Automatsko upravljanje

3. domaća zadaća

Frekvencijske karakteristike sustava, polovi i nule sustava

Zadatak 1

$$G(s) = 28\frac{s+1}{(s+2)(s+7)}$$

(a) Za Bodeov dijagram potrebno je funkciju napisati na sljedeći način:

$$G(s) = 28\frac{1+\frac{s}{1}}{2\left(1+\frac{s}{2}\right)\cdot 7\left(1+\frac{s}{7}\right)} \rightarrow G(j\omega) = 2\frac{1+j\frac{\omega}{1}}{\left(1+j\frac{\omega}{2}\right)\left(1+j\frac{\omega}{7}\right)}$$

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)\, G_2(j\omega)\, G_3(j\omega)\, G_4(j\omega)$$

→ $G_1(j\omega) = 2$ - Za amplitudni dio ovo je pravac nagiba 0 vrijednosti $20\log(2)$ dB. Obzirom da je $2 > 1$, onda je za fazni dio ovo pravac nagiba 0 i iznosa $0°$.

→ $G_2(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{1}$ - Za amplitudni dio ovo je pravac nagiba 0 i vrijednosti 0 dB do presječne frekvencije, dok je od presječne frekvencije ovo pravac nagiba +20 dB/dek. Za fazni dio vrijedi:

$$\angle G_2(j\omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\frac{\omega}{1}}{1}\right) = \mathrm{arctg}\,\omega$$

Obzirom da se nalazimo u I. kvadrantu, onda su kutevi između $0°$ i $90°$. Imamo:

$$\omega \ll \omega_{l2} \rightarrow \angle G_2(j\omega) = \mathrm{arctg}\,0 = 0°$$

$$\omega = \omega_{l2} = 1\ s^{-1} \rightarrow \angle G_2(j\omega) = \mathrm{arctg}\,1 = 45°$$

$$\omega \gg \omega_{l2} \rightarrow \angle G_2(j\omega) = \mathrm{arctg}\,\infty = 90°$$

Crta se kroz dvije dekade.

→ $G_3(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{2}}$ - Za amplitudni dio ovo je pravac nagiba 0 i vrijednosti 0 dB do presječne frekvencije, dok je od presječne frekvencije ovo pravac nagiba −20 dB/dek. Za fazni dio vrijedi (racionalizirajte izraz!):

$$\angle G_3(j\omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{-\frac{\omega}{2}}{1}\right) = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\omega}{2}\right)$$

Obzirom da se nalazimo u IV. kvadrantu, onda su kutevi između $0°$ i $-90°$. Imamo:

$$\omega \ll \omega_{l3} \rightarrow \angle G_3(j\omega) = \mathrm{arctg}\,0 = 0°$$

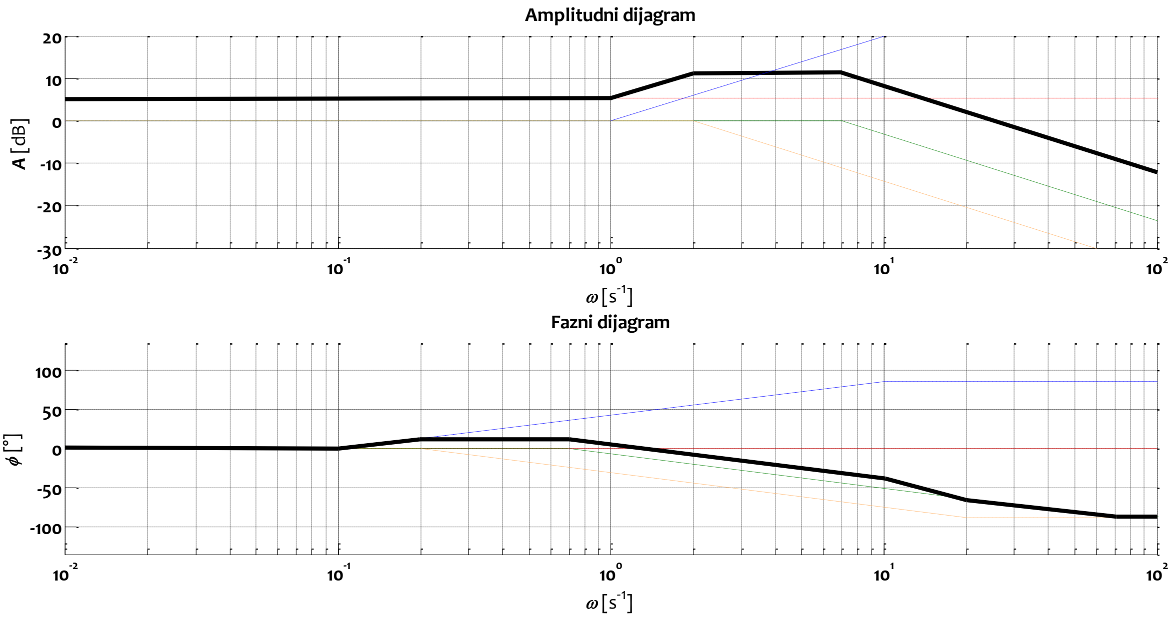
$$\omega = \omega_{l3} = 2\ s^{-1} \rightarrow \angle G_3(j\omega) = \mathrm{arctg}\,(-1) = -45°$$

$$\omega \gg \omega_{l3} \rightarrow \angle G_3(j\omega) = \mathrm{arctg}\,(-\infty) = -90°$$

Crta se kroz dvije dekade.

→ $G_4(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{7}}$ - Isto kao i za $G_3(j\omega)$ samo što vrijedi za presječnu frekvenciju $\omega_{l4} = 7\ s^{-1}$.

Na slici 1 prikazan je Bodeov dijagram aproksimiran pravcima.

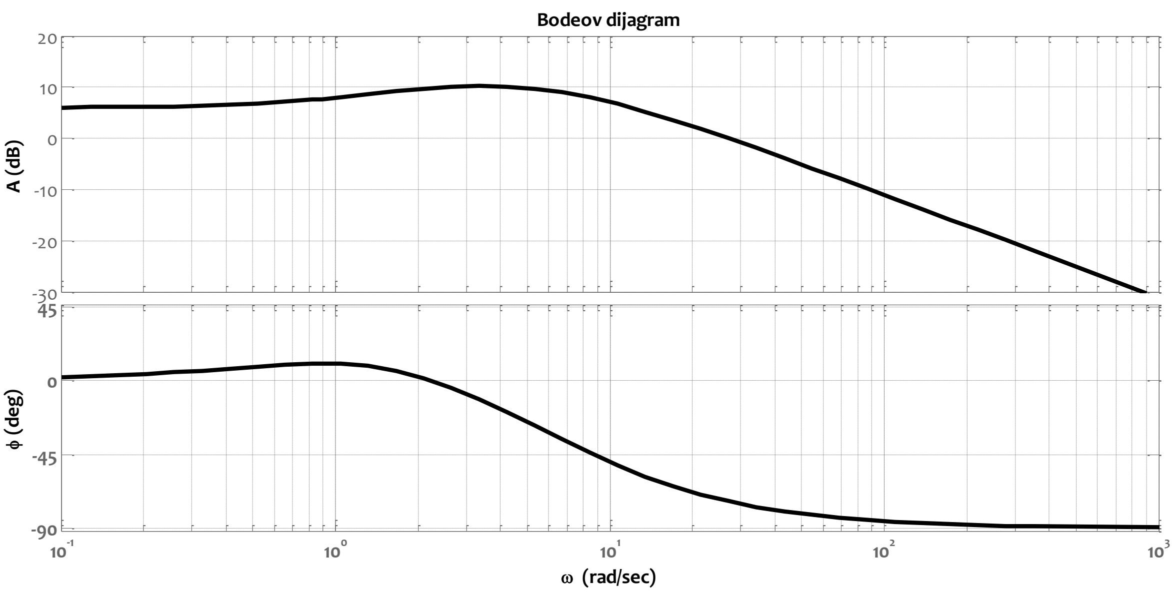


Slika 1: Bodeov dijagram aproksimiran pravcima

(b) Provjera u Matlabu se obavlja na sljedeći način:

```
>> B = [28 28]; % Brojnik prijenosne funkcije.
>> N = [1 9 14]; % Nazivnik prijenosne funkcije.
>> bode(B,N)
>> grid on
```

Na slici 2 prikazan je Bodeov dijagram dobiven u Matlabu.



Slika 2: Bodeov dijagram dobiven u Matlabu

(c) i (d) Za izradu Nyquistovog dijagrama potrebno je funkciju $G(j\omega)$ prikazati kao $G(j\omega) = Re(\omega) + jIm(\omega)$:

$$G(j\omega) = \frac{392 + 224\omega^2}{\left(14-\omega^2\right)^2 + 81\omega^2} + j\frac{140\omega - 28\omega^3}{\left(14-\omega^2\right)^2 + 81\omega^2}$$

Sada se nađu karakteristične točke:

