3. domaća zadaća

Frekvencijske karakteristike sustava, polovi i nule sustava

PRIPREMA ZA VJEŽBU

ZADATAK 1

Za sustav opisan prijenosnom funkcijom

$$G(s) = 32\frac{s+1}{(s+2)(s+8)}$$

a) Nacrtajte Bodeov dijagram koristeći aproksimacije pravcima;

b) Nacrtajte Nyquistov dijagram na temelju analize $G(j\omega)$ i Bodeova dijagrama;

c) Analitički odredite frekvenciju ω_0 i fazni pomak ϕ ako je pobuda

$$u(t) = 2\sin(\omega_0 t + \phi),$$

a odziv sustava u ustaljenom stanju

$$y(t) = 2\sin(\omega_0 t);$$

d) Na nacrtanom Bodeovu dijagramu označite frekvenciju ω_0 dobivenu pod c) i očitajte s dijagrama $A(\omega_0)_{\mathrm{dB}}$ te $\varphi(\omega_0)$;

e) Na nacrtanom Nyquistovu dijagramu označite $G(j\omega_0)$, $|G(j\omega_0)|$ i $\arg[G(j\omega_0)]$ za frekvenciju ω_0 dobivenu pod c).

Napomena: Kod crtanja Bodeova i Nyquistovog dijagrama nije dovoljno precrtati slike iz Matlab-a, bez popratnog računa.

ZADATAK 2

Za sustav opisan prijenosnom funkcijom

$$G(s) = 32\frac{as+1}{(s+2)(s+8)},$$

pri čemu je a parametar,

a) Odredite prijelaznu i težinsku funkciju, $h(t)$ i $g(t)$;

b) Pokažite da se za iznose parametra $a = \frac{1}{2}$ i $a = \frac{1}{8}$ svi prirodni modovi sustava ne vide u $h(t)$. Objasnite zašto;

c) Odredite raspon iznosa $a > 0$ za koje prijelazna funkcija $h(t)$ ima nadvišenje. U kompleksnoj s-ravnini prikažite raspored polova i nula sustava za slučaj kada nadvišenje postoji, za slučaj kada ono ne postoji, te za granični slučaj;

d) Pokažite analitički, na temelju $h(t)$ i $g(t)$, da za svaki $a < 0$ prijelazna funkcija ima podbačaj.

3. DOMAĆA ZADAĆA

MARKO GULIN
0036428227
3.AUT1

- ZADATAK 1

$$G(s) = 32\frac{s+1}{(s+2)(s+8)}$$

(a) BODEOV DIJAGRAM

$$s = \sigma + jw, \quad \text{ZA } \sigma = 0 \rightarrow s = jw$$

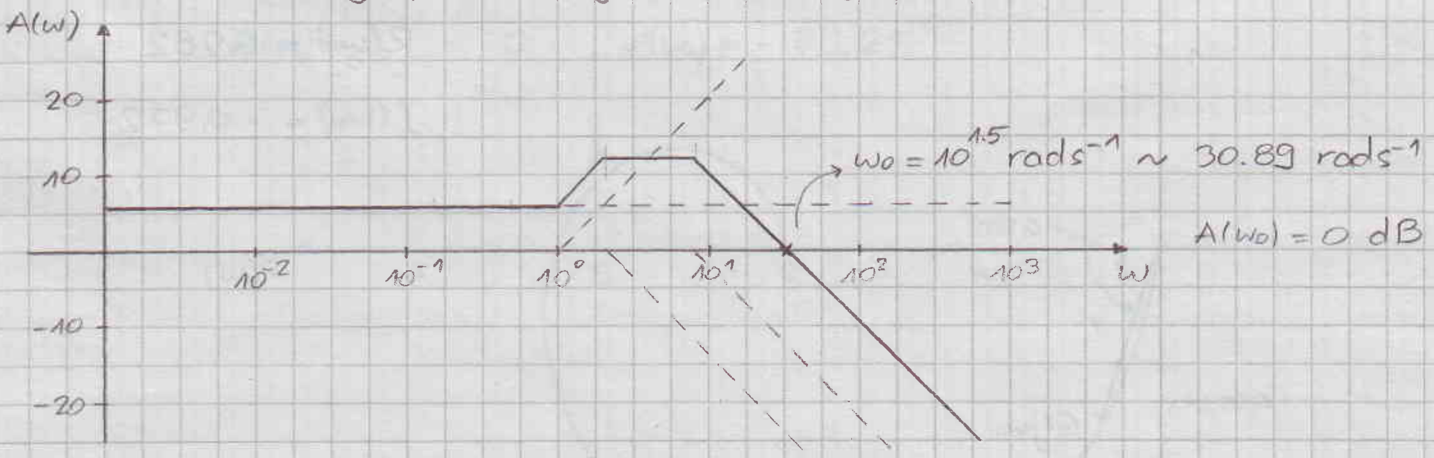
$$G(jw) = 32\frac{1+jw}{(2+jw)(8+jw)}$$

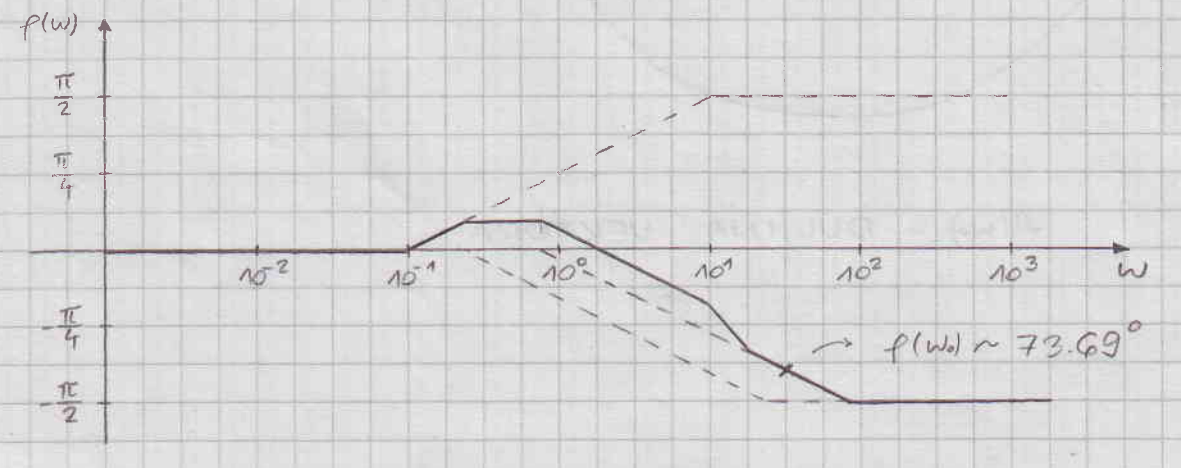
$$G(jw) = 2\frac{1+j\frac{w}{1}}{(1+j\frac{w}{2})(1+j\frac{w}{8})}$$

$$A(w)\,[dB] = 20\log 2 + 20\log\sqrt{1+\left(\frac{w}{1}\right)^2} - 20\log\sqrt{1+\left(\frac{w}{2}\right)^2} - 20\log\sqrt{1+\left(\frac{w}{8}\right)^2}$$

$$\varphi(w) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg}\frac{w}{1} - \operatorname{arctg}\frac{w}{2} - \operatorname{arctg}\frac{w}{8}$$

$$\varphi(w) = \operatorname{arctg}\frac{w}{1} - \operatorname{arctg}\frac{w}{2} - \operatorname{arctg}\frac{w}{8}$$





(b) NYQUISTOV DIJAGRAM

$$G(j\omega) = 32\,\frac{1+j\omega}{(16-\omega^2)+j10\omega}\cdot\frac{(16-\omega^2)-j10\omega}{(16-\omega^2)-j10\omega}$$

$$G(j\omega) = \underbrace{\frac{32\,(9\omega^2+16)}{(16-\omega^2)^2+(10\omega)^2}}_{R(\omega)} + j\,\underbrace{\frac{32\,(-\omega^3+6\omega)}{(16-\omega^2)^2+(10\omega)^2}}_{I(\omega)}$$

$\omega = 0^+$

$R(\omega) = 2$

$I(\omega) = 0$

$\omega = \infty$

$R(\omega) = 0$

$I(\omega) = 0$

$I(\omega_1) = 0$

$6\omega_1 - \omega_1^3 = 0$

$\omega_1\,(6-\omega_1^2) = 0$

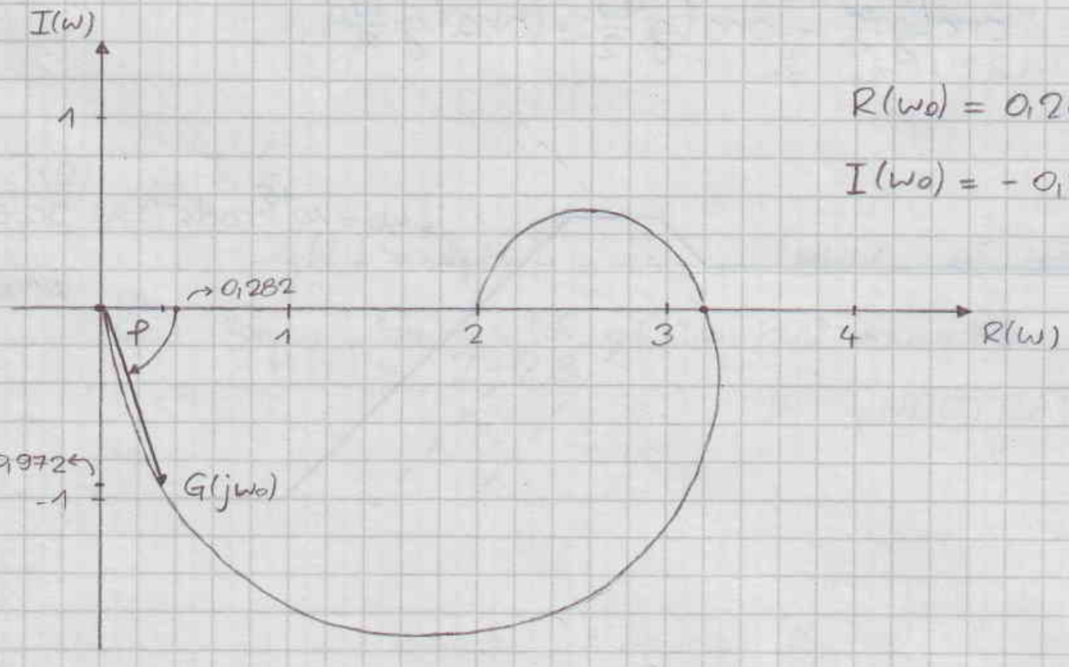
$\omega_{11} = 0 \rightarrow R(\omega_{11}) = 2$

$\omega_{12} = \sqrt{6} \rightarrow R(\omega_{12}) = 3{,}2$

$R(\omega_2) = 0$

$9\omega_2^2 + 16 = 0$

$\omega_2 \in \mathbb{C}$



$R(\omega_0) = 0{,}282$

$I(\omega_0) = -0{,}972$

$A(\omega_0)$ - DULJINA VEKTORA

(c) $u(t) = 2\sin(w_0 t + \varphi)$

$y(t) = 2\sin(w_0 t)$

$$y_m = U_m \cdot |G(jw_0)| \rightarrow |G(jw_0)| = 1$$

$$32 \frac{\sqrt{1^2+w_0^2}}{\sqrt{2^2+w_0^2}\sqrt{8^2+w_0^2}} = 1$$

$$1024 + 1024 w_0^2 = 256 + 68 w_0^2 + w_0^4$$

$$w_0^4 - 956 w_0^2 - 768 = 0$$

$$t = w_0^2$$

$$t^2 - 956t - 768 = 0$$

$$t_1 = -0{,}8$$

$$t_2 = 956{,}8 \quad \begin{cases} w_0 = 30{,}93 \text{ rad s}^{-1} \\ w_0 = -30{,}93 \text{ rad s}^{-1} \end{cases}$$

$$A(w_0)_{[dB]} = 0 \quad , \quad \varphi(w_0) = -73.65^\circ$$

• ZADATAK 2

$$G(s) = 32\,\frac{as+1}{(s+2)(s+8)}$$

(a) $H(s) = \frac{1}{s}G(s)$

$$H(s) = 32\,\frac{as+1}{s(s+2)(s+8)}$$

RASTAV NA PARCIJALNE RAZLOMKE:

$$G(s) = -\frac{16}{3}(2a-1)\frac{1}{s+2} + \frac{16}{3}(8a-1)\frac{1}{s+8}$$

$$H(s) = \frac{2}{s} + \frac{8}{3}(2a-1)\frac{1}{s+2} - \frac{2}{3}(8a-1)\frac{1}{s+8}$$

$$g(t) = -\frac{16}{3}(2a-1)e^{-2t} + \frac{16}{3}(8a-1)e^{-8t}$$

$$h(t) = 2 + \frac{8}{3}(2a-1)e^{-2t} - \frac{2}{3}(8a-1)e^{-8t}$$

(b) (1) $a = \frac{1}{2}$

$$g(t) = 16e^{-8t}$$

$$h(t) = 2-2e^{-8t}$$

NULA JE POGODILA POL $s_p=-2$, ČIMA GA JE „NEUTRALIZIRALA"

(2) $a = \frac{1}{8}$

$$g(t) = 4e^{-2t}$$

$$h(t) = 2-2e^{-2t}$$

NULA JE POGODILA POL $s_p=-8$, ČIME GA JE „NEUTRALIZIRALA"

MARKO GULIN
0036428227
3.AUT1

(c) $h(t) = 2 + \frac{8}{3}(2a-1)e^{-2t} - \frac{2}{3}(8a-1)e^{-8t}$

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 2$$

$h(t) - h(\infty) = 0$ – AKO POSTOJE POZITIVNE NULTOČKE, POSTOJI I NADVIŠENJE

$$\frac{8}{3}(2a-1)e^{-2t} - \frac{2}{3}(8a-1)e^{-8t} = 0 \quad / \cdot \frac{3}{2}$$

$$(8a-4)e^{-2t} = (8a-1)e^{-8t}$$

$$e^{6t} = \frac{8a-1}{8a-4} \quad / \ln$$

$t = \frac{1}{6}\ln\frac{8a-1}{8a-4}$, DA BI NADVIŠENJE POSTOJALO, MORA BITI ZADOVOLJEN SLJEDEĆ UVJET:

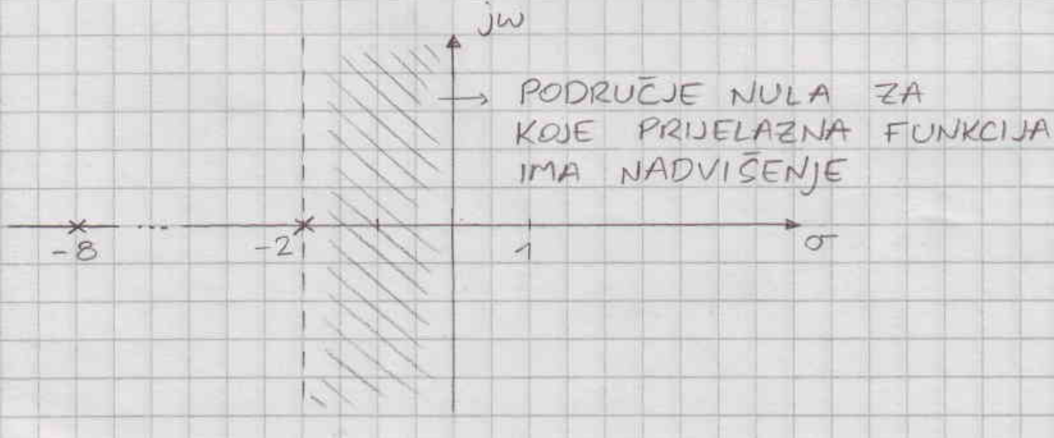
$$\ln\frac{8a-1}{8a-4} > 0$$

RJEŠAVANJE UVJETA:

$$\frac{8a-1}{8a-4} > 1 \rightarrow \frac{8a-1-8a+4}{8a-4} > 0 \quad / (8a-4)^2$$

$$3(8a-4) > 0, \quad a > \frac{1}{2}$$

$a \in \langle \frac{1}{2}, +\infty \rangle$ PRIJELAZNA FUNKCIJA IMA NADV.



(d) $\dot{h}(0^+) < 0$ - UVJET ZA PODBAČAJ

$$\dot{h}(t) = g(t)$$

$$g(0^+) < 0$$

$$-\frac{16}{3}(2a-1) + \frac{16}{3}(8a-1) < 0$$

$$a < 0$$