Završni ispit

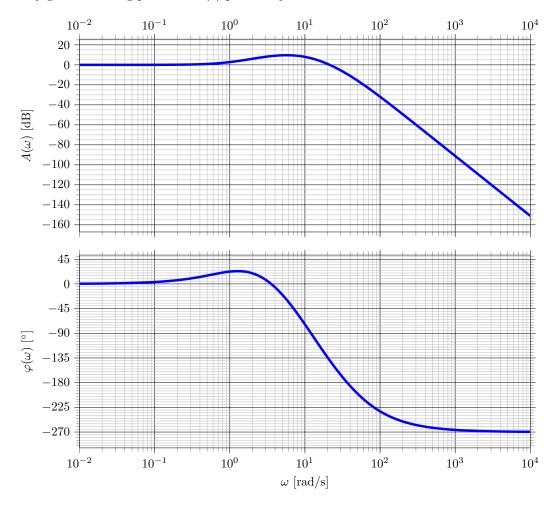
28. siječnja 2013.

Ime i Prezime: Matični broj:

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (15 bodova)

Bodeov dijagram stabilnog procesa $G_P(s)$ prikazan je slikom 1.

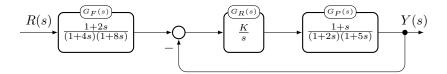


Slika 1: Bodeov dijagram procesa.

- a) (6 boda) Skicirajte Nyquistov dijagram procesa $G_P(s)$ korištenjem Bodeovog dijagrama sa slike 1 te odredite točke u kojima Nyquistov dijagram siječe realnu i imaginarnu os.
- b) (3 boda) Koristeći Ziegler-Nicholsovu metodu ruba stabilnosti, odredite parametre PI regulatora za upravljanje izlaznom veličinom procesa $G_P(s)$.
- c) (4 boda) Ako se za upravljanje izlaznom veličinom procesa koristi regulator $G_R(s) = \frac{1}{T_{Is}}$, odredite za koje iznose vremenske konstante $T_I > 0$ će zatvoreni sustav upravljanja biti stabilan.
- d) (2 boda) Ako je poznato da proces $G_P(s)$ ima četiri pola, odredite broj nula te u kojoj poluravnini se nalaze. Objasnite odgovor.

Napomena: Za rješavanje ovog zadatka potrebno je iščitati odgovarajuće vrijednosti s Bodeovog dijagrama sa slike 1. Pritom je potrebno jasno naznačiti što se očitava s dijagrama i zašto.

2. zadatak (7 bodova)

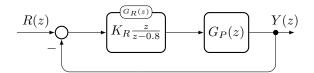


Slika 2: Sustav automatskog upravljanja.

Za sustav upravljanja prikazan slikom 2, korištenjem Hurwitzovog kriterija stabilnosti, odredite iznose pojačanja regulatora K za koje je sustav upravljanja stabilan.

3. zadatak (12 bodova)

Zatvoreni diskretni sustav upravljanja zadan je slikom 3.

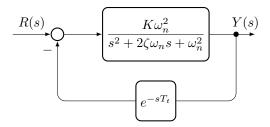


Slika 3: Zatvoreni sustav upravljanja.

- a) (7 bodova) Odredite prijenosnu funkciju $G_P(z)$ diskretizacijom kontinuiranog procesa $G_P(s) = \frac{2}{s+2}$ uz zadržavanje svojstva prijelazne funkcije. Vrijeme uzorkovanja odaberite tako da bude jednako jednoj petini vremenske konstante procesa.
- b) (5 bodova) Zadana je prijenosna funkcija procesa $G_P(z)=\frac{0.2}{z-0.8}$. Primjenom Juryjevog kriterija stabilnosti odredite interval vrijednosti pojačanja K_R za koje je sustav na slici 3 stabilan.

4. zadatak (13 bodova)

Zadan je sustav upravljanja prikazan blokovskom shemom na slici 4. Polovi prijenosne funkcije u direktnoj grani su $s_{p1,2} = -1 \pm j$.



Slika 4: Zatvoreni sustav upravljanja.

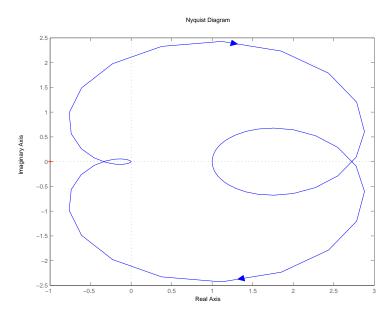
- a) (2 boda) Odredite prijenosnu funkciju zatvorenog sustava upravljanja $G_r(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$.
- b) (2 boda) Odredite iznos pojačanja K za koji pogreška slijeđenja na pobudu r(t) = S(t) u ustaljenom stanju iznosi 0.5.
- c) (5 bodova) Odredite interval vrijednosti mrtvog vremena T_t za koje sustav ima fazno osiguranje veće od 55° uz zadano pojačanje $K = \sqrt{5}$.
- d) (4 boda) Skicirajte prijelaznu funkciju otvorenog sustava $G_o(s)$ uz točno određeno nadvišenje, vrijeme prvog maksimuma i vrijeme smirivanja. Zadano je $T_t = 2$ s i K = 1.

RJEŠENJA:

Zadatak 1

a) Slika 5 (dovoljno je crtati samo za pozitivne frekvencije).

Presječne točke očitavaju se direktno iz Bodeovog dijagrama, na frekvencijama za koje faza iznosi 0° , -90° , -180° i -270° : (1, 0), (2.72, 0), (0, -2.11), (-0.34, 0), (0,0).



Slika 5: Nyquistov dijagram.

b) Iz Bodeovog dijagrama se očitava da amplitudno osiguranje iznosi 9.25 dB na frekvenciji 36.6 rad/s, što znači da je kritično pojačanje $K_{kr}=2.9$ i period oscilacija $T_{kr}=0.17$ s. Slijede parametri PI regulatora:

$$K_R = 0.45 K_{kr} = 1.31, T_I = 0.85 T_{kr} = 0.15 \,\mathrm{s}$$

c) U Bodeov dijagram sa slike 1 treba uključiti i utjecaj integratora. Integrator spušta cijelu faznu karakteristiku za 90° pa za stabilnost treba promatrati frekvenciju gdje dijagram sa slike 1 poprima vrijednost -90° . Iz Bodeovog dijagrama ili iz podzadatka a) očitavamo da uz fazu od -90° , amplituda iznosi 2.11. Potrebno je uračunati djelovanje integratora i na amplitudu te ukupna amplituda na spomenutoj frekvenciji iznosi $\frac{2.15}{12T_I} = 0.176\frac{1}{T_I}$. Sustav je stabilan dok god je ta amplituda manja od 1 pa je konačno rješenje:

$$T_I > 0.176$$

d) Amplituda pada sa $60\,\mathrm{dB/dek}$ na visokim frekvencijama, što znači da je broj polova za tri veći od broja nula – ukupno postoji samo jedna nula. Pošto je proces stabilan, a amplituda konstantna na niskim frekvencijama, znamo da su svi polovi u lijevoj poluravnini (polovi ukupno spuštaju fazu za $4\cdot90^\circ=360^\circ$). Faza ukupno pada za $3\cdot90^\circ=270^\circ$, što znači da se nula ne nalazi u desnoj poluravnini. Pošto je amplituda konstantna na niskim frekvencijama (odnosno, faza je jednaka 0° na frekvenciji $0\,\mathrm{rad/s}$), nula se ne nalazi u ishodištu. Pošto postoji samo jedna nula, ona mora biti realna.

Zaključno: Postoji točno jedna realna nula u lijevoj poluravnini (odnosno nalazi se na realnoj osi, lijevo od ishodišta).

Zadatak 2

Prijenosna funkcija $G_F(s)$ je očito stabilna (polovi se nalaze u lijevoj poluravnini). Stoga za $G_F(s)$ nije potrebno dodatno provjeravati stabilnost. Karakteristični polinom zatvorene petlje glasi:

$$10s^3 + 7s^2 + (K+1)s + K = 0.$$

Slijede uvjeti:

$$|K>0$$

$$|K+1 \quad K | = -3K+7>0 \quad \rightarrow \quad K<\frac{7}{3}.$$

Stoga je konačno rješenje $0 < K < \frac{7}{3}$.

Zadatak 3

a) Zadano je $G_p(s)=\frac{2}{s+2},\,T=\frac{1}{5}\cdot 0.5=0.1\,\mathrm{s}$

ZOH diskretizacijom dobije se

$$G_p(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{2}{s(s+2)} \right\} = (1 - z^{-1}) \frac{(1 - e^{-aT})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT}z^{-1})}.$$

gdje je a=2.

Slijedi

$$G_p(z) = \frac{0.2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

b) Zadano je $G_R(z) = K_R \frac{z}{z-0.8}$. Prema tome, prijenosna funkcija otvorenog kruga ima oblik:

$$G_o(z) = G_R(z)G_p(z) = K_R \frac{0.2z}{(z - 0.8)(z - 0.8)} = K_R \frac{0.2z}{(z^2 - 1.6z + 0.64)},$$

Iz karakteristične jednadžbe $1 + G_o(z) = 0$ slijedi karakteristični polinom:

$$f(z) = 0.64 + (0.2K_R - 1.6)z + z^2 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 = 0$$

Juryjev kriterij stabilnosti ima samo jedan redak ($a_0=0.64,\ a_1=0.2K_R-1.6,\ a_2=1$). Uvjeti stabilnosti imaju oblik:

• f(1) > 0, odakle slijedi

$$0.64 + 0.2K_R - 1.6 + 1 > 0$$
, $\Rightarrow K_R > -0.2$

• $(-1)^n f(-1) > 0$, odakle slijedi (n = 2)

$$0.64 - 0.2K_R + 1.6 + 1 > 0$$
, $\Rightarrow K_R < 16.2$

• $|a_0| < |a_n|$ je zadovoljen jer je $a_0 = 0.64 < a_2 = 1$.

Zadatak 4

a) Prijenosna funkcija zatvorenog sustava upravljanja:

$$\zeta = 0.71$$

$$\omega_n = 1.41$$

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 + e^{-sT_t}K\omega_n^2} = \frac{2K}{s^2 + 2s + 2 + 2Ke^{-sT_t}}$$

b) Pogreška slijeđenja u ustaljenom stanju:

$$y_{\infty} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1+K} = 0.5$$

 $K = 1$

c) Prvi korak je određivanje presječne frekvencije:

$$|G_o(j\omega_c)| = 1 = \frac{K\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_c^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_c)^2}}$$

$$\omega_c = 2 \text{ rad/s}$$

Računa se fazno osiguranje i interval vrijednosti mrtvog vremena T_t za koje je $\gamma > 55^\circ$:

$$\gamma = 180^{\circ} + \varphi(\omega_c) > 55^{\circ}$$

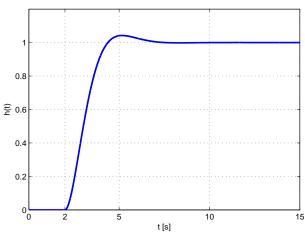
$$8.4^{\circ} > \omega_c T_t$$

$$T_t < 0.0733 \text{ s}$$

$$d) \sigma_m[\%] = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 4.21\%$$

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} + T_t = 5.164 \text{ s}$$

$$t_{1\%} = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} + T_t = 6.6 \text{ s}$$



Slika 6: Prijelazna funkcija otvorenog sustava.