



5. domaća zadaća

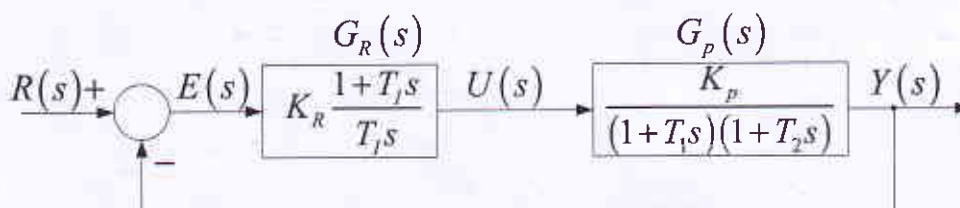
Diskretni sustavi upravljanja

PRIPREMA ZA VJEŽBU



ZADATAK 1

Zadan je sustav upravljanja s analognim regulatorom prikazan blokovskom shemom na Slici 1. Parametri



Slika 1: Sustav upravljanja s analognim regulatorom.

procesa prikazanog prijenosnom funkcijom $G_p(s)$ su: $K_p = 3$, $T_1 = 1$ s, $T_2 = 0.3$ s. Integralnom vremenskom konstantom T_I regulatora prijenosne funkcije $G_R(s)$ kompenzira se dominantna vremenska konstanta procesa, tj. $T_I = T_1$.

- Odredite pojačanje K_R regulatora tako da fazno osiguranje γ iznosi 60° .
- Analogno izvedeni regulator zamjenjuje se vremenski diskretnim regulatorom implementiranim u digitalnom računalu. Blokovskom shemom u vremenski kontinuiranoj domeni prikažite nastali vremenski diskretni sustav upravljanja. Na blokovskoj shemi naznačite blokove kojima se modeliraju A/D pretvornik, digitalno računalo, te D/A pretvornik.
- Odredite preporučeni raspon iznosa vremena uzorkovanja T ovog diskretnog sustava upravljanja korištenjem preporuke za određivanje vremena uzorkovanja na temelju frekvencijskih karakteristika otvorenog vremenski kontinuiranog regulacijskog kruga. Nakon toga odaberite jedno od ponuđenih vremena:

I) $T = 1$ ms; II) $T = 10$ ms; III) $T = 100$ ms; IV) $T = 1000$ ms.

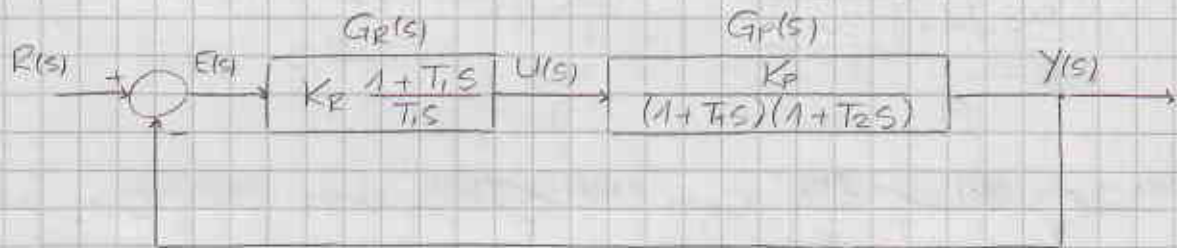
- Emulacijom kontinuiranog regulatora $G_R(s)$ dobivenog pod a), uz vrijeme uzorkovanja odabrano pod c), odredite diskretni regulator. Pritom koristite:

- Tustinovu relaciju;
- Aproksimaciju derivacije Eulerovom unaprijednom diferencijom;
- Aproksimaciju derivacije Eulerovom unazadnom diferencijom.

Za sva tri slučaja odredite prijenosnu funkciju regulatora $G_R(z)$ i pripadni rekurzivni algoritam.

- Vremenski diskretni sustav upravljanja prikažite blokovskom shemom u vremenski diskretnoj domeni. Kako glasi prijenosna funkcija procesa $G_p(z)$?
- Ispitajte stabilnost dobivenog diskretnog sustava upravljanja pomoću Juryjeva kriterija, za slučaj regulatora $G_R(z)$ dobivenog postupkom diskretizacije pod d)I) (diskretizacija Tustinovom relacijom). Napomena: obavite pokratu bliskog pola i nule prijenosne funkcije otvorenog kruga $G_o(z)$.

• ZADATAK 1



ZADANO JE: $K_P = 3$, $T_1 = 1 \text{ s}$, $T_2 = 0.3 \text{ s}$, $T_1 = T_2$

(a) $\gamma = 60^\circ$

$$G_O(s) = K_R K_P \frac{1 + T_1 s}{T_1 s (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

$$G_O(s) = K_R \cdot 3 \frac{(1 + s)}{s(1 + s)(1 + 0.3s)}$$

$$G_O(s) = 3K_R \frac{1}{s(1 + 0.3s)}$$

FAZNO OSIGURANJE JE DEFINIRANO KAO

$$\gamma = \pi + \arg[G_O(j\omega_c)] \quad (5.1)$$

KRITIČNU FREKVENCIJU ω_c DEFINIRAMO KAO

$$|G_O(j\omega_c)| = 1 \quad (5.2)$$

IZ RELACIJE (5.1) RAČUNAMO KRITIČNU FREKVENCIJU ω_c

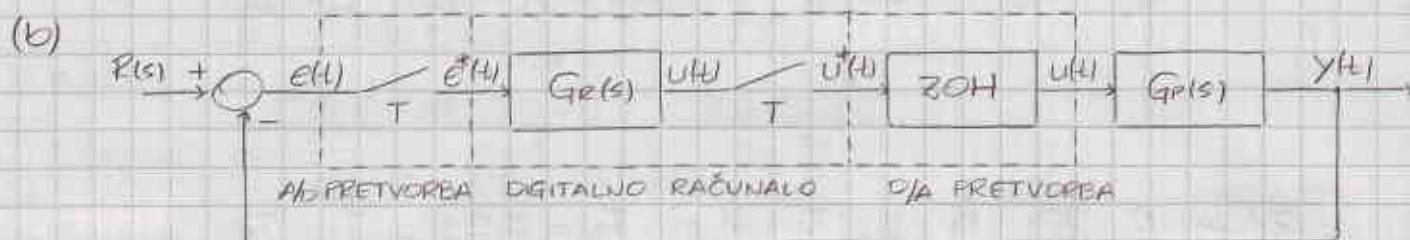
$$\underbrace{\arctg \frac{0}{3K_R}}_{=0} - \underbrace{\arctg \frac{\omega_c}{0}}_{=\frac{\pi}{2}} - \arctg \frac{0.3\omega_c}{1} = \gamma - \pi$$

$$- \arctg(0.3\omega_c) = \gamma - \frac{\pi}{2} \rightarrow \omega_c = \frac{10}{3} \lg(30^\circ)$$

$$\omega_c = 1.925 \text{ s}^{-1}$$

IZ RELACIJE (5.2) RAČUNAMO REGULACIJSKU KONSTANTU K_R

$$\frac{3K_R}{\omega_c \sqrt{1 + (0.3\omega_c)^2}} = 1 \rightarrow K_R = \frac{20}{27} = 0.74074$$



(c) NA TEMELJU FREKVENCIJSKIH KARAKTERISTIKA OTVORENOG VREMENSKI KONTINUIRANOG REGULACIJSKOG KRUGA

$$T = (0.17 \div 0.34) \frac{1}{\omega_c} [s] \quad (5.3)$$

$$T = 88.33 \div 176.67 [ms]$$

TRAŽENO VRIJEME OTIŠKANJA: III) $T = 100 ms$

(d) $K_R = 0.741$, $T_1 = 1 s$, $T = 0.1 s$

$$G_P(s) = 0.74074 \frac{1+s}{s}$$

(1) TUSTINOVA RELACIJA $(s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1})$

$$G_R(z) = 0.74074 \frac{1 + \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = 0.74047 \frac{\frac{T(z+1) + 2(z-1)}{T(z+1)}}{\frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

$$G_R(z) = 0.74047 \frac{T(z+1) + 2(z-1)}{2(z-1)} = 0.77749 \frac{1 - 0.90496z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

REKURZIVNI ALGORITAM:

$$u(k) - u(k-1) = 0.77749 e(k) - 0.70344 e(k-1)$$

(2) APROKSIMACIJA DERIVACIJE EULEROVOM UNAPRIJEDNOM DIFERENCIJOM ($s = \frac{z-1}{T}$)

$$G_R(z) = 0.74074 \frac{1 + \frac{z-1}{T}}{\frac{z-1}{T}} = 0.74074 \frac{1 - 0.9z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

REKURZIVNI ALGORITAM:

$$u(k) - u(k-1) = 0.74074 e(k) - 0.66667 e(k-1)$$

(3) APROKSIMACIJA DERIVACIJE EULEROVOM UNAZADNOM DIFERENCIJOM ($s = \frac{z-1}{Tz}$)

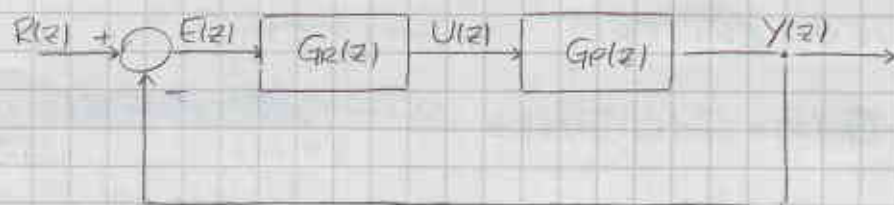
$$G_R(z) = 0.74074 \frac{1 + \frac{z-1}{Tz}}{\frac{z-1}{Tz}} = 0.74074 \frac{z(T+1) - 1}{z-1}$$

$$G_R(z) = 0.81481 \frac{1 - 0.90909z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

REKURZIVNI ALGORITAM:

$$u(k) - u(k-1) = 0.81481 e(k) - 0.74074 e(k-1)$$

(e)



PROCES $G_P(s)$ DISKRETIZIRAMO ZOH DISKRETIZACIJOM (OČUVANJE SVOJSTAVA PRITELAZNE FUNKCIJE)

$$G_P(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_P(s)}{s} \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{3}{s(1+s)(1+0.3s)} \right\}$$

KORISTEĆU RELACIJU $\frac{k}{s+a} \rightarrow k \frac{z}{z - e^{-aT}}$ TRAŽIMO ODGOVARAJUĆU Z-TRANSFORMACIJU

RASTAVLJAMO $\frac{G_p(s)}{s}$ NA PARCIJALNE RAZLOMKE

$$\frac{G_p(s)}{s} = \frac{10}{s(s+1)(s+\frac{10}{3})} = \frac{C_{M1}}{s} + \frac{C_{M2}}{s+1} + \frac{C_{M3}}{s+\frac{10}{3}}$$

$$C_{M1} = 3, C_{M2} = -4.28571, C_{M3} = 1.28571$$

$$= \frac{3}{s} - \frac{4.28571}{s+1} + \frac{1.28571}{s+\frac{10}{3}}$$

$$\frac{3}{s} \rightarrow \frac{3z}{z-1}$$

$$\frac{4.28571}{s+1} \rightarrow \frac{4.28571z}{z-0.90488}$$

$$\frac{1.28571}{s+\frac{10}{3}} \rightarrow \frac{1.28571z}{z-0.71653}$$

KONAČNO DOBIVEMO:

$$G_p(z) = \frac{z-1}{z} \left(\frac{3z}{z-1} - \frac{4.28571z}{z-0.90488} + \frac{1.28571z}{z-0.71653} \right)$$

$$G_p(z) = \frac{0.04320z + 0.03769}{z^2 - 1.62141z + 0.64837}$$

(f) TURJEV KRITERIJ STABILNOSTI

$$G_0(z) = G_R(z)G_p(z) = \frac{0.77749(z-0.90476)}{(z-1)} \cdot \frac{0.04320(z+0.87245)}{(z-0.90489)(z-0.71651)}$$

$$G_0(z) = \frac{0.03359z + 0.02930}{z^2 - 1.71651z + 0.71651}$$

KARAKTERISTIČNA JEDNADŽBA JE:

$$f(z) = z^2 - 1.68292z + 0.74581$$

KRITERIJI STABILNOSTI:

$$(1) f(1) > 0, (-1)^n f(-1) > 0$$

$$f(1) = 0.06289 > 0, \quad T$$

$$(-1)^2 f(-1) = 3.42873 > 0, \quad T$$

(2) FORMIRAMO TABLICU

REDAK	z^0	z^1	z^2
1	0.74581	-1.68292	1
2	1	-1.68292	0.74581

$$|a_0| < |a_n|, \quad T$$

• SUSTAV JE STABILAN

$$(g) \text{ SUPSTITUCIJA JE } z = \frac{1 + \Omega \frac{T}{2}}{1 - \Omega \frac{T}{2}}$$

$$G_0(z) = \frac{0.03359 (z + 0.87228)}{(z - 0.71651)(z - 1)}$$

NAKON SUPSTITUCIJE DOBITEMO

$$G_0(\Omega) = 2.21842 \frac{\left(1 + \frac{\Omega}{293.00156}\right) \left(1 - \frac{\Omega}{20}\right)}{\Omega \left(1 + \frac{\Omega}{3.30292}\right)}$$

AMPLITUDNO - FREKVENCijsKA KARAKTERISTIKA:

$$|G_o(j\omega^*)| = 2.21842 \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega^*}{293.00156}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega^*}{20}\right)^2}}{\omega^* \sqrt{1 + \left(\frac{\omega^*}{3.30292}\right)^2}}$$

FAZNO - FREKVENCijsKA KARAKTERISTIKA

$$\phi(\omega^*) = -\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{\omega^*}{293.00156} - \arctg \frac{\omega^*}{20} - \arctg \frac{\omega^*}{3.30292}$$

(h) BODEOV DIAGRAM

$$A(\omega)_{dB} = -20 \log \frac{\omega}{2.21842} + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{293.00156}\right)^2} + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{20}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{3.30292}\right)^2}$$

$$\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{\omega}{293.00156} - \arctg \frac{\omega}{20} - \arctg \frac{\omega}{3.30292}$$

$$|G_o(j\omega_c^*)| = 1 \rightarrow \omega_c = 1.9077 \rightarrow \phi(\omega_c) = -125^\circ$$

$$\text{FAZNO OSIGURANJE TE: } \gamma = \pi + \phi(\omega_c) = 55^\circ$$

RELATIVNA STABILNOST TE NARUŠENA UVODENJEM DIGITALNOG RAČUNALA - FAZNO OSIGURANJE SE SMANJILO

BODEOV DIAGRAM:

