Završni ispit

28. siječnja 2008.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

Izjavljujem da tijekom izrade ove zadaće neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć, te da se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje teška povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati i trajno isključenje s Fakulteta. Također izjavljujem da mi zdravstveno stanje dozvoljava pisanje ove zadaće.

Potpis:_____________________________________

1. zadatak (8 bodova)

Za linearni kontinuirani sustav drugog reda opisan prijenosnom funkcijom $G(s)$ bez konačnih nula zadani su sljedeći pokazatelji kvalitete:

$$t_{1\%} = 4.6 \text{ s},$$

$$\sigma_m = 4.3\%.$$

a) *(3 boda)* Odredite i skicirajte položaj polova prijenosne funkcije $G(s)$ u s-ravnini te odredite prijenosnu funkciju $G(s)$ uz dodatni zahtjev da statičko pojačanje sustava iznosi 1.

b) *(3 boda)* Diskretni sustav prijenosne funkcije $G(z)$ dobije se ZOH diskretizacijom kontinuiranog sustava iz zadatka a). Skicirajte položaj polova prijenosne funkcije $G(z)$ u z-ravnini za dva različita odabira perioda uzorkovanja:

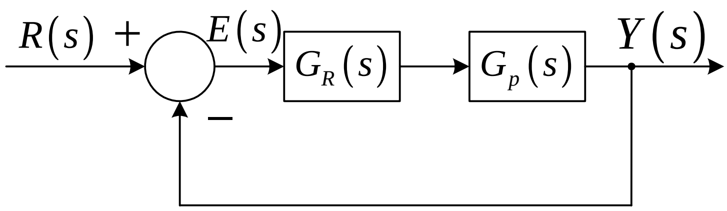
(1) $T = T_1 = 0.1$ s,

(2) $T = T_2 = 1$ s.

c) *(2 boda)* Na dva zasebna grafička prikaza skicirajte prijelazne funkcije diskretnog sustava $G(z)$ za oba odabira perioda uzorkovanja u zadatku b).

2. zadatak (9 bodova)

Sustav upravljanja prikazan je Slikom 1 gdje je $G_R(s)$ PI strukture, a prijenosna funkcija procesa $G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$.



Slika 1: Sustav upravljanja.

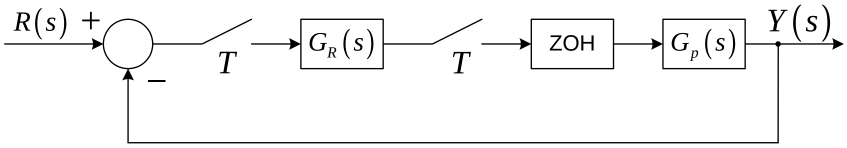
a) *(4 boda)* Parametrirajte regulator Ziegler-Nicholsovom metodom ruba stabilnosti; za određivanje ruba stabilnosti koristite Nyquistov kriterij stabilnosti.

b) *(3 boda)* Odredite iznos regulacijskog odstupanja u ustaljenom stanju (e_∞) ako je $r(t) = tS(t)$.

c) *(2 boda)* Diskretizirajte regulator $G_R(s)$ Tustinovim postupkom uz vrijeme uzorkovanja $T = 0.1$ s te odredite pripadnu rekurzivnu jednadžbu diskretiziranog regulatora.

3. zadatak (7 bodova)

Za sustav upravljanja prikazan Slikom 2 potrebno je Hurwitzovim kriterijem stabilnosti odrediti interval vrijednosti perioda uzorkovanja T za koje je taj sustav stabilan.
Zadano je: $G_R(s) = \frac{2}{s}$, $G_p(s) = \frac{2}{s+1}$.



