Séries Numéricas – Teste da Razão

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Motivação – Analise da Série Geométrica

Considere a série geométrica com a e r positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Podemos comparar o crescimento de seus termos calculando a razão

$$\rho = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r$$

Se $\rho < 1$ a série converge

Se $\rho \geq 1$ a série diverge

Teste da Razão

Seja $\sum a_n$ tal que $a_n > 0$ para $n \geq N$ e

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Se $\rho < 1$	a série converge
Se $\rho > 1$ ou $\rho \to \infty$	a série diverge
Se $\rho = 1$	o teste é inconclusivo

Conteúdo

Exemplo 1

Analisar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Calculando os termos

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{\big(2(n+1)\big)!}{(n+1)!(n+1)!}$$

Exemplo 1

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\right)\left(\frac{n!n!}{(2n)!}\right) \\
&= \frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\
&= \frac{n!}{(n+1)n!}\,\frac{n!}{(n+1)n!}\,\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)}\,\frac{1}{(n+1)}\,(2n+2)(2n+1) \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} = \frac{4+{}^{2}/_{n}}{1+{}^{1}/_{n}} \to 4 > 1 \quad \text{série divergente}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

Exemplo 2

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)} \frac{\ln(n)}{3^{n+2}} = \frac{3\ln(n)}{\ln(n+1)}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\ln(n)}{\ln(n+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln(x)}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3(x+1)}{x} = 3 > 1$$

A série diverge

Exemplo 3

Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Exemplo 3

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \; \frac{n^n}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)\; n! \; n^n}{(n+1)^n \, (n+1) \; n!}$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{1 + {}^1\!/_n}\right)^n$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}$$

Exemplo 3

$$\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{-1}$$

$$= \left[\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{-1}$$

$$= e^{-1} \approx 0{,}3679 < 1$$

A série converge

Exemplo 4

Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$$

Exemplo 4

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \to \frac{1}{2} < 1$$

A série converge

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar as Seção 6.6 da Apostila

Exercícios: 3a-f, 4a-f

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações