Derivação Implícita

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Derivação Implícita

Suponha que $F(x, y)$ seja diferenciável e que a equação

$$F(x, y) = 0$$

defina y como função de x, encontre $\dfrac{dy}{dx}$

Derivação Implícita – Justificativa

$$w(x) = F\big(x, y(x)\big) = 0$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$F_x \frac{dx}{dx} + F_y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$F_y \frac{dy}{dx} = -F_x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad \text{desde que } F_y \neq 0$$

Derivação Implícita – Fórmula

Suponha que $F(x, y)$ seja diferenciável e que a equação

$$F(x, y) = 0$$

defina y como função de x, $y = y(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

desde que $F_y \neq 0$

Exemplo 1

Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ se $y^2 - x^2 - \operatorname{sen}(xy) = 0$

Exemplo 1 – Solução

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 - x^2 - \operatorname{sen}(xy)\right) = 0 - 2x - y\cos(xy) = -2x - y\cos(xy)$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 - x^2 - \operatorname{sen}(xy)\right) = 2y - 0 - x\cos(xy) = 2y - x\cos(xy)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2x - y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)} = \frac{2x + y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)}$$

Derivação Implícita – Três Variáveis

Suponha que $F(x, y, z)$ seja diferenciável e que a equação

$$F(x, y, z) = 0$$

defina z como função de (x, y), isto é, $z = f(x, y)$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Derivação Implícita – Justificativa

$$F\big(x, y, z(x, y)\big) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[F\big(x, y, z(x, y)\big)\right] = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + 0 + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$F_x + F_z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$F_z\frac{\partial z}{\partial x} = -F_x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \text{desde que } F_z \neq 0$$

Derivação Implícita – Justificativa

$$
\begin{aligned}
F\big(x, y, z(x,y)\big) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial y}\left[F\big(x, y, z(x,y)\big)\right] &= 0 \\
\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\
0 + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_y + F_z\frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\
F_z\frac{\partial z}{\partial y} &= -F_y \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y}{F_z} \qquad \text{desde que } F_z \neq 0
\end{aligned}
$$

Derivação Implícita – Três Variáveis – Fórmulas

Suponha que $F(x, y, z)$ seja diferenciável e que a equação

$$F(x, y, z) = 0$$

defina z como função de (x, y), então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

desde que $F_z \neq 0$

Exemplo 3

Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se $x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos(y) = 0$

Exemplo 3 – Solução

$$F(x, y, z) = x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos(y)$$

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos(y)\right] = 3x^2 + 0 + ye^{xz}z + 0 = 3x^2 + yze^{xz}$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos(y)\right] = 0 + 0 + e^{xz} - z\,\mathrm{sen}(y) = e^{xz} - z\,\mathrm{sen}(y)$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos(y)\right] = 0+2z+ye^{xz}x+\cos(y) = 2z+yxe^{xz}+\cos(y)$$

Exemplo 3 – Solução

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + yze^{xz}}{2z + yxe^{xy} + \cos(y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{e^{xz} - z\,\mathrm{sen}(y)}{2z + yxe^{xy} + \cos(y)}$$

Conteúdo

Exemplo 4

Considerando que a equação

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + 1$$

defina z como função de x e y. Encontre, se possível, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ nos pontos $(1, 1, 1)$ e $(1, 3, 2)$

Note que $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 1$

Exemplo 4 – Solução

Sabemos que, se $F_z \neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Exemplo 4 – Solução

Calculando as derivadas parciais de $F(z, y, z)$

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 1\right) = 3x^2 - 3yz$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 1\right) = 3y^2 - 3xz$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 1\right) = 3z^2 - 3xy$$

Exemplo 4 – Solução

Avaliando as derivadas parciais no ponto $(1, 1, 1)$

$$F_z(1,1,1) \;=\; \left(3z^2 - 3xy\right)\Big|_{(1,1,1)} \;=\; 3 - 3 \;=\; 0$$

Não é possível calcular as derivadas neste ponto

Exemplo 4 – Solução

Avaliando as derivadas parciais no ponto $(1, 3, 2)$

$$F_z(1,1,2) \;=\; \left(3z^2 - 3xy\right)\Big|_{(1,3,2)} \;=\; 3 \times 2^2 - 3 \times 1 \times 3 \;=\; 12 - 9 \;=\; 3 \;\neq\; 0$$

É possível calcular as derivadas neste ponto

$$F_x(1,1,2) \;=\; \left(3x^2 - 3yz\right)\Big|_{(1,3,2)} \;=\; 3 \times 1^2 - 3 \times 3 \times 2 \;=\; 3 - 18 \;=\; -15$$

$$F_y(1,1,2) \;=\; \left(3y^2 - 3xz\right)\Big|_{(1,3,2)} \;=\; 3 \times 3^3 - 3 \times 1 \times 2 \;=\; 27 - 6 \;=\; 21$$

Exemplo 4 – Solução

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,3,2) = -\frac{F_x(1,3,2)}{F_z(1,3,2)} = -\frac{-15}{3} = 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1,2) = -\frac{F_y(1,3,2)}{F_z(1,3,2)} = -\frac{21}{3} = -7$$

Exemplo 5

Dada a equação $x^2y + y^2z + z^2x = 1$ encontre $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

Exemplo 5 – Solução

Derivando ambos os lados por x, tratando z como função $z = z(x, y)$

$$x^2y + y^2z + z^2x = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y + y^2z + z^2x\right) = \frac{\partial 1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2z) + \frac{\partial}{\partial x}(z^2x) = 0$$

$$2xy + y^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2zx\frac{\partial z}{\partial x} + z^2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(y^2 + 2zx\right) = -2xy - z^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy + z^2}{y^2 + 2zx}$$

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.4

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 26, 28, 30, 32

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações