Números Complexos

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

Conteúdo

Motivação

Considere a equação

$$x^2 + 1 = 0$$

Manipulando formalmente temos a solução

$$x = \sqrt{-1}$$

Porém, $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Não existe $\sqrt{-1}$ dentro dos números reais

Unidade imaginária

Unidade imaginária

$$i^2 = -1 \qquad \text{ou} \qquad i = \sqrt{-1}$$

A Engenharia Elétrica usa $j^2 = -1$

Propriedades de Potências

$$a^p a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$\left(a^p\right)^q = a^{pq}$$

Potências de i

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2\, i \; = (-1)i = -i$$

$$i^4 = i^2\, i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4\, i \; = 1i = i$$

$$i^6 = i^4\, i^2 = 1(-1) = -1$$

$$i^7 = i^4\, i^3 = 1(-i) = -i$$

$$i^8 = i^4\, i^4 = 1 \times 1 = 1$$

$$i^0 = 1$$

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{1} = i$$

$$i^{75} = ?$$

Potências de i

Para uma potência n inteira

Dividimos n por 4

$$\begin{array}{c|c} n & 4 \\ \hline r & q \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 75 & 4 \\ \hline 3 & 18 \end{array}$$

Assim

$$n = 4q + r$$

$$75 = 4 \times 18 + 3$$

$$\begin{aligned} i^n &= i^{4q+r} \\ &= i^{4q} \; i^r \\ &= \left(i^4\right)^q \; i^r \\ &= (1)^q \; i^r \\ &= i^r \end{aligned}$$

$$i^{75} = i^3 = -i$$

Cuidado com raízes

Sabemos que

$$\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

Por exemplo

$$\sqrt{9}\,\sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$$

$$\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{-9}\,\sqrt{-4} = 3i \times 2i = 6i^2 = -6$$

$$\sqrt{(-9)(-4)} = \sqrt{36} = 6$$

Só é verdade para a e b positivos!

Exemplo 1

Simplifique as expressões

$$a = i^7$$

$$b = i^{57}$$

$$c = \frac{i^5 + i^{17}}{i^3}$$

Exemplo 1 – Solução

$$a = i^7 = i^4\, i^3 = i^3 = i^2 i = -i$$

$$b = i^{57} = i^{4\times 14}\, i^1 = i$$

$$c = \frac{i^5 + i^{16}}{i^3} = \frac{i^5}{i^3} + \frac{i^{16}}{i^3} = i^{5-3} + i^{16-3} = i^2 + i^{13} = -1 + i^{4\times 3+1} = -1 + i$$

Conteúdo

Números complexos

Conjunto dos Números Complexos

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + bi \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Parte real de z

$$\mathrm{Re}(z) = a$$

Parte imaginária de z

$$\mathrm{Im}(z) = b$$

Os números complexos com parte imaginária nula são os Reais

Igualdade entre números complexos

$z_1 = a + bi$ é igual a $z_2 = c + di$

se, e somente se,

$a = c$ e $b = d$

Soma e produto de números complexos

Soma e subtração

$$(a+bi)+(c+di) \;=\; a+bi+c+di \;=\; (a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di) \;=\; a+bi-c-di \;=\; (a-c)+(b-d)i$$

Produto

$$\begin{aligned}(a+bi)\times(c+di) &= a\times(c+di) \;+\; bi\times(c+di)\\ &= ac+adi+bci+bdi^2\\ &= ac+adi+bci-bd\\ &= (ac-bd) \;+\; (ad+bc)i\end{aligned}$$

Conjugado

O conjugado do número complexo

$$z = a + bi$$

é o número

$$\bar{z} = a - bi$$

Propriedades dos conjugados

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. se $\bar{z} = z$ então z é real
3. $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$

Divisão de números complexos

Divisão: um número q é a divisão de $z_1 = a + bi$ por $z_2 = c + di$ se

$$
\begin{aligned}
qz_2 &= z_1 \\
qz_2\bar{z}_2 &= z_1\bar{z}_2 \\
q(c^2 + d^2) &= (c + di)(a - bi) \\
&= ca - cbi + dai - dbi^2 \\
&= ca - cbi + dai + dbi \\
&= (ac + bd) + (ad - bc)i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{(ac + bd) + (ad - bc)i}{c^2 + d^2} \\
&= \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(ad - bc)}{c^2 + d^2}i
\end{aligned}
$$

Operações com os Números Complexos

Divisão de $z_1 = a + bi$ por $z_2 = c + di$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\bar{z}_2}{z_2\,\bar{z}_2} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(ad-bc)}{c^2+d^2}i$$

Corpo complexo

A soma e o produto nos complexos tem as mesmas propriedades dos reais

Por isso o conjunto dos complexos é chamado corpo

Exemplos de corpos: racionais, reais, complexos

Exemplo 2

Calcule

$$a = \big[(3+2i)+(4-5i)\big](1+i)$$

$$b = \big[(2+3i)(1-i)\big]\big[(1+2i)(2-i)\big]$$

$$c = \frac{3+4i}{2-i}$$

Exemplo 2 – Solução

$$
\begin{aligned}
a &= \big[(3+2i)+(4-5i)\big](1+i) \\
&= [7-3i](1+i) \\
&= 7+7i-3i-3i^2 \\
&= 7+7i-3i+3 \\
&= 10+4i
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Solução

$$
\begin{aligned}
b &= \big[(2+3i)(1-i)\big]\big[(1+2i)(2-i)\big] \\
&= \big[2-2i+3i-3i^2\big]\big[2-i+4i-2i^2\big] \\
&= [2-2i+3i+3][2-i+4i+2] \\
&= (5+i)(4+3i) \\
&= 20+15i+4i+3i^2 \\
&= 20+15i+4i-3 \\
&= 17+19i
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Solução

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{3+4i}{2-i} \\
&= \frac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\
&= \frac{6+3i+8i-4}{4+2i-2i+1} \\
&= \frac{2+11i}{5} \\
&= \frac{2}{5}+\frac{11}{5}i
\end{aligned}
$$

Conteúdo

Plano Complexo

$$z = x + yi \quad \in \mathbb{C}$$

$$(x, y) \quad \in \mathbb{R}^2$$

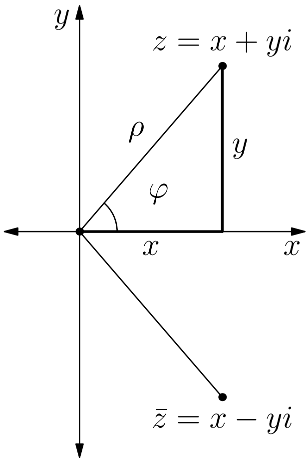
Parte real $\quad \mathrm{Re}(z) = x$

Parte imag $\quad \mathrm{Im}(z) = y$

Módulo $\quad \rho = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Argumento $\quad \varphi = \arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

Conjugado $\quad \bar{z} = x - yi$



Exemplo 3

Dado $z = \dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right) + \left(1+\sqrt{3}\right) i}{2+2i}$

calcule

a) a parte real de z

b) a parte imaginária de z

c) o módulo de z

d) o argumento de z

Exemplo 3 – Avaliando z

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i}{2+2i} \\
&= \frac{\left[\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i\right](2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} \\
&= \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)(2-2i)+\left(1+\sqrt{3}\right)(2i+2)}{2^2+2^2} \\
&= \frac{2-2i-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i+2i+2+2\sqrt{3}i+2\sqrt{3}}{8} \\
&= \frac{4+4\sqrt{3}i}{8} \;=\; \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Partes real e imaginária de z

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Parte real de z

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$$

Parte imaginária de z

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exemplo 3 – Módulo de z

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1+3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Exemplo 3 – Argumento de z

$$\varphi = \arg(z)$$

$$\operatorname{sen}(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{1}{2}$$

$$\arg(z) = 60^\circ = \frac{\pi}{3}\text{rad}$$

Conteúdo

Lista Mínima

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações