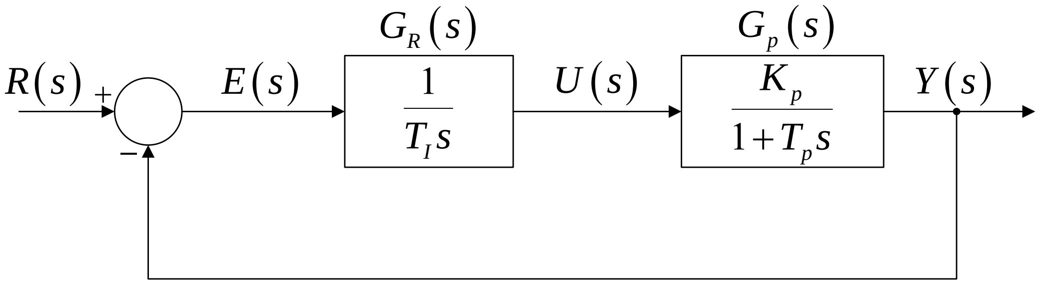
GULIN MARKO 0036428227	Fakultet elektrotehnike i računarstva Zagreb Zavod za ARI	08. siječnja 2010.
	AUTOMATSKO UPRAVLJANJE	
	5. Domaća zadaća: DISKRETNI SUSTAVI UPRAVLJANJA	

5-1. Zadatak: Zadan je sustav upravljanja prikazan blokovskom shemom na slici 5.1.



Slika 5.1. Sustav upravljanja s analognim regulatorom

Parametri procesa prikazanog prijenosnom funkcijom $G_p(s)$ su: $K_p = 3$, $T_p = 0.3\ [s]$. Regulator je zadan prijenosnom funkcijom $G_R(s)$, s vremenskom konstantom $T_I = 1.5\ [s]$.

5-1.1. Analitički odredite fazno osiguranje sustava i skicirajte Bodeov dijagram sustava korištenjem aproksimacije pravcima.

Prijenosna funkcija otvorenog kruga je

$$G_o(s) = \frac{1}{T_I s}\frac{K_p}{1 + T_p s} = \frac{20}{3}\frac{1}{s\left(s + \frac{10}{3}\right)} \tag{5-1}$$

Fazno osiguranje sustava definirano je sljedećom relacijom

$$\gamma = \pi + \varphi_o(\omega_c) \tag{5-2}$$

Presječnu frekvenciju izračunat ćemo iz uvjeta jediničnog pojačanja otvorenog kruga (u linearnom mjerilu) na toj frekvenciji

$$|G_o(\omega_c)| = 1 \tag{5-3}$$

Frekvencijska karakteristika otvorenog kruga upravljanja je

$$G_o(j\omega) = \frac{20}{3}\frac{1}{j\omega\left(\frac{10}{3} + j\omega\right)} \tag{5-4}$$

Amplitudno-frekvencijska karakteristika otvorenog kruga upravljanja (u linearnom mjerilu) na presječnoj frekvenciji je

$$|G_o(\omega_c)| = \frac{20}{3}\frac{1}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2 + \frac{100}{9}}} = 1 \tag{5-5}$$

Presječna frekvencija odredi se rješavanjem jednadžbe prikazane relacijom (5-5), te ona iznosi

$$\omega_c = 1.76706\ [s^{-1}] \tag{5-6}$$

Fazno osiguranje sustava je

$$\gamma = \pi + \varphi_o(\omega_c) = 1.08334\ [rad] = 62.07114° \tag{5-7}$$

Frekvencijsku karakteristiku otvorenog kruga zapisujemo u obliku pogodnom za crtanje Bodeovog dijagrama

$$G_o(j\omega) = 2\frac{1}{j\omega\left(+j\frac{\omega}{3.333}\right)} \tag{5-8}$$

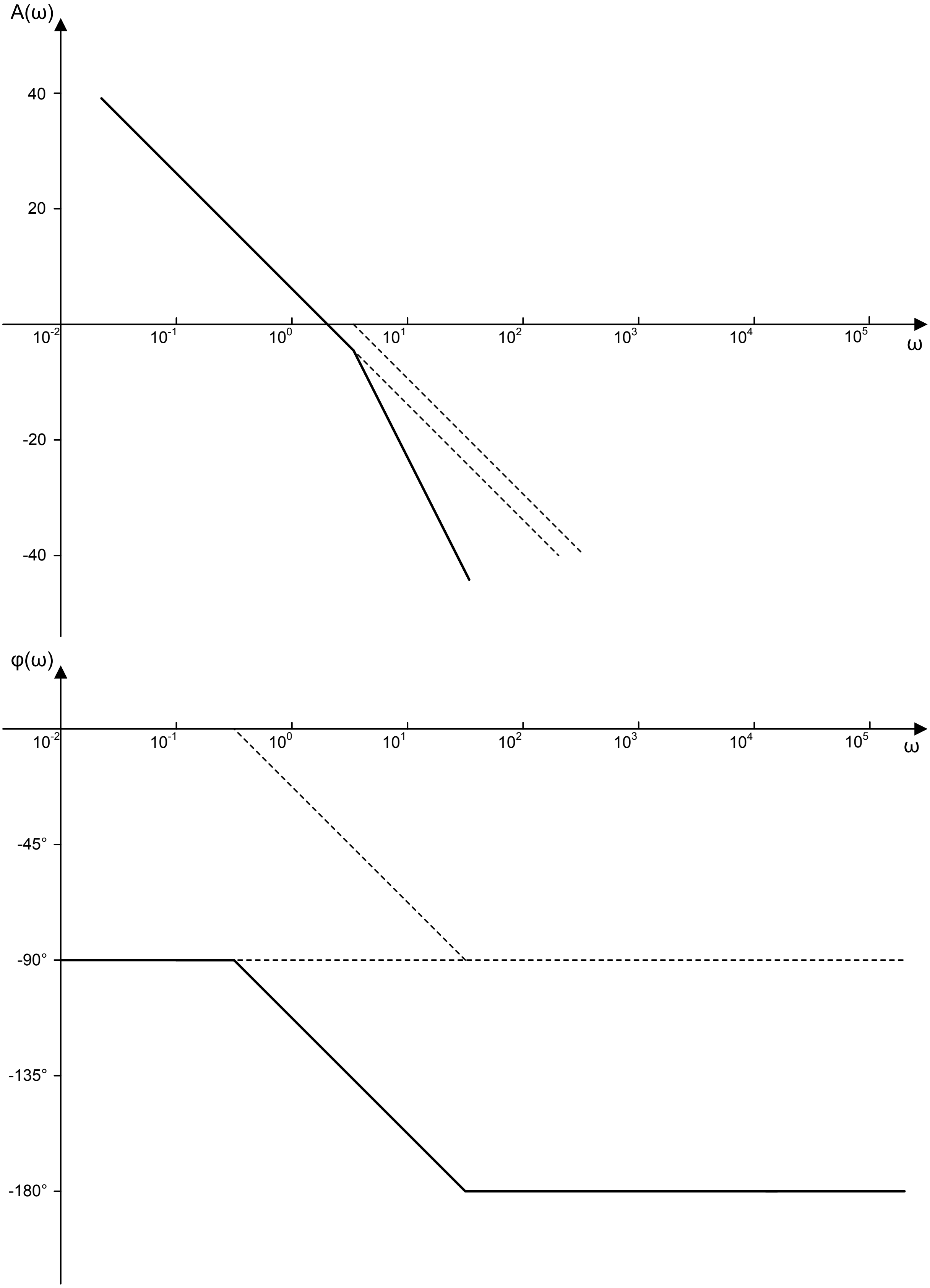
Amplitudno-frekvencijska karakteristika otvorenog kruga je

$$A_o(\omega) = 20\log\frac{\omega}{2} - 20\log\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{3.33}\right)^2} \tag{5-9}$$

Fazno-frekvencijska karakteristika otvorenog kruga je

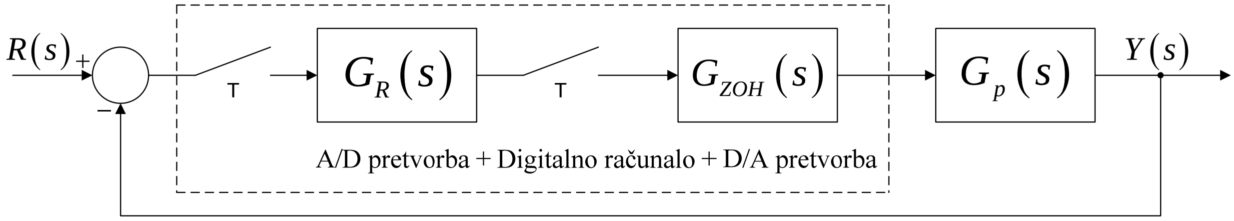
$$\varphi_o(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}\frac{\omega}{3.33} \tag{5-10}$$

Bodeov dijagram otvorenog kruga prikazan je na slici 5.2.



Slika 5.2. Bodeov dijagram otvorenog kruga zadanog sustava

5-1.2. Analogni regulator zamjenjuje se vremenski diskretnim regulatorom implementiranim u digitalnom računalu. Blokovskom shemom u vremenski kontinuiranoj domeni prikažite nastali vremenski diskretni sustav upravljanja. Na blokokvskoj shemi naznačite blokove kojima se modeliraju A/D pretvornik, digitalno računalo te D/A pretvornik.



Slika 5.3. Diskretni sustav upravljanja u kontinuiranoj domeni

5-1.3. Odredite preporučeni raspon iznosa vremena uzorkovanja T ovog diskretnog sustava upravljanja korištenjem preporuke za određivanje vremena uzorkovanja na temlju frekvencijskih karakteristika otvorenog vremenski kontinuiranog regulacijskog kruga. Nakon toga odaberite jedno od ponuđenih vremena:

I) $T = 1.5\ [ms]$; II) $T = 15\ [ms]$; III) $T = 150\ [ms]$; IV) $T = 1500\ [ms]$.

Interval dopuštenog perioda uzorkovanja određuje se prema sljedećoj relaciji

$$T = (0.17 \div 0.34)\frac{1}{\omega_c} \tag{5-11}$$

Uvrštavanjem presječne frekvencije sustava u izraz (5-11) dobije se sljedeći interval perioda uzorkovanja

$$96.20499 \leq T \leq 192.40999\ [ms] \tag{5-12}$$

Prema tome, period uzorkovanja kojim će se diskretizirati sustav iznosi

$$T = 150\ [ms] \tag{5-13}$$

5-1.4. Emulacijom kontinuiranog regulatora $G_R(s)$ uz vrijeme uzorkovanja odabrano u zadatku **5-1.3.**, odredite diskretni regulator. Za sva tri slučaja odredite prijenosnu funkciju regulatora $G_R(z)$. Također odredite i pripadne rekurzivne algoritme regulatora. Pritom koristite:

5-1.4.1. Tustinovu relaciju.

Prema Tustinovoj relaciji, regulator se diskretizira prema sljedećem postupku

$$G_R(z) = G_R(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} \tag{5-14}$$

Odgovarajući diskretni regulator je

$$G_R(z) = 0.05\frac{z+1}{z-1} = 0.05\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \tag{5-15}$$

Pripadni rekurzivni algoritam regulatora je

$$u(k) = 0.05\big(e(k) + e(k-1)\big) + u(k-1) \tag{5-16}$$

5-1.4.2. Aproksimaciju derivacije Eulerovom unaprijednom diferencijom.

Prema Eulerovoj unaprijednoj diferenciji, regulator se diskretizira prema sljedećem postupku

$$G_R(z) = G_R(s)\big|_{s=\frac{z-1}{T}} \tag{5-17}$$

Odgovarajući diskretni regulator je

$$G_R(z) = \frac{0.1}{z-1} = \frac{0.1z^{-1}}{1-z^{-1}} \tag{5-18}$$

Pripadni rekurzivni algoritam regulatora je

$$u(k) = 0.1e(k-1) + u(k-1) \tag{5-19}$$

5-1.4.3. Aproksimaciju derivacije Eulerovom unazadnom diferencijom.

Prema Eulerovoj unaprijednoj diferenciji, regulator se diskretizira prema sljedećem postupku

$$G_R(z) = G_R(s)\big|_{s=\frac{z-1}{zT}} \tag{5-20}$$

Odgovarajući diskretni regulator je

$$G_R(z) = \frac{0.1z}{z-1} = \frac{0.1}{1-z^{-1}} \tag{5-21}$$

Pripadni rekurzivni algoritam regulatora je

$$u(k) = 0.1e(k) + u(k-1) \tag{5-22}$$

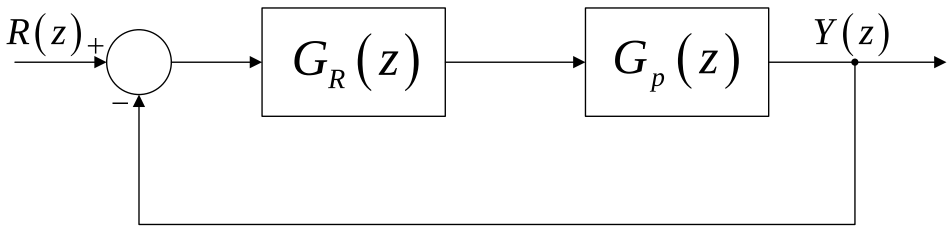
Koje je zajedničko obilježje svih triju dobivenih diskretnih regulatora?

Svi diskretni regulatori imaju pol u $z_p = 1$ što je posljedica integratora u kontinuiranoj domeni, odnosno upravljački signal $u(k)$ svakog od regulatora ovisi o upravljačkom signalu iz prethodnog koraka $u(k-1)$.

5-1.5. Vremenski diskretni sustav upravljanja prikažite blokovskom shemom u vremenski diskretnoj domeni. Kako glasi prijenosna funkcija procesa $G_p(z)$?

Proces diskretiziramo ZOH diskretizacijom (očuvanje prijelazne funkcije) prema sljedećem pravilu

$$G_p(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G_p(s)}{s}\right\} \tag{5-23}$$



Slika 5.4. Diskretni sustav upravljanja u diskretnoj domeni

Rastavljamo prijenosnu funkciju $\frac{G_p(s)}{s}$ na parcijalne razlomke

$$\frac{G_p(s)}{s} = \frac{3}{s} - \frac{3}{s + \frac{10}{3}} \tag{5-24}$$

Nastavljamo sa ZOH diskretizacijom zadanog procesa

$$G_p(z) = \frac{z-1}{z}\left[\frac{3z}{z-1} - \frac{3z}{z - 0.60653}\right] \tag{5-25}$$

Konačno, odgovarajući diskretni proces je

$$G_p(z) = \frac{1.18041}{z - 0.60653} = \frac{1.18041z^{-1}}{1 - 0.60653z^{-1}} \tag{5-26}$$

5-1.6. U zadacima nadalje razmatra se diskretni sustav upravljanja za slučaj regulatora $G_R(z)$ dobivenog postupkom diskretizacije pod 5-1.4.1. (diskretizacija Tustinovom relacijom)! Ispitajte stabilnost dobivenog diskretnog sustava pomoću Juryijeva kriterija.

Prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga u diskretnoj domeni je

$$G_o(z) = 0.05\frac{z+1}{z-1}\frac{1.18041}{z - 0.60653} = \frac{0.05902z + 0.05902}{z^2 - 1.60653z + 0.60653} \tag{5-27}$$

Karakteristična jednadžba zatvorenog kruga je

$$f(z) = 1 + G_o(z) = z^2 - 1.54751z + 0.66555 \tag{5-28}$$

Prvi Juryijev uvjet je zadovoljen

$$f(1) = 0.11804 > 0, \qquad (-1)^2 f(-1) = 3.21306 > 0 \tag{5-29}$$

Kako je prvi Juryijev kriterij zadovoljen, ostvaren je uvjet za formiranje Juryijeve tablice.

Tablica 5.1. Juryijeva tablica stabilnosti

Stabilnost	Redak	z^0	z^1	z^2
$\lvert a_0\rvert < \lvert a_1\rvert$	1	0.66555	−1.54751	1
	2	1	−1.54751	0.66555

Zadovoljen je i drugi uvjet stabilnosti, pa zaključujemo kako je sustav stabilan.

5-1.7. Odredite statičko pojačanje diskretnog sustava te regulacijsko odstupanje u ustaljenom stanju na skokovitu pobudu. Obrazložite dobivene rezultate.

Za određivanje statičkog pojačanja diskretnog sustava, potrebno je odrediti prijenosnu funkciju zatvorenog kruga

$$G(z) = \frac{G_o(z)}{1 + G_o(z)} = \frac{0.05902z + 0.05902}{z^2 - 1.54751z + 0.66555} \tag{5-30}$$

Statičko pojačanje diskretnog sustava je

$$\lim_{z \to 1} G(z) = 1 \tag{5-31}$$

Kako je statičko pojačanje sustava jednako 1, na jediničnu skokovitu pobudu regulacijsko odstupanje u ustaljenom stanju biti će jednako 0

$$e_\infty = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) E(z) = 0 \tag{5-32}$$

Proces je diskretiziran ZOH diskretizacijom, pa je prema tome očuvana prijelazna funkcija, odnosno pojačanje sustava i regulacijsko odstupanje na skokovitu pobudu ostali su nepromijenjeni u odnosu na polazni kontinuirani sustav.

5-1.8. Odredite izraz za $G_o(\Omega)$ diskretnog sustava upravljanja.

Za određivanje frekvencijske karakteristike otvorenog kruga, potrebno je provesti modificiranu bilinearnu transfromaciju

$$G_o(\Omega) = G_o(z)\Big|_{z = \frac{1 + \Omega \frac{T}{2}}{1 - \Omega \frac{T}{2}}} \tag{5-33}$$

Nakon uvrštavanja supstitucije u prijenosnu funkciju otvorenog kruga

$$z = \frac{1 + \Omega \frac{T}{2}}{1 - \Omega \frac{T}{2}} = \frac{1 + 0.075\Omega}{1 - 0.075\Omega} \tag{5-34}$$

dobije se

$$G_o(\Omega) = 0.5 \frac{(13.33 - \Omega)}{\Omega(3.26718 + \Omega)} = \frac{\left(1 - \frac{\Omega}{13.33}\right)}{\frac{\Omega}{2}\left(1 + \frac{\Omega}{3.26718}\right)} \tag{5-35}$$

U nastavku je prikazan Matlab kôd za određivanje frekvencijske karakteristike diskretnog sustava primjenom bilinearne transformacije. ☺

```
>> syms z Omega
>> Go = 0.05902*(z+1)/(z^2-1.60653*z+0.60653);
>> Go = subs(Go, (1+0.075*Omega)/(1-0.075*Omega));
>> pretty(simplify(Go))
```

5-1.9. Skicirajte Bodeov dijagram $G_o(\Omega)$ određen pod 5-1.8 korištenjem aproksimacije pravcima na istom grafu kao i na slici 5.2. Analitički odredite pripadnu presječnu frekvenciju i fazno osiguranje. Usporedite dobiveno fazno osiguranje s onim polaznog vremenski kontinuiranog sustava upravljanja određenog pod 5-1.1. i označite razliku u Bodeovom dijagramu.

Amplitudno-frekvencijska karakteristika diskretnog otvorenog regulacijskog kruga u linearnom mjerilu je

$$|G_o(\Omega)| = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{13.33^2 + \Omega^2}}{\Omega\sqrt{3.26718^2 + \Omega^2}} \tag{5-36}$$

Amplitudno-frekvencijska karakteristika diskretnog otvorenog regulacijskog kruga u logaritamskom mjerilu je

$$A_o(\Omega) = 20\log\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{13.33}\right)^2} - 20\log\frac{\Omega}{2} - 20\log\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{3.26718}\right)^2} \tag{5-37}$$

Fazno-frekvencijska karakteristika diskretnog otvorenog regulacijskog kruga je

$$\varphi_o(\Omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}\frac{\Omega}{13.33} - \operatorname{atan}\frac{\Omega}{3.26718} \tag{5-38}$$

Presječnu frekvenciju izračunat ćemo iz uvjeta jediničnog pojačanja otvorenog kruga (u linearnom mjerilu) na toj frekvenciji

$$|G_o(\omega_c)| = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{13.33^2 + \omega_c^2}}{\omega_c\sqrt{3.26718^2 + \omega_c^2}} \tag{5-39}$$

Presječna frekvencija diskretnog regulacijskoj kruga iznosi

$$\omega_c = 1.80245\ [s^{-1}] \tag{5-40}$$

Fazno osiguranje diskretnog regulacijskog kruga iznosi

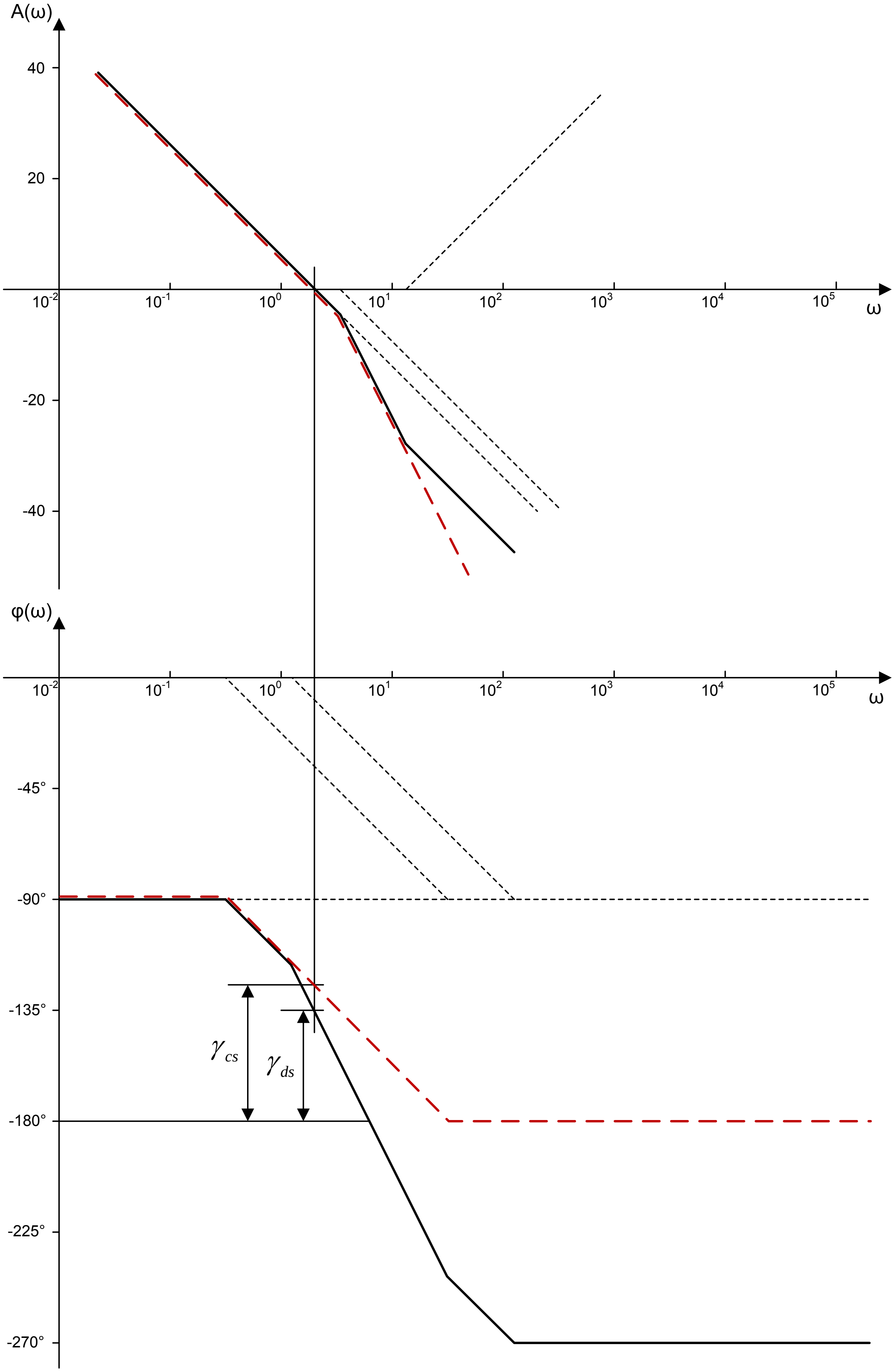
$$\gamma = \pi + \varphi_o(\omega_c) = 0.93225\ [\mathrm{rad}] = 53.41449° \tag{5-41}$$

Je li relativna stabilnost poboljšana ili narušena uvođenjem digitalnog računala u regulacijski krug?

Uvođenje digitalnog računala imalo je utjecaja na fazno osiguranje sustava

$$\Delta\gamma = \gamma_{5-1.9.} - \gamma_{5-1.1.} = -8.65665° \tag{5-42}$$

Primjećujemo kako je fazno osiguranje smanjeno u odnosu na polazni kontinuirani sustav. Zaključujemo kako digitalni regulatori narušavaju relativnu stabilnost sustava.



Slika 5.5. Bodeov dijagram diskretiziranog sustava