

## SVEUČILIŠTE U ZAGREBU FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo

Mr.sc. Jadranko Matuško Mario Vašak, dipl. ing. Marija Seder, dipl. ing.

## AUTOMATSKO UPRAVLJANJE Zadaci za vježbu

Zagreb, 2006.

## Sadržaj

1	Modeliranje dinamičkih procesa	2
2	Prikaz sustava u frekvencijskom području	11
	2.1 Laplaceova transformacija	11
	2.2 Frekvencijske karakteristike sustava	12
3	Karakteristike linearnih kontinuiranih sustava	20
4	Stabilnost linearnih kontinuiranih sustava	28
5	Krivulja mjesta korijena	40
6	Sinteza sustava u frekvencijskom području	52
	6.1 Korekcijski član s faznim prethođenjem	53
	6.2 Korekcijski član s faznim kašnjenjem	55
7	Sinteza pomoću krivulje mjesta korijena	65
8	Analitički postupci sinteze regulatora	74
	8.1 Postupak prema Truxal-Guilleminu	75
9	Sinteza regulatora s obzirom na vodeće i poremećajno vladanje	82
10	Poboljšanje regulacijskog vladanja pomoću složenijih struktura upravljanja	ւ 90
11	Sinteza linearnih kontinuiranih sustava u prostoru stanja	101
Δ	Riošenia zadataka	11/

### Poglavlje 1

## Modeliranje dinamičkih procesa

Ponašanje dinamičkih sustava opisano je skupom diferencijalnih jednadžbi koje su općenito nelinearne. U ovim diferencijalnim jednadžbama sadržane su zakonitosti koje vrijede za dati sustav. Osnovni je problem koji se pojavljuje kod analize ovakvih sustava nepostojanje opće metodologije za rješavanje nelinearnih diferencijalnih jednadžbi. S druge strane, ako je dinamički sustav opisan skupom linearnih diferencijalnih jednadžbi, tada je njegova analiza znatno jednostavnija.

Općenito, kao rezultat modeliranja dolazi se do sljedećeg zapisa dinamičkog sustava:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, ..., u_m); 
\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, ..., u_m); 
\vdots 
\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, ..., u_m);$$
(1.1)

odnosno skraćeno zapisano:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \tag{1.2}$$

gdje je  $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n]^T$  - vektor stanja sustava, a  $\mathbf{u} = [u_1, ..., u_m]^T$  - vektor ulaznih varijabli sustava.

U prvom se koraku analize određuju ravnotežne točke (engl. equilibrium points) za koje vrijedi:

$$\dot{\mathbf{x}} = 0 \Longrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0.$$

U ovim točkama je postignuta ravnoteža između energije koja ulazi u sustav i energije koja izlazi iz sustava.

Često se zbog nemogućnosti analize sustava u izvornom nelinearnom obliku pribjegava tzv. linearizaciji sustava tj. opisu sustava linearnim modelom u okolini ravnotežne točke. Naravno u tom slučaju dobiveni (linearni) model je valjan u uskom području oko ravnotežne točke. Temelj postupka linearizacije je razvoj funkcije u Taylorov red koji za statičku funkciju (sustav) glasi:

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \Delta x_i + o(\Delta x_1, ..., \Delta x_n), \tag{1.3}$$

gdje je  $\Delta \mathbf{x} = [\Delta x_1, ..., \Delta x_n]^T$ , a  $o(\Delta x_1, ..., \Delta x_n)$  -ostatak reda, polinom koji sadrži samo članove s potencijama  $\geq 2$ .

Zanemarivanjem ostatka  $o(\cdot)$  reda dobije se:

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}_0} \cdot \Delta x_i.$$
 (1.4)

U slučaju dinamičkog sustava (1.2) razvojem u Taylorov red dobivamo:

$$(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x})' \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot \Delta \mathbf{u}$$
(1.5)

Uzevši u obzir da vrijedi:  $(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x})' = (\Delta \mathbf{x})'$  te da je  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  ravnotežna točka sustava za koju stoga vrijedi  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0$  dobije se:

$$(\Delta \mathbf{x})' \approx \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot \Delta \mathbf{u}$$
(1.6)

Ovdje je bitno uočiti da je postupkom linearizacije dobiven model koji više nije funkcija početnih varijabli x već promjena tih varijabli  $\Delta x$  oko ravnotežne točke  $x_0$ .

#### PRIMJER 1.1

Na slici 1 prikazan je je pojednostavljeni model automobilskog amortizera. Pritom masa  $m_A$  predstavlja 1/4 mase automobila,  $m_K$  masu kotača, dok konstante  $c_A, c_K, d_A$  predstavljaju konstante krutosti opruge amortizera i gume automobilskog kotača, te konstantu prigušenja amortizera. Potrebno je odrediti skup diferencijalnih jednadžbi koje opisuju ovaj sustav, te prikazati blokovsku shemu sustava. Karakteristika opruge opisana je sljedećim izrazom:

$$F_s = c_A \cdot x$$

dok je karakteristika prigušenja amortizera dana linearnom relacijom:

$$F_p = d_A \cdot \dot{x}$$
.

Potrebno je navesti skup diferencijalnih jednadžbi kojima je opisan ovaj proces i nacrtati blokovsku shemu procesa.

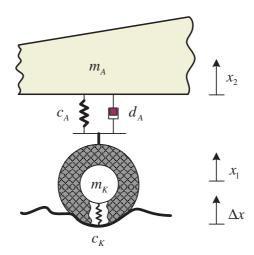
#### RJEŠENJE:

Kod postavljanja diferencijalnih jednadžbi za ovaj slučaj koristi se drugi Newtonov zakon. Za masu  $m_K$  vrijedi:

$$m_K \cdot \dot{v_1} = c_K \cdot (\Delta x(t) - x_1(t)) - c_A(x_1 - x_2) - d_A(v_1 - v_2)$$
(1.7)

Za masu  $m_A$  vrijedi:

$$m_A \cdot \dot{v_2} = c_1(x_1 - x_2) - d_A(v_1 - v_2)$$
 (1.8)



Slika 1.1: Sustav amortizacije automobila

Kako pritom vrijedi da je  $v_1 = \dot{x_1}$  odnosno  $v_2 = \dot{x_2}$  slijedi konačni skup diferencijalnih jednadžbi:

$$\ddot{x}_1 + \frac{d_A}{m_k} \cdot \dot{x}_1 - \frac{d_A}{m_k} \cdot \dot{x}_2 + \frac{c_K + c_A}{m_k} \cdot x_1 - \frac{c_A}{m_K} \cdot x_2 - \frac{c_K}{m_K} \Delta x(t) = 0 
\ddot{x}_2 + \frac{d_A}{m_A} \cdot \dot{x}_1 - \frac{d_A}{m_A} \cdot \dot{x}_2 + \frac{c_A}{m_A} \cdot x_1 - \frac{c_A}{m_A} \cdot x_2 = 0$$
(1.9)

Blokovska shema procesa prikazana je na slici 1.2.

Ovdje je bitno primijetiti da se u jednadžbama gibanja masa  $m_A$  i  $m_K$  pomaci  $x_1$  i  $x_2$  ne računaju odnosu na prirodne duljine opruga, već u odnosu na inicijalno istezanje opruga pri  $\Delta x = 0$ . Upravo ova inicijalna istezanja opruga kompenziraju djelovanje sile zemljine teže na mase  $m_A$  i  $m_K$  koje su zbog toga izostavljene iz jednadžbi gibanja pojedinih masa. Ovaj pomak koordinatnog sustava je bilo moguće napraviti zbog linearnih karakteristika opruga.

#### PRIMJER 1.2

U zatvoreni spremnik površine A i visine  $h_s$  dovodi se kapljevina (vidi sliku 1.3). U zatvorenom spremniku odvija se izotermna kompresija plina (zraka) u prostoru iznad kapljevine, za koju vrijedi:

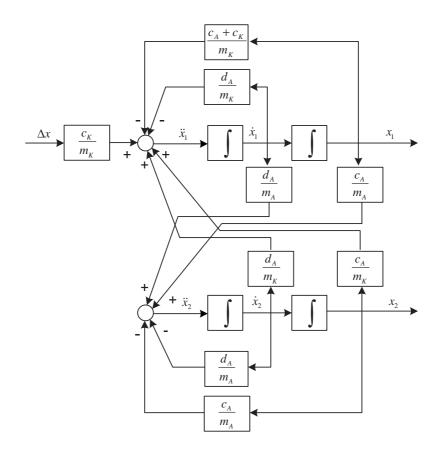
$$p_p V_p = const, (1.10)$$

gdje je  $p_p$  tlak plina, a  $V_p$  volumen plina. Zatvoreni spremnik spojen je s otvorenim spremnikom površine A i visine  $h_s$  iz kojeg istječe kapljevina protoka  $q_i(t)$ .

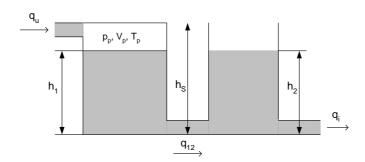
Korištenjem Bernoullieve jednadžbe za fluid:

$$p + \rho gh(t) + \rho \frac{v^2(t)}{2} = const, \qquad (1.11)$$

gdje je p tlak plina, h(t) visina kapljevine i v(t) brzina kapljevine, potrebno je:



Slika 1.2: Blokovska shema sustava amortizacije automobila



Slika 1.3: Protok kapljevine kroz zatvoreni spremnik.

- a) odrediti diferencijalne jednadžbe za visinu kapljevine u zatvorenom spremniku  $h_1(t)$  te otvorenom spremniku  $h_2(t)$ ,
- b) odrediti linearizirani model u okolini radne točke  $h_{10},\,p_{p0}$  te  $h_{20},\,$
- c) nacrtati blokovsku shemu nelinearnog i lineariziranog modela.

Zadano je: atmosferski tlak  $p_a$ , početni tlak plina u zatvorenom spremniku  $p_{p0}$ , gustoća kapljevine  $\rho$ , visina spremnika  $h_s$ , površina poprečnog presjeka otvorenog te zatvorenog spremnika A, površina poprečnog presjeka cijevi  $A_i$ .

NAPOMENA: Brzina kapljevine unutar spremnika mole se zanemariti.

#### RJEŠENJE:

a) Iz Bernoulijeve jednadžbe za prvi spremnik slijedi:

$$p_p + \rho g h_1 = p_a + \rho g h_2 + \rho \frac{v_{12}^2}{2} \tag{1.12}$$

Iz uvjeta izotermne reakcije u zatvorenom spremniku slijedi:

$$p_p = p_{p0} \frac{h_s - h_{10}}{h_s - h_1} \tag{1.13}$$

Iz ovih jednadžbi slijedi:

$$p_{p0}\frac{h_s - h_{10}}{h_s - h_1} + \rho g h_1 = p_a + \rho g h_2 + \rho \frac{v_{12}^2}{2}$$
(1.14)

Analogno se dobije jednadžba za drugi spremnik koja glasi:

$$\rho g h_2 = \rho \frac{v_i^2}{2} \tag{1.15}$$

Prema tome diferencijalne jednadžbe nelinearnog modela glase:

$$q_{12} = v_{12}A_i \tag{1.16}$$

$$q_i = v_i A_i \tag{1.17}$$

$$q_u - q_{12} = A \frac{dh_1}{dt} (1.18)$$

$$q_{12} - q_i = A \frac{dh_2}{dt} (1.19)$$

b) Izrazi za brzine protoka  $v_{12}$  te  $v_i$  su nelinearni i njih treba linearizirati u okolini dane radne točke. Dobiju se sljedeći izrazi:

$$v_{12} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \left( \frac{K}{h_s - h_1} + \rho g \left( h_1 - h_2 \right) - p_a \right)} \quad gdje \quad je \quad K = p_{p0} \left( h_s - h_{10} \right)$$
 (1.20)

$$\frac{\partial}{\partial h_1} v_{12} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\rho} \left(\frac{K}{h_s - h_1} + \rho g \left(h_1 - h_2\right) - p_a\right)}} \cdot \frac{2}{\rho} \left(\frac{K}{\left(h_s - h_1\right)^2} + \rho g\right) \begin{vmatrix} h_1 = h_{10} \\ h_2 = h_{20} \end{vmatrix} = C_1$$
(1.21)

$$\frac{\partial}{\partial h_2} v_{12} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\rho} \left(\frac{K}{h_s - h_1} + \rho g \left(h_1 - h_2\right) - p_a\right)}} \cdot \frac{2}{\rho} \left(-\rho g\right) \begin{vmatrix} h_1 = h_{10} \\ h_2 = h_{20} \end{vmatrix} = C_2 \tag{1.22}$$

$$v_i = \sqrt{2gh_2} \tag{1.23}$$

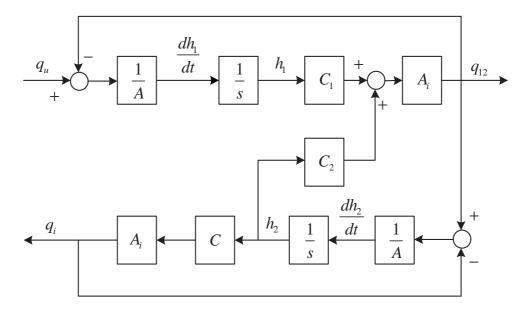
$$\frac{\partial}{\partial h_2} v_i = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2ah_2}} \cdot 2g | h_2 = h_{20} = C \tag{1.24}$$

Prema tome linearizirani model glasi:

$$v_{12}(s) = C_1 H_1(s) + C_2 H_2(s) (1.25)$$

$$v_i(s) = C \cdot H_2(s) \tag{1.26}$$

#### c) Blokovska shema lineariziranog modela prikazana je na slici 1.4



Slika 1.4: Shema lineariziranog modela

#### ZADACI ZA VJEŽBU:

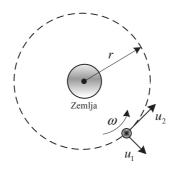
#### ZADATAK 1.1

Kretanje umjetnog satelita oko zemlje može se opisati pojednostavljenim 2D modelom (slika 1.5) danim sljedećim izrazima:

$$\ddot{r} = r\dot{\phi}^2 - \frac{k}{r^2} + u_1$$

$$\ddot{\phi} = -2\frac{\dot{\phi}\dot{r}}{r} + \frac{u_2}{r}$$
(1.27)

 $gdje\ su\ u_1\ i\ u_2\ radijalna\ i\ tangencijalna\ komponenta\ sile\ na\ satelit\ usljed\ djelovanja\ potisnika.$ 



Slika 1.5: Pojednostavljeni model kretanja satelita oko zemlje

Potrebno je:

- a) prikazati sustav u (nelinearnom) prostoru stanja pri čemu su varijable stanja  $(r, \dot{r}, \dot{\phi} = \omega)$ ,
- b) linearizirati sustav oko ravnotežnog stanja kojem odgovara isključeni pogonski motori satelita,  $tj. \ u_1 = 0 \ i \ u_2 = 0.$

#### ZADATAK 1.2

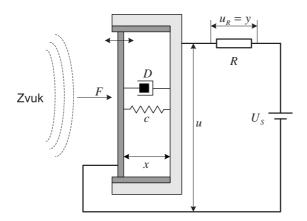
Pretvarač sile u frekvenciju pomoću električnog polja, koji se koristi kao mikrofon ili zvučnik (slika 1.6), može se opisati sljedećim jednadžbama:

• jednadžba ravnoteže sila:

$$m\frac{d^{2}x(t)}{dt^{2}} + D\frac{dx(t)}{dt} + c(x(t) - l) + \frac{\varepsilon_{0} A}{2} \left(\frac{u(t)}{x(t)}\right)^{2} = F(t),$$
 (1.28)

• jednadžba električke ravnoteže:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon_0 Au(t)}{x(t)}\right) = \frac{U_s - u(t)}{R},\tag{1.29}$$



Slika 1.6: Principna shema rada mikrofona

• izlazna jednadžba:

$$y(t) = R \frac{d}{dt} \left( \frac{\varepsilon_0 Au(t)}{x(t)} \right),$$
 (1.30)

gdje je:

m - masa pomične ploče, D - koeficijent prigušenja, c - konstanta opruge, x - razmak pomičnih ploča, l - prirodna duljina opruge, A - površina pomične ploče, u - napon između pomičnih ploča, F - sila na pomičnu ploču (ulazna veličina),  $U_S$  - napon posmaka, R - otpor,  $\varepsilon_0$  - dielektrična konstanta.

Za promatrani pretvarač potrebno je:

- a) linearizirati jednadžbe u radnoj točki određenoj s  $X_0$  i  $U_0$ ;
- b) odrediti diferencijalnu matričnu jednadžbu stanja iz lineariziranih jednadžbi ako su varijable stanja:  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  i  $x_3 = u/x$ ;
- c) nacrtati nelinearnu i lineariziranu blokovsku shemu.

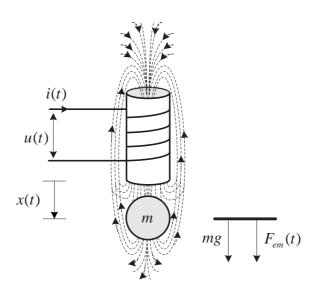
#### ∠ ZADATAK 1.3

Položaj magnetski vodljive kuglice regulira se pomoću elektromagnetskog polja (slika 1.7). Induktivitet zavojnice ovisan je o udaljenosti kuglice, i ta se ovisnost može opisati sljedećim izrazom:

$$L(x) = 2\lambda/x. (1.31)$$

Elektromagnetska sila koja djeluje na kuglicu opisana je sljedećom relacijom:

$$F = -\frac{\lambda i^2}{x^2}. ag{1.32}$$



Slika 1.7: Sustav regulacije položaja magnetske kuglice

Newton-ov zakon:

$$m\ddot{x} = mg + F = mg - \frac{\lambda i^2}{x^2}.$$
 (1.33)

Faraday-ov zakon:

$$u = Ri + \frac{d(L(x)i)}{dt} = Ri + L'(x)i\frac{dx}{dt} + L(x)\frac{di}{dt} = Ri - \frac{2\lambda i}{x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{2\lambda}{x}\frac{di}{dt}.$$
 (1.34)

Potrebno je:

a) prikazati sustav u prostoru stanja tj. u obliku:

$$\dot{x} = f\left(x, u\right) \tag{1.35}$$

pretpostavljajući pritom sljedeće varijable stanja:  $x_1=x,\ x_2=\dot x\ i\ x_3=i.$ 

- b) nacrtati nelinearnu blokovsku shemu,
- c) linearizirati sustav oko radne točke  $x_0 = 700\,[\mu m]$  te nacrtati lineariziranu blokovsku shemu.

$$Zadano\ je:\ \lambda=5\cdot 10^{-6}\left[Nm^{2}A^{-2}\right], R=1\ [\Omega], m=0.2\ [kg], g=9.81\ \left[ms^{-2}\right].$$

### Poglavlje 2

## Prikaz sustava u frekvencijskom području

#### 2.1 Laplaceova transformacija

Premda su poznati različiti načini rješavanja linearnih diferencijalnih jednadžbi, u analizi sustava automatskog upravljanja posebno mjesto zauzimaju metode rješavanja temeljene na integralnim transformacijama. Najznačajnija među njima je Laplaceova transformacija.

Neka je zadana funkcija  $f(t): \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$  koja zadovoljava Dirichletove uvjete:

- 1. funkcija f(t) je po odsječcima kontinuirana,
- 2. postoji konačni c > 0 takav da vrijedi  $\lim_{t \to \infty} f(t)e^{-ct} = 0$ .

Za funkciju f(t) definirana je Laplaceova transformacija kao:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt. \tag{2.1}$$

pri čemu je područje konvergencije integrala određeno uvjetom  $\Re(s) > c$ . Najvažnija svojstva Laplaceove transformacije:

- Linearnost  $\mathcal{L}\left\{\alpha f(t) + \beta q(t)\right\} = \alpha \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} + \beta \mathcal{L}\left\{q(t)\right\}$ ;
- Derivacija  $\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\right\} = s \cdot \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} f(0^+);$
- Integracija  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}\left\{f(t)\right\};$
- Konvolucija  $\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty g(t-\tau)u(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{g(t)\right\}\cdot\mathcal{L}\left\{u(t)\right\};$
- Vremenski pomak  $\mathcal{L}\left\{f(t-a)\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ ;
- Teorem o konačnoj vrijednosti  $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s)$ ;

• Teorem o početnoj vrijednosti -  $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s \cdot F(s)$ .

Zbog ovih navedenih svojstava Laplaceova je transformacija prikladna za rješavanje diferencijalnih jednadžbi budući da se njom diferencijalna jednadžba pretvara u algebarsku po varijabli s. Kod analize sustava upravljanja vrlo često se sustav, umjesto u obliku diferencijalne jednadžbe, prikazuje u obliku pripadne prijenosne funkcije koja predstavlja omjer Laplaceovih transformacija izlaza i ulaza sustava, uz pretpostavku da su početna stanja jednaka nuli.

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\left\{y(t)\right\}}{\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$
(2.2)

U specijalnom slučaju kada je ulazni signal tipa Diracove  $\delta$ -funkcije slijedi:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot 1 = G(s),$$
 (2.3)

te se može zaključiti da je prijenosna funkcija Laplaceova transformacija impulsnog odziva sustava g(t).

#### 2.2 Frekvencijske karakteristike sustava

Opis sustava pomoću frekvencijske karakteristike temelji se na odzivu sustava na sinusnu pobudu u stacionarnom stanju, odnosno nakon što završi prijelazna pojava. Pretpostavivši sinusni pobudni signal

$$u(t) = A \cdot \sin(\omega t) = A \cdot \Im e^{\jmath \omega t}, \tag{2.4}$$

prisilni odziv sustava općenito je dan konvolucijskim integralom:

$$y(t) = \int_0^\infty u(t - \tau)g(\tau)d\tau = A \cdot \Im \int_0^\infty e^{j\omega(t - \tau)}g(\tau)d\tau = A \cdot \Im e^{j\omega t} \int_0^\infty e^{-j\omega \tau}g(\tau)d\tau$$
 (2.5)

U izrazu (2.5) može se uočiti da član ispred integrala predstavlja ulazni signal u(t), dok sam integral ima isti oblik kao i Laplaceova transformacija težinske funkcije, s tim da umjesto kompleksne frekvencije s stoji  $j\omega$ . Kako je s druge strane poznato da Laplaceova transformacija težinske funkcije predstavlja prijenosnu funkciju G(s), slijedi da se izraz (2.5) može zapisati u sljedećem obliku:

$$y(t) = A \cdot \Im e^{\jmath \omega t} \cdot G(\jmath \omega) = A \cdot \Im e^{\jmath \omega t} |G(\jmath \omega)| \cdot e^{\jmath \angle G(\jmath \omega)}. \tag{2.6}$$

Iz posljednjeg izraza je očito da je odziv sustava na sinusnu pobudu također sinusnog oblika iste frekvencije, općenito različite amplitude, i s određenim faznim pomakom. Informacije o omjeru izlazne i ulazne amplitude, te faznom pomaku sadržane su u funkciji  $G(\jmath\omega)$  koja, prema tome, predstavlja frekvencijsku karakteristiku sustava. Na temelju izraza (2.5) i (2.6) slijedi da se frekvencijska karakteristika dobiva iz prijenosne funkcije formalnom zamjenom  $s \to \jmath\omega$ . U analizi linearnih sustava se njegovo djelovanje često opisuje grafičkim prikazom njegove frekvencijske karakteristike i to kao:

- Nyquistov dijagram koji predstavlja grafički prikaz funkcije  $G(j\omega)$  u kompleksnoj ravnini,
- Bodeov dijagram koji zasebno prikazuje amplitudnu karakteristiku kao  $20log|G(j\omega)|$  i faznu karakteristiku sustava kao  $\angle G(j\omega)$  na logaritamskoj frekvencijskoj skali.

U analizi i sintezi sustava upravljanja posebno je prikladan Bodeov prikaz frekvencijske karakteristike zbog činjenice da se serijska veza više dinamičkih članova (matematički opisana s operacijom konvolucije) svodi kod crtanja Bodeovog dijagrama na zbrajanje odgovarajućih frekvencijskih karakteristika pojedinih članova.

#### PRIMJER 2.1

Za sustav opisan sljedećom diferencijalnom jednadžbom:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6 = 2u(t) \tag{2.7}$$

potrebno je:

a) odrediti odziv na skokovitu pobudu oblika:

$$u(t) = S(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \ge 0 \end{cases}$$
 (2.8)

korištenjem Laplaceove transformacije, uz početne vrijednosti y(0) = 3 i  $\dot{y}(0) = -7$ ,

b) odrediti prijenosnu funkciju sustava.

#### RJEŠENJE:

a) Izravnom primjenom Laplaceove transformacije na polaznu diferencijalnu jednadžbu, koristeći teorem o deriviranju, slijedi:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6 = 2u(t) \qquad /\mathcal{L}$$
  
$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - \dot{y}(0) + 5\left(s \cdot Y(s) - y(0)\right) + 6Y(s) = 2U(s) \qquad (2.9)$$

Nakon sređivanja, prethodni se izraz može zapisati u sljedećem obliku:

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 6}U(s) + \frac{s + 5}{s^2 + 5s + 6}y(0) + \frac{1}{s^2 + 5s + 6}\dot{y}(0). \tag{2.10}$$

Uzevši u obzir da je ulazni signal u(t) tipa odskočne funkcije čija je Laplaceova transformacija U(s) = 1/s, te rastavljanjem izraza (2.10) na parcijalne razlomke, dobivamo:

$$Y(s) = \frac{1}{3s} - \frac{1}{s+2} + \frac{2}{3(s+3)} + \left(\frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3}\right) \cdot y(0) + \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}\right) \cdot \dot{y}(0). \tag{2.11}$$

Primjenom inverzne Laplaceove transformacije na (2.11), koristeći pravilo

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at},\tag{2.12}$$

slijedi:

$$y(t) = \frac{1}{3} - e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-3t} + \left(3e^{-2t} - 2e^{-3t}\right) \cdot y(0) + \left(e^{-2t} - e^{-3t}\right) \cdot \dot{y}(0). \tag{2.13}$$

Uvrštenjem početnih uvjeta  $y(0) = \frac{1}{3}$  i  $\dot{y}(0) = -1$ , konačno se dobije:

$$y(t) = \frac{1}{3} + e^{-3t} - e^{-2t}. (2.14)$$

b) Kod proračuna prijenosne funkcije ponovno se primjenjuje Laplaceova transformacija na polaznu diferencijalnu jednadžbu, ali ovaj put uz nulte početne uvjete. U tom se slučaju dobije:

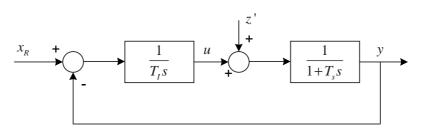
$$s^{2} \cdot Y(s) + 5s \cdot Y(s) + 6Y(s) = 2U(s), \tag{2.15}$$

odakle slijedi:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2 + 5s + 6}. (2.16)$$

#### PRIMJER 2.2

Na slici 2.1 prikazan je regulacijski krug koji se sastoji od procesa (PT1 član) i regulatora (I-regulator). Vremenska konstanta regulatora je  $T_I$ .



Slika 2.1: Shema sustava upravljanja

- a) Prikazati izlaznu veličinu Y(s) kao funkciju vodeće veličine  $X_R(s)$  i poremećajne veličine Z'(s).
- b) Odrediti prirodnu frekvenciju neprigušenih oscilacija  $\omega_n$  i relativni koeficijent prigušenja  $\zeta$  zatvorenog regulacijskog kruga.
- c) Odrediti  $T_I$  uz uvjet da je  $\zeta = \sqrt{2}/2$  i  $T_S = 1s$ . Koliko je odstupanje u stacionarnom stanju ukoliko djeluje poremećaj z'(t) = S(t).

d) Uz regulacijski krug i regulator određen prema c) nacrtati Bodeov dijagram  $G_o(j\omega)$  (aproksimacije pravcima).

#### RJEŠENJE:

a) Na temelju blokovske sheme prikazane na slici 2.1 može se napisati sljedeći izraz:

$$Y(s) = \left[ \frac{1}{sT_I} \left( X_R(s) - Y(s) \right) + Z'(s) \right] \frac{1}{1 + sT_S}, \tag{2.17}$$

iz kojeg dalje slijedi:

$$\frac{1 + sT_I + s^2 T_I T_S}{sT_I (1 + sT_s)} Y(s) = \frac{1}{sT_I (1 + sT_s)} X_R(s) + \frac{1}{1 + sT_s} Z'(s), \tag{2.18}$$

te se konačno dobije:

$$Y(s) = \frac{1}{1 + sT_I + s^2 T_I T_S} X_R(s) + \frac{sT_I}{1 + sT_I + s^2 T_I T_S} Z'(s) = G_{zx}(s) X_R(s) + G_{zz}(s) Z'(s).$$
(2.19)

b) Prijenosna funkcija drugog reda obično se zapisuje u standardnom obliku:

$$G_m(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta s/\omega_n + s^2/\omega_n^2}.$$
 (2.20)

gdje je  $\zeta$ -koeficijent prigušenja a  $\omega_n$ -prirodna frekvencija neprigušenih oscilacija.

Izjednačavanjem nazivnika prijenosnih funkcija  $G_x(s)$  i  $G_z(s)$  s nazivnikom prijenosne funkcije drugog reda u standardnom obliku slijedi:

$$2\zeta/\omega_n = T_I, \quad 1/\omega_n^2 = T_I T_S, \tag{2.21}$$

te se dobije:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{T_I T_S}}, \quad \zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_I}{T_S}}. \tag{2.22}$$

c) Uvjet da bi koeficijent prigušenja  $\zeta$  iznosio  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  je da vrijedi:

$$T_I = 2T_S = 2[s]. (2.23)$$

Odstupanje izlaznog signala od referentnog definirano je kao:

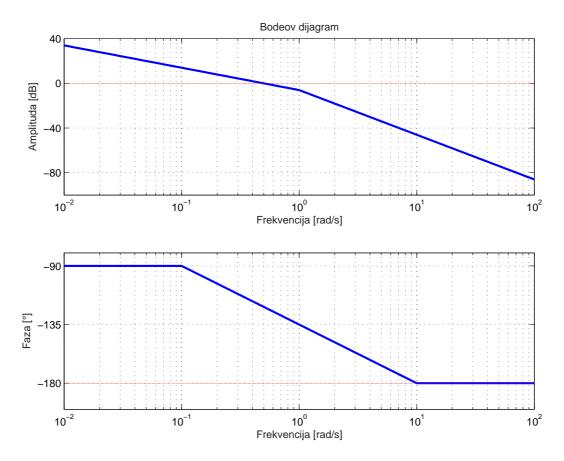
$$E(s) = Y(s) - X_R(s). (2.24)$$

Uz pretpostavku da djeluje samo signal poremećaja z'(t) ( $x_R(t) = 0$ ), slijedi:

$$E(s) = G_z(s) \cdot \underbrace{Z'(s)}_{=1/s} - \underbrace{X_R(s)}_{=0} = \frac{T_I}{1 + sT_I + s^2 T_I T_s}$$
(2.25)

Stacionarna vrijednost signala odstupanja e(t) se određuje iz teorema o konačnoj vrijednosti:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = 0. \tag{2.26}$$



Slika 2.2: Bodeov dijagram.

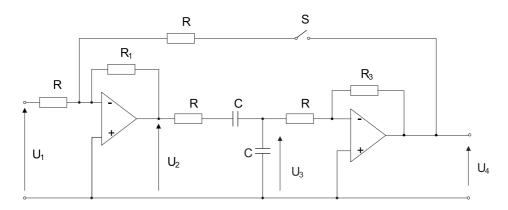
d) Bodeov dijagram otvorenog kruga prikazan je na slici 2.2.

#### ZADACI ZA VJEŽBU:

#### ZADATAK 2.1

Na slici 2.2 prikazan je sklop koji se sastoji od dvaju idealnih operacijskih pojačala i pridružene im pasivne mreže.

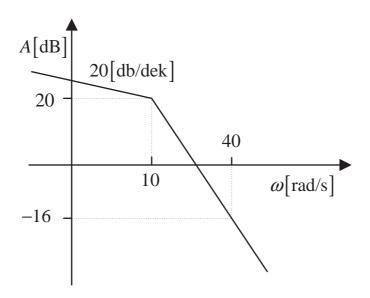
- a) Odredite prijenosnu funkciju  $G(s) = \frac{U_4(s)}{U_1(s)}$  uz otvorenu sklopku S.
- b) Zatvaranjem sklopke S izlazni napon se vraća na ulazno pojačalo. O kakvoj se povratnoj vezi u tom slučaju radi? Odrediti prijenosnu funkciju  $G_z(s) = \frac{U_4(s)}{U_1(s)}$  uz zatvorenu sklopku S.
- c) Kako odabrati otpornike da bi prigušenje sklopa, uz zatvorenu sklopku, iznosilo  $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ?



Slika 2.3: Sklop s operacijskim pojačalima.

#### ZADATAK 2.2

Odrediti prijenosnu funkciju sustava čija je amplitudna karakteristika uz aproksimaciju pravcima prikazana na slici 2.4. Pritom je poznato da pri frekvenciji  $\omega = 8[rad/s]$  faza iznosi  $\varphi(\omega) = -171.32^{\circ}$ . Pretpostaviti da se radi o minimalno-faznom sustavu.



Slika 2.4: Bodeov dijagram

#### ZADATAK 2.3

Neka je zadan sustav za koji je poznato da vrijedi:

1. sustav je relativnog stupnja 3;

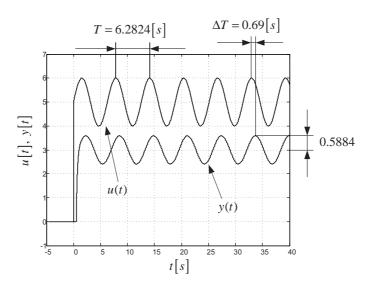
- 2. sustav ima 3 pola od kojih su dva  $s_1 = -2$  i  $s_2 = -10$ ;
- 3. impulsni odziv sustava izgleda kao prijelazna funkcija stabilnog linearnog sustava sa ustaljenom vrijednosti 0.25.

#### Potrebno je:

- 1. odrediti prijenosnu funkciju sustava;
- 2. nacrtati Bodeov dijagram sustava.

#### ZADATAK 2.4

Kako bi se odredili parametri PT1 procesa s transportnim kašnjenjem, proveden je sljedeći eksperiment. Na ulaz u proces doveden je signal u(t) prikazan na slici 2.5, te je snimljen odziv izlaznog signala, koji je prikazan na istoj slici, uz naznačene karakteristične vrijednosti. Potrebno je odrediti prijenosnu funkciju procesa  $G_p(s)$ 



Slika 2.5: Grafovi ulaznog i izlaznog signala

#### ZADATAK 2.5

Pomoću Laplaceove transformacije riješiti sljedeće diferencijalne jednadžbe uz dane početne uvjete:

- $\begin{array}{lll} a.) & y'(t)+8y(t)=0, & y(0)=-2; \\ b.) & y''(t)+4y'(t)+3y(t)=t, & y(0)=0, y'(0)=-2; \\ c.) & y'''(t)+4y''(t)+9y'(t)+10y(t)=t, & y(0)=-4, y'(0)=4, y''(0)=0; \end{array}$

#### ZADATAK 2.6

Neka je dan sustav opisan sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} \tag{2.27}$$

Odziv sustava na pobudni signal oblika  $u(t) = e^{-t}$  dan je sljedećim izrazom:

$$y(t) = \frac{1}{2}t \cdot e^{-t} + e^{-3t} \tag{2.28}$$

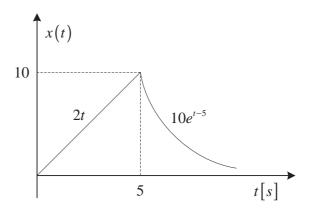
Potrebno je odrediti početne uvjete u trenutku  $t = 0^+$ .

#### ZADATAK 2.7

Neka je dan sustav opisan sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+4)} \tag{2.29}$$

Potrebno je odrediti odziv sustava na pobudni signal prikazan na slici 2.6. Pritom su poznati početni uvjeti u trenutku  $t=0^+$  koji iznose  $y(0^+)=2$  i  $y'(0^+)=-1$ .

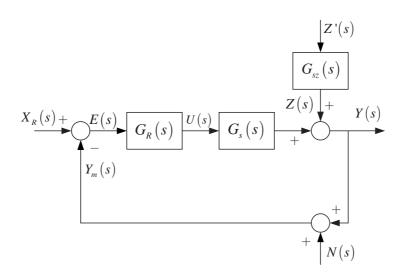


Slika 2.6: Graf pobudnog signala

### Poglavlje 3

# Karakteristike linearnih kontinuiranih sustava

Razmatra se sustav upravljanja sveden na jediničnu povratnu vezu (slika 3.1). Svi signali i



Slika 3.1: Blokovska shema sustava upravljanja.

blokovi navedeni su u Laplace-ovoj domeni. SN(s) označena je Laplace-ova transformacija šuma mjernog člana kojim se mjeri izlaz procesa (prijenosna funkcija mjernog člana uključena je u prijenosnu funkciju procesa  $G_s(s)$ ). Ostali signali isti su kao u skripti [1]. Izrazimo izlaz Y(s) preko prijenosnih funkcija elemenata i ulaza  $X_R(s)$ , Z'(s) i N(s):

$$Y(s) = G_{sz}(s)Z'(s) + G_R(s)G_s(s)E(s) = G_{sz}(s)Z'(s) + G_R(s)G_s(s)(X_R(s) - Y(s) - N(s))$$
(3.1)

Prebacivanjem svih pribrojnika sY(s) s lijeve strane jednadžbe i potom njegovim eksplicitnimm izražavanjem slijedi:

$$Y(s) = \frac{G_R(s)G_s(s)}{1 + G_R(s)G_s(s)}X_R(s) + \frac{G_{sz}(s)}{1 + G_R(s)G_s(s)}Z'(s) - \frac{G_R(s)G_s(s)}{1 + G_R(s)G_s(s)}N(s).$$
(3.2)

Uvedimo sljedeće oznake:

$$G_o(s) = G_R(s)G_s(s)$$
 – prijenosna funkcija otvorenog kruga; (3.3)

$$R(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)} - \text{dinamički regulacijski faktor};$$
 (3.4)

$$T(s) = R(s)G_o(s)$$
 – komplement od  $R(s)$ . (3.5)

Sada se (3.2) sažetije zapisuje:

$$Y(s) = T(s)X_R(s) + R(s)Z(s) - T(s)N(s).$$
(3.6)

Ključno je uočiti sljedeću relaciju:

$$R(s) + T(s) = 1.$$
 (3.7)

Posebice je za  $s = j\omega$  (vidi diskusiju u poglavlju ??):

$$R(j\omega) + T(j\omega) = 1. (3.8)$$

Također se i relacija (3.6) može napisati za frekvencijsko područje:

$$Y(j\omega) = T(j\omega)X_R(j\omega) + R(j\omega)Z(j\omega) - T(j\omega)N(j\omega). \tag{3.9}$$

Sada, raspravimo što želimo od sustava upravljanja sa slike 3.1. Naravno, želimo da Y što točnije slijedi  $X_R$ , a pritom da, po mogućnosti, sasvim anuliramo utjecaj poremećaja Z i mjernog šuma N. No, je li to sve moguće ostvariti odjednom?

Ako nema šuma, tj.  $N(j\omega) \equiv 0$ , tada je pogodno imati  $T(j\omega) = 1$  jer odmah sasvim potiskujemo poremećaj budući da je prema (3.8)  $R(j\omega) = 0$ . U praksi,  $X_R$  i Z sadrže pretežno niskofrekvencijske komponente, dok N često sadrži one visokofrekvencijske. Zato je pravilan izbor:

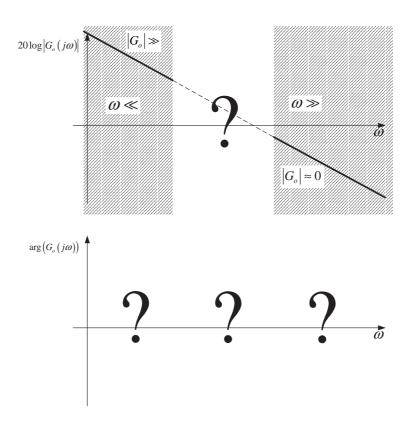
$$T(j\omega) = 1, \ (R(j\omega) = 0) \quad \text{za} \quad \omega \ll$$
  
 $T(j\omega) = 0, \ (R(j\omega) = 1) \quad \text{za} \quad \omega \gg$  (3.10)

Iz zahtjeva  $T(j\omega) = 1$  proizlazi prema (3.5)  $G_o(j\omega) = \infty$ , a iz  $T(j\omega) = 0$  slijedi  $G_o(j\omega) = 0$ . Vidimo da je idealno ponašanje ostvarivo samo u nulama i polovima od  $G_o$ . Potrebe realnih sustava upravljanja zadovoljavat će i sljedeći izbor:

$$T(j\omega) \approx 1, \ (R(j\omega) \approx 0) \ G_o(j\omega) \gg \text{ za } \omega \ll$$
  
 $T(j\omega) \approx 0, \ (R(j\omega) \approx 1) \ G_o(j\omega) \ll \text{ za } \omega \gg$ 

$$(3.11)$$

Budući da je  $|G_o(j\omega)|$  neprekinuta za sve  $\omega$ , prijelaz iz niskofrekvencijskog u visokofrekvencijsko područje uvijek je postepen po  $|G_o(j\omega)|$ . Kvalitativan izgled frekvencijske karakteristike



Slika 3.2: Frekvencijske karakteristike  $G_o$  - kvalitativno.

od  $G_o$  koja udovoljava zahtjev (3.11) dan je na slici 3.2. U srednjefrekvencijskom području, zbog oprečnih zahtjeva (3.11) na  $|G_o|$  u nisko- i visokofrekvencijskom dijelu i neprekinutosti od  $|G_o|$ , niti jedan od spomenutih nije ispunjen. Taj se dio karakteristike oblikuje obvezujućim zahtjevom da projektirani sustav upravljanja bude stabilan (vidi poglavlje ??), kao i zahtjevima na kvalitetu odziva sustava upravljanja na  $X_R$  i Z u uvjetima kada nije zadovoljeno (3.11) (vidi poglavlja ??). Potonjim zahtjevima oblikuje se i fazno-frekvencijska karakteristika.  $G_o$  se, prema (3.3), oblikuje (korigira) prijenosnom funkcijom regulatora  $G_R(s)$ , pri čemu su  $G_s$  i  $G_{sz}$  najčešće fiksni.  $G_R$  se zbog toga često naziva i korekcijskim članom.

Općenito se prijenosna karakteristika  $G_o$  za slučaj kauzalnog linearnog sustava može zapisati u obliku:

$$G_o(s) = \frac{K_o}{s^k} \frac{1 + \beta_1 s + \dots + \beta_m s^m}{1 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_{n-k} s^{n-k}} e^{-T_t s},$$
(3.12)

pri čemu  $K_o$  predstavlja pojačanje otvorenog regulacijskog kruga,  $k \geq 0$  je red astatizma prijenosne funkcije,  $0 \leq m \leq n$  su redovi redom brojnika i nazivnika prijenosne funkcije, a  $T_t \geq 0$  predstavlja mrtvo vrijeme. Uvedimo radi kratkoće zapisa i sljedeće oznake:

$$A(s) = 1 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_{n-k} s^{n-k}, \tag{3.13}$$

$$B(s) = 1 + \beta_1 s + \ldots + \beta_m s^m. \tag{3.14}$$

Često se na sustav upravljanja postavlja zahtjev da za zadani signal  $x_R(t)$  ili z(t) greška slijeđenja e(t) u stacionarnom stanju  $(t \to \infty)$  ne prelazi zadani iznos. Na temelju tog zahtjeva može se odrediti potreban red astatizma od  $G_o$ , te često i pojačanje otvorenog kruga  $K_o$ . Naime, teorem o graničnoj vrijednosti tvrdi:

$$e_{\infty} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) \tag{3.15}$$

Sa sheme 3.1, te iz (3.6) proizlazi:

$$E(s) = X_R(s) - Y_m(s) = X_R(s) - Y(s) - N(s) =$$

$$= X_R(s) - (T(s)X_R(s) + R(s)Z(s) - T(s)N(s)) - N(s) =$$

$$= R(s)(X_R(s) - Z(s) - N(s))$$
(3.16)

Budući da  $N(j\omega)$  uglavnom posjeduje visokofrekvencijske komponente, pri čemu je  $R(j\omega)\approx 1$ , mjerni šum direktno se preslikava u spektar  $E(j\omega)$ . Ulazi referentne veličine i smetnji imaju identične učinke na E, pa za  $X_R$  i Z koristimo zamjensku oznaku  $X_u$ :

$$E(s) = R(s)X_u(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)}X_u(s)$$
(3.17)

Najinteresantniji su iznosi  $e_{\infty}$  na pobude oblika  $X_u(s) = \frac{X_{u0}}{s^r}, \ r \geq 1$ :

- $r = 1 \to x_u(t) = X_{u0}S(t);$
- $r=2 \rightarrow x_u(t) = X_{u0}tS(t)$ ;
- $r = 3 \to x_u(t) = X_{u0} \frac{t^2}{2} S(t);$
- ...;
- $r = r_0 \to x_u(t) = X_{u0} \frac{t^{r_0-1}}{(r_0-1)!} S(t)$ .

Proračunajmo  $e_{\infty}$  za općenite  $k, r \geq 0$ :

$$e_{\infty} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{X_{u0}}{s^r} \frac{s^k A(s)}{s^k A(s) + K_o B(s) e^{-sT_t}} =$$

$$= X_{u0} \lim_{s \to 0} \frac{s^{k+1-r}}{K_o + s^k}$$
(3.18)

Tri su slučaja:

- $k+1 > r \to e_{\infty} = 0$ ;
- $k+1=r \to e_{\infty} = \frac{X_{u0}}{K_0}$  za  $k \neq 0$ ,  $e_{\infty} = \frac{X_{u0}}{1+K_0}$  za k=0;
- $k+1 < r \rightarrow e_{\infty} = \infty$ .

#### PRIMJER 3.1

Dan je proces prijenosne funkcije  $G_s$  kojim treba upravljati prema shemi 3.1 koristeći korekcijski element  $G_R(s)$ :

$$G_s(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)}. (3.19)$$

$$G_R(s) = \frac{K}{s^p} \tag{3.20}$$

Odredite minimalni iznos p, a zatim minimalni K tako da stacionarna vrijednost regulacijskog odstupanja  $e_{\infty}$  na pobudu oblika  $x_R(t)=3tS(t)$  bude manja od a) 2 i b)  $\frac{1}{4}$ . Signali poremećaja i šuma, Z i N, neka su oba 0. Za oba slučaja prikažite sustav upravljanja uz odabrane minimalne p i K diferencijalnom jednadžbom uz  $x_R$  kao ulaz sustava, a y kao izlaz. Diskutirajte uz koje početne uvjete  $y(0), y'(0), \ldots y^{(p+1)}(0)$  je zahtijevano slijeđenje uz zadovoljenje uvjeta na stacionarno odstupanje moguće. Uz dobivene regulatore diskutirajte ispunjenje uvjeta (3.11) na  $G_o$  sustava.

#### RJEŠENJE:

Zapišimo najprije kako izgleda prijenosna funkcija otvorenog kruga  $G_o(s)$ :

$$G_o(s) = \frac{K}{s^p(s+1)(s+5)} = \frac{\frac{K}{5}}{s^p} \frac{1}{\frac{1}{5}s^2 + \frac{6}{5}s + 1}$$
(3.21)

Iz potonjeg oblika  $G_o$  vidi se da je, prema (3.12), k=p. S druge strane, Laplace-ova transformacija od  $x_R$  je  $X_R(s) = \frac{3}{s^2}$ , pa time proizlazi da je r=2. Budući da se za konačan iznos  $e_{\infty}$  zahtijeva  $k+1=p+1 \geq r$ , minimalni mogući iznos od p je:

$$p = r - 1 = 1. (3.22)$$

Uz k=1, r=2 slijedi za  $e_{\infty}$ :

$$e_{\infty} = \frac{3}{\frac{K}{5}} = \frac{15}{K} \tag{3.23}$$

. Time za slučajeve a) i b) slijede minimalni iznosi K:

- a)  $K = K_a = \frac{15}{2}$ ;
- b)  $K = K_b = 60$ .

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga s obzirom na  $X_R$  glasi:

$$G_x(s) = \frac{Y(s)}{X_R(s)} = T(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{1}{\frac{1}{K}s^3 + \frac{6}{K}s^2 + \frac{5}{K}s + 1}$$
(3.24)

Diferencijalna jednadžba koja opisuje ovisnost y o  $x_R$  za dani sustav upravljanja jednostavno se nalazi iz prijenosne funkcije  $G_x$ :

$$\frac{1}{K}\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{6}{K}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{5}{K}\frac{dy}{dt} + y = x_R \tag{3.25}$$

Odziv y(t) sustava upravljanja na pobudu  $x_R(t)$  može se naći kao suma homogenog i partikularnog rješenja,  $y_h$  i  $y_p$  (str. 123. u [2], prirodni i forsirani odziv, tim redom):

$$y = y_h + y_p. (3.26)$$

Budući da  $G_x$  nema konačnih nula, jasno je da je (3.24) minimalna realizacija od  $G_x$ , te se svi prirodni modovi sustava mogu pobuditi na ulazu i očitovati na izlazu sustava upravljanja. Neka su polovi sustava  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  i  $\lambda_3$ , i pretpostavimo da su svi međusobno različiti. Tada je homogeno rješenje oblika:

$$y_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t}$$
(3.27)

Partikularno rješenje ili forsirani odziv za pobudu danu s $x_R(t)$  traži se u obliku:

$$y_p(t) = a + bt, (3.28)$$

pri čemu se koeficijente a i b računa direktnim uvrštavanjem  $y_p$  umjesto y u (3.25) (jer  $y_p$  mora zadovoljavati diferencijalnu jednadžbu):

$$\frac{5}{K}b + a + bt = 3t, (3.29)$$

te nakon izjednačavanja odgovarajućih potencija od t slijedi:

$$b = 3$$
  
 $\frac{5}{K}b + a = 0 \rightarrow a = -\frac{15}{K}$  (3.30)

. Zanimljivo je da se iz koeficijenta a direktno može očitati i  $e_{\infty}$ , s invertiranim predznakom. Koeficijente  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$  nalazi se iz početnih uvjeta (y''(0), y'(0), y(0)). Naime, kako prijenosna funkcija nema konačnih nula, početni uvjeti u 0- i 0+ sigurno su isti. Zasad, y glasi:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + 3t - \frac{15}{K}.$$
 (3.31)

Zapisom jednadžbi za početne uvjete, dolazi se do sljedećeg matrično zapisanog linearnog sustava jednadžbi [3] po  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) + \frac{15}{K} \\ y'(0) - 3 \\ y''(0) \end{bmatrix}.$$
(3.32)

Determinanta ovog sustava (kraće u matričnom zapisu  $AC = Y_0$ ) je oblika van der Mondeove determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2), \tag{3.33}$$

koja je uz pretpostavku da su polovi različiti uvijek različita od nule. Stoga matrica  $A^{-1}$  postoji, te su njeni reci linearno nezavisni.

Slijeđenje je ostvareno samo kada su konstante  $C_i$  uz one modove  $\lambda_i$  za koje vrijedi  $\text{Re}(\lambda_i) \geq 0$  jednake 0. Neka odgovarajući  $C_i$  tvore vektor  $C_+$ , dimenzije  $n_+$ , a odgovarajući retci od  $A^{-1}$  neka tvore matricu  $A_+$ . Svi mogući početni uvjeti  $Y_0$  uz koje će biti ostvareno slijeđenje rješenje su sljedeće matrične jednadžbe:

$$A_{+}Y_{0} = 0. (3.34)$$

Primijetite da je  $Y_0 \in \mathbb{C}^n$  jer su elementi od  $A_+$  općenito kompleksni. Naravno, nama će od interesa biti samo oni  $Y_0$  sa čisto realnim komponentama. Ako je n dimenzija matrice A, onda je dimenzija prostora rješenja po  $Y_0$  (nul-potprostor matrice  $A_+$ ) dana točno s  $n - n_+$ , jer su svi reci od  $A_+$  linearno nezavisni.

Za slučaj a) korijeni karakteristične jednadžbe su (naredba 'roots' u Matlabu):

$$\lambda_{1a} = -5.3256;$$

$$\lambda_{2a} = -0.3372 + 1.1378j;$$

$$\lambda_{3a} = -0.3372 - 1.1378j.$$
(3.35)

Očito za sve  $\lambda_{ia}$  vrijedi  $\operatorname{Re}(\lambda_{ia}) < 0$ , pa je dimenzija  $n_+ = 0$ , a dimenzija početnih uvjeta uz koje je slijeđenje moguće je  $n - n_+ = 3 - 0 = 3$ , pa se za početni uvjet može uzeti bilo koji vektor  $[y(0)y'(0)y''(0)] \in \mathbb{R}^3$ . Dakle, slijeđenje će biti ostvareno bez obzira na početne uvjete. Općenito, svi matematički su svi mogući početni uvjeti iz prostora  $\mathbb{C}^3$ , no kako je  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$  naša je konstatacija ispravna.

Za slučaj b) korijeni karakteristične jednadžbe su:

$$\lambda_{1b} = -6.6152;$$
 $\lambda_{2b} = 0.3076 + 2.9959j;$ 
 $\lambda_{3b} = 0.3076 - 2.9959j.$ 
(3.36)

U ovom slučaju  $n_+=2$ , pa je dimenzija kompleksnih početnih uvjeta uz koje će slijeđenje biti moguće jednaka 1. Nul-potprostor operatora  $A_+$  svi su početni uvjeti koji leže na pravcu

$$\begin{bmatrix} y(0) + \frac{15}{K} \\ y'(0) - 3 \\ y''(0) \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 0.0226 - 0.0002j \\ -0.1494 + 0.0012j \\ 0.9885 - 0.0078j \end{bmatrix}, c \in \mathbb{C}.$$

Nas zanima samo slučaj s realnim početnim uvjetima, a taj se događa za c=0. Dakle je jedino za

$$\begin{bmatrix} y(0) + \frac{15}{K} \\ y'(0) - 3 \\ y''(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

slijeđenje moguće. Svaki infinitezimalno mali pomak početnih uvjeta iz te točke uzrokovao bi da se izlaz sustava po svojim prirodnim modovima raspiri. Sustav s pojačanjem  $K_b$  je dakle nestabilan i tehnički neupotrebljiv.

Za oba slučaja, a) i b), uvjet (3.11) na  $G_o(j\omega)$  zadovoljen je na niskim i visokim frekvencijama, no iz primjera se vidi da to svakako nije jedini uvjet kojeg tehnički upotrebljivi sustav upravljanja treba zadovoljiti.

#### ZADACI ZA VJEŽBU:

#### ZADATAK 3.1

Za svaki od sljedeća tri signala  $x_R$  sa slike 3.1 dana u Laplaceovom području;

- 1.  $X_R(s) = \frac{5}{s}$ ,
- 2.  $X_R(s) = \frac{5}{s^2} i$
- 3.  $X_R(s) = \frac{5}{s^3}$

odredite korekcijski član  $G_R(s)$  minimalnog reda u brojniku i nazivniku te mu pridijelite parametre, tako da stacionarno regulacijsko odstupanje bude manje od 0.1. Proces je dan s:

$$G_s(s) = \frac{s+1}{s+4}.$$

Za sva tri slučaja nadite odzive sustava upravljanja na jediničnu skokovitu pobudu, uz nulte početne uvjete u procesu. Pojedinačno za sva tri slučaja raspravite je li slijeđenje neovisno o početnim uvjetima u sustavu upravljanja?

## Poglavlje 4

# Stabilnost linearnih kontinuiranih sustava

Linearni vremenski nepromjenjivi sustav upravljanja prijenosne funkcije

$$G_{cl}(s) = \frac{B_{cl}(s)}{A_{cl}(s)} \tag{4.1}$$

je stabilan ako su realni dijelovi svih nul-točaka od  $A_{cl}(s)$  (polovi od  $G_{cl}(s)$ ) strogo negativni. Kriteriji kojima se određuje stabilnost ovih sustava dijele se na algebarske i frekvencijske.

Prikladni algebarski kriterij stabilnosti za upotrebu pri "ručnim" proračunima za sustave do otprilike reda 4 je Hurwitzov kriterij [2], [1]. Da bi ga se primijenilo, svakako prvo treba naći polinom  $A_{cl}(s)$ :

$$A_{cl}(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0.$$
(4.2)

Sve su nul-točke polinoma  $A_{cl}(s)$  u lijevoj poluravnini s-ravnine, odnosno sustav  $G_{cl}(s)$  je stabilan prema Hurwitzovom kriteriju ako:

•  $a_i > 0, \forall i;$ 

• sljedećih n-1 determinanti su pozitivne:

$$D_{1} = a_{1} > 0,$$

$$D_{2} = \begin{vmatrix} a_{1} & a_{0} \\ a_{3} & a_{2} \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_{3} = \begin{vmatrix} a_{1} & a_{0} & 0 \\ a_{3} & a_{2} & a_{1} \\ a_{5} & a_{4} & a_{3} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\vdots$$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{1} & a_{0} & \dots & 0 \\ a_{3} & a_{2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} > 0.$$

$$(4.3)$$

Determinanta  $D_i$  stvara se na način da se u prvi stupac upiše prvih i koeficijenata polinoma  $A_{cl}$  s neparnim indeksima počevši od  $a_1$ . Potom se svaki redak dopuni redom po padajućim indeksima do  $a_0$ , a elementi desno od  $a_0$  u dotičnom se retku pune s nulama. Prirodno se umjesto  $a_k$  za k > n upisuju nule.

Najčešće korišteni frekvencijski kriterij stabilnosti je Nyquistov kriterij. Kod Nyquistovog kriterija upotrebljava se prijenosna funkcija *otvorenog* kruga  $G_o(s)$  (poglavlje 3) za provjeru stabilnosti *zatvorenog* sustava upravljanja prijenosne funkcije  $G_{cl}(s)$ .  $G_o(s)$  je dano s

$$G_o(s) = \frac{B(s)}{A(s)},\tag{4.4}$$

pri čemu je B(s) polinom brojnika, a A(s) polinom nazivnika od  $G_o$ . Polovima zatvorenog kruga odgovaraju nultočke funkcije  $1 + G_o(s)$ :

$$1 + G_o(s) = 1 + \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)}.$$
 (4.5)

Vrijedi sljedeći teorem o argumentu [4].

**Teorem 4.1.** Neka je  $G(s): S \to \mathbb{C}_{\infty} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  analitička funkcija na nekom  $S \subset \mathbb{C}_{\infty}$ . Neka je  $\Gamma \subset S$  kontura koja ne prolazi niti jednom nultočkom niti polom od G osim eventualno  $u \infty$ . Neka  $\Gamma$  ne obuhvaća bitno singularne točke<sup>1</sup> od G, a  $s_{p1}, s_{p2}, \ldots, s_{pq}$  neka su svi oni konačni polovi od G reda  $p_1, p_2, \ldots p_q$ , tim redom, te neka su  $s_{n1}, s_{n2}, \ldots s_{nr}$  sve one konačne nultočke od G kratnosti  $n_1, n_2, \ldots n_r$ , tim redom, koji su obuhvaćeni konturom  $\Gamma$ . Za promjenu argumenta od G(s) pri punom obilasku sa s po konturi  $\Gamma$  u smjeru kazaljke na satu (površina obuhvaćena konturom ostaje s desne strane),  $\Delta_{\Gamma}$  arg G(s), vrijedi sljedeće:

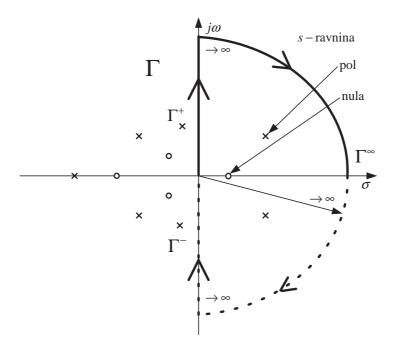
$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma}\arg G(s) = \sum_{k=1}^{q} p_k - \sum_{j=1}^{r} n_j = P - N,$$
(4.6)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Kod razlomljeno racionalnih funkcija kompleksne varijable, eventualno s transcendentnom funkcijom koju unosi element kašnjenja takav se tip singularne točke ne pojavljuje.

pri čemu P označava ukupan broj polova unutar konture  $\Gamma$  uzetih s pripadnim redovima, a N ukupan broj nultočaka unutar konture  $\Gamma$  uzetih s pripadnim kratnostima.

Dodatno, ako se na željenoj konturi  $\Gamma$  baš nalazi neka konačna nultočka ili pol od G, potrebno ju je zaobići u infinitezimalno malom luku, ili sa strane da ta točka uđe u unutrašnjost konture  $\Gamma$ , ili sa strane da ona ne uđe. Mi ćemo to uvijek raditi na način da kontura zaobiđe te točke na način da one ne uđu u unutrašnjost konture. Za takve je točke nužno promatrati što se događa kad se u limesu približuju konturi  $\Gamma$ .

Neka su polovi i nule prijenosne funkcije G općenito raspoređeni kako je dano na slici 4.1. Za konturu  $\Gamma$  odabire se baš imaginarna os u smjeru rastućih frekvencija, te zatvaranje preko

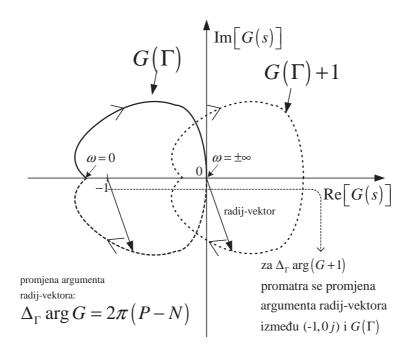


Slika 4.1: Prikaz polova i nula od G i odabir konture  $\Gamma$ .

 $\infty$  kako bi se konturom obuhvatila cijela desna poluravnina s-ravnine. Neka se preslikavanjem G po konturi  $\Gamma$  dobije krivulja  $G(\Gamma)$  prikazana na slici 4.2. Promjena argumenta  $\Delta_{\Gamma}$  arg G jednaka je promjeni argumenta radij-vektora između ishodišta i točaka na  $G(\Gamma)$  pri obilasku cijele krivulje u smjeru određenom smjerom na konturi  $\Gamma$ . Krivulju  $\Gamma$  treba pratiti u 3 segmenta: na pozitivnoj i negativnoj poluosi,  $\Gamma^+$  i  $\Gamma^-$ , te na zakretu s faze  $\frac{\pi}{2}$  u  $-\frac{\pi}{2}$  u beskonačnosti,  $\Gamma^{\infty}$ :

$$\Delta_{\Gamma} \arg G = \Delta_{\Gamma^{+}} \arg G + \Delta_{\Gamma^{\infty}} \arg G + \Delta_{\Gamma^{-}} \arg G. \tag{4.7}$$

Promjena argumenta u beskonačnosti bitna je uvijek ako G završava u beskonačnosti, a bitna je i za slučaj ako G završava za  $s=\infty$  u nuli samo za slučaj kada se početak radij-vektora na kojem promatramo argument definira u nuli (vidjet ćemo da za slučaj promatranja argumenta



Slika 4.2: Prikaz  $G(\Gamma)$  i  $G(\Gamma) + 1$ .

od  $G(\Gamma) + 1$  pomoću  $G(\Gamma)$  početak radij-vektora nije u nuli). Naime, upravo točka  $s = \infty$  često bude višestruka nula, odnosno pol prijenosne funkcije, pa se na njoj može dogoditi skok u argumentu, kojeg se ne vidi na Nyquistovom dijagramu, ali matematički u izračunu on zaista opstoji.

Uvjerimo se da teorem 4.1 vrijedi za  $G(\Gamma)$  s naznačenim polovima i nulama sa slike 4.1. Naime, krenuvši od početka  $G(\Gamma^+)$  (odgovara slici ishodišta s-ravnine) i krečući se po  $\Gamma$  u smjeru slika rastućih frekvencija  $\omega$ , argument radij-vektora pada od  $-\pi$  do  $-\frac{3\pi}{2}$ . Dakle je:  $\Delta_{\Gamma^+} = -\frac{\pi}{2}$ . Koliki je  $\Delta_{\Gamma^{\infty}}$  za ovaj slučaj? Za odgovor na ovo pitanje, moramo pogledati koliko konačnih nula i polova G ima, što je vidljivo na slici 4.1: ukupni red svih konačnih polova je 7, a ukupna kratnost svih konačnih nula 4. Dakle, prijenosna je funkcija oblika:

$$G(s) = \frac{s^4 + \dots}{s^7 + \dots},\tag{4.8}$$

te uvrštavanjem  $s=Re^{j\varphi}$  kada  $R\to\infty$  dobivamo:

$$\lim_{R \to \infty} G(R, \varphi) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{R^3} e^{-j3\varphi}, \tag{4.9}$$

pa se dakle pri promjeni argumenta  $\varphi$  od početnih  $\frac{\pi}{2}$ , gdje je arg  $G(\infty, \frac{\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2}$ , do krajnjih  $-\frac{\pi}{2}$ , gdje je arg  $G(\infty, -\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2}$ , argument od G mijenja ovako:

$$\Delta_{\Gamma^{\infty}} \arg G = G(\infty, -\frac{\pi}{2}) - G(\infty, \frac{\pi}{2}) = \frac{6\pi}{2} = 3\pi.$$
 (4.10)

Doprinos promjene argumenta od  $\Gamma^-$  uvijek je jednak kao i onaj kod  $\Gamma^+$ , jer su krivulje  $G(\Gamma^+)$  i  $G(\Gamma^-)$  međusobno simetrične s obzirom na os Re[G(s)]. Dakle je ukupna promjena argumenta prema 4.7:

$$\Delta_{\Gamma} \arg G = 2(-\frac{\pi}{2}) + 3\pi = 2\pi.$$
(4.11)

Vidimo da isti rezultat slijedi i iz teorema 4.1, jer je razlika broja polova i nula od G u desnoj poluravnini, P - N, upravo jednaka 1.

Izloženi se teorem u provjeravanju stabilnosti zatvorenog kruga upravljanja  $G_{cl}(s)$  na temelju otvorenog kruga  $G_o(s)$  koristi na sljedeći način. Prema 4.5, sve nule od  $1 + G_o(s)$ , odnosno od A(s) + B(s), jedini su polovi prijenosne funkcije  $G_{cl}(s)$ . Nađe li se promjena argumenta od  $1 + G_o(s)$ , pri kretanju s po  $\Gamma$ , uz poznati broj polova od  $1 + G_o(s)$ , tj. nultočki od A(s), lako se prema toeremu o argumentu (teorem 4.1) primijenjenom nad  $1 + G_o(s)$  nalazi i broj nula od  $1 + G_o(s)$  u desnoj poluravnini, tj. broj nultočki od A(s) + B(s). Naravno, kako je već navedeno, za stabilnost zatvorenog sustava upravljanja taj broj mora biti 0 jer su to upravo polovi zatvorenog kruga u desnoj poluravnini s-ravnine. Promotrimo opet sliku 4.2. U njoj je uz  $G(\Gamma)$  ucrtana i krivulja  $G(\Gamma) + 1$  čija se promjena argumenta promatra na jednaki način kao i promjena argumenta  $G(\Gamma)$ , pripadnim radij-vektorom. No, umjesto da se crta  $G(\Gamma) + 1$  i promatra kruženje radij-vektora oko ishodišta, kruženje tog radij vektora može se točno reproducirati radij-vektorom čiji je početak u točki (-1,j0), a kraj na  $G(\Gamma)$  (slika 4.2). Točka (-1,j0) često se naziva i kritična točka, jer broj okruženja spomenutog radij-vektora oko nje pri promjeni s duž  $\Gamma$  bit će direktno povezan sa stabilnošću zatvorenog kruga. Vrijedi sljedeći Nyquistov kriterij stabilnosti:

Promatramo okruženja kritične točke (-1,j0) u smjeru obrnutom od kazaljke na satu (smjer rastućeg argumenta) radij-vektorom čiji je početak u toj točki, a kraj se pomiče po krivulji  $G_o(\Gamma)$  pri promjeni frekvencije duž cijele krivulje  $\Gamma$ . Ako je njihov broj jednak broju polova prijenosne funkcije otvorenog kruga u desnoj poluravnini, sustav je stabilan. Inače je nestabilan.

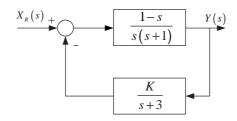
Za razmatrani slučaj sa slika 4.1 i 4.2, broj okruženja kritične točke (-1,j0) pri promjeni frekvencije od  $-\infty$  do  $\infty$  je jednom u smjeru kazaljke na satu, dakle -1 put u smjeru obrnutom od kazaljke na satu. Broj polova od G, pa i od 1+G u desnoj poluravnini je 2, dakle će broj nula u desnoj poluravnini od 1+G odnosno polova zatvorenog sustava prema teoremu o argumentu biti N=3, pa će sustav dobiven zatvaranjem G u zatvorenu petlju biti nestabilan.

Primijetimo dodatno da prolaz krivulje  $G_o(\Gamma)$  točno kroz kritičnu točku upućuje da za neku frekvenciju  $\omega$  vrijedi  $G_o(j\omega) + 1 = 0$ , tj. da je  $j\omega$  upravo pol zatvorenog kruga. Sustav je tada, dakle, u najmanju ruku, na rubu stabilnosti.

Specijalan slučaj Nyquistovog kriterija stabilnosti je onaj kod kojeg  $G_o$  ne posjeduje polove u desnoj poluravnini. Pritom je onda nužno da pripadni radij-vektor oko točke (-1, j0) ne napravi niti jedno okruženje krečući se po  $G_o(\Gamma)$ , a to drugim riječima znači da točka (-1, j0) ne smije biti obuhvaćena krivuljom  $G_o(\Gamma)$ .

#### PRIMJER 4.1

Na slici 4.3 prikazan je regulacijski krug. Hurwitzovim i Nyquistovim kriterijem odredite interval vrijednosti pojačanja K za koje je prikazani regulacijski krug stabilan.



Slika 4.3: Regulacijski krug.

#### RJEŠENJE:

Primjena Hurwitzovog kriterija. Kod utvrđivanja stabilnosti Hurwitzovim kriterijem, prvo treba izračunati karakteristični polinom (nazivnik prijenosne funkcije zatvorenog kruga). Karakteristični polinom  $A_{cl}(s)$  glasi:

$$A_{cl}(s) = s^3 + 4s^2 + (3 - K)s + K = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

Nužan uvjet Hurwitzovog kriterija je da svi koeficijenti uz potencije varijable s moraju biti strogo pozitivni: K > 0 i K < 3. Dovoljan uvjet dobije se rješavanjem Hurwitzovih determinanti koje moraju biti također strogo pozitivne:

$$H_{1} = a_{2} = 4 > 0$$

$$H_{2} = \begin{vmatrix} a_{2} & a_{0} \\ a_{3} & a_{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & K \\ 1 & 3 - K \end{vmatrix} = 12 - 5K > 0 \implies K < \frac{12}{5}$$

$$H_{3} = \begin{vmatrix} a_{2} & a_{0} & 0 \\ a_{3} & a_{1} & 0 \\ 0 & a_{2} & a_{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & K & 0 \\ 1 & 3 - K & 0 \\ 0 & 4 & K \end{vmatrix} = (12 - 5K)K > 0 \implies K \in (0, \frac{12}{5})$$

Slijedi, dakle, da je raspon pojačanja uz koje je razmatrani regulacijski krug stabilan:  $K \in (0, \frac{12}{5})$ .

Primjena Nyquistovog kriterija. Kod Nyquistovog kriterija stabilnost zatvorenog sustava upravljanja određujemo pomoću Nyquistovog dijagrama prijenosne funkcije otvorenog kruga  $G_o(s)$ . Ona glasi:

$$G_o(s) = \frac{K(1-s)}{s(s+1)(s+3)} = \frac{K}{3} \frac{1-s}{s(1+s)(1+\frac{s}{3})}.$$

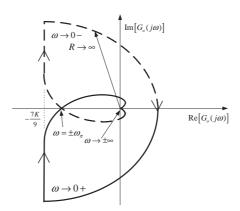
Da bismo skicirali pripadni Nyquistov dijagram, najbolje je krenuti od pripadnog Bodeovog dijagrama, gdje se zasebno jednostavnim pravilima iscrtavaju posebno amplitudna, posebno fazna karakteristika, pa ih se potom "spoji" zajedno u kompleksnoj ravnini u Nyquistov dijagram. Najčešće je dovoljno naći kako se krivulja ponaša u okolini točaka  $\omega=0-,\,\omega=0+$  i  $\omega=\pm\infty$ . Karakteristične točke krivulje, poput mjesta presjecišta s imaginarnom osi i pripadne frekvencije, koje su važne za utvrđivanje broja zaokruženja kritične točke, ionako se tijekom proračuna analitički nalaze. No, svakako je važno skicirati smjer krivulje i zatvoriti ju na valjani način. Za K>0 slijedi:

- $\omega = 0+ \to |G_o(j\omega)| = \infty$ ,  $\arg(G_o(j\omega)) = -\frac{\pi}{2}$ , dodatno se može proračunati nalaženjem realnih i imaginarnih dijelova od  $G_o$  da je  $\lim_{\omega \to 0} \operatorname{Re}[G_o(j\omega)] = -\frac{7K}{9}$ ;
- $\omega = \pm \infty \rightarrow |G_o(j\omega)| = 0$ ,  $\arg(G_o(j\omega)) = -2\pi$ , primijetite da nam sada nije interesantno okruženje točke 0 u slici  $G_o(\pm j\infty)$ , jer u 0 nije početak radij-vektora kojim promatramo zaokruženja;
- iz pripadnog se Bodeovog dijagrama može uočiti da faza i amplituda u raspona frekvencija  $\omega \in (0, \infty)$  neprestano padaju;
- promjena iz  $\omega = 0-$  u  $\omega = 0+$   $\rightarrow$  uz  $s=j\omega=jRe^{j\varphi}$  za  $G_o$  u okolici nule glasi:

$$\lim_{R \to 0} G_o(R, \varphi) = \frac{K}{3R} e^{-j\varphi},$$

stoga se pri prijelazu kroz 0 u smjeru zadanom krivuljom obilaska  $(0-\to \varphi=-\frac{\pi}{2}\to \arg(G_o)=\frac{\pi}{2}$  prema  $0+\to \varphi=\frac{\pi}{2}\to \arg(G_o)=-\frac{\pi}{2})$  arg $(G_o)$  mijenja za  $-\pi$  (kruženje u smjeru padajućeg argumenta (smjer kazaljke na satu));

Iz upravo navedenih razmatranja, može se zaključiti da Nyquistov dijagram za K > 0 izgleda kako je dano na slici 4.4. Za ovakav Nyquistov dijagram sustav će biti stabilan, po Nyquistovu



Slika 4.4: Nyquistov dijagram.

kriteriju, ako i samo ako je broj zaokruženja oko kritične točke radij-vektora s početkom u kritičnoj točki, a vrhom na Nyquistovoj krivulji, kad se frekvencija mijenja od  $-\infty$  do  $\infty$ , jednak broju nestabilnih polova otvorenog kruga. No, broj nestabilnih polova prijenosne funkcije otvorenog kruga je 0, pa toliki mora biti i broj zaokruženja ako želimo da sustav bude stabilan. Iz prikazanog Nyquistovog dijagrama proizlazi da će broj spomenutih zaokruženja biti potrebnih 0 kada kritična točka ostane lijevo od presjecišta Nyquistove karakteristike i negativne realne osi. U protivnom, broj zaokruženja radij vektora oko kritične točke bit će -2 te ćemo imati za  $1+G_o$  da je P-N=-2, tj. uz P=0 da je N=2. Presijecanje Nyquistove krivulje i negativne realne osi zbiva se pri frekvenciji  $\omega_{\pi}$ , koja se nalazi na način:

$$\arg G_o(j\omega_\pi) = -\frac{\pi}{2} - \arctan \omega_\pi - \arctan \frac{\omega_\pi}{3} - \arctan \omega_\pi = -\pi.$$

Dvama uzastopnim primjenama relacije za zbroj funkcija arctan

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy},\tag{4.12}$$

dolazi se do sljedeće relacije:

$$\arctan \frac{-\omega_{\pi}^{3} + 7\omega_{\pi}}{3 - 5\omega_{\pi}^{2}} = \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3 - 5\omega_{\pi}^{2} = 0 \rightarrow \omega_{\pi} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Prema gore izloženom, zahtijevamo za K > 0:

$$|G_o(j\omega_{\pi})| = \frac{K}{3} \frac{\sqrt{1 + \omega_{\pi}^2}}{\sqrt{\omega_{\pi}(1 + \omega_{\pi}^2)(1 + \frac{\omega_{\pi}^2}{9})}} < 1 \rightarrow$$

$$\to K < 3\omega_{\pi} \sqrt{1 + \frac{\omega_{\pi}^2}{9}} = 3\sqrt{\frac{3}{5}} \sqrt{\frac{48}{45}} = \frac{3\sqrt{3}\sqrt{16 \cdot 3}}{\sqrt{5}\sqrt{5 \cdot 9}} = \frac{12}{5}.$$

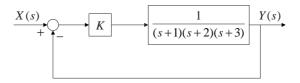
Što se događa za K < 0? Nyquistov dijagram je samo dodatno zarotiran za  $-\pi$  zbog doprinosa predznaka od K fazi. No, primijetite da u tom slučaju za bilo koju vrijednost |K| uvijek postoji zaokruženje Nyquistove krivulje oko kritične točke, pa je sustav nužno nestabilan. Ostaje dakle jedino:

$$K \in (0, \frac{12}{5}),$$

baš kao što je dao i Hurwitzov kriterij. Ovi kriteriji uvijek daju isti rezultat, jer odgovaraju na dva načina na isto pitanje: "Je li zatvoreni sustav upravljanja stabilan?".

#### PRIMJER 4.2

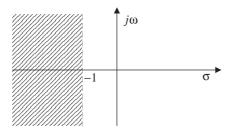
Za sustav prikazan na slici 4.5 potrebno je koristeći Nyquistov kriterij stabilnosti, odrediti područje parametra K pri kojem svi polovi zatvorenog regulacijskog kruga imaju realni dio manji od -1 (šrafirano područje na slici 4.6).



Slika 4.5: Zatvoreni regulacijski krug

#### RJEŠENJE:

Budući da se desno od pravca s = -1 u kompleksnoj s-ravnini ne smije nalaziti niti jedan pol prijenosne funkcije, iskoristit ćemo teorem o argumentu i izloženi Nyquistov kriterij stabilnosti



Slika 4.6: Dozvoljeno područje polova zatvorenog kruga

da nađemo u kojem se području koeficijent pojačanja K mora nalaziti. Naime, zaokruženje po sljedećoj konturi  $\Gamma$  od  $G_o$  ne smije sadržavati niti jednu nulu od  $1+G_o$  (pol od  $G_{cl}$ ):

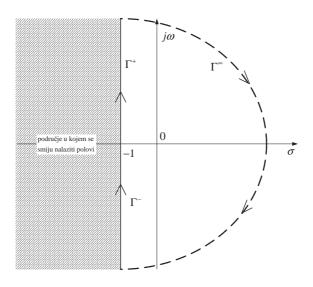
$$\Gamma^{+} = \left\{ s = -1 + j\omega \in \mathbb{C}_{\infty} : \omega \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \right\},$$

$$\Gamma^{\infty} = \left\{ \infty : \arg \in \left[ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right] \right\},$$

$$\Gamma^{-} = \left\{ s = -1 + j\omega \in \mathbb{C}_{\infty} : \omega \in \mathbb{R}^{-} \right\},$$

$$\Gamma = \Gamma^{+} \cup \Gamma^{\infty} \cup \Gamma^{-}.$$

Kontura  $\Gamma$  za ovaj je primjer ilustrirana slikom 4.7. Budući da se niti jedan pol od  $G_o$  ne nalazi

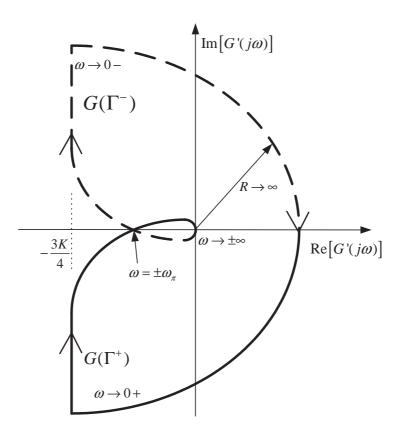


Slika 4.7: Prikaz konture  $\Gamma$ .

unutar konture  $\Gamma$ , po teoremu o argumentu točka (-1, j0) niti jednom se ne smije okružiti s $G_o(\Gamma)$ , pa se niti jedna nula od  $1 + G_o(s)$ , tj. pol zatvorenog sustava, neće naći desno od  $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$ , tj. u nedozvoljenom području. Označimo:

$$G_o(\Gamma)|_{\omega} = G_o(-1+j\omega) = G'(s)|_{s=j\omega} = \frac{\frac{K}{2}}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

Dakle, praktički crtamo Nyquistov dijagram za  $G'(j\omega)$  koji sasvim odgovara funkciji  $G_o(\Gamma) = G_o(-1 + j\omega)$ . Za slučaj K > 0 on izgleda kako je dano na slici 4.8. U duhu rasprave o



Slika 4.8: Nyquistov dijagram za  $G'(j\omega)$  uz K > 0.

argumentu, treba vidjeti kako na oblik  $G_o(\Gamma)$  bitno utječe pol koji se nalazi tik do  $\Gamma$  (pol u -1), ali izvan konture. Kada  $\omega \to 0$ ,  $G'(j\omega)$  postaje, uz  $j\omega = Re^{j\varphi}$ :

$$\lim_{R \to 0} G'(j\omega) = \frac{K}{2R} e^{-j\varphi},$$

pa je za  $R \to 0$  uz  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  faza veća nego uz  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Dakle, prolaskom kroz 0 u smjeru konture  $\Gamma$  i promjenom faze iz negativne u pozitivnu argument od  $G(\Gamma)$  mijenja se za  $-\pi$  (kretanje argumenta u smjeru kazaljke na satu, vidi sliku!), te uz odgovarajući raspon pojačanja K ne obuhvaća točku (-1, j0) zdesna.<sup>3</sup>

 $<sup>^2</sup>$ Alternativno, možemo reći da tražimo interval pojačanja K, uz koje je zatvoreni krug s prijenosnom funkcijom otvorenog kruga G'(s) stabilan. Dakle, ostatak zadatka bi se u tom slučaju sveo baš na analizu stabilnosti, ne nužno po Nyquistovu kriteriju.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Preptostavka na iznose  $\varphi$  u okolici nule navedena je za slučaj kada pol u -1 slijeva teži konturi  $\Gamma$  na slici 4.7. Kad pol u -1 teži zdesna konturi  $\Gamma$ , tj. kad se nalazi unutar konture, kut  $\varphi$  u  $Re^{j\varphi}$  mijenja se od  $-\frac{\pi}{2}$  do  $\frac{-3\pi}{2}$ , pa je promjena argumenta od  $G'(\Gamma)$  prolaskom  $\Gamma$  tik uz pol u -1 u smjeru konture s  $\frac{\pi}{2}$ 

Dakle, uz K > 0, sve su vrijednosti od K prihvatljive dok god Nyquistov dijagram ne obuhvati kritičnu točku. To će se dogoditi za  $|G'(j\omega_{\pi})| \geq 1$ , pri čemu frekvencija  $\omega_{\pi}$  odgovara frekvenciji na kojoj je arg  $G' = -\pi$ . Iz potonje jednakosti nađimo frekvenciju  $\omega_{\pi}$ :

$$\arg G'(j\omega_{\pi}) = -\frac{\pi}{2} - \arctan \omega_{\pi} - \arctan \frac{\omega_{\pi}}{2} = -\pi \rightarrow$$

$$\rightarrow \arctan \omega_{\pi} + \arctan \frac{\omega_{\pi}}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Iz formule za zbroj dviju funkcija arctan, relacija (4.12), slijedi:

$$\arctan \frac{\frac{3}{2}\omega_{\pi}}{1 - \frac{\omega_{\pi}^{2}}{2}} = \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\frac{3}{2}\omega_{\pi}}{1 - \frac{\omega_{\pi}^{2}}{2}} = \infty \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega_{\pi} = \sqrt{2}.$$

Za K > 0 prihvatljivi su K za koje vrijedi:

$$|G'(j\omega_{\pi})| = \frac{\frac{K}{2}}{\omega_{\pi}\sqrt{(1+\omega_{\pi}^2)(1+\frac{\omega_{\pi}^2}{4})}} \le 1 \to$$

$$\to K \le 6.$$

Sto će biti kad su pojačanja negativna (K < 0)? Negativni predznak pojačanja promijenit će Nyquistov dijagram sa slike 4.8 utoliko što će sve biti zarotirano za kut  $-\pi$ . U tom slučaju će pripadni Nyquistov dijagram uvijek obuhvaćati kritičnu točku, pa su dakle polovi uvijek u nedozvoljenom području. Dakle, rješenje je:

$$K \in (0,6).$$

### ZADACI ZA VJEŽBU:

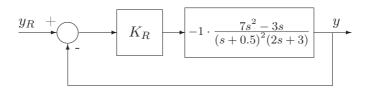
### ZADATAK 4.1

Za regulacijski sustav prikazan na slici 4.9 potrebno je primjenom Hurwitzovog kriterija stabilnosti odrediti interval vrijednosti pojačanja  $K_R$  za koje je prikazani sustav stabilan.

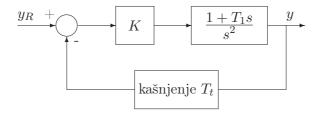
### ZADATAK 4.2

Za sustav upravljanja s mrtvim vremenom (vidi sliku 4.10) potrebno je primjenom Nyquistovog kriterija stabilnosti odrediti interval vrijednosti mrtvog vremena  $T_t$  za koji je sustav stabilan. Zadano je: K = 5,  $T_1 = 10[s]$ 

na  $\frac{3\pi}{2}$ . Nyquistov dijagram sa slike 4.8 promijenio bi se samo utoliko što bi krivulja  $G'(j\omega)$  u  $\infty$  prolazila drugim pa trećim kvadrantom, u smjeru porasta argumenta. Sad bismo za ispunjenje uvjeta zadatka, prema toeremu o argumentu, tražili jedno okruženje točke (-1,j0) s  $G'(\Gamma)$  u smjeru kazaljke na satu, jer kontura  $\Gamma$  sada obuhvaća točno jedan pol od G'. Tako bi opet broj nula od 1+G' obuhvaćenih konturom  $\Gamma$  bio 0 za odgovarajući raspon od K.



Slika 4.9: Regulacijski sustav.



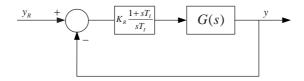
Slika 4.10: Regulacijski sustav s mrtvim vremenom.

### ZADATAK 4.3

Zadan je proces

$$G(s) = \frac{s-1}{(s+3)(s+4)}$$

kojeg želimo upravljati PI regulatorom prema shemi na slici 4.11. Nadite koje sve uvjete trebaju



Slika 4.11: Blokovska shema upravljanja.

zadovoljiti parametri PI regulatora da bi zatvoreni sustav upravljanja bio stabilan. Predložite izbor parametra  $K_R$  da sustav bude stabilan kada je  $T_I=0.5$  s.

## Poglavlje 5

# Krivulja mjesta korijena

Mijenjanjem jednog parametra regulacijskog kruga mijenjaju se položaji korijena karakteristične jednadžbe zatvorenog regulacijskog kruga u s - ravnini. Na taj način korijeni opisuju putanju u s - ravnini koja se naziva **krivuljom mjesta korijena** zatvorenog regulacijskog kruga. Na temelju izgleda krivulje mjesta korijena zaključuje se o stabilnosti zatvorenog regulacijskog kruga te o "relativnoj" stabilnosti na temelju udaljenosti polova od imaginarne osi s - ravnine. Najčešće se kao promjenjiv parametar regulacijskog kruga uzima pojačanje  $k_o$  otvorenog regulacijskog kruga. Pretpostavimo da je prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga  $G_o(s)$  razlomljena racionalna funkcija oblika:

$$G_o(s) = k_o \frac{(s - s_{N1})(s - s_{N2})...(s - s_{Nm})}{(s - s_{P1})(s - s_{P2})...(s - s_{Pn})} = k_o \frac{B(s)}{N(s)} = k_o \cdot G(s),$$
(5.1)

gdje su  $s_{N\mu}$  za  $\mu=1,...,m$  nule prijenosne funkcije, a  $s_{P\nu}$  za  $\nu=1,...,n$  polovi prijenosne funkcije. Pojačanje  $k_o$  uvijek se uzima kao pozitivan broj, a brojnik prijenosne funkcije razmatra se u dva slučaja:

- i) B(s) je moničan polinom;
- ii) -B(s) je moničan polinom.

Iz karakteristične jednadžbe zatvorenog regulacijskog kruga (5.2), odnosno (5.3), određuju se amplitudni (5.4) i fazni uvjet (5.5) za određivanje krivulje mjesta korijena.

$$1 + k_0 G(s) = 0 (5.2)$$

$$G(s) = -\frac{1}{k_0} \tag{5.3}$$

$$|G(s)| = \frac{1}{k_0} \tag{5.4}$$

$$\arg[G(s)] = 180^{\circ}(2k-1), \quad za \quad k = 1, 2, 3, \dots$$
 (5.5)

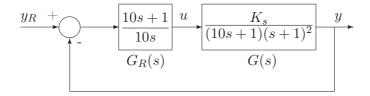
Sve točke kompleksne ravnine koje zadovoljavaju fazni uvjet predstavljaju geometrijsko mjesto svih mogućih polova zatvorenog regulacijskog kruga (KMK), dok amplitudni uvjet daje informaciju o pojačanju  $k_o$  u pojedinim točkama KMK. Iz amplitudnog i faznog uvjeta izvedena

moničan
polinom jest
polinom
koji ima
koeficijent 1
uz član s
najvećom
potencijom

su opća pravila za približno crtanje krivulje mjesta korijena koja su navedena u primjerima gdje su i primijenjena.

### PRIMJER 5.1

Za sustav zadan slikom 5.1 skicirati krivulju mjesta korijena kada se K mijenja od nule do neizmjerno.



Slika 5.1: Regulacijski sustav s PI-regulatorom.

### RJEŠENJE:

Polazište za određivanje KMK jest prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_o(s) = K_s \frac{10s+1}{10s(10s+1)(s+1)^2}. (5.6)$$

Prijenosnu funkciju svodimo na oblik prema 5.1:

$$G_o(s) = k_o \frac{s + \frac{1}{10}}{s(s + \frac{1}{10})(s + 1)^2},$$
(5.7)

pri čemu je  $k_o = \frac{K_s}{10} > 0$ . Iz oblika prijenosne funkcije (5.7) vidimo da je brojnik B(s) moničan polinom. Primjenom sljedećih pravila moguće je približno skicirati KMK:

 $\bullet$ izračunati nule prijenosne funkcije  $G_o(s)$  i označiti ih s"o" u s - ravnini:

m je broj nula  $G_o(s)$ 

$$m = 1,$$

$$s_{N1} = -\frac{1}{10};$$

ullet izračunati polove prijenosne funkcije  $G_o(s)$  i označiti ih s "x" u s - ravnini:

n je broj polova  $G_o(s)$ 

$$n = 4,$$
  
 $s_{P1} = 0,$   
 $s_{P2} = -\frac{1}{10},$   
 $s_{P3} = -1,$   
 $s_{P4} = -1;$ 

 $\bullet$ točka na realnoj osi  $s=\sigma+j0$  pripada KMK ako je ukupan broj nula i polova desno od nje **neparan**:

$$\sigma \in \langle -\infty, 0];$$

• m grana KMK koje počinju u polovima otvorenog regulacijskog kruga završavaju u nulama regulacijskog kruga, a n-m grana KMK preostalih polova teže u  $\infty$ :

$$n - m = 3;$$

 $\bullet$ izračunati točku težista korijena, koja je sjecište n-mgrana, prema:

$$\sigma_{a} = \frac{1}{n-m} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} Re(s_{P\nu}) - \sum_{\mu=1}^{m} Re(s_{N\mu}) \right\},$$

$$\sigma_{a} = \frac{1}{3} \left\{ (0 - \frac{1}{10} - 1 - 1) - (-\frac{1}{10}) \right\} = -\frac{2}{3};$$
(5.8)

ullet odrediti i ucrtati u s - ravninu asimptote n-m grana kao polupravce s početkom u točki težista korijena i pod kutem računanog prema:

$$\alpha_{k} = \frac{180(2k-1)}{n-m}, \quad k = 1, 2, ..., n-m ,$$

$$\alpha_{1} = \frac{180}{3} = 60^{\circ},$$

$$\alpha_{2} = \frac{3 \cdot 180}{3} = 180^{\circ},$$

$$\alpha_{3} = \frac{5 \cdot 180}{3} = 300 = -60^{\circ};$$
(5.9)

• između dva pola/nule na dijelu realne osi koji pripada KMK nalazi se barem jedna točka grananja/sjedinjenja  $s = \sigma_v$  određena prema:

$$\begin{split} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{s - s_{P\nu}} &= \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{s - s_{N\mu}} \\ \frac{1}{s} + \frac{1}{s + \frac{1}{10}} + \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 1} &= \frac{1}{s + \frac{1}{10}} \\ \sigma_{v} &= -\frac{1}{3}, \ \sigma_{v} \in KMK \longrightarrow \text{točka grananja} \end{split} \tag{5.10}$$

• odrediti i označiti u s - ravnini izlazne kutove  $\phi_I$  iz polova te ulazne kutove  $\phi_U$  u nule otvorenog regulacijskog kruga prema:

 $r_{Pi}$  i  $r_{Ni}$  su kratnosti pola Pi te nule Ni

$$\begin{split} \phi_{I,k}(s_{Pi}) &= \frac{1}{r_{Pi}} \left( \sum_{\mu=1}^{m} \angle(s_{Pi} - s_{N\mu}) - \sum_{\substack{\nu=1\\\nu \neq i}}^{n} \angle(s_{Pi} - s_{P\nu}) + 180(2k-1) \right), \ k = 1, ..., r_{Pi}(5.11) \\ \phi_{U,k}(s_{Ni}) &= \frac{1}{r_{Ni}} \left( \sum_{\nu=1}^{n} \angle(s_{Ni} - s_{P\nu}) - \sum_{\substack{\mu=1\\\mu \neq i}}^{m} \angle(s_{Ni} - s_{N\nu}) + 180(2k-1) \right), \ k = 1, ..., r_{Ni}(5.12) \\ \phi_{I}(s_{P1}) &= 0 - (0 + 0 + 0) + 180 = 180^{\circ}, \\ \phi_{I}(s_{P2}) &= 0 - (180 + 0 + 0) + 180 = 0^{\circ}, \\ \phi_{I,1}(s_{P3}) &= \frac{1}{2}(180 - (180 + 180 + 0) + 180) = 0^{\circ}, \\ \phi_{I,2}(s_{P4}) &= \frac{1}{2}(180 - (180 + 180 + 0) + 3 \cdot 180) = 180 = 0^{\circ}, \\ \phi_{U}(s_{N1}) &= 180 + 0 + 0 + 0 + 180 = 360 = 0^{\circ}. \end{split}$$

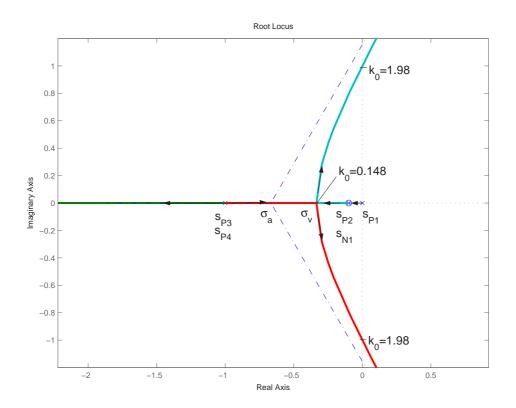
Egzaktan prikaz KMK dan je na slici 5.2.

### PRIMJER 5.2

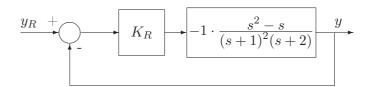
Za regulacijski sustav prikazan slikom 5.3 skicirati krivulju mjesta korijena kada se  $|K_R|$  mijenja od nule do neizmjerno.

#### RJEŠENJE:

Skiciranje KMK podijelit ćemo na dva slučaja:



Slika 5.2: Rješenje primjera 1.



Slika 5.3: Regulacijski sustav.

- i)  $K_R \ge 0$
- ii)  $K_R \leq 0$

Prijenosna funkcija otvorenog kruga za slučaj i) je oblika:

$$G_o(s) = K_R \frac{-s(s-1)}{(s+1)^2(s+2)} = K_R \frac{B(s)}{N(s)}.$$
(5.13)

Iz oblika prijenosne funkcije (5.13) vidimo da je polinom -B(s) moničan pa vrijede nešto drugačija pravila za skiciranje KMK:

 $\bullet$ izračunati nule prijenosne funkcije  $G_o(s)$  i označiti ih s"o" u s - ravnini:

$$m = 2,$$
  
 $s_{N1} = 0,$   
 $s_{N2} = 1;$ 

ullet izračunati polove prijenosne funkcije  $G_o(s)$  i označiti ih s "x" u s - ravnini:

$$n = 3,$$
  
 $s_{P1} = -1,$   
 $s_{P2} = -1,$   
 $s_{P3} = -2;$ 

 $\bullet$ točka na realnoj osi  $s=\sigma+j0$  je KMK ako je ukupan broj nula i polova desno od nje **paran**:

$$\sigma \in [-2,0] \cup [1,\infty\rangle$$
;

• m grana KMK koje počinju u polovima otvorenog regulacijskog kruga završavaju u nulama regulacijskog kruga, a n-m grana KMK preostalih polova teže u  $\infty$ :

$$n - m = 1;$$

• izračunati točku težista korijena, koja je sjecište n-m grana, prema izrazu (5.14):

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m} \left\{ \sum_{\nu=1}^n Re(s_{P\nu}) + \sum_{\mu=1}^m Re(s_{N\mu}) \right\},$$

$$\sigma_a = \{ (-1-1-2) + (0+1) \} = -3;$$
(5.14)

• odrediti i ucrtati u s - ravninu asimptote n-m grana kao polupravce s početkom u točki težista korijena i kutom računanog prema:

$$\alpha_k = \frac{180 \cdot 2k}{n - m}, k = 1, 2, ..., n - m,$$

$$\alpha_1 = 0^{\circ};$$
(5.15)

• između dva pola/nule na dijelu realne osi koji pripada KMK nalazi se barem jedna točka grananja/sjedinjenja  $s = \sigma_v$  određena prema:

$$\begin{split} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1},\\ \sigma_{v1} &= 4.2899, \ \sigma_{v1} \in KMK \longrightarrow \texttt{točka sjedinjenja},\\ \sigma_{v2} &= -1.5842, \ \sigma_{v2} \in KMK \longrightarrow \texttt{točka grananja},\\ \sigma_{v3} &= 0.2943, \ \sigma_{v2} \notin KMK; \end{split}$$

• odrediti i označiti u s - ravnini izlazne kutove  $\phi_I$  iz polova te ulazne kutove  $\phi_U$  u nule otvorenog regulacijskog kruga prema:

$$\phi_{I,k}(s_{Pi}) = \frac{1}{r_{Pi}} \left( \sum_{\mu=1}^{m} \angle(s_{Pi} - s_{N\mu}) - \sum_{\substack{\nu=1\\\nu \neq i}}^{n} \angle(s_{Pi} - s_{P\nu}) + 180 \cdot 2k \right), \ k = 1, ..., r_{Pi} \ (5,16)$$

$$\phi_{U,k}(s_{Ni}) = \frac{1}{r_{Ni}} \left( \sum_{\nu=1}^{n} \angle(s_{Ni} - s_{P\nu}) - \sum_{\substack{\mu=1\\\mu \neq i}}^{m} \angle(s_{Ni} - s_{N\nu}) + 180 \cdot 2k \right), \ k = 1, ..., r_{Ni}(5.1,7)$$

$$\phi_{I,1}(s_{P1}) = \frac{1}{2} (180 + 180 - (0+0) + 360) = 0^{\circ},$$

$$\phi_{I,2}(s_{P2}) = \frac{1}{2} (180 + 180 - (0+0) + 2 \cdot 360) = 180^{\circ},$$

$$\phi_{I}(s_{P3}) = 180 + 180 - (180 + 180) + 360 = 0^{\circ},$$

$$\phi_{U}(s_{N1}) = 0 + 0 + 0 - 180 + 360 = 180^{\circ},$$

$$\phi_{U}(s_{N2}) = 0 + 0 + 0 - 0 + 360 = 0^{\circ}.$$

Egzaktan prikaz KMK za slučaj i) dan je na slici 5.4.

Prijenosna funkcija otvorenog kruga za slučaj ii):

$$G_o(s) = K \frac{s(s-1)}{(s+1)^2(s+2)} = K \frac{B(s)}{N(s)},$$
(5.18)

gdje je  $K = -K_R \ge 0$ . Prema izrazu (5.18) polinom B(s) je moničan pa vrijede pravila izložena u prvom primjeru za skiciranje KMK. Navedena su samo ona pravila koja se razlikuju od onih primijenjenih u slučaju i):

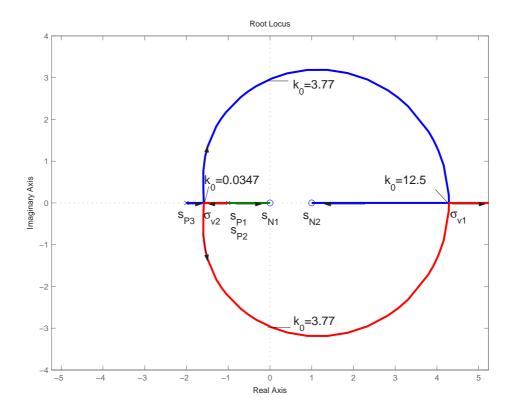
• točka na realnoj osi  $s = \sigma + j0$  je KMK ako je ukupan broj nula i polova desno od nje **neparan**:

$$\sigma \in \langle \infty, -2 \rangle \cup \{-1\} \cup [0, 1];$$

• izračunati točku težista korijena prema:

$$\sigma_a = \{(-1 - 1 - 2) - (0 + 1)\} = -5$$
:

• odrediti i ucrtati u s - ravninu asimptote n-m grana kao polupravce s početkom u točki težista korijena i kutem računanog prema (5.9):



Slika 5.4: Rješenje primjera 2 za slučaj i).

$$\alpha_1 = 180^{\circ};$$

• između dva pola/nule na dijelu realne osi koji pripada KMK nalazi se barem jedna točka grananja/sjedinjenja  $s = \sigma_v$  određena prema (5.10):

$$\begin{split} \sigma_{v1} &= 4.2899, & \sigma_{v1} \notin KMK, \\ \sigma_{v2} &= -1.5842, & \sigma_{v2} \notin KMK, \\ \sigma_{v3} &= 0.2943, & \sigma_{v2} \in KMK \longrightarrow \texttt{točka sjedinjenja}; \end{split}$$

• odrediti i označiti u s - ravnini izlazne kutove  $\phi_I$  iz polova te ulazne kutove  $\phi_U$  u nule otvorenog regulacijskog kruga prema izrazima (5.11) te (5.12):

$$\phi_{I,1}(s_{P1}) = \frac{1}{2}(180 + 180 - (0+0) + 180) = -90^{\circ},$$

$$\phi_{I,2}(s_{P2}) = \frac{1}{2}(180 + 180 - (0+0) + 3 \cdot 180) = 90^{\circ},$$

$$\phi_{I}(s_{P3}) = 180 + 180 - (180 + 180) + 180 = 180^{\circ},$$

$$\phi_{U}(s_{N1}) = 0 + 0 + 0 - 180 + 180 = 0^{\circ},$$

$$\phi_{U}(s_{N2}) = 0 + 0 + 0 - 0 + 180 = 180^{\circ}.$$

Egzaktan prikaz KMK za slučaj ii) dan je na slici 5.5.

### ZADACI ZA VJEŽBU:

### ZADATAK 5.1

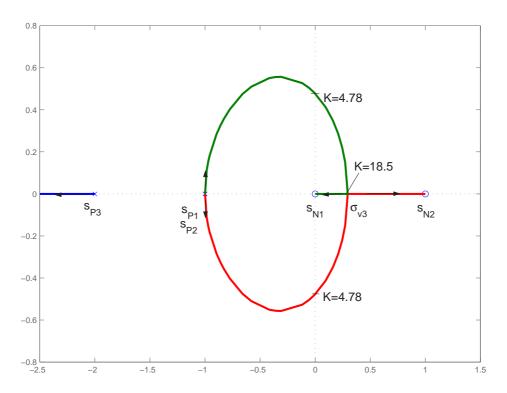
Za regulacijski krug prikazan na slici 5.6 nacrtajte krivulju mjesta korijena sustava kada se K mijenja od nule do neizmjerno.

### ZADATAK 5.2

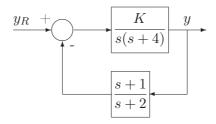
Za regulacijski krug prikazan na slici 5.7 nacrtajte krivulju mjesta korijena sustava kada se K mijenja od nule do neizmjerno.

### 

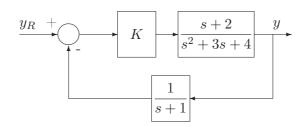
Za regulacijski krug prikazan na slici 5.8 nacrtajte krivulju mjesta korijena sustava kada se K mijenja od nule do neizmjerno.



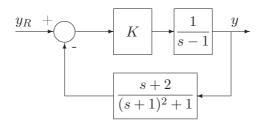
Slika 5.5: Rješenje primjera 2 za slučaj ii).



Slika 5.6: Regulacijski krug.



Slika 5.7: Regulacijski krug.



Slika 5.8: Regulacijski krug.

## Poglavlje 6

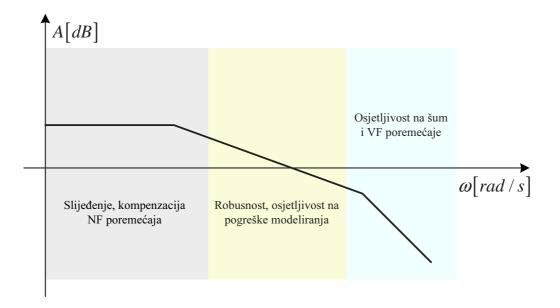
# Sinteza sustava u frekvencijskom području

Sinteza sustava upravljanja u frekvencijskom području dugo vremena je bila jedna od najznačajnijih metoda projektiranja sustava upravljanja. Razlog tomu leži u činjenici da frekvencijska karakteristika serijski povezanih dinamičkih sustava<sup>1</sup> (regulator i proces) odgovara zbrajanju njihovih frekvencijskih karakteristika u Bodeovom dijagramu. Kako bi se zadovoljili zahtjevi na sustav upravljanja koji se obično izražavaju pokazateljima kvalitete zatvorenog regulacijskog kruga u vremenskom (nadvišenje, vrijeme porasta, vrijeme smirivanja i sl.) i/ili frekvencijskom području (širina pojasa propuštanja  $\omega_h$ , rezonantno izdizanje  $M_r$ ), potrebno je te zahtjeve na neki način "transformirati" u zahtjeve na frekvencijsku karakteristiku otvorenog kruga. Okvirna povezanost frekvencijske karakteristike otvorenog kruga s pokazateljima vladanja zatvorenog regulacijskog kruga prikazana je na slici 6.1. Vidljivo je da frekvencijska karakteristika otvorenog regulacijskog kruga u području niskih frekvencija određuje ponašanje zatvorenog sustava u stacionarnom stanju, odnosno kompenzaciju nisko-frekvencijskih smetnji. Tako npr., ukoliko je nagib amplitudne karakteristike na niskim frekvencijama 0, tada će sustav imati pogrešku stacionarnom stanju na skokovitu postavnu vrijednost. Ukoliko je, s druge strane, početni nagib amplitudno-frekvencijske karakteristike -1, tada je osigurana stacionarna točnost na skokovitu postavnu vrijednost, ali postoji konačna pogreška slijeđenja funkcije linearnog porasta (kinetička pogreška).

S druge strane, prijelazna je pojava određena frekvencijskim karakteristikama na srednjim frekvencijama (oko presječne frekvencije), dok frekvencijska karakteristika na visokim frekvencijama određuje osjetljivost sustava na mjerni šum, odnosno visoko-frekvencijske poremećaje.

Egzaktna veza između pokazatelja kvalitete zatvorenog regulacijskog kruga (u vremenskom i frekvencijskom području) i odgovarajućih zahtjeva na frekvencijsku karakteristiku otvorenog kruga postoji za sustave I i II reda, ali se te relacije mogu uvjetno koristiti i za sustave viših redova, ograničavajući se samo na dominantne dinamike sustava. Naravno, ovim aproksimacijama se unosi određena pogreška u proračun, pa je često nakon analitičkog postupka određivanja parametara regulatora potrebno dodatno napraviti "fino" ugađanje parametara,

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Serijska veza dinamički sustava je opisana u vremenskom području operacijom konvolucije između njih



Slika 6.1: Bodeov dijagram

kako bi se ispunili zahtjevi na sustav upravljanja.

U tablici 6.1 dan je popis najbitnijih približnih relacija koje povezuju pokazatelje kvalitete zatvorenog regulacijskog kruga i odgovarajuće parametre frekvencijske karakteristike otvorenog kruga. Premda su ove relacije približne one daju kvalitativan uvid u povezanost vremenskog i frekvencijskog područja. Svakako najbitniji parametar u frekvencijskoj karakteristici otvorenog kruga koji određuje ponašanje sustava je presječna frekvencija  $\omega_c$ . Očito je da veći iznos presječne frekvencije  $\omega_c$ , osigurava brži odziv u vremenskom području. No osim ovog, kod određivanja (željene) presječne frekvencije potrebno je uzeti u obzir i ostale faktore koji utječu na ovaj odabir, kao što su upravljački signal ( $\omega_c \nearrow \Rightarrow$  dinamičniji upravljački signal), spektar signala poremećaja i šuma koji djeluju na proces ( $\omega_c \nearrow \Rightarrow$  sustav osjetljiviji na šum i VF poremećaje), nesigurnost modeliranja ( $\omega_c$  treba biti u području u kojem je model "vjeran")

Samo oblikovanje frekvencijskih karakteristika se obično obavlja korištenjem korekcijskih dinamičkih članova, među kojima su najvažniji korekcijski član s faznim prethođenjem (engl. Phase Lead Compensator) i korekcijski član s faznim kašnjenjem (engl. Phase Lag Compensator).

### 6.1 Korekcijski član s faznim prethođenjem

Korekcijski član s faznim prethođenjem se obično koristi ako je potrebno korigirati frekvencijsku karakteristiku oko presječne frekvencije, te na taj način utjecati na prijelaznu pojavu u vremenskom području. Najčešće se to odnosi na povećanje faznog osiguranja, te se time direk-

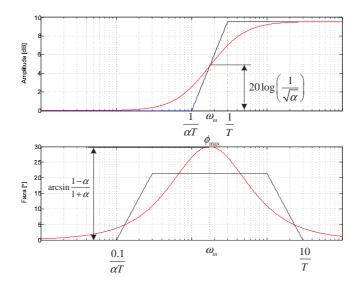
Pokazatelj kvalitete zatv. reg. kruga	Relacija
Nadvišenje $\sigma$	$\sigma_m \approx 70 - \gamma, \ 0.3 < \zeta < 0.8$
Vrijeme prvog maksimuma $t_m$	$t_m \approx \frac{3}{\omega_c}, \ 0.3 < \zeta < 0.8$
Vrijeme porasta $t_{a,50}$	$t_{a,50} \approx \frac{1}{\omega_c} \left( 1 - \frac{\sigma_m [\%]}{250} \right),  0 < \zeta < 1$ $\omega_b \approx 1.2 - 1.5\omega_c,  \omega_b \approx \frac{2.3}{t_{a,50}}$
Propusni opseg $\omega_b$	$\omega_b \approx 1.2 - 1.5\omega_c, \ \omega_b \approx \frac{2.3}{t_{a.50}}$
Rezonantno izdizanje $M_r$	$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$
Rezonantna frekvencija $\omega_r$	$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$
Vrijeme ustaljivanja $t_{1\%}$	$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ $t_{1\%} \approx \frac{4.6}{\zeta \omega_n}$

Tablica 6.1: Približne relacije koje povezuju pokazatelje kvalitete zatvorenog regulacijskog kruga s odgovarajućim parametrima frekvencijske karakteristike otvorenog kruga

tno utječe na iznos nadvišenja u vremenskom odzivu. Korekcijski član s faznim prethođenjem opisan je sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$G_{kp} = \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T}, \quad \alpha < 1, \tag{6.1}$$

dok je njegova frekvencijska karakteristika prikaza na slici 6.2. Okvirna procedura za projek-



Slika 6.2: Frekvencijska karakteristika korekcijskog člana s faznim prethođenjem tiranje korekcijskog člana s faznim prethođenjem sastoji se od sljedećih koraka:

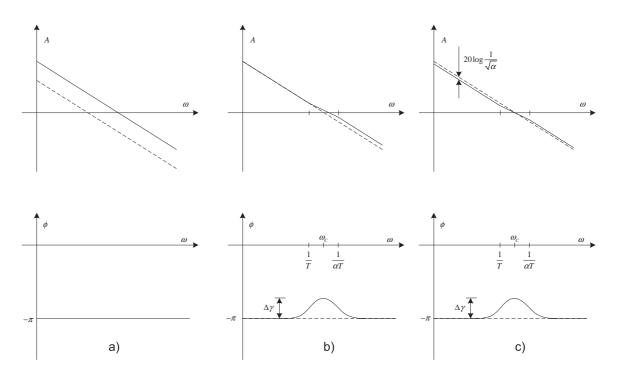
1. Dodavanjem pojačanja u otvoreni krug podesiti željnu presječnu frekvenciju (slika 6.3 a);

2. Proračunati maksimalno izdizanje fazne karakteristike korekcijskog člana  $\phi_{max}$  koje je potrebno ostvariti da bi se postiglo željeno fazno osiguranje. Na temelju  $\phi_{max}$  računa se potrebni odnos između lomnih frekvencija korekcijskog člana  $\alpha$ . Vremenska konstanta T korekcijskog člana se odabire tako da frekvencija maksimalnog izdizanja faze bude jednaka željenoj presječnoj frekvenciji:

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha\omega_c}} \tag{6.2}$$

Dodavanjem korekcijskog člana uz tako određene parametre fazna karakteristika na presječnoj frekvenciji  $\omega_c$  je podignuta za  $\Delta \gamma = \phi_{max}$ , ali je istovremeno došlo do korekcije amplitudne karakteristike (slika 6.3 b);

3. Kako pojačanje korekcijskog člana na presječnoj frekvenciji (frekvenciji maksimalnog izdizanja faze  $\phi_{max}$ ) iznosi  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ , potrebno je korigirati (spustiti) amplitudnu karakteristiku upravo s faktorom  $\sqrt{\alpha}$ , da bi presječna frekvencija  $\omega_c$  ostala nepromijenjena (slika 6.3 c).



Slika 6.3: Projektiranje korekcijskog člana s faznim prethođenjem

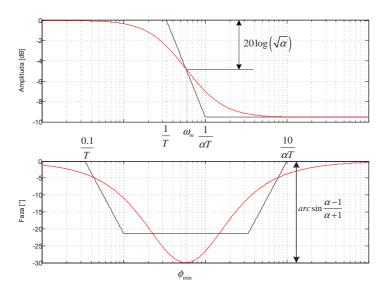
### 6.2 Korekcijski član s faznim kašnjenjem

Korekcijski član s faznim kašnjenjem obično se koristi ukoliko je potrebno korigirati frekvencijsku karakteristiku u nisko-frekvencijskom području, te na taj način utjecati na ponašanje

sustava u stacionarnom stanju. Prijenosna funkcija korekcijskog člana s faznim kašnjenjem glasi:

$$G_{kk} = \frac{1+sT}{1+s\alpha T}, \quad \alpha > 1, \tag{6.3}$$

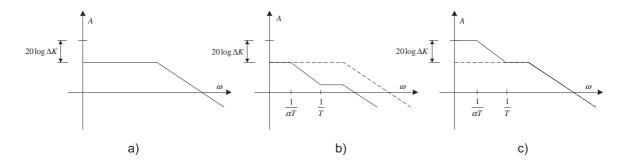
dok je njegova frekvencijska karakteristika je prikazana na slici 6.4.



Slika 6.4: Frekvencijska karakteristika korekcijskog člana s faznim kašnjenjem

Okvirna procedura projektiranja korekcijskog člana s faznim kašnjenjem sastoji se od sljedećih koraka:

- 1. Na temelju specificiranog ponašanja sustava u stacionarnom stanju (koeficijent statičke pogreške, koeficijent brzinske pogreške, i sl. ) potrebno je odrediti iznos potrebne korekcije amplitudne karakteristike  $\Delta K$  u području niskih frekvencije kako bi se osiguralo željeno ponašanje (slika 6.5 a);
- 2. Budući da ukupna korekcija amplitudne karakteristike koju unosi korekcijski član s faznim kašnjenjem iznosi  $\alpha$  (slika 6.4), odabire se  $\alpha = \Delta K$ .
- 3. Vremenska konstanta T korekcijskog člana se određuje na način da korekcijski član ne utječe značajno na iznos faznog osiguranja  $\gamma$ . To znači da je potrebno odabrati  $1/T \leq \omega_c/10$  (ili čak  $1/T \leq \omega_c/50$ ). Dodavanjem korekcijskog uz ovako određene parametre pojačanje na niskim frekvencijama ostaje nepromijenjeno, dok na srednjim (i visokim) frekvencijama dolazi do pada amplitudne karakteristike za iznos  $20 \log \alpha$  (slika  $6.5 \, \mathrm{b}$ ).
- 4. Kako želimo da korekcijski član ne utječe na amplitudnu karakteristiku na srednjim frekvencijama potrebno dodatno korigirati amplitudnu karakteristiku s pojačanjem  $\alpha = \Delta K$ , tj. podići je za  $20 \log \alpha$  (slika 6.5 c).



Slika 6.5: Projektiranje korekcijskog člana s faznim kašnjenjem

Kod projektiranja regulatora bitno je imati na umu određena ograničenja. Tu je posebno važno ograničenje na nagib frekvencijske karakteristike u području oko presječne frekvencije koji bi uz aproksimaciju amplitudno-frekvencijske karakteristike pravcima trebao biti -1 odnosno -20dB/dek. Ovo ograničenje je posljedica povezanosti nagiba karakteristike oko presječne frekvencije s iznosom faznog osiguranja, a približna relacija koja opisuje ovu ovisnost je dana sljedećim izrazom:

$$\gamma = 180 + \frac{\pi}{2} \cdot n \tag{6.4}$$

gdje je n- nagib frekvencijske karakteristike u području oko presječne frekvencije. Iz prethodne približne relacije je očito da bi slučaju nagiba -2 amplitudno-frekvencijske karakteristike oko presječne frekvencije  $\omega_c$ , zatvoreni regulacijski krug bio na rubu stabilnosti.

### PRIMJER 6.1

Za proces:

$$G(s) = \frac{0.1}{(1+0.2s)(1+0.02s)} \tag{6.5}$$

potrebno je korištenjem korekcijskog člana s faznim kašnjenjem:

$$G(s) = K_R \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T}, \quad \alpha > 1 \tag{6.6}$$

zadovoljiti sljedeće zahtjeve na zatvoreni regulacijski krug:

- a) pogreška u stacionarnom stanju na skokovitu pobudu < 5%;
- b) vrijeme porasta  $t_{a,50} \approx 0.15[s]$

### RJEŠENJE:

Navedene projektne specifikacije za zatvoreni regulacijski krug uvode određene zahtjeve na frekvencijsku karakteristiku otvorenog kruga. Tako zahtjev da pogreška u stacionarnom stanju

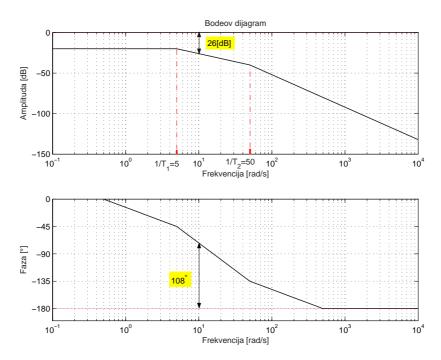
bude manja od 5% povlači da amplitudna karakteristika otvorenog kruga na niskim frekvencijama  $(\omega \to 0)$  bude:

$$e_s(\infty) = \frac{1}{1 + K_0} \implies K_0 = \frac{1 - e_s(\infty)}{e_s(\infty)} = \frac{1 - 0.05}{0.05} = 19 (= 25.6[dB])$$
 (6.7)

S druge strane, vrijeme porasta  $t_{a,50}$  približno određuje potrebnu presječnu frekvenciju  $\omega_c$ , koja prema tome iznosi:

$$\omega_c \approx \frac{1.5}{t_{a.50}} = 10[rad/s] \tag{6.8}$$

Rješavanje ovog zadatka provest će se kroz nekoliko koraka. U prvom koraku crtamo amplitudnu i faznu karakteristiku procesa, kako bi odredili koliko je pojačanje potrebno dodati u otvoreni krug kako bi presječna frekvencija iznosila upravo 10[rad/s]. U sljedećem koraku crtamo frekvenciju karakteristiku otvorenog kruga uz dodano pojačanje određeno u prvom koraku, te provjerimo iznos pojačanja na niskim frekvencijama. Ukoliko to pojačanje nema zadovoljavajući iznos potrebno je provesti treći korak u kojem se u otvoreni kruga dodaje korekcijski član s faznim kašnjenjem kako bi se amplitudna karakteristika u području niskih frekvencija podigla na zadovoljavajući iznos. Pritom je bitno da ovaj korekcijski član ne djeluje na iznos amplitude i faze u području srednjih frekvencija (oko  $\omega_c$ ), te je zbog toga potrebno da on bude barem dekadu udaljen od  $\omega_c$ .



Slika 6.6: Bodeov dijagram procesa

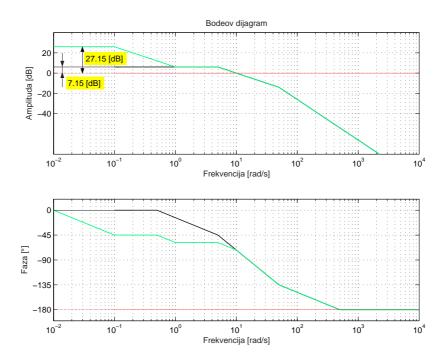
Na slici 6.6 prikazan je Bodeov dijagram procesa, uz naznačene vrijednosti amplitude i faznog osiguranja na željenoj presječnoj frekvenciji 10[rad/s]. Očitane s Bodeovog dijagrama

ove vrijednosti iznose -26[db] odnosno  $108^{\circ}$ . Točne vrijednosti amplitude i faze su određene sljedećim izrazima:

$$A(\omega = 10) = 20 \log 0.1 - 20 \log \sqrt{1 + (\frac{10}{5})^2} - 20 \log \sqrt{1 + (\frac{10}{50})^2} = -27.16[dB] \ (= 22.8) \ (6.9)$$

$$\phi(\omega = 10) = -\arctan\frac{10}{5} - \arctan\frac{10}{50} = -74.75^{\circ}$$
(6.10)

Dodavanjem pojačanja od 27.16[dB] u otvoreni krug amplitudna karakteristika se podiže za ovaj iznos (fazna se ne mijenja), te sada amplitudno-frekvencijska karakteristika sječe 0[dB] upravo na željenoj presječnoj frekvenciji  $\omega_c = 10$  (slika 6.7).



Slika 6.7: Bodeov dijagram procesa bez korekcijskog člana (crna) i s korekcijskim članom (zelena)

Da bi se podigla amplitudna karakteristika u području niskih frekvencija potrebno je koristiti korekcijski član s faznim kašnjenjem oblika:

$$G_c(s) = K_c \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T}, \quad \alpha > 1 \tag{6.11}$$

Pritom je bitno nema djelovanja korekcijskog člana na amplitudu nakon  $\omega = 1/T < \omega_c$ , tj. da je  $|G_c(\omega)| \approx 1$  za  $\omega > 1/T$ . Kako je  $|G_c(\omega)| \approx K_c/\alpha$ , za  $\omega > 1/T$ , slijedi da korekcijski član treba imati oblik:

$$G_c(s) = \alpha \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T}, \quad \alpha > 1 \tag{6.12}$$

Kako je za ispunjenje uvjeta o iznosu pogreške u stacionarnom stanju neophodno da otvoreni sustav na niskim frekvencijama ima pojačanja najmanje 25.6[dB] slijedi da je potrebno korigirati amplitudnu karakteristiku za najmanje  $25.6-7.15\approx 18.5[dB]$ . Budući da je amplitudna karakteristika korekcijskog člana u području  $(1/(\alpha T) < \omega < 1/T)$  opada približno s nagibom od -20[dB/dek], što znači da bi bilo dovoljno odabrati  $\alpha=10$ , te ćemo u tom slučaju napraviti korekciju amplitudne karakteristike u iznosu od 20[dB].

Frekvenciju 1/T općenito odabiremo da nema djelovanja korekcijskog člana na amplitudu i fazu oko presječne frekvencije, što znači da zbog djelovanja na fazu 1/T bi trebao biti  $1/T \leq 0.1\omega_c$ , što u našem slučaju znači da je T = 1[s].

Prema tome korekcijski član ima konačni oblik:

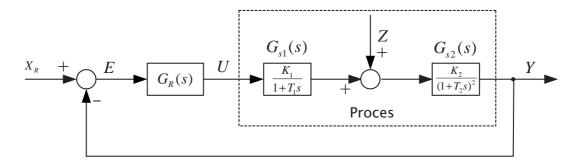
$$G_c(s) = 10 \frac{1+s}{1+10s} \tag{6.13}$$

Uzevši u obzir i prethodno dodano pojačanje u otvoreni krug kako bi se podesila presječna frekvencija slijedi da je regulator dan izrazom:

$$G_R(s) = 22.8 \cdot 10 \frac{1+s}{1+10s} = 228 \frac{1+s}{1+10s}$$
 (6.14)

### PRIMJER 6.2

Zadan je aperiodski proces trećeg reda prikazan na slici 6.8. Parametri procesa su:  $K_1 = 20$ ,  $K_2 = 0.1$ ,  $T_1 = 2s$ ,  $T_2 = 10s$ .



Slika 6.8: Regulacijski krug s PID regulatorom.

Dana je prijenosna funkcija PID regulatora:

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s} \cdot \frac{1 + T_D s}{1 + T_\nu s}, \ T_\nu = 0.1 \cdot T_D \ .$$

a) Predložiti prikladan način izbora integralne i derivacijske vremenske konstante  $T_I$  i  $T_D$ ,  $uz T_I = T_D$ .

Provedite sintezu u frekvencijskom području koristeći aproksimacije Bodeovih dijagrama pravcima kako slijedi:

- b) Uz vremenske konstante  $T_I$  i  $T_D$  odabrane prema a) treba odrediti pojačanje PID regulatora  $K_R$  tako da se dobije vrijeme prvog maksimuma  $t_m \approx 15[s]$ . Koliki je u tom slučaju iznos nadvišenja prijelazne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga?
- c) Za regulacijski krug s parametrima regulatora prema b) treba projektirati kompenzacijski član  $G_k(s)$

$$G_k(s) = \frac{1 + T_k s}{1 + \alpha T_k s}$$

u kaskadi s već proračunatim regulatorom tako da se postigne nadvišenje prijelazne karakteristike zatvorenog kruga  $\sigma_m \approx 5\%$ . Vrijeme  $t_m$  treba ostati otprilike isto dodavanjem kompenzacijskog člana.

### RJEŠENJE:

a) Vremenske konstante  $T_I$  i  $T_D$  odabiru se da kompenziraju dvostruku dominantnu vremensku konstantu procesa  $T_2$ :

$$T_I = T_D = T_2 = 10 \text{ s} \implies T_{\nu} = 1 \text{ s}.$$

b) Primjenjujući sintezu prema Bodeovim karakteristikama otvorenog kruga, vrijedi približna relacija između presječne frekvencije  $\omega_c \approx \frac{3}{t_m} = 0.2 \; \frac{\rm rad}{\rm s}$ . Prijenosna funkcija otvorenog kruga je:

$$G_o(s) = \frac{K_R K_1 K_2}{T_I s} \frac{1}{1 + T_1 s} \frac{1}{1 + T_\nu s} = \frac{K_o}{s(1 + T_1 s)(1 + T_\nu s)} ,$$

pri čemu je  $K_o=\frac{K_RK_1K_2}{T_I}$ . Crta se Bodeove karakteristike (slika 6.9 - plava linija ) uz aproksimacije pravcima za  $K_o\equiv 1$ .

Na frekvenciji  $\omega_c$  amplitudnu karakteristiku valja spustiti za 14 dB, što znači da je  $K_o=10^{-\frac{14}{20}}$ , pa je traženo pojačanje:

$$K_R = \frac{K_o T_I}{K_1 K_2} = 1 \ .$$

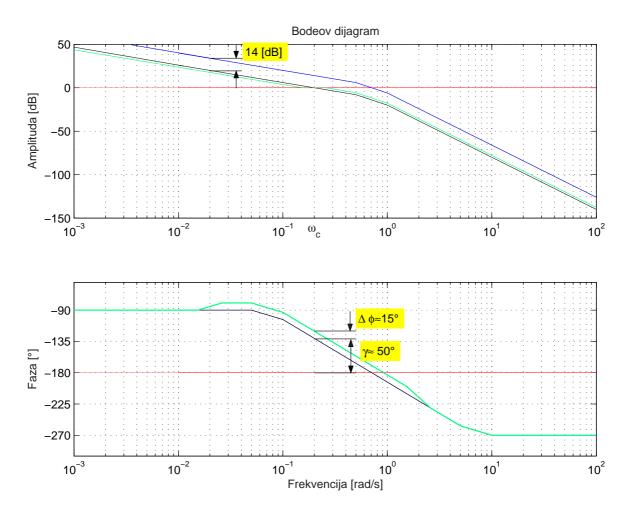
Rezultirajuća frekvencijska karakteristika prikazana je na slici 6.9 (crna linija). Fazno osiguranje je otprilike 50°, pa je očekivano nadvišenje 20%.

c) Prema približnoj relaciji koja veže nadvišenje i fazno osiguranje  $\sigma_m[\%] + \gamma[\degree] \approx 70$  slijedi da bi fazno osiguranje trebalo iznositi  $\gamma = 65^{\circ}$  da se postigne traženo nadvišenje od 5%. PID regulatorom zaokruženim pod b) dobilo se fazno osiguranje 50°, što znači da fazu na presječnoj frekvenciji treba podići za:

$$\Delta\varphi(\omega_c) = 15^{\circ}$$
,

a pritom ne izmijeniti amplitudnu karakteristiku u okolini presječne frekvencije. Za to će poslužiti kompenzacijski član sa faznim prethođenjem prijenosne funkcije:

$$G_k(s) = \frac{1 + T_k s}{1 + \alpha T_k s} \alpha < 1,$$



Slika 6.9: Aproksimacije Bodeovih karakteristika pravcima.

pri čemu parametar  $\alpha$  određuje iznos maksimalnog izdizanja faze korekcijskog člana. Vrijednost parametra  $\alpha$  određujemo iz izraza za maksimalno fazno izdizanje:

$$\sin \phi_{max} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \implies \alpha = \frac{1 - \sin \phi_{max}}{1 + \sin \phi_{max}} = 0.5888$$

Iznos vremenske konstante  $T_k$  s određuje tako da maksimalno izdizanje faze korekcijskog člana bude upravo na frekvenciji  $\omega_c$ :

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_c} = 6.52$$

Dodavanjem ovog korekcijskog člana se također djelomično utjecalo na iznos amplitudne karakteristike na presječnoj frekvenciji unoseći pojačanje  $1/\sqrt{\alpha}\approx 1.3 (=2.3[dB])$ . Stoga je

potrebno u seriju s korekcijskim članom dodati pojačanje koje će kompenzirati ovaj doprinos korekcijskog člana na  $\omega_c$ , te ono očito iznosi  $K_k = \sqrt{\alpha} = 0.7668 (= -2.3[dB])$ 

Uvrštavanjem izračunatih vrijednosti u prijenosnu funkciju korekcijskog člana, de dodavanjem spomenutog pojačanja u sustav kako bi presječna frekvencija ostala nepromijenjena, slijedi:

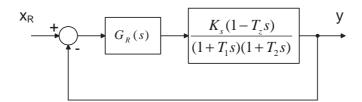
$$G'_k(s) = K_k \frac{1 + T_k s}{1 + \alpha T_k s} = 0.7668 \frac{1 + 6.52 s}{1 + 3.84 s},$$

Amplitudna i fazna karakteristika otvorenog kruga nakon dodavanja korekcijskog člana je prikazana na slici 6.9 (zelena linija).

### ZADACI ZA VJEŽBU:

### ZADATAK 6.1

Proces na slici 6.10 regulira se PI regulatorom Parametri procesa su:  $K_s = 3$ ,  $T_z = 0.4[s]$ ,



Slika 6.10: Blokovska shema regulacijskog kruga.

$$T_1 = 6[s] \ i \ T_2 = 0.8[s] \ .$$

- a) Treba predložiti način izbora integralne vremenske konstante PI regulatora, kako bi se postigla što brža dinamika zatvorenog regulacijskog kruga.
- b) Uz tako odabran iznos  $T_I$  treba primjenom Bodeovih dijagrama (aproksimacije pravcima) odrediti iznos pojačanja  $K_R$  tako da se dobije nadvišenje prijelazne funkcije zatvorenog kruga  $\sigma_m \approx 10\%$ .
- c) Približno odrediti vrijeme prvog maksimuma  $t_m$  prijelazne funkcije iz amplitudne i fazno-frekvencijske karakteristike.
- d) Skicirati (približno) oblik prijelazne funkcije zatvorenog kruga i označiti  $\sigma_m$  i  $t_m$ .

### ZADATAK 6.2

Za sustav opisan prijenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{1000}{(s+5)(s+100)} \tag{6.15}$$

potrebno je projektirati regulator da se zadovolje sljedeći zahtjevi:

- 1. sustav nema pogrešku u stacionarnom stanju na skokovitu referentnu veličinu,
- 2. nadvišenje u odzivu na skokovitu referentnu vrijednost  $\sigma_m < 20\%$ ,
- 3. vrijeme porasta  $t_{a,50} \leq 0.15[s]$

### ZADATAK 6.3

Za proces:

$$G(s) = \frac{0.1}{(1+0.2s)(1+0.02s)} \tag{6.16}$$

potrebno je korištenjem korekcijskih dinamičkih članova zadovoljiti sljedeće zahtjeve na zatvoreni regulacijski krug:

- a) zatvoreni regulacijski krug nema pogrešku u stacionarnom stanju na skokovitu pobudu;
- b) pogreška u stacionarnom stanju pobudu oblika funkcije linearnog porasta  $x_r(t) = t$  je < 5%;
- c) vrijeme prvog maksimuma  $t_m \approx 0.3[s]$
- d) nadvišenje u odzivu na skokovitu pobudu  $\sigma < 20\%$

## Poglavlje 7

# Sinteza pomoću krivulje mjesta korijena

KMK je grafički postupak kojim se može odrediti položaj polova zatvorenog regulacijskog kruga u s-ravnini pri promjeni jednog parametra, najčešće pojačanja  $k_o$ , otvorenog regulacijskog kruga. Prijenosna funkcija zatvorenog kruga:

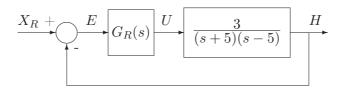
$$G_x(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},\tag{7.1}$$

zadovoljavajuće nadomješta prijenosne funkcije viših redova koje imaju jedan dominantni par konjugirano-kompleksnih polova. Dinamički pokazatelji kakvoće  $t_m$ ,  $\sigma_m$ ,  $t_{a,50}$  i  $t_{\epsilon}$  ovise o parametrima  $\omega_n$  i  $\zeta$  kojima su određeni položaji polova prijenosne funkcije (7.1). Postupkom **zadavanja polova** otvorenog regulacijskog kruga postiže se željeni položaj dominantnog para polova zatvorenog regulacijskog kruga u s-ravnini određenog s  $\omega_n$  i  $\zeta$ . Postupak se provodi u nekoliko koraka:

- u s-ravnini ucrta se željeni dominantni par polova,
- u s-ravninu ucrta se KMK fiksnog dijela regulacijskog kruga,
- dodavanjem polova i nula u otvorenom regulacijskom krugu oblikuje se KMK tako da njene 2 grane prolaze kroz željeni dominantni konjugirano-kompleksni par polova.

### PRIMJER 7.1

Blokovska shema regulacije visine projektila prikazana je na slici 7.1. Pomoću krivulje mjesta korijena projektirati idealni PID regulator tako da budu zadovoljeni sljedeći zahtjevi: nadvišenje prijelazne funkcije koje odgovara izboru  $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , vrijeme prvog maksimuma  $t_m = 1$  s. Nulom regulatora valja kratiti stabilni pol procesa. U grani reference po potrebi dodati prefiltar. Skicirati izgled KMK. Kako bi kvalitativno izgledala KMK kada bi se dodatno radi izvedivosti regulatoru dodao pol 20 puta većeg iznosa od nepokraćene nule regulatora?



Slika 7.1: Blokovska shema regulacije visine projektila.

### RJEŠENJE:

Prijenosna funkcija idealnog PID regulatora glasi:

$$G_R(s) = K_R \frac{(1 + sT_I)(1 + sT_D)}{sT_I} = K_R T_D \frac{(s + \frac{1}{T_I})(s + \frac{1}{T_D})}{s}$$
.

Nulom integralnog člana regulatora kratit će se stabilni pol procesa:

$$T_I = \frac{1}{5} \text{ s} = 0.2 \text{ s} .$$

Prijenosna funkcija otvorenog kruga  $G_o(s)$  nakon obavljene pokrate glasi:

$$G_o(s) = K_x \frac{s + s_x}{s(s - 5)} ,$$

gdje su  $K_x=3K_RT_D$  i  $s_x=\frac{1}{T_D}$  nepoznati, a odredit će se sintezom po krivulji mjesta korijena tako da se polovi zatvorenog kruga postave točno na lokacije koje će omogućiti dobivanje  $\zeta=\frac{\sqrt{2}}{2}$  te vremena prvog maksimuma  $t_m=1$  s. Za sustave drugog reda vlastita frekvencija neprigušenih oscilacija  $\omega_n$  je sa  $t_m$  i  $\zeta$  povezana preko:

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_m \sqrt{1 - \zeta^2}} \;,$$

te uz zadani  $\zeta$  i  $t_m$  slijedi:

$$\omega_n = \pi \sqrt{2} = 4.44 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$
.

Poznati  $\zeta$  i  $\omega_n$  određuju lokaciju kompleksno-konjugiranog para polova zatvorenog kruga  $s^* = -\pi + j\pi$  i  $\tilde{s^*} = -\pi - j\pi$ , slika 7.2. Nepoznatu lokaciju nule  $-s_x$  može se naći iz faznog uvjeta za određivanje KMK koji mora vrijediti u točki  $s^*$ :

$$\arg[G(s^*)] = 180^{\circ}(2k-1), \ za \ k = 1, 2, 3, \dots,$$

tj. pol $s^{\ast}$  pripadat će krivulji mjesta korijena ako za kuteve sa slike 7.2 vrijedi:

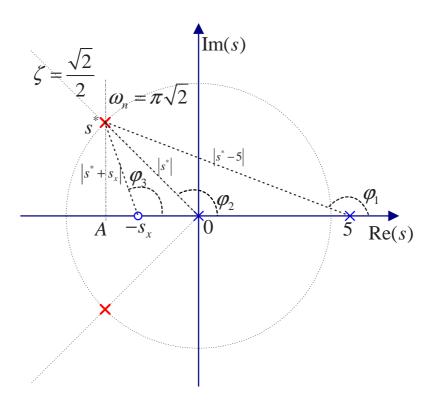
$$\varphi_3 - (\varphi_1 + \varphi_2) = \pm (2k-1)180^\circ, za \ k = 1, 2, 3, \dots$$

gdje su  $\varphi_1, \, \varphi_2$  i  $\varphi_3$  argumenti vektora  $s^*-5, \, s^*$  i  $s^*+s_x$  redom te vrijedi:

$$\varphi_1 = \arg[s^* - 5] = \arg[-\pi - 5 + j\pi] = 158.9^\circ,$$

$$\varphi_2 = \arg[s^*] = \arg[-\pi + j\pi] = 135^\circ,$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 + 180^\circ = 113.9^\circ.$$



Slika 7.2: Prikaz polova u s-ravnini.

Dalje, iz određenog argumenta  $\varphi_3$  dolazimo do nepoznanice  $s_x$ :

$$\varphi_3 = \arg[s^* + s_x] = \arg[-\pi + s_x + j\pi] = \arctan\frac{\pi}{-\pi + s_x} ,$$

$$\Rightarrow s_x = \frac{\pi(1 + \lg\varphi_3)}{\lg\varphi_3} = 1.75 .$$

Do pojačanja  $K_x$ dolazi se iz amplitudnog uvjeta za KMK:

$$\frac{1}{K_x} = \frac{|s^* + s_x|}{|s^*||s^* - 5|} \implies K_x = \frac{|s^*||s^* - 5|}{|s^* + s_x|} = 11.28 \ .$$

Iz izračunatog  $\boldsymbol{s}_{x}$ određuje se derivacijska vremenska konstanta:

$$T_D = \frac{1}{s_x} = 0.57 \text{ s.}$$

Pojačanje  $K_R$  određuje se prema:

$$K_R = \frac{K_x s_x}{3} = 6.58 \; ,$$

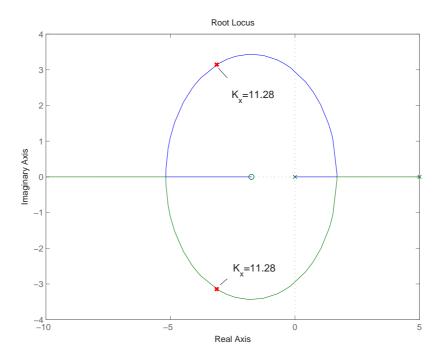
pa prijenosna funkcija idealnog PID regulatora glasi:

$$G_R(s) = 6.58 \frac{(1+0.2s)(1+0.57s)}{0.2s}$$
.

Da bi se postiglo zadano vrijeme maksimuma, potrebno je prefiltrom pokratiti još i nulu zatvorenog sustava koja dolazi od derivacijskog člana. Prijenosna funkcija prefiltra je:

$$G_{pf}(s) = \frac{1}{1 + 0.57s}$$
.

Slika 7.3 prikazuje krivulju mjesta korijena regulacijskog kruga s idealnim PID regulatorom

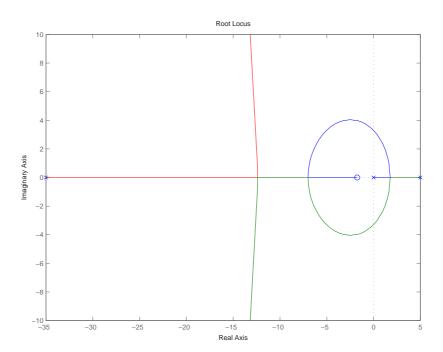


Slika 7.3: Krivulja mjesta korijena uz idealni PID regulator.

dok je na slici 7.4 prikaz krivulje mjesta korijena regulacijskog kruga realnog PID regulatora. Vidimo da dodatni pol regulatora u -35 ne utječe na dominantne polove zatvorenog regulacijskog kruga.

### Primjer 7.2

Za proces zadan prijenosnom funkcijom  $G_s(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+6)}$  potrebno je pomoću krivulje mjesta korijena projektirati regulator s faznim kašnjenjem uz zahtjev da prijelazna funkcija zatvorenog sustava ima regulacijsko odstupanje u stacionarnom stanju manje od 0.5 pri odzivu na pobudu oblika jedinične rampe; relativni koeficijent prigušenja treba biti 0.5; te dominantni polovi zatvorenog kruga trebaju imati realni dio manji ili jednak -1.



Slika 7.4: Krivulja mjesta korijena uz dodatni pol regulatora u −35, radi izvedivosti.

### RJEŠENJE:

Regulator s faznim kašnjenjem je oblika

$$G_R(s) = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}$$
,  $\alpha > 1$ .

Prijenosna funkcija otvorenog kruga je oblika:

$$G_o(s) = \frac{(1+Ts)K}{(1+\alpha Ts)s(s+3)(s+6)} = \frac{K_x \cdot (s+\frac{1}{T})}{(s+\frac{1}{\alpha T})s(s+3)(s+6)} ,$$

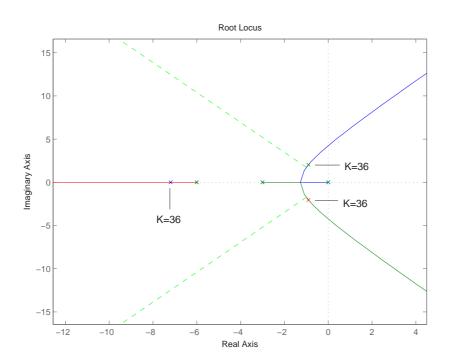
gdje je  $K_x = \frac{K}{\alpha}$ . Iz zahtjeva na regulacijsko odstupanje vrijedi:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{1 + G_o} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \to 0} \frac{(1 + \alpha Ts)(s+3)(s+6)}{s(1 + \alpha Ts)(s+3)(s+6) + (1+Ts)K} = \frac{18}{K},$$

$$\frac{18}{K} < 0.5 \implies K > 36.$$

Zahtjev za relativno prigušenje  $\zeta = 0.5$  i realni dio dominantnih polova  $\zeta \omega_n \leq -1$  daje položaj polova na polupravcima prikazanim na slici 7.5. Krivulja mjesta korijena ucrtana je na slici 7.5 za prijenosnu funkciju otvorenog kruga bez regulatora,  $G_s(s)$ .

Na polupravcu željenih polova odabiremo par kompleksno konjugiranih polova zatvorenog kruga  $s^* = -\frac{3}{2} + j\frac{3}{2}\sqrt{3}$  i  $\tilde{s^*} = -\frac{3}{2} - j\frac{3}{2}\sqrt{3}$ , slika 7.6. Postavljamo jednadžbu za fazni uvjet za



Slika 7.5: Krivulja mjesta korijena sustava bez regulatora uz ucrtane polupravce lokacija željenih polova te položaj polova za zahtjevano pojačanje sustava K = 36.

određivanje KMK koji mora vrijediti u točki  $s^*$ , prema slici 7.6:

$$\arg[G(s^*)] = 180^{\circ}(2k-1), \quad za \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$
  
$$\varphi_{N1} - (\varphi_{p1} + \varphi_{p2} + \varphi_{p3} + \varphi_{p4}) = \pm (2k-1)180^{\circ}, \quad za \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

gdje su  $\varphi_{p1}$ ,  $\varphi_{p2}$  i  $\varphi_{p3}$  argumenti vektora  $s^*-s_{p1}$ ,  $s^*-s_{p2}$  i  $s^*-s_{p3}$  koji su poznati, a  $\varphi_{N1}$  i  $\varphi_{p4}$  argumenti vektora  $s^*-s_{N1}$  i  $s^*-s_{p4}$  koji su nepoznati te vrijedi:

$$\varphi_{p1} = \arg[s^* - s_{p1}] = \arg[-\frac{3}{2} + j\frac{3}{2}\sqrt{3}] = 120^{\circ} ,$$

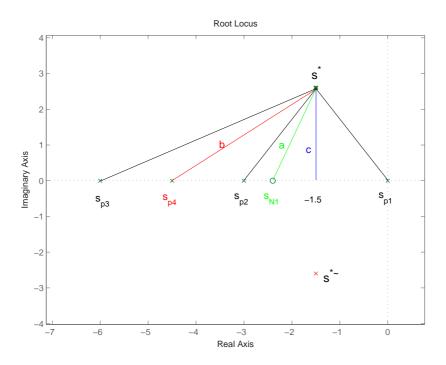
$$\varphi_{p2} = \arg[s^* - s_{p2}] = \arg[\frac{3}{2} + j\frac{3}{2}\sqrt{3}] = 60^{\circ} ,$$

$$\varphi_{p3} = \arg[s^* - s_{p3}] = \arg[\frac{9}{2} + j\frac{3}{2}\sqrt{3}] = 30^{\circ} ,$$

$$\varphi_{p4} = \arg[s^* - s_{p4}] = \arg[\frac{1}{\alpha T} - \frac{3}{2} + j\frac{3}{2}\sqrt{3}] = \arg[\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{\alpha T} - \frac{3}{2}} ,$$

$$\varphi_{N1} = \arg[s^* - s_{N1}] = \arg[\frac{1}{T} - \frac{3}{2} + j\frac{3}{2}\sqrt{3}] = \operatorname{arctg} \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{\pi} - \frac{3}{2}} ,$$
(7.2)

$$\varphi_{N1} - \varphi_{p4} = \varphi_{p1} + \varphi_{p2} + \varphi_{p3} + 180^{\circ} = 30^{\circ} . \tag{7.4}$$



Slika 7.6: Prikaz polova i nule otvorenog regulacijskog kruga te željenog para polova zatvorenog kruga u s-ravnini.

Postavljamo jednadžbu amplitudnog uvjeta za KMK u točki  $s^*$ :

$$\frac{1}{K_x} = \frac{|s^* - s_{N1}|}{|s^* - s_{p4}||s^*||s^* + 3||s^* + 6|} .$$

Uvedimo oznake  $a=|s^*-s_{N1}|$  i  $b=|s^*-s_{p4}|$  kao na slici 7.6. Iz slike slijedi:

$$\frac{c}{a} = \sin \varphi_{N1} ,$$

$$\frac{c}{b} = \sin \varphi_{p4} ,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\varphi_{p4}}{\sin\varphi_{N1}} \frac{(\underline{\mathbf{x}}.4)}{\sin\varphi_{N1}} \frac{\sin(\varphi_{N1}-30^\circ)}{\sin\varphi_{N1}} = \frac{\sin\varphi_{N1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\varphi_{N1}\cdot\frac{1}{2}}{\sin\varphi_{N1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_{N1}} \frac{(\underline{\mathbf{x}}.3)}{3} \left(2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{T}\right).$$

Iz zahtjeva za pojačanje K odabiremo K=36 te uvrštavanjem prethodnog izraza u jednadžbu amplitudnog uvjeta slijedi:

$$\frac{\alpha}{36} = \frac{\sqrt{3}}{3} (2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{T}) \cdot \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3}} \implies \frac{1}{T} = 6 - \frac{3}{10} \alpha . \tag{7.5}$$

Uvrštavanjem izraza za kuteve  $\varphi_{N1}$  i  $\varphi_{p4}$  u jednadžbu (7.4) dobivamo sljedeće:

$$\arctan \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{T} - \frac{3}{2}} - \arctan \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{\alpha T} - \frac{3}{2}} = 30^{\circ} ,$$

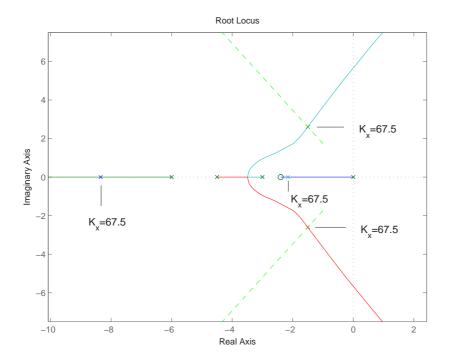
$$\Rightarrow \arctan \frac{\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{T} - \frac{3}{2}} - \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{\alpha T} - \frac{3}{2}}}{1 + \frac{\frac{3}{2}}{(\frac{1}{T} - \frac{3}{2})(\frac{1}{\alpha T} - \frac{3}{2})}} = 30^{\circ} ,$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{T^{2}} - 3 \cdot \frac{1}{T} (\frac{2}{\alpha} - 1) + 9 = 0 . \tag{7.6}$$

Naposlijetku, uvrštavanjem izraza za  $\frac{1}{T}$  dobivenog iz amplitudnog uvjeta u izraz (7.6) slijedi vrijednost  $\alpha$  te nazad uvrštavanjem u izraz (7.5) slijedi  $\frac{1}{T}$ :

$$(7.5) \to (7.6) \Rightarrow \alpha = 0.533$$
,  
 $(7.5) \to (7.6) \Rightarrow \frac{1}{T} = 2.4 \Rightarrow \frac{1}{\alpha T} = 4.5$ .

Slika 7.7 pokazuje egzaktan prikaz krivulje mjesta korijena regulacijskog kruga te naznačene polove zatvorenog kruga za pojačanje K = 36, odnosno  $K_x = 67.5$ .



Slika 7.7: Krivulja mjesta korijena regulacijskog kruga uz ucrtane polove zatvorenog kruga za pojačanje otvorenog kruga  $K_x=67.5$ .

## ZADACI ZA VJEŽBU:

## ZADATAK 7.1

Proces je zadan prijenosnom funkcijom  $G_s(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ . Projektirati regulator s faznim prethođenjem tako da zatvoreni regulacijski krug ima polove u  $s = -1 \pm j\sqrt{3}$ .

## ZADATAK 7.2

Zadan je proces  $G_s(s) = \frac{1}{s^2+1}$ . Projektirati regulator s faznim prethođenjem s nulom u ishodištu,  $G_R(s) = K \frac{s}{s+p}$ , tako da dominantni polovi zatvorenog regulacijskog kruga budu u  $s = -2 \pm j2$ .

#### ZADATAK 7.3

Zadan je proces  $G_s(s) = \frac{5}{s(\frac{s}{1.2}+1)(\frac{s}{3.5}+1)}$ . Projektirati regulator s faznim prethođenjem tako da fazno osiguranje bude 40°. Pritom treba osigurati da pojačanje regulatora u stacionarnom stanju bude 1.

# Poglavlje 8

# Analitički postupci sinteze regulatora

Analitički postupci sinteze sustava spadaju skupinu neposrednih postupaka sinteze (za razliku od sinteze u frekvencijskom području i pomoću KMK). Kao polazište za ove postupke koristi se željena prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga, tzv. modelska funkcija. Modelska funkcija se određuje prema specifikacijama kakvoće zatvorenog reg. kruga u vremenskom području ili u frekvencijskom području. Obično se ona zadaje u standardnim oblicima kao što su: binomni oblik, Butterworthov oblik, oblici zasnovani na integralnim kriterijima i sl. Pri izboru željenog vladanja zatvorenog regulacijskog kruga bitno je osigurati da modelska funkcija bude **ostvariva**.

Neka je  $G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$  prijenosna funkcija procesa, tada za modelsku funkciju  $G_m(s) = \frac{B_m(s)}{A_m(s)}$  kažemo da je **ostvariva** ako zadovoljava sljedeće uvjete:

- a)  $Stupanj(A_m(s)) Stupanj(B_m(s)) \ge Stupanj(A_p(s)) Stupanj(B_p(s))$ , odnosno da je polni višak modelske funkcije veći ili jednak polnom višku procesa;
- b) Modelska prijenosna funkcija mora sadržavati sve neminimalno-fazne nule procesa. U protivnom bi regulator bio nestabilan;
- c) Nazivnik modelske funkcije je Hurwitzov polinom.

Jednako tako, potrebno je uzeti u obzir i određena ograničenja sustava upravljanja kao npr. maksimalno dozvoljeno područje upravljačkog signala u(t), netočnosti parametara modela procesa ili njihova vremenska promjenjivost.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Fizičke komponente (npr. izvršni organi) od kojih je izgrađen sustav upravljanja nisu idealne već se njihova pretpostavljena svojstva odnose na određeno radno područje, te je stoga bitno da upravljački signal bude unutar tog područja.

## 8.1 Postupak prema Truxal-Guilleminu

Za danu prijenosnu funkciju procesa  $G_p(s)$  i ostvarivu modelsku funkciju  $G_m(s)$ , prijenosna funkcija regulatora je određena sljedećim izrazom:

$$G_R(s) = \frac{1}{G_p(s)} \cdot \frac{G_m(s)}{1 - G_m(s)}$$
 (8.1)

Iz prethodnog izraza je vidljivo da se sinteza prema ovom postupku sastoji od dva dijela i to: kraćenja svih polova i nula procesa, te dodavanja polova i nula prema željenoj modelskoj prijenosnoj funkciji.

Iz definicije ostvarivosti modelske funkcije je očito da uvjeti na ostvarivost ne uključuju nestabilne polove procesa. Zbog toga, ukoliko bi se Truxal-Guilleminov postupak primijenio na nestabilan proces, došlo bi do kraćenja neminimalno-fazne nule regulatora i nestabilnog pola procesa  $^2$ . Da bi se to izbjeglo potrebno je nestabilne polove procesa zadržati u prijenosnoj funkciji otvorenog kruga, te ih po krivulji mjesta korijena premjestiti u lijevu poluravninu. U tom slučaju prijenosna funkcija  $(1-G_m(s))$  mora sadržavati nule koje su jednake nestabilnim polovima procesa $^3$ .

#### PRIMJER 8.1

Proces čiji je blokovski prikaz dan na slici 8.1 opisan je prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}. (8.2)$$

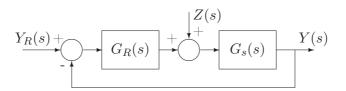
Na proces djeluje poremećaj Z(s). Potrebno je:

- a) projektirati regulator  $G_R(s)$  postupkom prema Truxal-Guilleminu. Modelsku prijenosnu funkciju  $G_m(s)$  odrediti prema općem obliku prijenosne funkcije drugog reda tako da je nadvišenje  $\sigma_m \leq 5\%$  i vrijeme prvog maksimuma  $t_m \leq 2[s]$ ,
- b) prikazati izlaznu veličinu Y(s) kao funkciju vodeće veličine  $Y_R(s)$  i poremećajne veličine Z(s),
- c) skicirati prijelaznu funkciju h(t) te označiti odziv na vodeću i poremećajnu veličinu kao i točne iznose stacionarnih stanja.

$$Zadano\ je:\ Z(s)=\frac{e^{-5s}}{s},\ T=1[s].$$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Kraćenje nestabilnih polova procesa pomoću neminimalno-faznih nula regulatora se ne preporuča zbog činjenice da se ova nestabilna dinamika može pojaviti u sustavu kao posljedica parametarske nesigurnosti modela, te vremenske promjenjivosti procesa. Čak i u slučaju "idealnog" modela procesa sustav upravljanja nije "totalno" stabilan budući postoje kombinacije ulazno-izlaznih signala u čijim prijenosnim funkcijama se pojavljuje ovaj nestabilni pol (npr. prijenosna funkcija izlaza prema poremećaju koji djeluje na ulaz procesa)

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Na ovaj način možemo spriječiti kraćenje bilo kojeg pola procesa (ne samo nestabilnog)



Slika 8.1: Blokovska shema procesa

#### RJEŠENJE:

Uvrštavanjem konkretnih vrijednosti u prijenosnu funkciju, slijedi:

$$G_S(s) = \frac{1-s}{1+s} = \frac{D(s)}{C(s)}$$
 (8.3)

Opći oblik prijenosne funkcije drugog reda glasi:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)}$$
(8.4)

Budući da proces ima neminimalno-faznu nulu modelska funkcija također mora sadržavati tu istu nulu, te glasi:

$$G_m(s) = \frac{\omega_n^2 (1 - s)}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} =$$
(8.5)

Parametri modelske funkcije slijede iz zadanog nadvišenja te vremena prvog maksimuma:

$$\sigma_m [\%] = 100 \cdot \exp\left(-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{-\ln \frac{\sigma_m [\%]}{100}}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \frac{\sigma_m [\%]}{100}}}$$
(8.6)

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{\pi}{t_m \sqrt{1-\zeta^2}} \tag{8.7}$$

Dobiju se vrijednosti  $\zeta = 0.69$   $\omega_n = 2.17 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ 

Modelska prijenosna funkcija je prema tome:

$$G_m(s) = \frac{4.71(1+s)}{s^2 + 3s + 4.71} \tag{8.8}$$

Provjera izvedivosti regulatora uz ovu modelsku funkciju daje:

$$n = 1, v = 1;$$

$$m = 1 \ u = 2;$$

te je očito da je zadovoljen uvjet:

$$u - v \ge n - m. \tag{8.9}$$

Na temelju prijenosne funkcije procesa i modelske prijenosne funkcije zatvorenog kruga, računamo prijenosnu funkciju regulatora:

$$G_R(s) = \frac{C(s) \cdot \alpha(s)}{D(s) \left[\beta(s) - \alpha(s)\right]} = \frac{4.71 (1 - s)}{s (s + 7.71)}$$
(8.10)

Izlazna veličina izražena preko vodeće te poremećajne veličine dana je sa:

$$Y(s) = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} Y_R(s) + \frac{G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} Z(s) =$$

$$= \frac{4.71(1-s)}{s^2 + 3s + 4.71} Y_R(s) + \frac{s(s+7.71)(1-s)}{s^2 + 3s + 4.71} Z(s)$$
(8.11)

Stacionarna vrijednost prema vodećoj veličini uz skokovitu pobudu iznosi:

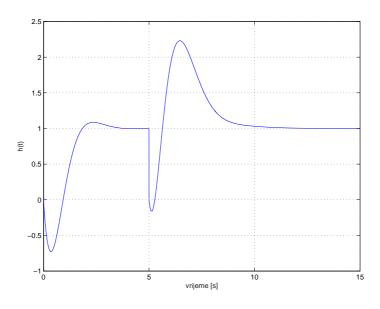
$$y_{stac.} = \lim_{s \to 0} \left( s \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} \frac{1}{s} \right) = 1$$
 (8.12)

Stacionarna vrijednost prema poremećajnoj veličini uz skokovitu pobudu iznosi:

$$y_{stac.} = \lim_{s \to 0} \left( s \frac{G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} \frac{1}{s} \right) = 0$$
 (8.13)

te je očito da nema odstupanja od reference u stacionarnom stanju.

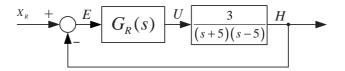
Prijelazna funkcija dana je na slici 8.1.



Slika 8.2: Prijelazna funkcija procesa uz djelovanje poremećaja.

## PRIMJER 8.2

Blokovska shema regulacije visine projektila prikazana je na slici 8.3.



Slika 8.3: Blokovska shema regulacije visine projektila.

Potrebno je odrediti strukturu i parametre najjednostavnijeg mogućeg izvedivog regulatora  $G_R(s)$  uz sintezu Truxal-Guilleminovim postupkom, pri čemu je zadana modelska prijenosna funkcija prema standardnom Butterworthovom obliku tako da se postigne vrijeme prvog maksimuma  $t_m = 1$  s, pritom neka polni višak zatvorenog kruga ostane jednak polnom višku procesa. Također, zatvoreni krug ne smije imati statičko odstupanje u odzivu na referentnu veličinu. U grani reference po potrebi dodati prefiltar.

#### RJEŠENJE:

Budući da je jedan pol procesa nestabilan, pri sintezi prema Truxal-Guilleminu potrebno je osigurati da modelska prijenosna funkcija  $G_m(s)$  zadovoljava da prijenosna funkcija  $1-G_m(s)$  ima neminimalnofaznu nulu koja je jednaka nestabilnom polu procesa. Neka je:

$$G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)}$$
.

Razliku  $1 - G_m(s)$  označimo sa:

$$1 - G_m(s) = \frac{\beta(s) - \alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{(s-5)P(s)}{\beta(s)} .$$

Pri tome mora vrijediti:

$$\operatorname{stupanj}[(s-5)P(s)] = \operatorname{stupanj}[\beta(s)]$$

jer je stupanj $[\beta]$  > stupanj $[\alpha]$ . Budući da polni višak zatvorenog kruga treba ostati isti kao polni višak procesa, najjednostavnija opcija izbora stupnjeva polinoma  $\alpha(s)$  i  $\beta(s)$  je sljedeća:

$$\begin{array}{l} \operatorname{stupanj}[\alpha(s)] = 0, \\ \operatorname{stupanj}[\beta(s)] = 2 \end{array} \} \Rightarrow \operatorname{stupanj}[P(s)] = 1 \ .$$

Neka je dakle:

$$\alpha(s) = \alpha_0,$$
  
 $\beta(s) = \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0,$   
 $P(s) = p_1 s + p_0.$ 

Kada se relacija za brojnik  $1 - G_m(s)$  raspiše, dobiva se sljedeća jednadžba:

$$\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0 - (s-5)(p_1 s + p_0) = \alpha_0$$
.

te izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije dobiva se:

$$\begin{aligned} p_1 &= \beta_2, \\ p_0 &= \beta_1 + 5p_1 = \beta_1 + 5\beta_2, \\ \beta_0 &+ 5p_0 = \alpha_0. \end{aligned}$$

Iz treće jednadžbe slijedi, pošto za modelsku prijenosnu funkciju mora biti  $\beta_0 = \alpha_0$  (ne smije biti statičke pogreške u odzivu na vodeću veličinu), da je  $p_0 = 0$ , što pak uvrštenjem u drugu jednadžbu daje:  $\beta_1 = -5\beta_2$ , što bi pak značilo ne samo da se koeficijente  $\beta_i$  ne može odabrati prema standardnom Butterworthovom obliku, već i da nije ispunjen nužan uvjet stabilnosti modelske prijenosne funkcije.

Dakle, izbor stupnjeva polinoma treba korigirati pa, uz poštivanje odredbe da polni višak modelske prijenosne funkcije ostaje jednak polnom višku procesa, uzimamo:

$$\begin{array}{l} \mathrm{stupanj}[\alpha(s)] = 1, \\ \mathrm{stupanj}[\beta(s)] = 3 \end{array} \} \ \Rightarrow \ \mathrm{stupanj}[P(s)] = 2 \ .$$

Sada polinomi  $\alpha$ ,  $\beta$  i P izgledaju kako slijedi:

$$\alpha(s) = \alpha_1 s + \alpha_0,$$
  
 $\beta(s) = \beta_3 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0,$   
 $P(s) = p_2 s^2 + p_1 s + p_0.$ 

Jednadžba za brojnik  $1 - G_m(s)$  sada glasi:

$$\beta_3 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0 - (s - 5)(p_2 s^2 + p_1 s + p_0) = \alpha_1 s + \alpha_0 ,$$

te se opet izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije dobiva:

$$\beta_3 = p_2,$$
  
 $\beta_2 = p_1 - 5p_2 = p_1 - 5\beta_3 \implies p_1 = \beta_2 + 5\beta_3,$   
 $\beta_1 - p_0 + 5p_1 = \alpha_1,$   
 $\beta_0 + 5p_0 = \alpha_0.$ 

Opet iz zadnje jednadžbe proizlazi  $p_0=0$  zbog zahtijeva na  $\alpha_0=\beta_0$ . To pak za predzadnju jednadžbu daje:

$$\alpha_1 = \beta_1 + 5p_1 = \beta_1 + 5\beta_2 + 25\beta_3 .$$

Time je pak sinteza zaokružena, pošto su koeficijenti  $\beta_i$  znani prema standardnom Butterworthovom obliku; naime za  $t_m=1$  s proizlazi prema odzivu iz tablice 9.1, Perić, str. 242, da je za treći red karakterističnog polinoma  $\omega_n \approx 5 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ . Polinom  $\beta(s)$  glasi:

$$\beta(s) = s^3 + 10s^2 + 50s + 125 ,$$

a polinom  $\alpha(s)$  prema izvedenim relacijama za njegove koeficijente preko koeficijenata  $\beta_i$  glasi:

$$\alpha(s) = 125s + 125$$
.

Polinom  $\beta(s) - \alpha(s)$  (bit će potreban u izračunu parametara regulatora) glasi:

$$\beta(s) - \alpha(s) = s^3 + 10s^2 - 75s = s(s-5)(s+15) ,$$

dakle  $1-G_m$  ima nulu u 5, kako smo i zahtijevali. Dakle, modelska prijenosna funkcija glasi:

$$G_m(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \frac{125s + 125}{s^3 + 10s^2 + 50s + 125}$$
.

Regulator se prema Truxal-Guilleminovom postupku računa kako slijedi:

$$G_R(s) = \frac{1}{G_s(s)} \frac{G_m(s)}{1 - G_m(s)} ,$$

pri čemu je sa  $G_s(s)$  označena prijenosna funkcija procesa. Dakle:

$$G_R(s) = \frac{(s-5)(s+5)}{3} \frac{\alpha(s)}{\beta(s) - \alpha(s)} = \frac{(125s+125)(s+5)}{3s(s+15)} = \frac{125}{3} \frac{(s+1)(s+5)}{s(s+15)} \ .$$

Nula regulatora -1 nije kompenzirana procesom pa se pojavljuje u prijenosnoj funkciji zatvorenog kruga  $G_m$ . Za točan odziv procesa prema Butterworthu u granu reference treba dodati prefiltar koji će kompenzirati nulu od  $G_m$ . Prijenosna funkcija prefiltra  $G_{pf}(s)$  glasi:

$$G_{pf}(s) = \frac{1}{s+1} \ .$$

#### ZADACI ZA VJEŽBU:

#### ZADATAK 8.1

Za proces opisan prijenosnom funkcijom:

$$G_p(s) = \frac{s+2}{(s^2+s+1)(s+1)}$$
(8.14)

potrebno je korištenjem metode Truxal-Guillemina odrediti regulator tako da se zadovolje sljedeći projektni zahtjevi:

- 1. zatvoreni regulacijski krug nema pogrešku u stacionarnom stanju na pobudni signal tipa odskočne funkcije,
- 2. odziv zatvorenog regulacijskog kruga na skokovitu pobudu je optimalan s obzirom na kriterij  $\int_0^\infty |e(t)|tdt$ ,
- 3. vrijeme porasta  $t_{a50} \approx 0.7[s]$ .

#### ZADATAK 8.2

Neka je zadan nestabilan proces oblika:

$$G_p(s) = \frac{1 - sT_1}{1 - sT_2} \tag{8.15}$$

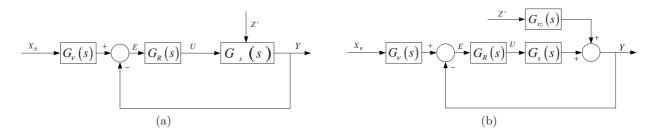
pri čemu je  $T_1 = 1[s]$  i  $T_2 = 2[s]$ . Potrebno je:

- a) Odrediti regulator korištenjem metode Truxal-Guillemina tako da zatvoreni regulacijski krug nema pogrešku na skokovitu pobudu, a nazivnik prijenosne funkcije zatvorenog kruga ima oblik  $D_m(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2$ , uz  $\zeta = 0.5$  i  $\omega_n = 2[rad/s]$ .
- b) Uz parametre regulatora izračunate pod točkom a) nacrtati pripadnu krivulju mjesta korijena.

# Poglavlje 9

# Sinteza regulatora s obzirom na vodeće i poremećajno vladanje

Dan je sustav upravljanja prikazan slikom 9.1(a), s djelovanjem poremećaja svedenim na izlaz procesa na slici 9.1(b). Pritom je  $X_R$  Laplaceova transformacija referentne veličine, Y izlaza,



Slika 9.1: Sustav automatskog upravljanja s poremećajem (a) i ekvivalentni dijagram sveden na poremećaj koji djeluje na izlazu procesa (b).

a Z' poremećaja. S E označena je Laplaceova transformacija regulacijskog odstupanja, a s Uizlazne veličine regulatora. Koriste se sljedeće prijenosne funkcije:

$$G_{\nu}(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{m_0 + m_1 s + \dots + m_x s^x}{n_0 + n_1 s + \dots + n_y s^y}, \ y \ge x,$$

$$G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_w s^w}{a_0 + a_1 s + \dots + a_z s^z}, \ z \ge w,$$

$$(9.1)$$

$$G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_w s^w}{a_0 + a_1 s + \dots + a_z s^z}, \ z \ge w, \tag{9.2}$$

$$G_s(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{d_0 + d_1 s + \dots + d_m s^m}{c_0 + c_1 s + \dots + c_n s^n}, \ n > m,$$

$$(9.3)$$

$$G_{sz}(s) = \frac{K(s)}{L(s)} = \frac{k_0 + k_1 s + \dots + k_k s^k}{l_0 + l_1 s + \dots + l_l s^l}, \ l \ge k,$$
(9.4)

pri čemu je  $G_{\nu}$  prijenosna funkcija prefiltra,  $G_R$  regulatora,  $G_s$  procesa s obzirom na upravljačku veličinu, a  $G_{sz}$  procesa s obzirom na poremećajnu veličinu. S x, y, w, z, m, n, k, loznačeni su odgovarajući stupnjevi polinoma u brojniku odnosno nazivniku ovih prijenosnih funkcija. Sintezom se sustava upravljanja zahtijeva željena prijenosna funkcija zatvorenog sustava s obzirom na referentnu veličinu  $G_m(s)$ :

$$G_x(s) = \frac{Y(s)}{X_R(s)} = G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_v s^v}{\beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_u s^u}, \ u > v, \tag{9.5}$$

te željena prijenosna funkcija zatvorenog sustava s obzirom na poremećajnu veličinu  $G_{mz}(s)$ :

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{Z'(s)} = G_{mz}(s) = \frac{\gamma(s)}{\sigma(s)} = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 s + \dots + \gamma_q s^q}{\sigma_0 + \sigma_1 s + \dots + \sigma_p s^p}, \ p \ge q,$$
 (9.6)

pri čemu v, u, q i p označavaju odgovarajuće stupnjeve polinoma u brojniku odnosno nazivniku ovih modelskih prijenosnih funkcija. Dodatnim se uvjetima na modelske prijenosne funkcije (9.5) i (9.6) zahtijeva nepostojanje trajnog regulacijskog odstupanja pri promjeni vodeće i referentne veličine:

$$G_m(0) = \lim_{s \to 0} \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = 1, \tag{9.7}$$

$$G_{mz}(0) = \lim_{s \to 0} \frac{\gamma(s)}{\sigma(s)} = 0.$$
 (9.8)

Povoljno je da polinomi u brojniku odnosno nazivniku  $G_m$  i  $G_{mz}$  budu čim nižeg reda, te da su po mogućnosti odabrani prema standardnim oblicima. Kada želimo da se sustav ponaša prema zadanim modelskim prijenosnim funkcijama i za vodeće i za poremećajno vladanje, sinteza se obavlja na način da se prvo strukturom i parametrima regulatora  $G_R(s)$  osigura odgovarajuće vladanje s obzirom na poremećajnu veličinu  $G_{mz}(s)$ , a potom se vladanje s obzirom na referentnu veličinu  $G_m(s)$  podesi projektiranjem prefiltra  $G_{\nu}(s)$ .

Pri provođenju sinteze prvo treba na valjani način odabrati modelske prijenosne funkcije  $G_{mz}$  i  $G_m$  tako da prefiltar i regulator budu izvedivi (kauzalni, stupanj polinoma brojnika manji ili jednak stupnju polinoma nazivnika), već prema prijenosnim funkcijama procesa s obzirom na upravljačku veličinu i poremećaj, a potom prijenosne funkcije regulatora i prefiltra trivijalno proizlaze, budući da je:

$$G_z(s) = G_{sz}(s) \frac{1}{1 + G_R(s)G_s(s)} \rightarrow G_R(s) = \frac{G_{sz}(s) - G_{mz}(s)}{G_s(s)G_{mz}(s)},$$
 (9.9)

$$G_x(s) = G_{\nu}(s) \frac{G_R(s)G_s(s)}{1 + G_R(s)G_s(s)} \rightarrow G_{\nu}(s) = \frac{G_{sz}(s)G_m(s)}{G_R(s)G_s(s)G_{mz}(s)}.$$
 (9.10)

Jednadžbu (9.9) raspisujemo po polinomima brojnika i nazivnika odnosnih prijenosnih funkcija:

$$G_R(s) = \frac{\frac{K(s)}{L(s)} - \frac{\gamma(s)}{\sigma(s)}}{\frac{D(s)}{C(s)} \frac{\gamma(s)}{\sigma(s)}} = \frac{{\binom{n}{s}} {\binom{k}{S}} {\binom{m}{s}} {\binom{m}{s}}$$

U posljednjoj je relaciji iznad polinoma upisan i njegov pripadni stupanj. Uvjet realizacije zahtijeva paralelno ispunjenje ovih uvjeta:

$$n + k + p \leq m + q + l, \tag{9.12}$$

$$n+l+q < m+q+l, (9.13)$$

$$\rightarrow m \ge \max(n, n + (p - q) - (l - k)).$$
 (9.14)

Očito iz (9.14) slijedi da ovaj regulator nije izvediv, jer je u kontradikciji s uvjetom u (9.3). Da bi regulator bio izvediv, modelsku prijenosnu funkciju s obzirom na smetnju mora se izabrati tako da se dokine nekoliko vodećih potencija u brojniku od  $G_R$ . Kako bi dokidanje bilo moguće u vodećim potencijama, stupnjevi polinoma  $K\sigma$  i  $L\gamma$  moraju biti isti, dakle:

$$k + p = q + l \rightarrow p - q = l - k,$$
 (9.15)

tj. polni višak modelske prijenosne funkcije s obzirom na poremećaj  $G_{mz}(s)$  mora biti jednak polnom višku prijenosne funkcije procesa s obzirom na smetnju  $G_{sz}(s)$ . Potrebno je dokinuti

$$(n+k+p) - (m+q+l) \stackrel{(9.15)}{=} (n+l+q) - (m+q+l) = n-m$$

vodećih potencija u brojniku od  $G_R(s)$  kako bi se stupnjevi brojnika i nazivnika u  $G_R$  izjednačili i time regulator bio izvediv. Dakle je pritom:

$$w = z = m + q + l, (9.16)$$

pri čemu je w stupanj brojnika, a z nazivnika prijenosne funkcije regulatora  $G_R(s)$ . Stupanj q brojnika od  $G_{mz}$  nastojimo izabrati minimalnim. Primijetimo da će tim izborom odmah biti fiksiran i stupanj nazivnika p prema (9.15). Budući da nastojimo dokinuti n-m vodećih potencija u brojniku od  $G_R$  polinom  $\gamma$  treba utjecati na svih n-m vodećih potencija, pa dakle mora biti stupnja makar n-m. Izabiremo minimalni mogući stupanj od  $\gamma$ :

$$q = n - m. (9.17)$$

Pritom za stupanj nazivnika modelske prijenosne funkcije  $G_{mz}$  proizlazi prema (9.15):

$$p = l - k + n - m. (9.18)$$

Za stupnjeve polinoma regulatora iz (9.16) sada proizlazi<sup>1</sup>:

$$w = z = m + (n - m) + l = n + l, (9.19)$$

Iz zahtjeva da regulacijsko odstupanje stacionarno bude 0, bez obzira na iznos poremećaja, mora biti prema (9.8):

$$\gamma_0 = 0, \tag{9.20}$$

a preostalih se n-m koeficijenata  $\gamma_i$  određuje tako da se poništi n-m vodećih potencija brojnika u  $G_R$ , kako je već objašnjeno. Time se  $\gamma_i$  algebarski vežu s koeficijentima nazivnika prijenosne funkcije  $G_{mz}(s)$ ,  $\sigma_i$ , te koeficijentima prijenosne funkcije procesa s obzirom na poremećaj. Koeficijente  $\sigma_i$  se pak najčešće odabire prema standardnim oblicima.

Nakon fiksiranja strukture i parametara regulatora  $G_R(s)$  nalazi se prijenosna funkcija prefiltra u grani referentne veličine  $G_{\nu}(s)$ , kako bi se osigurala željena modelska prijenosna funkcija sustava s obzirom na vodeću veličinu  $G_m(s)$  prema (9.10):

$$G_{\nu}(s) = \frac{A(s) C(s) K(s) \alpha(s) - m + l - k}{B(s) C(s) K(s) \alpha(s) \alpha(s) - m + l - k},$$

$$\frac{B(s) D(s) L(s) \beta(s) \gamma}{m l} \alpha(s),$$

$$(9.21)$$

 $<sup>^{1}</sup>$ Često je C(s) djeljiv s L(s), često čak i C(s)=L(s), pa su ovi stupnjevi ustvari niži jer se u (9.11) obavlja pokrata. Ova pokrata ne utječe na valjanost izloženog postupka sinteze.

iz čega zbog izvedivosti prefiltra  $G_{\nu}(s)$  proizlazi sljedeća veza između stupnjeva polinom brojnika i nazivnika od  $G_m(s)$ , v i u, tim redom:

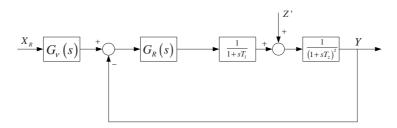
dakle svodi se na jednostavno pravilo da polni višak modelske prijenosne funkcije u-v mora biti veći ili jednak polnom višku prijenosne funkcije procesa s obzirom na upravljačku veličinu n-m. Uz takav se izbor modelske prijenosne funkcije dobiva izvedivi prefiltar. Pojednostavnjenjem relacije (9.21) koristeći realaciju (9.11) za  $G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$  dolazi se do sljedećeg izraza za sintezu prefiltra:

$$G_{\nu} = \frac{(D\gamma L)CK\alpha\sigma}{(C(K\sigma - \gamma L))DL\beta\gamma} = \frac{K\alpha\sigma}{(K\sigma - L\gamma)\beta}.$$
(9.23)

Polinom  $\beta(s)$  bira se prema standardnim oblicima. Polinom  $\alpha(s)$ , ako se ne zahtijeva uvođenje nekih nula u prijenosnu funkciju zatvorenog kruga, je najčešće stupnja 0, s  $\alpha_0 = \beta_0$  kako bi se zadovoljio zahtjev (9.7). Navedena razmatranja vrijede kada je dinamika procesa s obzirom na upravljačku veličinu i poremećaj stabilna i minimalnofazna. Ako to nije slučaj, sintezu treba obaviti uz odabir modelskih prijenosnih funkcija prema naputcima iz prošlog poglavlja.

#### PRIMJER 9.1

Zadan je sustav automatskog upravljanja prikazan na slici 9.2. Treba projektirati regulator



Slika 9.2: Blokovska shema sustava upravljanja.

 $G_R$  i prefiltar  $G_{\nu}$  minimalnog reda tako da dinamika odziva sustava Y i prema poremećaju Z' i prema referentnoj veličini  $X_R$  bude određena Butterworthovim standardnim oblikom sa  $\omega_n=3$   $\frac{rad}{s}$ . Regulacijskog odstupanja u stacionarnom stanju ne smije biti niti u odzivu na poremećaj niti u odzivu na referentnu veličinu. Zadano je:  $T_1=1$  [s],  $T_2=5$  [s].

#### RJEŠENJE:

Zapišimo prijenosne funkcije procesa po upravljačkoj veličini i poremećaju:

$$G_s(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)^2} = \frac{D(s)}{C(s)},$$

$$\to D(s) = 1, \ m = 0, \ C(s) = (1+sT_1)(1+sT_2)^2, \ n = 3,$$

$$G_{sz}(s) = \frac{Y(s)}{Z'(s)} = \frac{1}{(1+sT_2)^2} = \frac{K(s)}{L(s)},$$

$$\to K(s) = 1, \ k = 0, \ L(s) = (1+sT_2)^2, \ l = 2.$$

Prvo projektiramo regulator  $G_R$  koji će osigurati željeno ponašanje sustava pri odzivu na poremećaj. Razmotrimo oblik modelske prijenosne funkcije  $G_{mz}(s) = \frac{\gamma(s)}{\sigma(s)}$  za odziv sustava na poremećaj. Prema (9.17) i (9.18) za stupnjeve od  $\gamma$  (q) i  $\sigma$  (p) proizlazi:

$$q = n - m = 3,$$
  
 $p = n - m + l - k = 5,$ 

pa je uz zahtjev za stacionarnu točnost koji je ostvaren za  $\gamma_0=0$  oblik od  $G_{mz}(s)$  sljedeći:

$$G_{mz}(s) = \frac{\gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s}{\sigma_5 s^5 + \sigma_4 s^4 + \sigma_3 s^3 + \sigma_2 s^2 + \sigma_1 s + \sigma_0}$$

U ovom se izrazu jedan koeficijent može odabrati po volji (ali različit od nule, naravno), pa neka je  $\sigma_5 = 1$ . Ostali koeficijenti  $\sigma_i$  određeni su standardnim Butterworthovim polinomom petog stupnja (vidi [1], str. 242). Potrebno je dokinuti n-m=3 vodeće potencije u polinomu  $K\sigma - L\gamma$  koji glasi:

$$K(s)\sigma(s) - L(s)\gamma(s) = (\sigma_5 - \gamma_3 T_2^2)s^5 + (\sigma_4 - 2\gamma_3 T_2 - \gamma_2 T_2^2)s^4 + (\sigma_3 - \gamma_3 - 2\gamma_2 T_2 - \gamma_1 T_2^2)s^3 + (\sigma_2 - \gamma_2 - 2\gamma_1 T_2)s^2 + (\sigma_1 - \gamma_1)s + \sigma_0$$

Izjednačavanjem s nulom koeficijenata uz vodeće tri potencije dolazi se do sljedećih relacija:

potencija 
$$s^5 \rightarrow \gamma_3 = \frac{\sigma_5}{T_2^2} = \frac{1}{T_2^2}$$
  
potencija  $s^4 \rightarrow \gamma_2 = \frac{1}{T_2^2}(\sigma_4 - 2\gamma_3 T_2) = \frac{1}{T_2^2}\sigma_4 - \frac{2}{T_2^3}$   
potencija  $s^3 \rightarrow \gamma_1 = \frac{1}{T_2^2}(\sigma_3 - \gamma_3 - 2\gamma_2 T_2) = \frac{1}{T_2^2}\sigma_3 - \frac{2}{T_2}\sigma_4 + \frac{3}{T_2^2}$ 

Za Butterworthov polinom  $\sigma(s)$  5. reda, uz  $\sigma_5 = 1$  proizlaze koeficijenti:

$$\begin{split} &\sigma_5 = 1, \\ &\sigma_4 = 3.24 \omega_n, \\ &\sigma_3 = 5.24 \omega_n^2, \\ &\sigma_2 = 5.24 \omega_n^3, \\ &\sigma_1 = 3.24 \omega_n^4, \\ &\sigma_0 = \omega_n^5, \end{split}$$

te za koeficijente  $\gamma_i$  prema prethodno izvedenim relacijama proizlazi:

$$\begin{split} \gamma_3 &= \frac{1}{T_2^2}, \\ \gamma_2 &= \frac{3.24\omega_n}{T_2^2} - \frac{2}{T_2^3}, \\ \gamma_1 &= \frac{5.24\omega_n^2}{T_2^2} + \frac{3}{T_2^4} - \frac{6.48\omega_n}{T_2^3}, \\ \gamma_0 &= 0, \end{split}$$

pa prijenosna funkcija  $G_{mz}(s)$  glasi:

$$G_{mz}(s) = \frac{\frac{1}{T_2^2}s^3 + \left(\frac{3.24\omega_n}{T_2^2} - \frac{2}{T_2^3}\right)s^2 + \left(\frac{5.24\omega_n^2}{T_2^2} + \frac{3}{T_2^4} - \frac{6.48\omega_n}{T_2^3}\right)s}{s^5 + 3.24\omega_n s^4 + 5.24\omega_n^2 s^3 + 5.24\omega_n^3 s^2 + 3.24\omega_n^4 s + \omega_n^5}.$$

Polinom  $K\sigma - L\gamma$  (potreban za sintezu regulatora) glasi:

$$\begin{split} K\sigma - L\gamma &= \left(5.24\omega_n^3 + \frac{9.72\omega_n}{T_2^2} - \frac{4}{T_2^3} - \frac{10.48\omega_n^2}{T_2}\right)s^2 + \\ &+ \left(3.24\omega_n^4 - \frac{3}{T_2^4} - \frac{5.24\omega_n^2}{T_2^2} + \frac{6.48\omega_n}{T_2^3}\right)s + \omega_n^5. \end{split}$$

Prijenosna funkcija regulatora određena je s:

$$G_R(s) = \frac{C(K\sigma - L\gamma)}{D\gamma L} = \frac{(1+T_1s)(1+T_2s)^2(K\sigma - L\gamma)}{1\gamma(1+T_2s)^2} = \frac{(1+T_1s)(K\sigma - L\gamma)}{\gamma} = \frac{(1+T_1s)(K\sigma -$$

Da bi se sustav na željeni način ponašao pri promjeni referentne veličine, u grani reference projektira se prefiltar prijenosne funkcije  $G_{\nu}(s)$ . Najprije razmotrimo minimalni red brojnika i nazivnika modelske prijenosne funkcije

$$G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)},$$

v i u, tim redom. Budući da uz prethodno provedenu sintezu mora vrijediti

$$u-v \geq n-m=3$$
,

slijedi:

$$u = 3,$$
 $v = 0$ 

pa je prema Butterworthovom obliku uz koeficijent  $\alpha_0 = 1$ :

$$G_m(s) = \frac{1}{\frac{s^3}{\omega_n^3} + 2\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\frac{s}{\omega_n} + 1} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Prijenosna funkcija prefiltra određena je s

$$G_{\nu} = \frac{K\alpha\sigma}{(K\sigma - L\gamma)\beta} = \frac{\sigma}{(K\sigma - L\gamma)\beta}$$

Budući da su  $\sigma$  i  $\beta$  Butterworthovi polinomi neparnog reda s istim  $\omega_n$ , oba posjeduju nulu u  $-\omega_n$ . Dijeljenjem  $\sigma$  i  $\beta$  s  $s+\omega_n$  proizlazi:

$$\frac{\frac{\sigma(s)}{s+\omega_n}}{\frac{\beta(s)}{s+\omega_n}} = s^4 + 2.24\omega_n s^3 + 3\omega_n^2 s^2 + 2.24\omega_n^3 s + \omega_n^4,$$

$$\frac{\frac{\beta(s)}{s+\omega_n}}{\frac{\beta(s)}{s+\omega_n}} = \frac{s^2}{\omega_n^3} + \frac{s}{\omega_n^2} + \frac{1}{\omega_n}.$$

Prijenosna funkcija prefiltra glasi:

$$\begin{split} G_{\nu}(s) &= \frac{\frac{\sigma(s)}{s+\omega_n}}{(K(s)\sigma(s)-L(s)\gamma(s))\frac{\beta(s)}{s+\omega_n}} = \\ &= \frac{s^4+2.24\omega_n s^3+3\omega_n^2 s^2+2.24\omega_n^3 s+\omega_n^4}{5.24\omega_n^3+\frac{9.72\omega_n}{T_2^2}-\frac{4}{T_2^3}-\frac{10.48\omega_n^2}{T_2}} s^2 + \ 3.24\omega_n^4-\frac{3}{T_2^4}-\frac{5.24\omega_n^2}{T_2^2}+\frac{6.48\omega_n}{T_2^3} s+\omega_n^5 \quad \frac{s^2}{\omega_n^3}+\frac{s}{\omega_n^2}+\frac{1}{\omega_n}}{= \frac{0.012s^4+0.083s^3+0.333s^2+0.747s+1}{0.057s^4+0.289s^3+0.978s^2+1.406s+1}. \end{split}$$

## ZADACI ZA VJEŽBU:

#### ZADATAK 9.1

Zadan je istosmjerni elektromotor kojem treba regulirati brzinu vrtnje. Motor se upravlja naponom armature  $u_a$  s istosmjernog pojačala snage pojačanja  $K_p$ , kojem se na ulaz dovodi upravljački napon regulatora u:

$$u_a = K_p u$$
.

Brzina vrtnje motora  $\omega$  dinamički ovisi o struji motora  $i_a$  i momentu tereta  $m_t$ :

$$J\frac{d\omega}{dt} = Ki_a - m_t.$$

Struja armature pak dinamički ovisi o naponu armature i brzini vrtnje:

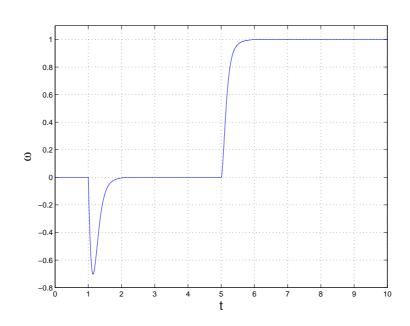
$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = u_a - K\omega.$$

Blokovskom shemom prikažite rad motora. Pri izvođenju prijenosnih funkcija koristite standardne oznake:  $T_a = \frac{L_a}{R_a}$ ,  $T_m = \frac{J}{K_a K^2}$ ,  $K_a = \frac{1}{R_a}$ . Vrijednosti parametara motora su sljedeće: K = 1.1,  $K_a = 0.3 \frac{A}{V}$ ,  $T_a = 30 \,$ ms,  $T_m = 300 \,$ ms. Konstana pojačala  $K_p$  iznosi:  $K_p = 1.2$ .

Treba sintetizirati regulator i prefiltar u grani referentne veličine brzine vrtnje, oba minimalnog reda. Sustav se treba i prema referenci brzine vrtnje i prema poremećaju oblika momenta tereta ponašati prema standardnom binomnom obliku, pritom  $\omega_n$  u oba slučaja neka bude isti, a odredite ga na način da maksimalni propad uslijed skokovite promjene momenta tereta nastupi nakon  $t_{prop} = 0.162$  s. U stacionarnom stanju ne smije biti regulacijskog odstupanja niti u odzivu na poremećaj niti u odzivu na referentnu veličinu. Nacrtajte blokovsku shemu sustava upravljanja te odziv brzine vrtnje na pobude  $m_t = S(t-1)$  i  $\omega_r = S(t-5)$  uz početno miran sustav (maksimalni iznos propada uslijed djelovanja momenta tereta također je potrebno izračunati).

Rješenje:

$$\begin{split} &\omega_{n} = 10 \ rad/s, \\ &G_{R} = \frac{K}{K_{p}} \frac{(3\omega_{n}^{2}T_{a}T_{m} - 1)s^{2} + (3\omega_{n}^{2}T_{m} + \omega_{n}^{3}T_{a}T_{m} - 3\omega_{n})s + \omega_{n}^{3}T_{m}}{s^{2} + 3\omega_{n}s}, \\ &G_{\nu} = \frac{\frac{T_{a}}{\omega_{n}}s^{2} + (\frac{1}{\omega_{n}} + T_{a})s + 1}{(\frac{3T_{a}}{\omega_{n}} - \frac{1}{\omega_{n}^{3}T_{m}})s^{2} + (\frac{3}{\omega_{n}} + T_{a} - \frac{3}{\omega_{n}^{2}T_{m}})s + 1}, \\ &maksimalni \ iznos \ propada: \omega_{m} = -0.771 \end{split}$$



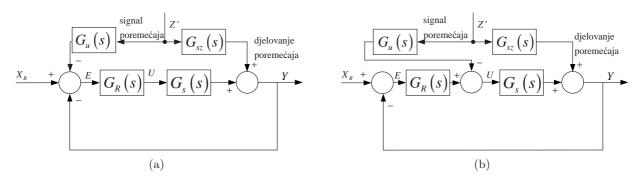
Slika 9.3: Odziv sustava upravljanja na danu pobudu.

## Poglavlje 10

# Poboljšanje regulacijskog vladanja pomoću složenijih struktura upravljanja

Da bi se izbjegla često složena struktura regulatora potrebna za upravljanje složenijim sustavima s izrazitim djelovanjem poremećaja, uvode se složenije strukture upravljanja kao ekstenzija regulacijskih krugova s jednom povratnom vezom. U ovom poglavlju iznose se dvije često korištene ekstenzije: unaprijedna kompenzacija poremećaja i kaskadna regulacija.

Kod unaprijedne kompenzacije poremećaja, poremećaj treba mjeriti ili estimirati, te pomoću tog mjernog signala direktno kompenzirati njegov utjecaj u regulacijskom krugu. Dva moguća načina vođenja signala poremećaja su preko regulatora ili direktno preko izvršnog člana, vidi sliku 10.1.



Slika 10.1: Sustav automatskog upravljanja s unaprijednom kompenzacijom poremećaja preko regulatora (a) i direktno preko izvršnog člana (b).

Koriste se sljedeće prijenosne funkcije:

$$G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_w s^w}{a_0 + a_1 s + \dots + a_z s^z}, \ z \ge w,$$
 (10.1)

$$G_s(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{d_0 + d_1 s + \dots + d_m s^m}{c_0 + c_1 s + \dots + c_n s^n}, \ n > m,$$
 (10.2)

$$G_{sz}(s) = \frac{K(s)}{L(s)} = \frac{k_0 + k_1 s + \dots + k_k s^k}{l_0 + l_1 s + \dots + l_l s^l}, \ l \ge k,$$
 (10.3)

$$G_u(s) = \frac{B_u(s)}{A_u(s)} = \frac{b_0^u + b_1^u s + \dots + b_w^u s^{w^u}}{a_0^u + a_1^u s + \dots + a_{z^u}^u s^{z^u}} z^u \ge w^u,$$
(10.4)

pri čemu je  $G_R$  prijenosna funkcija regulatora,  $G_R$  procesa,  $G_s$  procesa s obzirom na upravljačku veličinu,  $G_{sz}$  procesa s obzirom na poremećajnu veličinu, a  $G_u$  upravljačkog člana. S  $w, z, m, n, k, l, w^u, z^u$  označeni su odgovarajući stupnjevi polinoma u brojniku odnosno nazivniku ovih prijenosnih funkcija. Prijenosna funkcija upravljačkog člana  $G_u$ , kojim se ostvaruje unaprijedna kompenzacija smetnje, određuje se kada je prijenosna funkcija regulatora  $G_R$  već fiksirana.

 Za idealnu kompenzaciju poremećaja preko regulatora prijenosna funkcija upravljačkog člana glasi:

$$G_u = \frac{G_{sz}}{G_R G_s} = \frac{ACK}{BDL},\tag{10.5}$$

pri čemu uvjet realizacije  $G_u$  zahtijeva  $z^u \geq w^u$ , tj.

$$z + n + k \le w + m + l \rightarrow (n - m) + (z - w) \le l - k,$$
 (10.6)

odnosno zbrojeni polni viškovi procesa s obzirom na upravljačku veličinu i regulatora moraju biti manji ili jednaki polnom višku procesa s obzirom na poremećajnu veličinu.

 Za slučaj idealne kompenzacije utjecaja poremećaja direktno preko izvršnog člana prijenosna funkcija upravljačkog člana ima oblik

$$G_u = \frac{G_{sz}}{G_s} = \frac{CK}{DL},\tag{10.7}$$

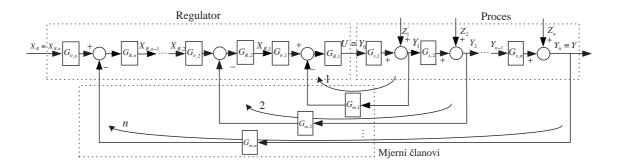
pri čemu uvjet realizacije zahtijeva

$$n - m \le l - k,\tag{10.8}$$

tj. da polni višak procesa s obzirom na upravljačku veličinu bude manji od polnog viška procesa s obzirom na poremećajnu veličinu.

Kada idealna kompenzacija nije moguća zbog nezadovoljenja uvjeta izvedivosti, uvođenjem parazitnih vremenskih konstanti se nekauzalne prijenosne funkcije učine kauzalnim, na uštrb ne više idealne kompenzacije smetnje.

Struktura kaskadnog upravljanja sastoji se od više upravljačkih petlji, koje su umetnute jedna u drugu, vidi sliku 10.2. Proces s ulazom U i izlazom Y predstavljen je kao niz od n



Slika 10.2: Kaskadno upravljanje.

potprocesa  $G_{s,i}$  s ulazom  $Y_{i-1}$ , te izlazom  $Y_i$ ,  $i=1,\ldots n$  pri čemu je  $Y_0\equiv U$ , a  $Y_n\equiv Y$ . Pritom na izlazu svakog potprocesa djeluje smetnja  $Z_i'$ . Upravljačka petlja i regulira izlaz  $Y_i$ , na temelju dane joj reference  $X_{R,i}$ . Upravljačka veličina je pritom  $X_{R,i-1}$  kojom se regulira prva podređena petlja. Zadatak je projektanta odrediti sve regulatore  $G_{R,i}$  i pripadne prefiltre u grani reference  $G_{\nu,i}$ .

Sinteza kreće od najnutarnjije petlje (petlja 1), za koju se nalazi regulator  $G_{R,1}$ . Prefiltrom  $G_{\nu,1}$  krate se nepogodne nule u prijenosnoj funkciji zatvorenog kruga  $G_{x,1} = \frac{Y_1}{X_{R,1}}$ .  $G_{x,1}$  se za potrebe sinteze strukturno pojednostavnjuje i kreće se u sintezu nadređene petlje.

Kaskadnom strukturom upravljanja svaki pojedini regulator  $G_{R,i}$  i prefiltar  $G_{\nu,i}$  mogu zadržati jednostavnu strukturu regulatora PID tipa, ili nekog njegovog derivata. Za sintezu se tih regulatora često u praksi koriste postupci tehničkog i simetričnog optimuma.

 Za primjenu tehničkog optimuma pri sintezi regulatora potreban je stabilan aperiodski proces bez astatizma:

$$G_s(s) = K_s \frac{1}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)\dots(1 + T_k s)},$$
 (10.9)

pri čemu je  $T_2+T_3+\ldots+T_k=T_\Sigma\ll T_1$ , pa se  $T_1$  naziva dominantnom vremenskom konstantom. Proces se u tom slučaju za potrebe sinteze regulatora zadovoljavajuće može aproksimirati s

$$G_s(s) \approx \frac{K_s}{(1 + T_1 s)(1 + T_\Sigma s)}.$$
 (10.10)

Prijenosnu funkciju otvorenog kruga dovodi se u željeni IT1 oblik kompenzacijom dominantne vremenske konstante nulom regulatora i uvođenjem integralne komponente za otklanjanje pogreške slijeđenja u stacionarnom stanju. Uz strukturu procesa (10.10) to se postiže PI regulatorom

$$G_R(s) = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s},\tag{10.11}$$

pri čemu je

$$T_I = T_1.$$
 (10.12)

IT1 oblik prijenosne funkcije  $G_o(s)$  je:

$$G_o(s) = \frac{K_R K_s}{T_I s (1 + T_{\Sigma} s)} = \frac{K_o}{T_1 s (1 + T_{\Sigma} s)}.$$
 (10.13)

Pojačanje  $K_R$  sad se odabire na način da prijenosna funkcija zatvorenog kruga oblika PT2S člana ima koeficijent prigušenja  $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , što je često optimalan izbor za mnoge sustave jer daje uravnoteženje između suprotstavljenih zahtjeva na brzinu prijelazne pojave i malo nadvišenje:

$$K_R = \frac{1}{2K_s} \frac{T_1}{T_{\Sigma}}. (10.14)$$

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga poprima oblik

$$G_x(s) = \frac{1}{1 + 2T_{\Sigma}s + 2T_{\Sigma}^2 s^2},\tag{10.15}$$

koja se za potrebe daljnje sinteze može strukturno pojednostavniti:

$$G_x(s) \approx \frac{1}{1 + 2T_{\Sigma}s}. (10.16)$$

• Kod primjene simetričnog optimuma proces je predstavljen IT1 članom:

$$G_s(s) = \frac{K_s}{T_i s (1 + T_{\Sigma} s)}. (10.17)$$

Uz odabran regulator PI tipa

$$G_R(s) = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s} (10.18)$$

dobiva se prijenosna funkcija otvorenog kruga sljedećeg oblika:

$$G_o(s) = \frac{K_o}{T_I T_i s^2} \frac{1 + T_I s}{1 + T_{\Sigma} s}.$$
 (10.19)

Zahtjev za stabilnost neovisnu o  $K_o$  je  $T_I > T_{\Sigma}$  pa dakle u prijenosnoj funkciji otvorenog kruga postoji član s faznim prethođenjem, uz kojeg fazna karakteristika posjeduje maksimum na frekevnciji

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_I T_{\Sigma}}}. (10.20)$$

S obzirom na frekvenciju  $\omega_m$  fazna karakteristika je simetrična, a ako se s  $a^2>1$  označi odnos između  $T_I$  i  $T_\Sigma$ :

$$T_I = a^2 T_{\Sigma},\tag{10.21}$$

faza od  $G_o(j\omega)$  na frekvenciji  $\omega_m$  je

$$\varphi_o(\omega_m) = \arg G_o(j\omega_m) = -180^\circ + \arctan a - \arctan \frac{1}{a}.$$
 (10.22)

Odabere li se presječna frekvencija

$$\omega_c = \omega_m \tag{10.23}$$

tada i amplitudno-frekvencijska karakteristika od  $G_o$  postaje simetrična s obzirom na os 0 dB. Fazno osiguranje odabire se pritom da iznosi

$$\gamma = \arctan a - \arctan \frac{1}{a} = \arctan \frac{1}{2} \left( a - \frac{1}{a} \right) = 37^{\circ}, \tag{10.24}$$

iz čega za a proizlazi

$$a = 2. (10.25)$$

Iz zahtjeva na presječnu frekvenciju  $\omega_c$  (10.23) proizlazi i iznos pojačanja regulatora pri simetričnom optimumu:

$$K_R = \frac{T_i}{aK_sT_{\Sigma}}. (10.26)$$

Dakle se uz a=2 dobivaju sljedeći parametri regulatora:

$$T_I = 4T_{\Sigma}$$

$$K_R = \frac{T_i}{2K_s T_{\Sigma}}$$

$$\tag{10.27}$$

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga dobiva se u obliku:

$$G_x(s) = \frac{1 + a^2 T_{\Sigma} s}{1 + a^2 T_{\Sigma} s + a^3 T_{\Sigma}^2 s^2 + a^3 T_{\Sigma}^3 s^3} \stackrel{(a=2)}{=} \frac{1 + 4 T_{\Sigma} s}{1 + 4 T_{\Sigma} s + 8 T_{\Sigma}^2 s^2 + 8 T_{\Sigma}^3 s^3}.$$
 (10.28)

Prijenosna funkcija ovog oblika rezultira značajnim nadvišenjem u prijelaznoj karakteristici zatvorenog kruga s obzirom na referentnu veličinu, kojeg se smanji dodavanjem prefiltra u granu reference koji krati nulu od  $G_x$ . Grubim strukturnim pojednostavnjenjem prijenosna funkcija zatvorenog kruga se nakon dodavanja prefiltra može svesti na

$$G_x = \frac{1}{1 + 3.7T_{\Sigma}s},\tag{10.29}$$

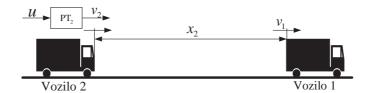
za potrebe sinteze eventualnih nadređenih regulacijskih krugova.

#### PRIMJER 10.1

Zadan je problem regulacije razmaka vozila (slika 10.3) na vodoravnoj podlozi. Vozilo 2 treba slijediti vozilo 1 na zadanoj referentnoj udaljenosti  $x_{2r}$ . Regulacijski uređaj kojeg treba projektirati daje upravljačku veličinu u za vozilo 2 koja je povezana s brzinom vozila  $v_2$  preko člana s usporenjem drugog reda:

$$T_1 T_2 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dv_2}{dt} + v_2 = K_v u . {10.30}$$

Promjena razmaka  $x_2$  između vozila ovisi o razlici brzina prvog  $(v_1)$  i drugog vozila  $(v_2)$ :  $\frac{dx_2}{dt} = v_1 - v_2$ . Potrebno je projektirati kaskadnu strukturu upravljanja rastojanja vozila s PI



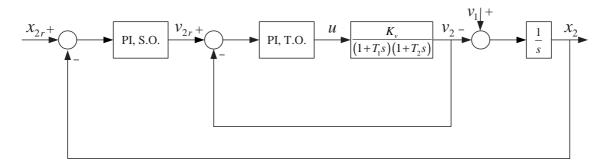
Slika 10.3: Regulacija razmaka vozila.

regulatorima, na raspolaganju su mjerenja brzine drugog vozila  $v_2$  i razmaka između vozila  $x_2$ . Zadano je:  $K_v = 10 \frac{m}{V_s}$ ,  $T_1 = 3$  s,  $T_2 = 20$  s.

Predložite izgled dvopetljaste kaskadne strukture upravljanja te ju blokovski prikažite. Nad pojedinim PI regulatorima naznačite prema kojem će se praktičnom optimumu vršiti sinteza. Potom projektirajte regulatore za nutarnju i vanjsku petlju prema predloženim praktičnim optimumima. Po potrebi u referentne grane petlji dodavajte prefiltre.

#### RJEŠENJE:

Blokovska shema dana je na slici 10.4. PI regulator za nutarnji krug po tehničkom optimumu:



Slika 10.4: Blokovska shema kaskadne regulacije.

$$T_{I1} = T_2 = 20 \text{ s}$$
  
 $K_{R1} = \frac{T_2}{2K_vT_1} = 0.33$ 

Aproksimacija prijenosne funkcije zatvorenog kruga nutarnje petlje:

$$G_{x1}(s) = \frac{1}{1 + 2T_1s + 2T_1^2s^2} \approx \frac{1}{1 + 2T_1s}$$

Proces za vanjsku petlju:

$$G_{s2}(s)G_{x1}(s) = -\frac{1}{s(1+2T_1s)}$$

PI regulator za vanjski krug po simetričnom optimumu (a = 2):

$$T_{I2} = a^2 * 2T_1 = 24 \text{ s}$$
  
 $|K_{R2}| = \frac{1}{2aT_1} = 0.083 \implies K_{R2} = -0.0833$ 

Nula vanjskog regulatora kompenzira se prefiltrom u grani vodeće vrijednosti vanjskog kruga vremenske konstante:

$$T_f = T_{I2} = 24 \text{ s}$$
.

#### PRIMJER 10.2

Za sustav regulacije razine tekućine h<sub>2</sub> (vidi sliku 10) potrebno je:

- a) odrediti prijenosne funkcije svih elemenata te nacrtati strukturnu shemu,
- b) odrediti parametre unutarnjeg PI regulatora  $G_{R1}$  prema tehničkom optimumu,
- c) projektirati unaprijedni kompenzator  $G_u$  poremećajnog toka  $q_z$  u unutarnjem krugu koji djeluje direktno na izvršni član. Ako prijenosna funkcija nije ostvariva, treba joj dodati parazitnu vremensku konstantu da posatne takvom.
- d) odrediti parametre vanjskog PI regulatora  $G_{R2}$  prema simetričnom optimumu. Aproksimirati dominantne vremenske konstante integralnim djelovanjem te po potrebi dodati prefilter za kompenzaciju nula unutarnje petlje.

Po potrebi odredite prijenosne funkcije prefiltara u granama referenci  $X_{R,h1}$ ,  $X_{R,h2}$ , koji će kompenzirati nule odgovarajućih prijenosnih funkcija zatvorenog kruga. Linearizirane diferencijalne jednadžbe elemenata regulacijskog sustava su:

• regulacijski ventil:

$$T_v \cdot \frac{dq_1}{dt} + q_1 = K_v \cdot x,$$

• 1. spremnik:

$$A_1 \cdot \frac{dh_1}{dt} = q_1 - q_{12},$$
  
 $q_{12} = K_1 \cdot h_1.$ 

• 2. spremnik:

$$A_2 \cdot \frac{dh_2}{dt} = q_{12} - q_2, q_2 = K_2 \cdot h_2.$$

• mjerni članovi razine tekućine:

$$T_m \cdot \frac{dh_{1m}}{dt} + h_{1m} = K_{1m} \cdot h_1,$$
  
 $T_m \cdot \frac{dh_{2m}}{dt} + h_{2m} = K_{2m} \cdot h_2.$ 

Parametri lineariziranih diferencijalnih jednadžbi su:

$$T_{v} = 1[s]$$

$$K_{v} = 0.05 \left[\frac{lit.}{mAs}\right]$$

$$A_{1} = 1 \left[m^{2}\right]$$

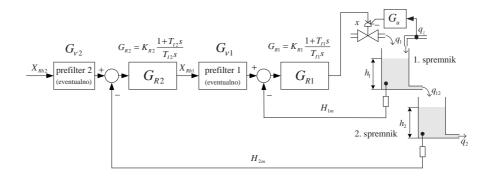
$$A_{2} = 7 \left[m^{2}\right]$$

$$K_{1} = 0.1 \left[\frac{lit.}{\frac{s}{m}}\right], K_{2} = 0.07 \left[\frac{lit.}{\frac{s}{m}}\right]$$

$$T_{m} = 0.5[s]$$

$$K_{1m} = 10 \left[\frac{V}{m}\right], K_{2m} = 20 \left[\frac{V}{m}\right]$$

- vremenska konstanta ventila,
- konstanta ventila,
- površina poprečnog presjeka 1. spremnika,
- površina poprečnog presjeka 2. spremnika,
- koeficijenti istjecanja,
- vremenska konstanta mjernog člana razine,
- pojačanja mjernih članova razine.



Slika 10.5: Sustav regulacije razine fluida.

Naznačene veličine na slici su:

x - otvor ventila [mA],  $q_1, q_{12}, q_2$  - protoci tekućine  $\left[\frac{lit.}{s}\right]$ ,  $h_1, h_2$  - razine tekućine [m],  $h_{1m}, h_{2m}$  - mjerni signali razina tekućine [V],  $X_{Rh1}, X_{Rh2}$  - referentne vrijednosti razina tekućina [V].

NAPOMENA: Mjerne jedinice parametara diferencijalnih jednadžbi su međusobno prilagođene tako da ih ne treba svoditi na SI sustav mjernih jedinica.

#### RJEŠENJE:

a) Iz danih diferencijalnih jednadžbi možemo dobiti sljedeće prijenosne funkcije

$$Q_{1}(s) = \frac{K_{V}}{T_{V}s+1}X(s),$$

$$G_{1}(s) = \frac{Q_{1}(s)}{X(s)} = \frac{K_{V}}{T_{V}s+1} = \frac{0.05}{s+1},$$

$$H_{1}(s) = \frac{\frac{1}{K_{1}}}{\frac{A_{1}}{K_{1}}s+1}Q_{1}(s),$$

$$G_{2}(s) = \frac{Q_{1}(s)}{H_{1}(s)} = \frac{\frac{1}{K_{1}}}{\frac{A_{1}}{K_{1}}s+1} = \frac{10}{10s+1},$$

$$H_{2}(s) = \frac{\frac{K_{1}}{K_{2}}}{\frac{A_{2}}{K_{2}}s+1}H_{1}(s),$$

$$G_{3}(s) = \frac{H_{2}(s)}{H_{1}(s)} = \frac{\frac{K_{1}}{K_{2}}}{\frac{A_{2}}{K_{2}}s+1} = \frac{1.43}{100s+1},$$

$$H_{1m}(s) = \frac{K_{1m}}{T_{m}s+1}H_{1}(s),$$

$$G_{4}(s) = \frac{H_{1m}(s)}{H_{1}(s)} = \frac{K_{1m}}{T_{m}s+1} = \frac{10}{0.5s+1},$$

$$H_{2m}(s) = \frac{K_{2m}}{T_{m}s+1}H_{2}(s),$$

$$G_{5}(s) = \frac{H_{2m}(s)}{H_{2}(s)} = \frac{K_{2m}}{T_{m}s+1} = \frac{20}{0.5s+1}.$$

b) Parametre PI regulatora za unutrašnju petlju nalazimo po tehničkom optimumu. Prijenosna funkcija otvorenog kruga može se prikazati kao:

$$G_{o1}(s) = \frac{0.05}{s+1} \frac{10}{10s+1} \frac{10}{0.5s+1} \approx \frac{5}{(10s+1)(1.5s+1)}.$$

Slijede parametri PI regulatora  $G_{R1}$ 

$$K_{R1} = \frac{10}{5*2*1.5} = 0.67 \quad T_{I1} = 10 [s] ,$$

tj.:

$$G_{R1} = 0.67 \frac{1 + 10s}{10s}.$$

Prijenosna funkcija zatvorene unutrašnje petlje može se prikazati kao

$$G_{x1}(s) = \frac{0.5s + 1}{10} \frac{1}{1 + 3s + 4.5s^2} \approx \frac{0.5s + 1}{10} \frac{1}{1 + 3s}.$$

Budući da prijenosna funkcija otvorenog kruga vanjske petlje ima pol koji odgovara nuli ove prijenosne funkcije (uslijed mjernih članova razine s istom vremenskom konstantom), prefiltar nije potrebno uvoditi, dakle:

$$G_{\nu 1} = 1.$$

c) Pretkompenzator u unutarnjoj petlji  $G_u$ , budući da djeluje direktno na izvršni član nalazi se na sljedeći način:

$$G_u = \frac{\frac{H_1}{Q_z}}{\frac{H_1}{V}} = \frac{G_2}{G_1 G_2} = \frac{1 + sT_V}{K_V} \overset{\text{kauzalnost}}{\approx} \frac{1}{K_V} \frac{1 + T_V s}{1 + 0.1 T_V s}$$

d) Prijenosna funkcija otvorenog kruga vanjske petlje se može prikazati kao

$$G_{o2}(s) = \frac{1.43}{100s+1} \frac{20}{0.5s+1} \frac{0.5s+1}{10} \frac{1}{1+3s} \approx \frac{2.86}{100s(1+3s)},$$

pri čemu je PT1 član velike vremenske konstante aproksimiran integarlnim ponašanjem. Nad ovakvom je prijenosnom funkcijom moguće naći regulator prema simetričnom optimumu. Uz a=2 dobiju se parametri PI regulatora:

$$T_{I2} = 4 * 3 = 12[s]$$
  $K_{R2} = \frac{1}{2.286} \frac{100}{3} = 5.83,$ 

tj.:

$$G_{R2} = 5.83 \frac{1 + 12s}{12s}.$$

Prijenosna funkcija zatvorene petlje je

$$G_{x2}(s) = \frac{0.5s + 1}{20} \frac{1 + 12s}{1 + 12s + 72s^2 + 216s^3}$$

U ovom slučaju je potrebno projektirati prefiltar da se kompenziraju nule prijenosne funkcije  $G_{x2}(s)$ 

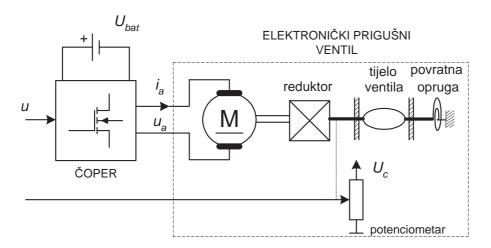
$$G_{\nu 2}(s) = \frac{1}{(0.5s+1)(12s+1)}$$

## ZADACI ZA VJEŽBU:

#### ZADATAK 10.1

Slijedni sustav zakreta elektroničke zaklopke kojom se regulira dotok zraka u motor automobila prikazan je slikom. Napon armature motora upravlja se bipolarnim čoperom kojem se na ulaz dovodi upravljački napon u. Budući da je frekvencija rada čopera puno veća od najveće granične frekvencije procesa, djelovanje čoperskog pojačala može se aproksimirati proporcionalnim članom. Jednadžba arrmaturnog kruga motora glasi:

$$T_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = K_{ch} u - K_v \omega_m,$$



Slika 10.6: Elektronička zaklopka.

pri čemu je  $i_a$  struja armature motora,  $\omega_m$  brzina vrtnje motora,  $T_a$  armaturna vremenska konstanta,  $R_a$  otpor armature,  $K_{ch}$  pojačanje čopera, a  $K_v$  konstanta motora. Jednadžba gibanja motora glasi:

$$J\frac{d\omega_m}{dt} = K_t i_a - K_l K_S \theta,$$

pri čemu je J moment inercije zamašnih masa sveden na osovinu motora,  $K_t$  konstanta motora,  $K_l$  omjer prijenosa u reduktoru, a  $K_S$  koeficijent krutosti povratne opruge. Konačno, kut zakreta ventila  $\theta$  povezan je s  $\omega_m$  preko

$$\frac{d\theta}{dt} = K_l \omega_m.$$

Pretpostavite da su na raspolaganju mjerenja brzine vrtnje motora  $(\omega_m, \left\lceil \frac{rad}{s} \right\rceil)$  i kuta zakreta ventila  $(\theta, \left\lceil rad \right\rceil)$ . Prijenosne funkcije mjernih članova su jedinične. Sustav upravljanja zakretom  $\theta$  izveden je kao dvopetljasti kaskadni sustav upravljanja. Nacrtajte shematski izgled zatvorenog sustava upravljanja. Projektirajte PI regulatore u regulacijskim krugovima prema odgovarajućim praktičnim optimumima, te po potrebi u grane referentnih vrijednosti regulacijskih petlji dodavajte prefiltre. Zadano je:  $T_a = 3$  ms,  $R_a = 3$   $\Omega$ ,  $K_{ch} = 2.1$ ,  $K_v = 0.02 \frac{Vs}{rad}$ ,  $J = 2 \cdot 10^{-6} \frac{Nms^2}{rad^2}$ ,  $K_t = K_v$ ,  $K_l = 0.06$ ,  $K_S = 0.05 \frac{Nm}{rad}$ . Napomena: prijenosne funkcije potprocesa u petljama uvijek treba prikladnom aproksimacijom svesti na standardni oblik za primjenu određenog praktičnog optimuma.