$Re(0) = 2 \qquad Im(0) = 0$

$Re(\infty) = 0 \qquad Im(\infty) = 0$

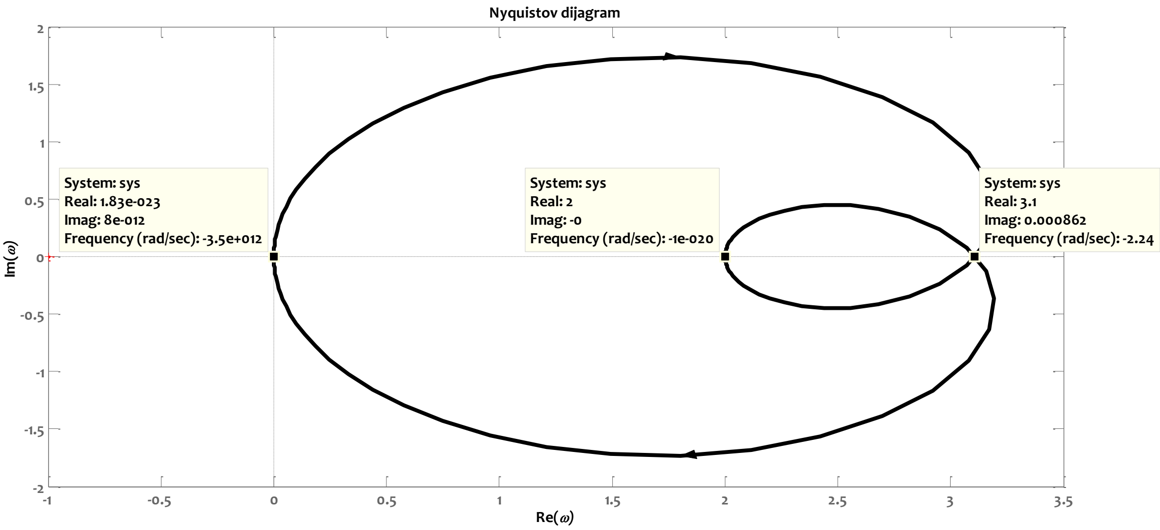
$Re(\omega) = 0 \rightarrow$ Ne postoji takav ω.

$Im(\omega) = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{5} \rightarrow Re\left(\sqrt{5}\right) = 3.\dot{1}$

Kada ste dobili karakteristične točke, nacrtate Nyquistov dijagram. U Matlabu se to radi na sljedeći način:

```
>> B = [28 28]; % Brojnik prijenosne funkcije.
>> N = [1 9 14]; % Nazivnik prijenosne funkcije.
>> nyquist(B,N)
>> grid on
```

Na slici 3 prikazan je Nyquistov dijagram dobiven u Matlabu.



Slika 3: Nyquistov dijagram

Bitno je primijetiti da Matlab crta Nyquistov dijagram i za negativne kružne frekvencije, te se dobije zrcalna slika s obzirom na x-os! Ako se promatraju samo $\omega \geq 0$, onda se dobije Nyquistov dijagram čiju gornju zrcalnu sliku zanemarimo.

(e) Ukoliko je pobuda zadana na sljedeći način kao $u(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ i ako je poznata prijenosna funkcija, može se dobiti odziv kao $y(t) = A\left|G(j\omega_0)\right|\sin\left[(\omega_0 t + \varphi_0) + \angle G(j\omega_0)\right]$. Iz toga slijedi:

$$A\left|G(j\omega_0)\right| = 7$$

$$\angle G(j\omega_0) = -\frac{\pi}{3}$$

Iz druge jednadžbe moguće je dobiti ω_0:

$$\angle G\left(j\omega_0\right) = \operatorname{arctg}\frac{Im\left(\omega_0\right)}{Re\left(\omega_0\right)} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{Im\left(\omega_0\right)}{Re\left(\omega_0\right)} = -\sqrt{3}$$

$$\frac{140\omega_0 - 28\omega_0^3}{392 + 224\omega_0^2} + \sqrt{3} = 0$$

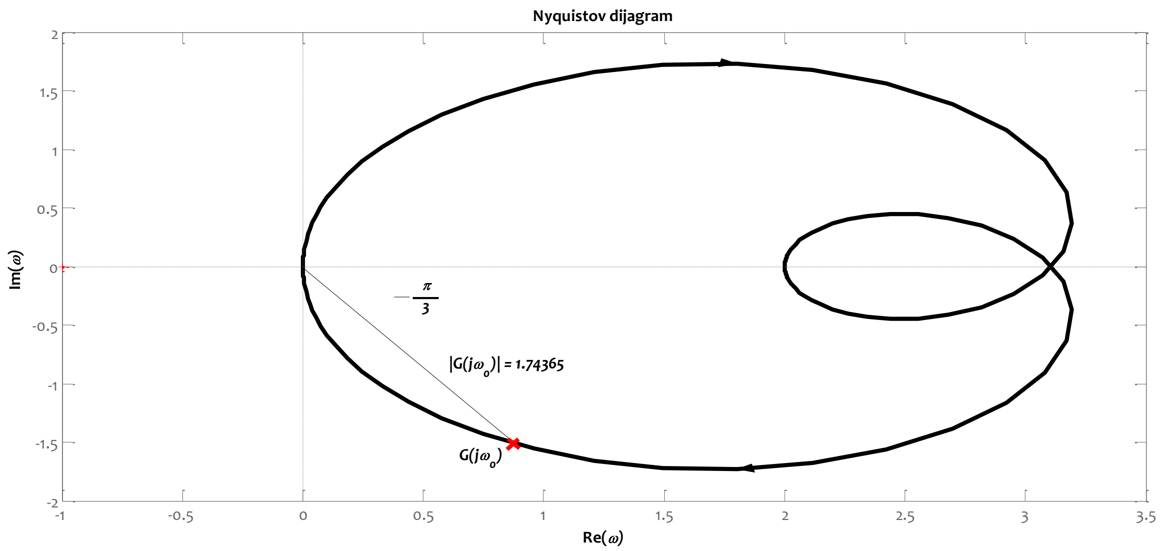
Svi oni koji imaju Matlab 7.8.0 (R2009a), a ne imaju instaliran Simbolic Toolbox, naići će na problem pri rješavanju zadatka. Inače, kod za Matlab je sljedeći:

```
>> syms w; % Definiranje simboličke varijable.
>> solve('(140*w - 28*(w^3))/(392 + 224*(w^2)) + sqrt(3)') % izraz = 0.
```

Rješenje je $\omega_0 = 14.3237\,s^{-1}$. Za taj ω_0 je A jednak:

$$A = \frac{7}{\left|G\left(j\omega_0\right)\right|} = 4.01456$$

(f) Na slici 4 prikazan je Nyquistov dijagram sa označenima $G\left(j\omega_0\right)$, $\left|G\left(j\omega_0\right)\right|$ i $\angle G\left(j\omega_0\right)$.



Slika 4: Nyquistov dijagram sa označenom točkom

(g) Ovdje je potrebno znati rješavati jednadžbe pravaca kod logaritamske skale. Najprije moramo, za fazu od $-\frac{\pi}{3}$, naći ω_0, a ta točka nalazi se na pravcu nagiba $-90°/\text{dek}$. Jednadžba pravca zapisuje se kao i uvijek, $y - y_1 = k\left(x - x_1\right)$, s time da y predstavlja iznos u stupnjevima a x predstavlja eksponent od 10. Znači, ako je vaš $\omega = 10 = 10^1$, onda je $x = 1$, a ako je vaš $\omega = 15 = 10^{\log 15}$, onda je $x = \log 15$.

Iz Bodeova dijagrama aproksimiranoga pravcima, poznato je da za frekvenciju $\omega = 70$ imamo fazu $-90°$ i ta točka nalazi se na pravcu nagiba $-45°/\text{dek}$. Možemo sada naći fazu na frekvenciji $\omega = 20$:

$$y - y_1 = k\left(x - x_1\right) \rightarrow y + 90 = -45\left(x - \log 70\right)$$

$$y = -90 - 45\left(\log 20 - \log 70\right) = -65.516938°$$

Sada, da bismo našli frekvenciju za fazu $-\frac{\pi}{3} = -60°$, uvrstimo točke u sljedeću jednadžbu:

$$y - y_1 = k\,(x - x_1) \rightarrow y + 65.516938 = -90\,(x - \log 20)$$
$$-60 + 65.516938 = -90\,(x - \log 20) \rightarrow x = 1.23973$$

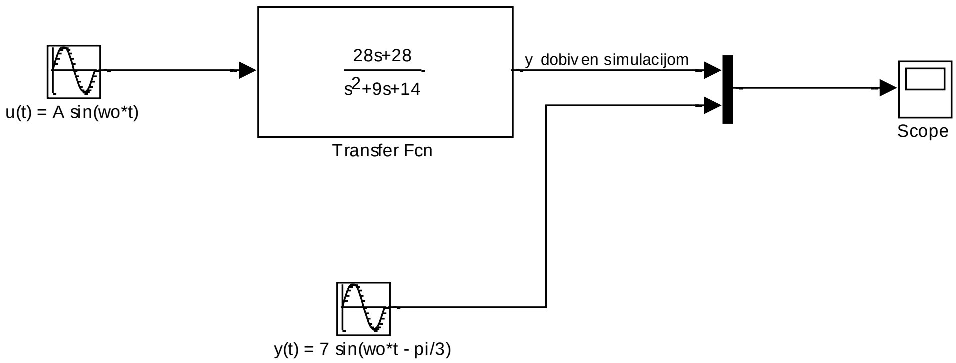
Tražena frekvencija je $\omega_0 = 10^{1.23973} = 17.3672\,s^{-1}$. Sada tu frekvenciju iskoristimo u amplitudnom dijelu dijagrama kako bismo dobili $|G\,(j\omega_0)|$:

$$y - y_1 = k\,(x - x_1) \rightarrow y - 20\log 2 = 20\,(x - 0)$$
$$y = 20\log 2 + 20\log 2 = 40\log 2$$

$$y - y_1 = k\,(x - x_1) \rightarrow y - 40\log 2 = -20\,(x - \log 7)$$
$$y = 40\log 2 - 20\,(1.23973 - \log 7) = 4.148547 = |G\,(j\omega_0)| \rightarrow A = 1.68734$$

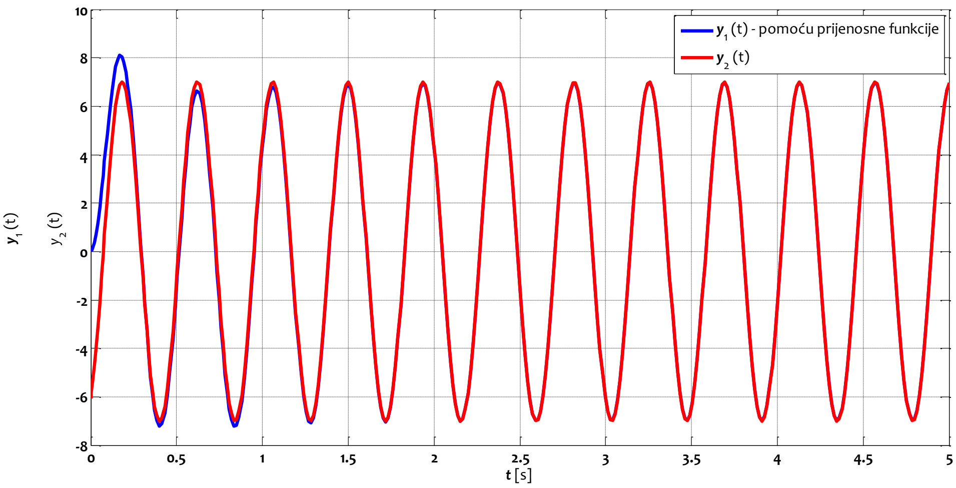
Očito je da se rezultati malo razlikuju, zbog korištenja aproksimacije pravcima.

(h) Na slici 5 prikazan je simulacijski model za provjeru.



Slika 5: Simulacijski model

Dovoljno je postaviti vrijeme izvedbe na 5 s. Signali su definirani na sljedeći način: $u\,(t) = 4.01456\sin\,(14.3237t)$ i $y\,(t) = 7\sin\left(14.3237t - \frac{\pi}{3}\right)$. Usporedba je prikazana na slici 6. Potrebno je čekati ustaljeno stanje.



Slika 6: Usporedba odziva

Zadatak 2

$$G(s) = 28\frac{as+1}{(s+2)(s+7)}$$

(a) Za težinsku funkciju imamo:

$$G(s) = 28\left(\frac{1-2a}{5}\frac{1}{s+2} + \frac{7a-1}{5}\frac{1}{s+7}\right)$$

$$g(t) = 5.6\left[(1-2a)e^{-2t} + (7a-1)e^{-7t}\right]S(t)$$

Za prijelaznu funkciju imamo:

$$H(s) = \frac{1}{s}G(s) = 28\left(\frac{1}{14}\frac{1}{s} + \frac{2a-1}{10}\frac{1}{s+2} + \frac{1-7a}{35}\frac{1}{s+7}\right)$$

$$h(t) = \left[2 + 2.8(2a-1)e^{-2t} + 0.8(1-7a)e^{-7t}\right]S(t)$$

(b) Prirodni modovi su e^{-2t} i e^{-7t}. Oni se ne vide u odzivu $h(t)$ kada su članovi uz njih jednaki nula:

$$2.8(2a-1) = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$0.8(7a-1) = 0 \rightarrow a = \frac{1}{7}$$

Ukoliko se uvrste ove vrijednosti od a u prijenosnu funkciju, očito se krate polovi i nule pa se zato ni ne vide u odzivu.

(c) U stacionarnom stanju je iznos prijelazne funkcije jednak:

$$h(\infty) = \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}G(s) = \lim_{s\to 0} G(s) = 2$$

Očito da parametar a ne utječe na iznos prijelazne funkcije u stacionarnom stanju.

Iznos težinske funkcije u trenutku $t = 0^+$ jest:

$$g\left(0^+\right) = \lim_{s\to\infty} sG(s) = 28a$$

Pogledamo li nagib prijelazne funkcije u trenutku $t = 0^+$, dobije se:

$$\dot{h}\left(0^+\right) = \lim_{s\to\infty} s^2H(s) = \lim_{s\to\infty} sG(s) = 28a$$

Nagib prijelazne funkcije u trenutku $t = 0^+$ jednak je iznosu težinske funkcije u trentuku $t = 0^+$.

(d) Prijelazna funkcija ima nadvišenje ako postoje nultočke funkcije $z(t) = h(t) - h(\infty)$.

$$h(t) - h(\infty) = 2.8(2a-1)e^{-2t} + 0.8(1-7a)e^{-7t} = 0$$

$$t = \frac{1}{5}\ln\frac{0.8(7a-1)}{2.8(2a-1)} \rightarrow t > 0 \rightarrow \frac{0.8(7a-1)}{2.8(2a-1)} > 1$$

$$a > \frac{1}{2}$$

(e) Kada postoji nadvišenje, polovi su $s_{p1} = -2$ i $s_{p2} = -7$, dok je nula $s_n = -\frac{1}{a} \in (-2, 0)$. Kada nadvišenje ne postoji, polovi su $s_{p1} = -2$ i $s_{p2} = -7$, dok je nula $s_n = -\frac{1}{a} \in (-\infty, -2)$. Za granični slučaj postoji samo pol $s_p = -7$.

U Matlabu ćemo funkciju napraviti na sljedeći način: *File* → *Blank M-File* → *Save As* → pzmap1.m. U nju upišete sljedeći kod:

```
% Prikazuje vrijednosti polova i nula ovisno o parametru a.
a = input('Unesite vrijednost parametra a;  a=');
B=[28*a 28];    N=[1 9 14];
pzmap(B,N); hold on;
```

Nakon što spremite tu funkciju, u komandnom prozoru Matlaba pozovete funkciju na sljedeći način:

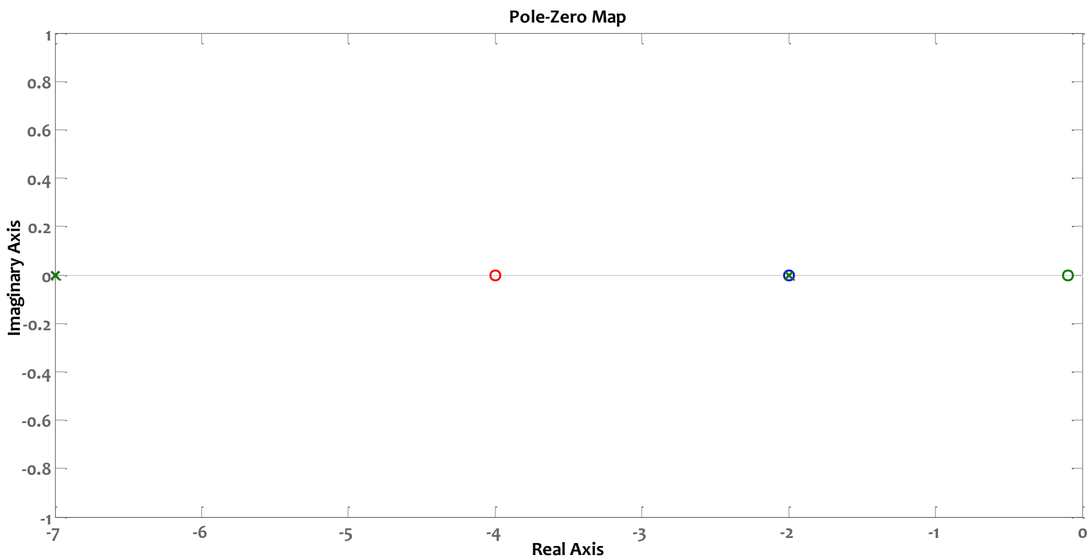
```
>> pzmap1
```

Zatim vam se pojavi ovo:

```
Unesite vrijednost parametra a;  a=
```

Unesete broj i pritisnete Enter. Ponavljanjem ovoga postupka može za različite vrijednosti parametra a vidjeti raspored polova i nula. U nastavku je naveden samo jedan primjer:

```
>> pzmap1
Unesite vrijednost parametra a;  a=0.25
>> pzmap1
Unesite vrijednost parametra a;  a=0.5
>> pzmap1
Unesite vrijednost parametra a;  a=10
```



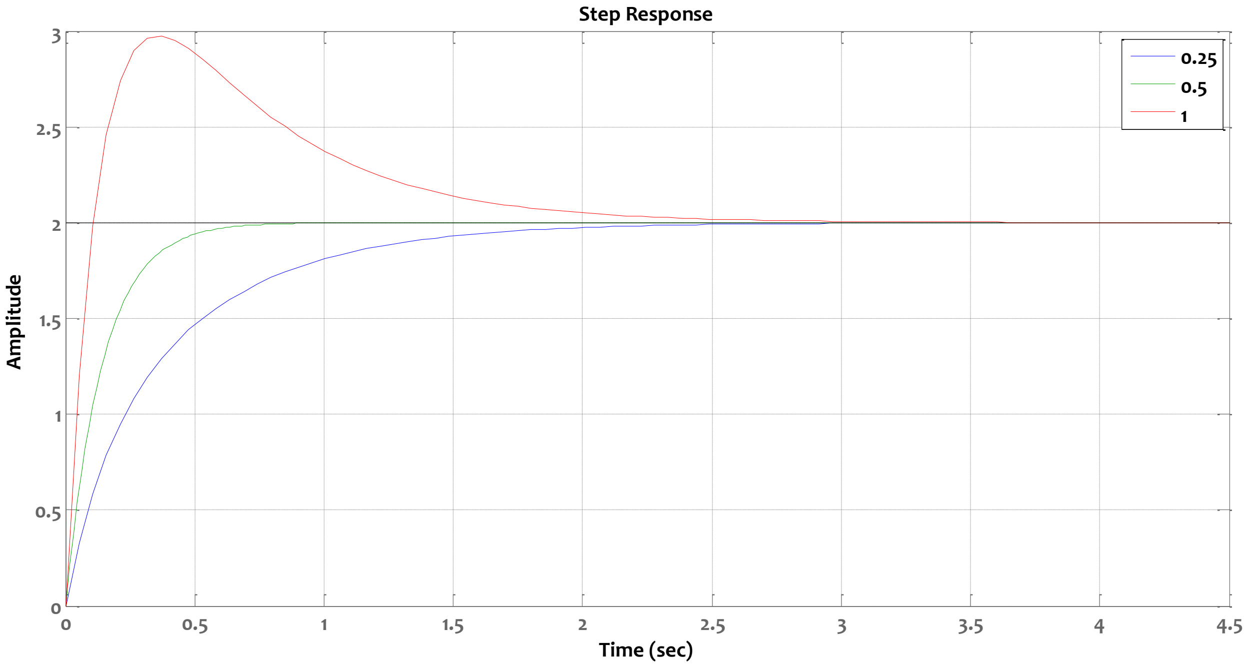
Slika 7: Raspored polova i nula

Crveno obojani su za $a = 0.25$, plavo obojani su za $a = 0.5$ a zeleno obojani su za $a = 10$.

Za generiranje prijelaznih funkcija, iskoristit ćemo parametre $a = 0.25$, $a = 0.5$ i $a = 1$ (za 10 je preveliko nadvišenje, isprobajte!). Naredba je:

```
>> B = [28*0.25 28];
>> N = [1 9 14];
>> step(B,N)
>> grid on
>> hold on
>> B = [28*0.5 28];
>> step(B,N)
>> hold on
>> B = [28*1 28];
>> step(B,N)
```

Na slici 8 prikazane su generirane prijelazne funkcije.



Slika 8: Generirane prijelazne funkcije

Zadatak 3

$$G_1(s) = \frac{2}{2s^2 + 2s + 1}$$

(a) Oblik prijenosne funkcije drugog reda jest:

$$G(s) = K\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Jednostavno se očita da su za funkciju $G_1(s)$ vrijednosti parametara sljedeće:

$$K_1 = 2$$
$$\omega_{n1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Iz uvjeta zadatka vrijedi:

$$K_1 = K_2$$
$$\sigma_{m1} = \sigma_{m2}$$
$$t_{m1} = 2t_{m2}$$

Iz toga slijedi (i formula sa službenog šalabahtera):

$$K_2 = 2$$
$$\omega_{n2} = \sqrt{2}$$
$$\zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

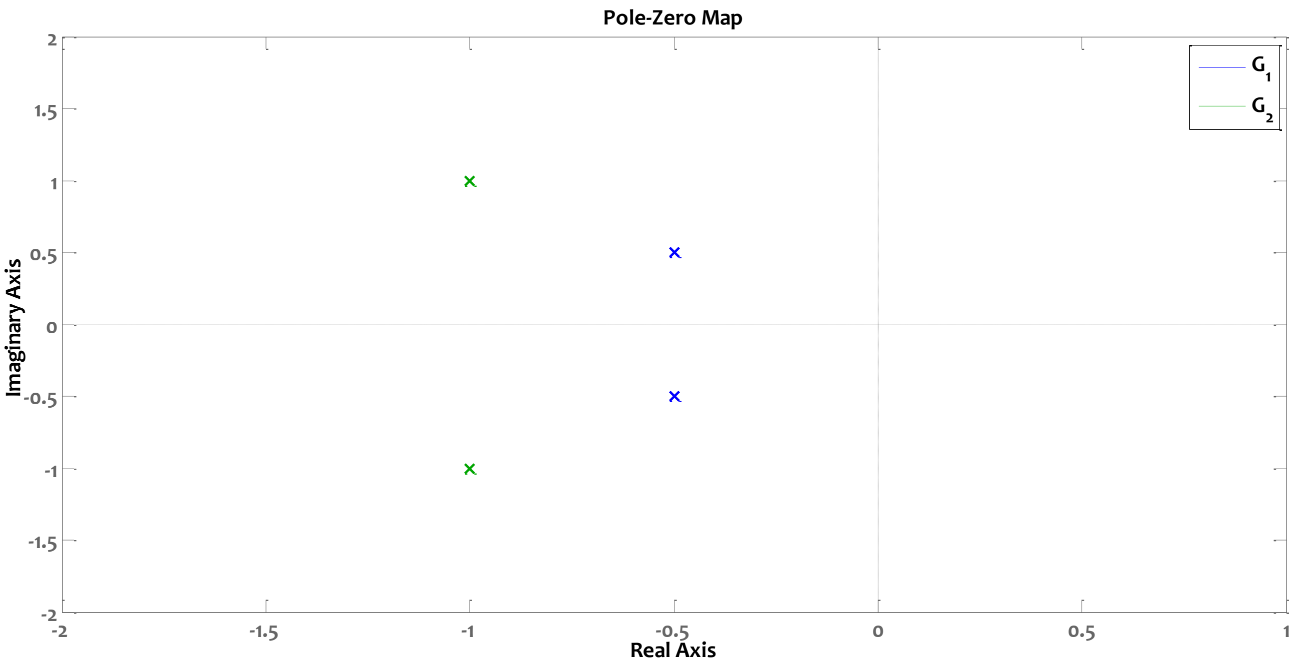
Sada je:

$$G_2(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 2}$$

(b) Kod je sljedeći:

```
>> B1 = [2];
>> N1 = [2 2 1];
>> B2 = [4];
>> N2 = [1 2 2];
>> pzmap(B1,N1)
>> hold on
>> pzmap(B2,N2)
```

Na slici 9 usporedno su prikazani polovi i nule.

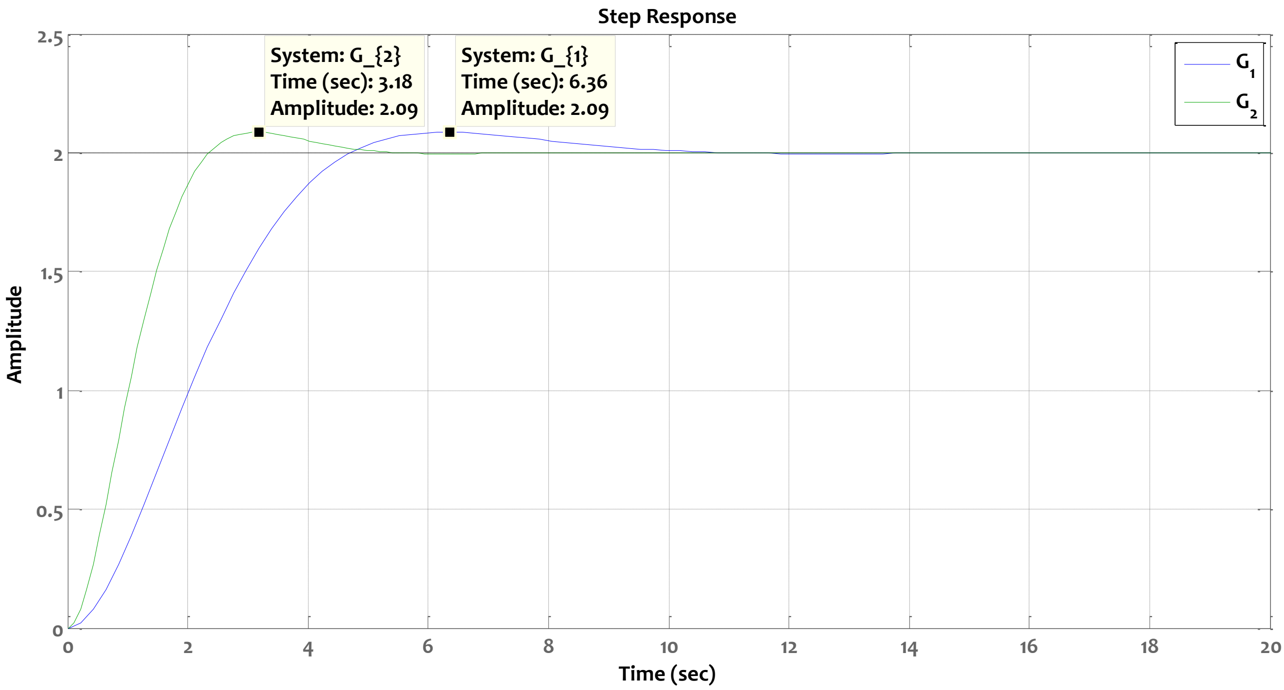


Slika 9: Usporedni prikaz polova i nula

(c) Kod je sljedeći:

```
>> step(B1,N1)
>> grid on
>> hold on
>> step(B2,N2)
```

Na slici 10 usporedno su prikazane prijelazne funkcije.



Slika 10: Usporedni prikaz prijelaznih funkcija