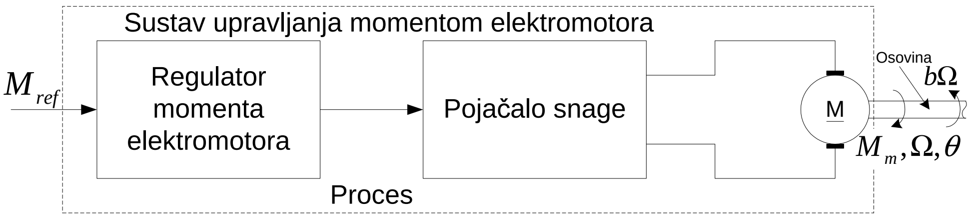
Slika 2: Blokovska shema sustava upravljanja.

4. zadatak (11 bodova)

Funkcionalna shema sustava upravljanja momentom elektromotora prikazana je na Slici 3. Proces izgradnje/razgradnje momenta motora M_m [Nm] opisan je diferencijalnom jednadžbom

$$T_1\dot{M}_m = K_1 M_{ref} - M_m, \tag{1}$$

gdje je $T_1 = 20$ ms, $K_1 = 0.1\ \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{V}}$ i M_{ref} [V] signal referentne veličine regulacijskog kruga po momentu motora.



Slika 3: Funkcionalna shema sustava upravljanja momentom elektromotora.

Razvijeni moment motora M_m uzrokuje vrtnju motora što je opisano diferencijalnom jednadžbom

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = M_m - b\Omega, \tag{2}$$

gdje je $J = 0.1\ \mathrm{kgm}^2$ moment inercije rotora motora, $b = 0.01\ \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}}$ koeficijent viskoznog trenja, a $\Omega\ \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$ je brzina vrtnje motora. Zakret motora θ [rad], za kojeg vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \Omega, \tag{3}$$

regulira se kaskadnim sustavom upravljanja koji sadrži regulacijski krug brzine vrtnje motora (podređeni krug) i regulacijski krug kuta zakreta motora (nadređeni krug). Regulator brzine vrtnje ima PI strukturu, a regulator kuta zakreta je P strukture.

a) *(3 boda)* Prikažite ovaj kaskadni sustav upravljanja blokovskom shemom. Svakom bloku na shemi pridružite pripadnu prijenosnu funkciju.

b) *(3 boda)* Parametrirajte regulator brzine vrtnje prema postupku tehničkog optimuma ($\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Zatvoreni regulacijski krug po brzini vrtnje strukturno pojednostavnite, tj. prikažite ga PT_1 članom.

c) *(2 boda)* Odredite pojačanje regulatora kuta zakreta tako da relativni koeficijent prigušenja regulacijskog kruga po zakretu iznosi $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pri tome uzmite u obzir strukturno pojednostavljenje pod b).

d) *(3 boda)* Ako bi projektirani P regulator u sustavu upravljanja kutom zakreta motora imao digitalnu umjesto analogne izvedbe, praktičnim preporukama odredite prikladno vrijeme uzorkovanja T. Procijenite za koliko bi se uz tako određen T promijenilo nadvišenje prijelazne funkcije sustava upravljanja kutom zakreta motora.

RJEŠENJA:

Zadatak 1

a) $\zeta = 0.71$, $\omega_n = 1.41$, $s_{p1,2} = -1 \pm j$, skica u kompleksnoj s-ravnini

b) Kod ZOH diskretizacije za polove diskretnog sustava vrijedi $z_{pi} = e^{s_{pi}T}$, pa je stoga:

$$z_{p1,2} = e^{(-1\pm j)T} = e^{-T}e^{\pm jT}$$

(1)–>$z_{p1,2} = e^{-0.1}e^{\pm j0.1} = 0.90\angle \pm 5.7^\circ = 0.90032 \pm j0.09033$, skica...
(2)–>$z_{p1,2} = e^{-1}e^{\pm j1} = 0.37\angle \pm 57^\circ = 0.19877 \pm j0.30956$, skica...

c) ZOH diskretizacija čuva svojstva kontinuirane prijelazne funkcije, pa prijelaznu funkciju kontinuiranog sustava treba koristiti kao envelopu za oba odziva; pritom u vremenu od 0 do $t_m = \pi/(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}) = \pi$ s $= 3.14$ s u slučaju (1) treba biti tridesetak uzoraka, a u slučaju (2) samo 3

Zadatak 2

a) ZN metoda ruba stabilnosti radi se s P-regulatorom u zatvorenoj petlji:

$$G_o(s) = \frac{K_R}{s(s+1)(s+2)}$$

Nyquistovim kriterijem rub stabilnosti utvrđujemo kad je $\mathrm{Re}[G_o(j\omega_\pi)] = -1$. Pišemo:

$$G_o(j\omega) = \frac{K_R}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)} = \frac{-3K_R}{\omega^4+5\omega^2+4} - j\frac{K_R(2-\omega^2)}{\omega(\omega^4+5\omega^2+4)} = \mathrm{R_o}(\omega) + \mathrm{jI_o}(\omega)$$

$$I_o = 0 \ \rightarrow \ \omega_\pi = \sqrt{2}$$

Kritično pojačanje dobije se iz uvjeta:

$$R_o(\omega_\pi) = -1 \ \rightarrow \ K_{R,kr} = \frac{\omega_\pi^4 + 5\omega_\pi^2 + 4}{3} = 6$$

Period oscilacija je:

$$T_{kr} = \frac{2\pi}{\omega_\pi} = \pi\sqrt{2} \text{ s} = 4.44 \text{ s}$$

Prema ZN-metodi PI regulator $G_R(s) = K_R\frac{1+T_Is}{T_Is}$ se parametrira ovako:

$$K_R = 0.45K_{R,kr} = 2.7,\ T_I = 0.85T_{kr} = 3.78 \text{ s}$$

b) $R(s) = \frac{1}{s^2}$, te je:

$$E(s) = \frac{1}{1+G_o(s)}R(s) = \frac{T_Is^2(s+1)(s+2)}{T_Is^2(s+1)(s+2)+K_R(1+T_Is)}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{T_I(s+1)(s+2)}{T_Is^2(s+1)(s+2)+K_R(1+T_Is)}$$

Teorem o konačnoj vrijednosti:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\frac{T_Is(s+1)(s+2)}{T_Is^2(s+1)(s+2)+K_R(1+T_Is)} = \frac{0}{K_R} = 0$$

c)

$$G_R(z) = G_R(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = K_R\frac{T+2T_I}{2T_I}\frac{z-\frac{2T_I-T}{2T_I+T}}{z-1} = 2.73571\frac{z-0.97389}{z-1}$$

Zadatak 3

Predavanje 15:

$$G_R(z) = \mathcal{Z}\left\{G_R(s)\right\} = \frac{2z}{z-1},$$

$$G_p(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G_p(s)}{s}\right\} = 2\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}.$$

Prijenosna funkcija otvorenog i zatvorenog kruga:

$$G_o(z) = G_R(z)G_p(z) = \frac{4z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})},$$

$$G_r(z) = \frac{4z(1-e^{-T})}{z^2+z(3-5e^{-T})+e^{-T}}.$$

Karakteristični polinom zatvorenog kruga:

$$P(z) = z^2 + z(3-5e^{-T}) + e^{-T}$$

Brojnik od $P\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$:

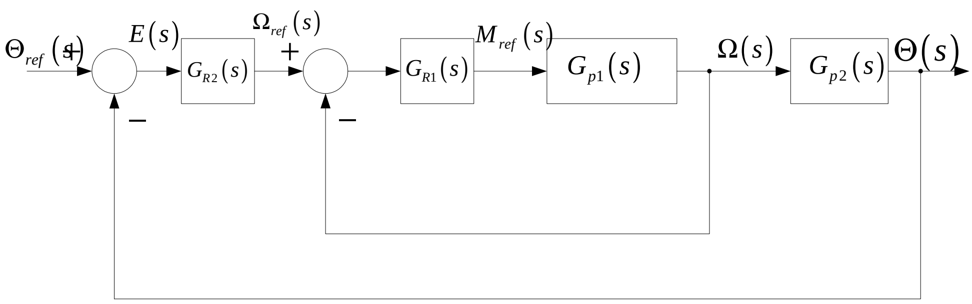
$$(6e^{-T}-2)w^2 + 2(1-e^{-T})w + 4(1-e^{-T}) = a_2w^2 + a_1w + a_0$$

