

Analiza utjecaja parametara sustava na stabilnost

Pod parametrima sustava automatskog upravljanja podrazumijevaju se vremenske konstante, koeficijenti pojačanja pojedinih elemenata, koeficijenti pojačanja povratnih veza, koeficijenti karakterističnih jednadžbi i sl. Pri projektiranju sustava upravljanja nameće se zadatak određivanja područja promjene iznosa pojedinih parametara u kojem će sustav biti stabilan, tj. *područje stabilnosti sustava*.

Ako sustav sadrži n parametara koji se mogu mijenjati, razmatra se n -dimenijsko područje stabilnosti. Svaka točka toga područja određena je karakterističnom jednadžbom, kod koje su parametri (koeficijenti) zamrznuti na određenim iznosima. Promjenom iznosa bilo kojeg parametra sustava mijenjaju se i iznosi koeficijenata karakteristične jednadžbe, tj. dolazi do promjene položaja korijena u ravnini korijena, pa sustav može prijeti iz *područja stabilnosti u područje nestabilnosti sustava*.

Primjenom kriterija stabilnosti može se samo zaključiti o stabilnosti sustava pri zadanim iznosima parametara. Također se mogu odrediti granični iznosi nekih parametara, npr. koeficijenata pojačanja sustava i vremena kašnjenja; ali vrlo je složena analiza utjecaja promjene različitih parametara sustava na stabilnost. Zahvaljujući istraživanjima tijekom osamdesetih i devedesetih godina prošlog stoljeća, kao i najnovijim dostignućima teorije stabilnosti sustava, došlo se do značajnih rezultata na polju robusne stabilnosti [39], [93], [108], [43], [62]. Polinomski pristup analizi robusne stabilnosti V. Karitonova omogućuje relativno jednostavno ispitivanje stabilnosti linearnih sustava pri promjeni parametara karakteristične jednadžbe zatvorenog kruga, kada se parametri mijenjaju unutar poznatih granica. Za određivanje stabilnosti sustava kod kojeg se mijenjaju parametri razrađeno je nekoliko postupaka, od kojih ćemo navesti konvencionalne postupke, kao što je:

1. postupak analize promjene položaja korijena karakteristične jednadžbe zatvorenog kruga u kompleksnoj s ravnini određivanjem *krivulje mjesto korijena* - KMK [48], [165],
2. postupak određivanja područja stabilnosti u prostoru parametara sustava, odnosno koeficijenata karakteristične jednadžbe - *D-rastavljanje* [122].

U novije vrijeme razrađeni su postupci analize robusne stabilnosti, od kojih se navode:

3. postupak analize robusne stabilnosti - *primjenom teorema malog pojačanja* [43],
4. postupak analize robusne stabilnosti - *polinomski pristup Karitonova* [93].

Prva dva postupka ograničena su u mogućnostima analize ovisno o promjeni jednog (KMK Evansa) ili najviše dva parametra (D-rastavljanje ili KMK D. Mitrovića¹⁴²). Primjenom teorema malog pojačanja omogućena je analiza robusne stabilnosti sustava kod kojih se obično mijenja samo jedan parametar, za razliku od polinomskog pristupa V. Karitonova

¹⁴² Mitrovićeva metoda omogućuje analizu ovisno o dva promjenjiva parametra, [118], [119].

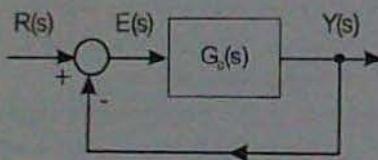
kojim je omogućena analiza robusne stabilnosti za bilo koji broj promjenjivih parametara karakterističnog polinoma zatvorenog kruga.

6.1 Postupak krivulje mesta korijena

Pod krivuljom mesta korijena (hodografom korijena) podrazumijeva se skup točaka kroz koje prolaze korjeni karakteristične jednadžbe zatvorenog kruga (polovi zatvorenog kruga) u kompleksnoj s-ravnini pri promjeni jednog od parametara karakteristične jednadžbe zatvorenog kruga od 0 do ∞ . Frekvenčni postupci analize stabilnosti suzavaju područje od interesa sa kompleksne s-ravnine na $j\omega$ osi. Time projektant gubi mogućnost kontrole nad frekvenčnim i vremenskim pokazateljima kvalitete, jer razmatra samo promjene po imaginarnoj osi. Walter Evans je 1948 godine predložio [48] da se prati ponašanje korijena karakterističnog polinoma zatvorenog kruga ovisno o promjeni jednog parametra u čitavoj kompleksnoj s-ravnini, a ne samo po njenoj imaginarnoj $j\omega$ osi. Rad F. Teodorčika [165], manje je poznat, no pojavio se iste godine kao i rad Evansa. Prednost takvog pristupa je u tome što se poznavanjem položaja polova/nula u kompleksnoj s-ravnini može odrediti ponašanje sustava u frekvenčnoj i vremenskoj domeni.

Krivulja mesta korijena koristi se za rješavanje zadataka analize stabilnosti, ocjene kvalitete prejelaznog procesa i sinteze sustava automatskog upravljanja. Kao slobodni (promjenjivi) parametar može se odabratiti bilo koji parametar karakteristične jednadžbe zatvorenog sustava. U većini slučajeva odabire se vremenska konstanta pojedine dinamičke komponente ili, što je češći slučaj, koeficijent pojačanja otvorenog sustava.

Primjer 6.1 Za sustav prikazan blok shemom na slici 6.1, nacrtati će se KMK ovisno o promjeni pojačanja otvorenog kruga.



Slika 6.1: Blok-shema sustava upravljanja

Rješenje: Funkcija prijenosa otvorenog kruga je:

$$G_0(s) = K \frac{B(s)}{A(s)} ; \quad n \geq m$$

gdje je n – red polinoma $A(s)$ i m – red polinoma $B(s)$. Funkcija prijenosa zatvorenog kruga je:

$$G_{cl}(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{K \frac{B(s)}{A(s)}}{1 + K \frac{B(s)}{A(s)}} = \frac{KB(s)}{A(s) + KB(s)}$$

gdje je karakteristična jednadžba zatvorenog kruga $\alpha_{cl}(s) = A(s) + KB(s) = 0$. Ako se pojačanje otvorenog kruga K mijenja od 0 do ∞ tada iz gornje relacije slijedi da će krivulja mesta korijena zatvorenog kruga započeti gibanje s polova otvorenog kruga kada je $K = 0$ (korijeni polinoma $A(s)$) i završiti gibanje u nulama otvorenog kruga kada je $K = \infty$.

(korijeni polinoma $B(s)$). Kako svaka racionalna funkcija po kompleksnoj varijabli ima isti broj polova i nula, slijedit će da, preostalih $n - m$ grana KMK teži ∞ duž asymptota kako $K \rightarrow \infty$. Za konkretnu funkciju prijenosa:

$$G_0(s) = K \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K}{s(s+a)}, \quad a > 0 \quad (6.1)$$

će karakteristična jednadžba zatvorenog kruga biti:

$$\alpha_{cl}(s) = 1 + G_0(s) = 1 + \frac{K}{s(s+a)} = 0$$

odakle slijedi:

$$\frac{K}{s(s+a)} = -1$$

odnosno:

$$\alpha_{cl}(s) = s^2 + as + K = 0.$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su:

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - K}$$

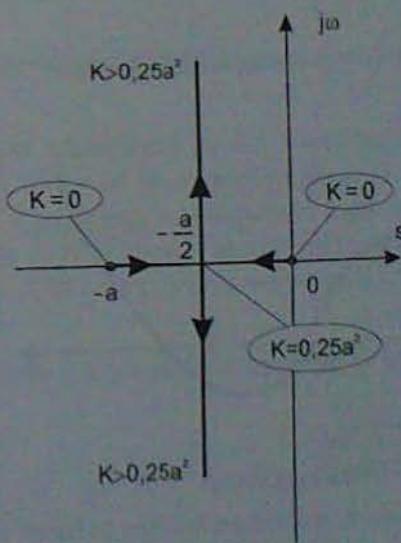
Ako se ograničimo samo na pozitivne promjene pojačanja $0 \leq K \leq \infty$, tada će se za slučaj:

$$0 \leq K \leq \frac{a^2}{4} \text{ dobiti realni polovi } -a \leq s \leq 0$$

dok će se za:

$$K > \frac{a^2}{4} \text{ dobiti konjugirano kompleksni polovi}$$

KMK je dana na slici 6.2. Kao što vidimo, budući da je $n = 2$ te $m = 0, n - m = 2$ grana KMK težit će u ∞ kako $K \rightarrow \infty$.



Slika 6.2: Krivulja mesta korijena

Neka svojstva KMK ovog jednostavnog primjera mogu se poopćiti:

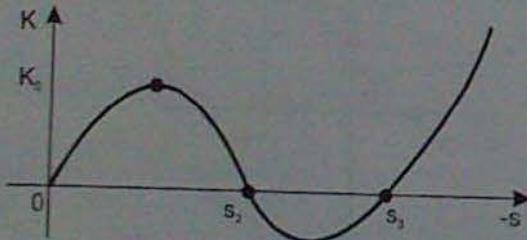
- Broj grana krivulje mesta korijena jednak je (n) stupnju karakteristične jednadžbe razmatranog sustava,
- KMK je simetrična u odnosu na realnu os, kompleksni dijelovi trajektorija korijena uviđaju se konjugirano-kompleksni,
- KMK zapečeće na polovima otvorenog kruga (za $K = 0$),
- Ako funkcija prijenosa otvorenog sustava ima m nula i n polova ($n \geq m$), tada za $K \rightarrow \infty$, m grana krivulje mesta korijena završava u m konačnih nula funkcije prijenosa otvorenog kruga, a njih $n - m$ teži u beskonačnost uzduž asimptota,
- KMK napušta realnu os u točkama u kojima je K na ekstremu za realne s . Ove točke moguće je dobiti iz uvjeta

$$\frac{dK}{ds} = \frac{d\left(-\frac{A(s)}{B(s)}\right)}{ds} = 0.$$

Iz karakteristične jednadžbe zatvorenog sustava proizlazi jednadžba:

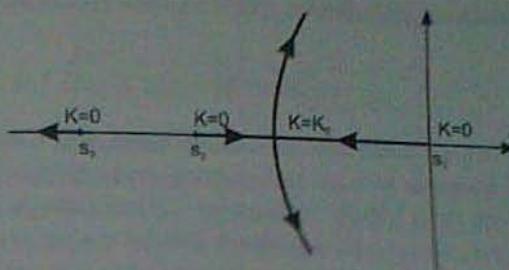
$$K = -\frac{A(s)}{B(s)} \quad (6.2)$$

kojom se može odrediti graf $K = f(-s)$, na temelju kojeg se određuju realni dijelovi krivulje mesta korijena.



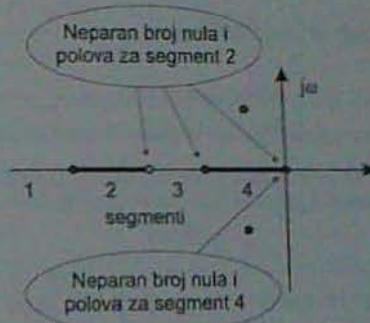
Slika 6.3: Grafički prikaz $K = f(-s)$

Na primjer, za grafički prikaz $K = f(-s)$ slika 6.3, za $K = 0$, realni korijeni su $s_1 = 0$; s_2 i s_3 . S porastom koeficijenta pojačanja do iznosa $K = K_0$ dolazi do približavanja korijena s_1 i s_2 . U točki $K = K_0$ korijeni s_1 i s_2 postaju kompleksni, a korijen s_3 raste od s_3 do ∞ (slika 6.4).



Slika 6.4: KMK na realnoj osi

Jednostavno pravilo za određivanje KMK na realnoj osi je sljedeće: *KMK će biti na onom segmentu realne osi (za $K > 0$) za koji je broj realnih nula i polova otvorenog kruga na desno od segmenta neparan* (slika 6.5).



Slika 6.5: KMK na realnoj osi po segmentima

Kao što se vidi na segmentima br. 1 i 3 neće biti KMK zbog toga što je broj realnih nula i polova na desno od tih segmenta paran. KMK će biti na realnoj osi samo na segmentima 2 i 4 jer je broj realnih polova i nula na desno od tih segmenta neparan. Za slučaj kada je $K < 0$, pravilo se mijenja i postaje: *KMK će biti na onom segmentu realne osi (za $K < 0$) za koji je broj realnih nula i polova otvorenog kruga na desno od segmenta paran*.

6. Uvjet za amplitudu i uvjet za fazu dobije se iz karakteristične jednadžbe zatvorenog kruga:

$$1 + G_0(s) = 1 + K \frac{B(s)}{A(s)} = 0 \quad (6.3)$$

Jednadžba (6.3) može se napisati po svojem modulu (apsolutnoj vrijednosti) - *uvjet za amplitudu*:

$$|G_0(s)| = 1 \Rightarrow K \frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = 1 \quad (6.4)$$

kao i argumenta (fazi) - ujet za fizi.

$$\sum_{i=1}^m \varphi_{z_i} - \sum_{i=1}^n \varphi_{p_i} = \pm 180^\circ (2q + 1); \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

gdje q predstavlja broj konačnih nula zatvorenog kruga, koji u općem slučaju ne mora biti isti kao i broj konačnih nula otvorenog kruga (m). Korijeni KMK moraju zadovoljiti obje jednadžbe (6.4) i (6.5)! Jednadžbu (6.4) moguće je zadovoljiti odgovarajućim izborom K . No, samo uzduž određenih krivulja u s ravnini bit će moguće naći s iznose s kojima će (6.5) biti zadovoljena. Nekada su se u tu svrhu koristile spirule¹⁴³ [36], no danas se KMK vrlo jednostavno može dobiti primjenom programskih paketa kao što je npr. Matlab (Control Toolbox).

7. Kompleksni dijelovi krivulje mesta korijena mogu se odrediti uvrštenjem u (6.2) $s = -\sigma + j\omega$ ili $s = -\sigma - j\omega$:

$$K = -\frac{A(-\sigma + j\omega)}{B(-\sigma + j\omega)} = K_1(\sigma, \omega) + jK_2(\sigma, \omega) \quad (6.6)$$

Seduci da je K realan broj, iz (6.6) dobivamo:

$$\begin{aligned} K_1(\sigma, \omega) &= K \\ K_2(\sigma, \omega) &= 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Iz jednadžbi (6.7) dobije se jednadžba geometrijskog mesta korijena:

$$\omega = f(\sigma) \quad (6.8)$$

8. Asimptote kojima se približavaju $n - m$ grana KMK koje teže u beskonačnost, sijeku se na realnoj osi u točki s apscisom¹⁴⁴.

$$x_0 = \frac{(\text{suma iznosa nula od } G_0) - (\text{suma iznosa polova od } G_0)}{(\text{broj polova}) - (\text{broj nula})} \quad (6.9)$$

Ako se funkcija prijenosa otvorenog sustava prikaže u obliku:

$$G_0(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

budući

$$x_0 = \frac{-(a_{n-1} - b_{m-1})}{n - m} = \frac{b_{m-1} - a_{n-1}}{n - m} \quad (6.10)$$

Smjerovi asimptota prema pozitivnoj realnoj poluosu određuju se izrazom za $K > 0$:

$$\Theta_\nu = \frac{\pm 180^\circ (2q + 1)}{n - m}, \quad q = 0, 1, \dots, n - m - 1 \quad (6.11)$$

odnosno za $K < 0$:

$$\Theta_\nu = \frac{\pm 360^\circ q}{n - m}, \quad q = 0, 1, \dots, n - m - 1$$

¹⁴³Nomogramsko pomagalo za crtanje KMK.

¹⁴⁴Centre gravitacije nakupine polova i nula otvorenog kruga.

9. Točke presjeka trajektorija s imaginarnom osi određuju se izrazima:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[1 + G_0(j\omega)] &= f_1(K, \omega) = 0 \\ \operatorname{Im}[1 + G_0(j\omega)] &= f_2(K, \omega) = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

ili primjenom Routhovog kriterija.

10. Ako je u karakterističnoj jednadžbi (6.3) $n - m \geq 2$, zbroj iznosa polova je konstantna veličina, tj. nije ovisan o iznosu pojačanja K , pa ako jedan dio trajektorija korijena pri porastu K kreće nadesno, drugi će dio krenuti nalijevo u s ravnini.
11. Kada funkcija $G_0(s)$ ima pol u koordinatnom počeku, slobodni član karakteristične jednadžbe zatvorenog sustava proporcionalan je s pojačanjem K .
12. Točke (pojačanja K_{kr}) u kojima KMK prelazi imaginarnu os mogu se dobiti primjenom Routhovog kriterija stabilnosti.

Primjer 6.2 Funkcija prijenosa otvorenog kruga je:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)(s-1+j1)(s-1-j1)}{s(s+5)(s+2)^2(s+1+j1)(s+1-j1)} = \frac{KB(s)}{A(s)} \quad (6.13)$$

Polozi i nule otvorenog kruga su poznati i nepromjenjivi, dok se koeficijent K može mijenjati. Postavlja se pitanje kako promjena K utječe na stabilitet sustava zatvorenog jediničnom povratnom vezom?

Rješenje: Karakteristična jednadžba zatvorenog kruga je dana sa:

$$\alpha_d(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{KB(s)}{A(s)} = A(s) + KB(s) = 0 \quad (6.14)$$

Korijeni ove jednadžbe su polozi zatvorenog kruga i oni su odgovorni za stabilitet zatvorenog sustava. Iz karakteristične jednadžbe (6.14) očigledno je da će položaj polozi zatvorenog kruga ovisiti o položaju polozi otvorenog kruga (iz $A(s) = 0$), poziciji nula otvorenog kruga (iz $B(s) = 0$), te iznosu pojačanja K . Kako se K mijenja, položaj polozi zatvorenog kruga će se također mijenjati. Za sustav sa n polozi otvorenog kruga (6 u našem primjeru), postojati će n polozi zatvorenog kruga. Krivulja mesta korijena prikazuje kako se mijenja položaj polozi zatvorenog kruga kada se K mijenja od $K = 0$ do $+\infty$ ili $-\infty$. Uobičajeno je da se crtaju odvojeno KMK za pozitivne i za negativne iznose K . Polozi zatvorenog kruga prolaze svim onim točkama kompleksne ravnine za koje vrijedi jednadžba (6.14). Prema tome, točka $s = s_1$ će biti pol zatvorenog kruga ako i samo ako vrijedi sljedeća jednadžba:

$$\alpha_{d1}(s_1) = 1 + \frac{KB(s_1)}{A(s_1)} = 0 \Rightarrow \frac{KB(s_1)}{A(s_1)} = -1 \quad (6.15)$$

Budući da je jednadžba (6.15) kompleksna jednadžba, ona se može prikazati svojim amplitudnim i faznim dijelom.

Jednadžba (uvjet) amplitude:

$$|G(s_1)H(s_1)| = \left| \frac{KB(s_1)}{A(s_1)} \right| = 1 \quad (6.16)$$

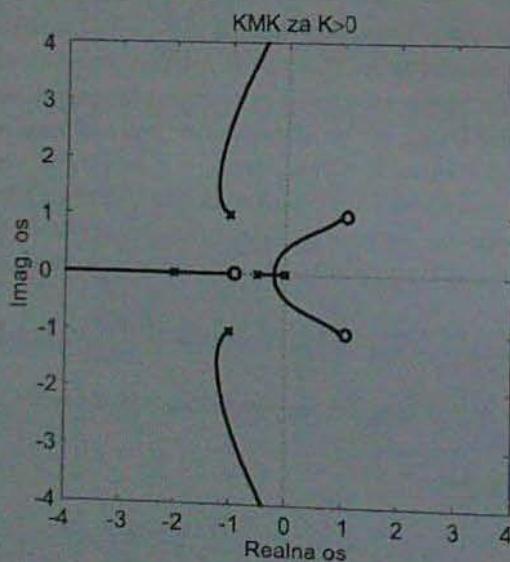
Jednadžba (uvjet) faze:

$$\angle K + \angle B(s_1) - \angle A(s_1) = \pm 180^\circ (2q + 1) ; q = 0, 1, 2, \dots \quad (6.17)$$

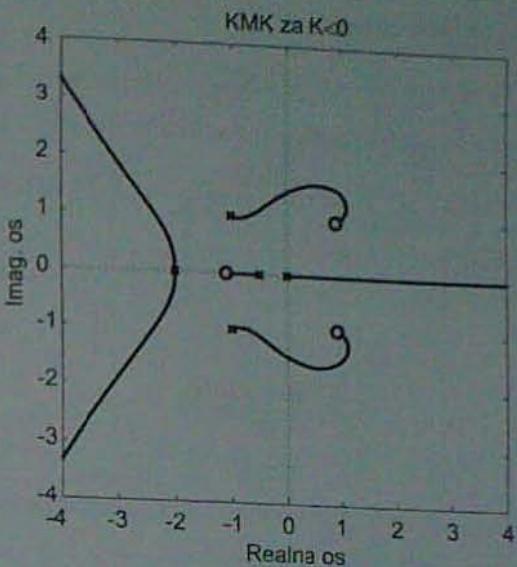
Kada fazi kuta realnog broja K ovisi samo o njegovu predznaku, crtati će se odvojene KMK za $K > 0$ te za $K < 0$. Zbog toga će fazni kut od K biti konstantan za odabran grafički prikaz, a smanjeće se fazni kutovi od $B(s)$ i $A(s)$ mijenjati s procjenom faznog pomaka od $G(s)H(s)$ u različitim točkama kompleksne s ravnine. KMK sadrži n grana u s ravnini. Svaka grana predstavlja gibanje jednog pola zatvorenog kruga kako K mijenja svoj iznos. Određeni iznos pojačanja K fiksira jednu određenu točku na svim n granama dajući u tim točkama pozicije polova zatvorenog kruga za taj K . Na isti način, određena točka na granama KMK odgovara samo jednom iznosu K odgovarajućeg predznaka. Ako točka $s = s_1$ zadovoljava jednadžbu faze (6.17), tada je to potencijalna točka KMK. Da bi ona bila prava točka KMK, mora istodobno sa faznim uvjetom biti zadovoljen i amplitudni uvjet (6.16). Prema tome, ako se pojačanje K odabere tako da u točki $s = s_1$ bude zadovoljena i jednadžba (uvjet) amplitude (6.16), tada će točka $s = s_1$ zaista i biti točka KMK. Ako točka $s = s_1$ ne zadovolji jednadžbu faze, tada ta točka nije na KMK i ne može biti pol zatvorenog kruga za bilo koji predznak i realni iznos pojačanja K . Iz navedenoga slijedi da je daleko teže udovoljiti uvjetu faze nego uvjetu amplitude. Naime, uvjet (6.16) je moguće uvijek zadovoljiti relacijom:

$$K = \frac{A(s_1)}{B(s_1)}$$

Kako se na KMK mijenja jedino amplituda od K (njegova faza je konstantna), druga definicija za KMK je da je to slika svih točaka u kompleksnoj s ravnini za koje fazni kut otvorenog sustava poprima odgovarajući iznos (neparan cijelobrojni višekratnik od 180° ako je $K > 0$, odnosno paran cijelobrojni višekratnik od 180° ako je $K < 0$). Krivulja mjesto korijena za funkciju prijenosa otvorenog kruga (6.13) za $K > 0$ i $K < 0$ dana je na slikama 6.6 i 6.7 [12]. Za svaku sliku treba uočiti na kojem dijelu realne osi leži KMK, gdje su točke odvajanja i točke dolaska na realni os, kuteve asymptota, točke prolaska kroz imaginarnu os, te kakva je stabilnost zatvorenog sustava s promjenom pojačanja K .



Slika 6.6: KMK za slučaj $K > 0$

Slika 6.7: KMK za slučaj $K < 0$

Primjer 6.3 Potrebno je odrediti krivulju mesta korijena sustava s funkcijom prijenosa:

$$\begin{aligned}
 G_0(s) &= \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)} \\
 &= \frac{K}{s(1+0,1s)(1+0,02s)} \\
 &= \frac{k}{s^3 + 60s^2 + 500s}
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Rješenje: Karakteristična jednadžba zatvorenog kruga (s jediničnom povratnom vezom) u ovom slučaju ima oblik:

$$s \left(s + \frac{1}{T_1} \right) \left(s + \frac{1}{T_2} \right) + \frac{K}{T_1 T_2} = 0 \tag{6.19}$$

odnosno:

$$s(s + 10)(s + 50) + \nu = 0 \tag{6.20}$$

gdje je: $\nu = K/T_1 T_2$

Za razmatrani sustav $n = 3$, $m = 0$; $s_1 = 0$, $s_2 = -10 [s^{-1}]$, $s_3 = -50 [s^{-1}]$, $n - m = 3$. Iz polova otvorenog kruga (s_1 , s_2 i s_3) polaze tri grane KMK, a kako je $m = 0$, sve tri grane za $\nu \rightarrow \infty$, teže u beskonačnost. Točka presjeka asimptota slijedi iz (6.9):

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{\text{suma iznosa polova od } G_0(s)}{n - m} \\
 &= \frac{(a_{n-1} - b_{m-1})}{n - m} \\
 &= \frac{-10 - 50 - 0}{3} = -20 [s^{-1}]
 \end{aligned}$$

Prijenjem (6.11) proizlaze kutevi asimptota:

$$\Theta_1 = 60^\circ \quad \Theta_2 = 180^\circ; \quad \Theta_3 = 300^\circ.$$

Tocke presjeka trajektorija s imaginarnom osi proizlaze iz jednadžbi (6.12):

$$\nu_{kr} = 30000 [s^{-1}] \text{ odnosno } K_{kr} = \nu_{kr} T_1 T_2 = 60 [s^{-1}],$$

Prvi stupac Routhove tabele je:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 60 \\ \hline 30000 - 500K \\ 60 \\ 500K \end{array}$$

odakle također slijedi $K_{kr} = 60[s^{-1}]$. Iz karakteristične jednadžbe zatvorenog kruga s kritičnim ν_{kr} slijedi:

$$s(s+10)(s+50) + \nu_{kr} = s^3 + 60s^2 + 500s + 30000 = 0$$

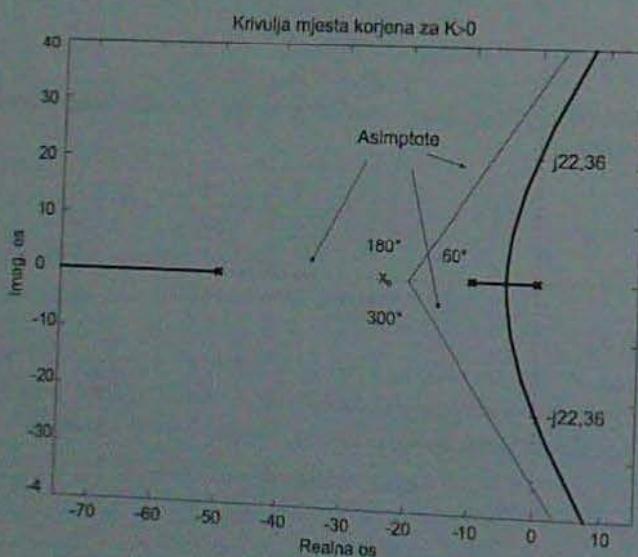
odakle:

$$s_{1,2} = \pm j\sqrt{500} = \pm j22.36$$

KMK uz pomoć Matlaba će biti:

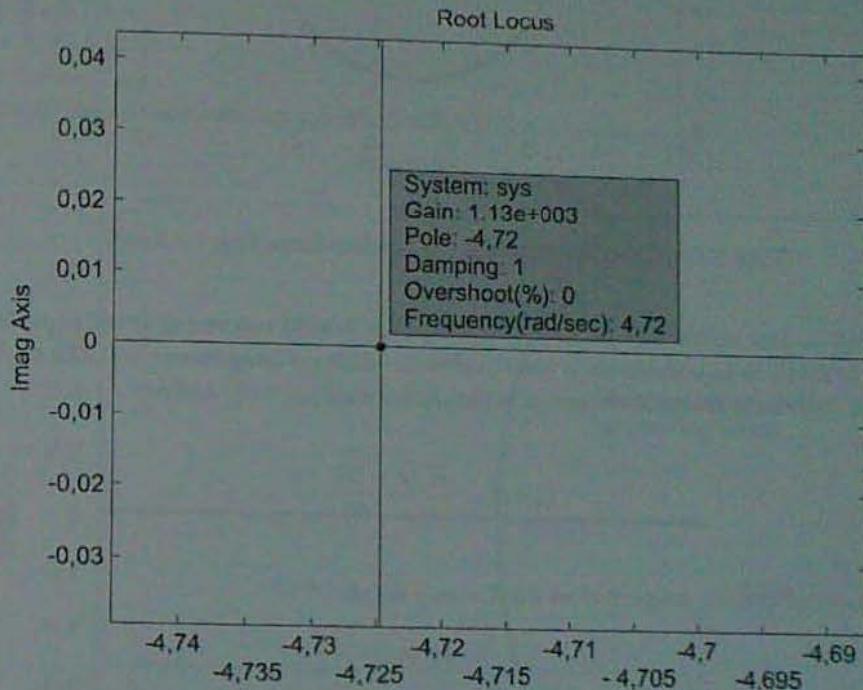
```
>> B=[1];
>> A=[1 60 500 0];
>> rlocus(B,A)
```

Na slici 6.8 prikazana je KMK koja će se dobiti. Asimptote i oznake na slici su naknadno dodane.



Slika 6.8: KMK dohivena Matlab programom

Usporedba KMK na slikama 6.2 i 6.8 pokazuje da dodavanje stabilnog pola funkciji prijenosa otvorenog kruga (vidi funkcije prijenosa (6.1) i (6.18)), ima za posljedicu da grane po kojima je KMK išla u ∞ i koje su prije bile stalno u lijevoj poluravnini sada prelaze u desnu poluravninu. Prema tome, dodani stabilni pol destabilizira sustav tjerajući KMK prema desnoj poluravnini kompleksne s ravnine. Ako želimo pobliže dobiti podatke o pojedinim točkama KMK moguće je povećati KMK u području od interesa, te uz pomoć miša postaviti cursor na željenu poziciju, na kojoj će Matlab ispisati potrebne podatke. Slika 6.9 pokazuje u uvećanom mjerilu područje oko točke odvajanja KMK od realne osi. Pozicioniranjem miša u točku odvajanja dobiti će se ispisani osnovni podaci kao na slici 6.9.



Slika 6.9: KMK povećan u točki odvajanja od realne osi

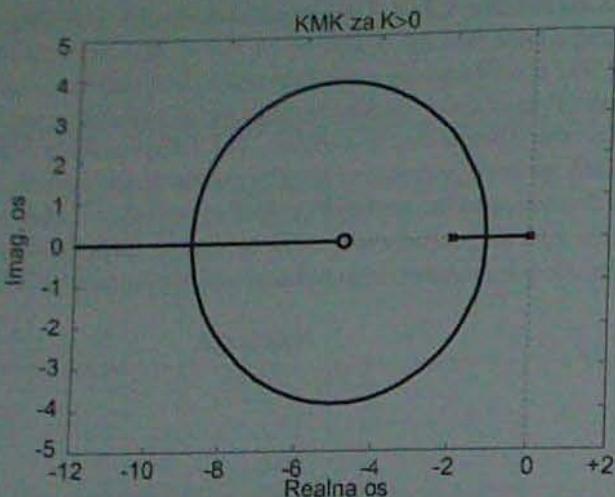
Primjer 6.4 Učinak dodavanja konačne nule moguće je analizirati za slučaj funkcije prijenosa:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

KMK za ovaj slučaj kvalitativno je nacrtan na slici 6.2. U slučaju da se doda minimalnofazna nula, npr. na negativnoj realnoj osi $z = -5$, bit će

$$G_{01}(s) = \frac{K(s+5)}{s(s+2)}$$

Nova KMK je dana na slici 6.10:

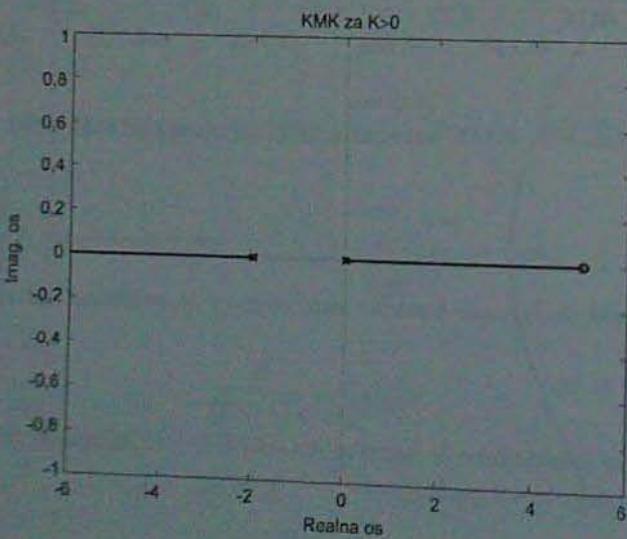


Slika 6.10: Učinak dodavanja minimalno-fazne nule na KMK

Učinak dodane minimalno-fazne nule u funkciji prijenosa otvorenog kruga je stabilizirajući, jer je KMK sada pomaknuta u lijevo, odnosno dalje od imaginarnih osi. Ako se funkciji prijenosa otvorenog kruga doda neminimalno-fazna nula ($z_1 = 5$) biti će:

$$G_0(s) = \frac{K(s-5)}{s(s+2)}$$

te će polovi zatvorenog kruga biti na KMK danoj na slici 6.11:



Slika 6.11: Učinak neminimalno-fazne nule na KMK

Kao što vidimo učinak neminimalno-fazne nule otvorenog kruga destabilizirajući je za zatvoreni krug.

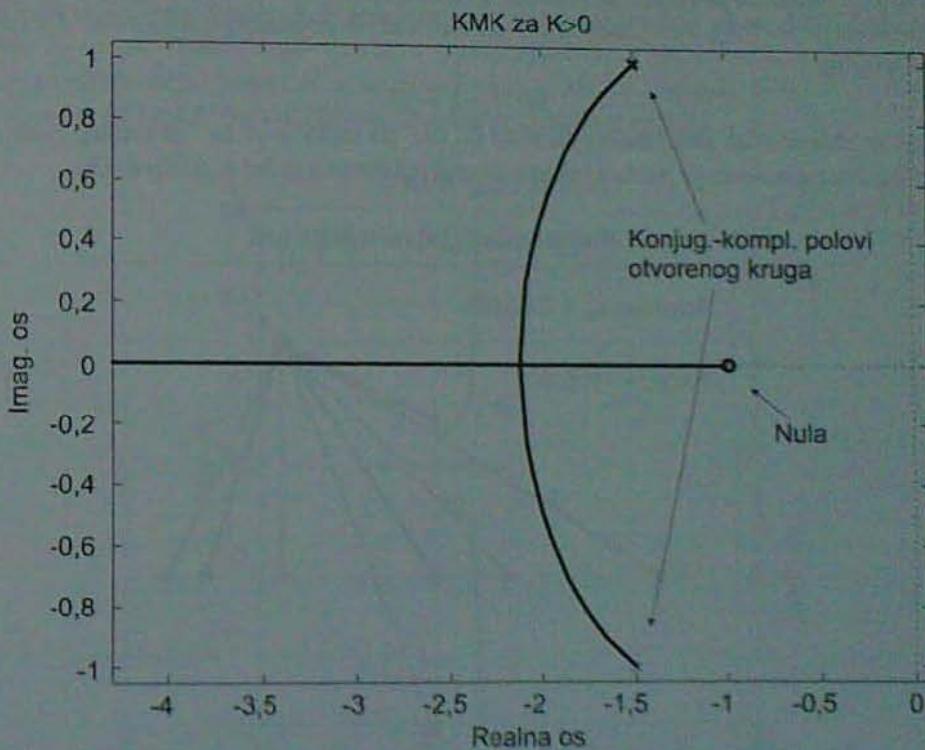
Primjer 6.5 Za sustav s funkcijom prijenosa otvorenog kruga

$$G_0(s) = \frac{K(s+1)}{s^2 + 3s + 3.25}$$

Matlab program za crtanje KMK je:

```
>> B=[1 1];
>> A=[1 3 3.25];
>> rlocus(B,A)
```

Krivulja mesta korijena dana je na slici 6.12.



Slika 6.12: KMK dobivena Matlab programom

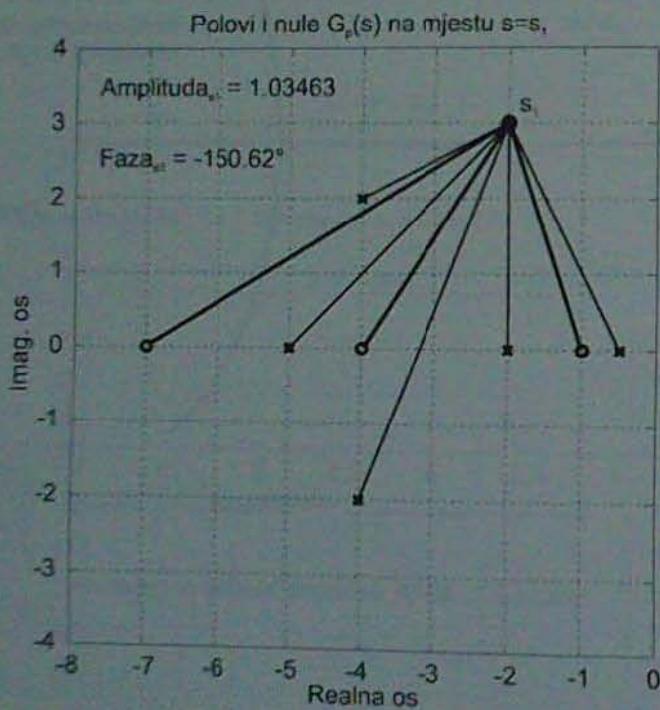
Primjer 6.6 U primjeru [12] će se razmatrati KMK zatvorenog sustava upravljanja s funkcijom prijenosa otvorenog kruga (procesa), $G_p(s)$.

$$G_p(s) = \frac{s(s+1)(s+4)(s+7)}{(s+0.5)(s+2)(s+5)(s+4+j2)(s+4-j2)}$$

Razmatramo će se kako preoblikovati KMK tako da prođe željenom točkom $s = s_1$ u kompleksnoj ravni. To će se postići usmjeranjem korektorskog sklopa, kompenzatora $G_c(s)$ u seriju s $G_p(s)$. Polovi i nule kompenzatora $G_c(s)$ će se birati tako da se postigne ukupan fazni pomak $G_c(s_1)G_p(s_1)$ od 180° ($K > 0$) ili 0° ($K < 0$). Pojačanje kompenzatora $G_c(s)$ će se odabrati tako da bude zadovoljen uvjet amplitudne $|G_c(s_1)G_p(s_1)| = 1$. Određena točka $s = s_1$ će se odabrati kao željeni položaj pola zatvorenog kruga. Ako KMK prolazi baš tom točkom, tada $s = s_1$ jest položaj pola zatvorenog kruga i dovoljno je odrediti samo pojačanje kompenzatora (K_c) s kojim će se zadovoljiti jednadžba amplitudne $|K_c G_p(s)| = 1$. Uvjet za fazu je već zadovoljen jer KMK prolazi točkom s_1 . Ako KMK ne prolazi kroz točku s_1 , tada je potrebno dodatnim pozitivnim ili negativnim faznim pomakom ostvariti fazni uvjet u točki s_1 . Općenito, točka $s = s_1$ bit će odabrana u dozvoljenom području za polove zatvorenog kruga, koje je definirano temeljem vremenskih (nadvišenje, vrijeme smirivanja, vrijeme porasta) ili frekvenčijskih pokazatelja kvalitete¹⁴⁵. Često se pri tome koriste aproksimacije sustava drugog reda bez konačnih nula, jer jedino za takav sustav postoji mogućnost izravnog preslikavanja npr. vremenskih pokazatelja kvalitete u kompleksnu s ravninu. U ovom primjeru točka s_1 odabrana je po volji, bez zadovoljavanja bilo kakvih pokazatelja kvalitete. Točka s_1 je postavljena na:

$$s_1 = -2 + j3$$

Prvo će se proračunati amplituda i faza od $G_p(s)$, za točku $s = s_1$. Iz svakog pola i nule otvorenog kruga moguće je povuci vektore prema odabranoj točki s_1 (slika 6.13).



Slika 6.13: Vektori iz polova i nula od $G_p(s)$ do točke s_1

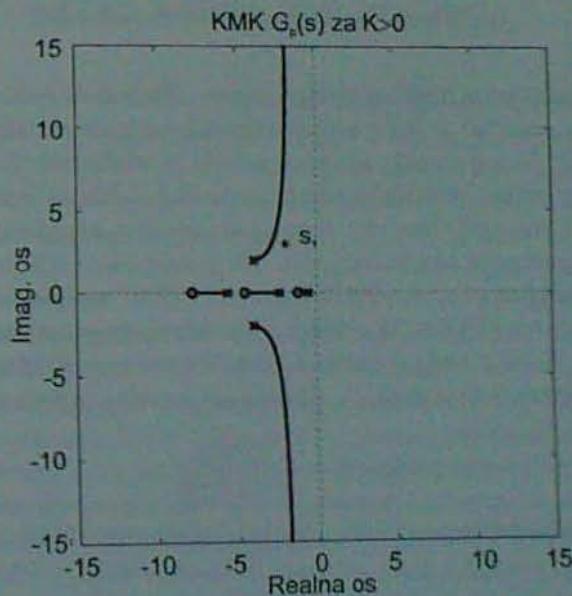
¹⁴⁵ Zgodnjom dinamikom zatvorenog sustava upravljanja.

Amplituda od $G_p(s)$ u točki s_1 biti će jednaka pojačanju otvorenog kruga (8) koji se množi s duljinama svakog vektora povućenog iz konačnih nula otvorenog sustava do točke s_1 , i sve to podijeljeno s duljinama svakog vektora povućenog iz polova otvorenog kruga prema točki s_1 . Matlab funkcija "polyval" se može iskoristiti da se proračuna polinom brojnika i nazivnika $G_p(s)$ u točki s_1 . Funkcije "abs" i "angle" mogu se iskoristiti da se odredi amplituda i faza:

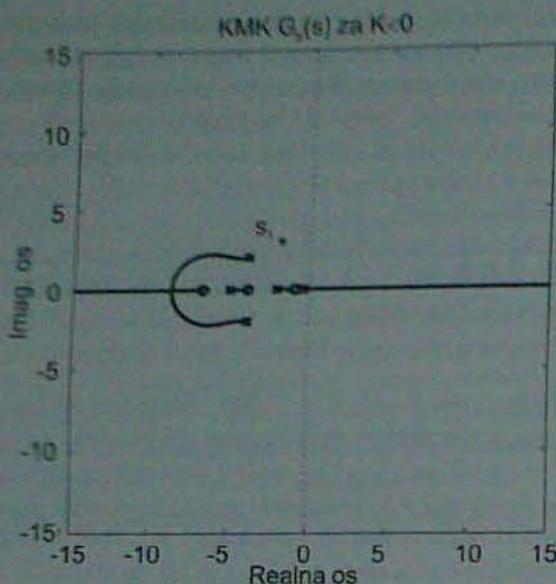
$$|G_p(s_1)| = \frac{8 |s_1 + 1| \cdot |s_1 + 4| \cdot |s_1 + 7|}{|s_1 + 0.5| \cdot |s_1 + 2| \cdot |s_1 + 5| \cdot |s_1 + 4 + j2| \cdot |s_1 + 4 - j2|}$$

$$\angle G_p(s_1) = \angle(s_1 + 1) + \angle(s_1 + 4) + \angle(s_1 + 7) \\ - \angle(s_1 + 0.5) - \angle(s_1 + 2) - \angle(s_1 + 4 + j2) - \angle(s_1 + 4 - j2)$$

U točki $s = s_1$ će biti amplituda $|G_p(s_1)| = 1.0346$, dok će faza biti $\angle G_p(s_1) = -150.6201^\circ$. Kako ukupni fazni pomak nije jednak cijelobrojnom višekratniku od 180° (bilo parnom ili neparnom), to slijedi da KMK od $G_p(s)$ ne prolazi kroz točku s_1 bilo za $K > 0$ ili $K < 0$. Budući da $G_p(s)$ ima 5 polova i 3 konačne nule, postojati će dvije grane KMK koje će težiti ∞ kako $K \rightarrow \infty$. Njihov smjer ovisiti će o predznaku K . KMK krivulje pretpostavljaju da postoji promjenjivo pojačanje K u seriji sa $G_p(s)$. KMK za slučaj $K > 0$ i $K < 0$ dane su na slikama 6.14 i 6.15. Na tim slikama je također označena točka $s = s_1$.



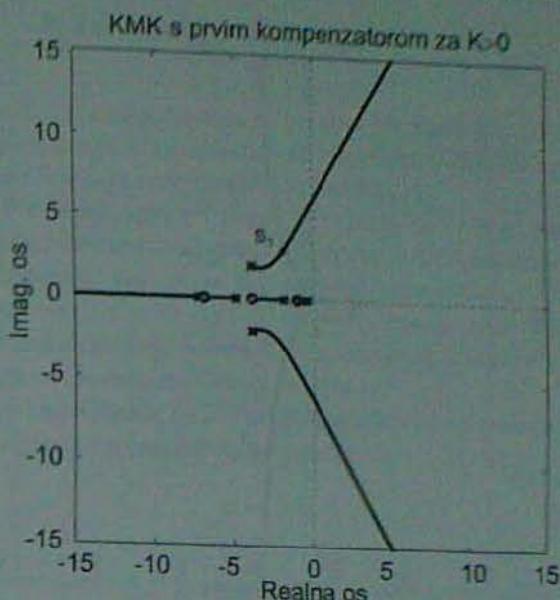
Slika 6.14: KMK za slučaj $K > 0$

Slika 6.15: KMK za slučaj $K < 0$

Kao što vidimo niti jedna KMK ne prolazi kroz s_1 . Budući da je fazni pomak od $G_p(s)$ na poziciji $s = s_1$ približno -150° , najjednostavniji način da se udovolji faznom uvjetu jest da se doda -30° faznog pomaka mjereno u tački s_1 . Kako polovi daju negativan fazni pomak (jer su u nazivniku), minimalno ugadanje za $G_p(s)$ bilo bi dodavanje jednog pola postavljenog tako da daje približno -30° faznog pomaka na s_1 te pojačanja koje bi se moglo ugoditi tako da se zadovolji amplitudni uvjet. Uz pomoć malo trigonometrije moguće je odrediti da pol postavljen na $s = -7.3285$ daje -29.3799° neophodnih kako bi KMK od $G_{el}(s)G_p(s)$ prošla kroz točku s_1 . S obzirom da je bez dodatnog pojačanja kompenzatora $|G_{el}(s_1)G_p(s_1)| = 0.1692$, onda je nužno da kompenzator ima pojačanje 5.9103 želimo li udovoljiti amplitudnom uvjetu na točki s_1 . Funkcija prijenosa kompenzatora je prema tome:

$$G_{el}(s) = \frac{5.9103}{s + 7.3285}$$

KMK za slučaj kompenziranog procesa $G_{el}(s)G_p(s)$ dana je na slici 6.16.

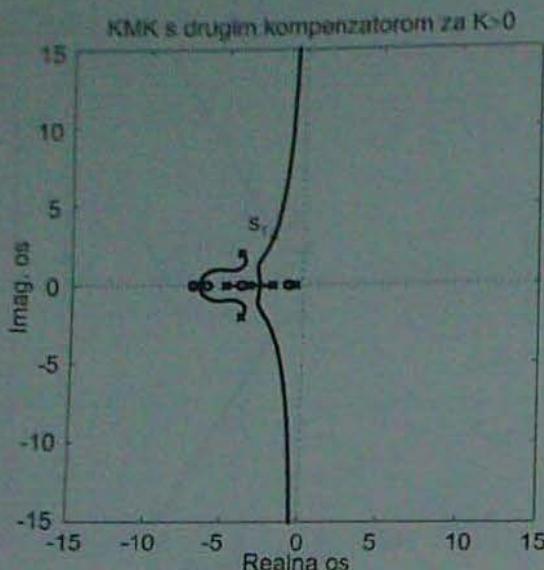


Slika 6.16: KMK s kompenzatorom $G_{c1}(s)$

Kao što se vidi KMK sada prolazi kroz točku s_1 pa se može reći da je ostvareno ono traženo, da pol zatvorenog kruga bude u točki s_1 . Funkcija prijenosa $G_{c1}(s)$ najjednostavnija je funkcija s kojom se može postići traženi položaj pola zatvorenog kruga. Kako je s njom broj polova otvorenog kruga povećan za jedan, tako $G_{c1}(s)G_p(s)$ ima sada 6 polova, dok je broj konačnih nula ostao nepromijenjen, tj. tri. Prema tome, sada je $n - m = 3$, pa će KMK imati tri grane po asymptotama, a dvije će od njih prelaziti u desnu poluravnicu s povećanjem pojačanja, što se jasno vidi na slici 6.16. Ako takvo ponašanje KMK nije poželjno, tada preostaje pokušati ostvariti KMK koja prolazi kroz s_1 ali s nešto složenijim kompenzatorom, koji će grane KMK držati u lijevoj poluravni kompleksne s ravni. Kompenzator s kojim će se postići neophodan fazni pomak od -29.3799° , a ujedno grane pomaknuti u stabilno područje biti će kompenzator s jednom konačnom nulom (radi pomaka grana u stabilno područje) i jednim polom (radi dodavanja potrebnog negativnog faznog pomaka na s_1). S takvim kompenzatorom neće se povećati broj grana u odnosu na KMK bez kompenzatora, jer će sada biti $n - m = 6 - 4 = 2$. Pojačanje kompenzatora će se opet odabratи tako da u točki s_1 bude zadovoljen uvjet amplitudne $|G_{c2}(s_1)G_p(s_1)| = 1$. Bez podrobnijeg obrazloženja, možemo pokazati da će sljedeći kompenzator obaviti ovu zadatku:

$$G_{c2}(s) = \frac{0.605(s + 6.4385)}{s + 3.5}$$

KMK s ovim kompenzatorom dana je na slici 6.17.



Slika 6.17: KMK s kompenzatorom $G_{c2}(s)$

U navedenom primjeru prikazana je osnovna ideja i način projektiranja sustava automatskog upravljanja primjenom krivulje mesta korijena. U daljnju razradu postupaka projektiranja neće se zalaziti u ovom udžbeniku.

6.2 Postupak D - rastavljanja

Postupak je predložio J. I. Neimark [122], a sastoјi se u određivanju stabilnih i nestabilnih područja n -dimensijskog prostora parametara sustava. Područjima nestabilnog režima rada uvijek odgovara isti broj korijena karakteristične jednadžbe s pozitivnim realnim dijelom. Područje stabilnosti odgovara području parametara sustava u kojem svi korjeni karakteristične jednadžbe imaju negativne realne dijelove.

Pri određivanju krivulje D - rastavljanja koristi se postupak određivanja ruba stabilnosti sustava pomoću krivulje Mihajlova [115]:

$$A(j\omega) = D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) = 0 \quad (6.21)$$

Jednadžba (6.21) može biti zadovoljena samo u slučajevima kada karakteristična jednadžba zatvorenog sustava sadrži barem jedan nulti realan korijen ili par imaginarnih korijena.

Pretpostavimo li da karakteristična jednadžba sadrži dva promjenljiva parametra α i β , jednadžba (6.21) poprima oblik:

$$D(j\omega, \alpha, \beta) = X(\omega, \alpha, \beta) + jY(\omega, \alpha, \beta) = 0 \quad (6.22)$$

odnosno:

$$\begin{aligned} X(\omega, \alpha, \beta) &= 0 \\ Y(\omega, \alpha, \beta) &= 0 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Sustav jednadžbi (6.23) omogućava da se ravnina parametara α i β razdjeli na područja s određenim položajima korijena karakteristične jednadžbe u ravnini korijena i da se odrede područja promjene α i β u kojima će sustav biti stabilan.

Uvjet (6.23) će biti zadovoljen pri nekoj frekvenciji $\omega = \omega_1$ i parametrima $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, što odgovara prolazu hodografa Mihajlova kroz koordinatni početak. Ako se promijeni iznos frekvencije, npr. $\omega = \omega_2$, da bi se udovoljilo uvjetu (6.23), i parametri moraju poprimiti nove iznose $\alpha = \alpha_2$ i $\beta = \beta_2$, tj. promjenom frekvencije u granicama $-\infty < \omega < \infty$, uz zadovoljavanje uvjeta (6.21), dobije se područje promjene iznosa parametara α , β koji odgovaraju rubu stabilnosti sustava.

Iz rješavanja sustava jednadžbi (6.23) po parametrima α i β proizlaze jednadžbe krivulje *D-rastavljanja* u ravnini dva promjenljiva parametra:

$$\begin{aligned} \alpha &= f_1(\omega) \\ \beta &= f_2(\omega) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Kada između parametara α i β postoji linearna ovisnost, jednadžbe (6.22) i (6.23) mogu se pisati u obliku:

$$D(j\omega) = \alpha G(j\omega) + \beta H(j\omega) + L(j\omega) = 0 \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} X(\omega, \alpha, \beta) &= \alpha G_1(j\omega) + \beta H_1(j\omega) + L_1(j\omega) = 0 \\ Y(\omega, \alpha, \beta) &= \alpha G_2(j\omega) + \beta H_2(j\omega) + L_2(j\omega) = 0 \end{aligned} \quad (6.26)$$

gdje je:

$$G(j\omega) = G_1(\omega) + jG_2(\omega)$$

$$H(j\omega) = H_1(\omega) + jH_2(\omega)$$

$$L(j\omega) = L_1(\omega) + jL_2(\omega)$$

Iz (6.26) dobivamo:

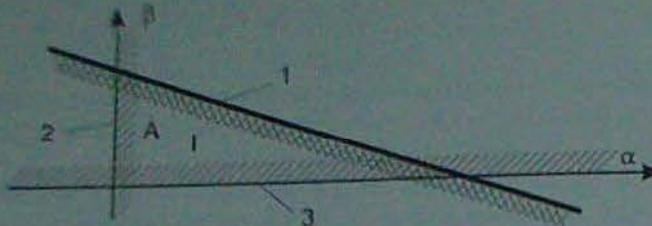
$$\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\Delta}; \quad \beta = \frac{\Delta\beta}{\Delta} \quad (6.27)$$

gdje je:

$$\Delta = G_1 H_2 - G_2 H_1; \quad \Delta\alpha = H_1 L_2 - H_2 L_1; \quad \Delta\beta = G_2 L_1 - G_1 L_2$$

Za svaki iznos ω iz (6.27) proizlazi iznos $\alpha(\omega)$ i $\beta(\omega)$ kojima je određena točka *D-krivulje* u ravnini (α, β) . Kao dijelovi *D-krivulje* mogu se pojaviti singularni pravci, naime, pri $\omega = 0$, $\omega = \infty$ i $\omega = \omega_{gr}$ iznosi $\Delta\alpha/\Delta$ i $\Delta\beta/\Delta$ postaju neodređeni, tpa $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. U tim slučajevima prestaje linearna ovisnost u sustavu jednadžbi (6.26), jer za navedene iznose ω ne dobije se točka *D-krivulje*, već pravac. Singularni pravac koji se dobije za $\omega = 0$, odgovara prolazu jednog korijena kroz imaginarnu os u koordinatnom početku. Singularni pravac koji se dobije za $\omega = \infty$, odgovara prijelazu u beskonačnost jednog korijena karakteristične jednadžbe. Singularni pravac koji se dobije pri nekom graničnom iznosu frekvencije ω_{gr} , odgovara prolazu kroz imaginarnu os para konjugirano-kompleksnih korijena.

Iz dosad izloženog proizlazi da se pri određivanju krivulje *D-rastavljanja* i singularnih pravaca, ravnina parametara (α, β) rastavlja na više područja među kojima mogu biti i područja stabilnosti (slika 6.18).



Slika 6.18: Područja D-rastavljanja

Svaka točka krivulje D -rastavljanja određuje iznose parametara α i β pri kojima karakteristična jednadžba ima čisto imaginare korijene. Budući da krivulja D -rastavljanja odgovara granici (rubu) stabilnosti sustava, prijelaz te granice odgovara prijelazu barem jednog realnog korijena ili para kompleksnih korijena karakteristične jednadžbe kroz imaginarnu os. Iz izloženog proizlazi da će u područjima s jedne i druge strane D -krivulje broj korijena s pozitivnim realnim dijelom biti različit. Određivanje područja stabilnosti svodi se na određivanje područja unutar kojeg nema korijena s pozitivnim realnim dijelom. Ovo područje određuje se primjenom pravila o "šrafiranju" D -krivulje i singularnih pravaca.

Ako je pri porastu frekvencije $-\infty < \omega < 0$ i $0 < \omega < \infty$ determinanta sustava $\Delta > 0$, šrafira se lijeva strana D -krivulje i singularnih pravaca, a ako je $\Delta < 0$, šrafira se desna strana D -krivulje i singularnih pravaca.

U točkama D -krivulje $\omega = 0$ i $\omega = \infty$, šrafirane strane D -krivulje i singularnih pravaca moraju biti okrenute jedna prema drugoj. Ako je u točkama presjeka sa singularnim prvcima pri $\omega \neq 0$ i $\omega \neq \infty$ determinanta sustava $\Delta = 0$, ali bez promjene predznaka (što je rijedak slučaj), singularni procesi ne šrafiraju se i ne ulaze u područje D -rastavljanja.

Područja koja su sa svih strana ograničena D -krivuljom i singularnim prvcima područja su koja mogu biti stabilna. Provjera se obavlja za jednu točku unutar šrafiranog područja primjenom nekog od kriterija stabilnosti. Na primjer (slika 6.18), ako se primjenom jednog od kriterija stabilnosti pri iznosu parametara α i β kojima je određena točka A pokaže da je sustav stabilan, onda će sustav biti stabilan unutar cijelog šrafiranog područja (područje I, slika 6.18).

Postupak D -rastavljanja može se primijeniti i u slučajevima kada parametri α i β uvjetuju nelinearnost karakteristične jednadžbe sustava. U takvim slučajevima sustav jednadžbi (6.23) je nelinearan. Šrafiranje krivulje D -rastavljanja obavlja se po analogiji kao i kod linearnih ovisnosti (6.23), s time da se umjesto determinante Δ razmatra Jakobiјana.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{vmatrix} \quad (6.28)$$

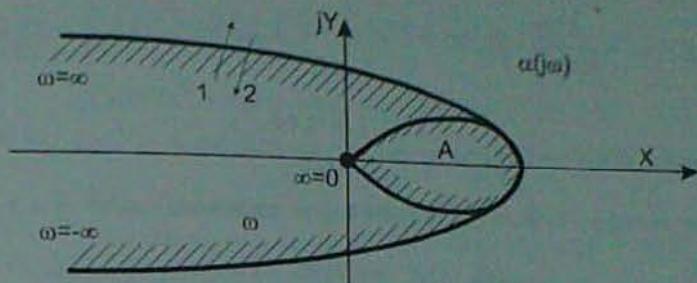
Pri određivanju područja stabilnosti postupkom D -rastavljanja u ravnini jednog promjenljivog parametra, karakteristična jednadžba sustava svodi se na oblik:

$$D(j\omega) = Q(j\omega) + \alpha R(j\omega) = 0 \quad (6.29)$$

odnosno:

$$\alpha(j\omega) = -\frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} = X(\omega) + jY(\omega) \quad (6.30)$$

Pri promjeni frekvencije u granicama $-\infty < \omega < \infty$, određuje se D -krivulja u kompleksnoj ravnini (X, jY) (slika 6.19).



Slika 6.19: D-krivulja u kompleksnoj ravnini

Za određivanje krivulje D -rastavljanja dovoljno je koristiti samo pozitivne iznose frekvencije, tj. $0 \leq \omega \leq \infty$, a zatim dobiveni dio krivulje zrcalno preslikati u odnosu na realnu os.

D -krivulju (slika 6.19) moguće je razmatrati kao rezultat transformiranja imaginarne kompleksne ravnine korijena karakteristične jednadžbe. Lijevoj poluravnini kompleksne ravnine korijena odgovara dio ravnine promjenljivog parametra α , koji se nalazi lijevo od krivulje D -rastavljanja gledajući u smjeru porasta frekvencije ω , što odgovara šrafiranoj području (slika 6.19). Ako se u ravnini α prelazi granica D -krivulje u smjeru šrafiranog dijela (strelica 1, slika 6.19) u ravnini korijena, jedan korijen prelazi kroz imaginarnu os u lijevu poluravninu i obrnuti (strelica 2, slika 6.19), jedan korijen iz lijeve poluravnine prelazi u desnu poluravninu.

U linearnim sustavima promjenljivi parametar realna je veličina (koeficijent pojačanja, vremenska konstanta) pa je od praktičkog interesa samo dio D -područja na realnoj osi.

Primjenom digitalnih računala moguće je rješavati zadatke D -rastavljanja analizom velikog broja točaka u ravnini promjenljivih parametara i određivanjem broja korijena u desnoj poluravnini primjenom Routhova kriterija.

Primjer 6.7 Funkcija prijenosa otvorenog sustava ima oblik

$$G_0(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

gdje je:

$$K = 50; \quad T_1 = 0,4[s]; \quad T_2 = 0,1[s]$$

Potrebno je odrediti utjecaj vremenske konstante derivacijskog člana τ na stabilnost zatvorenog sustava.

Rješenje: Karakteristična jednadžba zatvorenog sustava je:

$$1 + G_0(s) = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + (1 + K\tau)s + K = 0 \quad (6.31)$$

$$0,04s^3 + 0,5s^2 + (1 + 50\tau)s + 50 = 0 \quad (6.32)$$

$$\tau = -\frac{1}{50s}(0,04s^3 + 0,5s^2 + s + 50)$$

Iz (6.30) i (6.32) proizlazi:

$$\tau(j\omega) = -\frac{1}{50j\omega}(-j0,04\omega^3 - 0,5\omega^2 + j\omega + 50) = X(\omega) + jY(\omega)$$

Dobije se:

$$\begin{aligned} X &= 0,02(-1 + 0,04\omega^2) \\ Y &= \frac{1}{50}(1 - 0,01\omega^2) \end{aligned} \quad (6.33)$$

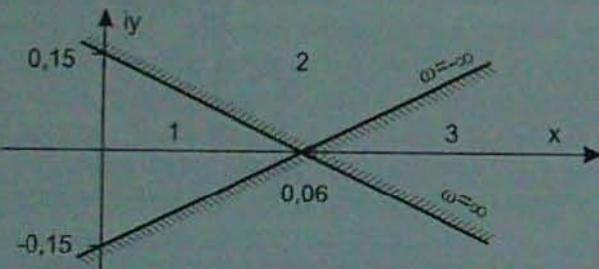
Za određivanje krivulje D-rastavljanja potrebno je izračunati iznose X i Y za $\omega = 0$ i $\omega = \infty$:

$$\begin{aligned} \omega = 0; \quad X &= -0,02; \quad Y = +\infty \\ \omega = \pm\infty; \quad X &= +\infty \quad Y = -\infty \end{aligned} \quad (6.34)$$

Iz (6.33) proizlaze točke presjeka D-krivulje s imaginarnom i realnom osi:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{0,04}} = 5; \quad Y = 0,15 \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{0,01}} = 10; \quad X = 0,06 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Na osnovi (6.34) i (6.35) određena je krivulja D-rastavljanja (slika 6.20).



Slika 6.20: Područja u ravnini parametara

Kako je iz slike 6.20 vidljivo, ravnina kompleksnog parametra τ podijeljena je na tri područja od kojih na stabilnost pretendira područje 3. Ako se u tom području odabere $\tau = 0,1$, karakteristična jednadžba (6.32) poprima oblik:

$$0,04s^3 + 0,5s^2 + 6s + 50 = 0$$

Prijenosom Hurwitzova kriterija slijedi da je za $\tau = 0,1$ sustav stabilan, odnosno sustav će biti stabilan u području 3, tj. za $\tau > 0,06$. ■

Primjer 6.8 Funkcija prijenosa otvorenog sustava ima oblik:

$$G_0(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Potrebno je odrediti utjecaj vremenskih konstanti T_1 i T_2 na stabilnost sustava ako je $K = 50$, $T_1 = 0,4[s]$.

Rješenje: Karakteristična jednadžba zatvorenog sustava je:

$$1 + G_0(s) = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + (1 + K\tau)s + K = 0$$

odnosno:

$$0,4T_2s^3 + (0,4 + T_2)s^2 + (1 + 50\tau)s + 50 = 0 \quad (6.36)$$

Iz (6.36) proizlazi:

$$T_2(0,4s^3 + s^2) + \tau 50s + (0,4s^2 + s + 50) = 0 \quad (6.37)$$

Zamjenom u (6.37) $s = j\omega$, te odvajanjem realnog i imaginarnog dijela prema (6.26) dobivamo:

$$X(\omega, T_2, \tau) = -T_2\omega^2 + 50 - 0,4\omega^2 = 0$$

$$Y(\omega, T_2, \tau) = -T_2 \cdot 0,4\omega^3 + \tau \cdot 50\omega + \omega = 0 \quad (6.38)$$

Determinante Δ , ΔT_2 i $\Delta \tau$ sustava (6.38) prema (6.28) jesu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\omega^2 & 0 \\ -0,4\omega^3 & 50\omega \end{vmatrix} = -50\omega^3$$

$$\Delta T_2 = \begin{vmatrix} -(50 + 0,4\omega^2) & 0 \\ -\omega & 50\omega \end{vmatrix} = -(50 - 0,4\omega^2)\omega - 50$$

$$\Delta \tau = \begin{vmatrix} -\omega^2 & -(50 - 0,4\omega^2) \\ -0,4\omega^3 & -\omega \end{vmatrix} = \omega^3 - 0,4\omega^3(50 - 0,4\omega^2)$$

Primjenom (6.27) dobivamo:

$$T_2 = \frac{\Delta T_2}{\Delta} = \frac{50}{\omega^2} - 0,4 \quad (6.39)$$

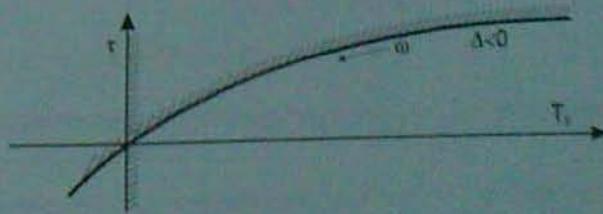
$$\tau = \frac{\Delta \tau}{\Delta} = 0,02(19 - 0,16\omega^2) \quad (6.40)$$

Za različite iznose ω , iz (6.39) i (6.40) proizlaze iznosi promjenljivih parametara T_2 i τ kofima je odredena krivulja D-rastavljanja (tabela 6.1).

Tabela 6.1.

ω	0	5	6	7	8	9	10	$\sqrt{\frac{19}{0,16}}$	$\sqrt{\frac{50}{0,4}}$	15	$\pm\infty$
T_2	∞	1.6	0.99	0.62	0.38	0.22	0.1	0.02	0	-0.18	-0.4
τ	0.38	0.3	0.27	0.22	0.18	0.12	0.06	0	-0.02	-0.34	$-\infty$

Krivulja D-rastavljanja određena prema tabeli 6.1. prikazana je na slici 6.21.



Slika 6.21: Krivulja D-rastavljanja u parametarskoj ravni

Kako je učinak kružnog D-rastavljanja pri porastu frekvencije $\omega > 0$, $\Delta < 0$, krafira se desna strana kružnje. Determinanta sustava $\Delta = 50\omega^2$ za $\omega \neq 0$ uvijek je različita od nule, te sljedeći stan karakteristične jednadžbe $a_0 = 50$ nije ovisan o parametrima T_2 i τ pa za $\omega = 0$ ne postoji singularni pravac. Koefficijent $a_n = 0$, $4T_2$ ovisi o parametru T_2 , pa za $T_2 = 0$ dobije jednadžba singularnog pravca, a to je ordinatna os τ koja se asymptotski približava D-kružnji za $\omega = \infty$. Iz slike 6.21 vidljivo je da se ravnila parametara (T_2, τ) dijeli na dva područja od kuših područje A pretendira na moguće područje stabilnosti. Provjera stabilnosti može se provesti po Hurwitzovu kriteriju, npr. za $T_2 = \tau = 0,2$. Karakteristična jednadžba sustava u navedenom slučaju je:

$$0,08s^3 + 0,6s^2 + 11s + 50 = 0 \quad (6.41)$$

Primjenom Hurwitzova kriterija na (6.41) dobit ćemo:

$$0,6 \cdot 11 = 6,6 > 0,08 \cdot 50 = 4$$

tj. područje A ravnine (T_2, τ) je stabilno područje.

■

Primjer 6.9 Potrebno je odrediti utjecaj parametara K i τ na stabilnost sustava iz prethodnog primjera za $T_1 = 0,4[s]$ i $T_2 = 0,1[s]$. Karakteristična jednadžba zatvorenog sustava je:

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + (1 + K\tau)s + K = 0$$

odnosno:

$$0,4s^3 + 0,5s^2 + (1 + K\tau)s + K = 0 \quad (6.42)$$

Uvrštenjem u (6.42) $K\tau = \alpha$ i $K = \beta$, sustav jednadžbi (6.26) poprima oblik:

$$\begin{aligned} X(\omega, \alpha, \beta) &= -0,5\omega^2 + \beta \\ Y(\omega, \alpha, \beta) &= -0,04\omega^3 + \omega + \alpha \end{aligned} \quad (6.43)$$

Iz (6.43) proizlazi

$$\beta = 0,5\omega^2$$

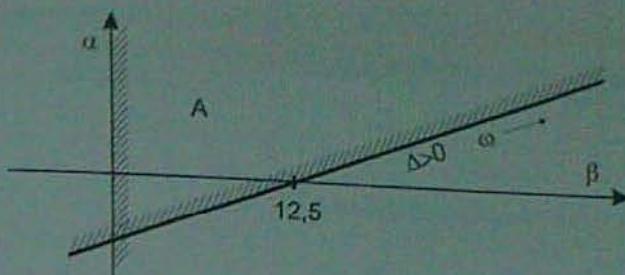
$$\alpha = -1 + 0,4\omega^2$$

$$\Delta = \omega$$

Krivilja D-rastavljanja (slika 6.22) odredena je iznosima parametara navedenih u tabeli 6.2.

Tabela 6.2.

ω	0	$\sqrt{\frac{1}{0,04}}$	6	7	8	9	10	11	12	14	$\pm\infty$
α	-1	0	0.4	0.96	1.6	2.24	3	3.84	4.76	6.84	$+\infty$
β	0	12.5	18	24.5	32	40.5	50	60.5	72	98	$+\infty$



Slika 6.22: Krivulja D-rastavljanja

Iz primjene Hurwitzova kriterija za $\beta = 20$ i $\alpha = 2$ proizlazi da je pretendentno područje A stabilno područje. Budući da je $\alpha = K\tau$ pozitivna veličina, područje stabilnosti je dio područja A, koji se nalazi u prvom kvadrantu.

■

6.3 Struktorna stabilnost sustava automatskog upravljanja

Pojam strukturne stabilnosti SAU vezan je za postojanje područja stabilnosti u prostoru parametra sustava. Ovisno o postojanju područja stabilnosti, razlikuju se *struktorno stabilni* i *struktorno nestabilni sustavi automatskog upravljanja*. Za razliku od struktorno stabilnih sustava, stabilnost struktorno nestabilnih sustava nije moguće postići promjenom iznosa parametara, jer ne postoji područje stabilnosti u prostoru parametara, već je to moguće postići isključivo promjenom strukture sustava.

U nekim slučajevima postojanje područja stabilnosti u prostoru parametara može se odrediti prema obliku strukturne sheme sustava. Za sustave zatvorene jediničnom povratnom vezom s karakterističnom jednadžbom $\alpha_{cl}(s) = A(s) + B(s) = 0$, gdje $A(s)$ sadrži u općem slučaju produkt dinamičkih komponenata oblika s , $1 + sT$, $1 + 2\xi Ts + T^2 s^2$, $1 + T^2 s^2$ i $sT - 1$, dok je polinom $B(s)$ polinom koji sadrži korijene s negativnim realnim dijelom (nule u stabilnom području), formulacija kriterija strukturne stabilnosti (tj. uvjeta postojanja područja stabilnosti u prostoru parametara) glasi, [3]:

Definicija (Struktorna stabilnost). Sustav automatskog upravljanja će biti struktorno stabilan ako vrijedi:

$$m > \nu + l - 1 \quad (6.44)$$

te barem jedna od nejednadžbi iz tabele 6.3.

Tabela 6.3.

m	$m = 0$	$m > 0$ parno	$m < 0$ parno
μ			
μ parno	$N > 4\rho$	$N > 4\rho - 1$	$N > 4\rho - 2$
μ neparno	$N > 4\rho$	$N > 4\rho$	$N > 4\rho + 1$

Definicija (Strukturalna stabilnost sustava s idealnom PD komponentom). U slučaju-
vama kada sustav sadrži idealnu PD dinamičku komponentu prvega reda, tj.
 $B(s) = b_1s + b_0$, uvjet strukturalne stabilnosti biti će zadovoljen ako vrijedi:

$$\nu + l < 2$$

te barem jedna od nejednakosti iz tabele 6.4.

Tabela 6.4.

$\nu + l$	0	1	2
nejednakost	$n > 4r - 3$	$n > 4r$	$n > 4r + 1$

Oznake u tabelama 6.3. i 6.4 su:

$$\mu = \nu + l + 2r$$

m - stupanj polinoma $B(s)$

n - stupanj polinoma $A(s)$; $n > m$

ν - broj dinamičkih komponenata $G(s) = s$ u polinomu $A(s)$

l - broj dinamičkih komponenata $G(s) = Ts - 1$ u polinomu $A(s)$

r - broj dinamičkih komponenata $G(s) = 1 + T^2 s^2$ u polinomu $A(s)$

$$N = n + m$$

$$p - cijeli dio razlomka \frac{\mu}{2}$$

Primjer 6.10 Za funkciju prijenosa otvorenog sustava:

$$G_0(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K}{s(1+sT)(1+sT_2)}$$

$\nu = 1, l = 0, n = 3, r = 0$ zatvorení sustav strukturalno je stabilan.

Primjer 6.11 Neka je

$$G_0(s) = \frac{K}{s^2(1+sT_1)}$$

$\nu = 2, l = 0$, uvjet $\nu + l < 2$ nije ispunjen, zatvorení sustav strukturalno je nestabilan.

Primjer 6.12 Neka je funkcija prijenosa otvorenog sustava:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(-1+sT_1)}$$

$\nu = 1, l = 1$, zatvorení sustav strukturalno je nestabilan.

Primjer 6.13 Neka je

$$G_0(s) = \frac{K(1+sT_2)}{s(-1+sT_1)}$$

$\nu = 1, l = 1, n = 2, r = 0$, zatvorení sustav strukturalno je nestabilan.

Primjer 6.14 Neka je

$$G_0(s) = \frac{K(1+sT_2)}{s(1+s^2T_1^2)}$$

$\nu = 1, l = 0; \nu + l = 1 < 2, n = 2 < Ar = 4$, zatvoren sustav strukturna je nestabilan.

6.4 Stabilnost ravnotežnih stanja vremenski promjenjivih sustava

Pod linearnim sustavima s *promjenljivim parametrima* ili *vremenski promjenjivim sustavima* podrazumijevaju se sustavi koji se opisuju linearnim diferencijalnim jednadžbama s promjenljivim koeficijentima:

$$[a_n(t)\mathcal{D}^n + a_{n-1}(t)\mathcal{D}^{n-1} + \dots + a_0(t)]y(t) = [b_m(t)\mathcal{D}^m + b_{m-1}(t)\mathcal{D}^{m-1} + \dots + b_0(t)]u(t) \quad (6.45)$$

Postupci pri određivanju stabilnosti vremenski promjenjivih sustava imaju svoju specifičnost i bitno se razlikuju od postupaka koji se primjenjuju u analizi stabilnosti vremenski nepromjenjivih sustava. Na primjer, ako se pretpostavi da je vodeća veličina sustava $u(t) = u^0 = \text{konst.}$ i da se prijelazni proces završava u trenutku $t = t_1$, te da od tog trenutka nema dinamičkih promjena, tj. u (6.45) operator $\mathcal{D} = d/dt = 0$, izlazna veličina sustava u intervalu $t > t_1$ bit će tada određena jednadžbom:

$$y(t) = \frac{b_0(t)}{a_0(t)}u^0 \quad (6.46)$$

Iz (6.46) vidljivo je da promjena izlazne veličine vremenski promjenjivog sustava za $u(t) = u^0$ ovisi o karakteru promjene koeficijenata $a_0(t)$ i $b_0(t)$, tj. izlazna veličina općenito se može mijenjati beskonačno dugo.

Pri određivanju stabilnosti vremenski promjenjivih sustava najčešće se koriste:

- *postupak zamrzavanja koeficijenata*
- *postupci analize robusne stabilnosti*

6.4.1 Postupak zamrzavanja koeficijenata

Taj postupak može se primjenjivati u slučajevima kada vremenski promjenjivi sustav radi u ograničenom vremenskom intervalu τ , a koeficijenti jednadžbe (6.45) za vrijeme trajanja prijelaznog procesa znatnije se ne mijenjaju. Postupak se primjenjuje tako da se u nekom fiksiranom vremenu $t = t_k$ zamrznu zatečeni iznosi koeficijenata $a_i(t_k)$ i $b_i(t_k)$ u izrazu (6.45), tj. u trenutku $t = t_k$ vremenski promjenjivi sustav opisuje se jednadžbom nekog fiktivnog vremenski nepromjenjivog sustava. Stabilnost tako dobivenog fiktivnog vremenski nepromjenjivog sustava određuje se primjenom nekog od poznatih kriterija stabilnosti. Pri tome se smatra da je stabilnost vremenski promjenjivog sustava u trenutku $t = t_k$ određena stabilnošću fiktivnog vremenski nepromjenjivog sustava. Postupak se ponavlja za vrijeme rada sustava, tj. za interval $0 < t < \tau$.

Ako su uvjeti stabilnosti fiktivnog vremenski nepromjenjivog sustava u intervalu $0 < t < \tau$ zadovoljeni, razmatrani vremenski promjenjivi sustav smatra se stabilnim.

Potrebno je naglasiti da se rezultati dobiveni tim postupkom ne mogu smatrati dovoljno točnim, jer ovaj postupak nije matematički zasnovan. Stupanj točnosti bit će dovoljno visok

u sklopu svih kada je približna koeficijenta za vrijeme prijelaznog procesa dovoljno mala. Uzimajući svega pogleda takođe može ovisiti o pravilnom izboru fiksiranih trenutaka t_k , naime, izbor trenutka t_k treba biti takav da obuhvati sve moguće promjene iznosa koeficijenata, s posebnom posornošću na "kritične" točke u kojima dolazi do znatnijih promjena iznosa ili predznaka koeficijenata.

Primjer 6.15 Sustav automatskog upravljanja opisuje se diferencijalnom jednadžbom

$$0.1D^3 + 1.2D^2 + (72 - 0.1t)D + 400)y(t) = 400u(t) \quad (6.47)$$

Potrebna je približno ocijeniti stabilnost sustava, ako rad sustava traje $\tau = 100[s]$.

Rješenje: Za određivanje približne ocjene stabilnosti sustava primjenom postupka "zamrzavanja" koeficijenata, prikladno je provesti analizu stabilnosti fiktivnog vremenski nepromjenjivog sustava u trenutku $t = 0$ i $t_k = \tau = 100[s]$. Uvrštenjem u (6.47) $t = 0$ i $\tau = 100$, dobivamo karakteristične jednadžbe fiktivnog vremenski nepromjenjivog sustava:

$$0.1s^3 + 4.2s^2 + 72s + 400 = 0 \quad (6.48)$$

$$0.1s^3 + 4.2s^2 + 62s + 400 = 0 \quad (6.49)$$

Analizom izraza (6.48) proizlazi: $s_1 = -10$; $s_{2,3} = (-16 \pm j12)$, vrijeme trajanja prijelaznog procesa $t_s \leq \frac{3}{10} = 0.33 [s]$. Analizom izraza (6.49) proizlazi: $s_1 = -25$; $s_{2,3} = (-8.8 \pm j8.7)$; $t_s \leq \frac{3}{8.8} = 0.34 [s]$. Za vrijeme trajanja prijelaznog procesa koeficijent $a_1(t)$ mijenja se za iznos $\Delta a_1 \approx 0.1 \cdot 0.34 = 0.034$, tj. za 0.05% pa se sustav može analizirati kao vremenski nepromjenjiv. Primjenom Hurwitzova kriterija slijedi:

$$\begin{aligned} a_1 a_2(t) &> a_0 a_3 \\ 4.2(72 - 0.1t) &> 40 \end{aligned}$$

Tj. razmatrani sustav je u intervalu $0 < t < 100 [s]$ stabilan. ■

Kada se koeficijenti jednadžbe (6.45) znatnije mijenjaju, za analizu stabilnosti vremenski promjenjivih sustava nužno je rabiti teoriju robusne stabilnosti za nestrukturirane ili strukturirane tipove neizvjesnosti. U inženjerskoj praksi kao primjeri vremenski promjenjivih sustava vrlo često tretiraju se sustavi upravljanja letećim i plovnim objektima. Kod tih objekata tijekom gibanja dolazi do promjena koeficijenata diferencijalne jednadžbe. Do tih promjena dolazi primjerice zbog promjene mase pri utrošku goriva, promjene gustoće atmosfere, promjene brzine gibanja i sl.

6.4.2 Robusna stabilnost - za nestrukturiranu neizvjesnost

Standardni problem kod projektiranja sustava automatskog upravljanja je sljedeći: Uz poznati linearni matematički model procesa¹⁴⁶ te uz poznate željene performanse zatvorenog kruga upravljanja, projektirati takav regulator s kojim će se postići stabilnost zatvorenog kruga te ostvariti sve tražene performanse (brzina, točnost, nadvišenje i sl.).

¹⁴⁶ Uzumno-izlazni u formi funkcije prijenosa ili unutarnji po varijablama stanja.

U ovako postavljenom projektnom zadatku implicitno se podrazumijeva:

- matematički model sustava daje točan opis realnog sustava,
- matematički model ne mijenja se s vremenom.

Općenito, obje su ove pretpostavke pogrešne! Naime, ne samo što postoji neizvjesnost u našem poznavanju dinamike sustava, već će sustav biti često podvrgnut raznim promjenama koje će mu s vremenom mijenjati dinamiku! Promjene mogu nastati uslijed različitih čimbenika uključujući sljedeće:

- promjene parametara uslijed starenja, naprezanja i sl.,
- promjene uvjeta rada sustava ili okoline sustava,
- kvar neke komponente sustava¹⁴⁷,
- iznosi parametara¹⁴⁸ koji su ovisni eksplicitno o vremenu.

Promjene parametara mogu se dogoditi npr. uslijed mehaničkog trošenja, promjena radnog režima i sl. Mogu se navesti primjeri: promjena dinamike zrakoplova ovisno o brzini i visini leta [104][19], promjena dinamike broda ovisno o omjeru gaza i dubine ispod kobilice [49], [177], kvar u aktuatoru ili senzoru [178], [179] i sl. Ono što se željelo istaknuti u svakom od gore izloženih primjera jest činjenica da se odziv sustava, odnosno njegova dinamika, ponaša po složenijim matematičkim modelima različitim od linearnih matematičkih modela, koji se obično koriste kod projektiranja sustava automatskog upravljanja. Bez obzira na uzroke ove razlike (nedostatak poznavanja dinamike sustava, poremećaja u dinamici, nelinearnosti u sustavu, namjernog zanemarenja nekih dinamičkih modova i tome slično), važno je uočiti da sustav upravljanja mora stabilizirati i ostvariti odgovarajuće performanse realnog sustava, a ne samo nominalnog matematičkog modela kojega se koristilo kod projektiranja. Osnovna zadaća robusnog upravljanja svodi se na projektiranje robusnog regulatora koji će zadovoljiti zahtjeve za čitavu familiju matematičkih modela sustava, a ne samo nominalnog matematičkog modela. Da bi se neki regulator proglašio robusnim mora zadovoljiti sljedeću definiciju, [11].

Definicija (Robusni regulator)

Za danu familiju matematičkih modela, koja se sastoji od

- (1) konačnog broja specifičnih modela,
- (2) nominalnog modela i opisa neizvjesnosti u modelu, ili
- (3) struktornog modela za sustav s opisom neizvjesnosti u iznosima parametara modela,

regulator će biti robustan ako i samo ako interna stabilizira svaki od modela u familiji.

Dinamička neizvjesnost u odnosu na parametarsku neizvjesnost

Matematički model procesa (objekta) se uvek dobiva uz neke pretpostavke, zanemarenja i pojednostavljenja. Većina postupaka sinteze zasniva se na dobrom nominalnom matematičkom modelu procesa. Nominalni matematički model G_n i opis neizvjesnosti¹⁴⁹ npr. Δ_n koji je povezan sa nominalnim modelom procesa, na neki način ograničavaju fizikalni stvari proces G , koji leži u skupu svih procesa opisanih parom (G_n, Δ_n) . Neizvjesnost modela općenito se može podijeliti na dvije kategorije:

¹⁴⁷ Senzora, aktuatora ili neke druge komponente.

¹⁴⁸ Koeficijenata.

¹⁴⁹ engl. uncertainty description.

- strukturirana neizvjesnost,
- nestrukturna neizvjesnost.

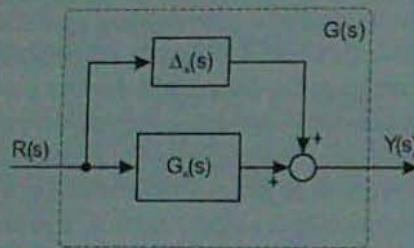
Strukturirana neizvjesnost prepostavlja da se neizvjesnost može modelirati te da se poznaju granice unutar kojih se mogu mijenjati neizvjesni parametri. Tako je npr. moguće imati funkciju prijenosa nekog procesa, ali neizvjesne pozicije polova, nula ili pojačanja, odnosno parametara polinoma u brojniku i nazivniku funkcije prijenosa. Ovakva neizvjesnost može se svrstati u strukturiranu neizvjesnost. Nestrukturna neizvjesnost prepostavlja manje znanja o procesu. Tako se npr. može poznavati samo to da frekvencijska karakteristika procesa leži unutar određenih granica. Obje kategorije neizvjesnosti pojavljuju se u praksi.

Opis dinamičke (nestrukturirane) neizvjesnosti

Uz pretpostavku da je "pravi proces" ($G(s)$) linearan i vremenski nepromjenjiv (LTI), jedan od mnogih opisa nestrukturne neizvjesnosti o dinamici procesa u Laplaceovu području moguće je izraziti kao¹⁵⁰:

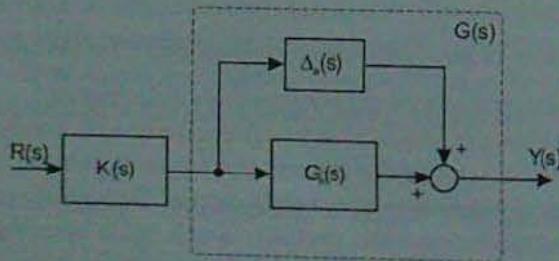
$$\Delta_s(s) = G(s) - G_n(s) \quad (6.50)$$

Izraz (6.50) predstavlja najjednostavniji tzv. aditivni način opisa razlike između "pravog procesa" i njegova modela. Ova neizvjesnost poznata je kao *aditivna neizvjesnost (aditivna perturbacija)* ili *apsolutna pogreška modela* i može se prikazati blok-shemom na slici 6.23.



Slika 6.23: Blok-shema aditivne neizvjesnosti

Ako se procesu u seriju doda kompenzator $K(s)$ (slika 6.24), tada će funkcija prijenosa otvorenog kruga postati $G_0(s) = K(s)G(s)$.



Slika 6.24: Kompenzator $K(s)$ dodan u seriju procesu s aditivnom neizvjesnošću

¹⁵⁰ Aditivna neizvjesnost

Nedostatak aditivnog prikaza pogreške modela leži u tome što pogreška u $G_n(s)$ ne predstavlja pogrešku $G_0(s)$. Naime, $|G_n(s) + \Delta_n(s)|K(s) \neq G_n(s)K(s) + \Delta_n(s)$, pa je teško odrediti učinak aditivne perturbacije $\Delta_n(s)$ na $G_n(s)K(s)$. Multiplikativni prikaz pogreške modela nema taj nedostatak budući da je multiplikativna perturbacija na $G_n(s)$ ujedno i multiplikativna perturbacija na $G_n(s)K(s)$. Pored toga multiplikativna pogreška modela zadovoljava intuitivno svojstvo (vidi sliku 6.27) da je:

1. mala na niskim frekvencijama, na kojima je obično nominalni model procesa dobro poznat,
2. velika na visokim frekvencijama na kojima obično nominalni matematički model nije u stanju dobro opisati ponašanje procesa.

Pogrešku modela moguće je prikazati relativnim odnosno multiplikativnim opisom^{15.1} sa:

$$G(s) = [1 + \Delta_m(s)] G_n(s) \quad (6.51)$$

Nestrukturirana neizvjesnost prikazana relativnom pogreškom modela u odnosu na nominalni model dana je sa:

$$\Delta_m(s) = \left(\frac{G(s)}{G_n(s)} - 1 \right)$$

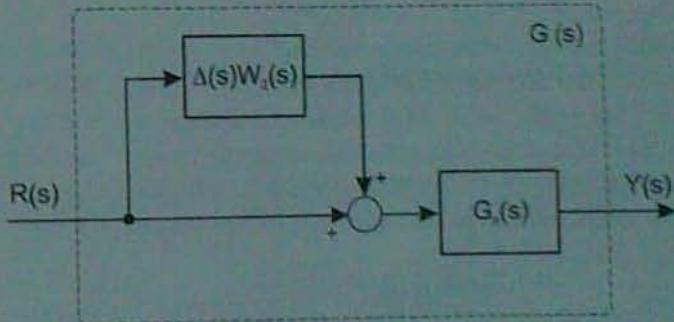
Relativnu pogrešku moguće je prikazati i tako da se pogreška modela gleda u odnosu na "pravi proces" tj.

$$\Delta_M(s) = \left(1 - \frac{G_n(s)}{G(s)} \right)$$

Relativnu pogrešku u odnosu na nominalni model moguće je izraziti kao:

$$\Delta_m(s) = \Delta(s)W_2(s),$$

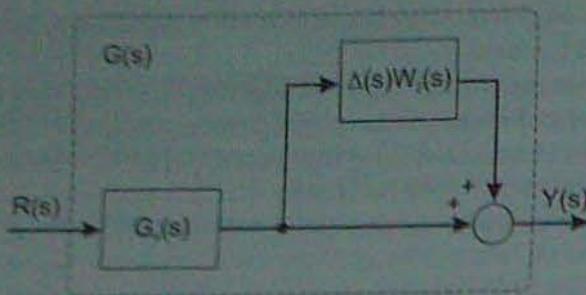
gdje je: $W_2(s)$ – stabilna nepromjenjiva funkcija prijenosa (težina neizvjesnosti), dok je $\Delta(s)$ – promjenjiva stabilna funkcija prijenosa koja zadovoljava $\|\Delta\|_\infty < 1$. Blok shema multiplikativne neizvjesnosti na ulazu dana je na slici 6.25.



Slika 6.25: Blok-shema multiplikativne neizvjesnosti na ulazu procesa

Pored ove postoji i multiplikativna neizvjesnost na izlazu – slika 6.26.

^{15.1} Multiplikativna neizvjesnost



Slika 6.26: Blok-sHEMA multiplikativne neizvjesnosti na izlazu procesa

Ako se pretpostavi da se pri formiranju modela aditivne i multiplikativne neizvjesnosti nestabilni polovi nominalnog modela nisu pokratili, što drugim riječima znači da je broj polova u desnoj poluravnini "pravog procesa" G i nominalnog procesa G_n isti, tada se za promjenjivu stabilnu funkciju prijenosa $\Delta(s)$ može reći da je dozvoljena. Da bi matematičko modeliranje fizikalnog procesa bilo kompletno, nužno je obaviti kvantifikaciju pogrešaka modeliranja. Zbog svoje prirode, pogreške modeliranja nije moguće precizno matematički opisati, pa je nužno njihovu kvantifikaciju obaviti posredno, temeljem njihovih granica, odnosno težina neizvjesnosti. Kako pogreške modeliranja nisu dane preko parametara već kao nestrukturirane pogreške modeliranja, one spadaju u kategoriju nestrukturiranih neizvjesnosti, [43]. Njihova glavna uloga leži u tome da omoguće visoko frekvencijske fenomene koji se mogu javiti u "pravom procesu" a koji su nominalnim modelom ostali slabo modelirani. Kako i neizvjesnost parametara uzrokuje pogreške modeliranja, a prikazujemo je također preko nestrukturiranih neizvjesnosti, zaključivanje o parametarskim pogreškama temeljem neparametarske analize može dati konzervativne odgovore, budući da parametarska priroda pogreške nije uzeta u obzir. Jedan od mnogih mogućih opisa neizvjesnosti za (6.50) bio bi preko težine (pondera) neizvjesnosti⁵² $W(s)$ koja zadovoljava nejednadžbu:

$$|\Delta_o(j\omega)| < |W(j\omega)| \quad ; \quad \forall \omega \quad (6.52)$$

Uporaba težina (pondera) česta je u automatskom upravljanju, osobito kod optimalnih sustava upravljanja. U slučaju optimizacije "infinity" $\|\cdot\|_\infty$ norme, uvođenje težina omogućuje da se frekvencijski ovisne karakteristike signala i sustava te njihova amplituda obuhvate težinom (ponderom). Tako npr. kada $G(s)$ predstavlja niskopropusni filter, te ako možemo odrediti granicu, na niskim frekvencijama, koju njegova "infinity" norma neće preći, odnosno odrediti težinu $\|G(j\omega)\|_\infty < \|W(j\omega)\|_\infty \quad \forall \omega$, tada izrazom $\|W(j\omega)^{-1}G(j\omega)\| < 1$ tu činjenicu možemo izraziti na kompaktan način. Za (6.51) moguće je pisati:

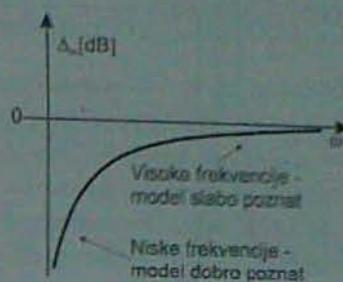
$$\Delta(s)W_2(s) = \frac{G(s)}{G_n(s)} - 1,$$

pa se $\Delta(s)W_2(s)$ može interpretirati kao normirana promjena "pravog procesa" od jedinice. Ako je $\|\Delta\|_\infty \leq 1$, tada:

$$\left| \frac{G(j\omega)}{G_n(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega)| \quad ; \quad \forall \omega \quad (6.53)$$

⁵² engl. Uncertainty weight.

Težine neizvjesnosti $W(j\omega)$ i $W_2(j\omega)$ mogu daju profil (gradec) neizvjesnosti. Nejednadžba (6.53) opisuje kružnicu u kompleksnoj s ravnini. Na određenoj frekvenciji npr. ω_1 točka $G(j\omega_1)/G_n(j\omega_1)$ leži unutar kružnice radijusa $|W_2(j\omega_1)|$. Obično je težina neizvjesnosti $|W_2(j\omega)|$ rastuća funkcija po frekvenciji ω , jer se neizvjesnost povećava sa frekvencijom. Glavna je uloga funkcije prijenosa $\Delta(s)$ da odgovara za neizvjesnost faze te da djeluje kao čimbenik skaliranja amplitude perturbacije. $|\Delta(s)|$ se mijenja od 0 do 1. Multiplikativna neizvjesnost $\Delta_m(s) = \Delta(s)W_2(s)$ ima tipičnu amplitudnu karakteristiku danu na slici 6.27.



Slika 6.27: Tipičan oblik multiplikativne neizvjesnosti $|\Delta_m(j\omega)|$

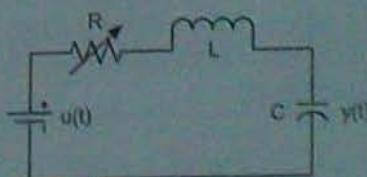
Oba prikaza neizvjesnosti matematičkog modeliranja dinamike (6.50) i (6.51) koriste nominalni model $G_n(s)$ i težinu neizvjesnosti W odnosno W_2 . Prema tome, ako se poznaju nominalni model procesa $G_n(s)$ i težina neizvjesnosti $W(s)$ (ili W_2), tada je normalno pretpostaviti da bi par $\{G_n(s), W(s)\}$ trebalo koristiti kao model procesa za analizu i projektiranje robusnog regulatora. Kao što je često slučaj, matematički model beskonačne dimenzije $G(s)$, aproksimira se konično dimensijskim modelom $G_n(s)$, a njihova razlika se procjenjuje kako bi se odredila težina neizvjesnosti $W(s)$. Tipično, fizikalni parametri sustava određuju koeficijente nominalnog modela procesa $G_n(s)$. Neizvjesni parametri vode na specifične vrste modela procesa kod kojih je struktura $G(s)$ nepromjenjiva ali su koeficijenti neizvjesni.

Neizvjesnost o parametrima pretvorena u neizvjesnost o dinamici

Da se neizvjesnost o parametrima može pretvoriti u neizvjesnost o dinamici pokazat će sljedeći primjeri. Također će biti razmotreno i ono što se time može dobiti.

Primjer 6.16 (Serijski RLC krug)

Razmatra se idealizirani serijski RLC sklop sa pobudom (naponskim izvorom) $u(t)$ te odzivom (naponom na kondenzatoru) $y(t)$ - vidi sliku 6.28:



Slika 6.28: RLC sklop

Funkcija prijenosa RLC sklopa je:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ls^2 + RRs + 1}$$

dok je nominalni model dan sa:

$$G_n(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{L_n C_n s^2 + R_n C_n s + 1}$$

gdje su R_n , L_n i C_n nominalni iznosi R , L i C respektivno. Neizvjesnost u poznavanju ovih parametara pojavljuje se kao neizvjesnost poznavanja koeficijenata funkcije prijenosa "pravog procesa" $G(s)$. Da se neizvjesnost o parametrima može pretvoriti u neizvjesnost o dinamici moguće je pokazati na ovom primjeru ako pretpostavimo da je samo otpor neizvjetan. S ovom pretpostavkom $\omega_n = 1/LC$ ostaje konstantno, dok se $2\zeta\omega_n = R/L$ mijenja. S tom neizvjesnošću u faktoru prigušenja, funkcija prijenosa RLC kruga postaje:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Uz nominalne numeričke iznose $\omega_n = 1[r/s]$ i $\zeta_n = 0.2$, nominalni model serijskog RLC sklopa je:

$$G_n(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta_n s + 1}$$

dok je pravi model RLC sklopa uz pretpostavku neizvjesnog faktora prigušenja $\zeta \in [0.1, 0.2]$ dan sa:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} ; \quad \zeta \in [0.1, 0.2]$$

Za konkretni slučaj težina neizvjesnosti $W(s)$ može se odrediti iz grafičkog prikaza:

$$|\Delta_a(j\omega)| = |G(j\omega) - G_n(j\omega)|$$

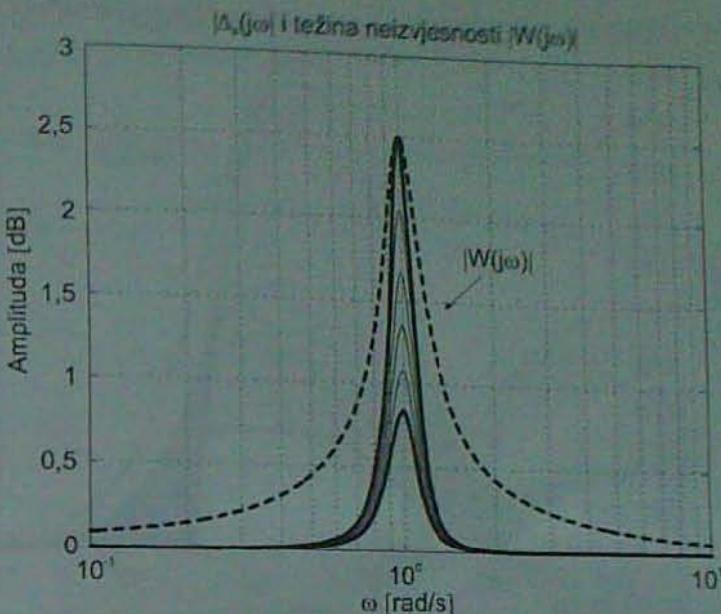
za dovoljno veliki broj različitih faktora prigušenja unutar granica $\zeta \in [0.1, 0.2]$, težina neizvjesnosti $W(s)$ treba biti takva da je zadovoljeno:

$$|W(j\omega)| > |\Delta_a(j\omega)| \quad \forall G \quad (6.54)$$

Iz slike 6.29, koja daje dinamičku neizvjesnost o modelu $|\Delta_a(j\omega)|$ za 9 različitih faktora prigušenja između $\zeta \in [0.1, 0.2]$ unutar frekvencijskog područja $\omega \in [10^{-1}, 10^1]$, moguće je odrediti jednu od mnogih mogućih težina neizvjesnosti koje zadovoljavaju (6.54). Tako npr. jedna moguća težina neizvjesnosti bila bi:

$$W(s) = \frac{0.06(1 + 80s)}{1.7s^2 + 0.40s + 1.7}$$

Ova težina neizvjesnosti je ostvariva jer je konačnog reda, kauzalna i dana racionalnom funkcijom po kompleksnoj varijabli s .



Slika 6.29: Amplitude $|\Delta_n(j\omega)| = |G(j\omega) - G_n(j\omega)|$ za različite ζ i težine neizvjesnosti $|W(j\omega)|$

Primjer 6.17 (Neizvjesno vrijeme kašnjenja)

Često je slučaj da se vrijeme kašnjenja procesa zanemari ili aproksimira Padé-redom (aproksimacija prvog reda). Pretpostavimo da se pravi proces može prikazati modelom:

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s+1} ; \tau \in [0, 0.2]$$

Ako se vrijeme kašnjenja zanemari, nominalni model pravog procesa će biti:

$$G_n(s) = \frac{1}{s+1}$$

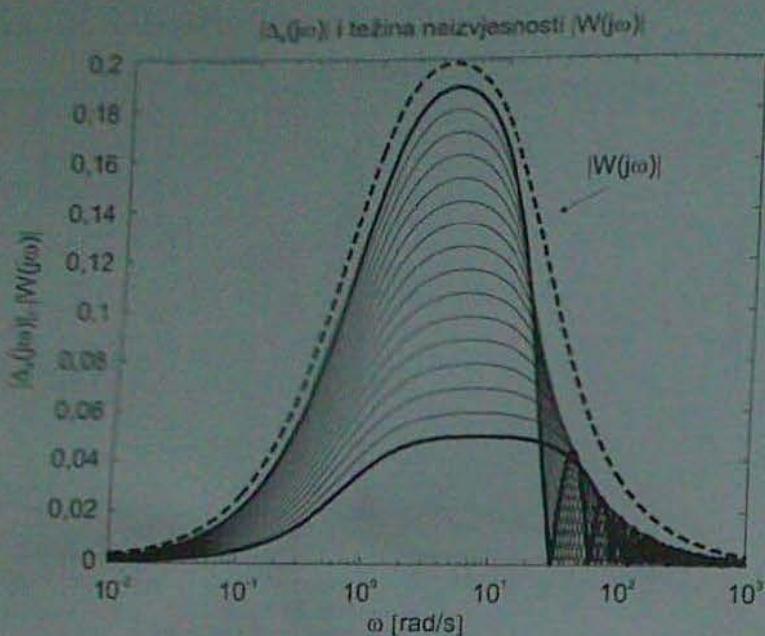
Crtanjem neizvjesnosti dinamičkog modela

$$|G(j\omega) - G_n(j\omega)|$$

za dovoljno velik broj različnih vremena kašnjenja u intervalu $\tau \in [0, 0.2]$ dobiti će se krivulje:

$$|\Delta_n(j\omega)| = |G(j\omega) - G_n(j\omega)| \quad (6.55)$$

(vidi sliku 6.30).



Slika 6.30: Neizvjesnosti dinamičkog modela $|\Delta_n(j\omega)|$ i težina neizvjesnosti $|W(j\omega)|$

Ostvarena težina neizvjesnosti koja zadovoljava (6.54) je npr.:

$$W(s) = \frac{0.0025(1+100s)}{(1+1.2s)(1+0.06s)}$$

Primjer 6.18 Ako je nominalni model procesa dan sa:

$$G_n(s) = \frac{1}{s^2}$$

dok nam je poznato da "pravi proces" sadrži kašnjenje koje se mijenja u granicama $0.03 < \tau < 0.15$ te se može opisati sa:

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s^2}$$

Ovo kašnjenje moguće je tretirati kao množstvenu perturbaciju nominalnog modela, tako da $G(s)$ ugradimo u familiju:

$$\{(1 + \Delta W_2) G_n ; \|\Delta\|_\infty \leq 1\}$$

Da bi se to izvelo moglo je odrediti W_2 tako da normalizirana perturbacija zadovolji:

$$\left| \frac{G(j\omega)}{G_n(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega)| \quad ; \quad \forall \omega, \tau$$

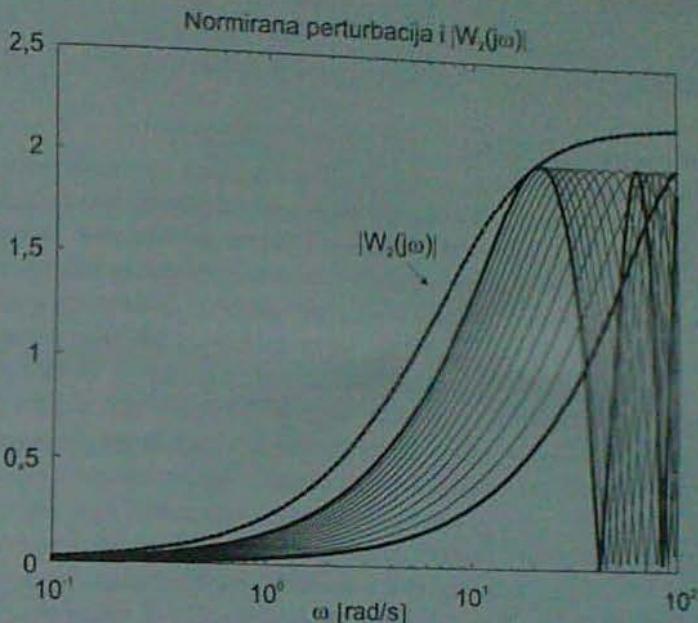
odnosno:

$$|e^{-\tau j\omega} - 1| \leq |W_2(j\omega)| \quad ; \quad \forall \omega, \tau \quad (6.56)$$

Jedna od beskonačno mnogo težina neizvjesnosti koja zadovoljava (6.56) je:

$$W_2(s) = \frac{0.21s}{0.095s + 0.9}$$

Na slici 6.31. prikaz je normirane perturbacije i težine neizvjesnosti.



Slika 6.31: Prikaz normirane perturbacije $\left| \frac{G}{G_n} - 1 \right|$ i težine neizvjesnosti $|W_2(j\omega)|$

Da bi se dobio osjećaj koliko je ovaj izbor W_2 konzervativan, valja usporediti na nekoliko frekvencija stvari skup neizvjesnosti:

$$\left\{ \frac{G(j\omega)}{G_n(j\omega)} : 0.03 \leq \tau \leq 0.15 \right\} = \{ e^{-\tau j\omega} : 0.03 \leq \tau \leq 0.15 \}$$

sa kružnicom (diskom):

$$\{s : |s - 1| \leq |W_2(j\omega)|\}$$

Multiplikativni perturbacijski model (kao i aditivni perturbacijski model) ne mora uvijek biti najpogodniji, jer kružnica koja obuhvaća skup neizvjesnosti može biti gnuba aproksimacija. U tom slučaju, regulator koji je projektiran za model s multiplikativnom perturbacijom je vjerojatno prekonzervativan za pravi model neizvjesnosti. Iz gornjih primjera očigledno je da postoji određeni konzervativizam. Naime, skup (za primjer aditivne perturbacije):

$$\mathcal{G}_\tau := \left\{ G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s+1} : \tau \in [0, 0.2] \right\}$$

predstavlja podskup od:

$$\mathcal{G}_\Delta := \{ G = G_n + \Delta_n : \Delta_n(s) \text{ je stabilan, i } |\Delta_n(j\omega)| < |W(j\omega)|, \forall \omega \}$$

odnosno, skup (za primjer množstvene perturbacije)

$$\mathcal{G}_\tau := \left\{ G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s^2} : \tau \in [0.03, 0.15] \right\}$$

predstavlja podskup od

$$\mathcal{G}_\Delta := \{ G(s) = [1 + \Delta_m(s)] G_n(s) \} : \Delta_m(s) \text{ je stabilan i } \left| \frac{G}{G_n} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega)|$$

Premda tome može se reći sljedeće:

Ako regulator postigne projektne zahtjeve $\forall G \in \mathcal{G}_\Delta$, tada će on biti odgovarajući regulator i za sve modelle u skupu \mathcal{G}_τ . Kako je skup \mathcal{G}_Δ veći od pravog skupa \mathcal{G}_τ , koji nas interesira, može se dogoditi da je ciljeve projektiranja (tražene performanse zatvorenog sustava) teže postići za modelle iz većeg skupa odnosno u novom ambijentu u kojem se neizvjesnost o parametrima pretvorila u neizvjesnost o dinamici procesa. Naime, moguće performanse sustava dobivene sintezom na temelju većeg skupa ne moraju biti tako dobre kao ostvarive performanse koje se mogu postići na modelima iz manjeg skupa; tj. možda postoji (iako ga ne možemo naci) regulator kojim se postižu bolje performanse na manjem skupu i koji je stoga bolji od regulatora koji projektiramo za modelle iz većeg skupa. U tom smislu, regulator koji se projektira temeljem modela iz većeg skupa je konzervativan za modelle iz manjeg skupa.

Što se onda dobilo ovom pretvorbom od parametarske na dinamičku neizvjesnost? Odgovor na to pitanje u svezi je s poteškoćama u projektiranju regulatora, jer se isto tako može dogoditi da je lakše projektirati regulator za modelle procesa iz većeg skupa \mathcal{G}_Δ , nego za modelle procesa iz njegovog podskupa \mathcal{G}_τ . Kako množstvena neizvjesnost predstavlja relativnu pogrešku modela, dok aditivna predstavlja absolutnu pogrešku, to se množstvena neizvjesnost češće koristi. Pored navedenih mogući su i drugi modeli neizvjesnosti.

Primjer 6.19 Za familiju procesa danu sa:

$$\mathcal{G}_\zeta := \left\{ \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} : \zeta \in [0.1, 0.2] \right\},$$

može se promjenjivi parametar izraziti kao:

$$\zeta = 0.15 + 0.05\Delta, \text{ gdje je } -1 \leq \Delta \leq 1.$$

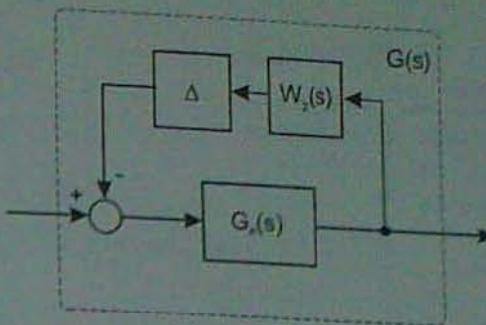
Tada se familija procesa može prikazati sa:

$$\frac{G_n(s)}{1 + \Delta W_2(s) G_n(s)} : -1 \leq \Delta \leq 1,$$

gdje je:

$$G_n(s) = \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1}, \quad W_2(s) = 0.05s.$$

Blok shema koja odgovara ovakvom prikazu neizvjesnosti dana je na slici 6.32, na kojoj nominalni model ima povratnu vezu neizvjesnosti.



Slika 6.32: Model neizvjesnosti kao sustav s povratnom vezom

Modeli neizvjesnosti koji se najčešće koriste su:

- multiplikativni model perturbacije: $[1 + \Delta_m(s)] G_n(s)$ gdje $\Delta_m(s) = \Delta(s)W_2(s)$
- aditivni model perturbacije: $[G_n(s) + \Delta_a(s)]$ gdje $\Delta_a(s) = \Delta(s)W_2(s)$
- model perturbacije kao sustav s povratnom vezom: $\frac{G_n(s)}{1 + \Delta(s)W_2(s)G_n(s)}$
- model perturbacije: $\frac{G_n(s)}{1 + \Delta(s)W_2(s)}$

U svakom od navedenih modela nužne su odgovarajuće pretpostavke o $\Delta(s)$ i $W_2(s)$. Najčešće su to pretpostavke o stabilnosti ovih funkcija prijenosa. Budući da su pogreške modeliranja frekvencijski ovisne, to koji puta može biti korisno upotrijebiti različite modele perturbacije za različita frekvencijska područja.

Kada kažemo da je neki sustav robustan tada pod time podrazumijevamo da postoji regulator koji stabilizira sve matematičke modele procesa iz određenog skupa (robustna stabilnost¹⁵³), te da postoje željene performanse zatvorenog sustava koje se postižu regulatorom sa svim procesima iz poznatog skupa (robustnost performansi¹⁵⁴). Regulator osigurava robustnu stabilnost ako interna stabilizira sve procese u familiji (skupu procesa) \mathcal{G} . Vecinu rezultata i uvjeta za robustnu stabilnost moguće je izvesti iz Nyquistova kriterija stabilnosti i određenih njegovih varijacija ili sljedećeg vrlo važnog rezultata teorije upravljanja - *teorema malog pojačanja*¹⁵⁵.

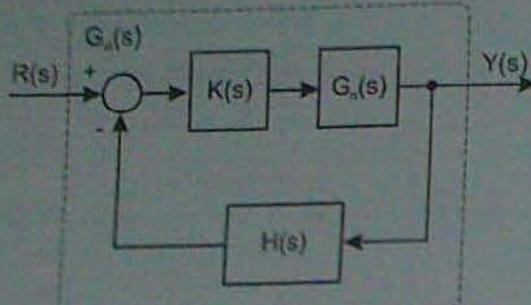
Teorem (Teorem malog pojačanja). Ako se razmatra zatvoren krug upravljanja dan na slici 6.33, te ako se pretpostavi da su kompenzator ($K(s)$), proces ($G_n(s)$) i $H(s)$ stabilni, tada će zatvoren krug ostati stabilan ako vrijedi:

$$|G_0(s)| = |K(s)G_n(s)H(s)| < 1$$

¹⁵³ engl. Robust stability.

¹⁵⁴ engl. Robust performance.

¹⁵⁵ engl. Small-gain theorem.



Slika 6.33: Blok-shema zatvorenog kruga upravljanja

Također vrijedi:

$$|K(s)G_n(s)H(s)| = |K(s)G_n(s)| \cdot |H(s)|$$

te je stabilnost zatvorenog kruga zagaranirana ako vrijedi:

$$|K(s)G_n(s)| \cdot |H(s)| < 1 \quad (6.57)$$

Drugim riječima, teorem malog pojačanja kaže da je za stabilnost zatvorenog kruga nužno da pojačanje otvorenog kruga bude malo. Teorem je moguće dokazati pomoću Nyquistova kriterija stabilnosti. Po ovom teoremu slijedi da će zatvoren krug automatskog upravljanja, koji se sastoji od stabilnih komponenata, biti stabilan samo ako je umnožak svih pojačanja u petljama manji od jedan. Ovo vrijedi kako za linearne tako i za nelinearne sustave i u tome je velika važnost ovoga teorema. Teorem malog pojačanja garantira potpunu (totalnu) stabilnost, tj. da su sve moguće funkcije prijenosa zatvorenog kruga stabilne, odnosno da su svi signali unutar sustava ograničeni ako su pobude na sustav ograničene. Teorem malog pojačanja daje dovoljne uvjete za stabilnost zatvorenog sustava. Naime, moguće je da uvjeti (6.57) ne budu zadovoljeni a da sustav ipak bude stabilan. Ako se zbog jednostavnosti uzme da je $H(s) = 1$, tada će vrijediti:

$$|K(s)| \cdot |G_n(s)| < 1 \quad (6.58)$$

Uz pretpostavku da stabilni kompenzator i stabilni nominalni proces ($\Delta = 0$) zadovoljavaju (6.58), zatvoren sustav je stabilan. Naime, ako je $G_0(s)$ stabilan i ako vrijedi $\|G_0(s)\|_\infty < 1$, tada je i $(1 + G_0)^{-1}$ također stabilan. Ako se uvede u razmatranje *komplementarna funkcija osjetljivosti* definirana sa:

$$\begin{aligned} T(s) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - S(s) &= 1 - \frac{1}{1 + G_0(s)} \\ &= \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{K(s)G_n(s)}{1 + K(s)G_n(s)} \end{aligned} \quad (6.59)$$

te ako se uvede model mnoštvene neizvjesnosti (6.51), tada uvjet (6.58) rezultira *uvjetom robustne stabilnosti*¹⁵⁶:

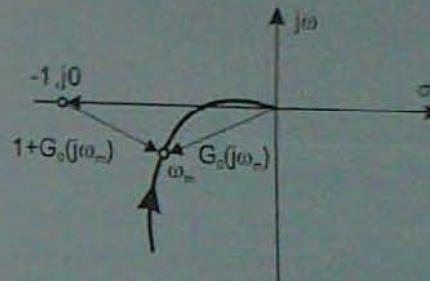
$$\|W_2(s)T(s)\|_\infty < 1 \quad (6.60)$$

¹⁵⁶Uvjet vrijedi za mnoštvene modelne neizvjesnosti. Dokaz je dan u [43].

Izraz (6.59) daje vrlo važnu relaciju:

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (6.61)$$

gdje $S(s) \stackrel{def}{=} 1 / |1 + G_0(s)|$ predstavlja osjetljivost sustava. Temeljem (6.61) slijedi: ako je pojačanje otvorenog kruga veliko $|G_0| >> 1$, komplementarna osjetljivost će biti $|T| \approx 1$, dok osjetljivost mora biti mala, $|S| \ll 1$. Mala osjetljivost sustava znači da sustav posjeduje dobra svojstva eliminiranja poremećaja i praćenja postavne veličine. Iz frekvenčke karakteristike otvorenog kruga (Nyquist) moguće je dobiti nužne informacije kako o relativnoj stabilnosti tako i o osjetljivosti sustava. Naime, najkraća udaljenost od kritične točke do njoj najbliže točke na frekvenčkoj karakteristici (točka ω_m na slici 6.34) jednaka je $1 / \|S\|_\infty$.



Slika 6.34: Značajni vektori za robustnu stabilnost

Fazor (vektor), $1 + G_0(j\omega_m)$, naziva se *povratna diferencija*¹⁵⁷ i vrlo je važan u analizi robusnosti. Prema tome, može se pisati:

$$\begin{aligned} \text{udaljenost od } -1 \text{ do Nyquist krivulje} &= \inf_{\omega} |-1 - L(j\omega)| \\ &= \inf_{\omega} |1 + L(j\omega)| \\ &= \left[\sup_{\omega} \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \right]^{-1} \end{aligned}$$

gdje $L(s)$ predstavlja *povratnu razliku* odnosno *pojačanje petlje*¹⁵⁸ (povratni omjer) ($L(s) = -G_0(s)$). Osjetljivost sustava je preko povratnog omjera dana sa:

$$S(s) = \frac{1}{1 - L(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)} = 1 - T(s)$$

Uvjet robusne stabilnosti (6.60) moguće je grafički tumačiti na sljedeći način. Kako je

$$\|W_2(s)T(s)\|_\infty < 1 \iff \left| \frac{W_2(j\omega)G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)} \right| < 1, \quad \forall \omega$$

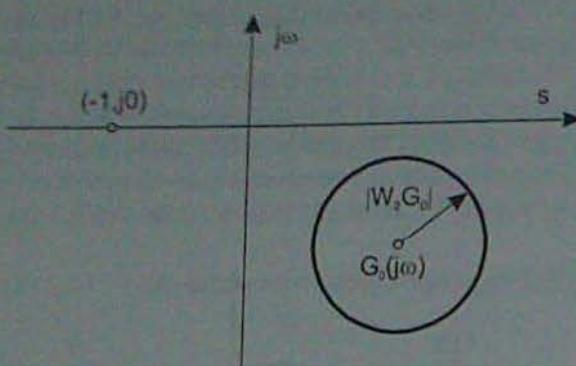
odnosno:

$$\|W_2(s)T(s)\|_\infty < 1 \iff |W_2(j\omega)G_0(j\omega)| < |1 + G_0(j\omega)|, \quad \forall \omega \quad (6.62)$$

¹⁵⁷ engl. Return difference.

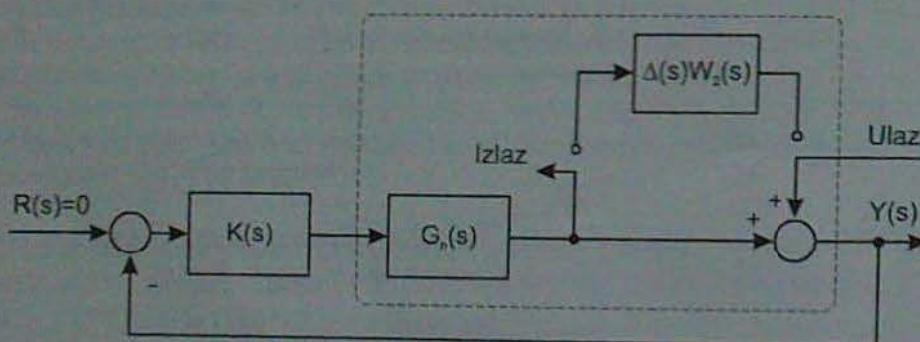
¹⁵⁸ engl. Loop gain (return ratio).

Uvjet robusne stabilnosti, izraz (6.62), traži da za svaku frekvenciju ω kritična točka $(-\Gamma, j\omega)$ mora biti izvan kružnice sa središtem u $G_0(j\omega)$ i radijusom $|W_2(j\omega)G_0(j\omega)|$ (slika 6.35).



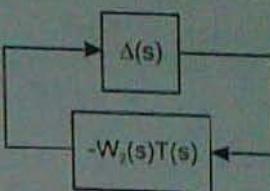
Slika 6.35: Grafička interpretacija robusne stabilnosti

Dakle, za robusnu stabilnost treba crtati kružnice s centrom na frekvencijskoj karakteristici otvorenog kruga, kojima će se radijus smanjivati s povećanjem frekvencije. Ako kritična točka ne uđe niti u jednu od kružnica, sustav je robusno stabilan. Važnost izraza (6.60) moguće je vidjeti ako se nacrtava blok-dijagram perturbiranog modela neizvjesnosti (multiplikativna neizvjesnost na izlazu), u zatvorenom krugu automatskog upravljanja sa serijskim kompenzatorom $K(s)$ – regulatorom. Kako nas zanima zatvoreni sustav viđen sa stajališta neizvjesnosti, to je na slici 6.36, prikazano koje su stezaljke ulazna i izlazna u tom slučaju.



Slika 6.36: Multiplikativna neizvjesnost na izlazu

Pojednostavljen prikaz zatvorenog sustava viđen sa ulazno/izlaznim stezaljki na slici 6.36, dan je na slici 6.37.



Slika 6.37: Zatvoren krug viđen sa stajališta neizvjesnosti.

Maksimalno pojačanje otvorenog kruga na slici jednako je $\|\Delta(s)W_2(s)T(s)\|_\infty$ i ono je < 1 za sve dozvoljene $\Delta(s)$ ako i samo ako vrijedi uvjet teorema malog pojačanja $\|W_2(s)T(s)\|_\infty < 1$. Prema tome iz uvjeta stabilnosti po teoremu malog pojačanja slijedi da za robusnu stabilnost mora biti:

$$|\Delta_m(s)| = |\Delta(s)W_2(s)| < \frac{1}{|T(s)|} \quad (6.63)$$

odnosno:

$$|\Delta_m(j\omega)| = |\Delta(j\omega)W_2(j\omega)| < \frac{1}{|T(j\omega)|} \quad \forall \omega \quad (6.64)$$

Ako je multiplikativna pogreška modeliranja ograničena i stabilna:

$$|\Delta(s)| < W_2(s),$$

tada će zatvoren krug biti *robustno stabilan*, ako:

$$\boxed{|\Delta(s)| < \frac{1}{W_2(s)} \text{ odnosno } |W_2(s)T(s)| < 1} \quad (6.65)$$

Ako nas zanima najmanja neizvjesnost koja će destabilizirati sustav, tada valja odrediti njezin iznos. Kako multiplikativna neizvjesnost mora biti manja od $1/T$, to ona mora biti manja od minimalnog iznosa $1/T$. Želimo li minimizirati desnu stranu nejednadžbe (6.63), tada treba maksimizirati $|T(s)|$. Ako sustav ima rezonanciju (npr. standardni sustav drugog reda za $\zeta < 0.7$), tada će maksimalni iznos $|T(j\omega)|$ kada $0 < \omega < \infty$ biti na rezonantnoj frekvenciji ω_m . Prema tome, najmanji iznos destabilizirajuće neizvjesnosti koji se naziva *multiplikativno osiguranje stabilnosti (MSM)*¹⁵⁹ dan je sa:

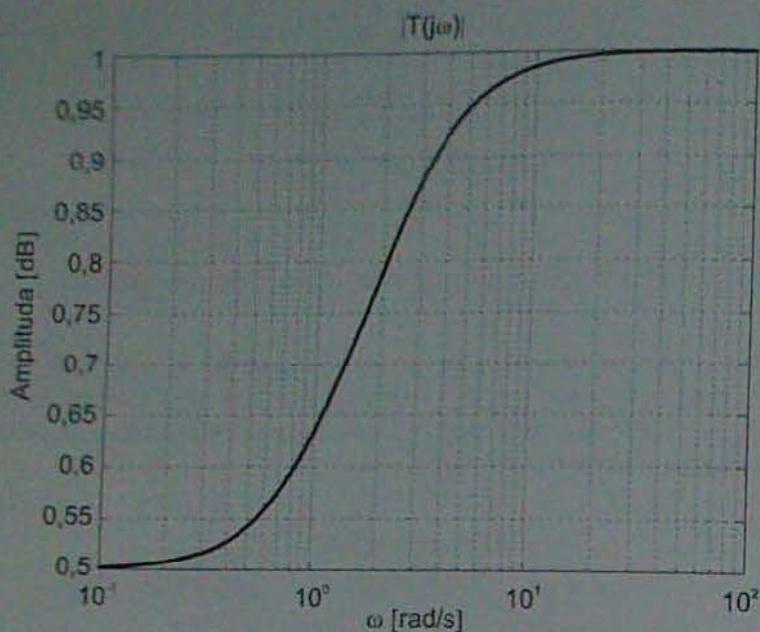
$$MSM \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M_m} \quad (6.66)$$

gdje je: $M_m = \sup |T(j\omega)|$. Simbol 'sup' predstavlja *supremum* funkcije. Supremum (ili najmanja gornja granica) funkcije je njezin najveći iznos, čak i onda kad funkcija ne postigne taj iznos. Tako npr. funkcija $T(s) = (s+1)/(s+2)$ nema maksimum (rezonanciju), no:

$$\sup_{\omega} \frac{|j\omega + 1|}{|j\omega + 2|} = 1,$$

Najime, kako funkcija $|T(j\omega)|$ nema maksimum i nikada neće postići 1 (odnosno tek na $\omega = \infty$), njezin supremum je 1 (slika 6.38).

¹⁵⁹ engl. Multiplicative Stability Margin (MSM).



Slika 6.38: Amplitudna frekvencijska karakteristika $|T(j\omega)|$

Interpretacija MSM je sljedeća: Sustav je robusno stabilan u odnosu na nemodeliranu multiplikativnu neizvjesnost ako je njezina amplitudna frekvencijska karakteristika manja od MSM ($|\Delta_m| < MSM$).

Za aditivni model neizvjesnosti moguće je na isti način doći do *aditivnog osiguranja stabilnosti (ASM)*¹⁶⁰. Tako će se kao funkcija prijenosa koju vidi aditivna neizvjesnost dobiti (u povratnoj vezi je $H(s)$):

$$\frac{-H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

pa će zatvoreni krug biti robusno stabilan ako vrijedi:

$$|\Delta_a(s)| < \frac{1}{|H(s)(1 + G(s)H(s))^{-1}|} = \frac{1}{|H(s)S(s)|}$$

gdje je: $S(s) = (1 + GH)^{-1}$. Ako je neizvjesnost stabilna i ograničena tj. ako vrijedi $|\Delta_a(j\omega)| < |W(j\omega)|$; $\forall \omega$ tada će zatvoreni sustav biti robusno stabilan ako:

$$|H(s)S(s)| < \frac{1}{W(s)} \text{ odnosno } |W(s)H(s)S(s)| < 1 \quad (6.67)$$

Aditivno osiguranje stabilnosti je:

$$ASM \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sup_{\omega} |H(j\omega)S(j\omega)|} \quad (6.68)$$

¹⁶⁰engl. Additive Stability Margin (ASM).

Za razliku od amplitudnog i faznog osiguranja koji moraju biti zadovoljeni na određenim frekvencijama (srednje frekvencijsko područje ω_c i ω_n), kod robusne stabilnosti nužno je da uvjeti (6.65) ili (6.67) budu zadovoljeni na svim frekvencijama. Pored toga, amplitudno osiguranje predstavlja dozvoljeno pojačanje do ruba stabilnosti, uz uvjet da istodobno ne dođe do promjena u fazi. Prema tome, amplitudno osiguranje predstavlja mjeru tolerancije neizvjesnosti za čisto pojačanje (bez faze). Također, fazno osiguranje pretpostavlja da je pojačanje nepromjenjivo, pa je ono mjeru tolerancije samo za faznu neizvjesnost. *MSM* međutim omogućuje istodobnu promjenu i pojačanja i frekvencije u blizini frekvencija ω_c i ω_n . Zbog toga je *MSM* općenitija mjeru stabilnosti nego amplitudno i fazno osiguranje, te se katkada zove *pojačanje-faza osiguranje*¹⁶¹. Treba napomenuti sljedeće:

1. Multiplikativna neizvjesnost može biti *bilo koja stabilna funkcija prijenosa* uz uvjet da je njena amplituda ispod granice *MSM*.
2. Teorem malog pojačanja daje samo dovoljne uvjete stabilnosti. Može se dogoditi da on ne bude zadovoljen, a da sustav ipak bude stabilan. *MSM* i *ASM* su katkada vrlo konzervativne mjerne, tj. sustav može tolerirati neizvjesnosti koje pak ne zadovoljavaju ove mjerne.

Za različite modele neizvjesnosti testovi robusne stabilnosti su (uz jediničnu povratnu vezu):

Perturbacija	Uvjet robusne stabilnosti
$[1 + \Delta(s)W_2(s)] G_n(s)$	$\ W_2(s)T(s)\ _{\infty} < 1$
$G_n(s) + \Delta(s)W_2(s)$	$\ W_2(s)K(s)S(s)\ _{\infty} < 1$
$\frac{G_n(s)}{1 + \Delta(s)W_2(s)G_n(s)}$	$\ W_2(s)G_n(s)S(s)\ _{\infty} < 1$
$\frac{G_n(s)}{1 + \Delta(s)W_2(s)}$	$\ W_2(s)S(s)\ _{\infty} < 1$

Primjer 6.20 Analizirati će se robusna stabilnost sustava prikazanog nominalnom funkcijom prijenosa:

$$G_n(s) = \frac{170000(s+0.1)}{s(s+3)(s^2+10s+10000)}$$

Zatvoren sustav s jediničnom povratnom vezom biti će nestabilan, no smanjenjem pojačanja moguće ga je stabilizirati. Ako se serijskim kompenzatorom $K(s) = 0.5$ stabilizira sustav, zanima nas da li će s takvim kompenzatorom sustav biti robusno stabilan s obzirom na nemodelirani pol na $50[\text{rad/s}]$. Ako se za svrhu analize robusnosti upotrijebi multiplikativna perturbacija:

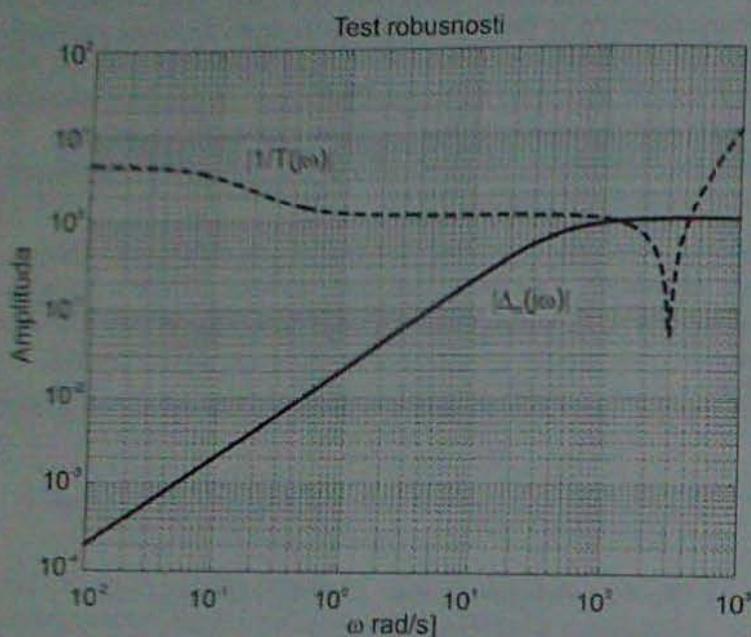
$$1 + \Delta_m(s) = \frac{50}{s+50}$$

tada će se dobiti:

$$|\Delta_m(j\omega)| = \left| \frac{-j\omega}{j\omega + 50} \right|$$

¹⁶¹engl. Gain-phase margin.

Na slijedećem dijagramu se u crtanju amplitudne frekvenčne karakteristike multiplikativne neizvjesnosti $|\Delta_m(j\omega)|$ te provjeri je li ona na svim frekvencijama ispod inverzne amplitudne frekvenčne karakteristike komplementarne funkcije osjetljivosti $\left| \frac{1}{T(j\omega)} \right|$ – vidi uvjet (6.64).

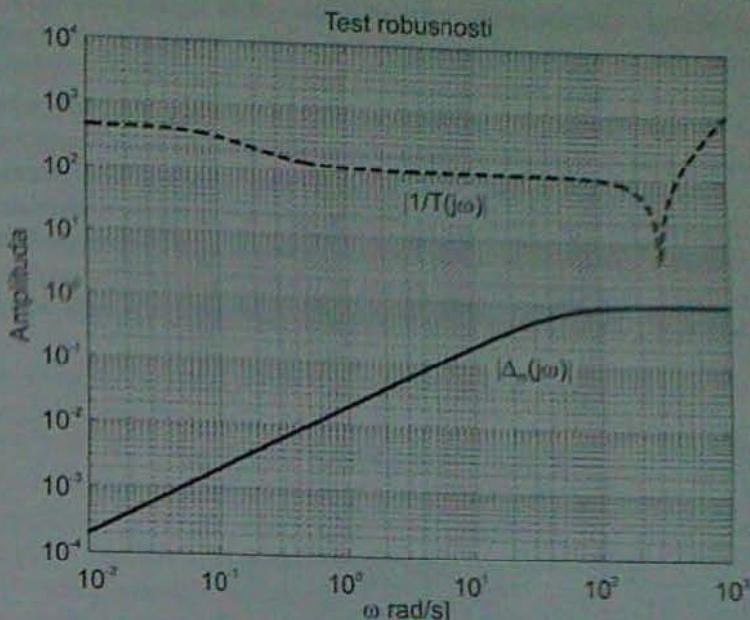


Slika 6.39: Amplitudna frekvenčna karakteristika multiplikativne neizvjesnosti $|\Delta_m(j\omega)|$ (puna crta) i $\left| \frac{1}{T(j\omega)} \right|$ (crtkano) s kompenzatorom $K(s)$

Kao što vidimo iako stabilizira sustav, kompenzator $K(s) = 0.5$ nije u stanju osigurati robusnu stabilnost, jer njime nije zadovoljen uvjet (6.63) na svim frekvencijama. Ako se umjesto kompenzatora $K(s)$ uporabi kompenzator $K_1(s) = 5 \cdot 10^{-3}$, ili pak kompenzator:

$$K_2(s) = \frac{0.15(s + 25)}{(s + 2.5)}$$

dobiti ćemo svojstvo robusne stabilnosti, jer će uvjet (6.63) vrijediti na svim frekvencijama. Za slučaj kompenzatora $K_1(s)$ amplitudne karakteristike dane su na slici 6.40.



Slika 6.40: Amplitudna frekvencijska karakteristika množične neizvjesnosti $|\Delta_m(j\omega)|$ (puna crta) i $\left| \frac{1}{T(j\omega)} \right|$ (crtkano) s kompenzatorom $K_1(s)$

Zapazit ćemo da se je u danim primjerima mijenjao samo jedan parametar! Što se događa ako se više od jednog parametra može mijenjati? U tom slučaju struktura neizvjesnosti postaje složenija i može biti potpuno različita. O tome će biti riječi u nastavku.

6.4.3 Robusna stabilnost - za strukturiranu neizvjesnost (polinomski pristup)

6.4.3.1 Polinomske strukture neizvjesnosti

Matematičke definicije

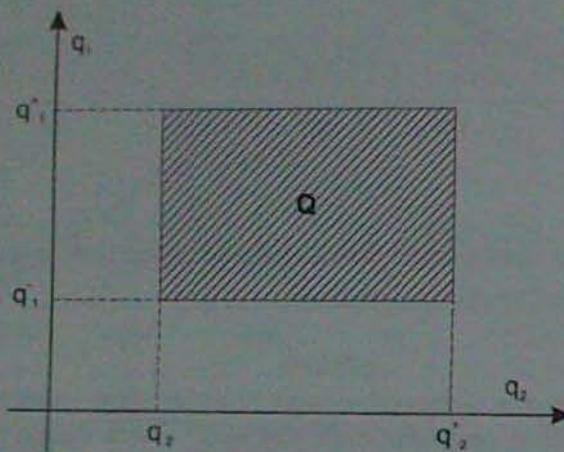
Da bi se lakše usvojio razmjerno nov matematički aparat nužan za analizu robusne stabilnosti, potrebno je odrediti definicije i pojmove na kojima se temelje osnovni rezultati. Do sada su se polinomi brojnika funkcije prijenosa uglavnom označavali s $B(s)$ odnosno $N(s)$, dok su se polinomi nazivnika označavali s $A(s)$, odnosno $D(s)$. Ove oznake će se i dalje zadržati, ali u definicijama koje slijede rabit će se opće oznake za polinome $p(s)$ ili $\alpha(s)$, pod kojima se mogu podrazumijevati svi gore navedeni polinomi. Uobičajeno je da funkcije prijenosa $G(s)$ te polinomi $p(s)$ ili $\alpha(s)$ imaju kompleksnu varijablu s kao jedini argument. Međutim, za potrebe robusne analize stabilnosti uporabit će se dva argumenta: $G(s, q)$ umjesto $G(s)$ te $p(s, q)$ ili $\alpha(s, q)$ umjesto $p(s)$ ili $\alpha(s)$. Sa q se označava vektor neizvjesnih realnih parametara nekog sustava, koeficijentata polinoma i sl. Kako bi se istakla ovisnost matematičkog modela, polinoma i sl., o q , on je uključen kao drugi argument funkcije ili polinoma.

Definicija (Skup ograničenja neizvjesnosti¹⁰²) Skup ograničenja neizvjesnosti Q je skup

$$Q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^l \mid q_i \in \mathbb{R} \text{ za } i = 1, 2, \dots, l\}$$

Zapazimo da ograničenja q_i , a posljedično i Q , ne moraju biti međusobno povezana. Pa tako, u nastavku će se koristiti povezani skupovi budući da je većina rezultata u literaturi primjenjuje samo na povezane skupove. Ova pretpostavka nije restriktivna jer se većina fizičkih parametara (kao npr. koeficijenti viskoznog trenja, svojstva materijala, duljine i sl.) koji tvore vektor neizvjesnosti mijenjaju kontinuirano unutar ograničenog intervala, poprimajući realne iznose. Često se pojedini elementi q_i vektora \mathbf{q} opisuju svojim donjim q_i^- i gornjim granicama q_i^+ . Tada je skup ograničenja neizvjesnosti tipa pravokutnika (slika 6.41).

$$Q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^l \mid q_i^- < q_i < q_i^+ \text{ za } i = 1, 2, \dots, l\}$$



Slika 6.41: Q je pravokutnik

Definicija (Familija) Funkcija neizvjesnosti zajedno s njezinim skupom ograničenja neizvjesnosti naziva se familija i označava se sa:

$$\mathcal{F}(\cdot, Q) = \{f(\cdot, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in Q\}$$

Tako npr., neizvjestan proces $G(s, \mathbf{q})$ s njegovim skupom ograničenja neizvjesnosti Q tvori familiju procesa označenih sa $\mathcal{G}(s, Q) = \{G(s, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in Q\}$.

Po analogiji može se pisati $\mathcal{N}(s, Q) = \{N(s, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in Q\}$ za familiju polinoma u brojniku, te $\mathcal{D}(s, Q) = \{D(s, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in Q\}$ za familiju polinoma u nazivniku. Ako se bavimo ograničenjima koja mogu poprimiti neizvjesne veličine, bez pretpostavke o bilo kakvom njihovom statističkom opisu, tada je obrazac familije vrlo važan. Naime, familija u sebi objedinjuje sve matematičke modele nekog procesa kada mu se parametri mijenjaju unutar poznatih ograničenja. Familija također može objedinjavati i sve polinome s različitim koeficijentima, ili funkcije prijenosa ili druge matematičke objekte, npr. matrice. Treba međutim jasno razlikovati pojam neizvjesnog sustava od pojma familije sustava. Kod prvog pojma radi se o

¹⁰² engl. Uncertainty bounding set.

sustavu kod kojega ograničenja neizvjesnih parametara nisu poznata. Kada imamo neizvjesan sustav i poznata ograničenja (skup ograničenja) njegovih neizvjesnih parametara, tada govorimo o *familiji sustava*.

Primjer 6.21 Armaturno reguliran istosmjerni motor (vidi primjer 4.4) sa neizvjesnim teretom na osovini rotora ima funkciju prijenosa:

$$G(s) = \frac{M_t(s)}{U_a(s)} = \frac{K(J_t s + b_t)}{(R_a + L_a s) [\underbrace{(J_m + J_t)s}_{J} + \underbrace{b_m + b_t}_{b_0}] + K^2}$$

gdje su:

M_t - moment tereta

U_a - armaturni napon

$b_m = 2 \cdot 10^{-5}$ [Nms] - koeficijent viskoznog trenja motora

$b_t = 2 \cdot 10^{-5}$ [Nms] - koeficijent viskoznog trenja tereta

$J_m = 0.0002$ [kgm²] - moment inercije motora na osovini

$L_a = 0.02$ [H] - induktivitet aramaturnog kruga

$R_a = 1$ [Ω] - otpor aramaturnog kruga

Dva su glavna izvora neizvjesnosti u ovom slučaju: to su konstanta motora i moment inercije tereta svedeni na osovinu motora. Oni se npr. mogu kretati unutar sljedećih ograničenja:

$10^{-5} \leq J_t \leq 3 \cdot 10^{-5}$ [kgm²] - moment inercije tereta na osovini

$0.2 \leq K \leq 0.6$ [Vs] konstanta motora

Ako se neizvjesni parametri označe sa $q_1 = K$ te $q_2 = J_t$, tada je familija funkcija prijenosa $G(s, Q) = \{G(s, q) \mid q \in Q\}$ dana sa:

$$G(s, q) = \frac{0.5q_1 q_2 s + 10^{-5} q_1}{(10^{-5} + 0.005q_2) s^2 + (0.00102 + 0.5q_2) s + (2 \cdot 10^{-5} + 0.5q_1^2)}$$

sa skupom ograničenja neizvjesnosti Q tipa pravokutnika s $q_1^- = 0.2$ i $q_1^+ = 0.6$ te $q_2^- = 10^{-5}$ i $q_2^+ = 3 \cdot 10^{-5}$ (vidi sliku 6.41).

U općem slučaju *familija polinoma* će se označiti kao:

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n a_i(q) s^i$$

gdje su:

$a_i(q)$ - koeficijenti familije polinoma; $a_i(q) = f_i(q)$

q - vektor neizvjesnih parametara

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

Q - skup ograničenja neizvjesnosti svih neizvjesnih parametara

Strukture neizvjesnosti su vrlo važne jer bitno određuju koji postupak za analizu robusne stabilnosti vrijedi. U nastavku ćemo dati najvažnije definicije za različite strukture neizvjesnosti.

Definicija (Nezavisna struktura neizvjesnosti^[63]). Za neizvjestan polinom

$$p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}) s^i$$

se kaže da ima *nezavisnu strukturu neizvjesnosti* ako svaka komponenta q_i vektora \mathbf{q} ulazi u samo jedan koeficijent, [8].

Primjer 6.22

$$p(s, \mathbf{q}) = (3q_3 + 2)s^3 + (q_2 + 1)s^2 + (q_1 - 1)s + (2q_0 + 3)$$

■

NAPOMENA Nezavisna struktura neizvjesnosti predstavlja idealizaciju stvarnosti u kojoj neizvjesni parametri sustava u općem slučaju ulaze u više od jednog koeficijenta neizvjesnog polinoma $p(s, \mathbf{q})$. Čak štoviše, u mnogim slučajevima koeficijenti familije polinoma $a_i(\mathbf{q})$ često su nelinearne funkcije.

Definicija (Intervalski familija polinoma). Za familiju polinoma

$$\mathcal{P}(s, Q) = \left\{ p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}) s^i \mid \mathbf{q} \in Q \right\}$$

kažemo da je *intervalска familija polinoma*^[64] ako neizvjesni polinom $p(s, \mathbf{q})$ ima nezavisnu strukturu neizvjesnosti, svaki njegov koeficijent ovisi kontinuirano o vektoru \mathbf{q} i ako je skup njegovih ograničenja neizvjesnosti Q , tipa n -dimenzijskog kvadra,^[65] [8].

Zbog kratkoće, intervalsku familiju polinoma $\mathcal{P}(s, Q)$ zovemo intervalski polinom. Po analogiji, za familiju neizvjesnih procesa

$$\mathcal{G}(s, Q) = \{G(s, \mathbf{q}) = N(s, \mathbf{q})/D(s, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in Q\}$$

kažemo da je familija intervalskih procesa ako su i polinom brojnika $N(s, \mathbf{q})$ i polinom nazivnika $D(s, \mathbf{q})$ intervalski polinomi.

Primjer 6.23 Razmatra se karakteristični polinom trećeg reda

$$\alpha_{cl}(s) = s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

sa sljedećim ograničenjima neizvjesnosti, [11]:

$$\alpha_0 \in [38, 58], \quad \alpha_1 \in [25, 39], \quad \alpha_2 \in [8, 12], \quad \alpha_3 = 1$$

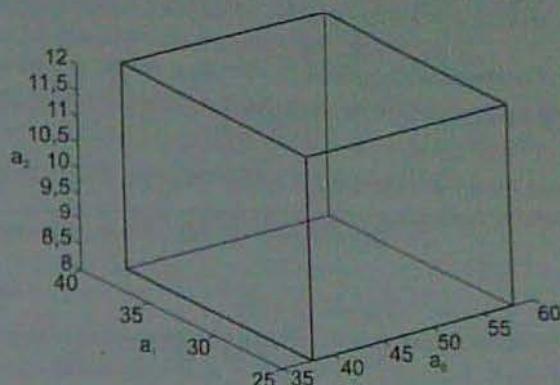
"Kvadar neizvjesnosti" za koeficijente $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$ prikazan je na slici 6.42. Uz nezavisnu promjenu u svakom od triju koeficijenata, bilo koja točka unutar kvadra ili na plaštu predstavlja valjan skup koeficijenata za taj karakteristični polinom. Prema tome, u ovom slučaju

^[63] engl. Independent uncertainty structure.

^[64] engl. Interval polynomial family.

^[65] engl. Box of uncertainty.

postoji trostruka neizmjeran skup karakterističnih polinoma za koje bi valjalo ispitati jesu li stabilni (Hurwitz polinomi).



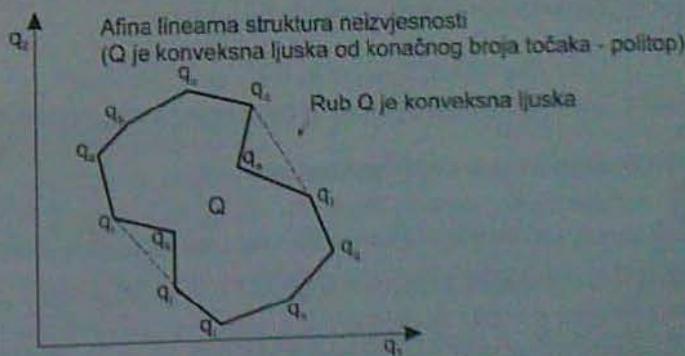
Slika 6.42: Kvadar neizvjesnosti za polinom trećeg reda

Definicija (Povezana linearna struktura neizvjesnosti¹⁶⁶) Neizvjestan polinom $p(s, \mathbf{q})$ imati će povezanu linearnu strukturu neizvjesnosti ako su svi koeficijenti familije polinoma $a_i(\mathbf{q})$ oblika:

$$a_i(\mathbf{q}) = \beta_i^T \mathbf{q} + \gamma_i$$

gdje su β_i stupčani vektor a γ_i je skalar, [8].

Za povezane linearne strukture neizvjesnosti skup ograničenja neizvjesnosti je konveksna ljska od konačnog broja točaka (*politop*¹⁶⁷), a nije kvadar. Na slici 6.43 dana je projekcija politopa u ravninu (q_1, q_2).



Slika 6.43: Q je politop

¹⁶⁶ engl. Affine linear uncertainty structure.

¹⁶⁷ engl. Polytope.

Primjer 6.24

$$\gamma(s) = (2\alpha_2 - \alpha_1 - 5)s^3 + (2\alpha_1 - 5\alpha_2)s^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)s + (\alpha_2 - 5)$$

NAPOMENA: Karakteristični polinom zatvorenog kruga s konstantnim parametrima regulatora i neizvjesnim parametrima procesa ima povezanu linearnu strukturu neizvjesnosti.

Primjer 6.25 (Promjenjivi parametri procesa). Pretpostavimo da se parametri regulatora ne mijenjaju. Neka je funkcija prijenosa regulatora dana sa $G_r(s) = N(s)/D(s)$, gdje su:

$$N(s) = (s + 2)$$

$$D(s) = (s^2 + 2s + 2)$$

Prijenosni procesor se mijenja u $G_p(s) = D(s, b)/A(s, a)$, gdje su:

$$A(s, a) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

$$B(s, b) = b_0$$

Poznate su granice u kojima se parametri procesa mijenjaju; one su dane sa:

$$b_0 \in [3, 5] ; a_3 \in [1, 1.1] ; a_2 \in [4, 4.2] ; a_1 \in [6, 8] ; a_0 \in [10, 20]$$

Karakteristični polinom zatvorenog kruga (jedinična negativna povratna veza) je tada:

$$\begin{aligned} \alpha_{st} &= (a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)(s^2 + 2s + 2) + b_0(s + 2) \\ &= \alpha_5s^5 + \alpha_4s^4 + \alpha_3s^3 + \alpha_2s^2 + \alpha_1s + \alpha_0 \end{aligned}$$

gdje su: $\alpha_5 = a_3$; $\alpha_4 = a_2 + 2a_3$; $\alpha_3 = a_1 + 2a_2 + 2a_3$; $\alpha_2 = a_0 + 2a_1 + 2a_2$; $\alpha_1 = 2a_0 + 2a_1 + b_0$; $\alpha_0 = 2a_0 + 2b_0$. Koeficijenti (parametri) karakterističnog polinoma zatvorenog kruga upravljanju se način mijenjaju u granicama;

$$\alpha_5 \in [1, 1.1] ; \alpha_4 \in [6, 6.4] ; \alpha_3 \in [16, 18.6]$$

$$\alpha_2 \in [30, 40.4] ; \alpha_1 \in [35, 61] ; \alpha_0 \in [26, 50]$$

Prepostavlja se da vektor neizvjesnih parametara:

$$\bar{\alpha} = [\alpha_5 \quad \alpha_4 \quad \alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_0]^T$$

može poprimiti bilo koj izraz u podskupu od \mathbb{R}^6 koji je određen gornjim intervalima za svaki parametar α_i . Drugim riječima, koeficijenti se mijenjaju nezavisno jedan od drugoga. Međutim, postoji svega pet zavisnosti preko drugih parametara ($\alpha_5, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_0$) , što znači da postoji mnoštvo u proslijedenoj parametru. Ako se robustna stabilnost može pokazati za sve moguće vrednosti parametara α , u gornjim intervalima, tada se može zaključiti da je zatvoreni sustav robustno stabilan. Obrat nije mogao. U tom smislu, pretvorba neizvjesnosti parametara procesa radi regulatora u neizvjesnost koeficijenata karakterističnog polinoma zatvorenog kruga, uvodi se slanovični konzervativizam.

Definicija (Vielinearna struktura neizvjesnosti¹⁶⁸). Neizvjestan polinom $p(s, q)$ ima vielinearnu strukturu neizvjesnosti ako su svi koeficijenti familije polinoma $a_i(q)$ vielinearne funkcije po komponentama vektora q . To znači, ako se svi osim jednog neizvjesnog parametra drže konstantnim, tada su koeficijenti familije polinoma $a_i(q)$ povezani linearno po preostalim komponentama vektora q , [8].

Definicija (Polinomska struktura neizvjesnosti¹⁶⁹). Neizvjestan polinom $p(s, q)$ ima polinomsku strukturu neizvjesnosti ako svi koeficijenti familije polinoma $a_i(q)$ tvore multivarijabilni polinom po komponentama od q , [8].

6.4.3.2 Bitni koncepti za analizu robusne stabilnosti

Nepromjenjivost reda

Prepostavimo da postoji karakteristični polinom zatvorenog kruga $n -$ tog reda s $a_n = 1$ i nezavisnim promjenama koeficijenata $A = \{a_{n-1}, \dots, a_1, a_0\}$. Kako koeficijent uz najvišu potenciju a_n nikada nije nula, onda slijedi da će svi polinomi u familiji biti $n -$ tog reda.

NAPOMENA: Pretpostavka o nepromjenjivosti reda¹⁷⁰ polinoma je vrlo važna, jer svih postupci analize koriste ovu pretpostavku kada se razmatra robusna stabilnost.

Prolazak kroz granicu

Prepostavljamo dalje da je za barem jedan skup koeficijenata

$$A^a = \{a_{n-1}^a, \dots, a_1^a, a_0^a\},$$

zatvoren krug stabilan, odnosno da s njima karakteristični polinom ima koričene (polove) u lijevoj poluravnini. Ako je istina da postoji drugi skup koeficijenata

$$A^b = \{a_{n-1}^b, \dots, a_1^b, a_0^b\},$$

kod kojega postoji barem jedan pol zatvorenog kruga u desnoj poluravnini, tada je također istina da postoji skup koeficijenata

$$A^c = \{a_{n-1}^c, \dots, a_1^c, a_0^c\},$$

kod kojih karakteristični polinom neima polova zatvorenog kruga u desnoj poluravnini, ali ima barem jedan pol na imaginarnoj osi $j\omega$.

Ovo drugim rječima znači da će stabilan sustav koji ima sve polove u stabilnom području (lijeva poluravnina) da bi postao nestabilan, a to znači s barem jednim polom u nestabilnom području (desnoj poluravnini) obavezno preći kroz stanje u kojem ima barem jedan pol na granici stabilnosti (imaginarna os), ali ni jedan pol u desnoj poluravnini. Ovo je poznato kao fenomen prolaska kroz granicu¹⁷¹.

Premda tome, da bi se prešlo od stabilnosti do nestabilnosti, nužno je preći granicu stabilnosti ($j\omega$ os), uz pretpostavku da su svi polinomi familije $n -$ tog reda (čeđe da se svi svi koeficijenti mijenjaju kontinuirano između njihovih donjih i gornjih granica).

¹⁶⁸ engl. Multilinear uncertainty structure.

¹⁶⁹ engl. Polyomial uncertainty structure.

¹⁷⁰ engl. Degree-invariance.

¹⁷¹ engl. Boundary crossing.

Primjer 6.26 Kao primjer značaja nepromjenjivosti reda u zaključivanju o stabilnosti temeljem prolaska kroz granicu mogu poslužiti sljedeća dva sustava:

$$(a) \quad G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

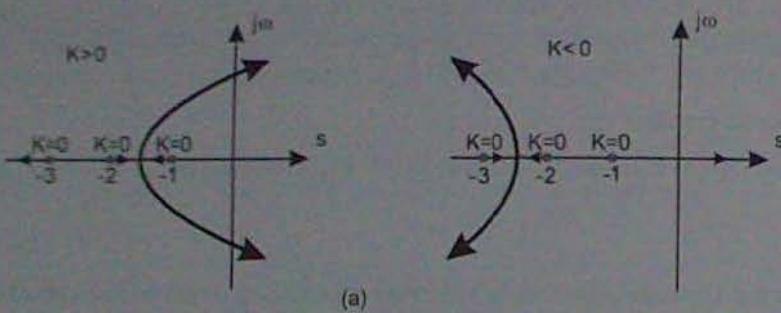
$$(b) \quad G(s) = \frac{K(s-1)}{s+1}$$

U oba slučaja neizvjesan je parametar $q = K$, a neizvjesni su karakteristični polinomi zatvorenog kruga (jedinična povratna veza) dani sa:

$$(a) \quad p(s, q) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + q$$

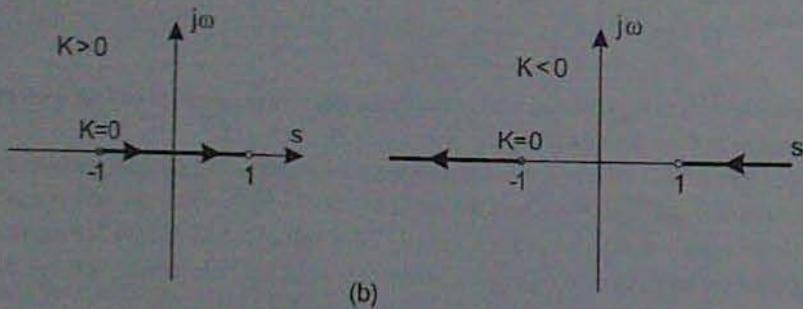
$$(b) \quad p(s, q) = (1+q)s + (1-q)$$

Za slučaj (a) za $q = K > 0$ te $q = K < 0$, krivulja mješta korijena prikazana je na slici 6.44.



Slika 6.44: KMK za slučaj (a)

KMK za slučaj (b) dan je na slici 6.45.



Slika 6.45: KMK za slučaj (b)

Kao što se na slici 6.44 vidi, KMK za slučaj (a) giba se iz stabilnog u nestabilno područje prolazeći kroz granicu stabilnosti ($j\omega$ os) i za slučaj $q = K > 0$ i za $q = K < 0$. U slučaju (b) će KMK također preći $j\omega$ os, ali samo ako je $q = K > 0$. Međutim, ako je $q = K < 0$, tada će KMK doći iz stabilnog u nestabilno područje ne prelazeći

granicu stabilnosti ($j\omega$) os (slika 6.45). U tom slučaju očigledno nije zadržan red sustava, pa zaključujemo da je za pracenje prolaza granice u zaključivanju o stabilnosti sustava nužna prepostavka o nepromjenjivosti reda.

Isključenje nule

Prema tome, ako je poznato da postoji najmanje jedan stabilan polinom u familiji $\alpha_{cl}(s)$, gubitak robusne stabilnosti moći će se detektirati tako da se svaki polinom iz familije preračuna duž $j\omega$ osi te odredi je li neki od njih 0 na nekoj frekvenciji $\omega = \omega_1$. Ako je $\alpha_{cl}(j\omega_1) = 0$ za neki skup koeficijenata A^c , tada taj polinom ima jedan ili više korijena na $j\omega$ osi, pa pokazuje da sustav nije robusno stabilan. Test robusne stabilnosti, barem konceptualno, tada postaje proračun svakog od polinoma iz familije uzduž granice stabilnosti te provjera da li neki od njih postaje jednak nuli. Ako 0 nije prisutna ni u kojem od proračuna (0 je isključena iz rezultata), tada je familija robusno stabilna.

Ovo je poznato kao načelo isključenja nule¹⁷² i služi kao temelj za eksperimentalno određivanje robusne stabilnosti.

Skup iznosa

Pretpostavimo da je svaki polinom iz familije polinoma n - tog reda moguće proračunati uzduž granice stabilnosti. U svakoj točki na granici, svaki će izračun polinoma dati kompleksan broj. Na primjer na frekvenciji $\omega = \omega_1$, polinom s koeficijentima A^c dat će rezultat $\alpha_{cl}^a(j\omega_1) = x_1^a + jy_1^a$. Kako se frekvencija mijenja, mijenjati će se i koeficijenti polinoma, mijenjat će se i kompleksan broj. Skup kompleksnih brojeva moguće je načrtati u dvodimenzionalnom prostoru - kompleksnoj ravnini (koja nije s – ravnina).

Skup iznosa je definiran kao skup svih kompleksnih brojeva generiranih na određenoj frekvenciji $\omega = \omega_1$ od familije polinoma $\alpha_{cl}(j\omega_1)$, kada se koeficijenti polinoma mijenjaju unutar njihovih dozvoljenih granica.

Definicija (Skup iznosa). Skup iznosa¹⁷³ je podskup kompleksne ravnine koja sadrži sve iznose koje može poprimiti neizvjestan polinom $p(j\omega, q)$ kada se q mijenja s iznosima iz skupa njegovih ograničenja neizvjesnosti Q (ω je konstantna frekvencija), [8].

Skup iznosa moguće je prikazati poligonom u kompleksnoj ravnini. Kako se frekvencija mijenja, tako se skup iznosa giba kompleksnom ravninom.

Prema tome, skup iznosa je preslikao analizu stabilnosti familije polinoma n - tog reda u kompleksnu ravninu, koja je uvek dvodimenzionska! U tome leži i glavna prednost ovoga koncepta, jer se skup neizvjesnih parametara nekog sustava, koji može biti l - dimensijski preslikao u dvodimensijski skup iznosa, a to znači da ga je moguće grafički prikazati i o robusnoj stabilnosti zaključivati, prateći gibanje skupa iznosa po kompleksnoj ravnini.

Teorem (Uvjet isključenja nule¹⁷⁴) Familija polinoma nepromjenjivog (konstantnog) reda s njima pridruženim skupom ograničenja neizvjesnosti Q koji je po rubovima povezan, kontinuiranim funkcijama po koeficijentima familije polinoma $a_i(q)$ za $i = 0, 1, 2, \dots, n$ te najmanje jednim stabilnim članom $p(s, q^*)$ je robusno stabilna

¹⁷² engl. Zero exclusion.

¹⁷³ engl. Value set.

¹⁷⁴ engl. Zero exclusion condition.

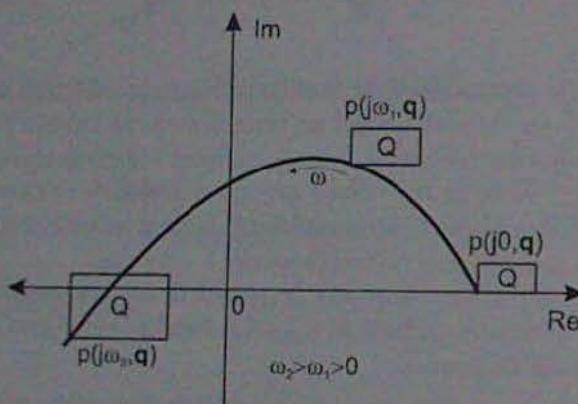
ako i samo ako je ishodište kompleksne ravnine isključeno iz skupa iznosa za sve nenegativne frekvencije tj. $0 \notin p(j\omega, q)$ za sve frekvencije $\omega \geq 0$ te $q \in Q$.

Ovaj rezultat koristan je za testiranje stabilnosti neizvjesnih polinoma samo ako imamo na raspolaganju učinkovit alat s kajim se mogu generirati skupovi iznosa.

Definicija (Robusna stabilnost). Neizvjestan sustav s karakterističnim polinomom $p(s, q)$ je robusno stabilan ako i samo ako je $p(s, q)$ stabilan za sve $q \in Q$, gdje je Q skup ograničenja neizvjesnosti.

Kombinirajući koncepte prolaska kroz granicu, isključenja nule te skupova iznosa, analiza robusne stabilnosti familije polinoma svodi se na određivanje da li je 0 isključena iz familije skupova iznosa koji se dobivaju proračunom svih polinoma iz familje na iznosima frekvencije duž granice stabilnosti.

Ako je familija polinoma n -og reda robusno stabilna, skupovi iznosa će se gibati obrnutu od kazaljke na satu kroz n kvadrant kompleksne ravnine a da pri tome nikada ne pređu niti diraju ishodište ravnine⁷⁵ (slika 6.46).



Slika 6.46: Gibanje skupova iznosa s promjenom ω po kompleksnoj ravnini

6.4.3.3 Analiza robusne stabilnosti

Kao u svim algebarskim postupcima analize stabilnosti sustava automatskog upravljanja koje smo do sada obradili, polinom koji nas uvek zanima jest karakteristični polinom zatvorenog kruga $\alpha_{cl}(s)$ – nazivnik funkcije prijenosa zatvorenog kruga $G_{cl}(s)$. Uz pretpostavku da se svaki od koeficijenata može mijenjati između donje granice (α_i^-) i gornje granice (α_i^+) te da ne postoji zavisnost u promjeni koeficijenata, karakteristični polinom zatvorenog kruga će biti intervalski polinom.

Iako ova pretpostavka o nezavisnom mijenjanju nije realistična u većini slučajeva, ona predstavlja početnu točku za analizu robusne stabilnosti u slučajevima kada postoji zavisnost promjena koeficijenata. Pretpostavka nezavisnosti promjena također daje gornju granicu za bilo koju složeniju vrstu neizvjesnosti, pa prema tome omogućuje analizu robusne stabilnosti u najgorem slučaju.

⁷⁵Treba zapaziti da se i krivulja Mihajlova gibalja na sličan način.

Pitanje na koje treba odgovoriti je sljedeće: jesu li svi kotijeni karakterističnog polinoma zatvorenog kruga $\alpha_{cl}(s, \alpha)$ (polovi zatvorenog kruga sustava) striktno u lijevoj poluravnini kompleksne s —ravnine za sve iznose α , koeficijenata unutar dozvoljenih granica njihovih promjena? Ako je odgovor potvrđan tada je familija suslava opisanih sa $G_{cl}(s, \alpha)$ robusno stabilna.

Routhov kriterij stabilnosti daje odgovor o stabilnosti $\alpha_{cl}(s)$ s konstantnim koeficijentima. Kako provesti analizu stabilnosti tog polinoma ako se neki od koeficijenata mogu mijenjati (bilo zbog promjena u procesu ili pak promjena parametara regulatora)? Ako je broj promjenjivih parametara velik, tada je analiza stabilnosti primjenom Routh kriterija presložena. Srećom, postoje relativno jednostavni testovi robusne stabilnosti za sustave s neizvjesnim parametrima. To su testovi koji se temelje na, [8], [17]:

1. Teoremu Karitonova.
2. Teoremu brida¹⁷⁶.
3. Krivulji Cipkin-Poljaka.

Teorem Karitonova primjenjiv je za *intervalne strukture neizvjesnosti (kvadar)*, a područje stabilnosti je u lijevoj poluravnini s —ravnine, što znači da se pomoću njega analizira BIBO stabilnost.

Teorem brida moguće je primijeniti bilo na *intervalne strukture neizvjesnosti ili povezane linearne strukture neizvjesnosti*. Za razliku od Karitonova, ovdje područje stabilnosti može biti neko područje unutar lijeve poluravnine. Q je *kvadar* (za intervalne strukture) ili *konveksna ljudska od konačnog broja točaka - politop* (za povezane linearne strukture).

Cipkin-Poljak krivulja predstavlja grafički postupak za analizu robusne (BIBO) stabilnosti. Postupak omogućava da se odredi relativna stabilnost familije polinoma.

U nastavku ćemo reći nešto više o teoremu V. Karitonova i to njegovom najjednostavnijem slučaju četiri polinoma, dok se teorem brida i postupak uz pomoć Cipkin-Poljak krivulje neće obrađivati u ovom udžbeniku.

Podsjetimo se da se funkcija prijenosa procesa s konstantnim parametrima obično označava sa:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Pretpostavimo da se svaki koeficijent od $B(s)$ i $A(s)$ može naći u intervalu na realnom pravcu, tj.:

$$B(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0, \quad b_i \in [b_i^-, b_i^+]; \quad i = 0, 1, \dots, m$$

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad a_i \in [a_i^-, a_i^+]; \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Koristiti će se označavanje $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_l]$ za prikaz l -dimenzionalnog vektora neizvjesnih parametara $q \in \mathbb{R}^l$.

Iz konteksta biti će jasno kada se koristi stupčani a kada redni vektor. Da se pojača ovisnost o neizvjesnim parametrima, q će se upotrebljavati kao argument različitih funkcija ili polinoma koje razmatramo. Funkciju prijenosa označavati ćemo stoga kao:

$$G(s, \mathbf{q}) = \frac{N(s, \mathbf{q})}{D(s, \mathbf{q})} = G_q$$

¹⁷⁶engl. Edge theorem.

Def.

$A(s, \mathbf{q})$ je polinom po s u brojniku s koeficijentima koji ovise o \mathbf{q}

$D(s, \mathbf{q})$ je polinom po s u nazivniku s koeficijentima koji ovise o \mathbf{q}

Također, ce se sa

$$G(s, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = G(s, \mathbf{q}) = \frac{B(s, \mathbf{b})}{A(s, \mathbf{a})} = G_{b,a}$$

osmisliti funkciju prijenosa procesa s neizvjesnim parametrima kako bi se razlikovala od funkcije prijenosa procesa s nepromjenjivim parametrima $G(s)$, gdje \mathbf{q} predstavlja vektor neizvjesnih parametara ($\mathbf{q}^T = [a \ b]$). Funkciju prijenosa procesa s neizvjesnim parametrima moguće je pisati i na sljedeći način:

$$G(s, \mathbf{q}) = \frac{B(s, \mathbf{b})}{A(s, \mathbf{a})} = \frac{[b_m^-, b_m^+] s^m + \cdots + [b_1^-, b_1^+] s + [b_0^-, b_0^+]}{[a_n^-, a_n^+] s^n + \cdots + [a_1^-, a_1^+] s + [a_0^-, a_0^+]}$$

Kako je $G(s, \mathbf{q})$ pravilna funkcija prijenosa ($n \geq m$), skup svih mogućih funkcija prijenosa procesa je:

$$G(s, \mathbf{q}) = G_{b,a} = \left\{ \frac{B(s, \mathbf{b})}{A(s, \mathbf{a})} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad b_i \in [b_i^-, b_i^+] \quad a_i \in [a_i^-, a_i^+] \right\}$$

gdje su u vektoru $\mathbf{q}^T = [b_0^-, b_0^+ \dots b_m^-, b_m^+, a_n^-, a_n^+ \dots a_1^-, a_1^+, a_0^-]$ dane sve donje i gornje granice svih parametara procesa koji se mogu mijenjati samo unutar njihovih granica. U literaturi se $G_{b,a}$ zovu *intervalni procesi*. Zatvoreni sustav automatskog upravljanja koji se sastoji od vremenski nepromjenjivog regulatora $C(s) = N(s)/D(s)$ i neizvjesnog procesa $G(s, \mathbf{q}) \in G_{b,a}(s)$ je *robustno stabilan* ako su svi korijeni od

$$\alpha_d(s, \boldsymbol{\alpha}) = A(s, \mathbf{a})D(s) + B(s, \mathbf{b})N(s)$$

u lijevoj poluravnini s – ravnine za sve $G \in G_{b,a}$.

Za svaki b_i ; $i = 0, 1, \dots, m$, prepostavlja se da može poprimiti bilo koju vrijednost unutar zadatog intervala, nezavisno od vrijednosti preostalih koeficijenata. Ista prepostavka vrijedi i za a_i ; $i = 0, 1, \dots, n$.

Da se obavi analiza robusne stabilnosti zatvorenog sustava koji se sastoji od regulatora $C(s) = N(s)/D(s)$ i neizvjesnog procesa $G(s, \mathbf{q}) = B(s, \mathbf{b})/A(s, \mathbf{a}) \in G_{b,a}$ treba prvo formirati karakteristični polinom s neizvjesnim koeficijentima:

$$\alpha_d(s, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Valje uočiti da se iz donjih i gornjih granica za koeficijente procesa $A(s, \mathbf{a})$ i $B(s, \mathbf{b})$ mogu odrediti donje i gornje granice (konzervativna procjena) koeficijenata karakterističnog polinoma zatvorenog kruga $\boldsymbol{\alpha}$.

Teorem V. L. Karitonova

Srećom, za slučaj intervalske familije polinoma, ne mora se svaki polinom iz familije individualno testirati na isključenje nule. Kako svaki koeficijent koji se mijenja generira beskonačan broj polinoma, to je svakako dobra vijest. Ruski matematičar V. L. Karitonov dokazao je 1978. da je za intervalske polinome dovoljno testirati 4 polinoma, bez obzira na red n familje polinoma, [93]. Zahvaljujući tom dostignuću dobivena je neizmjerna ušeda u proračunu kada familija polinoma ima intervalsku strukturu neizvjesnosti (kvadar).

Definicija (Polinomi V. L. Karitonova): Vezano uz intervalsku familiju polinoma:

$$\mathcal{P}(s, Q) = \left\{ p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}) s^i \mid \mathbf{q} \in Q \right\} \quad (6.70)$$

postoje četiri fiksna \mathcal{K} polinoma:

$$\mathcal{K}_1(s) = \underbrace{a_0^- + a_1^- s}_{+} + \underbrace{a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3}_{+} + \underbrace{a_4^- s^4 + a_5^- s^5}_{+} + \dots$$

$$\mathcal{K}_2(s) = \underbrace{a_0^+ + a_1^+ s}_{+} + \underbrace{a_2^- s^2 + a_3^- s^3}_{+} + \underbrace{a_4^+ s^4 + a_5^+ s^5}_{+} + \dots$$

$$\mathcal{K}_3(s) = a_0^+ + \underbrace{a_1^- s}_{+} + \underbrace{a_2^- s^2}_{+} + \underbrace{a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4}_{+} + a_5^- s^5 + \dots$$

$$\mathcal{K}_4(s) = a_0^- + \underbrace{a_1^+ s}_{+} + \underbrace{a_2^+ s^2}_{+} + \underbrace{a_3^- s^3 + a_4^- s^4}_{+} + a_5^+ s^5 + \dots$$

Koeficijenti ovih četiriju polinoma ovise samo o donjim i gornjim granicama odgovarajućih koeficijenata iz familije polinoma. Stoga su ovi polinomi poznati unaprijed. Sljedeći rezultat primjenjiv je na intervalsku familiju polinoma. Zapazit ćemo da su ovi rezultati neophodni i dovoljni.

Teorem (Karitonova). Intervalska familija polinoma n -og reda opisana sa

$$\mathcal{P}(s, Q) = \left\{ p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}) s^i \mid \mathbf{q} \in Q \right\} \quad (6.71)$$

je robusno stabilna ako i samo ako svaki od četiriju polinoma V. L. Karitonova jest stabilan, tj. svi korijeni tih polinoma imaju negativne realne dijelove (leže u lijevoj poluravnini s ravnine).

Prema tome, robusna stabilnost intervalske familije polinoma može se odrediti ako se:

- formiraju četiri polinoma $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$ i \mathcal{K}_4
- provede njihova faktorizacija,
- ispitaju njihovi korijeni.

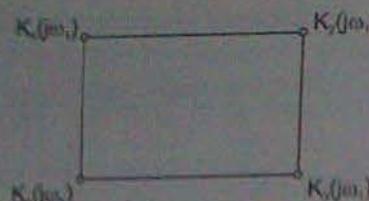
Ako su svi korijeni u lijevoj poluravnini, tada je familija robusno stabilna.

Ako je bilo koji od korijena na imaginarnoj ($j\omega$) osi ili u desnoj poluravnini, familija nije robusno stabilna.

Kada se \mathcal{K} polinomi računaju u točki na imaginarnoj osi, oni će tvoriti četiri vrha pravokutnika čiji su bridovi paralelni s realnom i imaginarnom osi.

1. $\mathcal{K}_1(j\omega)$ je donji lijevi vrh,
2. $\mathcal{K}_2(j\omega)$ je gornji desni vrh,
3. $\mathcal{K}_3(j\omega)$ je donji desni vrh,
4. $\mathcal{K}_4(j\omega)$ je gornji lijevi vrh.

Ovaj pravokutnik predstavlja skup iznosa za familiju polinoma na određenoj frekvenciji (slika 6.47).

Slika 6.47: Skup iznosa za familiju polinoma na $\omega = \omega_1$

Primjer 6.27 Za karakteristični polinom trećeg reda, [11]:

$$\alpha_{cl}(s) = s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 \quad (6.72)$$

i ograničenjima neizvjesnosti njihovih koeficijenata:

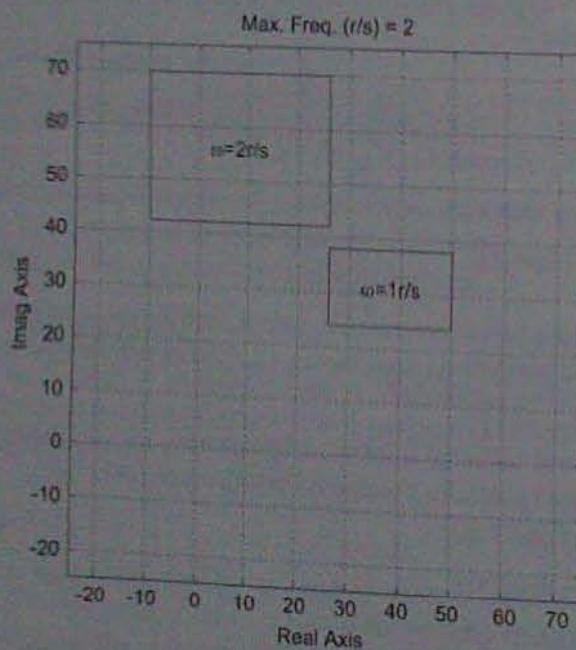
$$\alpha_0 \in [38, 58], \quad \alpha_1 \in [25, 39], \quad \alpha_2 \in [8, 12], \quad \alpha_3 = 1 \quad (6.73)$$

polinomi Karitunova su:

$$\begin{aligned} K_1(s) &= 38 + 25s + 12s^2 + s^3, \\ K_2(s) &= 58 + 39s + 8s^2 + s^3 \end{aligned} \quad (6.74)$$

$$\begin{aligned} K_3(s) &= 58 + 25s + 8s^2 + s^3, \\ K_4(s) &= 38 + 39s + 12s^2 + s^3 \end{aligned} \quad (6.75)$$

Njihovi skupovi iznosa za $\omega = 1 \text{ [r/s]}$ i $\omega = 2 \text{ [r/s]}$ dani su na slici 6.48.

Slika 6.48: Dva skupa neizvjesnih iznosa za dvije frekvencije $\omega = 1 \text{ [r/s]}$ i $\omega = 2 \text{ [r/s]}$

Ako se provede faktorizacija polinoma pokazati će se da su svi korijeni u lijevoj poluravnini, pa se može zaključiti da je za te frekvencije familija polinoma robusno stabilna. Ako bi se skupovi iznosa crtali za sve frekvencije, pokazalo bi se da se pravokutnići gibaju suprotno od kazaljke na satu kroz tri kvadranta i da ni jedan od njih ne dodiruje ishodište koordinatnog sustava kompleksne ravnine, po čemu se onda može zaključiti da je familija robusno stabilna.

Primjer 6.28 Primjena Teorema V.L. Karitonova u Matlab-u:
Razmatra se intervalski polinom

$$p(s, q) = q_3 s^3 + q_2 s^2 + q_1 s + q_0 \quad (6.76)$$

i njegov skup ograničenja neizvjesnosti

$$Q = \{q \mid q_0 \in [46, 50], q_1 \in [50, 54], q_2 \in [18, 20], q_3 \in [1, 2]\} \quad (6.77)$$

Familiju intervalskih polinoma moguće je napisati u formi:

$$p(s, q) = [1, 2] s^3 + [18, 20] s^2 + [50, 54] s + [46, 50] \quad (6.78)$$

$0 \notin [q_3^-, q_3^+] = [1, 2] \Rightarrow$ intervalska familija polinoma $P(s, Q)$ je nepromjenjivog reda.

Ako se želi odrediti K polinome, tada u Matlab-u treba koristiti naredbu za funkciju kharpoly, [11]:

```
function [K] = kharpoly(Q)
[nr, nc] = size(Q);
for i1 = 1:nr
    for i2 = 1:4
        K(i2, i1) = Q(i1, k(i2, i1));
    end
end
K = fliplr(K);

U Matlab programu se tada može pisati:
» Q=[46 50;50 54;18 20;1 2]
Q =
46 50 %
50 54 %
18 20 %
1 2 %
» [K]=kharpoly(Q)
K =
2 20 50 46 %  $K_1 = 2s^3 + 20s^2 + 50s + 46$ 
1 18 54 50 %  $K_2 = s^3 + 18s^2 + 54s + 50$ 
2 18 50 50 %  $K_3 = 2s^3 + 18s^2 + 50s + 50$ 
1 20 54 46 %  $K_4 = s^3 + 20s^2 + 54s + 46$ 
```

Uporabom Routh kriterija (Matlab naredba routh) lako je moguće ustanoviti da su sva četiri K polinoma stabilna (Routhov prvi stupac je pozitivan u svim slučajevima).

```
» syms s
» routh(K(1,:).aps)
```

```

ra1 =
[ 2, 54]
[ 20, 46]
[ 227.5, 0]
[ 46, 0]
* ra2=routh(K(2,-).eps)
ra2 =
[ 1, 54]
[ 18, 50]
[ 462.9, 0]
[ 50, 0]
* ra3=routh(K(3,-).eps)
ra3 =
[ 2, 50]
[ 18, 50]
[ 400.9, 0]
[ 50, 0]
* ra4=routh(K(4,-).eps)
ra4 =
[ 1, 54]
[ 20, 46]
[ 317.10, 0]
[ 46, 0]

```

Prema tome, može se zaključiti da je intervalska familija polinoma $\mathcal{P}(s, Q)$ robusno stabilna.

Primjer 6.29 Poznate su funkcije prijenosa regulatora $G_r(s)$ i procesa $G_p(s)$, [11]:

$$G_r(s) = \frac{4(s+3)}{(s+8)}, \quad G_p(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

Karakteristični polinom zatvorenog kruga je:

$$\alpha_{cl}(s) = s^3 + 10s^2 + 32s + 48$$

Kako su koriđeni toga polinoma u lijevoj poluravnini kompleksne s ravnine, zatvorenji sustav je stabilan.

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -2 \pm j2, \\ s_3 &= -6. \end{aligned}$$

Ako se pretpostavi da se iznosi parametara procesa i/ili regulatora mogu mijenjati, to će imati za posljedicu i promjenu koeficijenata karakterističnog polinoma $\alpha_{cl}(s)$. Zanima nas da li će se stabilnost zatvorenog sustava zadržati s promjenom ovih koeficijenata.

Analizirati će se četiri slučaja, s odgovarajućim intervalima koje koeficijenti mogu poprimiti.¹⁷⁷

Slučaj #1 :

$$a_0 \in [43.2, 52.8], \quad a_1 \in [28.8, 35.2], \quad a_2 \in [9, 11]$$

Slučaj #2 :

$$a_0 \in [38.4, 57.6], \quad a_1 \in [25.6, 38.4], \quad a_2 \in [8, 12]$$

Slučaj #3 :

$$a_0 \in [24.0, 72.0], \quad a_1 \in [16.0, 48.0], \quad a_2 \in [5, 15]$$

Slučaj #4 :

$$a_0 \in [19.2, 76.8], \quad a_1 \in [12.8, 51.2], \quad a_2 \in [4, 16]$$

Ova četiri slučaja odgovaraju promjenama nominalnih iznosa koeficijenata od:

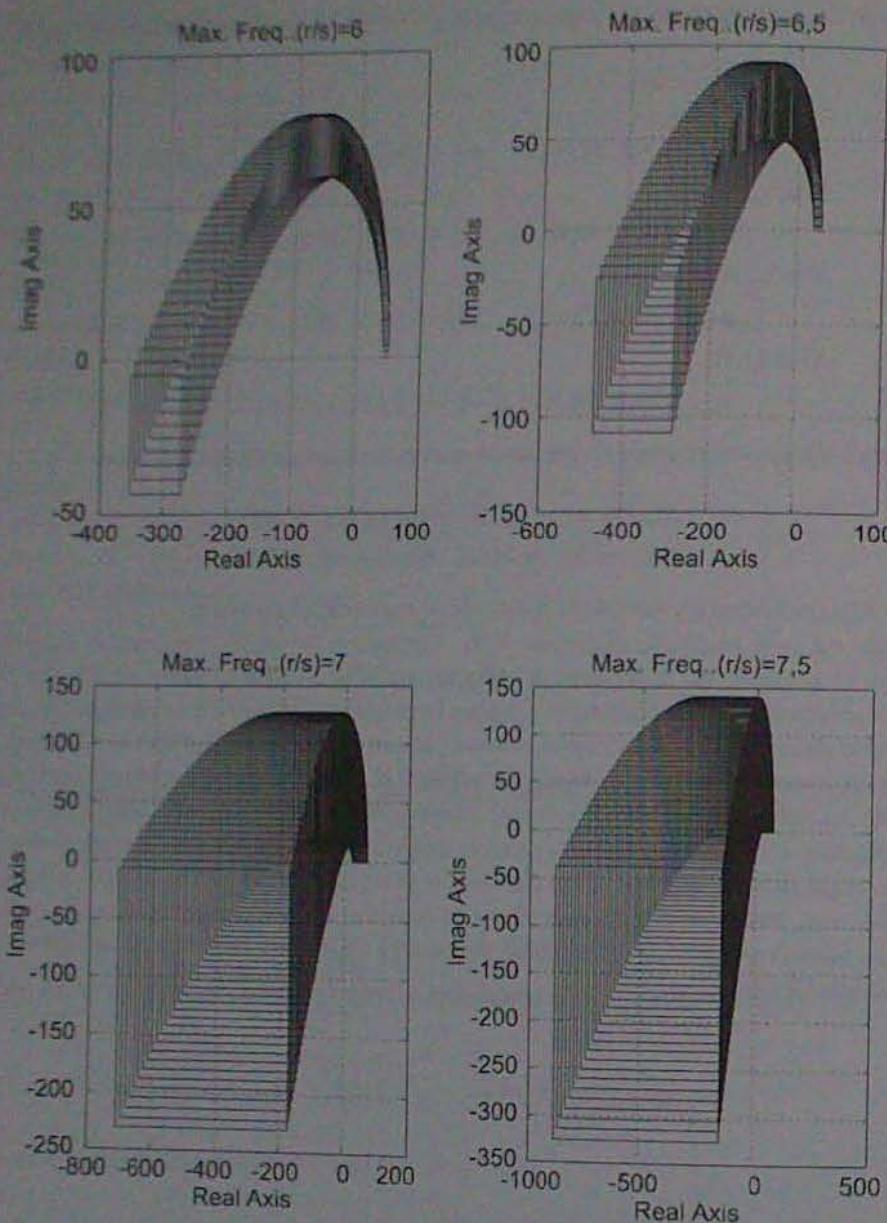
Slučaj #1: $\pm 10\%$, Slučaj #2: $\pm 20\%$,

Slučaj #3: $\pm 50\%$, Slučaj #4: $\pm 60\%$.

Slučaj #2 je približno isti kao što je pokazano u prethodnom primjeru.

Za svaki od ovih slučajeva polinomi V. L. Karitonova se mogu formirati te faktorizirati kako bi se odredilo da li je familija robusno stabilna ili nije robusno stabilna, s postavljenim promjenama oko nominalnih iznosa koeficijenata. Ovdje će se međutim ta analiza robusne stabilnosti provesti crtanjem skupova iznosa. Kako su familije polinoma trećeg reda, skupovi iznosa moraju prolaziti kroz tri kvadranta kompleksne ravnine u smjeru obrnutom od kazaljke na satu. Ako je familija robusno stabilna niti jedan od skupova iznosa neće dodirivati ishodište koordinatnog sustava (načelo isključenja mle!). Skupovi iznosa za sva četiri slučaja dani su na slici 6.49. Prvi slučaj je u gornjem lijevom okviru, drugi slučaj u gornjem desnom, treći slučaj u donjem lijevom i četvrti u donjem desnom okviru. Za crtanje je korišten Matlab program, a maksimalne frekvencije do kojih se računalo naznačene su nad odgovarajućih okvira.

¹⁷⁷ Radi jednostavnosti koeficijent $\alpha_3 = 1$ držati će se konstantnim.



Slika 6.49: Skupovi iznosa za četiri slučaja promjene parametara

Iz analize dobivenih grafičkih prikaza može se zaključiti sljedeće:

- Skupovi iznosa za svaki od prva tri slučaja gibaju se suprotno od kazaljke na satu redom od prvog kroz drugi do trećeg kvadranta i pri tome niti jedan ne dodiruje niti prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava kompleksne ravnine. Može se zaključiti da je svaka od familije polinoma robusno stabilna, tj. sustav će ostati stabilan u slučaju da mu koeficijenti odstupaju od nominalnih iznosa do $\pm 50\%$.

- Skupovi iznosa za četvrti slučaj (koji odgovara varijacijama od $\pm 60\%$ od nominalnih iznosa koeficijenata) proći će ishodištem, pa se može zaključiti da familija nije robusno stabilna. Iako su na frekvenciji $\omega = 7.5 \text{ rad/s}$ četverokuti u trećem kvadrantu, neki dijelovi četverokuta su uzeli prečicu da dodu u treći kvadrant tako što su prošli četvrtim kvadrantom a ne drugim, kako bi morali. To se osobito odnosi na donji lijevi vrh pravokutnika. $K_3(j\omega)$ i bliski mu polinomi idu prečicom.
- Primjer pokazuje da za ovaj konkretni slučaj procesa i regulatora, stabilnost može biti zadržana za nezavisne promjene koeficijenata karakterističnog polinoma zatvorenog kruga od maksimalno oko $\pm 50\%$ od nominalnih iznosa.

U zaključku možemo reći sljedeće. Analiza robusne stabilnosti vrlo je važna kod projektiranja bilo kojeg sustava automatskog upravljanja, jer nijedan matematički model ne daje pravu sliku dinamike realnog sustava. Danas je dobar običaj da se provjeri da li će sustav ostati stabilan kod promjena nekih ili svih njegovih parametara. Regulator mora stabilizirati i dati tražene performanse realnog sustava, a ne samo njegovog matematičkog modela. Regulator koji nije u stanju osigurati stabilnost kada se parametri mijenjaju ne bi trebalo koristiti u praksi. Bez obzira na to koji se postupak koristio za projektiranje regulatora, analiza robusne stabilnosti mora se provesti prije nego što se usvoji određeno rješenje. To se može učiniti da bi se odredio minimalni iznos promjena koji može destabilizirati sustav ili pak da se vidi je li stabilnost zadržana za određene pretpostavljene promjene parametara kroz koje sustav može proći tijekom rada. Teorem i polinomi V. L. Karitonova daju nam neophodan alat za analizu robusne stabilnosti. Treba napomenuti da je ovdje naveden samo jedan od prvih značajnijih rezultata iz ovog vrlo zanimljivog područja. Teorem V. L. Karitonova daje dovoljne i neophodne uvjete za robusnu stabilnost. On je konzervativan zbog pretpostavke intervalske familije polinoma. Naime, ako su svi polinomi Karitonova stabilni, tada su stabilni i svi polinomi u skupu iznosa Q (kvadar). No, obrat nije istinit, naime moguće je da jedan od polinoma Karitonova bude nestabilan, a da svi polinomi zatvorenog sustava budu stabilni, jer valja se podsjetiti da je u zatvorenom sustavu kod kojega se mijenjaju parametri procesa, a regulator ima konstantne parametre, struktura neizvjesnosti tipa - politop. Postoji i nekonzervativni test robusne stabilnosti koji se naziva *Teorem 32 brida*¹⁷⁸ ili *Poopćeni teorem V. L. Karitonova*. Zamteresirani čitatelj više o robusnom upravljanju može naći npr. u [18], [8], [63], [17], [186].

Perturbacije su u sustavima automatskog upravljanja normalna pojava. One se pojavljuju najčešće u procesu ili aktuatoru. No, isto tako one su moguće i u algoritmima upravljanja. O tome nije do sada ništa rečeno i ovdje će se samo objasniti o kakvim problemima može biti riječ. Suvremeni sustavi automatskog upravljanja realiziraju se digitalnim računalom ili procesorom signala. Bez obzira kakvim računalom se koristili (32 bitni, 64 bitni itd.), dobiveni zakon upravljanja tijekom sinteze nužno je prebaciti u diskretan oblik i algoritmizirati. Ono što treba imati na umu jest da problem koji je riješen računalom nije uvjek kvalitativno isti problem za koji projektant misli da ga je zadao. Isto tako, niti regulator kojega se koristi u praksi ne mora biti isti onaj regulator koji je dobiven postupkom sinteze. O čemu je tu riječ? Riječ je o tome da stvarni regulator koji se koristi u praksi za vodenje nekog procesa predstavlja nažalost samo perturbirani teoretski regulator, jer se postupkom sinteze uvjek dobiva rješenje koje se ne može točno prebaciti u stvarni regulator. Često se učinak perturbacija može zanemariti, ali to je dozvoljeno samo onda kada ne baratamo degeneričkim ili skoro degeneričkim polinomima ili matricama. Na jednostavnom primjeru može se pokazati da

¹⁷⁸ engl. 32 edge theorem.

nespojivate perturbacije, koje su rezultat numeričkog rješavanja na digitalnom računalu, mogu prenijeti kvalitativno savsim drukčije ponašanje rješenja polinoma ili matrica u okolini degenerativnih točaka, [1].

Primjer 6.30 Razmatra se karakteristični polinom zatvorenog kruga dan sa:

$$\alpha_{cl}(s) = s^6 - 12s^5 + 59s^4 - 152s^3 + 216s^2 - 160s + 48$$

Matlab naredba

`>> roots([1, -12, 59, -152, 216, -160, 48])` dati će sljedeće korijene ovog polinoma:

```
ans =
3.0000
2.0004+0.0004i
2.0004-0.0004i
1.9996+0.0004i
1.9996-0.0004i
1.9000
```

Faktorizacija istog polinoma će dati

$$\alpha_{cl}(s) = (s - 3)(s - 2)(s - 2)(s - 2)(s - 2)(s - 1)$$

Što pokazuje da će odziv biti aperiodski bez ikakvih oscilatornih komponenata. Matlab je međutim dao kvalitativno pogrešan rezultat. Čak i sa naredbom

`>> format long, roots(poly([3, 2, 2, 2, 2, 1]))`

Matlab neće bitnije popraviti svoj odgovor. I dalje će se pojavljivati konjugirano kompleksni parovi korijena kojih ustvari nema. Ako Matlab koji je programski paket iznimne kvalitete, čak i u slučaju veće tražene preciznosti, nije u stanju rješiti ovaj problem, kako će se tek ponašati ugradbeno računalo u sličnom zadatku kada radi u stvarnom vremenu i upravlja procesom bez prisustva čovjeka?

Primjer je pokazao nešto čega moramo uvijek biti svjesni. Računalo ustvari ne rješava problem koji mu postavimo, već rješava drugi problem koji mu je infinitezimalno blizu. Kada god se računalu zada polinom ili matrica sa svrhom da nešto proračuna, taj polinom ili matrica doći će automatski pod utjecaj nepoznatih perturbacija diktiranih korištenim sklopovljem (hardware) i programom (software). U većini slučajeva te perturbacije nemaju znatnijeg utjecaja na ponašanje sustava, no kadkada mogu imati katastrofalne posljedice. Ako se čitatelju može učiniti da u gornjem primjeru nisu dobivene tako velike pogreške, neka izračuna Matlabom korijene sljedeceg polinoma:

$$\prod_{i=0}^{29} [s - (i + 1)] = (s - 1)(s - 2)(s - 3) \cdots (s - 30)$$

Iz do sada navedenog moguće je zaključiti da su promjene koje se odigravaju u sustavu automatskog upravljanja uzrokovane različitim čimbenicima. Sve one mogu pridonijeti tome da sustav ne radi onako kako je zamišljeno. Da bi bili u stanju uhvatiti se u koštac s tim faktorima koji uzrokuju promjene u sustavu, nužno je poznavati najnovija dostignuća teorije upravljanja, te postupke kojima se njihov utjecaj može čim više smanjiti, no valja biti svjestan da ih ne možemo izbjegći.