# Propriedades do Vetor Gradiente

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

17 de agosto de 2025

# Conteúdo

# Vetor Gradiente

Se uma função $f(x, y)$ possui derivadas parciais, seu vetor gradiente é

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

# Vetor Gradiente 3D

Se uma função $f(x, y, z)$ possui derivadas parciais, seu vetor gradiente é

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

# Conteúdo

# Derivada Direcional

$$
\begin{aligned}
D_u f &= \nabla f \cdot \boldsymbol{u} \\
&= \|\nabla f\| \, \|\boldsymbol{u}\| \cos(\theta) \\
&= \|\nabla f\| \cos(\theta)
\end{aligned}
$$

# Derivada Direcional

1. A função aumenta mais rapidamente quando $\cos(\theta) = 1, \qquad \theta = 0$

   Direção do gradiente

2. A função descresse mais rapidamente quando $\cos(\theta) = -1, \qquad \theta = \pi$

   Direção oposta ao gradiente

3. Se $u$ for ortogonal a $\nabla f \neq 0$ ele aponta para uma direção de variação zero

# Gradientes e Crescimento da Função

1. Direção de maior crescimento da função $f$ no ponto $x, y$

$$v_M = \nabla f(x, y)$$

2. Direção de maior decrescimento da função $f$ no ponto $x, y$

$$v_m = -\nabla f(x, y)$$

3. Direção de variação nula da função $f$ no ponto $x, y$

$$\nabla f(x, y) \cdot v_o = 0$$

# Exemplo 1

Analisando a função $f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2}$ no ponto $(1, 1)$

Encontre as direções nas quais:

a) $f$ cresce mais rapidamente

b) $f$ decresce mais rapidamente

c) $f$ não varia

# Exemplo 1 – Solução

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) = y$$

# Exemplo 1 – Solução

Montando o gradiente

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

Avaliando o gradiente no ponto solicitado

$$\nabla f(1,1) = \left.\begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}\right|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Exemplo 1 – Solução

a) $f$ cresce mais rapidamente na direção do gradiente

$$v_M = \nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $f$ decresce mais rapidamente na direção oposta ao gradiente

$$v_m = -\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

# Exemplo 1 – Solução

c) $f$ não varia na direção, $v_o$, ortogonal ao gradiente

$$\nabla f(1,1) \cdot v_o = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$2v_1 + v_2 = 0$$

$$v_2 = -2v_1$$

As direções são $v_o = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $v_o = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

# Conteúdo

# Curvas de Nível

Curva de Nível é o conjunto de pontos $(x, y)$ onde

$$f(x, y) = c$$

para um valor constante $c$

Em alguns casos, é possível escrever essa região como uma curva paramétrica

$$x = g(t) \qquad y = h(t)$$

Vetorialmente temos

$$r(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$$

# Tangente de uma Curva de Nível

$$f\big(g(t), h(t)\big) = c$$

$$\frac{d}{dt} f\big(g(t), h(t)\big) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{dg}{dt} \\[2ex] \dfrac{dh}{dt} \end{pmatrix} = 0$$

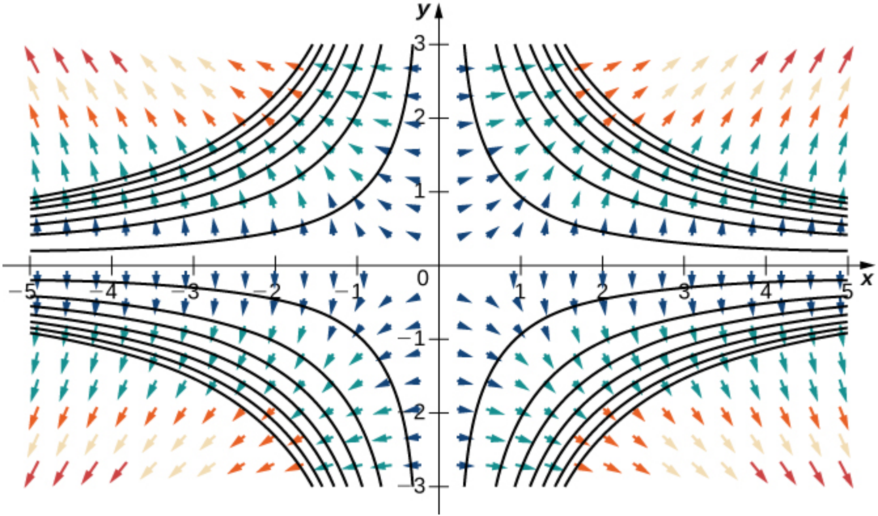
$$\nabla f \cdot \frac{dr}{dt} = 0$$

O gradiente é ortogonal ao vetor tangente à curva de nível

# Funções Diferenciáveis

Em todo ponto $(x_0, y_0)$ no domínio de uma função diferenciável $f(x, y)$,

o gradiente de $f$ é normal à curva de nível que passa por $(x_0, y_0)$


y
x
0
1
2
3
−1
−2
−3
−5
−4
4
5

# Exemplo 2

Dada a função $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$

a) Determine e esboce a curva de nível $f(x, y) = 4$

b) Calcule e esboce o gradiente de $f$ nos pontos $(0, 1)$, $(2, -1)$, $(2, 3)$ e $(4, 1)$

