

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo

Ime Prezime

JMBAG

IZVJEŠTAJ ZA 3. LABORATORIJSKU VJEŽBU

Frekvencijske karakteristike sustava, polovi i nule sustava

AUTOMATSKO UPRAVLJANJE

Zagreb, 2014./2015.

UVOD

Jedan od načina analize kontinuiranih sustava je analiza u frekvencijskoj domeni. Frekvencijski postupci su jednostavniji i pogodniji za analizu u frekvencijskom području. Naime, frekvencijsko područje omogućuje nam dublji uvid u određena svojstva koje sustav posjeduje pod djelovanjem harmoničkih signala. Bit je u tome da se na temelju poznavanja frekvencijske karakteristike otvorenog sustava zaključi kakvo će biti ponašanje zatvorenog regulacijskog sustava, hoće li on biti stabilan, koliko će biti daleko od ruba stabilnosti itd. Za prikaz frekvencijsku karakteristiku $G(j\omega)$ koristimo grafički prikaz. Tako imamo: *Nyquistov prikaz amplitudno-fazne frekvencijske karakteristike* gdje ga Harry Nyquist je koristio u svom radu, kojim su postavljeni temelji analize stabilnosti u frekvencijskom području, i danas vrlo važne i korisne u inženjerskoj praksi i imamo prikaz frekvencijske karakteristike u linearno logaritamskom mjerilu koju je razvio Hendrik W. Bode koji je najpopularniji prikaz frekvencijske karakteristike i najčešće se koristi u automatici, zbog toga što je jednostavan i dovoljno točan za primjenu u projektiranju sustava automatskog upravljanja.

Zadatak 1

Za sustav opisan modelom u prostoru stanja:

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -9 & -4.5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \cdot x + \overbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} \cdot u$$

$$y = \overbrace{\begin{bmatrix} 4.5 & -1.125 \end{bmatrix}}^{\mathbf{C}} \cdot x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{D}} \cdot u$$

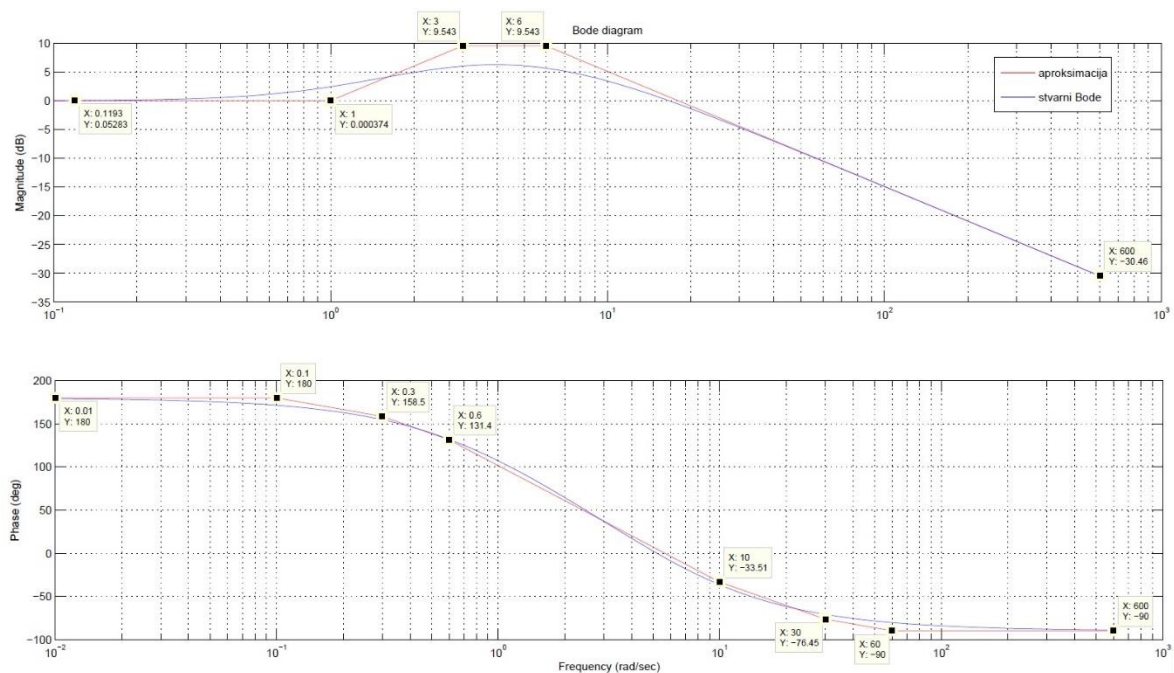
Potrebno je odrediti:

a) i b) Bodeov dijagram koristeći aproksimacije pravcima te obilježiti lomne frekvencije i nagibe pravca i na istu sliku nacrtati točni Bodeov dijagram.

Prijenosnu funkciju iz prikaza u prostoru stanja dobivamo preko formule

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$\text{gdje se dobije } G(s) = \frac{18s}{s^2+9s+18} - \frac{18}{s^2+9s+18} = 18 \frac{s-1}{(s+3)(s+6)} = (s-1) \frac{1}{\frac{s}{3}+1} \frac{1}{\frac{s}{6}+1}$$



Slika 1. Usporedba amplitudnih i faznih frekvencijskih karakteristika

Najveća odstupanja su na pregibima grafa jer je prijelazima najveća pogreška a to je zbog odstupanja linearne aproksimacije.

c) i d) Frekvencijsku karakteristiku sustava $G(j\omega)$. U kompleksnoj ravnini ucrtati početnu i krajnju točku Nyquistova dijagrama, točke presjeka s koordinatnim osima, kvadrante kroz koje prolazi dijagram te tangente u točki početka/završetka dijagrama. Korištenjem m-funkcije *nyquist*.

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{18\omega j - 18}{-\omega^2 + 9\omega j + 18} \cdot \frac{18 - \omega^2 - 9\omega j}{-\omega^2 + 9\omega j + 18} \\ &= \frac{324\omega j - 18\omega^3 j + 162\omega^2 - 324 + 18\omega^2 + 162\omega j}{(18 - \omega^2)^2 + 81\omega^2} \\ &= \frac{36(5\omega^2 - 9)}{\omega^4 + 45\omega^2 + 324} - 18\omega j \frac{\omega^2 - 27}{\omega^4 + 45\omega^2 + 324} \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}\{G(j\omega)\} = \frac{36(5\omega^2 - 9)}{\omega^4 + 45\omega^2 + 324}$$

$$\mathcal{I}\{G(j\omega)\} = -18\omega \frac{\omega^2 - 27}{\omega^4 + 45\omega^2 + 324}$$

početna točka $\omega = 0$: $\mathcal{R}(\omega) = 36 \cdot \frac{-9}{324} = -1$, $\mathcal{I}(\omega) = 0$

krajna točka $\omega = \infty$: $\mathcal{R}(\omega) = 0$, $\mathcal{I}(\omega) = 0$

presjek s koordinatnim osima: $\mathcal{R}(\omega) = 0 \rightarrow 36 \frac{5\omega^2 - 9}{\omega^4 + 45\omega^2 + 324} = 0$

$$5\omega^2 = 9$$

$$\omega = \frac{3\sqrt{5}}{5} \quad \text{i} \quad \omega = \infty$$

$$\mathcal{I}(\omega) = 0 \rightarrow -18\omega \frac{\omega^2 - 27}{\omega^4 + 45\omega^2 + 324} = 0$$

$$\omega \cdot (\omega^2 - 27) = 0$$

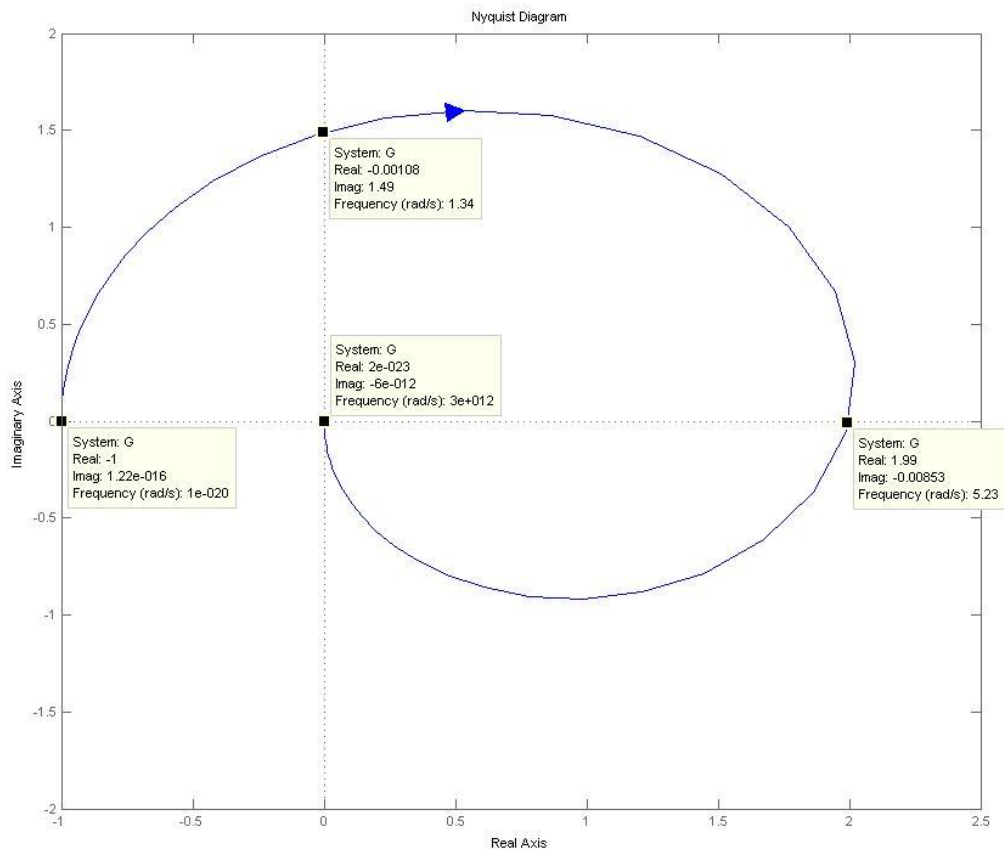
$$\omega = 0$$

$$\omega^2 = 27$$

$$\omega = 3\sqrt{3} \quad \text{i} \quad \omega = \infty$$

$$\mathcal{R}(\omega=3\sqrt{3}) = 2$$

$$\mathcal{I}(\omega=\frac{3\sqrt{5}}{5}) \approx 1.4907$$



Slika 2. Nyquistov dijagram

e) amplitudu A i frekvenciju ω_0 ulaznog signala $u(t)$:

$$u(t) = A \sin(\omega_0 t),$$

u kojem je odziv sustava:

$$y(t) = 10 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{I(\omega_0)}{R(\omega_0)}\right) = \arctg\left(\frac{18\omega_0 \cdot \frac{\omega_0^2 - 27}{\omega_0^4 + 45\omega_0^2 + 324}}{\frac{36(5\omega_0^2 - 9)}{\omega_0^4 + 45\omega_0^2 + 324}}\right) = \arctg\left(\frac{\omega_0(\omega_0^2 - 27)}{10\omega_0^2 - 18}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\omega_0(\omega_0^2 - 27)}{10\omega_0^2 - 18} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$\omega_0^3 - 10\sqrt{3}\omega_0^2 - 27\omega_0 + 18\sqrt{3} = 0$$

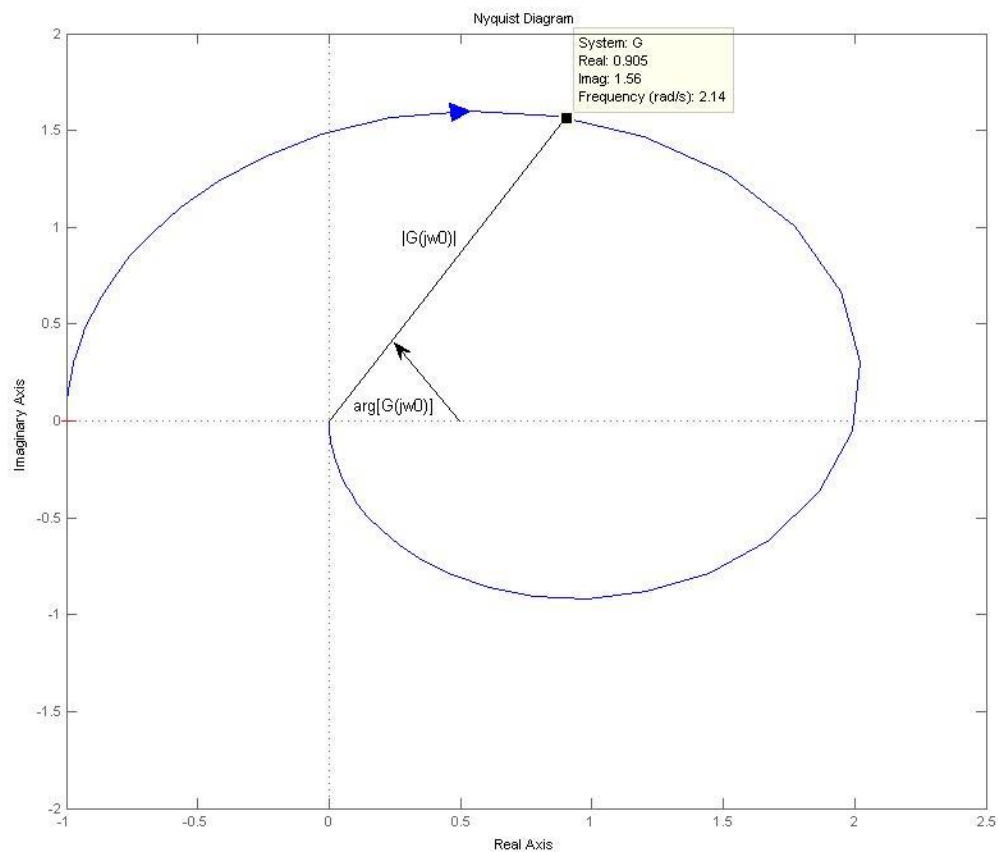
$$\omega_0 = 2.1373$$

$$G(j\omega_0) = G(j2.1373) = 0.9052 + 1.5678j$$

$$|G(j\omega_0)| = 1.8140$$

$$A = \frac{10}{|G(j\omega_0)|} = 5.5237$$

f) na nacrtanom Nyquistovu dijagram označiti $G(j\omega_0)$, $|G(j\omega_0)|$ i $\arg[G(j\omega_0)]$.



Slika 3. Označene točke na Nyquistovom dijagramu

g) pogrešku aproksimacije, korištenjem jednadžbi pravaca za aproksimaciju Bodeova dijagrama.

$$\varphi(\omega_0) - \varphi(0.6) = -135[\log(\omega_0) - \log(0.6)]$$

$$\text{Log}(\omega_0) = \frac{\varphi(\omega_0) - \varphi(0.6) + 135\log(0.6)}{135} = 0.30704$$

$$\omega_0 = 10^{0.30704} = 2.02787 \text{ rad/s}$$

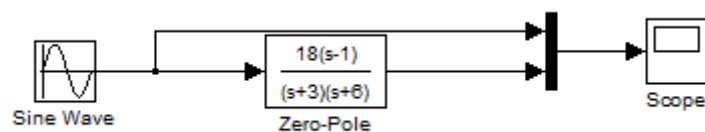
$$|G|_{\text{dB}} - 0 = 20(\log(\omega) - \log(1)) = 20\log(\omega)$$

$$|G|_{\omega_0} = 2.0279$$

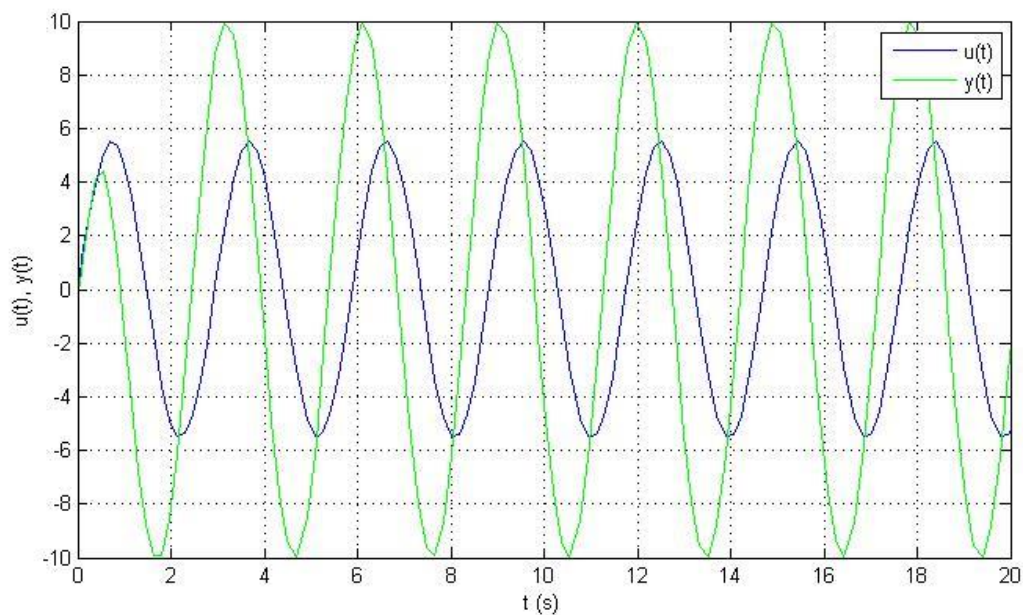
$$A = \frac{10}{|G|_{\omega_0}} = 4.9313$$

$$|\Delta A| = |4.9313 - 5.5237| = 0.5924$$

h) Simulink shemom sa slike 4 možemo provjeriti podzadatak e). Na slici 5 se vidi popuda $u(t)$ i odziv $y(t)$.



Slika 4. Simulink shema sustava



Slika 5. Vremenski odziv sustava uz sinusoidalni pobudni signal
 $u(t) = 5.5237\sin(2.1373t)$

Izlaz iz procesa podudara sa signalom $y(t)$ iz podzadatka e) gdje vidimo da su amplituda i faza dobivenog signala iste osim na početku tj. u prvoj poluperiodi se razlikuju zbog istitranja početnih uvjeta.

Iz prvoj periodi se ne može izvršiti provjera dobivenih parametara jer na početku trebamo čekati dok se izvrše prijelazne pojave.

Zadatak 2

Sustav je zadan modelom u prostoru stanja:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -18 & -9 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \cdot x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} \cdot u \\ y &= \overbrace{18[a \quad 1]}^{\mathbf{C}} \cdot x + \overbrace{[0]}^{\mathbf{D}} \cdot u\end{aligned}$$

pri čemu je a parametar.

Potrebno je odrediti:

a) prijelaznu i težinsku funkciju, $h(t)$ i $g(t)$.

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{18s}{s^2+9s+18} + \frac{18a}{s^2+9s+18} = 18 \frac{s+a}{(s+3)(s+6)}$$

$$G(s) = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+6)}$$

$$A|_{s=-3} = 18 \cdot \frac{-3+a}{3} = 6(a-3)$$

$$B|_{s=-6} = 18 \cdot \frac{6-a}{-3} = 6(6-a)$$

$$G(s) = 6 \cdot \frac{a-3}{s+3} + 6 \cdot \frac{6-a}{s+6} \quad \bullet \rightarrow \bigcirc \quad g(t) = 6(a-3) \cdot e^{-3t} + 6(6-a) \cdot e^{-6t}$$

$$h(0) = 0$$

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = (a-6)e^{-6t} - (2a-6)e^{-3t} + a$$

b) za koje iznose parametra a pojedini prirodni modovi sustava ne vide u $h(t)$.

$$\text{Za } a = 3 \rightarrow h(t) = 3 - 3e^{-6t}$$

Prirodni mod e^{-3t} nije vidljiv jer se pol i nula u $s = -3$ krate,

$$\text{tj. } G(s) = 18 \frac{\cancel{s+3}}{(s+3)(s+6)} = 18 \frac{1}{(s+6)}$$

$$\text{Za } a = 6 \rightarrow h(t) = 6 - 6e^{-3t}$$

Prirodni mod e^{-6t} nije vidljiv jer se pol i nula u $s = -6$ krate,

$$\text{tj. } G(s) = 18 \frac{\cancel{s+6}}{(s+3)(s+6)} = 18 \frac{1}{(s+3)}$$

c) kako parametar a utječe na iznos prijelazne funkcije u stacionarnom stanju. Kako iznos težinske funkcije u trenutku $t = 0^+$ ovisi o parametru a . Kako parametar a utječe na oblik prijelazne funkcije.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [(a - 6)e^{-6t} - (2a - 6)e^{-3t} + 3] = a$$

Statičko pojačanje sustava izravno je proporcionalno iznosu parametra a .

$$g(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 18$$

Iznos težinske funkcije u trenutku $t = 0^+$ ne ovisi o parametru a . Prijelazna funkcija neovisno o a na početku kreće u pozitivnu stranu.

Kada je $a < 0$, statičko pojačanje će biti negativno pa imamo neminimalno-fazno ponašanje (prijelazna funkcija kreće u suprotnom smjeru od ustaljenog stanja).

d) raspon iznosa $a > 0$ za koje prijelazna funkcija $h(t)$ ima nadvišenje.

$$\dot{h}(t_m) = g(t_m) = 0$$

$$6(a - 3)e^{-3t_m} + 6(6 - a)e^{-6t_m} = 0$$

$$(a - 3)e^{-3t_m} = (6 - a)e^{-6t_m}$$

$$e^{-3t_m}e^{6t_m} = \frac{a - 6}{a - 3}$$

$$e^{3t_m} = \frac{a - 6}{a - 3} \quad / \ln$$

$$3t_m = \ln \frac{a - 6}{a - 3}$$

$$t_m = \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{a - 6}{a - 3}$$

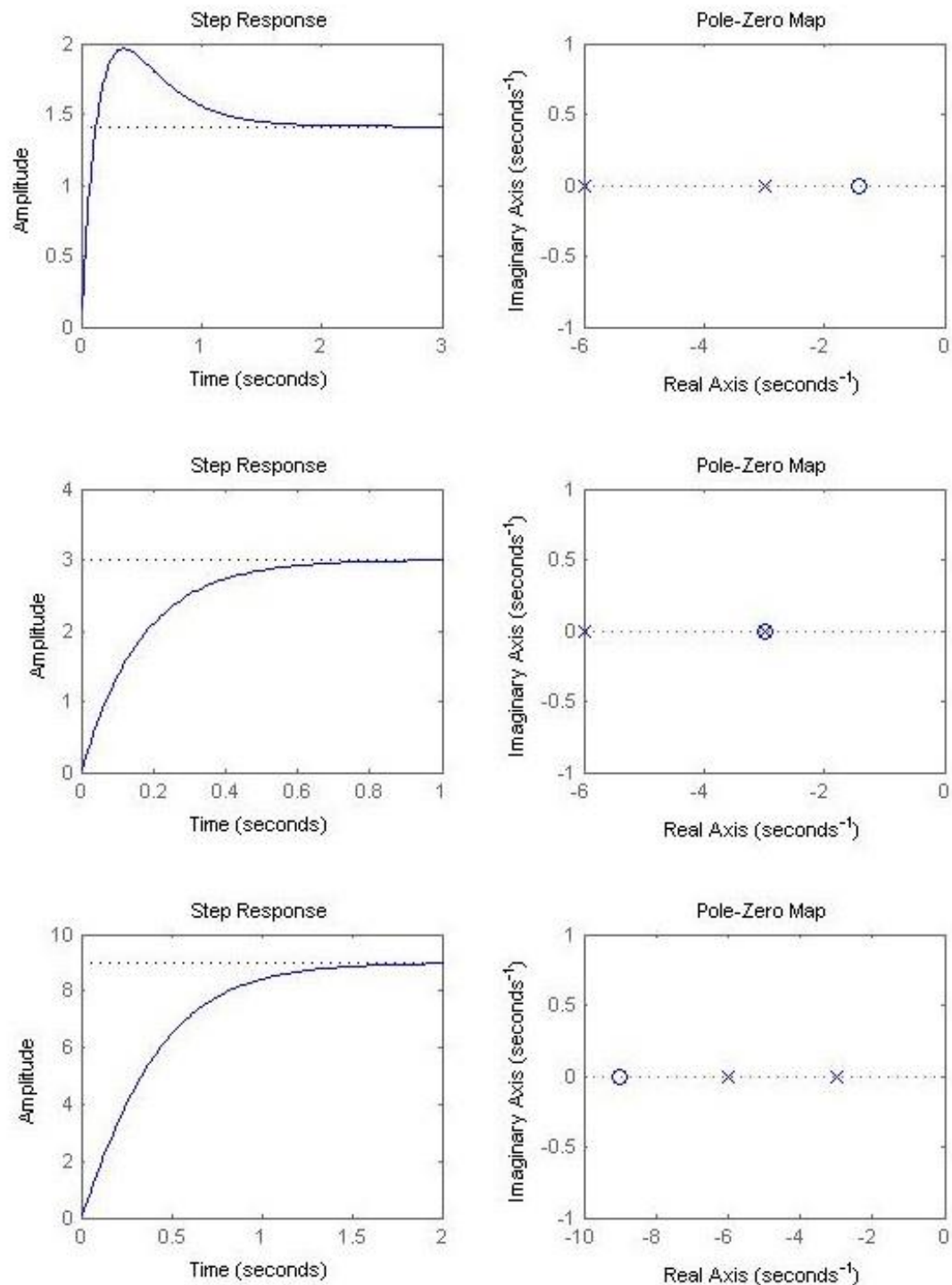
$$\text{iz uvjeta } t_m \Rightarrow \frac{a - 6}{a - 3} > 1$$

$$a < 3 \rightarrow \text{postoji nadvišenje}$$

$$a = 3 \rightarrow \text{na rubu (granični slučaj)}$$

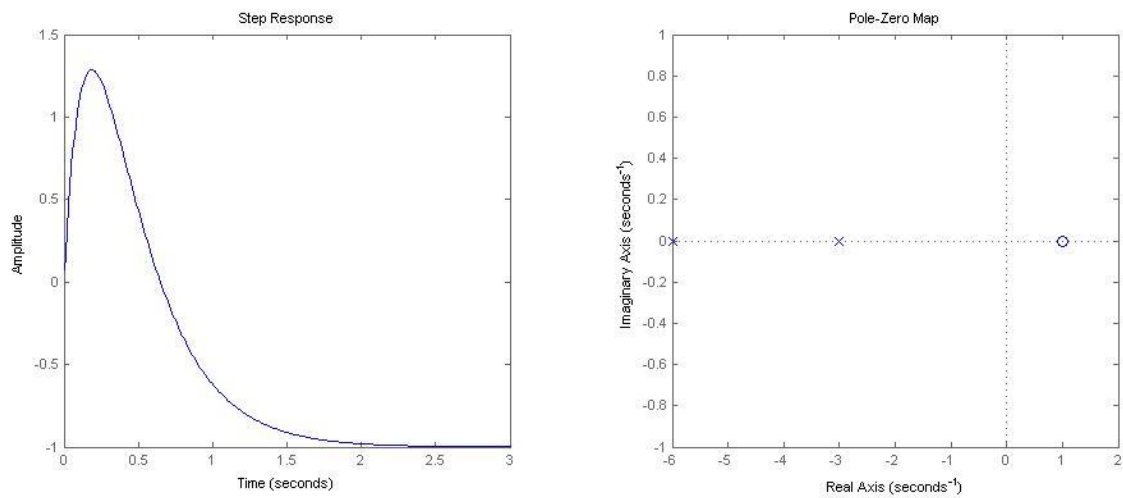
$$a > 3 \rightarrow \text{ne postoji nadvišenje.}$$

e) Na slici 6 su prikazane prijelazne funkcije i raspored polova i nula sustava u kompleksnoj s-ravnini za slučaj kada nadvišenje postoji, prvi red slika, gdje je $a < 3$ tj. $a = \sqrt{2}$, za slučaj kada ono ne postoji, drugi red slika, kada je $a = 3$ te za granični slučaj, zadnji red slika, kada je $a > 3$ tj. $a = 9$.



Slika 6. Prijelazne funkcije i raspored polova i nula za tri karakteristične vrijednosti parametra a

f) prijelaznu funkciju za slučaj $a = -1$.



Slika 7. Prijelazna funkcija i položaj polova i nula za slučaj $a = -1$

Na slici 7 je prikazana prijelazna funkcija i položaj polova i nula za slučaj kada nam je $a = -1$, i uočavamo neminimalno-faznu pojavu jer vidimo da se nula sustava nalazi u desnoj poluravnini s -ravnine.

ZAKLJUČAK

Za sustave je vrlo bitno analizirati stabilnost sustava, pa najpogodnije je analizirati u frekvencijskoj domeni, tj. crtajući poznate dijagrame *Bodeov* i *Nyquistov prikaz* i prikazati polove i nule u *s-ravnini* koji nam omogućuju dublji uvid u određena svojstva. Poznavajući frekvencijsku karakteristiku otvorenog sustava lako možemo nacrtati navedene dijagrame i lako analiziramo stabilnost.