Usos da Séries de Taylor – Calculando Limites

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Avaliando Formas Indeterminadas

Calcular o limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} \qquad \text{indeterminação do tipo } \frac{0}{0}$$

Por l'Hôpital

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Avaliando Formas Indeterminadas

Solução alternativa usando Séries de Taylor

Sabemos que

$$\ln(\alpha + 1) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \cdots \qquad |\alpha| < 1$$

Substituindo $\alpha = x - 1$ temos

$$\ln(x) = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots \qquad |x - 1| < 1$$

Avaliando Formas Indeterminadas

Substituindo na função original

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{x-1}\left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots\right)$$

$$= 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(x-1)^3}{4} + \cdots$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(x-1)^3}{4} + \cdots\right) = 1$$

Conteúdo