# Exemplo 2 – Solução

a) Determinando a curva de nível

$$f(x, y) = 4$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

Equação da circunferência centrada em $(2, 1)$ e raio 2

# Exemplo 2 – Solução

b) Calculando as derivadas parciais de $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-2)^2 + (y-1)^2\right] = 2(x-2)\frac{\partial}{\partial x}(x-2) = 2(x-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(x-2)^2 + (y-1)^2\right] = 2(y-1)\frac{\partial}{\partial y}(y-1) = 2(y-1)$$

Gradiente de $f$

$$\nabla f(x,y) = \nabla\left[(x-2)^2 + (y-1)^2\right] = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}$$

# Exemplo 2 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(0, 1)$ e $(2, -1)$

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 2(0-2) \\ 2(1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2,-1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}\Bigg|_{(2,-1)} = \begin{pmatrix} 2(2-2) \\ 2(-1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

# Exemplo 2 – Solução

Calculando o gradiente nos pontos $(2, 3)$ e $(4, 1)$

$$\nabla f(2,3) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}\Bigg|_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 2(2-2) \\ 2(2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(4,1) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}\Bigg|_{(4,1)} = \begin{pmatrix} 2(4-2) \\ 2(1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Exemplo 3

Encontre uma equação para a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

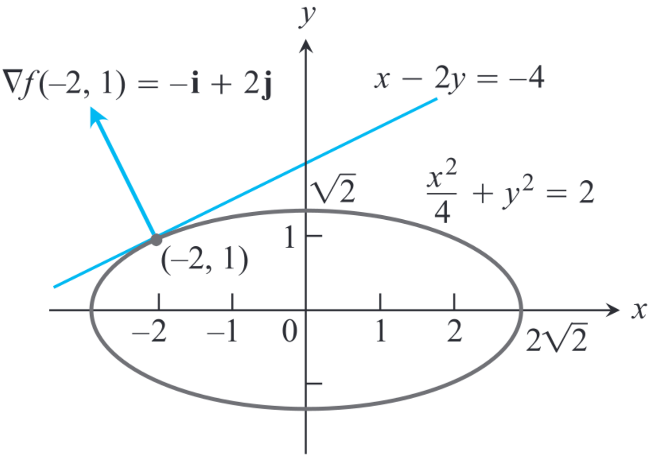
no ponto $(-2, 1)$

# Exemplo 3 – Solução

Encontre uma equação para a ta

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

no ponto $(-2, 1)$



# Exemplo 3 – Solução

Precisamos notar que a elipse é uma curva de nível da função

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$

Calculando as derivadas parciais de $f$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) = \frac{x}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) = 2y$$

# Exemplo 3 – Solução

Então o gradiente de $f$, no ponto $(-2, 1)$, é

$$\nabla f(-2,1) = \left.\begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ \\ 2y \end{pmatrix}\right|_{(-2,1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

# Exemplo 3 – Solução

A reta tangente é ortogonal ao vetor gradiente

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\nabla f(-2, 1) \cdot \begin{pmatrix} x - (-2) \\ y - 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + 2 \\ y - 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-(x + 2) + 2(y - 1) = 0$$

$$-x + 2y - 4 = 0$$

$$-x + 2y = 4$$

$$x = 2y - 4$$

# Conteúdo

# Propriedades Algébricas do Gradiente

1. Soma $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
2. Diferença $\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g$
3. Multiplicação por constante $\nabla(kf) = k\nabla f$
4. Produto $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
5. Quociente $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

# Exemplo 4

Dadas $f(x, y) = x^2 - 2y$ e $g(x, y) = xy^2$

a) calcule os gradientes de $f$ e $g$

b) calcule $\nabla(f - g)$

c) calcule $\nabla(fg)$

# Exemplo 4 – Solução

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 2y\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 2y\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(xy^2\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

# Exemplo 4 – Solução

$$\begin{aligned}\nabla(f-g) &= \nabla f - \nabla g \\ &= \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x - y^2 \\ -2 - 2xy \end{pmatrix}\end{aligned}$$

# Exemplo 4 – Solução

$$
\begin{aligned}
\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\
&= (x^2 - 2y)\begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + (xy^2)\begin{pmatrix} 2x \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x^2 - 2y)y^2 \\ (x^2 - 2y)2xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (xy^2)2x \\ (xy^2)2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^2y^2 - 2y^3 \\ 2x^3y - 4xy^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x^2y^2 \\ 2xy^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3x^2y^2 - 2y^3 \\ 2x^3y - 2xy^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

# Conteúdo

# Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.5

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 20, 22, 24, 26, 28, 29

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações