3. domaća zadaća

Frekvencijske karakteristike sustava, polovi i nule sustava

Priprema za vježbu

Zadatak 1

Za sustav opisan modelom u prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} -9 & -4.5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} + \overbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} \cdot u$$
$$y = \overbrace{\begin{bmatrix} 4.5 & -1.125 \end{bmatrix}}^{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{x} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{D}} \cdot u$$

a) Ručno nacrtajte Bodeov dijagram koristeći aproksimacije pravcima te jasno obilježite lomne frekvencije i nagibe pravaca.

   Napomena: Prvo odredite prijenosnu funkciju $G(s)$. U ovom koraku neka vam pripomogne `MATLAB`.

b) Korištenjem m-funkcije `bode` nacrtajte Bodeov dijagram i usporedite ga s rezultatom dobivenim u podzadatku a). Provjeru izvršite tako da na skicu iz prethodnog podzadatka iscrtate Bodeov dijagram dobiven u ovom podzadatku. Gdje su najveća odstupanja i zašto?

c) Odredite frekvencijsku karakteristiku sustava $G(j\omega)$. Za potrebe crtanja Nyquistova dijagrama, rastavite $G(j\omega)$ na realnu i imaginarnu komponentu ($\mathcal{R}\{G(j\omega)\}$ i $\mathcal{I}\{G(j\omega)\}$). U kompleksnoj ravnini ucrtajte početnu i krajnju točku Nyquistova dijagrama, točke presjeka s koordinatnim osima, kvadrante kroz koje prolazi dijagram te tangente u točki početka/završetka dijagrama.

d) Korištenjem m-funkcije `nyquist` provjerite rezultat dobiven u podzadatku c).

e) Korištenjem rastava prijenosne funkcije sustava na realnu i imaginarnu komponentu ($\mathcal{R}\{G(j\omega)\}$ i $\mathcal{I}\{G(j\omega)\}$) odredite amplitudu A i frekvenciju ω_0 ulaznog signala $u(t)$:

$$u(t) = A\sin(\omega_0 t),$$

   ako je odziv sustava:

$$y(t) = 10\sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}).$$

   Pri rješavanju ovog podzadatka možete koristiti m-funkciju `solve`.

f) Na nacrtanom Nyquistovu dijagramu označite $G(j\omega_0)$, $|G(j\omega_0)|$ i $\arg[G(j\omega_0)]$ za frekvenciju ω_0 dobivenu pod e).

g) Riješite podzadatak e) korištenjem jednadžbi pravaca za aproksimaciju Bodeova dijagrama. Koliko iznose pogreške aproksimacije?

h) Napravite simulacijsku shemu za provjeru podzadatka e). Koristeći blok prijenosne funkcije u Simulinku odsimulirajte odziv sustava na pobudu $u(t) = A\sin(\omega_0 t)$ uz prethodno izračunate parametre A i ω_0 (podzadatak e)). Podudara li se izlaz iz procesa sa signalom $y(t)$ iz podzadatka e)). Može li se već u prvoj periodi izvršiti provjera dobivenih parametara?

Zadatak 2

Sustav je zadan modelom u prostoru stanja:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -18 & -9 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} \cdot u \\ y &= \overbrace{18 \begin{bmatrix} a & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{x} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{D}} \cdot u\end{aligned}$$

pri čemu je a parametar:

a) Odredite prijelaznu i težinsku funkciju, $h(t)$ i $g(t)$.

b) Pokažite za koje se iznose parametra a pojedini prirodni modovi sustava ne vide u $h(t)$. Objasnite zašto.

c) Kako parametar a utječe na iznos prijelazne funkcije u stacionarnom stanju? Pokažite kako iznos težinske funkcije u trenutku $t = 0^+$ ovisi o parametru a. Kako parametar a utječe na oblik prijelazne funkcije?

d) Odredite raspon iznosa $a > 0$ za koje prijelazna funkcija $h(t)$ ima nadvišenje.

e) U kompleksnoj s-ravnini prikažite raspored polova i nula sustava (koristite m-funkciju `pzmap`) za slučaj kada nadvišenje postoji, za slučaj kada ono ne postoji te za granični slučaj (koristite rezultate iz podzadatka d)). Koristeći m-funkciju `step` generirajte prijelazne funkcije za sva tri slučaja.

f) Razmotrite slučaj $a < 0$. Koristeći m-funkciju `step` generirajte prijelaznu funkciju za slučaj $a = -1$. Gdje se nalaze polovi i nule? Koju pojavu uočavate?

Zadatak 1

a) Prijenosna funkcija je:

$$G(s) = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = 18\frac{s-1}{(s+3)(s+6)}$$

Asimptotska aproksimacija Bodeova dijagrama:

$$G(j\omega) = \frac{\frac{j\omega}{1} - 1}{\left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{6} + 1\right)}$$

Vidi sliku 1.

b) Usporedba amplitudne i fazne frekvencijske karakteristike s karakteristikama dobivenim aproksimacijom pravcima.

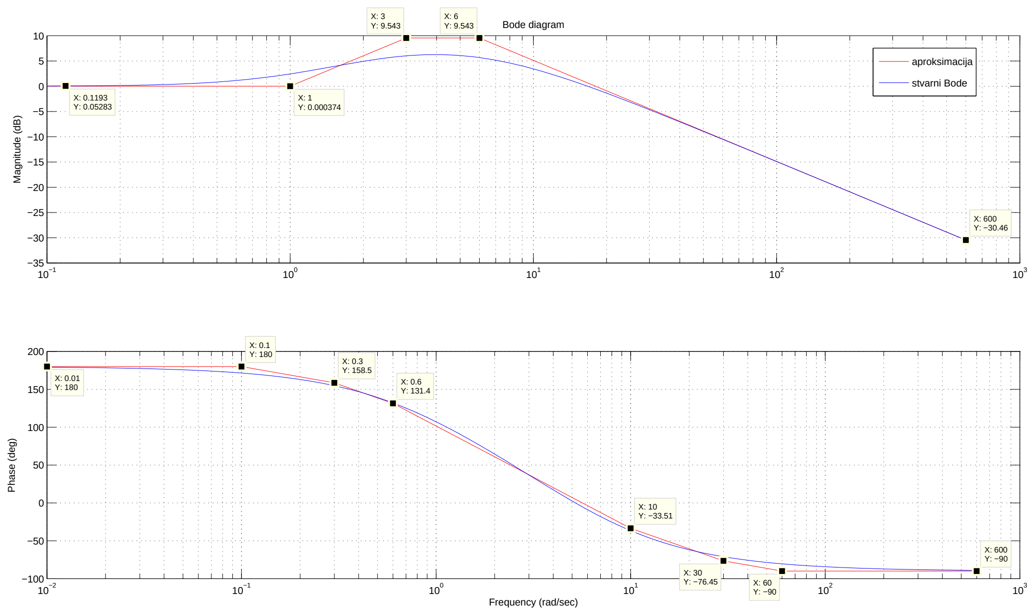

Figure 1: Usporedba amplitudnih i faznih frekvencijskih karakteristika

c) Nyquistov dijagram

$$G(j\omega) = 36\frac{5\omega^2 - 9}{\omega^4 + 45\omega^2 + 324} - j18\omega\frac{\omega^2 - 27}{\omega^4 + 45\omega^2 + 324} = R(\omega) + jI(\omega)$$

$$\omega \to 0 : \begin{cases} R(\omega) = -1 \\ I(\omega) = 0 \end{cases}$$

$$\omega \to \infty : \begin{cases} R(\omega) = 0 \\ I(\omega) = 0 \end{cases}$$

$$R(\omega) = 0 \to \omega = \frac{3\sqrt{5}}{5}, \infty$$

$$I(\omega) = 0 \to \omega = 0, 3\sqrt{3}, \infty$$

$$R\left(3\sqrt{3}\right) = 2, \quad I\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right) \approx 1.4907$$

Iz Bodea vidimo da faza kreće od 180° i asimptotski teži prema iznosu −90°, što se vidi i na Nyquistu.

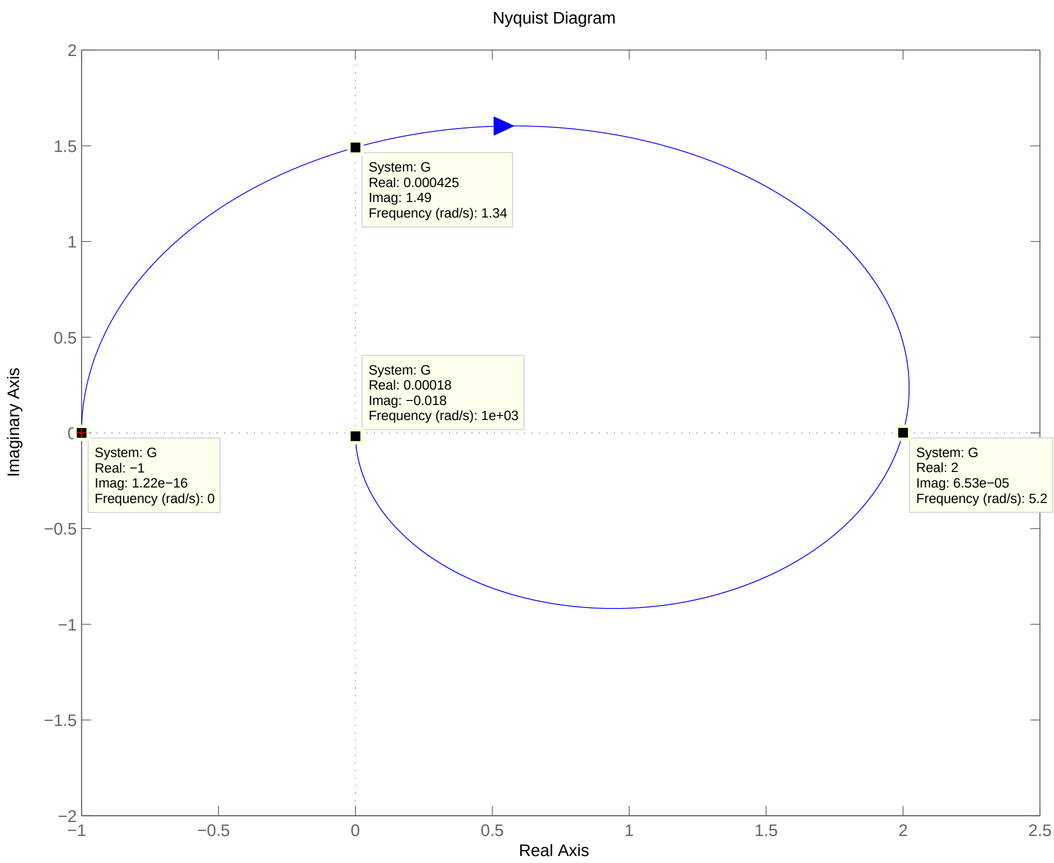

Figure 2: Nyquistov dijagram

d) Vidi sliku 2.

e) Za fazno kašnjenje $\phi = \frac{\pi}{3}$ slijedi:

$$\arctan \frac{I(\omega_0)}{R(\omega_0)} = \frac{\pi}{3},$$

$$\frac{I(\omega_0)}{R(\omega_0)} = \sqrt{3},$$

$$\omega_0^3 + 10\sqrt{3}\omega_0^2 - 27\omega_0 - 18\sqrt{3} = 0,$$

uz uvjet da je rješenje realno i pozitivno dobije se: $\omega_0 \approx 2.1373$.

$$G(j\omega_0) = 0.9052 + 1.5678j \rightarrow |G(j\omega_0)| = 1.8104 \rightarrow A = \frac{10}{|G(j\omega_0)|} \approx 5.5237.$$

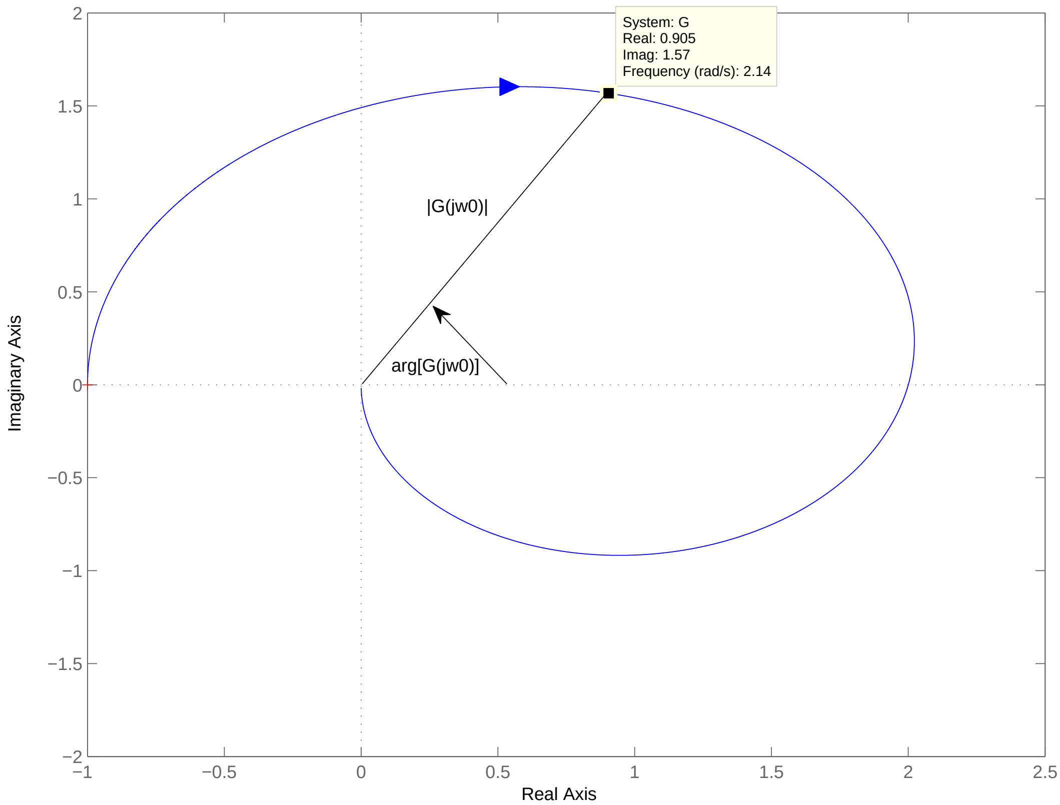

Figure 3: Označene točke na Nyquistovom dijagramu.

f) Vidi sliku 3.

g) Budući da je faza 60°, točka $(\omega_0, 60°)$ se nalazi na 4. afinom segmentu faznog dijagrama (vidi sliku 1). Nagib pravca na tom segmentu je $K = -135°/dekada$, a jednadžba pravca je:

$$\phi(\omega_0) - \phi(0.6) = -135(\log\omega_0 - \log 0.6)$$

$$\log\omega_0 = 0.30704 \rightarrow \omega_0 = 2.02787$$

Na amplitudnom dijagramu se nalazimo na drugom afinom segmentu, gdje je nagib $K = +20\ dB/dekada$, a jednadžba pravca:

$$|G|_{dB} - 0 = 20(\log\omega - \log 1) = 20\log\omega$$

$$|G|_{\omega_0,dB} = 20\log\omega_0 = 6.1408\ dB \rightarrow |G|_{\omega_0} = 2.0279 \rightarrow A = \frac{10}{|G|_{\omega_0}} = 4.9313$$

Pogreške aproksimacije su:

$$|\Delta A| = |4.9313 - 5.5237| = 0.5924$$

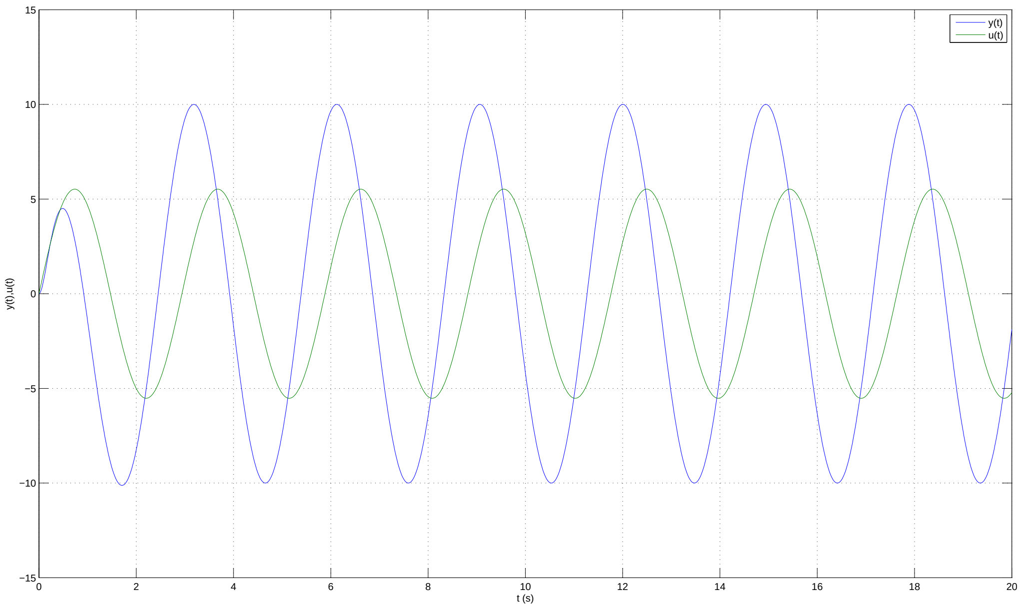

Figure 4: Vremenski odziv sustava uz sinusoidalni pobudni signal $u(t) = 4.015sin(14.32t)$

$$|\Delta\omega| = |2.02787 - 2.1373| = 0.10943$$

h) Vidi sliku 4. Studenti trebaju biti u stanju iz odziva očitati amplitudu i fazni pomak signala.

Zadatak 2

a) Lukavi studenti će možda uočiti da se radi o praktički istom sustavu kao u prošlom zadatku. U svakom slučaju, prijenosna funkcija je:

$$G(s) = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = 18\frac{s+a}{(s+3)(s+6)}$$

Težinsku funkciju $g(t)$ možemo jednostavno izračunati inverznom Laplaceovom transformacijom od $G(s)$:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\} = 6e^{-3t}\left(a-3\right) - 6e^{-6t}\left(a-6\right)$$

Uz uvjet $h(0) = 0$, imamo:

$$h(t) = \int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = e^{-6t}\left(a-6\right) - e^{-3t}\left(2a-6\right) + a$$

b) i. $a = 3$:

$$h(t) = 3\left(1 - e^{-6t}\right)$$

Prirodni mod e^{-3t} nije vidljiv jer se pol i nula u $s = -3$ krate.

ii. $a = 6$:

$$h(t) = 6\left(1 - e^{-3t}\right)$$

Prirodni mod e^{-6t} nije vidljiv jer se pol i nula u $s = -6$ krate.

c) Iz $\lim_{t\to\infty} h(t) = a$ slijedi da je statičko pojačanje sustava izravno proporcionalno iznosu parametra a. Iz $g(t)$ slijedi: $g(0) = 18$. Prema tome, neovisno o iznosu parametra a, prijelazna funkcija u početku kreće u pozitivnu stranu. S druge strane, kada je $a < 0$, statičko pojačanje će biti negativno pa imamo neminimalno-fazno ponašanje (prijelazna funkcija kreće u suprotnom smjeru od ustaljenog stanja).

d) Prijelazna funkcija ima nadvišenje ako postoji ekstrem funkcije $h(t)$ za $t > 0$, uz $a > 0$.

$$\dot{h}(t_m) = g(t_m) = 0$$

$$t_m = \frac{1}{3} \ln \frac{a-6}{a-3}$$

Iz uvjeta $t_m > 0$ slijedi interval parametra a za koji će postojati nadvišenje:

$$\frac{a-6}{a-3} > 1 \to \frac{-3}{a-3} > 0$$

$$a < 3.$$

Prema tome, nadvišenje ne postoji za $a > 3$, a za $a = 3$ nastupa granični slučaj.

e) Nadvišenje postoji kada je nula sustava bliža ishodištu od oba pola. U graničnom slučaju dolazi do pokrate nule i pola u -3 (slika 5).

f) Vidi sliku 6.

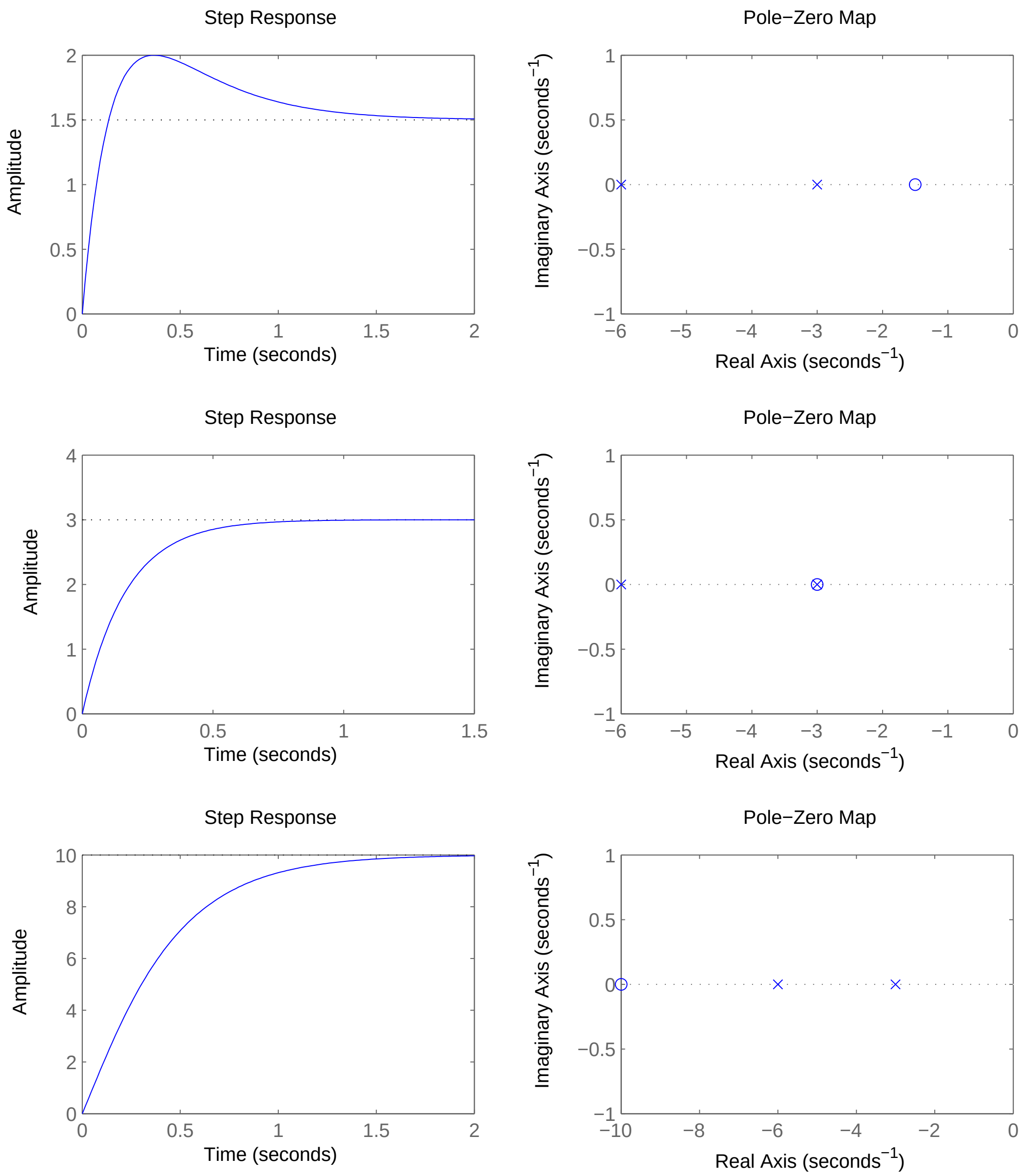

Figure 5: Prijelazne funkcije i raspored polova i nula za tri karakteristične vrijednosti parametra a.

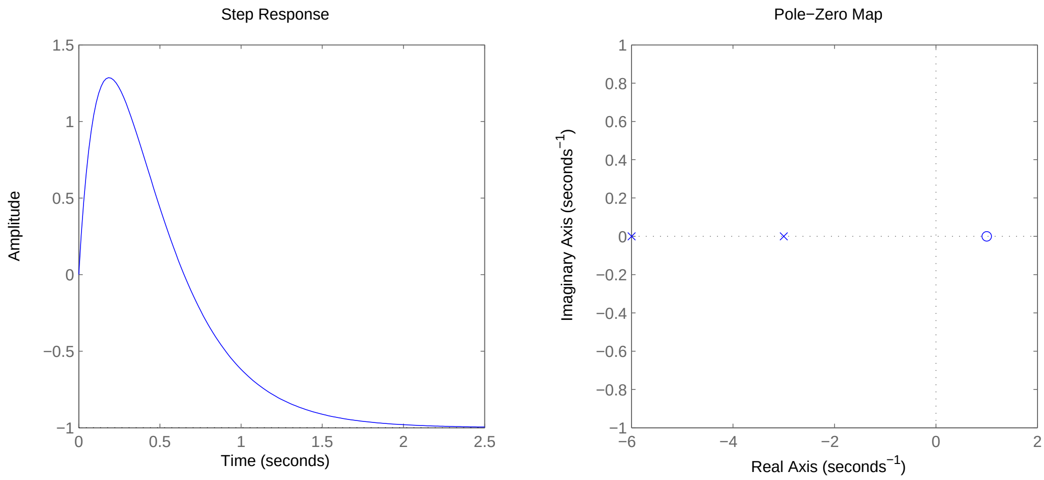

Figure 6: Prijelazna funkcija i položaj polova i nula za slučaj $a = -1$.