Linearização

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

https://material-didatico.github.io/cfvv1

23 de agosto de 2025

Conteúdo

Aproximação Linear

Erro na Aproximação Linear

Lista Mínima

Plano Tangente a superfície $z = f(x, y)$

Sabemos que o plano tangente à superfície $z = f(x, y)$
de uma função diferenciável f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Rearranjando

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Aproximação Linear

Aproximação linear de uma função diferenciável de duas variáveis em torno do ponto (x_0, y_0)

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Exemplo 1

Encontre a linearização de

$$f(x, y) = x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3$$

no ponto $(3, 2)$

Exemplo 1 – Avaliando as derivadas parciais

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3\right) = 2x - y$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3\right) = -x + y$$

Exemplo 1 – Solução

Avaliando a função e as derivadas parciais no ponto $(3,2)$

$$f(3,2) = \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3\right)\bigg|_{(3,2)} = 3^2 - 3 \times 2 + \frac{2^2}{2} + 3 = 8$$

$$f_x(3,2) = (2x - y)\bigg|_{(3,2)} = 2 \times 3 - 2 = 4$$

$$f_y(3,2) = (-x + y)\bigg|_{(3,2)} = -3 + 2 = -1$$

Exemplo 1 – Aproximação linear

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= f(3, 2) + f_x(3, 2)(x - 3) + f_y(3, 2)(y - 2) \\ &= 8 + 4(x - 3) + (-1)(y - 2) \\ &= 4x - y - 2 \end{aligned}$$

Conteúdo

Aproximação Linear

Erro na Aproximação Linear

Lista Mínima

Erro na Aproximação Linear

Se f possui primeira e segunda derivadas parciais sobre um conjunto aberto contendo um retângulo R centrado em (x_0, y_0) e se M é qualquer limitante superior para os valores de $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ e $|f_{xy}|$ em R

$$|f_{xx}| \leq M \qquad |f_{yy}| \leq M \qquad |f_{xy}| \leq M \qquad \forall (x, y) \in R$$

então o erro $E(x, y)$ na linearização satisfaz

$$|E(x, y)| \leq \frac{M}{2}\left(|x - x_0| + |y - y_0|\right)^2$$

Exemplo 2

Encontre um limitante superior para o erro na aproximação

$$f(x, y) \approx L(x, y) = 4x - y - 2$$

no retângulo

$$R : |x - 3| \leq 0{,}1\,, \quad |y - 2| \leq 0{,}1$$

Exemplo 2 – Calculando os módulos das derivadas segundas

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(2x - y\right) \\
&= 2 \\
|f_{xx}(x, y)| &= 2
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Solução

$$
\begin{aligned}
f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(-x + y) \\
&= 1 \\
\left|f_{yy}(x, y)\right| &= 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Solução

$$
\begin{aligned}
f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2} + 3\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-x + y\right) \\
&= -1 \\
\left|f_{xy}(x, y)\right| &= 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Solução

Como o máximo das derivadas segundas em R é 2

podemos escolher $M = 2$, portanto

$$\begin{aligned} |E(x, y)| &\leq \frac{M}{2}\big(|x - x_0| + |y - y_0|\big)^2 \\ &= \frac{2}{2}\big(|x - 3| + |y - 2|\big)^2 \\ &= \big(|x - 3| + |y - 2|\big)^2 \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

Como

$$|x - 3| \leq 0{,}1 \qquad |y - 2| \leq 0{,}1$$

$$\begin{aligned} |E(x, y)| &\leq \big(|x - 3| + |y - 2|\big)^2 \\ &\leq \big(0{,}1 + 0{,}1\big)^2 \\ &= \big(0{,}2\big)^2 \\ &= 0{,}04 \end{aligned}$$

Conteúdo

Aproximação Linear

Erro na Aproximação Linear

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.6

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 20, 22, 24, 26, 30, 34, 36, 42, 48

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações