

NOME _____

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [20]

a-b

Use **integral por partes** para provar que $\int_0^1 x^n e^x dx = e - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx$

Calculando a integral indefinida por partes $\int u dv = uv - \int v du$

Escolhendo

$$u = x^n \quad dv = e^x dx$$

temos

$$du = nx^{n-1} dx \quad v = e^x$$

então

$$\begin{aligned} \int x^n e^x dx &= x^n e^x - \int e^x nx^{n-1} dx \\ &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \end{aligned}$$

Calculando a integral definida

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n e^x dx &= x^n e^x \Big|_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx \\ &= (1^n e^1) - (0^n e^0) - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx \\ &= e - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx \end{aligned}$$

2 [20] Use **substituição simples** para calcular a integral $\int \sqrt{x} \sin(1 + \sqrt{x^3}) dx$

Temos que

$$\int \sqrt{x} \sin(1 + \sqrt{x^3}) dx = \int x^{1/2} \sin(1 + x^{3/2}) dx$$

Escolhemos a substituição

$$u = 1 + x^{3/2} \quad du = \frac{3}{2} x^{1/2} dx \quad x^{1/2} dx = \frac{2du}{3}$$

portanto

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x} \operatorname{sen}\left(1+\sqrt{x^3}\right) dx &= \int \operatorname{sen}\left(1+x^{3/2}\right) x^{1/2} dx \\&= \frac{2}{3} \int \operatorname{sen}(u) du \\&= \frac{2}{3}(-\cos(u))+c \\&= -\frac{2}{3} \cos\left(1+x^{3/2}\right)+c \\&= -\frac{2}{3} \cos\left(1+\sqrt{x^3}\right)+c\end{aligned}$$

3 [40] Escolha dois itens e calcule as primitivas das funções correspondentes

a) ☐ $f(x)=\cos ^5(x) \operatorname{sen}^2(x)$

b) ☐ $g(x)=\operatorname{tg}^3(x) \sec ^4(x)$

c) ☐ $h(x)=\frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}$

Marque sua escolha nas caixas, caso contrário, serão corrigidos dois itens aleatoriamente.

a)

$$\begin{aligned}F &= \int f(x) dx \\&= \int \cos ^5(x) \operatorname{sen}^2(x) dx \\&= \int\left(\cos ^2(x)\right)^2 \operatorname{sen}^2(x) \cos (x) dx \\&= \int\left(1-\operatorname{sen}^2(x)\right)^2 \operatorname{sen}^2(x) \cos (x) dx\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u=\operatorname{sen}(x) \quad du=\cos (x) dx$

$$\begin{aligned}F &= \int\left(1-u^2\right)^2 u^2 du \\&= \int\left(1-2 u^2+u^4\right) u^2 du \\&= \int u^2-2 u^4+u^6 du \\&= \frac{1}{3} u^3-\frac{2}{5} u^5+\frac{1}{7} u^7+c \\&= \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3(x)-\frac{2}{5} \operatorname{sen}^5(x)+\frac{1}{7} \operatorname{sen}^7(x)+c\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}G &= \int \operatorname{tg}^3(x) \sec ^4(x) dx \\&= \int \operatorname{tg}^3(x) \sec ^2(x) \sec ^2(x) dx\end{aligned}$$

$$= \int \operatorname{tg}^3(x) (\operatorname{tg}^2(x) + 1) \sec^2(x) dx$$

Fazendo a substituição $u = \operatorname{tg}(x)$ $du = \sec^2(x) dx$

$$\begin{aligned} G &= \int u^3(u^2 + 1) du \\ &= \int u^5 + u^3 du \\ &= \frac{u^6}{6} + \frac{u^4}{4} + c \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6(x) + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4(x) + c \end{aligned}$$

Solução alternativa

$$G_2 = \frac{1}{6 \cos^6(x)} - \frac{1}{4 \cos^4(x)} + c = \frac{\sec^6(x)}{6} - \frac{\sec^4(x)}{4} + c$$

c)

$$H = \int \frac{x^5}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

Fazendo a substituição $x = 2 \operatorname{sen}(\theta)$ $dx = 2 \cos(\theta) d\theta$

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{2^5 \operatorname{sen}^5(\theta)}{\sqrt{4 - 4 \operatorname{sen}^2(\theta)}} 2 \cos(\theta) d\theta \\ &= 2^5 \int \frac{\operatorname{sen}^5(\theta)}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)}} \cos(\theta) d\theta \\ &= 2^5 \int \frac{\operatorname{sen}^5(\theta)}{\cos(\theta)} \cos(\theta) d\theta \\ &= 2^5 \int \operatorname{sen}^5(\theta) d\theta \\ &= 2^5 \int (\operatorname{sen}^2(\theta))^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta \\ &= 2^5 \int (1 - \cos^2(\theta))^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = \cos(\theta)$ $du = -\operatorname{sen}(\theta) d\theta$

$$\begin{aligned} H &= -2^5 \int (1 - u^2)^2 du \\ &= -2^5 \int 1 - 2u^2 + u^4 du \\ &= 2^5 \int 2u^2 - u^4 - 1 du \\ &= 2^5 \left(\frac{2}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 - u \right) + c \\ &= 2^5 \left(\frac{2}{3} \cos^3(\theta) - \frac{1}{5} \cos^5(\theta) - \cos(\theta) \right) + c \end{aligned}$$

Para calcular $\cos(\theta)$ usamos que $\operatorname{sen}(\theta) = x/2$, portanto a hipotenusa é 2 e o cateto oposto é x

assim o cateto adjacente é $a = \sqrt{2^2 - x^2} = \sqrt{4 - x^2}$ e o cosseno é

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$$

Voltando para a integral

$$\begin{aligned} H &= 2^5 \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \right)^5 - \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \right] + c \\ &= 2^5 \left[\frac{2}{3 \cdot 2^3} (\sqrt{4 - x^2})^3 - \frac{1}{5 \cdot 2^5} (\sqrt{4 - x^2})^5 - \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2} \right] + c \\ &= \sqrt{4 - x^2} \left[\frac{2^3}{3} (\sqrt{4 - x^2})^2 - \frac{1}{5} (\sqrt{4 - x^2})^4 - 2^4 \right] + c \\ &= \sqrt{4 - x^2} \left[\frac{8}{3} (4 - x^2) - \frac{1}{5} (4 - x^2)^2 - 16 \right] + c \\ &= \sqrt{4 - x^2} \left[\frac{32 - 8x^2}{3} - \frac{16 - 8x^2 + x^4}{5} - 16 \right] + c \\ &= \sqrt{4 - x^2} \left[\frac{5 \cdot 32 - 5 \cdot 8x^2}{15} - \frac{3 \cdot 16 - 3 \cdot 8x^2 + 3x^4}{15} - \frac{16 \cdot 15}{15} \right] + c \\ &= \frac{\sqrt{4 - x^2}}{15} \left[16 \cdot 5 \cdot 2 - 16 \cdot 3 - 16 \cdot 5 \cdot 3 - 5 \cdot 8x^2 + 3 \cdot 8x^2 - 3x^4 \right] + c \\ &= \frac{\sqrt{4 - x^2}}{15} \left[-16 \cdot 5 - 16 \cdot 3 - 2 \cdot 8x^2 - 3x^4 \right] + c \\ &= -\frac{\sqrt{4 - x^2}}{15} \left[16 \cdot 8 + 2 \cdot 8x^2 + 3x^4 \right] + c \\ &= -\frac{\sqrt{4 - x^2}}{15} \left[128 + 16x^2 + 3x^4 \right] + c \end{aligned}$$

- 4 [20] Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno da reta $x = -2$, da região contida entre as curvas

$$f(x) = \frac{1}{5x - x^2} \quad y = 0 \quad x = 1 \quad x = 4$$

Volume por castas cilíndricas

$$V = \int_a^b 2\pi r(x)h(x)dx$$

$$a = 1$$

$$b = 4$$

$$r = x + 2$$

$$h = \frac{1}{5x - x^2}$$

portanto

$$V = 2\pi \int_1^4 \frac{x+2}{5x-x^2} dx$$

Calculando a integral indefinida

$$F = \int \frac{x+2}{5x-x^2} dx = \int \frac{x+2}{x(5-x)} dx$$

Por frações parciais temos

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x(5-x)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{5-x} \\ x+2 &= A(5-x) + Bx \\ &= (B-A)x + 5A \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes

$$[AB]B - A = 1,5A = 2$$

obtemos os valores $A = \frac{2}{5}$ e $B = \frac{7}{5}$ portanto

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{2}{5x} + \frac{7}{5(5-x)} dx \\ &= \frac{2}{5} \ln(x) - \frac{7}{5} \ln(5-x) + c \end{aligned}$$

Voltando ao volume temos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi F(x) \Big|_1^4 \\ &= 2\pi \left[\frac{2}{5} \ln(x) - \frac{7}{5} \ln(5-x) \right] \Big|_1^4 \\ &= 2\pi \left[\left(\frac{2}{5} \ln(4) - \frac{7}{5} \ln(5-4) \right) - \left(\frac{2}{5} \ln(1) - \frac{7}{5} \ln(5-1) \right) \right] \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{5} \ln(4) + \frac{7}{5} \ln(4) \right) \\ &= 2\pi \frac{9}{5} \ln(4) \\ &= \frac{18\pi}{5} \ln(4) \end{aligned}$$