$$y = 1$$

Exemplo 1 – Valores da função

Ponto crítico e extremos do intervalo $y = 0$, $y = 0$ e $y = 9$

Pontos no plano $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 9)$

Valores da função

$$f(0, 0) = 2 \qquad \text{já calculado}$$

$$f(0, 1) = h(1) = \left(2 + 2y - y^2\right)\Big|_1 = 3$$

$$f(0, 9) = h(9) = \left(2 + 2y - y^2\right)\Big|_9 = 2 + 2 \times 9 - 9^2 = -61$$

Exemplo 1 – Terceiro segmento

Segmento $y = 9 - x\,,\ 0 \leq x \leq 9$

Função de uma variável, x, no intervalo fechado $0 \leq y \leq 9$

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x, 9 - x) \\ &= 2 + 2x + 2(9 - x) - x^2 - (9 - x)^2 \\ &= 2 + 18 - 81 + 2x - 2x + 18x - x^2 - x^2 \\ &= -61 + 18x - 2x^2 \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Terceiro segmento

Pontos críticos de p no interior do intervalo $[0, 9]$

$$
\begin{aligned}
p'(x) &= \frac{d}{dx}\left(-61 + 18x - 2x^2\right) \\
&= 18 - 4x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p'(x) &= 0 \\
18 - 4x &= 0 \\
9 - 2x &= 0 \\
2x &= 9 \\
x &= \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Solução

Ponto crítico e extremos do intervalo $x = 0\,,\ x = \dfrac{9}{2}$ e $x = 9$

Para encontrar os pontos no plano usamos a relação $y = 9 - x$

Quando $x = 0\,, \qquad y = 9 - 0 = 9$

Quando $x = \dfrac{9}{2}\,, \qquad y = 9 - \dfrac{9}{2} = \dfrac{9}{2}$

Quando $x = 9\,, \qquad y = 9 - 9 = 0$

Pontos no plano $(0, 9)\,,\ \left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{9}{2}\right),\ (9, 0)$

Exemplo 1 – Valores da função

Já calculados

$$f(0,9) = -61$$

$$f(9,0) = -61$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right) &= p\left(\frac{9}{2}\right) \\ &= \left(-61 + 18x - 2x^2\right)\Big|_{9/2} \\ &= -61 + 18\frac{9}{2} - 2\left(\frac{9}{2}\right)^2 \\ &= \frac{-41}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

Máximo absoluto de f em R é 4 e ocorre no ponto $(1, 1)$

Mínimo absoluto de f em R é -61 e ocorre nos pontos $(9, 0)$ e $(0, 9)$

Exemplo 2

Encontre os máximos e mínimos absolutos da função

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$$

na região

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

Exemplo 2 – Pontos críticos interiores

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 2y^2 - x\right) = 2x - 1$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 2y^2 - x\right) = 4y$$

$$f_x(x, y) = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$f_y(x, y) = 0$$

$$4y = 0$$

$$y = 0$$

O ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ está no interior da região R

Exemplo 2 – Valor da função

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}, 0\right) &= \left(x^2 + 2y^2 - x\right)\Big|_{\left(\frac{1}{2},0\right)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times 0^2 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{2}{4} \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Fronteira

Escrevemos a fronteira

$$x^2 + y^2 = 1$$

Parte de cima

$$y_1(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad -1 \leq x \leq 1$$

Parte de baixo

$$y_2(x) = -\sqrt{1 - x^2} \qquad -1 \leq x \leq 1$$

Exemplo 2 – Fronteira

Na parte de cima da fronteira

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= f\left(x, y_1(x)\right) \\
&= \left(x^2 + 2y^2 - x\right)\Big|_{y=\sqrt{1-x^2}} \\
&= x^2 + 2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - x \\
&= x^2 + 2(1-x^2) - x \\
&= x^2 + 2 - 2x^2 - x \\
&= 2 - x - x^2
\end{aligned}
$$

Na parte de baixo da fronteira

$$
\begin{aligned}
g_2(x) &= f\left(x, y_2(x)\right) \\
&= \left(x^2 + 2y^2 - x\right)\Big|_{y=-\sqrt{1-x^2}} \\
&= x^2 + 2\left(-\sqrt{1-x^2}\right)^2 - x \\
&= x^2 + 2(1-x^2) - x \\
&= x^2 + 2 - 2x^2 - x \\
&= 2 - x - x^2 \;=\; g_1(x)
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Candidatos a máximos e mínimos na fronteira

Quando $x = -1$

$$y_1(-1) = \sqrt{1 - (-1)^2} = 0$$

$$y_2(-1) = -\sqrt{1 - (-1)^2} = 0$$

Quando $x = 1$

$$y_1(1) = \sqrt{1 - 1^2} = 0$$

$$y_2(1) = -\sqrt{1 - 1^2} = 0$$

Exemplo 2 – Pontos críticos no interior

$$g_1'(x) = \frac{d}{dx}\left(2 - x - x^2\right) = -1 - 2x$$

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= 0 \\ -1 - 2x &= 0 \\ 2x &= -1 \\ x &= \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1\left(\frac{-1}{2}\right) &= \sqrt{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1\left(\frac{-1}{2}\right) &= -\sqrt{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2} \\ &= -\sqrt{1 - \frac{1}{4}} \\ &= -\sqrt{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

Avaliando a função nos pontos

$$f(-1,0) = \left(x^2 + 2y^2 - x\right)\Big|_{(-1,0)} = 1 + 0 - (-1) = 2$$

$$f(1,0) = \left(x^2 + 2y^2 - x\right)\Big|_{(1,0)} = 1 + 0 - 1 = 0$$

Exemplo 2 – Solução

$$f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (x^2 + 2y^2 - x)\Big|_{\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + 2\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{9}{4}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (x^2 + 2y^2 - x)\Big|_{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + 2\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{9}{4}$$

Exemplo 2 – Solução

Máximo absoluto de f na região é $\dfrac{9}{4}$ e ocorre nos pontos $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Mínimo absoluto de f na região é $-\dfrac{1}{4}$ e ocorre no ponto $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.7

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 31, 34, 37, 38

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações