Diskretni sustavi upravljanja

Postupci diskretizacije kontinuiranih sustava

Diskretizacija kontinuiranih sustava vrlo je bitan element analize linearnih sustava. Postoji više načina diskretizacije kontinuiranih sustava, ovisno o svojstvu koje se pritom želi zadržati. Tako npr. postoji diskretizacija koja zadržava svojstva impulsnog odziva, prijelazne funkcije, frekvencijske karakteristike itd. U velikoj se većini slučajeva regulator diskretizira metodom koja čuva svojstva težinske funkcije, dok se proces diskretizira metodom koja čuva svojstva prijelazne funkcije, tzv. ZOH diskretizacijom.

1. Diskretizacija uz očuvanje težinske funkcije

Primjenom diskretizacije ovog tipa čuvaju se svojstva težinske funkcije $g(t)$ u diskretnoj domeni, odnosno impulsni odziv diskretiziranog sustava jednak je otipkanom impulsnom odzivu polaznog kontinuiranog sustava. Pri tome se ne čuvaju svojstva prijelazne funkcije kontinuiranog sustava (Slika 1).

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{G(s)\right\} \tag{1}$$

Postupak diskretizacije prikazan relacijom (1) sastoji se u rastavu prijenosne funkcije kontinuiranog sustava $G(s)$ na parcijalne razlomke, te se primjenom tablice $\mathcal{Z}$ transformacije (Tablica 1) svaki parcijalni član zasebno prebacuje u diskretnu domenu. Proširena tablica $\mathcal{Z}$ transformacije nalazi se u Prilogu VI.

Tablica 1: Tablica $\mathcal{Z}$ transformacije kauzalnih signala.

$x(t)$	$X(s)$	$x(kT)$	$X(z)$
1	$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{zT}{(z-1)^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$(kT)^2$	$\frac{zT^2(z+1)}{(z-1)^3}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{zTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
t^2e^{-at}	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{zT^2e^{-aT}(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega kT)$	$\frac{z\sin(\omega T)}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega kT)$	$\frac{z^2-z\cos(\omega T)}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-akT}\sin(\omega kT)$	$\frac{ze^{-aT}\sin(\omega T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(\omega T)+e^{-2aT}}$
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-akT}\cos(\omega kT)$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos(\omega T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(\omega T)+e^{-2aT}}$

Primjer 1. Potrebno je diskretizirati kontinuirani sustav zadan prijenosnom funkcijom, metodom koja čuva svojstva težinske funkcije. Zadano vrijeme diskretizacije iznosi $T = 50[ms]$.

$$G(s) = \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)}$$

Zadanu prijenosnu funkciju $G(s)$ rastavljamo na parcijalne razlomke

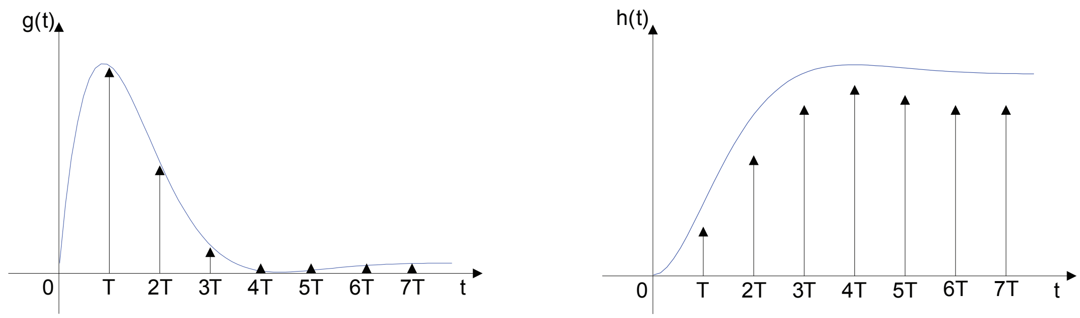
$$G(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

Primjenom tablice $\mathcal{Z}$ transformacije, svaki se član zasebno prebacuje u diskretnu domenu

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{2}{s+1}\right\} = \frac{2z}{z-0.95123} \qquad \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = \frac{z}{z-0.90484}$$

Konačno, tražena prijenosna funkcija diskretnog sustava je

$$G(z) = \frac{3z^2 - 2.76091z}{z^2 - 1.85607z + 0.86071}$$



(a) Odzivi na impulsnu pobudu

(b) Odzivi na skokovitu pobudu

Slika 1: Usporedba odziva kontinuiranog i diskretiziranog sustava

Primjer 2. Potrebno je diskretizirati kontinuirani sustav zadan prijenosnom funkcijom, metodom koja čuva svojstva težinske funkcije. Zadano vrijeme diskretizacije iznosi $T = 500[ms]$.

$$G(s) = \frac{-s-5}{s(s^2+4s+5)}$$

Zadanu prijenosnu funkciju $G(s)$ rastavljamo na parcijalne razlomke

$$G(s) = \frac{-1}{s} + \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

Primjenom tablice $\mathcal{Z}$ transformacije, svaki se član zasebno prebacuje u diskretnu domenu

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{z}{z-1} \qquad \mathcal{Z}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} = \frac{z^2 - 0.32284z}{z^2 - 0.64569z + 0.13534}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} = \frac{0.17637z}{z^2 - 0.64569z + 0.13534}$$

Konačno, tražena prijenosna funkcija diskretnog sustava je

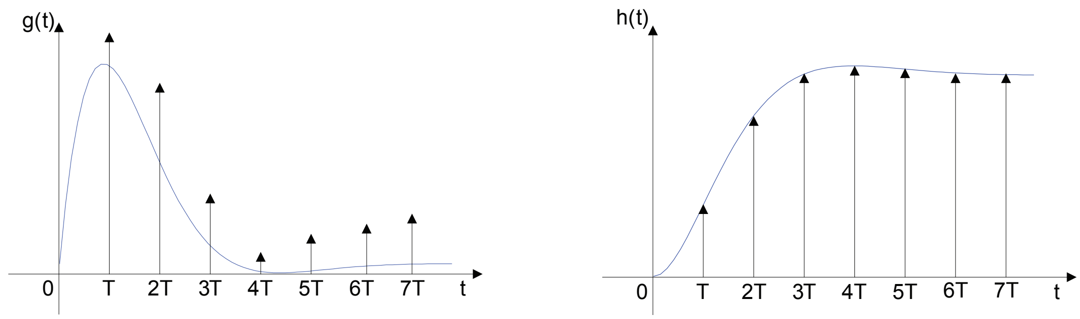
$$G(z) = \frac{-0.50078z^2 + 0.01113z}{z^3 - 1.64569z^2 + 0.78103z - 0.13534}$$

2. Diskretizacija uz očuvanje prijelazne funkcije

Za očuvanje prijelazne funkcije $h(t)$ u diskretnoj domeni, kontinuirani sustav diskretizira se primjenom tzv. ZOH diskretizacije. U nastavku je dana relacija za određivanje odgovarajućeg diskretnog sustava

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \tag{2}$$

Postupak opisan relacijom (2) svodi se na rastav člana $\frac{G(s)}{s}$ na parcijalne razlomke, te se primjenom tablice $\mathcal{Z}$ transformacije (Tablica 1) svaki parcijalni član zasebno prebacuje u diskretnu domenu.



(a) Odzivi na impulsnu pobudu

(b) Odzivi na skokovitu pobudu

Slika 2: Usporedba odziva kontinuiranog i diskretiziranog sustava

Kao što je vidljivo na slici 2, primjenom ZOH diskretizacije očuva se prijelazna funkcija kontinuiranog sustava, dok impulsni odziv nije očuvan.

Primjer 3. Potrebno je diskretizirati kontinuirani sustav zadan prijenosnom funkcijom, metodom koja čuva svojstva prijelazne funkcije. Zadano vrijeme diskretizacije iznosi $T = 100[ms]$.

$$G(s) = \frac{18s + 12}{(s+1)(s+4)}$$

Odgovarajući diskretni sustav određujemo primjenom ZOH diskretizacije

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Prijenosnu funkciju $\frac{G(s)}{s}$ rastavljamo na parcijalne razlomke

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{3}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{5}{s+4}$$

Primjenom tablice $\mathcal{Z}$ transformacije, svaki se član zasebno prebacuje u diskretnu domenu

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{3}{s}\right\} = \frac{3z}{z-1} \qquad \mathcal{Z}\left\{\frac{2}{s+1}\right\} = \frac{2z}{z - 0.90484}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{5}{s+4}\right\} = \frac{5z}{z - 0.67032}$$

Konačno, tražena prijenosna funkcija diskretnog sustava je

$$G(z) = (1 - z^{-1})\left(\frac{3z}{z-1} + \frac{2z}{z - 0.90484} - \frac{5z}{z - 0.67032}\right)$$

$$G(z) = \frac{1.45805z - 1.36457}{z^2 - 1.57565z + 0.60653}$$

Primjer 4. Potrebno je diskretizirati kontinuirani sustav zadan prijenosnom funkcijom, metodom koja čuva svojstva prijelazne funkcije. Zadano vrijeme diskretizacije iznosi $T = 200[ms]$.

$$G(s) = \frac{4s^2 + 4s + 8}{(s+2)(s^2+4)}$$

Odgovarajući diskretni sustav određujemo primjenom ZOH diskretizacije

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Prijenosnu funkciju $\frac{G(s)}{s}$ rastavljamo na parcijalne razlomke

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s^2+4}$$

Primjenom tablice $\mathcal{Z}$ transformacije, svaki se član zasebno prebacuje u diskretnu domenu

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{z}{z-1} \qquad \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = \frac{z}{z-0.67032}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \frac{0.38942z}{z^2 - 1.84212z + 1}$$

Konačno, tražena prijenosna funkcija diskretnog sustava je

$$G(z) = \frac{0.71910z^2 - 1.25777z + 0.59072}{(z - 0.67032)(z^2 - 1.84212z + 1)}$$

Primjer 5. Potrebno je diskretizirati kontinuirani sustav zadan ulazno-izlaznom diferencijalnom jednadžbom, metodom koja čuva svojstva prijelazne funkcije. Zadano vrijeme diskretizacije iznosi $T = 1[s]$.

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u'(t) + 2u(t)$$

Prema ulazno-izlaznoj diferencijalnoj jednadžbi, prijenosna funkcija sustava je

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+1} = \frac{s+2}{(s+1)^2}$$

Odgovarajući diskretni sustav određujemo primjenom ZOH diskretizacije

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Prijenosnu funkciju $\frac{G(s)}{s}$ rastavljamo na parcijalne razlomke

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{2}{s} - \frac{1}{(s+1)^1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

Primjenom tablice $\mathcal{Z}$ transformacije, svaki se član zasebno prebacuje u diskretnu domenu

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{2}{s}\right\} = \frac{2z}{z-1} \qquad \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{(s+1)^1}\right\} = \frac{z}{z-0.36788} \qquad \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = \frac{0.36788z}{(z-0.36788)^2}$$

Konačno, tražena prijenosna funkcija diskretnog sustava je

$$G(z) = \frac{0.8964z - 0.09721}{z^2 - 0.7358z + 0.1353} = 0.8964\frac{z^{-1} - 0.10844^{-2}}{1 - 0.7358z^{-1} + 0.1353z^{-2}}$$

3. Postupak usklađenih polova i nula

Za prijenosnu funkciju zadanog kontinuiranog sustava oblika

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - s_{Ni})}{\prod_{v=1}^{n} (s - s_{pv})} \tag{3}$$

odgovarajuća prijenosna funkcija diskretiziranog sustava je

$$G(z) = K^* \frac{(z+1)^{\max(n-m-1,0)} \prod_{i=1}^{m} (z - z_{Ni})}{\prod_{v=1}^{n} (z - z_{pv})} \tag{4}$$

Pri tome se polovi i nule kontinuiranog sustava preslikavaju u diskretno područje prema zakonu

$$z = e^{sT} \tag{5}$$

U slučaju da je polni višak veći od 1 ($p = n - m > 1$), dodatnih $n - m - 1$ nula postavlja se u $z_N = -1$

$$(z+1)^{\max(n-m-1,0)} \tag{6}$$

Konstanta K^* postavlja se tako da kontinuirani i diskretizirani sustav imaju jednako pojačanje na određenoj frekvenciji s_0

$$\lim_{s \to s_0} G(s) = \lim_{z \to z_0} G(z) \qquad z_0 = e^{s_0 T} \tag{7}$$

U većini se primjena konstanta K^* postavlja tako da polazni kontinuirani i dobiveni diskretni sustav imaju jednako statičko pojačanje

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{z \to 1} G(z) \tag{8}$$

Primjer 6. Potrebno je diskretizirati kontinuirani sustav zadan prijenosnom funkcijom, postupkom usklađenih polova i nula uz zadano vrijeme diskretizacije $T = 500[ms]$. Sustav je potrebno diskretizirati tako da dobiveni diskretni sustav ima jednako statičko pojačanje kao i polazni kontinuirani.

$$G(s) = 10 \frac{s+1}{(s+2)(s+5)}$$

Polovi i nule se u diskretno područje preslikavaju prema relaciji (5)

$$z_N = 0.60663 \qquad z_{p1} = 0.36788 \qquad z_{p2} = 0.08208$$

Kako polni višak nije veći od 1 ($p = 1$) zaključujemo kako nije potrebno postavljati dodatne nule. Diskretna prijenosna funkcija je

$$G(z) = K^* \frac{z - 0.60663}{(z - 0.36788)(z - 0.08208)}$$

Nepoznatu konstantu K^* određujemo iz uvjeta jednakosti statičkog pojačanja kontinuiranog i diskretnog sustava

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{z \to 1} G(z)$$

$$K^* = 1.475$$

Odgovarajući diskretni sustav je

$$G(z) = 1.475 \frac{z - 0.60663}{(z - 0.36788)(z - 0.08208)}$$

Primjer 7. Potrebno je diskretizirati kontinuirani sustav zadan prijenosnom funkcijom postupkom usklađenih polova i nula uz zadano vrijeme diskretizacije $T = 1[s]$. Sustav je potrebno diskretizirati tako da dobiveni diskretni sustav ima jednako statičko pojačanje kao i polazni kontinuirani.

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s^2+s+1)}$$

Polovi i nule kontinuiranog sustava su

$$s_N = -2 \qquad s_{p1,2} = -1 \qquad s_{p3,4} = -0.5 \pm j0.866$$

Polovi i nule diskretnog sustava su

$$z_N = 0.13534 \qquad z_{p1,2} = 0.36788 \qquad z_{p3,4} = 0.39295 \pm j0.46203$$

Kako je polni višak veći od 1 ($p = 3$), postavljaju se dvije dodatne nule ($p - 1 = 2$) u $z_N = -1$. Prijenosna funkcija diskretnog sustava je

$$G(z) = K^* \frac{(z+1)^2(z-0.13534)}{(z-0.36788)^2(z^2-0.7859z+0.36788)}$$

Nepoznatu konstantu K^* određujemo iz uvjeta jednakosti statičkog pojačanja kontinuiranog i diskretnog sustava

$$\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{z\to 1} G(z)$$

$$K^* = 0.135$$

Odgovarajući diskretni sustav je

$$G(z) = 0.135 \frac{(z+1)^2(z-0.13534)}{(z-0.36788)^2(z^2-0.7859z+0.36788)}$$

Primjer 8. Potrebno je diskretizirati kontinuirani sustav zadan prijenosnom funkcijom postupkom usklađenih polova i nula uz zadano vrijeme diskretizacije $T = 200[ms]$. Sustav je potrebno diskretizirati tako da dobiveni diskretni sustav ima jednako pojačanje kao i kontinuirani na frekvenciji $s_0 = -0.5$.

$$G(s) = 100 \frac{s+4}{(s+1)^2(s^2+2s+2)}$$

Polovi i nule diskretnog sustava su

$$z_N = 0.44933 \qquad z_{p1,2} = 0.81873 \qquad z_{p3,4} = 0.80241 \pm j0.16266$$

Kako je polni višak veći od 1 ($p = 3$), postavljaju se dvije dodatne nule ($p - 1 = 2$) u $z_N = -1$. Prijenosna funkcija diskretnog sustava je

$$G(z) = K^* \frac{(z+1)^2(z-0.44933)}{(z-0.81873)^2(z^2-1.60482z+0.67032)}$$

Nepoznatu konstantu K^* određujemo iz uvjeta jednakosti statičkog pojačanja kontinuiranog i diskretnog sustava

$$\lim_{s\to -3} G(s) = \lim_{z\to z_0} G(z) \qquad z_0 = e^{s_0 T} = 0.90484$$

$$K^* = 0.185$$

Odgovarajući diskretni sustav je

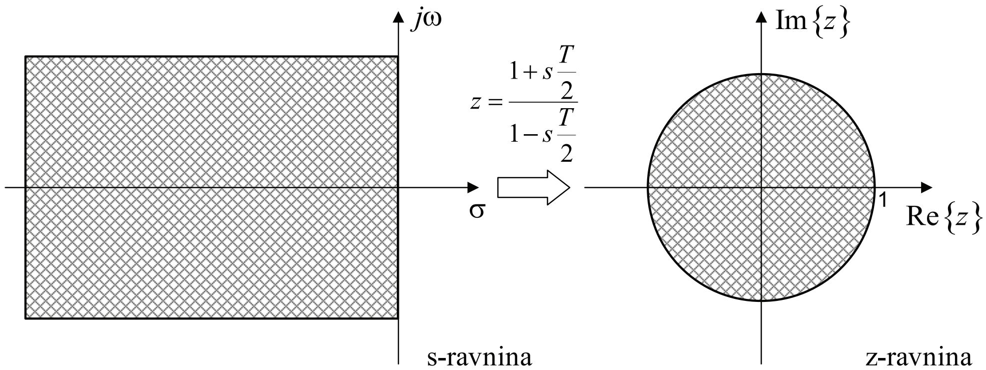
$$G(z) = 0.185 \frac{(z+1)^2(z-0.44933)}{(z-0.81873)^2(z^2-1.60482z+0.67032)}$$

4. Diskretizacija primjenom Tustinove supstitucije

Diskretizacija primjenom Tustinove supstitucije[1], kao što i sam naziv kaže, provodi se primjenom supstitucije, prikazane u nastavku

$$z = \frac{1 + s\frac{T}{2}}{1 - s\frac{T}{2}}, \qquad s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \tag{9}$$

Metoda je specifična po tome što se primjenom ovog tipa diskretizacije čuvaju svojstva frekvencijske karakteristike (amplituda i faza) na frekvenciji $\omega = 0$.



Slika 3: Preslikavanje polova i nula Tustinovom supstitucijom

Ukoliko se želi osigurati podudaranje frekvencijske karakteristike kontinuiranog i diskretiziranog sustava na nekoj proizvoljnoj frekvenciji $\omega = \omega_0$ različitoj od nula, tada se kontinuirani sustav diskretizira Tustinovom prewarp metodom

$$s = \frac{\omega_0}{\tan(\omega_0 \frac{T}{2})}\frac{z-1}{z+1} \tag{10}$$

Osim prijenosa frekvencijskih svojstava na određenoj frekvenciji, diskretizacija Tustinovom supstitucijom prenosi i stabilnost kontinuiranog sustava, odnosno ako je kontinuirani sustav stabilan tada će i odgovarajući diskretni sustav biti stabilan. Tustinova supstitucija uglavnom se koristi pri diskretizaciji kontinuiranih regulatora.

Primjer 9. Potrebno je diskretizirati idealni kontinuirani PID regulator primjenom Tustinove supstitucije, uz zadano vrijeme uzorkovanja $T = 100[ms]$. Prijenosna funkcija regulatora je

$$G_R(s) = K_R(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s)$$

Zadani su pojačanje, te integralna i derivacijska vremenska konstanta regulatora

$$K_R = \frac{1}{3} \qquad T_I = 0.01[s] \qquad T_D = 0.05[s]$$

Regulator se diskretizira uvođenjem supstitucije

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = 20\frac{z-1}{z+1}$$

Odgovarajući diskretni regulator je

$$G_R(z) = \frac{1}{3}(1 + \frac{z+1}{z-1} + \frac{z-1}{z+1})$$

$$G_R(z) = \frac{z^2 + 0.33334}{z^2 - 1} = \frac{1 + 0.33334z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

[1] Diskretizacija Tustinovom supstitucijom nosi još i naziv trapezna integracija

Primjer 10. Potrebno je diskretizirati kontinuirani PI regulator primjenom Tustinove prewarp metode, uz zadano vrijeme uzorkovanja $T = \pi[s]$ i frekvenciju $\omega_0 = 0.5[s^{-1}]$. Prijenosna funkcija regulatora je

$$G_R(s) = K_R(1 + \frac{1}{T_I s}) = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s}$$

Zadani su pojačanje i integralna vremenska konstanta regulatora

$$K_R = 10 \qquad T_I = 2[s]$$

Regulator se diskretizira uvođenjem supstitucije

$$s = \frac{\omega_0}{\tan(\omega_0 \frac{T}{2})} \frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{2} \frac{z-1}{z+1}$$

Odgovarajući diskretni regulator je

$$G_R(z) = 10(1 + \frac{z+1}{z-1})$$

$$G_R(z) = \frac{20z}{z-1} = \frac{20}{1-z^{-1}}$$

Primjer 11. Potrebno je diskretizirati kontinuirani PI regulator primjenom Tustinove prewarp metode, uz zadano vrijeme uzorkovanja $T = 2[s]$. Dodatni uvjet pri diskretizaciji regulatora je da nema pomaka frekvencije na kojoj je pojačanje regulatora jednako $A = 0[dB]$. Prijenosna funkcija regulatora je

$$G_R(s) = K_R(1 + \frac{1}{T_I s}) = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s}$$

Zadani su pojačanje i integralna vremenska konstanta regulatora

$$K_R = 3 \qquad T_I = 1[s]$$

Frekvencijska karakteristika regulatora je

$$G(j\omega) = K_R \frac{1 + j\omega T_I}{j\omega T_I}$$

Amplitudno-frekvencijska karakteristika regulatora je

$$|G(j\omega)| = \frac{K_R}{\omega T_I} \sqrt{1 + (\omega T_I)^2}$$

Tražimo frekvenciju na kojoj je linearno pojačanje regulatora jednako $|G(j\omega)| = 1$

$$\frac{K_R}{\omega_0 T_I} \sqrt{1 + (\omega_0 T_I)^2} = 1 \rightarrow \omega_0 = 1.05[s^{-1}]$$

Supstitucija prema kojoj će se diskretizirati zadani regulator je

$$s = \frac{\omega_0}{\tan(\omega_0 \frac{T}{2})} \frac{z-1}{z+1} = 0.60230 \frac{z-1}{z+1}$$

Odgovarajući diskretni regulator je

$$G_R(z) = 3(1 + 1.66 \frac{z+1}{z-1})$$

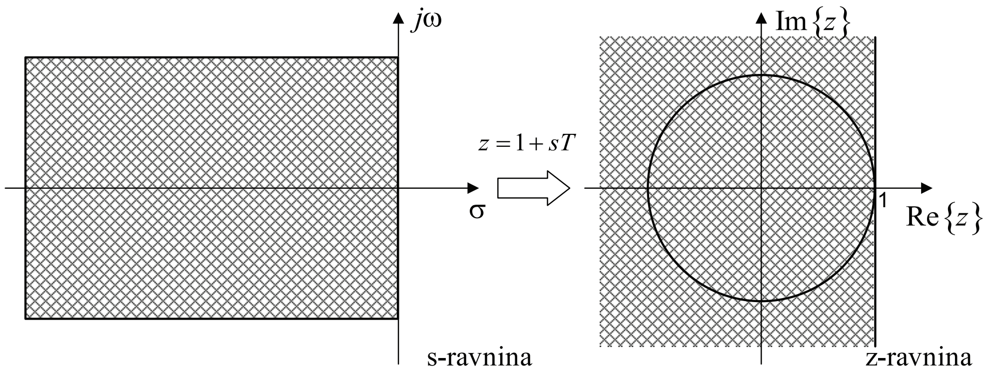
$$G_R(z) = 8 \frac{z + 0.25}{z-1} = 8 \frac{1 + 0.25z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

5. Diskretizacija aproksimacijom derivacije Eulerovom unaprijednom diferencijom

Diskretizacija aproksimacijom derivacije Eulerovom unaprijednom diferencijom provodi se primjenom supstitucije prikazane u nastavku

$$z = 1 + sT, \qquad s = \frac{z-1}{T} \tag{11}$$

Diskretizacija aproksimacijom unaprijednom diferencijom degradira frekvencijsku karakteristiku kontinuiranog sustava jer se imaginarna os s-ravnine ne preslikava u jediničnu kružnicu, već u pravac paralelan imaginarnoj osi z-ravnine, a prolazi točkom $z = +1$ (Slika 4).



Slika 4: Preslikavanje polova i nula Eulerovom unaprijednom diferencijom

Ova se metoda u većini slučajeva izbjegava jer je moguća i destabilizacija stabilnog kontinuiranog sustava. Naime, po zakonu preslikavanja iskazanom relacijom (11), polovi i nule kontinuiranog sustava mogu se preslikati i izvan jedinične kružnice, što dovodi do nestabilnosti diskretiziranog sustava, zbog čega se diskretizacija ovom metodom uglavnom izbjegava. Ovakvi se problemi mogu izbjeći uz dovoljno malo vrijeme uzorkovanja.

Primjer 12. Potrebno je diskretizirati kontinuirani PI regulator primjenom diskretizacije aproksimacijom unaprijednom diferencijom, uz zadano vrijeme uzorkovanja $T = 1[s]$. Prijenosna funkcija regulatora je

$$G_R(s) = K_R(1 + \frac{1}{T_I s}) = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s}$$

Zadani su pojačanje i integralna vremenska konstanta regulatora

$$K_R = 2 \qquad T_I = 0.5[s]$$

Supstitucija prema kojoj će se diskretizirati zadani regulator je

$$s = \frac{z-1}{T} = \frac{z-1}{1}$$

Odgovarajući diskretni regulator je

$$G_R(z) = 2(1 + 2\frac{1}{z-1})$$

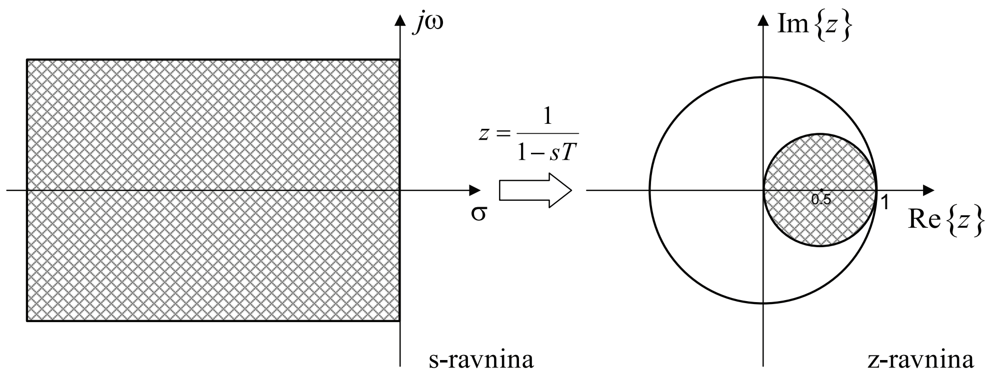
$$G_R(z) = 2\frac{z+1}{z-1} = 2\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

6. Diskretizacija aproksimacijom derivacije Eulerovom unazadnom diferencijom

Diskretizacija aproksimacijom derivacije Eulerovom unazadnom diferencijom provodi se primjenom supstitucije prikazane u nastavku

$$z = \frac{1}{1 - sT}, \qquad s = \frac{z - 1}{zT} \tag{12}$$

Diskretizacija aproksimacijom unazadnom diferencijom, kao i diskretizacija unaprijednom diferencijom, degradira frekvencijsku karakteristiku kontinuiranog sustava jer se imaginarna os s-ravnine ne preslikava u jediničnu kružnicu, već u kružnicu polumjera $r = 0.5$, sa središtem u $z = 0.5$ (Slika 5).



Slika 5: Preslikavanje polova i nula Eulerovom unazadnom diferencijom

Za razliku od aproksimacije unaprijednom diferencijom, ovom metodom nije moguća destabilizacija kontinuiranog sustava, jer se prema zakonu preslikavanja iskazanom relacijom (12) polovi i nule kontinuiranog sustava ne mogu preslikati izvan jedinične kružnice. Diskretizacija ovim postupkom uglavnom se ne koristi, osim za dovoljno mala vremena uzorkovanja kada ova metoda daje dovoljno dobre rezultate kao npr. diskretizacija Tustinovom supstitucijom.

Primjer 13. Potrebno je diskretizirati kontinuirani PI regulator primjenom diskretizacije aproksimacijom unazadnom diferencijom, uz zadano vrijeme uzorkovanja $T = 1[s]$. Prijenosna funkcija regulatora je

$$G_R(s) = K_R(1 + \frac{1}{T_I s}) = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s}$$

Zadani su pojačanje i integralna vremenska konstanta regulatora

$$K_R = 2 \qquad T_I = 1[s]$$

Supstitucija prema kojoj će se diskretizirati zadani regulator je

$$s = \frac{z - 1}{zT} = \frac{z - 1}{z}$$

Odgovarajući diskretni regulator je

$$G_R(z) = 2(1 + \frac{z}{z - 1})$$

$$G_R(z) = 4\frac{z - 0.5}{z - 1} = 4\frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

LITERATURA

[1] Z. Vukić, Lj. Kuljača, *Automatsko upravljanje - analiza linearnih sustava*, Kigen, Zagreb, 2005.

[2] N. Perić, Z. Vukić, M. Baotić i M. Vašak, *Automatsko upravljanje - Predavanja*

[3] Ž. Ban, *Modeliranje i simuliranje sustava - Predavanja*