

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

- 1 [20] Considerando que a equação $xe^y + \sin(xy) + y - \ln(2) = 0$ define y como função de x encontre $\frac{dy}{dx}$.

Usando a fórmula para a diferenciação implícita

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

onde $F(x, y) = xe^y + \sin(xy) + y - \ln(2)$ temos

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [xe^y + \sin(xy) + y - \ln(2)] = e^y + y \cos(xy)$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [xe^y + \sin(xy) + y - \ln(2)] = xe^y + x \cos(xy) + 1$$

Assim

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^y + y \cos(xy)}{xe^y + x \cos(xy) + 1}$$

2 [25] Encontre a direção na qual a função $f(x, y) = x^2y + e^{xy} \operatorname{sen}(y)$ cresce mais rapidamente a partir do ponto $(1, 0)$. Qual a derivada nessa direção?

A direção de crescimento mais rápido é a direção do vetor gradiente

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [x^2y + e^{xy} \operatorname{sen}(y)] = 2xy + ye^{xy} \operatorname{sen}(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [x^2y + e^{xy} \operatorname{sen}(y)] = x^2 + xe^{xy} \operatorname{sen}(y) + e^{xy} \cos(y)$$

Avaliando as derivadas no ponto $(1, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = [2xy + ye^{xy} \operatorname{sen}(y)] \Big|_{(1,0)} = 2 \times 1 \times 0 + 0e^{1 \times 0} \operatorname{sen}(0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = [x^2 + xe^{xy} \operatorname{sen}(y) + e^{xy} \cos(y)] \Big|_{(1,0)} = 1^2 + 1e^{1 \times 0} \operatorname{sen}(0) + e^{1 \times 0} \cos(0) = 2$$

A direção de maior crescimento é

$$v = \nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Temos agora que calcular a derivada na direção do vetor gradiente. Primeiro encontramos o vetor unitário na direção de v

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D_u = \nabla f(1, 0) \cdot u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 2 \times 1 = 2$$

A derivada na direção de maior crescimento é 2.

3 [25] Encontre linearização da função $f(x, y) = \sqrt{y - x}$ no ponto $(1, 2)$.

A linearização de f no ponto $(1, 2)$ é a função

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= f(1, 2) + f_x(1, 2)(x - 1) + f_y(1, 2)(y - 2) \end{aligned}$$

Precisamos das derivadas parciais de f

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [\sqrt{y - x}] = \frac{\partial}{\partial x} [(y - x)^{1/2}] = \frac{1}{2}(y - x)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} (y - x) = \frac{-1}{2\sqrt{y - x}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [\sqrt{y - x}] = \frac{\partial}{\partial y} [(y - x)^{1/2}] = \frac{1}{2}(y - x)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial y} (y - x) = \frac{1}{2\sqrt{y - x}}$$

Avaliando f e suas derivadas no ponto $(1, 2)$

$$f(1, 2) = \sqrt{2 - 1} = \sqrt{1} = 1$$

$$f_x(1, 2) = \frac{-1}{2\sqrt{2 - 1}} = \frac{-1}{2}$$

$$f_y(1, 2) = \frac{1}{2\sqrt{2 - 1}} = \frac{1}{2}$$

Assim

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(1, 2) + f_x(1, 2)(x - 1) + f_y(1, 2)(y - 2) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 2) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{y}{2} - 1 \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4 [30] Considerando a função $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$.

- a) [5] Calcule o gradiente de f .
- b) [5] Calcule a hessiana de f .
- c) [10] Encontre todos os pontos críticos de f .
- d) [10] Classifique cada ponto crítico de f .

a)

Precisamos das derivadas parciais de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [x^4 + y^4 + 4xy] = 4x^3 + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [x^4 + y^4 + 4xy] = 4y^3 + 4x$$

então

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x^3 + 4y \\ 4y^3 + 4x \end{pmatrix}$$

b)

Precisamos das derivadas parciais de segunda ordem de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} [4x^3 + 4y] = 12x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [4y^3 + 4x] = 12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} [4y^3 + 4x] = 4$$

então

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 & 4 \\ 4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

c)

A função é um polinômio, então possui derivadas em todos os pontos do plano. Assim os pontos críticos são apenas os pontos onde as derivadas parciais são zero, $\nabla f = 0$

$$4x^3 + 4y = 0 \quad \text{e} \quad 4y^3 + 4x = 0$$

ou, simplificando,

$$x^3 + y = 0 \quad \text{e} \quad y^3 + x = 0$$

Isolando y na primeira equação, $y = -x^3$, e substituindo na segunda, temos

$$y^3 + x = 0$$

$$\begin{aligned}
 (-x^3)^3 + x &= 0 \\
 -x^9 + x &= 0 \\
 x^9 - x &= 0 \\
 x(x^8 - 1) &= 0
 \end{aligned}$$

As soluções dessa equação são $x = 0$, $x = 1$ ou $x = -1$. Se $x = 0$ temos $y = 0$, se $x = 1$ temos $y = -1$ e se $x = -1$ temos $y = 1$. Portanto, os pontos críticos são

$$(x_1, y_1) = (0, 0), \quad (x_2, y_2) = (1, -1) \quad \text{e} \quad (x_3, y_3) = (-1, 1)$$

d)

Para classificar os pontos críticos precisamos avaliar o discriminante nos pontos críticos.

Considerando o ponto $(x_1, y_1) = (0, 0)$

$$f_{xx}(0, 0) = 0$$

$$f_{yy}(0, 0) = 0$$

$$f_{xy}(0, 0) = 4$$

$$D_1 = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 0 \times 0 - 4^2 = -16 < 0$$

Portanto, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela.

Considerando o ponto $(x_2, y_2) = (1, -1)$

$$f_{xx}(1, -1) = 12$$

$$f_{yy}(1, -1) = 12$$

$$f_{xy}(1, -1) = 4$$

$$D_2 = f_{xx}(1, -1)f_{yy}(1, -1) - f_{xy}^2(1, -1) = 12 \times 12 - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

Portanto, o ponto $(1, -1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(1, -1) = 12 > 0$ o ponto é um ponto de mínimo local.

Considerando o ponto $(x_3, y_3) = (-1, 1)$

$$f_{xx}(-1, 1) = 12$$

$$f_{yy}(-1, 1) = 12$$

$$f_{xy}(-1, 1) = 4$$

$$D_3 = f_{xx}(-1, 1)f_{yy}(-1, 1) - f_{xy}^2(-1, 1) = 12 \times 12 - 4^2 = 144 - 16 = 128 > 0$$

Portanto, o ponto $(-1, 1)$ é um máximo ou mínimo local. Como $f_{xx}(-1, 1) = 12 > 0$ o ponto é um ponto de mínimo local.