CFVVI – Exame Especial – Turma 2 28/07/2025

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!
7. O resultado final correto não significa nada se o procedimento estiver errado!

1 [25] Considerando que a equação $xe^y + ye^z + 2\ln(x) - 2 - 3\ln(2) = 0$ define z como função de x e y.

a) Calcule as derivadas $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

b) Encontre os valores de $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em $(1, \ln(2), \ln(3))$

c) Construa a aproximação linear da função $z(x, y)$ no ponto $(1, \ln(2))$

a) Considerando $z = z(x, y)$ e derivando por x os dois lados da equação temos

$$xe^y + ye^{z(x,y)} + 2\ln(x) = 2 + 3\ln(2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[xe^y + ye^{z(x,y)} + 2\ln(x)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[2 + 3\ln(2)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(xe^y) + \frac{\partial}{\partial x}\left(ye^{z(x,y)}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(2\ln(x)) = 0$$

$$e^y + ye^{z(x,y)}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{2}{x} = 0$$

$$ye^{z(x,y)}\frac{\partial z}{\partial x} = -e^y - \frac{2}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-1}{ye^{z(x,y)}}\left(e^y + \frac{2}{x}\right)$$

Derivando por y os dois lados da equação temos

$$xe^y + ye^{z(x,y)} + 2\ln(x) = 2 + 3\ln(2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[xe^y + ye^{z(x,y)} + 2\ln(x)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[2 + 3\ln(2)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(xe^y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(ye^{z(x,y)}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(2\ln(x)) = 0$$

$$x\frac{\partial e^y}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial y}e^{z(x,y)} + y\frac{\partial}{\partial y}e^{z(x,y)} + 0 = 0$$

$$xe^y + e^{z(x,y)} + ye^{z(x,y)}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$ye^{z(x,y)}\frac{\partial z}{\partial y} = -xe^y - e^{z(x,y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xe^y + e^{z(x,y)}}{ye^{z(x,y)}}$$

b) Avaliando as derivadas no ponto $(1, \ln(2), \ln(3))$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(1,\ln(2)) &= \left(\frac{-1}{ye^z}\left(e^y + \frac{2}{x}\right)\right)\Bigg|_{(1,\ln(2),\ln(3))} \\
&= \frac{-1}{\ln(2)e^{\ln(3)}}\left(e^{\ln(2)} + \frac{2}{1}\right) \\
&= \frac{-1}{3\ln(2)}(2+2) \\
&= \frac{-4}{3\ln(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y}(1,\ln(2)) &= \left(-\frac{xe^y + e^{z(x,y)}}{ye^{z(x,y)}}\right)\Bigg|_{(1,\ln(2),\ln(3))} \\
&= -\frac{1e^{\ln(2)} + e^{\ln(3)}}{\ln(2)e^{\ln(3)}} \\
&= -\frac{2+3}{\ln(2)3} \\
&= \frac{-5}{3\ln(2)}
\end{aligned}$$

c) A aproximação linear da função $z(x,y)$ no ponto $(x_0, y_0) = (1, \ln(2))$ é

$$\begin{aligned}
L(x,y) &= z(x_0,y_0) + (x - x_0)\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) \\
&= z(1,\ln(2)) + (x-1)\frac{\partial z}{\partial x}(1,\ln(2)) + (y - \ln(2))\frac{\partial z}{\partial y}(1,\ln(2)) \\
&= \ln(3) + (x-1)\frac{-4}{3\ln(2)} + (y-\ln(2))\frac{-5}{3\ln(2)} \\
&= \ln(3) - \frac{4}{3\ln(2)}(x-1) - \frac{5}{3\ln(2)}(y - \ln(2))
\end{aligned}$$

Não faz parte da resolução solicitada na prova, mas com o uso de uma calculadora podemos avaliar essa expressão, obtendo uma aproximação para $z(x,y)$ quando $(x,y) \approx (1, 0.69)$

$$\begin{aligned} z(x,y) &\approx L(x,y) \\ &= \ln(3) + \frac{4}{3\ln(2)} + \frac{5}{3} - \frac{4}{3\ln(2)}x - \frac{5}{3\ln(2)}y \\ &\approx 4{,}689 - 1{,}924x - 2{,}404y \end{aligned}$$

2 [25] Encontre os valores máximo e mínimo da função $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ restrita a região fechada limitada $x^2 + 2y^2 \leq 16$

Como a função é contínua e a região é fechada e limitada sabemos que f assume um valor máximo e um valor mínimo na região.

Temos que buscar os pontos críticos no interior e aplicar multiplicadores de Lagrange na fronteira.

Gradiente de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2 + y^2\right) = 4x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2 + y^2\right) = 2y$$

Pontos críticos: Impondo $\nabla f = 0$ temos o ponto interior

$$P_1 = (0,0)$$

Multiplicadores de Lagrange: Temos a restrição $g(x,y) = x^2 + 2y^2 \leq 16$ e seu gradiente é

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 2y^2\right) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 2y^2\right) = 4y$$

Precisamos resolver o sistema

$$4x = 2\lambda x$$
$$2y = 4\lambda y$$
$$x^2 + 2y^2 = 16$$

Que pode ser simplificado

$$2x = \lambda x$$
$$y = 2\lambda y$$
$$x^2 + 2y^2 = 16$$

Da primeira equação temos que $x = 0$ ou $\lambda = 2$. Se $x = 0$ a terceira equação se reduz a

$$x^2 + 2y^2 = 16$$
$$2y^2 = 16$$
$$y^2 = 8$$
$$y = \pm 2\sqrt{2}$$

Substituindo qualquer uma delas na segunda equação temos $\lambda = 0$. Encontramos o segundo e terceiro pontos

$$P_2 = \left(0, -2\sqrt{2}\right) \qquad P_3 = \left(0, 2\sqrt{2}\right)$$

Se $\lambda = 2$ a segunda equação se torna $y = 8y$ e, portanto, $y = 0$. Substituindo na terceira equação temos $x^2 = 16$, cujas soluções são $x = -4$ ou $x = 4$. Encontramos o quarto e quinto pontos

$$P_4 = (-4,0) \qquad P_5 = (4,0)$$

Avaliando a função nos pontos encontrados

$$f(0,0) = 2 \times 0^2 + 0^2 = 0$$
$$f\left(0, -2\sqrt{2}\right) = 2 \times 0^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2 = 8$$
$$f\left(0, 2\sqrt{2}\right) = 2 \times 0^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$$
$$f(-4,0) = 2 \times (-4)^2 + 0^2 = 32$$
$$f(4,0) = 2 \times 4^2 + 0^2 = 32$$

O valor mínimo de f é 0 e o valor máximo é 32

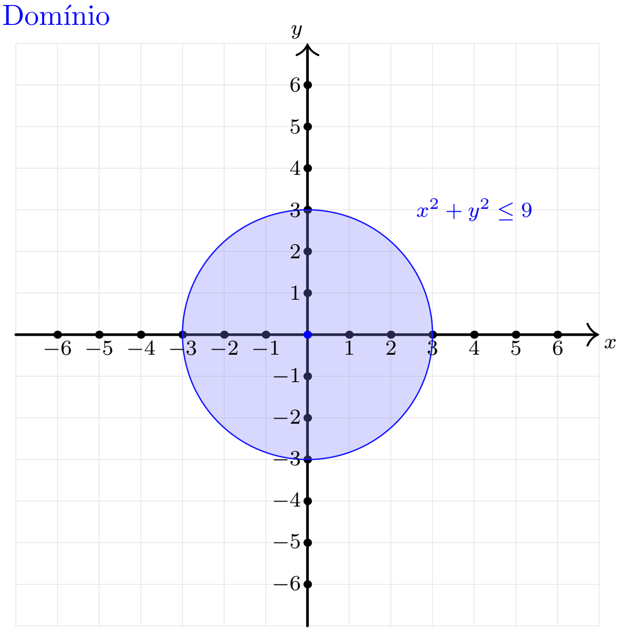
3 [25] Considerando a função $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} - 3$

