GULIN MARKO 0036428227	Fakultet elektrotehnike i računarstva Zagreb Zavod za ARI **AUTOMATSKO UPRAVLJANJE** 3. Domaća zadaća: FREKVENCIJSKE KARAKTERISTIKE SUSTAVA, POLOVI I NULE SUSTAVA	12. studenog 2009.

1. Zadatak: Za sustav opisan prijenosnom funkcijom

$$G(s) = 500\frac{s+0.1}{(s+5)(s+20)}$$

a) *Nacrtajte Bodeov dijagram koristeći aproksimacije pravcima;*

Frekvencijska karakteristika sustava je

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}, \qquad G(j\omega) = 500\frac{0.1+j\omega}{(5+j\omega)(20+j\omega)}$$

Dobivenu frekvencijsku karakteristiku pretvaramo u oblik pogodan za crtanje Bodeovog dijagrama

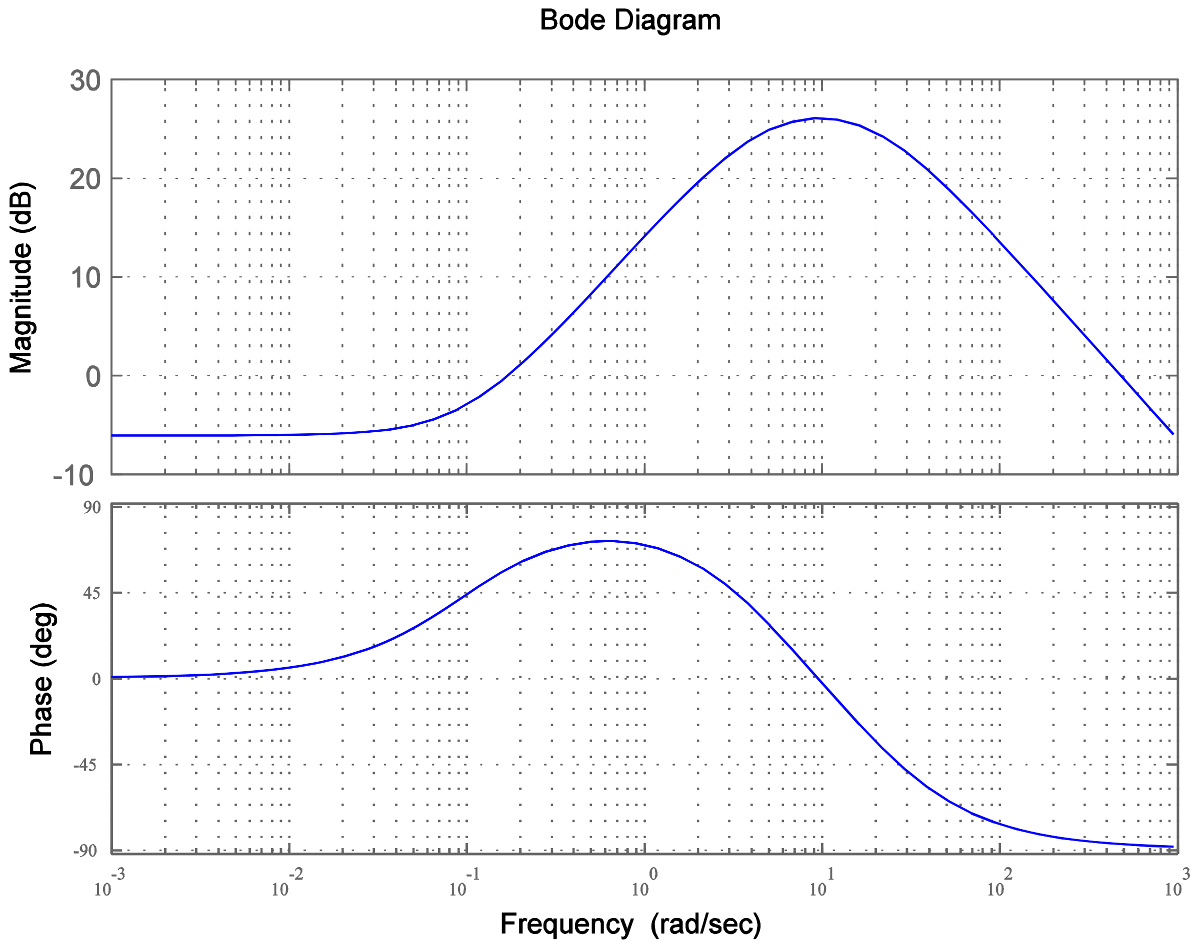
$$G(j\omega) = 0.5\frac{\left(1+j\frac{\omega}{0.1}\right)}{\left(1+j\frac{\omega}{5}\right)\left(1+j\frac{\omega}{20}\right)}$$

Amplitudna karakteristika je

$$A(\omega) = 20\log 0.5 + \underbrace{20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{0.1}\right)^2}}_{1} - \underbrace{20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{5}\right)^2}}_{2} - \underbrace{20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{20}\right)^2}}_{3}\ [dB]$$

Fazna karakteristika je

$$\varphi(\omega) = \underbrace{\tan^{-1}\frac{\omega}{0.1}}_{1} - \underbrace{\tan^{-1}\frac{\omega}{5}}_{2} - \underbrace{\tan^{-1}\frac{\omega}{20}}_{3}\ [rad]$$



Slika 3.1. Bodeov dijagram zadanog sustava

b) Nacrtajte Nyquistov dijagram na temelju Bodeovog dijagrama te analize realnog i imaginarnog dijela funkcije $G(j\omega)$;

Frekvencijsku karakteristiku možemo zapisati u obliku

$$G(j\omega) = \underbrace{Re\{G(j\omega)\}}_{R(\omega)} + j\,\underbrace{Im\{G(j\omega)\}}_{I(\omega)}$$

odnosno

$$G(j\omega) = 500\frac{0.1 + j\omega}{(100 - \omega^2) + j(25\omega)}$$

$$G(j\omega) = G(j\omega) = \underbrace{500\frac{24.9\omega^2 + 10}{\omega^4 + 425\omega^2 + 10000}}_{R(\omega)} + j\,\underbrace{500\frac{-\omega^3 + 97.5\omega}{\omega^4 + 425\omega^2 + 10000}}_{I(\omega)}$$

Određujemo početnu i konačnu vrijednost realnog i imaginarnog dijela frekvencijske karakteristike.

Početne vrijednosti realnog i imaginarnog dijela su

$$\lim_{\omega \to \infty} R(\omega) = 0, \qquad \lim_{\omega \to \infty} I(\omega) = 0$$

Konačne vrijednosti realnog i imaginarnog dijela su

$$\lim_{\omega \to 0} R(\omega) = 0.5, \qquad \lim_{\omega \to 0} I(\omega) = 0$$

Frekvencije na kojima su realni i imaginarni dijelove frekvencijske karakteristike jednaki nuli su

