AMOS Zadaci – Auditorne vježbe
(napomena: neće svi zadaci koji su u ovom materijalu biti zastupljeni u 2MI, ovaj materijal prvenstveno služi za proširivanje znanja iz analognih električnih filtara pomoću riješenih primjera i naravno služi kao podsjetnik za izračun analognih električnih filtara)

1. Za NP filtar s karakteristikom 3. stupnja po Butterworthu s graničnom frekvencijom 5 Hz odrediti izraze za fazno-frekvencijsku karakteristiku i karakteristiku grupnog kašnjenja. Odrediti iznos faze i amplitude (u dB) signala na izlazu filtra ako na ulazu djeluje signal $f(t) = 20\sin(30t + 30°)$.

Rješenje: Amplitudno-frekvencijska karakteristika Butterworth-ovog NP filtra ima oblik:

$H(\omega) = |H(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_g}\right)^{2N}}}$, gdje je $\omega_g = 2\pi f_g$ [rad/s] granična frekvencija, a N red filtra;

odnosno: $|H(j\omega)|^2 = H(s)H(-s)\big|_{s=j\omega} = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_g}\right)^{2N}}$,

uvrstimo umjesto ω (koji se pojavio supstitucijom $s=j\omega$), natrag s supstitucijom $\omega=s/j$ pa dobivamo:

$$|H(j\omega)|^2 = H(s)H(-s)\big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{s}{j\omega_g}\right)^6} = \frac{1}{1-\left(\dfrac{s}{\omega_g}\right)^6} = \frac{1}{\left[1-\left(\dfrac{s}{\omega_g}\right)^3\right]}\cdot\frac{1}{\left[1+\left(\dfrac{s}{\omega_g}\right)^3\right]} =$$

$$= \frac{1}{\left(1-\dfrac{s}{\omega_g}\right)\left[\left(\dfrac{s}{\omega_g}\right)^2+\dfrac{s}{\omega_g}+1\right]}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{s}{\omega_g}\right)\left[\left(\dfrac{s}{\omega_g}\right)^2-\dfrac{s}{\omega_g}+1\right]} = \text{ ili drugačije grupiramo } =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\left(1+\dfrac{s}{\omega_g}\right)\left[\left(\dfrac{s}{\omega_g}\right)^2+\dfrac{s}{\omega_g}+1\right]}}_{H(s)}\cdot\underbrace{\frac{1}{\left(1-\dfrac{s}{\omega_g}\right)\left[\left(\dfrac{s}{\omega_g}\right)^2-\dfrac{s}{\omega_g}+1\right]}}_{H(-s)} = H(s)\cdot H(-s)$$

Uzmimo $H(s)$ i uvrstimo $s=j\omega$, odakle slijedi:

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{s}{\omega_g}\right)\left[\left(\dfrac{s}{\omega_g}\right)^2+\dfrac{s}{\omega_g}+1\right]\Bigg|_{s=j\omega}} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{j\omega}{\omega_g}\right)\left[1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_g}\right)^2+\dfrac{j\omega}{\omega_g}\right]} =$$

$$= \frac{1}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_g}\right)^2+\dfrac{j\omega}{\omega_g}+\dfrac{j\omega}{\omega_g}-\dfrac{j\omega}{\omega_g}\left(\dfrac{\omega}{\omega_g}\right)^2-\left(\dfrac{\omega}{\omega_g}\right)^2} = \frac{1}{-j\left(\dfrac{\omega}{\omega_g}\right)^3-2\left(\dfrac{\omega}{\omega_g}\right)^2+2j\dfrac{\omega}{\omega_g}+1} =$$

$$= \frac{1}{1-2\left(\dfrac{\omega}{\omega_g}\right)^2+j\left[2\dfrac{\omega}{\omega_g}-\left(\dfrac{\omega}{\omega_g}\right)^3\right]}$$

Proširimo gornji izraz:

$$H(j\omega)=\frac{1}{1-2\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2+j\left[2\frac{\omega}{\omega_g}-\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^3\right]}\cdot\frac{1-2\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2-j\left[2\frac{\omega}{\omega_g}-\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^3\right]}{1-2\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2-j\left[2\frac{\omega}{\omega_g}-\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^3\right]}=$$

$$=\frac{1-2\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2-j\left[2\frac{\omega}{\omega_g}-\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^3\right]}{\left[1-2\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right]^2+\left[2\frac{\omega}{\omega_g}-\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^3\right]^2}$$

Fazno-frekvencijska karakteristika:

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{\mathrm{Im}[H(j\omega)]}{\mathrm{Re}[H(j\omega)]}=\arctan\frac{-2\frac{\omega}{\omega_g}+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^3}{1-2\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}=\arctan\frac{\omega^3-2\omega_g^2\omega}{\omega_g^3-2\omega_g\omega^2}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{\omega^3-2\omega_g^2\omega}{\omega_g^3-2\omega_g\omega^2}$$

Karakteristika grupnog kašnjenja:

$$T_g(\omega)=-\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}=-\frac{d}{d\omega}\left[\arctan\frac{\omega^3-2\omega_g^2\omega}{\omega_g^3-2\omega_g\omega^2}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\left(1+\frac{\omega^3-2\omega_g^2\omega}{\omega_g^3-2\omega_g\omega^2}\right)^2}\cdot\frac{(3\omega^2-2\omega_g^2)(\omega_g^3-2\omega_g\omega^2)-(\omega^3-2\omega_g^2\omega)\cdot(-4\omega_g\omega)}{\left(\omega_g^3-2\omega_g\omega^2\right)^2}=$$

$$=-\frac{\left(\omega^3-2\omega_g^2\omega\right)^2}{\left(\omega_g^3-2\omega_g\omega^2\right)^2+\left(\omega^3-2\omega_g^2\omega\right)^2}\cdot\frac{3\omega_g^3\omega^2-2\omega_g^5-6\omega_g\omega^4+4\omega_g^3\omega^2+4\omega_g\omega^4-8\omega_g^3\omega^2}{\left(\omega^3-2\omega_g^2\omega\right)^2}=$$

$$=-\frac{3\omega_g^3\omega^2-2\omega_g^5-6\omega_g\omega^4+4\omega_g^3\omega^2+4\omega_g\omega^4-8\omega_g^3\omega^2}{\omega_g^6-4\omega_g^4\omega^2+4\omega_g^2\omega^4+\omega^6-4\omega_g^2\omega^4+4\omega_g^4\omega^2}=-\frac{-\omega_g^3\omega^2-2\omega_g^5-2\omega_g\omega^4}{\omega_g^6+\omega^6}$$

$$T_g(\omega)=\frac{2\omega_g\omega^4+\omega_g^3\omega^2+2\omega_g^5}{\omega^6+\omega_g^6}$$

Uvrstimo zadane vrijednosti: $\omega_g=2\pi f_g=10\pi$, $\omega=30$, $U_0=20$, $\varphi_0=30°$.

$$H(30)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{30}{10\pi}\right)^6}}=0.754\,,\ \varphi(30)=\arctan\frac{30^3-2\cdot(10\pi)^2\cdot 30}{(10\pi)^3-2\cdot 10\pi\cdot 30^2}=51.59°$$

Izlazni signal ima oblik:

$$y(t)=20\cdot 0.754\sin(30t+30°+51.59°)=15.08\sin(30t+81.59°)$$

2. Zadatak 1 može se riješiti na drugi način. Tekst zadatka je isti: Za NP filtar s karakteristikom 3. stupnja po Butterworthu s graničnom frekvencijom 5 Hz odrediti izraze za amplitudno-frekvencijsku i fazno-frekvencijsku karakteristiku. Odrediti iznos faze i amplitude (u dB) signala na izlazu filtra ako na ulazu djeluje signal $f(t) = 20\sin(30t + 30°)$.

Rješenje: Poznato je kako izračunati prijenosnu funkciju filtra 3. reda aproksimacije po Butterworthu. Najprije izračunajmo normalizirane polove:

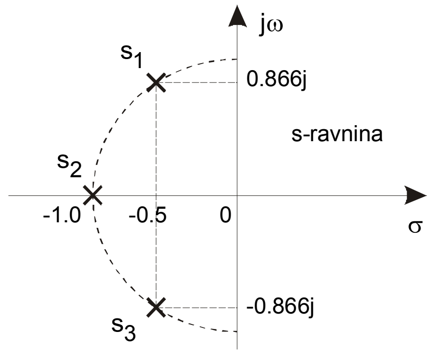
$$s_k = -\sin\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right) + j\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right); \qquad k = 1,\dots,N$$

polovi su na jediničnoj kružnici u lijevoj poluravnini:

$$s_1 = -\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) + j\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = -0.5 + j0.866$$

$$s_2 = -\sin\left(\frac{3}{6}\pi\right) + j\cos\left(\frac{3}{6}\pi\right) = -1$$

$$s_3 = -\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) + j\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = -0.5 - j0.866$$



Umjesto proračuna, podatke o istim polovima moguće je pročitati iz skripte N. Mijat, “Električni Filtri”, tablica 1 na strani 50:

n	Re	Im	Q_p	ω_p	Faktori nazivnika
3	-1	0	-	-	$s+1$
	-0.5	±0.8660254	1.00	1.00	s^2+s+1

Polovi s_1 i s_3 čine konjugirano-kompleksni par stoga ih grupiramo. Na taj način će imaginarna jedinica j nestati i nastavljamo postupak samo sa realnim brojevima.

Normalizirana prijenosna funkcija glasi: $H(s) = \dfrac{-s_2}{(s-s_2)} \cdot \dfrac{s_1 s_3}{(s-s_1)(s-s_3)}$,

Uvrstimo vrijednosti polova: $H(s) = \dfrac{1}{(s+1)} \cdot \dfrac{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$

$$= \frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{s^2 + s + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{1}{(s^2+s+1)}$$

Dobili smo istu prijenosnu funkciju $H(s)$ (normaliziranu) kao u prethodnom zadatku. Navedenu prijenosnu funkciju možemo denormalizirati frekvencijskom transformacijom:

$$s \to \frac{s}{\omega_g},$$

gdje je $\omega_g=2\pi f_g$ [rad/s] granična frekvencija. Dobivamo:

$$H(s) = \frac{1}{\left(1+\frac{s}{\omega_g}\right)\left[\left(\frac{s}{\omega_g}\right)^2+\frac{s}{\omega_g}+1\right]} = \frac{\omega_g^3}{(s+\omega_g)(s^2+s\omega_g+\omega_g^2)}$$

U $H(s)$ uvrstimo $s=j\omega$, odakle slijedi:

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{1}{\left(1+\frac{s}{\omega_g}\right)\left[\left(\frac{s}{\omega_g}\right)^2+\frac{s}{\omega_g}+1\right]\Bigg|_{s=j\omega}} = \frac{1}{\left(1+\frac{j\omega}{\omega_g}\right)\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2+\frac{j\omega}{\omega_g}\right]} = \ldots =$$

$$= \frac{1}{1-2\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2+j\left[2\frac{\omega}{\omega_g}-\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^3\right]}$$ (ovo je isto kao u prethodnom zadatku).

Izraz je oblika $H(j\omega)=\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$. Nećemo proširivati izraz tako da nazivnik bude realan (kao u prethodnom zadatku) nego ćemo odmah izračunati a-f i f-f karakteristike

Amplitudno-frekvencijska karakteristika:

$$|H(j\omega)| = \frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-2\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right]^2+\left[2\frac{\omega}{\omega_g}-\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^3\right]^2}} = \text{što se da srediti} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-4\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2+4\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^4+4\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2-4\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^4+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^6}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^6}}$$

Fazno-frekvencijska karakteristika:

$$\varphi(\omega) = \arctan\frac{\mathrm{Im}[N(j\omega)]}{\mathrm{Re}[N(j\omega)]} - \arctan\frac{\mathrm{Im}[D(j\omega)]}{\mathrm{Re}[D(j\omega)]} = 0-\arctan\frac{2\frac{\omega}{\omega_g}-\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^3}{1-2\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} = \arctan\frac{\omega^3-2\omega_g^2\omega}{\omega_g^3-2\omega_g\omega^2}$$

Dobili smo iste izraze kao u prethodnom zadatku. Grupno vrijeme kašnjenja ima isti oblik i nećemo ga izračunavati.

Uvrstimo zadane vrijednosti: $\omega_g=2\pi f_g=10\pi$, $\omega=30$, $U_0=20$, $\varphi_0=30°$.

$$H(30) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{30}{10\pi}\right)^6}} = 0.754\,,\quad \varphi(30) = \arctan\frac{30^3-2\cdot(10\pi)^2\cdot 30}{(10\pi)^3-2\cdot 10\pi\cdot 30^2} = 51.59°$$

Izlazni signal: $y(t) = 15.08\sin(30t+81.59°)$.

3. Za NP filtar s karakteristikom 3. stupnja po Chebyshevu s maksimalnom valovitošću u području propuštanja 0.5dB i graničnom frekvencijom 25 Hz odrediti izraze za amplitudno-frekvencijsku i fazno-frekvencijsku karakteristiku. Odrediti iznos faze i amplitude (u dB) signala na izlazu filtra ako na ulazu djeluje signal $f(t)$ = 20 sin(200t+45°). Kao granična frekvencija se uzima najviša frekvencija na kojoj amplitudno-frekvencijska karakteristika poprima vrijednost minimuma iz područja propuštanja.

Rješenje:

Najprije treba izračunati prijenosnu funkciju filtra 3. reda aproksimacije po Chebyshevu s maksimalnom valovitošću u području propuštanja 0.5dB. Normalizirani polovi:

Maksimalna valovitost u području propuštanja: $a_H = 20\log\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ [dB]

Parametar ε: $\varepsilon = \sqrt{10^{-a_H[\mathrm{dB}]/10} - 1}$

$$\Phi_2 = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon^2}}\right)$$

$$s_k = -\sinh(\Phi_2)\cdot\sin\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right) + j\cosh(\Phi_2)\cdot\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right); \qquad k = 1,\ldots,N$$

Uz uvrštene vrijednosti: N=3, a_H=–0.5dB slijedi:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.5/10} - 1} = 0.3493114$$

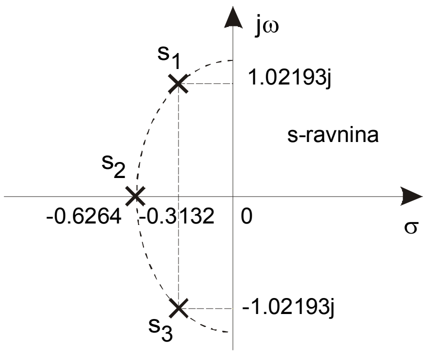
$$\Phi_2 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{0.3493114} + \sqrt{1+\frac{1}{0.3493114^2}}\right) = 0.591378379$$

polovi su na elipsi u lijevoj poluravnini:

$$s_1 = -\sinh(\Phi_2)\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) + j\cosh(\Phi_2)\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -0.3132282431 + j1.021927491$$

$$s_2 = -\sinh(\Phi_2)\sin\left(\frac{3}{6}\pi\right) + j\cosh(\Phi_2)\cos\left(\frac{3}{6}\pi\right) = -0.6264564863$$

$$s_3 = -\sinh(\Phi_2)\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) + j\cosh(\Phi_2)\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -0.3132282431 - j1.021927491$$



Umjesto proračuna, podatke o istim polovima moguće je pročitati iz skripte N. Mijat, “Električni Filtri”, tablica 4 na strani 68:

n	Re	Im	Q_p	ω_p	Faktori nazivnika
3	-0.626456	0	-	-	s+0.626456
	-0.313228	±1.021927	1.706189	1.068853	s^2+0.626456s+1.142448

Polovi s_1 i s_3 čine konjugirano-kompleksni par stoga ih grupiramo. Na taj način će imaginarna jedinica j nestati i nastavljamo postupak samo sa realnim brojevima.

Normalizirana prijenosna funkcija glasi: $H(s)=\frac{-s_2}{(s-s_2)}\cdot\frac{s_1 s_3}{(s-s_1)(s-s_3)}$,

$$H(s)=\frac{0.626456}{(s+0.626456)}\cdot\frac{(-0.313228+j1.02192)(-0.313228-j1.02192)}{(s+0.313228-j1.02192)(s+0.313228+j1.02192)}$$

$$=\frac{0.626456}{(s+0.626456)}\cdot\frac{(0.313228)^2+(1.02192)^2}{(s+0.313228)^2+(1.02192)^2}$$

$$=\frac{0.626456}{s+0.626456}\cdot\frac{1.1424477}{s^2+0.62645648s+1.1424477}=\frac{k_{NP1}\cdot\omega_{NP1}}{s+\omega_{NP1}}\cdot\frac{k_{NP2}\cdot\omega_{NP2}^2}{s^2+\frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}s+\omega_{NP2}^2}$$

Odatle slijede parametri:

$$k_{NP1}=1;\omega_{NP1}=0.626456;k_{NP2}=1;\omega_{NP2}=\sqrt{1.1424477}=1.068853;$$

$$\frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}=0.626456\Rightarrow q_{NP}=\frac{1.068853}{0.626456}=1.706189$$

odnosno: $H(s)=\frac{0.71569379}{s^3+1.25291297s^2+1.534895458s+0.71569379}$.

Navedenu prijenosnu funkciju možemo denormalizirati frekvencijskom transformacijom:

$$s\rightarrow\frac{s}{\omega_g},$$

gdje je $\omega_g=2\pi f_g$ [rad/s] granična frekvencija. Dobivamo:

$$H(s)=\frac{0.626456\cdot 1.1424477}{\left(\frac{s}{\omega_g}+0.626456\right)\left[\left(\frac{s}{\omega_g}\right)^2+\frac{s}{\omega_g}\cdot 0.626456+1.1424477\right]}$$

$$=\frac{0.71569379\cdot\omega_g^3}{(s+0.626456\cdot\omega_g)\left[s^2+s\cdot\omega_g\cdot 0.626456+1.1424477\cdot\omega_g^2\right]}$$

U $H(s)$ uvrstimo $s=j\omega$, odakle slijedi:

$$H(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{0.71569379}{\left(\frac{j\omega}{\omega_g}+0.626456\right)\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_g}\right)^2+\frac{j\omega}{\omega_g}\cdot 0.626456+1.1424477\right]}$$

$$=\frac{0.71569379}{\left(0.626456+j\frac{\omega}{\omega_g}\right)\left[1.1424477-\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2+j\cdot\frac{\omega}{\omega_g}0.626456\right]}$$

Izraz je oblika $H(j\omega)=\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$. Nećemo proširivati izraz tako da nazivnik bude realan nego ćemo odmah izračunati a-f i f-f karakteristike

Amplitudno-frekvencijska karakteristika:

$$|H(j\omega)|=\frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|}=\frac{0.71569379}{\sqrt{0.626456^2+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}\cdot\sqrt{\left[1.1424477-\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right]^2+\left[\frac{\omega}{\omega_g}0.626456\right]^2}}$$

Fazno-frekvencijska karakteristika:

$$\varphi(\omega) = \arctan\frac{\mathrm{Im}[N(j\omega)]}{\mathrm{Re}[N(j\omega)]} - \arctan\frac{\mathrm{Im}[D(j\omega)]}{\mathrm{Re}[D(j\omega)]} = -\arctan\frac{\frac{\omega}{\omega_g}}{0.626456} - \arctan\frac{\frac{\omega}{\omega_g}0.626456}{1.1424477 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}$$

Uvrstimo zadane vrijednosti: $\omega_g=2\pi f_g=50\pi=157.08$, $\omega=200$, $U_0=20$, $\varphi_0=45° \Rightarrow$
$\omega/\omega_g=200/50\pi=4/\pi=1.27324$

$$H(200) = \frac{0.71569379}{\sqrt{0.626456^2 + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2} \cdot \sqrt{\left[1.1424477 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{4}{\pi}\cdot 0.626456\right]^2}} = 0.5421814$$

$$\varphi(200) = -\arctan\frac{\frac{4}{\pi}}{0.626456} - \arctan\frac{\frac{4}{\pi}0.626456}{1.1424477 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2} = -4.7718°$$

Izlazni signal : $$y(t) = 20\cdot 0.5421814\sin(200t + 45° - 4.7718°) = \\ = 10.8436\sin(200t + 40.228°)$$

4. Izračunati prijenosnu funkciju $H(s)$ PP filtra 6. stupnja po Chebyshevu s centralnom frekvencijom ω_0=500rad/s i širinom pojasa propuštanja B=200rad/s. Pojačanje u području propuštanja je jedinično, a maksimalna valovitost u području propuštanja je 0.5dB. Kao granična frekvencija se uzima najviša frekvencija na kojoj amplitudno-frekvencijska karakteristika poprima vrijednost minimuma iz područja propuštanja.

Rješenje:
U postupku proračuna najprije krećemo od NP prototipa dvostruko nižeg reda koji ima zadanu karakteristiku. Zatim na NP prototip primjenjujem NP-PP frekvencijsku transformaciju:

$$s \to \frac{s^2+\omega_0^2}{sB},$$

gdje je B širina pojasa propuštanja filtra, a ω_0 centralna frekvencija.

Chebyshev NP filtar 3. reda koji ima maksimalnu valovitost u području propuštanja 0.5dB je izračunat u prethodnom zadatku, a njegovi parametri glase:

$k_{NP1} = 1;$

$\omega_{NP1} = 0.626456;$

$k_{NP2} = 1;$

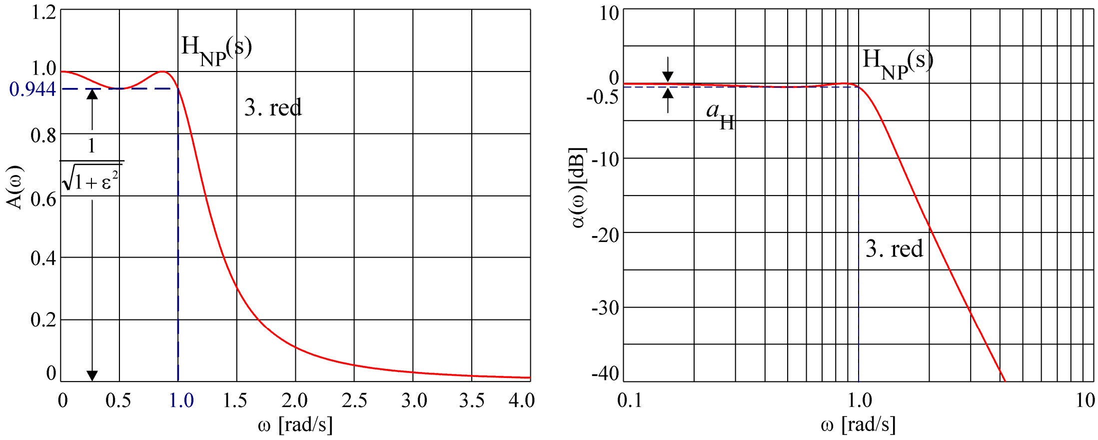
$\omega_{NP2} = 1.068853;$

$q_{NP} = 1.706189.$

Odnosno uvršteni u $H_{NP}(s) = \frac{k_{NP1}\cdot\omega_{NP1}}{s+\omega_{NP1}}\cdot\frac{k_{NP2}\cdot\omega_{NP2}^2}{s^2+\frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}s+\omega_{NP2}^2}$,

daju: $H_{NP}(s) = \frac{0.626456}{s+0.626456}\cdot\frac{1.1424477}{s^2+0.62645648s+1.1424477}$.

Amplitudno-frekvencijska karakteristika NP prototipa izgleda ovako:



(a) Pojačanje u lin mjerilu (b) Pojačanje u log mjerilu [dB].

Primijenimo frekvencijsku transformaciju na $H_{NP}(s)$:

$$H_{PP}(s) = H_{NP}\left(\frac{s^2+\omega_0^2}{sB}\right) = \frac{k_{NP1}\cdot\omega_{NP1}}{\frac{s^2+\omega_0^2}{sB}+\omega_{NP1}} \cdot \frac{k_{NP2}\cdot\omega_{NP2}^2}{\left[\frac{s^2+\omega_0^2}{sB}\right]^2 + \frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}\left[\frac{s^2+\omega_0^2}{sB}\right]+\omega_{NP2}^2}$$

$$= \frac{k_{NP1}\cdot B\omega_{NP1}s}{s^2+B\omega_{NP1}s+\omega_0^2}\cdot\frac{k_{NP2}\cdot\omega_{NP2}^2(sB)^2}{(s^2+\omega_0^2)^2+sB\frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}(s^2+\omega_0^2)+(sB)^2\omega_{NP2}^2}$$

$$= \frac{k_{NP1}\cdot B\omega_{NP1}s}{s^2+B\omega_{NP1}s+\omega_0^2}\cdot\frac{k_{NP2}\cdot\omega_{NP2}^2B^2s^2}{s^4+2s^2\omega_0^2+\omega_0^4+s^3B\frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}+sB\frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}\omega_0^2+s^2B^2\omega_{NP2}^2}$$

$$= \frac{k_{NP1}\cdot B\omega_{NP1}s}{s^2+B\omega_{NP1}s+\omega_0^2}\cdot\frac{k_{NP2}\cdot\omega_{NP2}^2B^2s^2}{s^4+s^3B\frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}+s^2(2\omega_0^2+B^2\omega_{NP2}^2)+sB\frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}\omega_0^2+\omega_0^4}$$

Dobiveni izraz treba izjednačiti sa produktom tri bikvadratne sekcije:

$$H_{PP}(s) = \prod_{i=1}^{3} H_i(s) = \prod_{i=1}^{3}\frac{k_i\cdot\frac{\omega_{0i}}{q_i}s}{s^2+\frac{\omega_{0i}}{q_i}s+\omega_{0i}^2} = \frac{k_1\cdot\frac{\omega_{01}}{q_1}s}{s^2+\frac{\omega_{01}}{q_1}s+\omega_{01}^2}\cdot\frac{k_2\cdot\frac{\omega_{02}}{q_2}s}{s^2+\frac{\omega_{02}}{q_2}s+\omega_{02}^2}\frac{k_3\cdot\frac{\omega_{03}}{q_3}s}{s^2+\frac{\omega_{03}}{q_3}s+\omega_{03}^2}$$

pritom je vidljivo da se izjednačavanje može napraviti:

$$H_1(s) = \frac{k_1\cdot\frac{\omega_{01}}{q_1}s}{s^2+\frac{\omega_{01}}{q_1}s+\omega_{01}^2} = \frac{k_{NP1}\cdot B\omega_{NP1}s}{s^2+B\omega_{NP1}s+\omega_0^2}$$

Dakle, treba izjednačiti faktore uz pojedine potencije od s:

$$H_1(s) = \frac{k_1\cdot\frac{\omega_{01}}{q_1}s}{s^2+\frac{\omega_{01}}{q_1}s+\omega_{01}^2} = \frac{k_{NP1}\cdot B\omega_{NP1}s}{s^2+B\omega_{NP1}s+\omega_0^2}$$

uz s^0 : $\omega_{01}^2 = \omega_0^2$

uz s^1 : $\dfrac{\omega_{01}}{q_1} = B\omega_{NP1} \Rightarrow q_1 = \dfrac{\omega_{01}}{B\omega_{NP1}}$

te : $k_1 = k_{NP1}$

Dakle, treba izjednačiti faktore uz pojedine potencije od s:

$$H_2(s)H_3(s) = \frac{k_2 \cdot \frac{\omega_{02}}{q_2} s}{s^2 + \frac{\omega_{02}}{q_2} s + \omega_{02}^2} \frac{k_3 \cdot \frac{\omega_{03}}{q_3} s}{s^2 + \frac{\omega_{03}}{q_3} s + \omega_{03}^2} = \frac{k_{NP2} \cdot \omega_{NP2}^2 B^2 s^2}{s^4 + s^3 B \frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}} + s^2 (2\omega_0^2 + B^2 \omega_{NP2}^2) + sB \frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}} \omega_0^2 + \omega_0^4}$$

Da bismo to mogli učiniti za ostatak jednakosti moramo srediti umnožak s lijeve strane gornje jednakosti:

$$H_2(s) \cdot H_3(s) = \frac{k_2 \cdot k_3 \cdot \frac{\omega_{02}}{q_2} \cdot \frac{\omega_{03}}{q_3} s^2}{s^4 + \frac{\omega_{02}}{q_2} s^3 + \omega_{02}^2 s^2 + \frac{\omega_{03}}{q_3} s^3 + \frac{\omega_{03}}{q_3} \frac{\omega_{02}}{q_2} s^2 + \frac{\omega_{02}^2 \omega_{03}}{q_3} s + \omega_{03}^2 s^2 + \frac{\omega_{03}^2 \omega_{02}}{q_2} s + \omega_{02}^2 \omega_{03}^2}$$

$$H_2(s) \cdot H_3(s) = \frac{k_2 \cdot k_3 \cdot \frac{\omega_{02}\omega_{03}}{q_2 q_3} \cdot s^2}{s^4 + \left(\frac{\omega_{02}}{q_2} + \frac{\omega_{03}}{q_3}\right) s^3 + s^2 \left(\omega_{02}^2 + \omega_{03}^2 + \frac{\omega_{02}\omega_{03}}{q_2 q_3}\right) + \left(\frac{\omega_{02}^2 \omega_{03}}{q_3} + \frac{\omega_{02}\omega_{03}^2}{q_2}\right) s + \omega_{02}^2 \omega_{03}^2}$$

Sada možemo izjednačiti faktore uz pojedine potencije od s:

uz s^0 : $\omega_{02}^2 \omega_{03}^2 = \omega_0^4$ ....(1)

uz s^1 : $\dfrac{\omega_{02}^2 \omega_{03}}{q_3} + \dfrac{\omega_{02}\omega_{03}^2}{q_2} = B \dfrac{\omega_{NP2}}{q_{NP}} \omega_0^2$ ....(2)

uz s^2 : $\omega_{02}^2 + \omega_{03}^2 + \dfrac{\omega_{02}\omega_{03}}{q_2 q_3} = 2\omega_0^2 + B^2 \omega_{NP2}^2$............(3)

uz s^3 : $\dfrac{\omega_{02}}{q_2} + \dfrac{\omega_{03}}{q_3} = B \dfrac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}$ ....(4)

Ako (2) podijelimo s ω_0^2 tada su desne strane jednadžbi (2) i (4) jednake:

uz s^1 : $\dfrac{\omega_{02}}{q_3} + \dfrac{\omega_{03}}{q_2} = B \dfrac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}$ ....(2')

uz s^3 : $\dfrac{\omega_{02}}{q_2} + \dfrac{\omega_{03}}{q_3} = B \dfrac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}$ ....(4')

Odavde slijedi:

$$\frac{\omega_{02}}{q_3} + \frac{\omega_{03}}{q_2} = \frac{\omega_{02}}{q_2} + \frac{\omega_{03}}{q_3}$$

što se da napisati u obliku:

$(\omega_{02} - \omega_{03})(q_2 - q_3) = 0$

Postoje dva rješenja: (i) odabrati jednake Q-faktore: $q_2 = q_3 = q$ ili

(ii) jednake frekvencije $\omega_{02} = \omega_{03} = \omega_p$.

Slučaj (ii) nećemo razmatrati jer se lako da pokazati da je ovaj slučaj moguć jedino za Q faktore koji su manji od 1/2.

Odlučimo se za (i) $q_2 = q_3 = q$, tada sustav jednadžbi izgleda ovako:

uz s^0 : $\omega_{02}^2\omega_{03}^2 = \omega_0^4$ ....(1)

uz s^2 : $\omega_{02}^2 + \omega_{03}^2 + \dfrac{\omega_{02}\omega_{03}}{q^2} = 2\omega_0^2 + B^2\omega_{NP2}^2$ ....(3) / supst $\omega_{02}\omega_{03} = \omega_0^2$

uz s^3 : $\dfrac{\omega_{02} + \omega_{03}}{q} = B\dfrac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}$ ....(4) $/\cdot q$

Uvedimo oznaku: $A = \dfrac{\omega_{02}}{\omega_0} = \dfrac{\omega_0}{\omega_{03}}$

te uz (4) dobivamo:

$$A\omega_0 + \frac{\omega_0}{A} = Bq\frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}} \Big/ \cdot\frac{A}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad A^2 - \frac{Bq\omega_{NP2}}{\omega_0 q_{NP}}\cdot A + 1 = 0$$

$$\boxed{A = \frac{\omega_{02}}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega_{03}} = \frac{\dfrac{Bq\omega_{NP2}}{\omega_0 q_{NP}} + \sqrt{\left(\dfrac{Bq\omega_{NP2}}{\omega_0 q_{NP}}\right)^2 - 4}}{2}} \text{.......(*)}$$

Iz (3) slijedi:

$$\omega_{02}^2 + \omega_{03}^2 + \frac{\omega_0^2}{q^2} + \underbrace{2\omega_{02}\omega_{03} - 2\omega_{02}\omega_{03}}_{\text{dodano naknadno}} = 2\omega_0^2 + B^2\omega_{NP2}^2$$

$$\omega_{02}^2 + 2\omega_{02}\omega_{03} + \omega_{03}^2 + \frac{\omega_0^2}{q^2} - 2\omega_0^2 = 2\omega_0^2 + B^2\omega_{NP2}^2$$

$$(\omega_{02} + \omega_{03})^2 + \frac{\omega_0^2}{q^2} = 4\omega_0^2 + B^2\omega_{NP2}^2$$

A iz (4) slijedi:

$$\omega_{02} + \omega_{03} = B\frac{q\omega_{NP2}}{q_{NP}}$$

Ako (4) uvrstimo u (3):

$$\left(B\frac{q\omega_{NP2}}{q_{NP}}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{q^2} = 4\omega_0^2 + B^2\omega_{NP2}^2 \Big/ \cdot q^2$$

$$q^4\frac{B^2\omega_{NP2}^2}{q_{NP}^2} - q^2\left(4\omega_0^2 + B^2\omega_{NP2}^2\right) + \omega_0^2 = 0$$

odakle slijedi:

$$q^2 = \frac{\left(4\omega_0^2 + B^2\omega_{NP2}^2\right) + \sqrt{\left(4\omega_0^2 + B^2\omega_{NP2}^2\right)^2 - 4\dfrac{B^2\omega_{NP2}^2\omega_0^2}{q_{NP}^2}}}{2\dfrac{B^2\omega_{NP2}^2}{q_{NP}^2}},$$

odnosno:

$$\boxed{q = \frac{q_{NP}}{B\omega_{NP2}}\cdot\sqrt{\frac{\left(4\omega_0^2 + B^2\omega_{NP2}^2\right) + \sqrt{\left(4\omega_0^2 + B^2\omega_{NP2}^2\right)^2 - 4\dfrac{B^2\omega_{NP2}^2\omega_0^2}{q_{NP}^2}}}{2}}} \text{......(**)}$$

Pomoću izraza (*) i (**) (koji se u literaturi još često nazivaju Geffe-ove formule) može se lako izračunati parametre PP filtra 4. reda koji je dobiven pomoću NP-PP transformacije počevši od prototipnog NP filtra 2. reda. Pritom je PP filtar 4. reda realiziran kao kaskada dvije PP sekcije (2. reda).

Vratimo se na zadatak:
Načinimo proračun tako da koristimo normaliziranu širinu pojasa propuštanja $B_n = B/\omega_0 = 200/500 = 0.5$ i normaliziranu centralnu frekvenciju $\omega_{0n} = \omega_0/\omega_0 = 1$.
Iz $\omega_{NP1} = 0.626456$ računamo :

$$\omega_{01} = \omega_{0n} = 1$$

$$q_1 = \frac{\omega_{01}}{B_n \omega_{NP1}} = \frac{1}{0.4 \cdot 0.626456} = 3.9907 \approx 4.0$$

$k_1 = k_{NP1} = 1$

$$H_1(s) = \frac{k_1 \cdot \frac{\omega_{01}}{q_1} s}{s^2 + \frac{\omega_{01}}{q_1} s + \omega_{01}^2} = \frac{0.25s}{s^2 + 0.25s + 1}$$

A iz $\omega_{NP2} = 1.068853,\ q_{NP} = 1.706189$ pomoću (**) i (*) računamo:

$$q = q_2 = q_3 = 8.147017528$$

$$\omega_{02} = 1.225521896$$

$$\omega_{03} = 0.815978893$$

Također vrijedi: $k_2 \cdot k_3 \cdot \frac{\omega_{02}}{q_2} \cdot \frac{\omega_{03}}{q_3} = k_{NP2} \cdot \omega_{NP2}^2 B^2$ (vidi brojnike izraza koje izjednačujemo)

Odnosno: $k_2 \cdot k_3 = k_{NP2} \cdot \frac{q^2}{\omega_0^2} \omega_{NP2}^2 B^2 = 12.1326$

Možemo za početak izabrati pojačanja $k_2 = k_3 = \sqrt{12.1326} = 3.4832$.

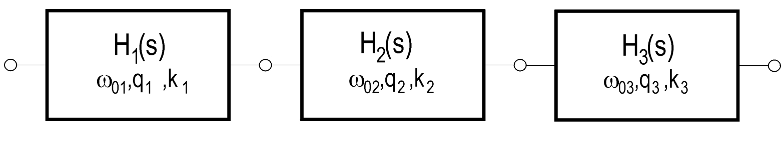
Konačno preostale dvije prijenosne funkcije glase:

$$H_2(s) = \frac{k_2 \cdot \frac{\omega_{02}}{q} s}{s^2 + \frac{\omega_{02}}{q} s + \omega_{02}^2} = \frac{0.523960657s}{s^2 + 0.1504258s + 1.50190392}$$

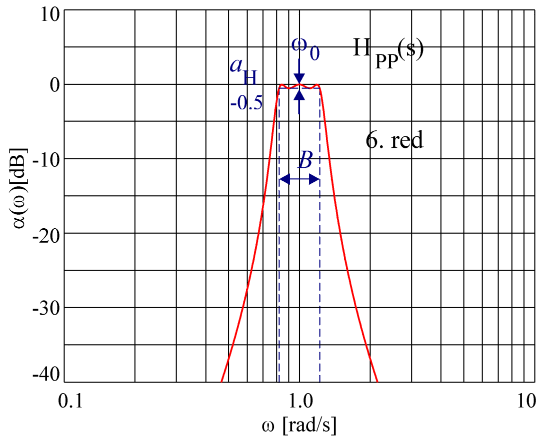
$$H_3(s) = \frac{k_3 \cdot \frac{\omega_{03}}{q} s}{s^2 + \frac{\omega_{03}}{q} s + \omega_{03}^2} = \frac{0.3488642988s}{s^2 + 0.100156s + 0.66582155}$$

Dobili smo tri prijenosne funkcije koje su normalizirane.

Ukupna prijenosna funkcija je kaskada 3 PP sekcije: $H_{PP}(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_3(s)$.



Amplitudno-frekvencijska karakteristika normaliziranog PP filtra izgleda ovako:



Sada možemo izvršiti denormalizaciju po frekvenciji ω_0 pomoću:

$$s \to \frac{s}{\omega_0},$$

gdje je ω_0=500rad/s centralna frekvencija PP filtra.

Izračunajmo koliko iznosi širina pojasa propuštanja filtra $B/2\pi$ te gornja i donja granična frekvencija f_g i f_d. Pokažimo u kakvoj vezi su granične frekvencije sa centralnom frekvencijom.

<u>Parametri filtra:</u>

Centralna frekvencija PP filtra $\omega_0 = 500\,[\text{rad/s}] \Rightarrow f_0 = \omega_0/2\pi = 500/2\pi = 79.57 \approx 80[\text{Hz}]$

Širina pojasa propuštanja B=200[rad/s] $\Rightarrow B_{Hz} = 200/2\pi = 31.83 \approx 32[\text{Hz}]$

(1) $B = \omega_g - \omega_d$

(2) $\omega_0^2 = \omega_g \cdot \omega_d$

$$(2) \Rightarrow \quad \omega_d = \frac{\omega_0^2}{\omega_g},\ B = \omega_g - \frac{\omega_0^2}{\omega_g} \Big/ \cdot \omega_g,\quad \omega_g^2 - \omega_g B - \omega_0^2 = 0$$

$$\omega_g = \frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \omega_0^2} = 100 \pm \sqrt{100^2 + 500^2} = 100 \pm 100\sqrt{26}$$ (uzimamo znak +, jer je ω_g>0)

odnosno iz (2) $\Rightarrow \quad \omega_g = \frac{\omega_0^2}{\omega_d},\ B = \frac{\omega_0^2}{\omega_d} - \omega_d \Big/ \cdot \omega_d,\quad \omega_g^2 + \omega_g B - \omega_0^2 = 0$

$$\omega_d = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \omega_0^2} = -100 \pm \sqrt{100^2 + 500^2} = -100 \pm 100\sqrt{26}$$

(uzimamo znak +, jer je ω_d>0)

Konačno gornja i donja granična frekvencija su definirane izrazom:

$$\boxed{\omega_{g,d} = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2} \pm \frac{B}{2}}$$

$\omega_{g,d} = \sqrt{500^2 + 100^2} \pm 100 = 100\sqrt{26} \pm 100$ [rad/s] $\Rightarrow \omega_g$= 609.9 [rad/s], ω_d= 409.9 [rad/s]

ili f_g=ω_g/2π=609.9 /2π=97.07 [Hz], f_d=ω_d/2π=409.9/2π=65.24 [Hz],

B=ω_g–ω_d=609.9–409.9=200 [rad/s] ili f_g–f_d=97.07–65.24=31.83 [Hz]

Centralna frekvencija $\omega_0 = \sqrt{\omega_g \cdot \omega_d} = \sqrt{609.9 \cdot 409.9} = 500\,[\text{rad/s}]$ ili f_0≈80 [Hz]

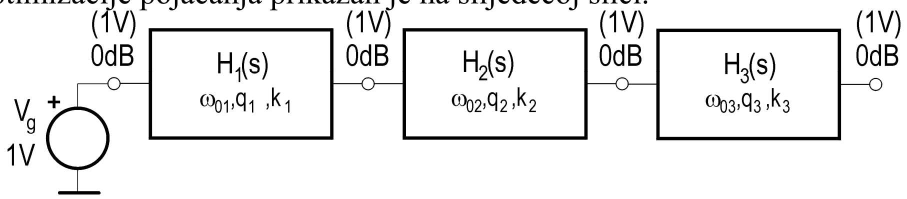
$\omega_0^2 = \omega_d \cdot \omega_g \to \omega_0$ je geometrijska sredina od ω_d i ω_g

ili $f_0^2 = f_d \cdot f_g \to f_0$ je geometrijska sredina od f_d i f_g

5. U 4. zadatku je izračunata prijenosna funkciju $H(s)$ PP filtra 6. stupnja po Chebyshevu s centralnom frekvencijom ω_0=500rad/s i širinom pojasa propuštanja B=200rad/s. Pojačanje u području propuštanja je jedinično, a maksimalna valovitost u području propuštanja je 0.5dB. Treba optimirati pojačanja pojedinih bikvadratnih sekcija u kaskadi kako bi filtar imao maksimalni dinamički opseg i zatim realizirati filtar.

Rješenje:

Postupak optimizacije pojačanja prikazan je na slijedećoj slici.



Na ulaz prve sekcije kaskade postavimo generator sinusnog valnog oblika amplitude 1V i promjenjive frekvencije. Frekvenciju možemo mijenjati od 0 do ∞. Podesimo pojačanje prve sekcije kako bi maksimalni napon na izlazu prve sekcije bio jednak 1V (ili 0dB). Iz toga slijedi vrijednost k_1. Uz poznati k_1 te H_1, H_2 (H_2 ima nepoznat k_2) sada mjerimo amplitudu napona na izlazu druge sekcije. Mijenjajući frekvenciju generatora podesimo pojačanje druge sekcije kako bi na izlazu druge sekcije dobiti maksimalni napon jednak 1V (ili 0dB) na nekoj frekvenciji. Iz toga slijedi vrijednost k_2. Na kraju, uz poznate H_1, H_2 i H_3 te k_1 i k_2, uz uvjet na izlazu 1V izračunavamo (numerički) vrijednost k_3. Time je dinamički opseg filtra optimiran.

Chebyshev PP filtar 6. reda koji ima maksimalnu valovitost u području propuštanja 0.5dB je izračunat u prethodnom zadatku, a njegovi parametri (normalizirani na centralnu frekvenciju ω_0=1) glase:

Prva sekcija: $\omega_{01} = 1,\ q_1 = 4.0,\ k_1 = 1$

Druga i treća sekcija:

$q = q_2 = q_3 = 8.147017528,\ \omega_{02} = 1.225521896,\ \omega_{03} = 0.815978893,\ k_2 = k_3 = 3.4832$

Prijenosne funkcije glase:

$$H_1(s) = \frac{k_1 \cdot \frac{\omega_{01}}{q_1} s}{s^2 + \frac{\omega_{01}}{q_1} s + \omega_{01}^2} = \frac{0.25s}{s^2 + 0.25s + 1}$$

$$H_2(s) = \frac{k_2 \cdot \frac{\omega_{02}}{q} s}{s^2 + \frac{\omega_{02}}{q} s + \omega_{02}^2} = \frac{0.523960657s}{s^2 + 0.1504258s + 1.50190392}$$

$$H_3(s) = \frac{k_3 \cdot \frac{\omega_{03}}{q} s}{s^2 + \frac{\omega_{03}}{q} s + \omega_{03}^2} = \frac{0.3488642988s}{s^2 + 0.100156s + 0.66582155}$$

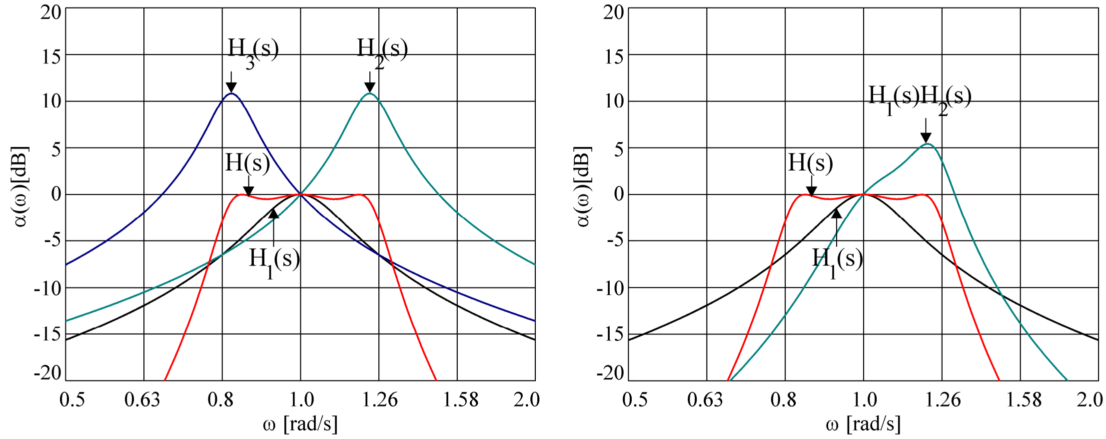
Dobili smo tri prijenosne funkcije koje su normalizirane.

Jedini uvjet koji sva tri pojačanja moraju zadovoljavati je da je njihov umnožak:

$$\prod_{i=1}^{3} k_i = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 12.1326,$$

kako bi ukupno pojačanje u području propuštanja PP filtra bilo jedinično (ili 0dB).

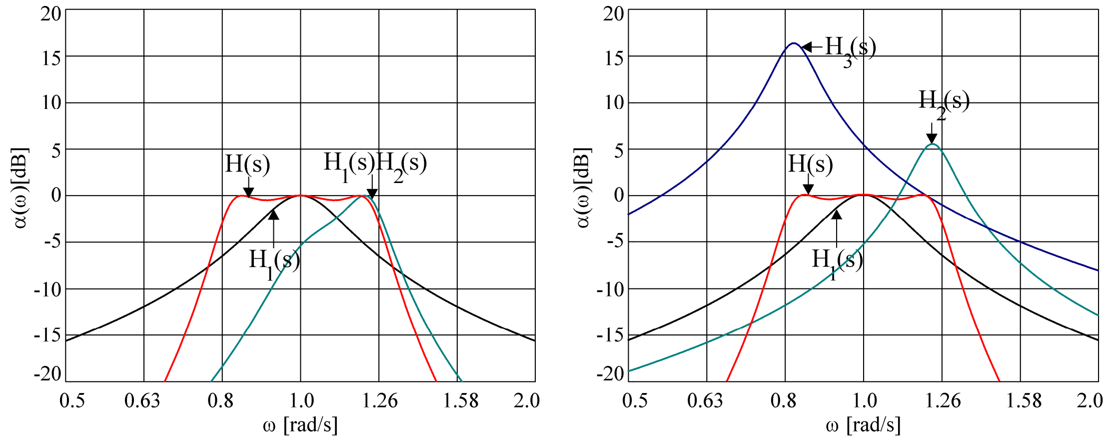
Amplitudno-frekvencijske karakteristike normaliziranog PP filtra te svih pojedinih sekcija prikazane su na prvoj slici. Na drugoj slici su prikazane amplitude svih izlaza bikvadratnih sekcija.



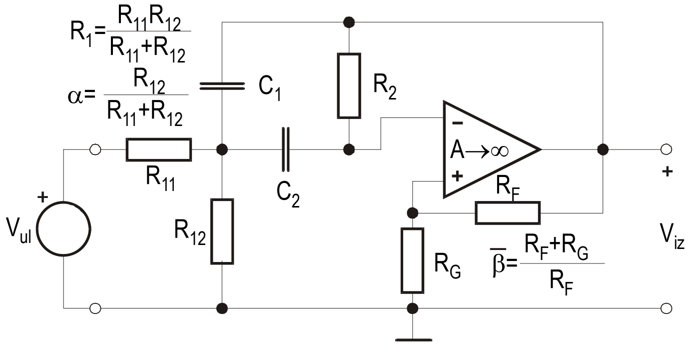
Kako je vidljivo na slici amplituda prve sekcije dostiže svoj maksimum od 0dB na frekvenciji ω=1, pa zaključujemo da je pojačanje prve sekcije k_1=1 dobro pretpostavljeno.
Ako promotrimo karakteristiku prijenosne funkciju H_1H_2 odnosno ako mjerimo napona na izlazu drugog bloka, vidimo da na frekvenciji ω=1.2073rad/s karakteristika doseže maksimum od 5.4053dB ili pojačanje od 1.8632 puta. Ove smo podatke dobili numerički pomoću programa Matlab. Dakle, pojačanje druge sekcije treba reducirati 1.8632 puta pa je ono k_2=3.4832/1.8632=1.8696. Konačno lako izračunamo pojačanje treće sekcije:

$$k_3 = \frac{12.1326}{k_1 \cdot k_2} = \frac{12.1326}{1 \cdot 1.8696} = 6.4894\,.$$

Na slijedećoj slici (lijevo) se nalaze izlazi sve tri sekcije s optimiranim pojačanjima i vidljivo je da su svi maksimumi na 0dB. Na desnoj slici nalaze se amplitudno-frekvencijske karakteristike svih pojedinih sekcija sa novim optimalnim pojačanjima.



Sada kada smo odredili iznose pojačanja možemo pristupiti realizaciji filtra.
U realizaciji ćemo koristiti bikvadratnu sekciju s pojasno-propusnom karakteristikom i s jednim pojačalom koja je prikazana na slijedećoj slici. Sekcija se zove SAB (single-amplifier biquad) sekcija ili Deliyannisova sekcija.
Najprije ćemo izračunati normalizirane vrijednosti komponenata, a zatim ćemo ih denormirati na frekvenciju ω_0=500rad/s i na neku pogodnu impedanciju R_0.



Prijenosna funkcija sekcije glasi:

$$H(s)=\frac{V_{iz}(s)}{V_{ul}(s)}=-\frac{k\cdot\frac{\omega_p}{q_p}s}{s^2+\frac{\omega_p}{q_p}s+\omega_p^2}=-\frac{k\cdot a_1 s}{s^2+a_1 s+a_0},$$

gdje su vrijednosti koeficijenata:

$$a_1=\frac{\omega_p}{q_p}=\frac{R_1(C_1+C_2)+R_2C_2-\overline{\beta}R_2C_2}{R_1R_2C_1C_2},\ a_0=\omega_p^2=\frac{1}{R_1R_2C_1C_2},\ ka_1=\alpha\overline{\beta}\frac{1}{R_1C_1},$$

odnosno:

$$q_p=\frac{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}{R_1(C_1+C_2)+R_2C_2-\overline{\beta}R_2C_2},\ \omega_p=\frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}},\ k=\alpha\overline{\beta}q_p\sqrt{\frac{R_2C_2}{R_1C_1}},$$

gdje su

$$\overline{\beta}=1+\frac{R_G}{R_F},\ \alpha=\frac{R_{12}}{R_{11}+R_{12}},\ R_1=R_{11}\|R_{12}=\frac{R_{11}\cdot R_{12}}{R_{11}+R_{12}},\ R_{11}=\frac{R_1}{\alpha},\ R_{12}=\frac{R_1}{1-\alpha}.$$

U proračunu ćemo pretpostaviti R_1=R_2=R, C_1=C_2=C pa će gornji izrazi poprimiti jednostavniji oblik:

$$q_p=\frac{\sqrt{R^2C^2}}{R(C+C)+RC-\overline{\beta}RC}=\frac{1}{3-\overline{\beta}},\ \omega_p=\frac{1}{\sqrt{R^2C^2}}=\frac{1}{RC},\ k=\alpha\overline{\beta}q_p.$$

Sada slijedi proračun elemenata pojedinih sekcija:

(*i*) Prva sekcija: $\omega_{01}=\omega_p=1,\ q_1=q_p=4.0,\ k_1=k=1$

Odaberimo C=1 $\Rightarrow$ $R=\frac{1}{\omega_p C}=1,\ \overline{\beta}=3-\frac{1}{q_p}=3-\frac{1}{4}=2.75,\ \alpha=\frac{k}{\overline{\beta}q_p}=\frac{1}{2.75\cdot 4}=\frac{1}{11}=0.0909$

Odabiremo $R_F=1\Rightarrow R_G=R_F(\overline{\beta}-1)=1.75$

Ostali elementi R_1=R_2=R=1, C_1=C_2=C=1, $R_{11}=\frac{R_1}{\alpha}=\frac{1}{1/11}=11$,

$$R_{12}=\frac{R_1}{1-\alpha}=\frac{1}{1-1/11}=\frac{11}{10}=1.1$$

(*ii*) Druga sekcija: $\omega_{02}=1.225521896,\ q_2=8.147017528,\ k_2=1.8696$

Odaberimo C=1 $\Rightarrow$ $R=\frac{1}{\omega_p C}=0.81598,\ \overline{\beta}=3-\frac{1}{q_p}=3-\frac{1}{8.1470175}=2.8773,$

$$\alpha=\frac{k}{\overline{\beta}q_p}=\frac{1.8696}{2.8773\cdot 8.147017528}=0.0798$$

Odabiremo $R_F=1\Rightarrow R_G=R_F(\overline{\beta}-1)=1.8773$

Ostali elementi R_1=R_2=R=0.81698, C_1=C_2=C=1, $R_{11}=\dfrac{R_1}{\alpha}=\dfrac{0.81598}{0.0798}=10.2253$,

$$R_{12}=\frac{R_1}{1-\alpha}=\frac{0.81598}{1-0.0798}=\frac{0.81598}{0.9202}=0.8867$$

(*iii*) Treća sekcija: $\omega_{03}=0.815978893,\ q_3=8.147017528,\ k_3=6.4894$

Odaberimo C=1 $\Rightarrow$ $R=\dfrac{1}{\omega_p C}=1.22552$, $\overline{\beta}=3-\dfrac{1}{q_p}=3-\dfrac{1}{8.1470175}=2.8773$,

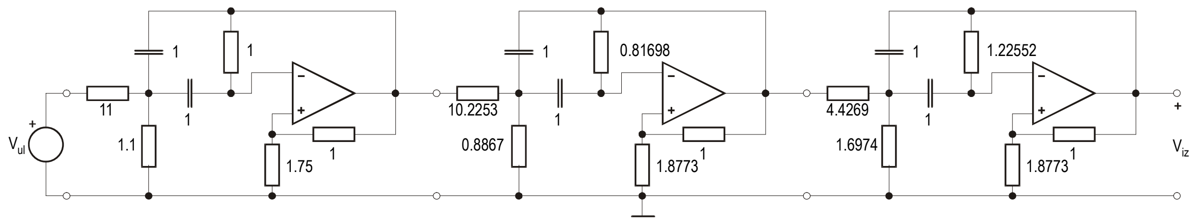
$$\alpha=\frac{k}{\overline{\beta}q_p}=\frac{6.4894}{2.8773\cdot 8.147017528}=0.2768$$

Odabiremo $R_F=1\Rightarrow R_G=R_F(\overline{\beta}-1)=1.8773$

Ostali elementi R_1=R_2=R=1.22552, C_1=C_2=C=1, $R_{11}=\dfrac{R_1}{\alpha}=\dfrac{1.22552}{0.2768}=4.4269$,

$$R_{12}=\frac{R_1}{1-\alpha}=\frac{1.22552}{1-0.2768}=\frac{1.22552}{0.7232}=1.6947$$

Električni filtar sa normaliziranim vrijednostima elemenata je prikazan na slici:



Primijetimo da dobiveni normirani elementi realiziraju normiranu širinu pojasa B_n=0.4. Sada se može provesti denormalizacija elemenata na frekvenciju ω_0=500rad/s. Pritom će širina pojasa propuštanja filtra koju ćemo dobiti denormalizacijom biti B=$B_n\cdot\omega_0$=0.4·500=200rad/s. Bez obzira na frekvenciju denormalizacije normirana širina pojasa B_n=0.4 će uvijek ostati ista jer je filtar izračunat s tom širinom pojasa.

Denormalizacija elemenata se vrši prema slijedećim izrazima:

$$R=R_0\cdot R_n;\ C=\frac{C_n}{\omega_0\cdot R_0};\ L=\frac{L_n\cdot R_0}{\omega_0}.$$

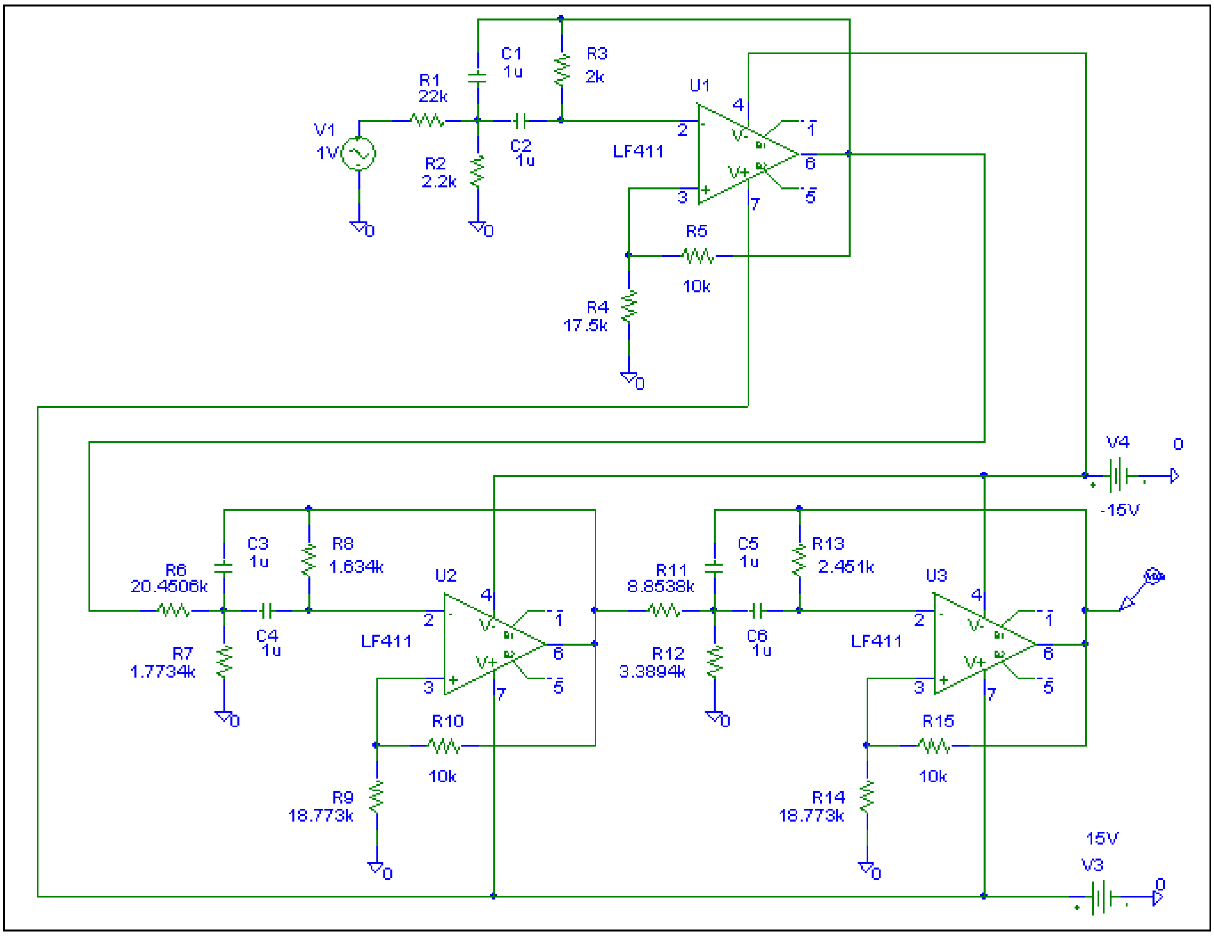
Impedanciju R_0 s kojom vršimo denormalizaciju možemo izračunati iz uvjeta da u realizaciji koristimo kapacitete npr. 1μF. Tada je:

$$R_0=\frac{C_n}{\omega_0\cdot C}=\frac{1}{500\cdot 1\cdot 10^{-6}}=2000\Omega=2k\Omega$$

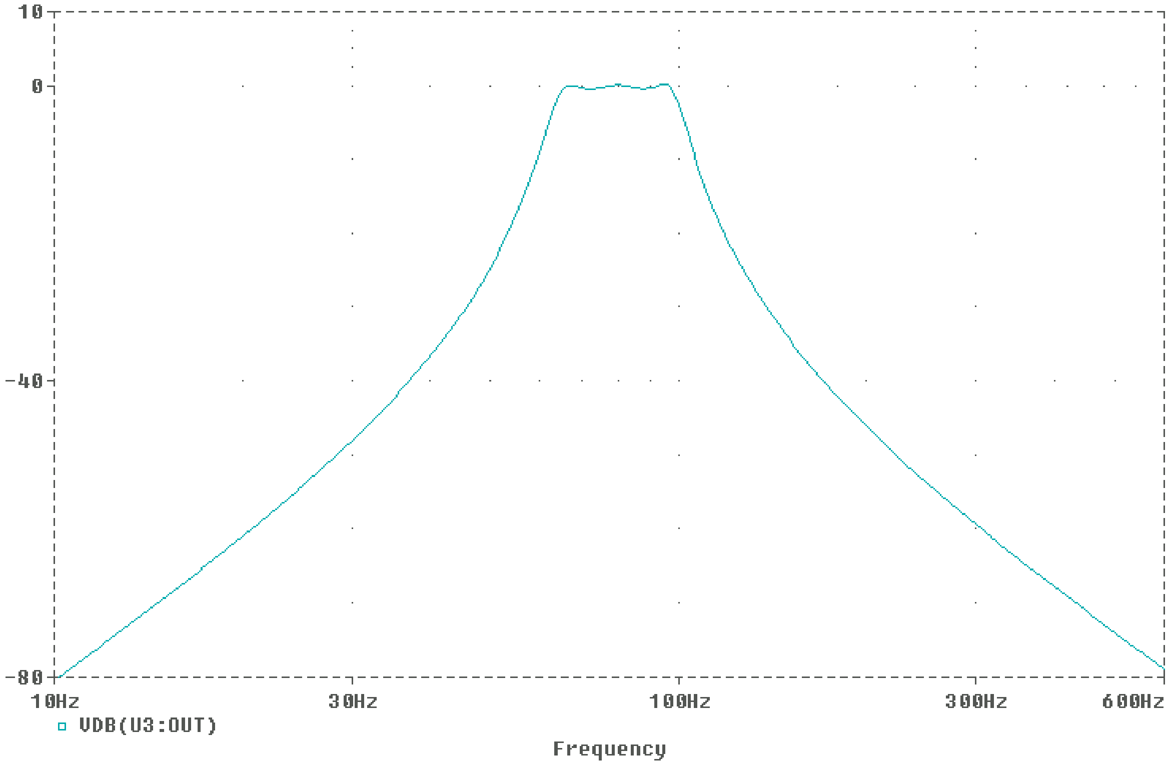
Denormirani elementi su izračunati za sve tri sekcije i vidljivi su na slijedećoj slici u PSpice-u. U PSpice-u je napravljena i frekvencijska analiza kako bi se provjerilo da li je zadatak točno riješen.

Amplitudno-frekvencijska karakteristika je također prikazana. Na slici je vidljivo da je pojačanje u području propuštanja 0dB i da je maksimalna valovitost 0.5dB, kao što je bilo zadano u zadatku. Vidljive su i karakteristične frekvencije: centralna frekvencija, gornja i donja granična frekvencija te širina pojasa propuštanja (u [Hz]) koje su izračunate u 8. zadatku i ovdje ih ponavljamo: f_0=ω_0/2π=79.57Hz, f_g=ω_g/2π=97.07Hz, f_d=ω_d/2π=65.24Hz, B_{Hz}=f_g–f_d=97.07–65.24=31.83Hz.

Električni filtar:



Amplitudno-frekvencijska karakteristika:



6. Realizirati NP filtar 3. reda s karakteristikom po Chebyshevu s normiranom graničnom frekvencijom $\omega_{-3\mathrm{dB}}=1$ i maksimalnom valovitošću u području propuštanja 1dB.

Rješenje:
Najprije treba izračunati prijenosnu funkciju filtra 3. reda aproksimacije po Chebyshevu s maksimalnom valovitošću u području propuštanja 1dB. Zatim treba normirati polove, a time i graničnu frekvenciju filtra na frekvenciju $\omega_{-3\mathrm{dB}}$. To je frekvencija no kojoj bi karakteristika s originalnim polovima imala vrijednost –3dB, a izračunava se iz:

$$\omega_{-3\mathrm{dB}} = \cosh\left[\frac{1}{N}\mathrm{Ar}\cosh\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$$

polovi slijede iz:

$$s_k = \frac{1}{\omega_{-3\mathrm{dB}}}\left[-\sinh(\Phi_2)\cdot\sin\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right) + j\cosh(\Phi_2)\cdot\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)\right]; \qquad k=1,\dots,N$$

gdje su: $\varepsilon = \sqrt{10^{-a_H[\mathrm{dB}]/10}-1}$, $\Phi_2 = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon^2}}\right)$.

Vidljivo je da iz oblika gornjih formula da možemo izračunati polove na slijedeći način: najprije izračunamo polove na standardan način tako da je granična frekvencija najviša frekvencija na kojoj amplitudno-frekvencijska karakteristika poprima vrijednost minimuma iz područja propuštanja. Zatim te iste polove podijelimo sa $\omega_{-3\mathrm{dB}}$.
Uz uvrštene vrijednosti: N=3, a_H=–1dB slijedi:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{1/10}-1} = 0.508847$$

$$\omega_{-3\mathrm{dB}} = \cosh\left[\frac{1}{N}\mathrm{Ar}\cosh\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] = \cosh\left[\frac{1}{3}\mathrm{Ar}\cosh\left(\frac{1}{0.508847}\right)\right] = 1.09487$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{0.508847}+\sqrt{1+\frac{1}{0.508847^2}}\right) = 0.475992$$

$$s_1 = \frac{1}{\omega_{-3\mathrm{dB}}}\left[-\sinh(\Phi_2)\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) + j\cosh(\Phi_2)\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right] = -0.225676 + j0.882297$$

$$s_2 = \frac{1}{\omega_{-3\mathrm{dB}}}\left[-\sinh(\Phi_2)\sin\left(\frac{3}{6}\pi\right) + j\cosh(\Phi_2)\cos\left(\frac{3}{6}\pi\right)\right] = -0.451352$$

$$s_3 = \frac{1}{\omega_{-3\mathrm{dB}}}\left[-\sinh(\Phi_2)\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) + j\cosh(\Phi_2)\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right] = -0.225676 - j0.882297$$

Umjesto gornjeg proračuna, podatke o polovima normiranim na –3dB-frekvenciju moguće je pročitati iz skripte N. Mijat, "Električni Filtri", tablica 11 na strani 75:

n	Re	Im	Q_p	ω_p	Faktori nazivnika
3	-0.451352	0	-	-	s+0.451352
	-0.225676	$\pm$0.882297	2.017720	0.910702	s^2+0.451352s+0.829377

Normalizirana prijenosna funkcija glasi: $H(s) = \frac{-s_2}{(s-s_2)}\cdot\frac{s_1 s_3}{(s-s_1)(s-s_3)}$,

$$H(s) = \frac{0.451352}{(s+0.451352)}\cdot\frac{(-0.225676+j0.882297)(-0.313228-j1.02192)}{(s+0.225676-j0.882297)(s+0.313228+j0.882297)}$$

$$= \frac{0.451352}{(s+0.451352)}\cdot\frac{(0.225676)^2+(0.882297)^2}{(s+0.225676)^2+(0.882297)^2}$$

$$=\frac{0.451352}{s+0.451352}\cdot\frac{0.829377}{s^2+0.451352s+0.829377}=\frac{k_{NP1}\cdot\omega_{NP1}}{s+\omega_{NP1}}\cdot\frac{k_{NP2}\cdot\omega_{NP2}^2}{s^2+\frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}s+\omega_{NP2}^2}$$

Odatle slijede parametri:

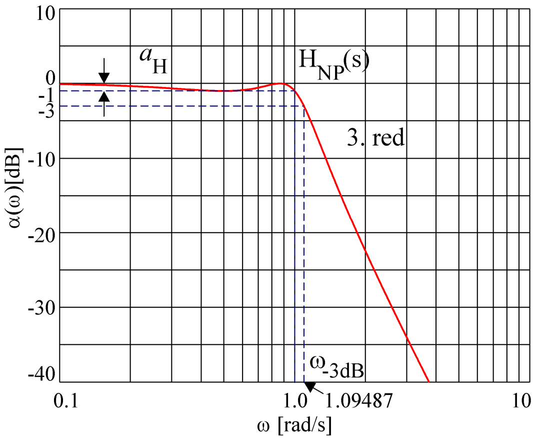
$$k_{NP1}=1;\omega_{NP1}=0.451352;k_{NP2}=1;\omega_{NP2}=\sqrt{0.829377}=0.910702;$$

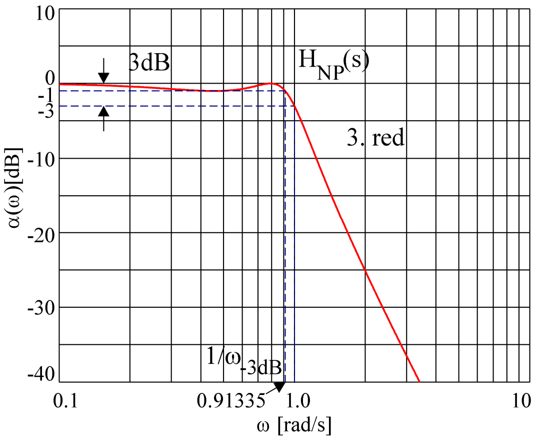
$$\frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}=0.451352\Rightarrow q_{NP}=\frac{0.910702}{0.451352}=2.01772$$

odnosno: $H(s)=\dfrac{0.374341}{s^3+0.902704s^2+1.0331s+0.374341}=$

$$=\frac{k_{NP1}k_{NP2}\omega_{NP1}\omega_{NP2}^2}{s^3+\frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}s^2+\omega_{NP2}^2s+s^2\omega_{NP1}+\frac{\omega_{NP1}\omega_{NP2}}{q_{NP}}s+\omega_{NP1}\omega_{NP2}^2}$$

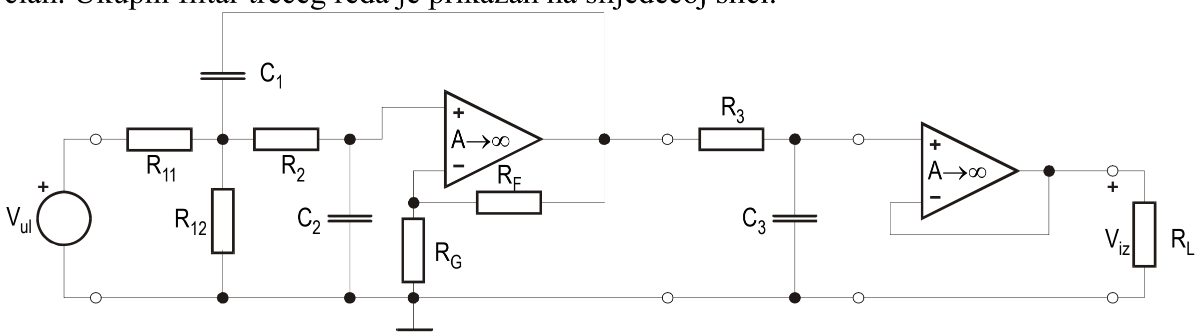
$$=\frac{k_{NP1}k_{NP2}\omega_{NP1}\omega_{NP2}^2}{s^3+\left(\omega_{NP1}+\frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}}\right)s^2+\left(\frac{\omega_{NP1}\omega_{NP2}}{q_{NP}}+\omega_{NP2}^2\right)s+\omega_{NP1}\omega_{NP2}^2}=\frac{ka_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$$





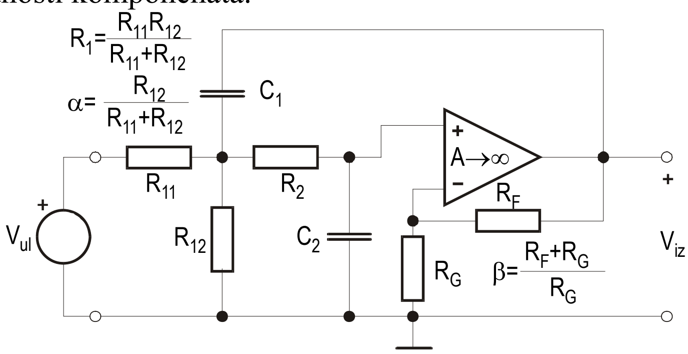
Na slikama su prikazane dvije karakteristike: lijevo je karakteristika koja ima normiranu graničnu frekvenciju 1 na mjestu gdje a-f karakteristika poprima vrijednost valovitosti -1dB, a desno je karakteristika koja ima normiranu graničnu frekvenciju 1 na mjestu gdje a-f karakteristika poprima vrijednost -3dB. Primijeti da prva karakteristika poprima vrijednost -3dB na frekvenciji 1.09487, dok druga poprima vrijednost -3dB na frekvenciji 1.0. Također, prva karakteristika poprima vrijednost -1dB na frekvenciji 1.0, dok druga poprima vrijednost -1dB na frekvenciji 1/1.09487=0.91335.

Sada možemo pristupiti realizaciji filtra. U realizaciji 2. stupnja u prijenosnoj funkciji ćemo koristiti bikvadratnu sekciju s jednim pojačalom. Za realizaciju 1. stupnja ćemo koristiti *RC* član. Ukupni filtar trećeg reda je prikazan na slijedećoj slici.



Ukupna prijenosna funkcija filtra prikazanog na slici se može napisati kao produkt $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$. Treba primijetiti da je RC član (sekcija 1. reda) spojen na izlaz prvog operacijskog pojačala. Taj dodatni *RC* član čine otpor R_3 i kapacitet C_3, i on je sadržan u potpunosti i jedino u dijelu prijenosne funkcije $H_2(s)$, dakle nema otpora R_3 i kapaciteta C_3 u prvom dijelu prijenosne funkcije $H_1(s)$. Također, otpori i kapaciteti R_1, R_2, C_1, C_2, koji se pojavljuju u prvom dijelu prijenosne funkcije $H_1(s)$, ne pojavljuju se u dijelu prijenosne funkcije $H_2(s)$. Na ovaj način je omogućen **jednostavan** proračun svake sekcije zasebno. Osim toga ova izolacija pojačalom između pojedinih dijelova filtra imati će povoljan utjecaj na osjetljivost filtra na varijacije elemenata. Također, treba primijetiti da je iza RC člana (R_3, C_3) također jedinično pojačalo pa je time omogućeno da se na izlaz spoji bilo koji opteretni otpor R_L, a da se ne razdesi filtar.

Promotrimo najprije proračun sekcije 2. reda koja realizira $H_1(s)$. U realizaciji ćemo koristiti bikvadratnu sekciju s nisko-propusnom karakteristikom i s jednim pojačalom koja je prikazana na slijedećoj slici. Sekcija se zove SAK (Sallen and Key) sekcija. Izračunati ćemo normalizirane vrijednosti komponenata.



Prijenosna funkcija sekcije glasi:

$$H_1(s) = \frac{V_{iz}(s)}{V_{ul}(s)} = \frac{k \cdot \omega_p^2}{s^2 + \dfrac{\omega_p}{q_p} s + \omega_p^2} = \frac{k \cdot a_0}{s^2 + a_1 s + a_0},$$

gdje su vrijednosti koeficijenata:

$$a_1 = \frac{\omega_p}{q_p} = \frac{R_1(C_1 + C_2) + R_2 C_2 - \beta R_1 C_1}{R_1 R_2 C_1 C_2},\ a_0 = \omega_p^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2},\ k = \alpha\beta,$$

odnosno:

$$q_p = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{R_1(C_1 + C_2) + R_2 C_2 - \beta R_1 C_1},\ \omega_p = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}},\ k = \alpha\beta,$$

gdje su

$$\beta = 1 + \frac{R_F}{R_G},\ \alpha = \frac{R_{12}}{R_{11} + R_{12}},\ R_1 = R_{11} \| R_{12} = \frac{R_{11} \cdot R_{12}}{R_{11} + R_{12}},\ R_{11} = \frac{R_1}{\alpha},\ R_{12} = \frac{R_1}{1 - \alpha}.$$

U proračunu ćemo pretpostaviti R_1=R_2=R, C_1=C_2=C pa će gornji izrazi poprimiti jednostavniji oblik:

$$q_p = \frac{\sqrt{R^2 C^2}}{R(C + C) + RC - \beta RC} = \frac{1}{3 - \beta},\ \omega_p = \frac{1}{\sqrt{R^2 C^2}} = \frac{1}{RC},\ k = \alpha\beta.$$

Sada slijedi proračun elemenata pojedinih sekcija:

(i) Sekcija 2. reda: $\omega_p = 0.910702,\ q_p = 2.01772,\ k = 1$

Odaberimo C=1 $\Rightarrow$ $R = \dfrac{1}{\omega_p C} = \dfrac{1}{0.910702} = 1.0981$, $\beta = 3 - \dfrac{1}{q_p} = 3 - \dfrac{1}{2.01772} = 2.5044$,

$$\alpha = \frac{k}{\beta} = \frac{1}{2.5044} = 0.3993$$

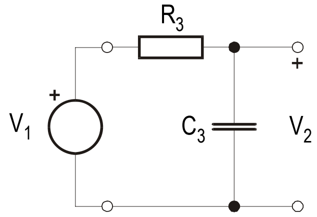
Odabiremo $R_G = 1 \Rightarrow R_F = R_G(\beta - 1) = 1.5044$

Ostali elementi R_1=R_2=R=1.0981, C_1=C_2=C=1, $R_{11} = \dfrac{R_1}{\alpha} = \dfrac{1.0981}{0.3993} = 2.7501$,

$$R_{12} = \frac{R_1}{1-\alpha} = \frac{1.0981}{1-0.3993} = 1.8280$$

(ii) Sekcija 1. reda: $\omega_{NP1} = 0.451352,\ k_1 = 1$

Promotrimo proračun sekcije 1. reda:



Prijenosna funkcija RC člana glasi:

$$H_2(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\dfrac{1}{R_3C_3}}{s + \dfrac{1}{R_3C_3}} = \frac{k\cdot\omega_{NP}}{s+\omega_{NP}},\ \text{gdje su: } \omega_{NP} = \frac{1}{R_3C_3},\ k = 1.$$

Odaberimo C_3=1 $\Rightarrow$ $R_3 = \dfrac{1}{\omega_{NP1}C_3} = \dfrac{1}{0.451352} = 2.2156$

7. Realizirati NP filtar 3. reda s karakteristikom po Chebyshevu s normiranom graničnom frekvencijom $\omega_{-3\text{dB}}$=1 i maksimalnom valovitošću u području propuštanja 1dB, ali tako da se u realizaciji koristi filtarska sekcija 3. reda sa jednim pojačalom.

Rješenje:

U prošlom zadatku smo izračunali prijenosnu funkciju filtra 3. reda aproksimacije po Chebyshevu s maksimalnom valovitošću u području propuštanja 1dB, a njeni parametri glase:

$$k_{NP1} = 1; \omega_{NP1} = 0.451352;$$

$$k_{NP2} = 1; \omega_{NP2} = 0.910702; q_{NP} = 2.01772$$

Ukoliko su zadani parametri kao što su frekvencije i faktori dobrote tada se lako mogu izračunati koeficijenti prijenosne funkcije:

$$H(s) = \frac{ka_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0},\ \text{koji iznose:}$$

$$a_2 = \omega_{NP1} + \frac{\omega_{NP2}}{q_{NP}} = 0.902704;$$

$$a_1 = \frac{\omega_{NP1}\omega_{NP2}}{q_{NP}} + \omega_{NP2}^2 = 1.0331;$$

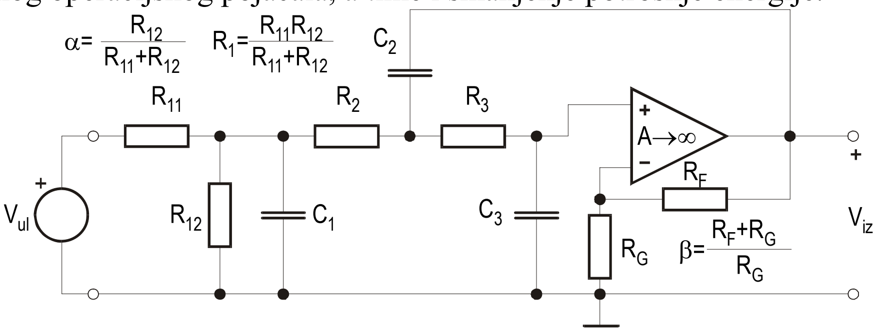
$$a_0 = \omega_{NP1}\omega_{NP2}^2 = 0.374341;$$

$$k = k_{NP1}k_{NP2} = 1.$$

Primjenom gornjih izraza dobili smo, dakle, prijenosnu funkciju koja glasi:

$$H(s)=\frac{0.374341}{s^3+0.902704s^2+1.0331s+0.374341}.$$

Sada možemo pristupiti realizaciji filtra. U realizaciji ukupne prijenosne funkcije 3. reda ćemo koristiti Sallen and Key sekciju 3. reda s jednim pojačalom. Filtar trećeg reda je prikazan na slijedećoj slici. Dakle, jedan RC član je dodan na početak poznate SAK sekcije 2. reda i time je dobiven 3. red. Izrazi koji opisuju ovaj filtar su kompliciraniji nego izrazi u prethodnom zadatku u kojem je dodatni RC član bio odvojen pojačalom od sekcije 2. reda. Treba uočiti da taj dodatni *RC* član u ovom filtru čine otpor R_1 i kapacitet C_1, i da su oni izmiješani sa ostalim otporima i kapacitetima R_2, R_3, C_2, C_3 unutar koeficijenata a_0, a_1, a_2 ukupne prijenosne funkcije $H(s)$ (vidi izraze niže). Stoga nije moguće prijenosnu funkciju Sallen and Key sekcije 3. reda s jednim pojačalom napisati u obliku $H(s)=H_1(s)\cdot H_2(s)$ i pritom razdvojiti (izlučiti) dodatni R_1 i C_1 od ostalih R-ova i C-ova te ih grupirati u npr. $H_2(s)$. To će imati posljedice da je proračun navedenog filtra puno kompliciraniji i također će imati nepovoljan utjecaj na osjetljivost filtra na varijacije elemenata. Jedina povoljna stvar je ušteda jednog operacijskog pojačala, a time i smanjenje potrošnje energije.



Prijenosna funkcija sekcije glasi:

$$H(s)=\frac{V_{iz}(s)}{V_{ul}(s)}=\frac{k\cdot a_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0},$$

gdje su vrijednosti koeficijenata:

$$a_0=\frac{1}{R_1R_2R_3C_1C_2C_3},$$

$$a_1=\frac{R_1(C_1+C_2+C_3)+R_2(C_2+C_3)+R_3C_3-\beta C_2(R_1+R_2)}{R_1R_2R_3C_1C_2C_3},$$

$$a_2=\frac{R_1R_2C_1(C_2+C_3)+R_1R_3C_3(C_1+C_2)+R_2R_3C_2C_3-\beta R_1R_2C_1C_2}{R_1R_2R_3C_1C_2C_3},$$

$$k=\alpha\beta,\ \beta=1+\frac{R_F}{R_G},\ \alpha=\frac{R_{12}}{R_{11}+R_{12}},\ R_1=R_{11}\|R_{12}=\frac{R_{11}\cdot R_{12}}{R_{11}+R_{12}},\ R_{11}=\frac{R_1}{\alpha},\ R_{12}=\frac{R_1}{1-\alpha}.$$

Imamo 8 varijabli C_1, C_2, C_3, C_1, C_2, C_3, α, β i 4 jednadžbe jer su zadani a_1, a_2, a_3 i k. To znači da u proračunu imamo 4 stupnja slobode jer je 8-4=4.

U proračunu ćemo pretpostaviti C_1=C_2=C_3=1 i još pretpostavimo vrijednost

a) jednog otpornika npr. R_1 ili

b) pojačanja β≥1.

a) Ako pretpostavimo vrijednost R_1 te uz C_1=C_2=C_3=1 tada će gornji izrazi poprimiti jednostavniji oblik:

$$(1)\quad a_0=\frac{1}{R_1R_2R_3},$$

$$(2)\quad a_1=\frac{3R_1+2R_2+R_3-\beta(R_1+R_2)}{R_1R_2R_3}=a_0\left[3R_1+2R_2+R_3-\beta(R_1+R_2)\right],$$

$$(3)\quad a_2=\frac{2R_1R_2+2R_1R_3+R_2R_3-\beta R_1R_2}{R_1R_2R_3}=a_0\left[2R_1(R_2+R_3)+R_2R_3-\beta R_1R_2\right],$$

$$(4)\quad k=\alpha\beta.$$

Iz (1) $\Rightarrow \boxed{R_2=\dfrac{1}{a_0R_1R_3}}\rightarrow(2)\ a_1=3a_0R_1+\dfrac{2}{R_1R_3}+a_0R_3-\beta\left(a_0R_1+\dfrac{1}{R_1R_3}\right)\Big/\cdot R_1R_3$

$$a_1R_1R_3=3a_0R_1^2R_3+2+a_0R_1R_3^2-\beta\left(a_0R_1^2R_3+1\right)$$

$$\Rightarrow\boxed{\beta=\frac{3a_0R_1^2R_3+2+a_0R_1R_3^2-a_1R_1R_3}{a_0R_1^2R_3+1}}\text{.....(*)}$$

Iz (3) $\Rightarrow a_2=\dfrac{2}{R_3}+\dfrac{2}{R_2}+\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{\beta}{R_3}$, (1), (*)$\Rightarrow$

$$a_2=\frac{2}{R_3}+2a_0R_1R_3+\frac{1}{R_1}-\frac{3a_0R_1^2R_3+2+a_0R_1R_3^2-a_1R_1R_3}{R_3\left(a_0R_1^2R_3+1\right)}$$

$$a_2=\frac{\left(2+2a_0R_1R_3^2+\dfrac{R_3}{R_1}\right)\left(a_0R_1^2R_3+1\right)-\left(3a_0R_1^2R_3+2+a_0R_1R_3^2-a_1R_1R_3\right)}{R_3\left(a_0R_1^2R_3+1\right)}$$

$$a_2=\frac{2a_0R_1^2R_3+2a_0^2R_3^3R_1^3+a_0R_1R_3^2+2+2a_0R_1R_3^2+\dfrac{R_3}{R_1}-3a_0R_1^2R_3-2-a_0R_1R_3^2+a_1R_1R_3}{R_3\left(a_0R_1^2R_3+1\right)}$$

$$a_2=\frac{2a_0^2R_3^3R_1^3+2a_0R_1R_3^2+\dfrac{R_3}{R_1}-a_0R_1^2R_3+a_1R_1R_3}{R_3\left(a_0R_1^2R_3+1\right)}\Big/\cdot R_1R_3\left(a_0R_1^2R_3+1\right)$$

$$a_0a_2R_1^3R_3^2+a_2R_1R_3=2a_0^2R_3^3R_1^4+2a_0R_1^2R_3^2+R_3-a_0R_1^3R_3+a_1R_1^2R_3\quad \Big/:R_3$$

$$a_0a_2R_1^3R_3+a_2R_1=2a_0^2R_3^2R_1^4+2a_0R_1^2R_3+1-a_0R_1^3+a_1R_1^2$$

kvadratna jednadžba u R_3 glasi:

$$\boxed{2a_0^2R_1^4R_3^2+\left(2a_0R_1^2-a_0a_2R_1^3\right)R_3-a_0R_1^3+a_1R_1^2-a_2R_1+1=0}\text{.....(**)}$$

Ako pretpostavimo R_1=1 tada je kvadratna jednadžba

$$0.28026R_3^2+0.410764R_3+0.756059=0$$

i ima rješenja:

$$\left(R_3\right)_{1,2}=\frac{-0.410764\pm\sqrt{0.410764^2-4\cdot0.28026\cdot0.756059}}{2\cdot0.28026}=-0.73282\pm j1.46992$$

Očigledno ova rješenja nisu zadovoljavajuća jer vrijednost otpora R_3 mora biti pozitivna i realna.