podvrgava se Hurwitzovom kriteriju stabilnosti. Budući da je $a_1 > 0$ i $a_0 > 0$ slijedi i da mora biti $a_2 > 0$, što vodi na:

$$e^{-T} > \frac{1}{3} \;\rightarrow\; T < \ln 3 \text{ s} = 1.1 \text{ s}$$

Zadatak 4

a) Blokovska shema je na Slici 4: Pritom je:



Slika 4: Blokovska shema kaskadnog sustava upravljanja.

$$G_{R1}(s) = K_{R1}\frac{1+T_{I1}s}{T_{I1}s},$$
$$G_{R2}(s) = K_{R2},$$
$$G_{p1}(s) = \frac{K_1}{T_1s+1}\frac{\frac{1}{b}}{\frac{J}{b}s+1},$$
$$G_{p2}(s) = \frac{1}{s}$$

b) Unutarnji krug – kompenzira se dominantna vremenska konstanta ($T_{I1} = \frac{J}{b} = 10$ s), te se K_{R1} podešava za $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$G_{o1}(s) = \frac{\frac{K_{R1}K_1}{b}}{T_{I1}s(1+T_1s)}$$

$$K_{R1} = \frac{b}{K_1}\frac{T_{I1}}{2T_1} = 25$$

Prijenosna funkcija zatvorenog unutarnjeg regulacijskog kruga:

$$G_{r1}(s) = \frac{1}{1 + 2T_1 s + 2T_1^2 s^2},$$

što se može aproksimirati PT_1 članom

$$G_{r1}(s) \approx \frac{1}{1 + 2T_1 s}$$

c) Prijenosna funkcija otvorenog vanjskog regulacijskog kruga nakon strukturnog pojednostavnjenja prijenosne funkcije zatvorenog podređenog kruga:

$$G_{o2}(s) = \frac{K_{R2}}{s(1 + 2T_1 s)}$$

Uz zahtjev $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ za vanjski krug proizlazi:

$$K_{R2} = \frac{1}{2 \cdot 2T_1} = \frac{1}{4T_1} = 12.5$$

d) Prijenosna funkcija otvorenog vanjskog regulacijskog kruga:

$$G_{o2}(s) = \frac{1}{4T_1 s(1 + 2T_1 s)}$$

Pronalazimo presječnu frekvenciju ω_c:

$$4T_1\omega_c^2\sqrt{1 + 4T_1^2\omega_c^2} = 1$$

$$\omega_c = \frac{1}{2T_1}\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} = \frac{0.23}{T_1}$$

Prema preporuci za određivanje T na temelju karakteristika otvorenog kontinuiranog regulacijskog kruga imamo:

$$T = (0.17 \div 0.34)\frac{1}{\omega_c},$$

pa je dakle dobar odabir:

$$T = \frac{xT_1}{0.23},$$

pri čemu je $x \in [0.17, 0.34]$ ($T \in [14.8, 29.6]$ms). Pad u faznom osiguranju dobije se ako se serija impulsni element-ZOH aproksimira kašnjenjem $e^{-s\frac{T}{2}}$, što vodi na:

$$\Delta\gamma \approx -\omega_c\frac{T}{2} = -\frac{0.23}{T_1} \cdot \frac{xT_1}{0.23 \cdot 2} = -\frac{x}{2}\ \mathrm{rad} = -\frac{180x}{2\pi}^\circ$$

Ovisno o odabranom x, pad faznog osiguranja, a time i rast nadvišenja otprilike iznosi $\frac{180x}{2\pi}\%$, tj. njegov raspon je

$$4.9 \div 9.7\%$$