a) Determine e esboce o domínio de f

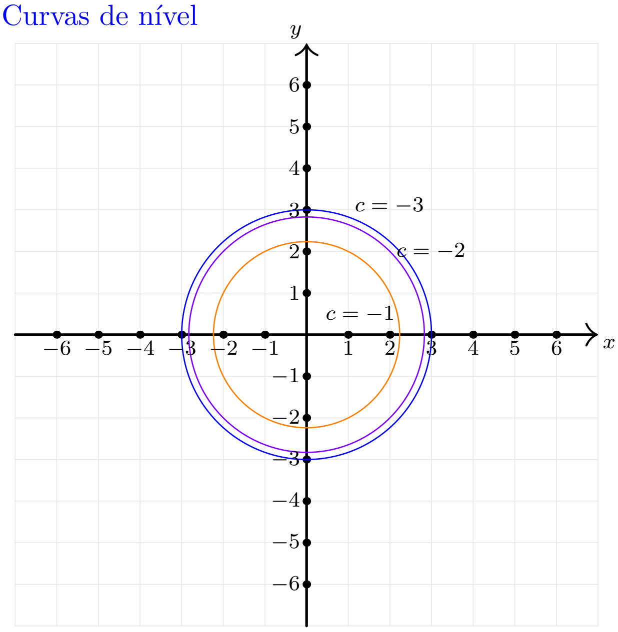
b) Determine as curvas de nível de f e esboce três delas

c) Calcule o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ ou mostre que ele não existe

Domínio



Curvas de nível



a) O domínio de f consiste dos pontos onde é possível avaliar a raiz quadrada, isto é, os pontos que satisfazem $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} 9 - x^2 - y^2 &\geq 0 \\ -x^2 - y^2 &\geq -9 \\ x^2 + y^2 &\leq 9 = 3^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; / \;\; x^2 + y^2 \leq 9\right\},$$

que corresponde a um disco de raio 3, centrado na origem.

b) As curvas de nível de f são compostas pelos pontos onde $f(x,y) = c$ para alguma constante c na imagem de f.
Para determinar a imagem de f observamos que $x^2 + y^2$ só pode assumir valores no intervalo $[0, 9]$. Portanto, $9 - x^2 - y^2$ está limitado ao mesmo intervalo. Consequentemente $\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ está em $[0, 3]$. Concluímos que os valores de f estão em $[-3, 0]$, isto é, $\mathrm{Im}(f) = [-3, 0]$
Para qualquer $c \in \mathrm{Im}(f) = [-3, 0]$, temos a curva de nível

$$\begin{aligned} f(x,y) &= c \\ \sqrt{9 - x^2 - y^2} - 3 &= c \\ \sqrt{9 - x^2 - y^2} &= c + 3 \\ 9 - x^2 - y^2 &= (c+3)^2 \\ -x^2 - y^2 &= (c+3)^2 - 9 \\ x^2 + y^2 &= 9 - (c+3)^2 \end{aligned}$$

Que corresponde a uma circunferência centrada na origem de raio

$$r = \sqrt{9 - (c+3)^2}$$

Escolhendo os valores $c = -3$, $c = -2$ e $c = -1$, temos as curvas de nível

$$\gamma_1\colon x^2+y^2=9-(-3+3)^2=9-0=9$$
$$\gamma_2\colon x^2+y^2=9-(-2+3)^2=9-1=8$$
$$\gamma_3\colon x^2+y^2=9-(-1+3)^2=9-4=5$$

c) Calculando o limite

$$L=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{9-x^2-y^2}-3}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{9-x^2-y^2}-3}{x^2+y^2}\times\frac{\sqrt{9-x^2-y^2}+3}{\sqrt{9-x^2-y^2}+3}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(\sqrt{9-x^2-y^2}\right)^2-3^2}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{9-x^2-y^2}+3\right)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{9-x^2-y^2-9}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{9-x^2-y^2}+3\right)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-\left(x^2+y^2\right)}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{9-x^2-y^2}+3\right)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-1}{\sqrt{9-x^2-y^2}+3}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{9-0^2-0^2}+3}$$

$$=\frac{-1}{3+3}=\frac{-1}{6}$$

4 [25] Dado $z = \left(\sqrt{3} + i\right)^4$, calcule

a) a parte real de z,

b) a parte imaginária de z,

c) o módulo de z,

d) o argumento de z

Convertendo $u = \sqrt{3} + i$ para a forma polar

$$\rho = |u| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\operatorname{sen}(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(u)}{|u|} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(u)}{|u|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi = \arg(u) = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

Assim

$$\begin{aligned} u &= \rho\left[\cos(\varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi)\right] \\ &= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} z &= u^3 \\ &= \rho^4\left[\cos(4\varphi) + i \operatorname{sen}(4\varphi)\right] \\ &= 2^4\left[\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{6}\right)\right] \\ &= 16\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 16\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\ &= -8 + 8\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Parte real de z

$$\operatorname{Re}(z) = -8$$

Parte imaginária de z

$$\operatorname{Im}(z) = 8\sqrt{3}$$

Módulo de z

$$|z| = 16$$

Argumento de z

$$\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$$