Ako pretpostavimo R_1=3 tada je kvadratna jednadžba

$$22.7013R_3^2-2.385664R_3-2.51741=0$$

i ima rješenja:

$$\left(R_3\right)_1=-0.284582;\ \left(R_3\right)_2=0.38967;$$

Jedno od rješenja je zadovoljavajuće i to ono koje je pozitivno i realno. Dakle, izračunali smo da je R_3=0.38967 . Iz svega možemo zaključiti da je rješivost po R_3 uvjetovana koeficijentima a_0, a_1 i a_2 te izborom R_1 kako je vidljivo iz izraza (**).
Sada jednostavno iz (1) slijedi vrijednost za otpor

$$R_2 = \frac{1}{a_0 R_1 R_3} = 2.28515$$

a iz (*) slijedi vrijednost za pojačanje

$$\beta = \frac{3a_0 R_1^2 R_3 + 2 + a_0 R_1 R_3^2 - a_1 R_1 R_3}{a_0 R_1^2 R_3 + 1} = 2.11918$$

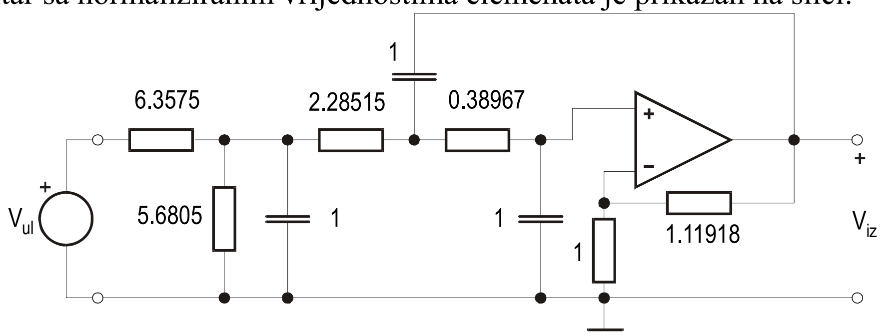
te ostali elementi

$$\alpha = \frac{k}{\beta} = \frac{1}{2.11918} = 0.4719$$

$$R_{11} = \frac{R_1}{\alpha} = \frac{3}{0.4719} = 6.3575, \;\; R_{12} = \frac{R_1}{1-\alpha} = \frac{3}{1-0.4719} = 5.6805 .$$

Odabiremo $R_G = 1 \Rightarrow R_F = R_G(\beta - 1) = 1.11918$

Električni filtar sa normaliziranim vrijednostima elemenata je prikazan na slici:



b) Ako pretpostavimo razne vrijednosti pojačanja $\beta \geq 1$ (kao npr. β=2, 2.1, 2.5, itd.) te C_1=C_2=C_3=1 tada ćemo vidjeti da ne postoje rješenja za bilo koji zadani β. Filtar bismo riješili na sličan način kao i u slučaju *a*) no to ovdje neće biti razmatrano.

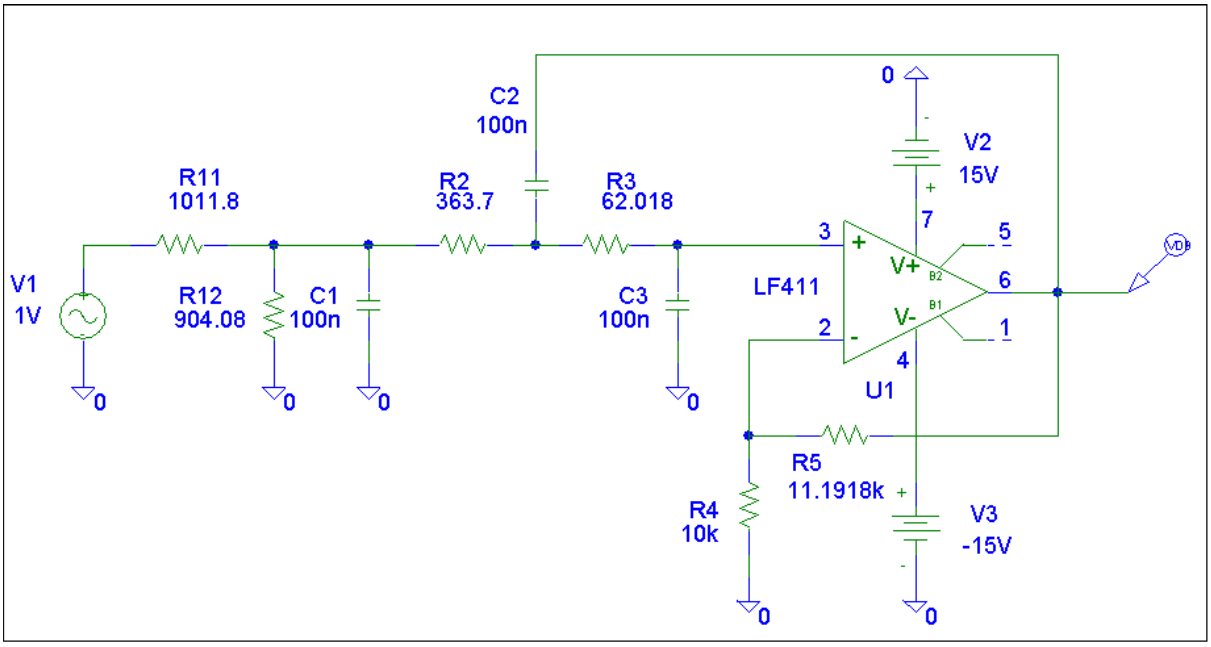
U svakom slučaju možemo zaključiti da je postupak proračuna u ovom (7.) zadatku znatno kompliciraniji nego u prošlom (6.) zadatku iako je realizirana ista prijenosna funkcija filtra. U realizaciji u ovom (7.) zadatku smo uštedjeli jedno pojačalo na račun kompliciranijeg proračuna. No lako se može pokazati (što neće biti pokazano u ovom primjeru) da smo na račun uštede jednog pojačala pokvarili osjetljivost amplitudno-frekvencijske karakteristike filtra na varijacije pasivnih komponenata, tj. na varijacije (ili tolerancije) otpora i kapaciteta.

Filtar u zadatku 6 ima dva pojačala i veći broj komponenata, što poskupljuje proizvodnju, te povećava potrošnju energije. Također, zbog većeg broja komponenata, pogotovo pojačala, navedeni filtar generira veći šum. Filtar u zadatku 7 ima samo jedno pojačalo, stoga ima manju potrošnju (zamislimo da će filtar raditi u svemirskoj stanici koja se napaja sunčevom energijom pa je mala potrošnja jako važan faktor) i ima manji broj komponenata pa je jeftiniji u masovnoj industrijskoj proizvodnji te ima manji šum. No, s druge strane, filtar s jednim pojačalom ima veću osjetljivost pa će u masovnom procesu proizvodnje postojati veći postotak filtara koji ne zadovoljavaju tražene specifikacije (odn. imati ćemo veći škart).

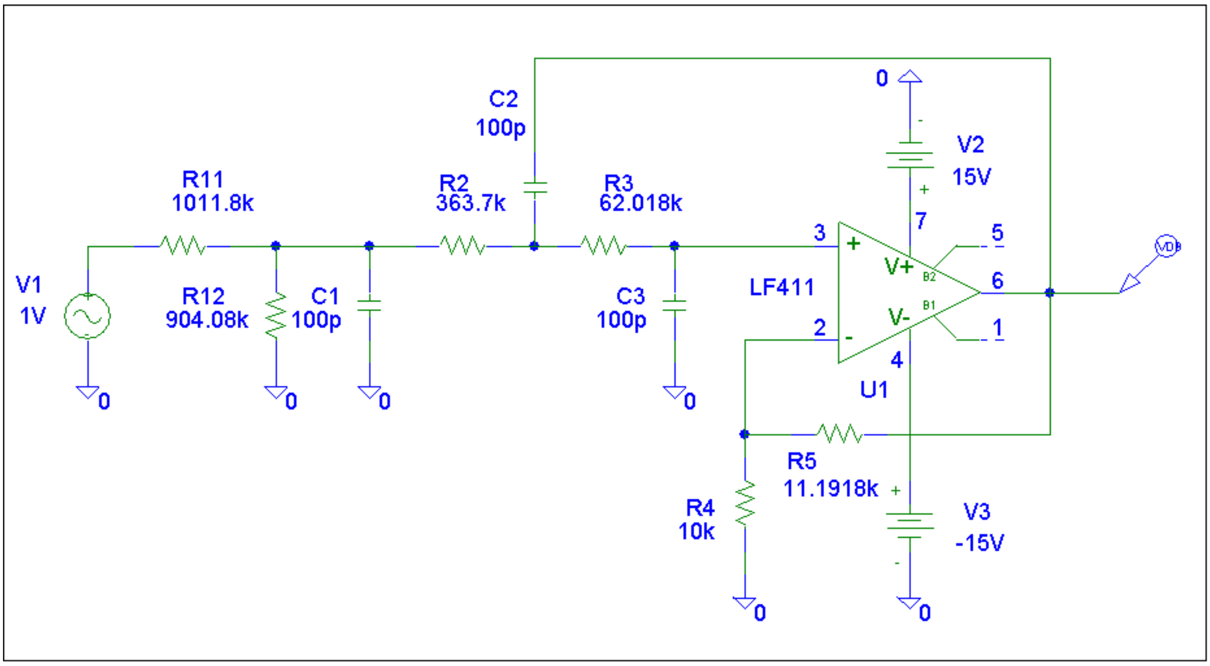
Možemo zaključiti da je projektiranje filtara uvijek kompromis između više često suprotnih zahtjeva.

Konačno, oba filtra su izračunata tako da imaju normalizirane elemente i možemo reći da su univerzalni. Na koju god frekvenciju denormalizirali njihovu karakteristiku ona će uvijek zadržati isti oblik (imati će istu maksimalnu valovitost te isto pojačanje u području propuštanja, graničnu frekvenciju definiranu na $-3\mathrm{dB}$, istu osjetljivost, itd.). Na kraju pokažimo dva primjera denormalizacije filtra sa jednim pojačalom koji je izračunat u ovom zadatku tako da mu gornja granična frekvencija bude 10kHz.

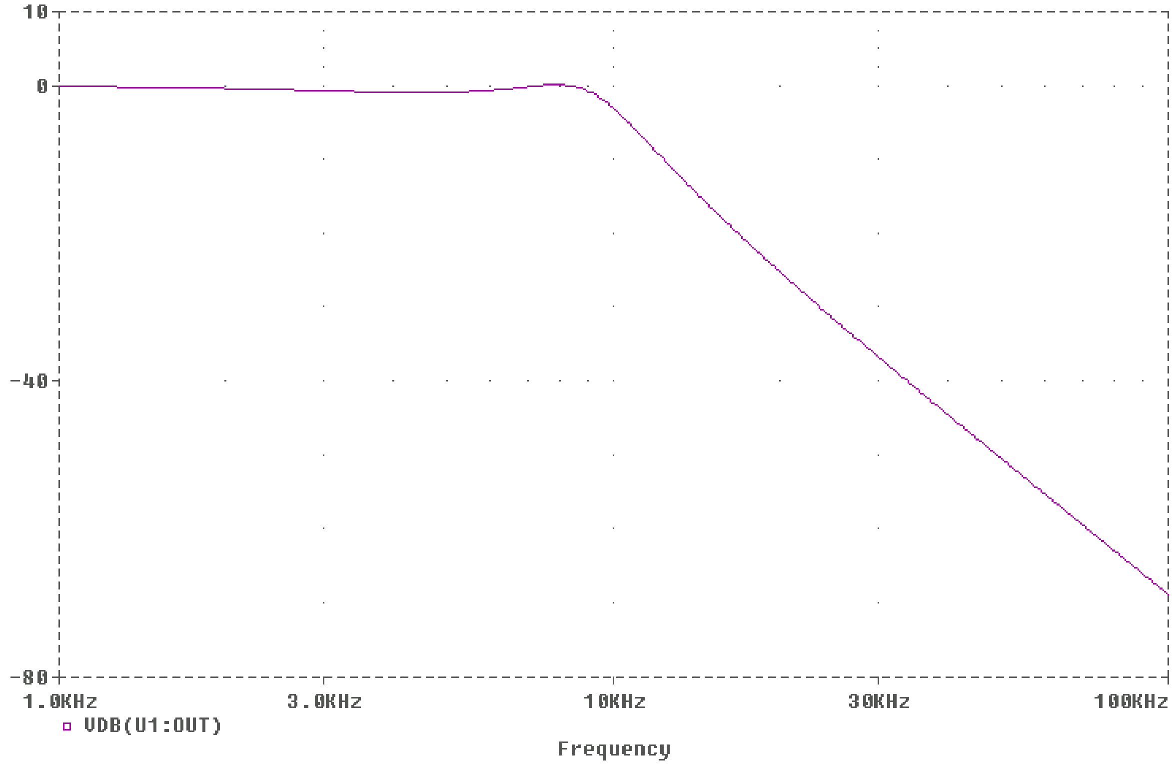
(*i*) Denormalizacija po frekvenciji ω_0=20000π rad/s (definirana je uvjetom gornje granične frekvencije filtra 10kHz) i impedanciji R_0=159.155Ω (proizvoljno odabrana vrijednost). Dobiveni filtar je na slici u PSpiceu:



(*ii*) Denormalizacija po frekvenciji ω_0=20000π rad/s i tisuću puta većoj impedanciji R_0=159.155kΩ. Dobiveni filtar je na slici u PSpiceu:



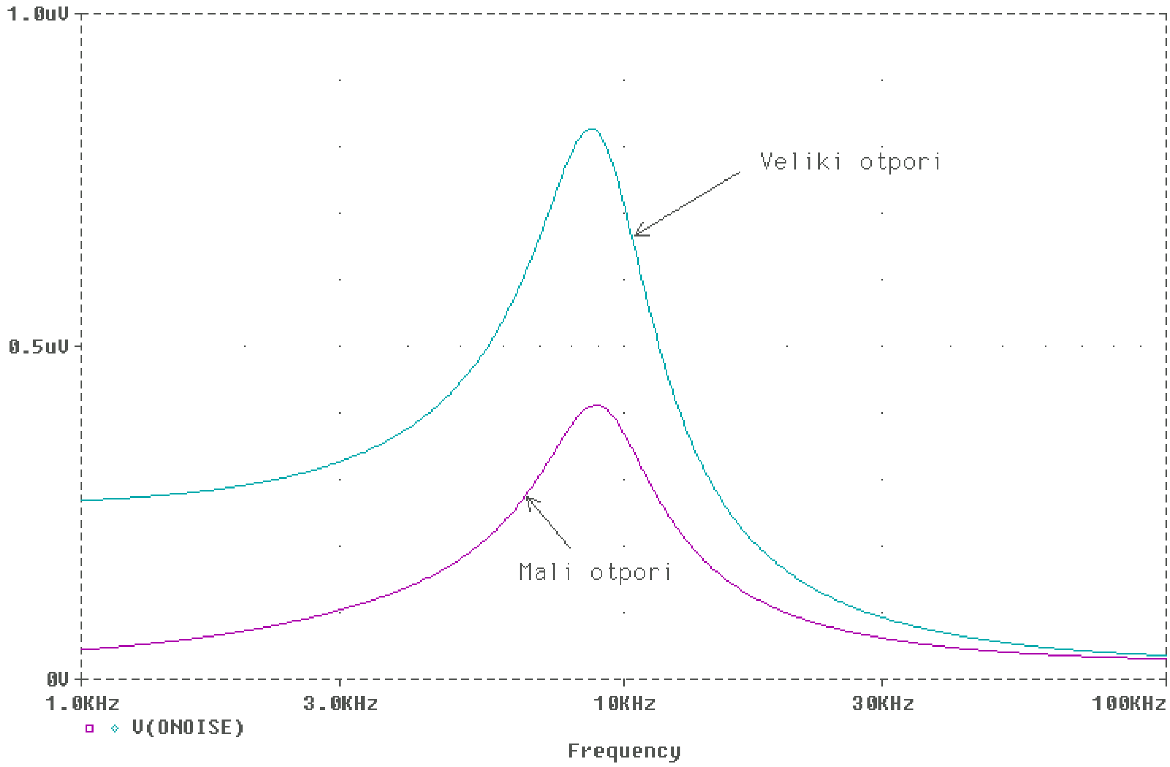
Oba filtra imaju istu a-f karakteristiku koja je prikazana na slijedećoj slici:



Iako realiziraju istu a-f karakteristiku ti se filtri međusobno razlikuju. U realizaciji prvog filtra imamo kapacitete koji su prilično velikog iznosa, reda veličine 100nF, ali su zato otpori relativno malenih iznosa, manji od kΩ. Takav filtar, recimo, nije pogodan za izvedbu u integriranoj tehnici zato jer postoji ograničenje na ukupnu veličinu kapaciteta koji se može realizirati na čipu. (Maksimalni kapacitet koji se još da integrirati je oko 500pF, a mi bismo trebali realizirati filtar čiji ukupni kapacitet tri kondenzatora iznosi 300nF.) Prisjetimo se da najveću površinu u integriranoj realizaciji analognog filtra upravo zauzimaju kapaciteti.
U realizaciji drugog filtra imamo 1000 puta manje kapacitete i 1000 puta veće otpore. U tom slučaju je moguća izvedba u integriranoj tehnici jer ukupni kapacitet koji treba realizirati na čipu sada iznosi 300pF. Realizacija otpora u integriranoj tehnici ne postavlja tako velika ograničenja.

Treba naglasiti da se povećavanjem otpora denormalizacije R_0 nekoliko puta ujedno povećavaju i impedancije otpora Z_R i kapaciteta $Z_C(s)$ isto toliko puta. Pritom se iznos kapaciteta C kondenzatora isto toliko puta smanjuje, a iznos otpora R otpornika isto toliko puta povećava, jer je impedancija kapaciteta $Z_C(s)=1/sC$ obrnuto proporcionalna iznosu kapaciteta C, a impedancija otpornika $Z_R=R$ je direktno proporcionalna vrijednosti otpora R. Najvažnije je uočiti da umnožak RC koji ima dimenziju vremenske konstante ostaje nepromijenjen, odnosno konstantan denormalizacijom po impedanciji sa raznim vrijednostima R_0, a time i karakteristika filtra, odnosno njegova granična frekvencija ostaje nepromijenjena. Jedino što mijenja graničnu frekvenciju filtra je, dakle, denormalizacija po frekvenciji ω_0. Uobičajeno je da se uvijek provodi istovremeno denormalizacija po frekvenciji ω_0 i impedanciji R_0.

Na slijedećoj slici je prikazan izlazni termički (Johnsonov) šum oba filtra kojeg generiraju otpornici i aktivni element. Analiza je također provedena pomoću programa PSpice.



Ako usporedimo nivo šuma na izlazima vidljivo je da drugi filtar koji je realiziran sa velikim otporima jer je primijenjen veći R_0 (i može biti realiziran u integriranoj tehnici) ima znatno veći šum nego prvi filtar. Filtar koji ima manji šum ima veći dinamički opseg i stoga posjeduje bolje karakteristike.
Dakle, koju ćemo strategiju primijeniti prilikom projektiranja filtara ovisi o našim željama i potrebama. Projektiranje filtara je često kompromis između dva ili više obično suprotnih zahtjeva, u našem primjeru je to mogućnost realizacije u integriranoj tehnici i povećanje dinamičkog opsega filtra. Konačno, odabir impedancije denormalizacije R_0 igra značajnu ulogu u projektiranju električnih filtara.

8. Za NP filtar s normaliziranom karakteristikom 2. stupnja po Chebyshevu s maksimalnom valovitošću u području propuštanja 2dB i jediničnim pojačanjem u području propuštanja odrediti prijenosnu funkciju. Kao granična frekvencija se uzima najviša frekvencija na kojoj amplitudno-frekvencijska karakteristika poprima vrijednost minimuma iz područja propuštanja.

Rješenje:
Najprije treba izračunati prijenosnu funkciju filtra 2. stupnja aproksimacije po Chebyshevu s maksimalnom valovitošću u području propuštanja 2dB. Normalizirani polovi:

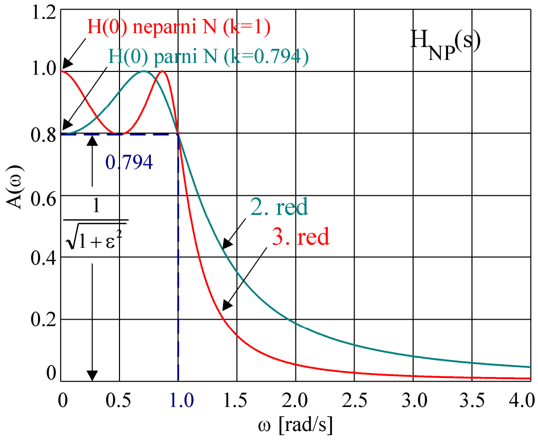
Maksimalna valovitost u području propuštanja: $a_H = 20\log\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}[\mathrm{dB}]$

Parametar ε: $\varepsilon = \sqrt{10^{-a_H[\mathrm{dB}]/10} - 1}$

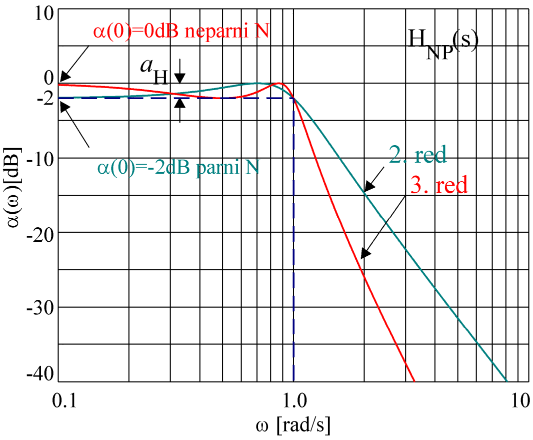
$$\Phi_2 = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon^2}}\right)$$

$$s_k = -\sinh(\Phi_2)\cdot\sin\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right) + j\cosh(\Phi_2)\cdot\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right); \qquad k = 1,\dots,N$$

Amplitudno-frekvencijska karakteristika NP filtra s aproksimacijom po Chebyshevu i maksimalnom valovitošću 2dB te jediničnim pojačanjem u području propuštanja za N=2. i 3. red izgleda ovako:



(a) Pojačanje u lin mjerilu



(b) Pojačanje u log mjerilu [dB].

Iz navedenih slika je vidljivo da na frekvenciji ω=0 pojačanje za neparni red filtra iznosi 1 (ili 0dB), dok za parni red filtra je pojačanje jednako valovitosti u području propuštanja, odn. a_H dB. Stoga je potrebno obavezno dodati pojačanje k u prijenosnu funkciju koje će regulirati iznos $A(\omega)=|H(j\omega)|$ da bude maksimalno 1. Dakle $k=H(0)$, gdje je $H(0)$ pojačanje na frekvenciji ω=0 (d.c. pojačanje) i ono iznosi:

$$H(0)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}=10^{a_H[\mathrm{dB}]/20} \text{ za parni } N;\ H(0)=1 \text{ za neparni } N.$$

Uz uvrštene vrijednosti: N=2, a_H=–2dB slijedi:

$$\varepsilon=\sqrt{10^{2/10}-1}=0.764783$$

$$H(0)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+0.764783^2}}=0.794328 \text{ ili}$$

$$H(0)=10^{a_H[\mathrm{dB}]/20}=10^{-2/20}=0.794328 \Rightarrow k=0.794328$$

$$\Phi_2=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{0.764783}+\sqrt{1+\frac{1}{0.764783^2}}\right)=0.541526$$

polovi su na elipsi u lijevoj poluravnini:

$$s_1=-\sinh(\Phi_2)\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)+j\cosh(\Phi_2)\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)=-0.401908+j0.813345$$

$$s_2=-\sinh(\Phi_2)\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)+j\cosh(\Phi_2)\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-0.401908-j0.813345$$

Normalizirana prijenosna funkcija glasi: $H(s)=k\cdot\frac{s_1s_2}{(s-s_1)(s-s_2)}=k\cdot\frac{s_1s_2}{s^2-(s_1+s_2)s+s_1s_2}$

Označimo par konjugirano-kompleksnih polova: $s_1=-\sigma+j\tilde{\omega}$; $s_2=-\sigma-j\tilde{\omega}$ i uvrstimo ih u $H(s)$, tada prijenosna funkcija glasi:

$$H(s)=k\cdot\frac{(-\sigma+j\tilde{\omega})(-\sigma-j\tilde{\omega})}{(s+\sigma-j\tilde{\omega})(s+\sigma+j\tilde{\omega})}=k\cdot\frac{\sigma^2-(j\tilde{\omega})^2}{(s+\sigma-j\tilde{\omega})(s+\sigma+j\tilde{\omega})}=$$

$$=\frac{k\cdot(\sigma^2+\tilde{\omega}^2)}{(s+\sigma)^2-(j\tilde{\omega})^2}=\frac{k\cdot(\sigma^2+\tilde{\omega}^2)}{s^2+2\sigma s+\sigma^2+\tilde{\omega}^2}=k\cdot\frac{\omega_p^2}{s^2+\frac{\omega_p}{q_p}s+\omega_p^2}$$

Izjednačavanjem uz pojedine potencije od s vidimo da vrijedi:

$$\omega_p^2 = \sigma^2 + \tilde{\omega}^2 \Rightarrow \omega_p = \sqrt{\sigma^2 + \tilde{\omega}^2}$$

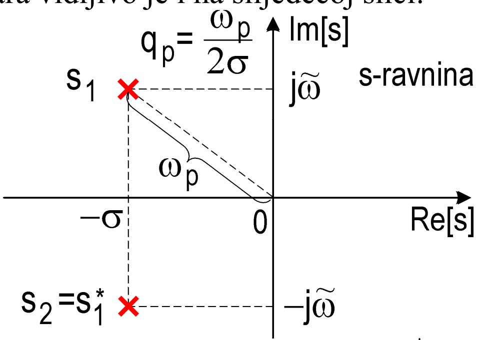
$$\frac{\omega_p}{q_p} = 2\sigma \Rightarrow q_p = \frac{\omega_p}{2\sigma} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \tilde{\omega}^2}}{2\sigma}$$

odnosno vrijedi:

$$s_1 s_2 = \sigma^2 + \tilde{\omega}^2 = \omega_p^2;$$

$$s_1 + s_2 = -2\sigma$$

Značenje pojedinih parametara vidljivo je i na slijedećoj slici:



Konjugirano kompleksni par polova s_1 i s_2 (gdje je $s_2=s_1^*$; * označava konjugiranost) su prikazani u kompleksnoj (Gaussovoj) s-ravnini. Pritom σ označava realni dio polova, $\tilde{\omega}$ je imaginarni dio polova, ω_p je udaljenost polova od ishodišta, a q_p je faktor dobrote ili Q-faktor pridružen konjugiranom paru polova. Na slici se jedino ne vidi Q-faktor, q_p no iz njegove definicije $q_p = \frac{\omega_p}{2\sigma}$ se zaključuje da on poprima to veću vrijednost što su polovi bliže imaginarnoj osi (jer im je realni dio σ manji), ili obratno to je manji što su polovi udaljeniji od Im osi. Ako se polovi nalaze na Im osi tada je vrijednost Q-faktora, q_p neizmjerna, a ako je u desnoj poluravnini tada je konačna i negativna.

U našem slučaju je $\sigma = 0.401908;\ \tilde{\omega} = 0.813345$ pa slijede parametri

$$\omega_p^2 = \sigma^2 + \tilde{\omega}^2 = 0.401908^2 + 0.813345^2 = 0.82306 \Rightarrow \omega_p = \sqrt{0.82306} = 0.907227;$$

$$2\sigma = 2 \cdot 0.401908 = 0.803816;$$

$$q_p = \frac{\omega_p}{2\sigma} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \tilde{\omega}^2}}{2\sigma} = \frac{0.907227}{0.803816} = 1.12865;$$

$$k = H(0) = 0.794328;$$

Normalizirana prijenosna funkcija glasi:

$$H(s) = k \cdot \frac{\omega_p^2}{s^2 + 2\sigma \cdot s + \omega_p^2} = k \cdot \frac{0.82306}{s^2 + 0.803816\, s + 0.82306} = \frac{0.794328 \cdot 0.82306}{s^2 + 0.803816 s + 0.82306};$$

$$H(s) = \frac{0.6537796}{s^2 + 0.803816 s + 0.82306}$$