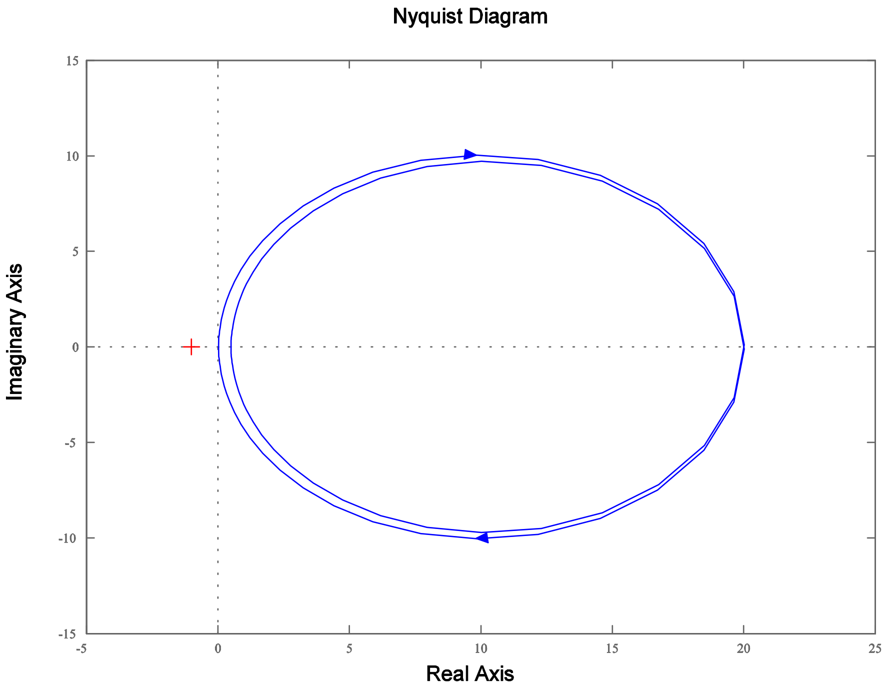
$$R(\omega_0) = 0 \rightarrow \omega_0 \notin \mathbb{R}$$

$$I(\omega_0) = 0 \rightarrow \ \omega_0 = 9.8742 \ [s^{-1}] \rightarrow R(\omega_0) = 20$$

Kut upada određujemo iz Bodeovog dijagrama

$$\lim_{\omega \to \infty} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Na slici 3.2 prikazan je Nyquistov dijagram zadanog sustava



Slika 3.2. Nyquistov dijagram zadanog sustava

c) *Analitički odredite frekvenciju ω_0 i fazni pomak φ ako je pobuda $u(t) = 2\,sin(\omega_0 t + \varphi)$ a odziv u ustaljenom stanju $y(t) = 2\,sin(\omega_0 t)$.*

Amplituda izlaznog signala sustava pobuđenog harmonijskom pobudom određena je izrazom

$$Y = U \cdot |G(j\omega)|\big|_{\omega=\omega_0}$$

Prema tome, zaključujemo kako je pojačanje sustava na frekvenciji ω_0 jednako 1, odnosno

$$|G(j\omega)| = 500 \frac{\sqrt{0.01 + \omega^2}}{\sqrt{25 + \omega^2}\sqrt{400 + \omega^2}}, \qquad 500 \frac{\sqrt{0.01 + \omega_0^2}}{\sqrt{25 + \omega_0^2}\sqrt{400 + \omega_0^2}} = 1$$

$$\omega_0^4 - 249575\omega_0^2 + 7500 = 0 \rightarrow \omega_{0,1} = 499.574\ [s^{-1}], \qquad \omega_{0,2} = 0.1733525\ [s^{-1}]$$

Fazna karakteristika sustava je

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{0.1} - \tan^{-1}\frac{\omega}{5} - \tan^{-1}\frac{\omega}{20}\ [rad]$$

Faza sustava na dobivenim frekvencijama je

$$\varphi(\omega_{0,1}) = -1.52097\ [rad], \qquad \varphi(\omega_{0,1}) = -87.145°$$

$$\varphi(\omega_{0,2}) = +1.00424\ [rad], \qquad \varphi(\omega_{0,2}) = +57.539°$$

Faza ulaznog signala je

$$0 = \varphi_u + \varphi(\omega_0), \qquad \varphi_{u1} = 87.145°, \qquad \varphi_{u2} = -57.539°$$

d) Koliko rješenja ima zadatak pod c)? Za svako rješenje na nacrtanom Bodeovom dijagramu označite frekvenciju ω_0 dobivenu pod c) i očitajte $A(\omega_0)_{dB}$ te $\varphi(\omega_0)$;

Zadatak pod c) ima dva rješenja

$$\omega_{0,1} = 499.574\ [s^{-1}], \qquad \omega_{0,2} = 0.1733525\ [s^{-1}]$$

Teoretski, amplitudno pojačanje $A(\omega)_{dB}$ na dobivenim frekvencijama trebalo bi biti 0 $[dB]$, jer je

$$|G(j\omega_0)| = 1 \rightarrow A(\omega_0) = 20\log|G(j\omega_0)| = 0$$

Naravno, na nacrtanom grafu to možda neće biti slučaj jer se koristila aproksimacija pravcima.

e) Za svako rješenje zadatka pod c) na nacrtanom Nyquistovu dijagramu označite $G(j\omega_0)$, $|G(j\omega_0)|$ i $arg[G(j\omega_0)]$.

Realni i imaginarni dio frekvencijske karakteristike na frekvencijama $\omega_{0,1}$ i $\omega_{0,2}$ iznose

$$R(\omega_{0,1}) = 0.0498, \qquad I(\omega_{0,1}) = -0.9987592064$$

$$R(\omega_{0,2}) = 0.536728, \qquad I(\omega_{0,2}) = 0.8437552867$$

2. Zadatak: Za sustav opisan prijenosnom funkcijom

$$G(s) = 500\frac{as + 0.1}{(s+5)(s+20)}$$

pri čemu je a parametar,

a) *Odredite prijelaznu i težinsku funkciju , $h(t)$ i $g(t)$;*

Prijelaznu funkciju definiramo kao odziv sustava na skokovitu pobudu, odnosno

$$H(s) = \frac{1}{s}G(s), \qquad H(s) = 500\frac{as + 0.1}{s(s+5)(s+20)}$$

Laplaceovu transformaciju prijelazne funkcije $H(s)$ na parcijalne razlomke

$$H(s) = \frac{C_{11}}{s} + \frac{C_{21}}{s+5} + \frac{C_{31}}{s+20}$$

pri čemu je

$$C_{11} = H(s) \cdot s|_{s=0} = 0.5$$

$$C_{21} = H(s) \cdot (s+5)|_{s=-5} = \frac{100}{3}(a - 0.02)$$

$$C_{31} = H(s) \cdot (s+20)|_{s=-20} = -\frac{100}{3}(a - 0.005)$$

Prema tome, Laplaceova transformacija prijelazne funkcije sustava $H(s)$ je

$$H(s) = \frac{0.5}{s} + \frac{\frac{100}{3}(a - 0.02)}{s+5} + \frac{-\frac{100}{3}(a - 0.005)}{s+20}$$

odnosno, prijelazna funkcija sustava je

$$h(t) = \left(0.5 + \frac{100}{3}(a - 0.02)e^{-5t} - \frac{100}{3}(a - 0.005)e^{-20t}\right)\mu(t)$$

Težinsku funkciju sustava određujemo iz prijelazne funkcije

$$g(t) = \frac{d}{dt}h(t), \qquad g(t) = \left(-\frac{500}{3}(a - 0.02)e^{-5t} + \frac{2000}{3}(a - 0.005)e^{-20t}\right)\mu(t)$$

b) *Odredite iznose parametra* a *za koje se ne vide svi prirodni modovi sustava u* $h(t)$. *Objasnite zašto;*

Opća homogena jednadžba sustava n-tog reda s jednostrukim karakterističnim frekvencijama (polovima sustava) dana je sljedećim izrazom

$$y_h(t) = C_1 e^{s_{p1}t} + C_2 e^{s_{p1}t} + \cdots + C_n e^{s_{pn}t}$$

pri čemu su $s_{p1}, s_{p2}, \dots, s_{pn}$ polovi sustava a $e^{s_{p1}t}, e^{s_{p2}t}, \dots, e^{s_{pn}t}$ prirodni modovi sustava.

Prema tome, vrijednosti parametra a za koje se ne vide prirodni modovi su

$$\frac{100}{3}(a-0.02)=0 \to a=0.02, \qquad -\frac{100}{3}(a-0.005)=0 \to a=0.005$$

Ako promotrimo Laplaceovu transformaciju prijelazne funkcije sustava za dobivene parametre a

$$H(s)|_{a=0.02}=\frac{10}{s(s+20)}, \qquad H(s)|_{a=0.005}=\frac{0.25}{s(s+5)}$$

primjećujemo kako se nula i pol pokrate, te je upravo to razlog što u konačnom odzivu ne vidimo mod sustava. To što u konačnom odzivu ne vidimo mod sustava ne znači da on ne postoji.

c) *Odredite raspon iznosa $a>0$ za koje prijelazna funkcija $h(t)$ ima nadvišenje. U kompleksnoj s-ravnini prikažite raspored polova i nula sustava za slučaj kada nadvišenje postoji, za slučaj kada ono ne postoji, te za granični slučaj;*

Ako postoje nultočke funkcije

$$z(t)=h(t)-h_\infty$$

tada sustav ima nadvišenje.

Stacionarno stanje prijelazne funkcije je

$$h_\infty=\lim_{s\to 0} sH(s)=0.5$$

Prema tome, funkcija $z(t)$ je

$$z(t)=\left(\frac{100}{3}(a-0.02)e^{-5t}-\frac{100}{3}(a-0.005)e^{-20t}\right)\mu(t)$$

Tražimo nultočke funkcije $z(t)$

$$\frac{100}{3}(a-0.02)e^{-5t}-\frac{100}{3}(a-0.005)e^{-20t}=0$$

$$t=\frac{1}{15}\ln\frac{a-0.005}{a-0.02}$$

Da bi postojalo nadvišenje, vrijeme t mora biti veće od 0, odnosno

$$\frac{a-0.005}{a-0.02}>1, \qquad \frac{0.015}{a-0.02}>0 \to a>0.02$$

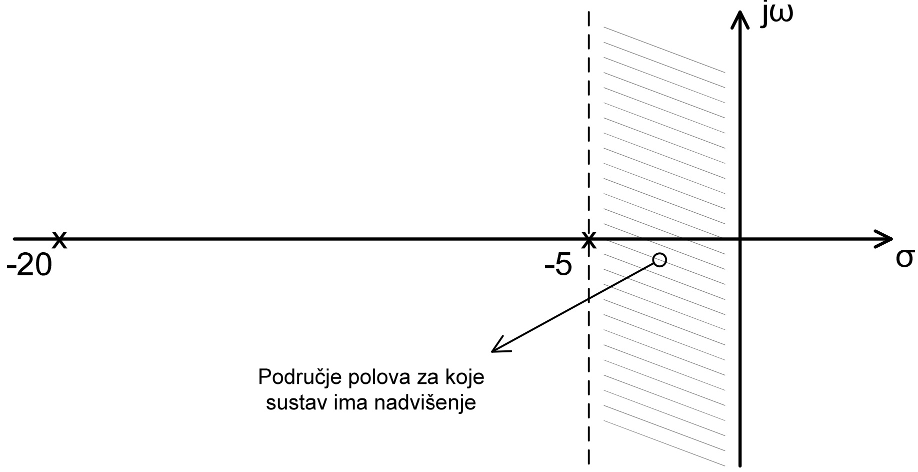
Konačno, dopušteni raspon parametra a je

$$a\in\langle 0.02,+\infty\rangle$$

Nule sustava se tada nalaze u rasponu

$$s_N\in\langle -5,0\rangle$$

Na slici 3.3 prikazan je raspored polova i nula sustava u ovisnosti o parametru a.



Slika 3.3. Raspored nula i polova zadanog sustava

d) Pokažite analitički, na temelju $h(t)$ i $g(t)$, da za svaki $a < 0$ prijelazna funkcija ima podbačaj.

Funkcija $h(t)$ će imati podbačaj ako vrijedi

$$h'(0) < 0$$

Derivacija funkcije $h(t)$ u nuli je

$$h'(0) = g(0) = -\frac{500}{3}(a - 0.02) + \frac{2000}{3}(a - 0.005) < 0$$

$$(a - 0.02) - 4(a - 0.005) > 0$$

$$-3a > 0 \rightarrow a < 0$$

Time je dokazano da za svaki parametar $a < 0$ prijelazna funkcija ima podbačaj.