Rješenje: PI regulator brzine vrtnje, prema tehničkom optimumu:  $K_{R1} = 0.0125$ ,  $T_{R1} = 11$  ms, nema prefiltra u grani reference brzine vrtnje

PI regulator kuta zakreta, prema simetričnom optimumu:  $K_{R2} = 1006$ ,  $T_{R2} = 33.1$  ms, prefiltar u grani reference kuta zakreta:

$$G_{pf} = \frac{1}{0.0331s + 1}.$$

# Poglavlje 11

# Sinteza linearnih kontinuiranih sustava u prostoru stanja

Linearni kontinuirani proces je u prostoru stanja opisan pomoću jednadžbi

$$\dot{x} = Ax + Bu, 
y = Cx + Du,$$
(11.1)

pri čemu je  $x \in \mathbb{R}^n$  stanje procesa,  $u \in \mathbb{R}$  upravljački ulaz u proces, a  $y \in \mathbb{R}$  izlaz iz procesa. Primijetite da su u i y jednodimenzionalni, dakle razmatramo samo tzv. SISO procese.

Za ovakav proces uvode se pojmovi upravljivosti i osmotrivosti. Sustav je upravljiv ako je moguće odrediti signal upravljanja u(t) unutar konačnog vremenskog intervala duljine  $t_f$  koji će dovesti sustav iz bilo kojeg početnog stanja  $x_0$  u ishodište prostora stanja. Upravljivost se provjerava matricom upravljivosti

$$S_1 = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$
 (11.2)

koja mora biti ranga n da bi sustav bio upravljiv, odnosno ekvivalentno (samo za SISO i SIMO sustave!) determinanta od  $S_1$  mora biti različita od 0. Sustav je osmotriv ako je moguće poznavanjem izlaznog signala u konačnom vremenskom intervalu duljine  $t_f$  rekonstruirati stanje  $x_0$  na početku tog intervala. Osmotrivost se provjerava matricom osmotrivosti

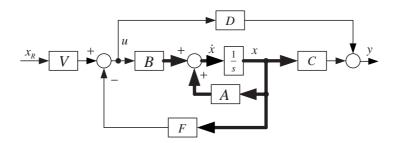
$$S_2 = \begin{bmatrix} C^T \ A^T C^T & [A^T]^2 \ C^T & \dots \ [A^T]^{n-1} \ C^T \end{bmatrix}$$
 (11.3)

koja mora biti ranga n, odnosno ekvivalentno (samo za SISO i MISO sustave!) determinanta od  $S_2$  mora biti različita od 0.

Projektiramo sustav upravljanja po varijablama stanja kod kojeg se upravljački ulaz proračunava na temelju stanja procesa x i željenog izlaza sustava  $x_R$ :

$$u = Vx_R - Fx, (11.4)$$

pri čemu je F matrica povratne veze po varijablama stanja, a V je prefiltar u grani reference izlaza  $x_R$  kojim se sustav u relaciji  $x_R \to y$  svodi na jedinično statičko pojačanje i kojim



Slika 11.1: Blokovski prikaz sustava upravljanja po varijablama stanja.

se eventualno mogu kratiti minimalnofazne nule sustava upravljanja. Sustav upravljanja prema (11.1)-(11.4) blokovski se može prikazati slikom 11.1. Dinamika zatvorenog sustava upravljanja u prostoru stanja je sad opisana relacijom

$$\dot{x} = (A - BF)x + BVx_R, 
y = (C - DF)x + DVx_R.$$
(11.5)

U slučaju da je sustav upravljiv, polovi zatvorenog kruga (odnosno karakteristične vrijednosti matrice A-BF) mogu se postavljati na proizvoljne lokacije u s-ravnini mijenjanjem koeficijenata matrice F. Ako se sP označi željeni karakteristični polinom zatvorenog kruga,

$$P(s) = s^{n} + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_{1}s + p_{0}, \tag{11.6}$$

tada se matrica F računa Ackermannovom formulom:

$$F = [0 \ 0 \ \dots \ 1]S_1^{-1}P(A), \tag{11.7}$$

dakle se posljednji redak invertirane matrice upravljivosti pomnoži s karakterističnim polinomom po matrici A. Pojačanje prefiltra određeno je s

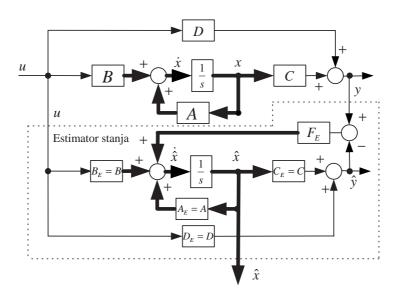
$$V = [C(BF - A)^{-1}B]^{-1}.$$
 (11.8)

Ovaj pristup sintezi zahtijeva da su sva stanja procesa mjerljiva i dostupna. Ako to nije slučaj, a želi se primjeniti regulator po varijablama stanja, stanja sustava treba estimirati na temelju znanih ulaza i izlaza procesa u i y, koristeći estimator stanja prema shemi na slici 11.2. Očito je estimator samo ponovljeni proces kojem se stanja korigiraju na temelju razlike izlaza procesa i estimiranog izlaza procesa  $y - \hat{y}$ . Estimirano stanje označava se s $\hat{x}$ , a njegova je dinamika prema slici 11.2 određena s

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + F_E(y - \hat{y}) = A\hat{x} + Bu + F_EC(x - \hat{x}).$$
 (11.9)

Ako se s $\hat{e} = x - \hat{x}$ označi pogreška estimacije, tada se oduzimanjem (11.9) od (11.1) dolazi do sljedećeg izraza za dinamiku greške estimatora:

$$\dot{\hat{e}} = (A - F_E C)\hat{e}. \tag{11.10}$$



Slika 11.2: Estimator stanja sustava.

Dakle je karakteristična matrica dinamike pogreške estimacije  $A-F_EC$ , te se njene svojstvene vrijednosti mogu postaviti na proizvoljna mjesta u s-ravninu ako je proces osmotriv. Ove se svojstvene vrijednosti mogu odrediti kao nultočke karakterističnog polinoma estimatora

$$P_E(s) = |sI - (A - F_E C)|.$$
 (11.11)

Naravno, pritom svakako treba osigurati stabilnu dinamiku greške estimatora kako bi bilo

$$\lim_{t \to \infty} \hat{e}(t) = 0, \tag{11.12}$$

odnosno  $\hat{x}(t) \to x(t)$ .

Zatvoreni sustav upravljanja s estimatorom stanja, pri kojem se upravljački ulaz proračunava kao

$$u = Vx_R - F\hat{x} \tag{11.13}$$

ustvari je sustav reda 2n prikaziv u prostoru stanja na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BF & BF \\ 0 & A - F_E C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BV \\ 0 \end{bmatrix} x_R, \tag{11.14}$$

pa je karakteristični polinom sustava upravljanja s estimatorom stanja  $P_u(s)$  dan s

$$P_u(s) = |sI - (A - BF)| |sI - (A - F_E C)| = P(s)P_E(s).$$
(11.15)

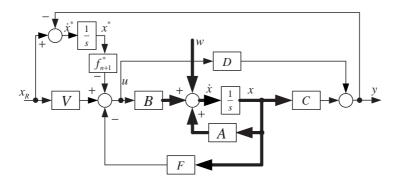
Dakle, iz posljednje relacije slijedi da je polove estimatora i polove sustava upravljanja moguće odvojeno zadavati. U pravilu se uvijek postupa na način da se odaberu polovi sustava upravljanja kao da su sva stanja mjerljiva, a potom se, ako nisu, doda estimator čija dinamika

treba biti nekoliko puta brža od dinamike sustava upravljanja (polovi estimatora smještaju se ljevije od polova sustava upravljanja u lijevoj s-poluravnini).

Projektirani regulator osigurava željenu dinamiku, ali ne i stacionarnu točnost kada djeluju poremećaji na proces, budući da regulator po varijablama stanja ima PD karakteristike i nema integralnog djelovanja. Jednadžba stanja procesa na koji djeluje i poremećaj  $w \in \mathbb{R}^m$  može se prikazati na način

$$\dot{x} = Ax + Bu + w. \tag{11.16}$$

Stacionarna točnost sustava upravljanja  $(x_R = y)$  neovisno o iznosu poremećaja može se osigurati uvođenjem integrala pogreške slijeđenja  $x_R - y$  u regulator, vidi sliku 11.3. Izlaz



Slika 11.3: Otklanjanje regulacijskog odstupanja u sustavu s upravljanjem po varijablama stanja.

integratora predstavlja sada još jednu varijablu stanja, označimo ju s $x^*$ , o kojoj bez problema dobivamo informaciju jer je dio samog regulatora, te i s nje povlačimo povratnu vezu (pojačanje  $f_{n+1}^*$ ) pa se opet dobiva regulator po svim varijablama stanja sustava upravljanja. Ovakav prošireni sustav ima dimenziju n+1 (za sustave s više izlaza bilo bi potrebno više ovakovih integratora pogreške, za svaki par referenca-izlaz po jedan). Primijetimo da će sustav, ako mu osiguramo stabilnost, sigurno biti stacionarno točan. Naime, ako je sustav stabilan, to zanči da mu je ravnotežno stanje (njegovo jedino!), u kojem su sve derivacije stanja nula, također stabilno. No kako je jedno od stanja upravo i  $x^*$ , a njegova je derivacija jednaka  $x_R - y$ , to pak znači da je u stacionarnom stanju  $x_R - y = 0 \rightarrow x_R = y$ , i sustav upravljanja je stacionarno točan. Razmotrimo kako izgledaju matrice zatvorenog proširenog

sustava upravljanja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + Bu \\ x_R - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + B\left(Vx_R - [F \ f_{n+1}^*] \begin{bmatrix} x \\ x^* \end{bmatrix}\right) \\ x_R - Cx - D\left(Vx_R - [F \ f_{n+1}^*] \begin{bmatrix} x \\ x^* \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A - BF & -Bf_{n+1}^* \\ -C + DF & Df_{n+1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BV \\ 1 \end{bmatrix} x_R,$$

$$y = Cx + Du = Cx + D\left(Vx_R - [F \ f_{n+1}^*] \begin{bmatrix} x \\ x^* \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} C - DF & -Df_{n+1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x^* \end{bmatrix} + DVx_R.$$

$$(11.17)$$

Sažetije se može pisati:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}x_R 
y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}x_R ,$$
(11.18)

pri čemu je

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ x^* \end{bmatrix}. \tag{11.19}$$

Vektor pojačanja  $[F \ f_{n+1}^*]$  određuje se pomoću željenog karakterističnog polinoma P(s) tako da se odgovarajući koeficijenti od  $|sI - \bar{A}|$  izjednače s koeficijentima od P. Primijetite da iznos člana V više nije ključan za iznos stacionarnog stanja, no njime se sada može podesiti brojnik prijenosne funkcije zatvorenog kruga, u smislu da se može povećati brzina slijeđenja reference, na uštrb većeg nadvišenja.

#### PRIMJER 11.1

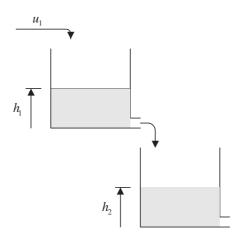
Sustav skladištenja fluida u dva spojena bazena opisan je u okolini radne točke sljedećim modelom u prostoru stanja:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{h}_1 \\ \Delta \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & 0 \\ \sigma & -\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u, \tag{11.20}$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix}. \tag{11.21}$$

Potrebno je:

- a) Provjeriti je li proces upravljiv i osmotriv. Odrediti matricu povratne veze F tako da polovi zatvorenog kruga budu  $p_{1,2} = \sigma(-2 \pm j2)$ ,
- b) Odrediti pojačanje prefiltra V u referentnoj grani tako da pogreška u stacionarnom stanju na skokovitu pobudu bude 0,



Slika 11.4: Sustav skladištenja fluida

- c) Osigurati da proces nema stacionarnu pogrešku niti pri djelovanju poremećajnog toka  $q_z$  u drugi spremnik. Polovi zatvorenog regulacijskog kruga neka budu prema Butterworthovom standardnom obliku uz  $\omega_n = 2\sigma$ . Preprojektirati V tako da prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga nema nula.
- d) Pretpostaviti da je mjerljiva samo razina fluida u drugom bazenu te projektirati estimator stanja punog reda za linearizirani proces, tako da polovi dinamike pogreške estimacije budu  $p_{1,2} = -3\sigma(1 \pm j)$ .

#### RJEŠENJE:

a) Matrice sustava su:

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & 0 \\ \sigma & -\sigma \end{bmatrix}, \tag{11.22}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{11.23}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{11.24}$$

Sustav je upravljiv ako matrica

$$[B \ AB] = \left[ \begin{array}{cc} 1 & -\sigma \\ 0 & \sigma \end{array} \right]$$

ima determinantu različitu od 0, što je ispunjeno uvijek za  $\sigma \neq 0$ , a  $\sigma = 0$  odgovaralo bi samo žačepljenju izlaznog otvora gornjeg bazena. Sustav je osmotriv ako matrica

$$\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ 1 & -\sigma \end{bmatrix}$$

ima determinantu različitu od 0 što je opet ispunjeno uvijek za  $\sigma \neq 0$ . Dakle je za  $\sigma \neq 0$  sustav upravljiv i osmotriv, pa će biti moguće proizvoljno postavljati polove sustava upravljanja po varijablama stanja i estimatora.

Karakteristični polinom zatvorenog regulacijskog kruga dan je izrazom:

$$|sI - A + BF| = s^2 + (2\sigma + f_1)s + \sigma^2 + f_1\sigma + f_2\sigma$$

Željeni karakteristični polinom zatvorenog regulacijskog kruga je:

$$(s + 2\sigma - 2\sigma j) \cdot (s + 2\sigma + 2\sigma j) = s^2 + 4\sigma s + 8\sigma^2.$$

Izjednačavanjem željenog karakterističnog polinoma i determinante slijedi:

$$f_1 = 2\sigma,$$
  
$$f_2 = 5\sigma.$$

Matricu povratne veze F moguće je odrediti i primjenom Ackermanove formule (11.7).

b) Pojačanje prefiltra V određuje se prema:

$$V = \left[ C(BF - A)^{-1} B \right]^{-1},$$

te proizlazi V=8. Uz tako odabrano pojačanje prefiltra sustav ima jedinično pojačanje.

c) Uvodi se integral pogreške regulacijskog odstupanja  $x_R - y$  kao dodatna varijabla stanja sustava  $x^*$ , prema slici 11.3. Tražimo vektor pojačanja  $\bar{F} = [f_1 \ f_2 \ f_3^*] = [F \ f_3^*]$  tako da zatvoreni krug ima karakteristični polinom prema Butterworthu s  $\omega_n = 2\sigma$ , što za sustav trećeg reda daje polinom:

$$P(s) = s^3 + 2\omega_n s^2 + 2\omega_n^2 s + \omega_n^3$$
.

Matrica zatvorenog kruga  $\bar{A}$  sada glasi prema (11.17) i (11.18):

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A - BF & -Bf_3^* \\ -C + DF & Df_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma - f_1 & -f_2 & -f_3^* \\ \sigma & -\sigma & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za nalaženje  $\bar{F}$  treba izjednačiti odgovarajuće koeficijente od  $|sI - \bar{A}|$  s koeficijentima od P(s):

$$s^{3} + (2\sigma + f_{1})s^{2} + (\sigma^{2} + \sigma f_{1} + \sigma f_{2})s - \sigma f_{3}^{*},$$

pa slijedi:

$$f_1 = 2\sigma,$$
  

$$f_2 = 5\sigma,$$
  

$$f_3^* = -8\sigma^2$$

Za prijenosnu funkciju zatvorenog sustava, uz nepoznati član V proizlazi:

$$\frac{Y(s)}{X_R(s)} = (\bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}) = \frac{Vs + \omega_n^3}{P(s)}.$$

Dakle, za V=0 prijenosna funkcija zatvorenog kruga je točno modelska prema Butterworthu. Za pokratu eventualnih neželjenih nula bismo u granu reference prije uzimanja reference za proračun pogreške trebali dodati prefiltar.

d) Ako je mjerljiva samo razina fluida u drugom spremniku, upotrebljava se estimator varijabli stanja procesa, prema slici 11.2. Primijetite da varijablu stanja  $x^*$  nije potrebno estimirati jer je ona baš u regulatoru, tako da treba provesti estimaciju samo stanja procesa. Označimo s

$$F_E = \left[ egin{array}{c} f_{E1} \ f_{E2} \end{array} 
ight]$$

pojačanja estimatora koja treba odrediti. Pogledajmo kako se to može dobiti iz Ackermannove formule primjenom dualnosti između svojstva upravljivosti s matricama A i B, te osmotrivosti s matricama  $A^T$  i  $C^T$ . Karakteristična matrica dinamike pogreške estimatora je  $A-F_EC$ . Njene svojstvene vrijednosti treba postaviti na odgovarajuće lokacije dane s polovima  $p_{E,1,2}=-3\sigma(1\pm j)$ . No, iste svojstvene vrijednosti ima i matrica  $(A-F_EC)^T=A^T-C^TF_E^T$ . Prema Ackermannovoj formuli, matrica  $F_E^T$  može se naći kao

$$F_E^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1][C^T A^T C^T]^{-1} P_E(A^T).$$

Budući da je

$$P_E(s) = (s + 3\sigma - 3\sigma j)(s + 3\sigma + 3\sigma j) = s^2 + 6\sigma s + 18\sigma^2,$$

za  $F_E$  proizlazi:

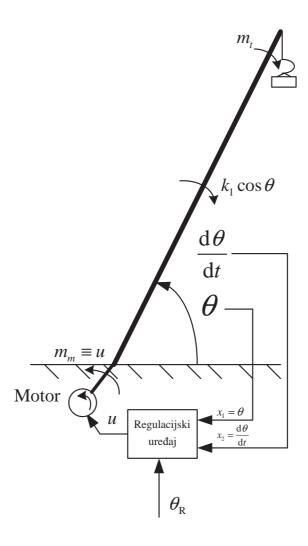
$$F_E = \left[ \begin{array}{c} 13 \\ 4 \end{array} \right].$$

#### PRIMJER 11.2

Zadan je sustav regulacije kuta zakreta  $\theta$  krana na slici 11.5. Regulator kojeg treba projektirati treba održavati željeni referentni zakret krana. Regulator daje upravljačku veličinu u koja je, zbog zanemarenja dinamike motora, jednaka razvijenom momentu motora  $m_m$ . Jednadžba gibanja krana je:

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = m_m - k_1\cos\theta - m_t = u - k_1\cos\theta - m_t$$

pri čemu je J moment inercije krana pri okretanju oko jednog svog kraja,  $k_1$  je konstanta krana, a  $m_t$  je moment uslijed promjenjivog tereta na kraju krana. Potrebno je:



Slika 11.5: Shematski prikaz sustava upravljanja.

- a) prikazati proces gibanja krana u prostoru stanja, s ulazom u, te stanjima  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \frac{d\theta}{dt}$  (kod prikaza u prostoru stanja zanemarite djelovanje  $m_t$ );
- b) obaviti linearizaciju modela u radnoj točki  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ ;
- c) odrediti regulator po varijablama stanja koji osigurava statičku grešku  $\theta_R \theta = 0$  s obzirom na male promjene zadanog referentnog kuta zakreta  $\theta_R$  oko  $\theta_0$ , bez obzira na iznos momenta tereta  $m_t$  uslijed terećenja teretom slobodnog kraja krana. Dinamika zatvorenog sustava neka bude određena standarnim binomnim oblikom uz n = 3. Zadano je:  $k_1 = 110000$  Nm, J = 2700 kgm<sup>2</sup>;
- d) nacrtati kompletnu blokovsku shemu sustava upravljanja, s nelinearnim procesom i točnim

izgledom regulatora po varijablama stanja. Obratite pažnju na način kako se tvori upravljački signal regulatora.

#### RJEŠENJE:

a) Uz zanemarenje ulaza  $m_t$  (nepoznati poremećaj) proces zakretanja krana opisan je s:

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = m_m - k_1\cos\theta = u - k_1\cos\theta,$$

te se uz varijable stanja

$$x_1 = \theta,$$

$$x_2 = \frac{d\theta}{dt},$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

i izlaz  $y = \theta$  dobiva nelinearni model u prostoru stanja:

$$\frac{\frac{dx_1}{dt}}{\frac{dx_2}{dt}} = x_2 = f_1(x, u), 
\frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_2}{dt}} = -\frac{k_1}{J}\cos x_1 + \frac{1}{J}u = f_2(x, u), y = x_1.$$

b) Linearizacijom modela u okolini radne točke  $x_{10}=\theta_0=\frac{\pi}{3}$ , pri čemu je  $x_{20}=0$ , a  $u_0=k_1\cos x_{10}=\frac{k_1}{2}$  (dobiveno iz  $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$ ), uz

$$u = u_0 + \Delta u,$$
  

$$x_1 = x_{10} + \Delta x_1,$$
  

$$x_2 = x_{20} + \Delta x_2,$$
  

$$y = y_0 + \Delta y,$$
  

$$\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix},$$

slijedi:

$$\begin{split} \frac{\mathrm{d}\Delta x_1}{\mathrm{d}t} &= \Delta x_2, \\ \frac{\mathrm{d}\Delta x_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{k_1}{J}\sin x_{10}\Delta x_1 + \frac{1}{J}\Delta u = \frac{k_1\sqrt{3}}{2J}\Delta x_1 + \frac{1}{J}\Delta u, \\ \Delta y &= \Delta x_1. \end{split}$$

U matričnom zapisu:

$$(\dot{\Delta x}) = A\Delta x + B\Delta u,$$
  
 $\Delta y = C\Delta x + D\Delta u,$ 

gdje su matrice A, B, C, D lineariziranog sustava:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k_1\sqrt{3}}{2J} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

#### c) Referenca sustava upravljanja je:

$$x_R = \theta_R$$
.

Da se osigura regulacija bez stacionarne pogreške i pri djelovanju nepoznatog poremećaja, uvodi se integral regulacijskog odstupanja kao dodatna varijabla stanja  $x^*$ :

$$x^* = \Delta x^* = \int_0^t (\theta_R - \theta) d\tau = \int_0^t [(x_R - x_{10}) - (x_1 - x_{10})] d\tau = \int_0^t [\Delta x_R - \Delta x_1] d\tau.$$

Uvedimo matricu pojačanja regulatora:

$$\bar{F} = [ F \quad f_3^* ] = [ f_1 \quad f_2 \quad f_3^* ],$$

pa se zakon upravljanja može zapisati kao:

$$\Delta u = -\bar{F} \left[ \begin{array}{c} \Delta x \\ \Delta x^* \end{array} \right] = -\bar{F} \bar{\Delta x}.$$

Za linearizirani zatvoreni krug upravljanja može se pisati:

pri čemu je:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{k_1\sqrt{3}}{2J} - \frac{f_1}{J} & -\frac{f_2}{J} & -\frac{f_3^*}{J} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica  $sI - \bar{A}$  je:

$$sI - \bar{A} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0\\ \frac{f_1}{J} - \frac{k_1\sqrt{3}}{2J} & s + \frac{f_2}{J} & \frac{f_3^*}{J}\\ 1 & 0 & s \end{bmatrix},$$

te se razvojem  $|sI-\bar{A}|$ n<br/>pr. po trećem retku dobiva karakteristični polinom zatvorenog sustava upravljanja

$$|sI - \bar{A}| = s^3 + \frac{f_2}{J}s^2 + \left(\frac{f_1}{J} - \frac{k_1\sqrt{3}}{2J}\right)s - \frac{f_3^*}{J}$$

koji se treba izjednačiti sa željenim karakterističnim polinomom odgovarajućeg reda binomnog standardnog oblika uz zadani  $\omega_n$ :

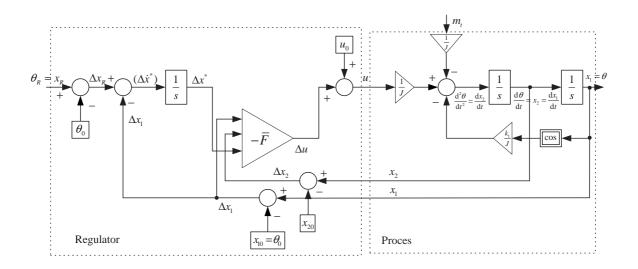
$$P(s) = (s + \omega_n)^3 = s^3 + 9s^2 + 27s + 27,$$

pa za elemente matrice regulatora  $\bar{F}$  proizlazi:

$$f_1 = 27J + \frac{k_1\sqrt{3}}{2J} = 168162.8, \ f_2 = 9J = 24300.0, \ f_3^* = -27J = -72900.0$$

tj.

$$\bar{F} = \left[ \begin{array}{ccc} 168162.8 & 24300.0 & -72900.0 \end{array} \right]$$



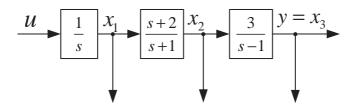
Slika 11.6: Shema upravljanja.

d) Shema upravljanja prikazana je na slici 11.6

# ZADACI ZA VJEŽBU:

# ZADATAK 11.1

Na slici 11.7 dan je proces za kojeg valja projektirati regulator u prostoru stanja tako da polovi zatvorenog sustava odgovaraju standardnom binomnom obliku prijenosne funkcije uz  $\omega_n = 1 \; \frac{rad}{s}$ . Po potrebi dodati prefiltar kako bi odziv izlaza na referencu imao točno standardni oblik. Blokovski nacrtati cijeli sustav upravljanja.

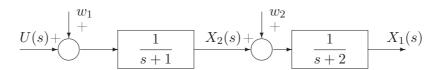


Slika 11.7: Proces prikazan po varijablama stanja.

# ZADATAK 11.2

Za sustav prikazan na slici 11.8 potrebno je projektirati regulator po varijablama stanja tako da

regulacijsko odstupanje za skokovitu referetnu veličinu bude jednako 0. Poremećajna veličina  $w_1 = 5$ , dok je vrijednost poremećajne veličine  $w_2$  konstantna i nepoznata. Polove sustava postaviti tako da dinamika zatvorenog kruga odgovara standardnom binomnom obliku uz  $\omega_n = 4[rad/s]$ . Nacrtajte blokovsku shemu cijelog sustava upravljanja.



Slika 11.8: Proces s poremećajima.

# Dodatak A

# Rješenja zadataka

#### ■ ZADATAK 1.1

a)  $\begin{bmatrix} r \\ \dot{r}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 x_3^2 - \frac{k}{x_1^2} + u_1 \\ -2 \frac{x_3 x_2}{x_1} + \frac{u_2}{x_1} \end{bmatrix}$  (A.1)

b) Stacionarno stanje uz  $u_1 = u_2 = 0$ :

$$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 
\dot{x}_2 \Rightarrow x_1^3 = \frac{k}{x_3^2} 
\dot{x}_3 = 0 \Rightarrow \frac{-2x_3x_2}{x_1} = 0$$
(A.2)

Kao što se moglo i očekivati za ovaj specifični problem postoji beskonačno mnogo ravnotežnih stanja uz  $u_1=u_2=0$ , te ćemo vektor stacionarnih vrijednosti varijabla stanja zapisati u parametarskom obliku:

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{k}{r_0^3}} \end{bmatrix}$$
 (A.3)

Linearizirani model oko stacionarnog stanja definiranog uvjetom  $u_1=u_2=0$  je dan sljedećim izrazom:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \\ \Delta \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_2 \\ x_{30}^2 \Delta x_1 + 2x_{10}x_{30}\Delta x_4 + \frac{2k}{x_{10}^3} \Delta x_1 + \Delta u_1 \\ \frac{-2x_{30}}{x_{10}} \Delta x_2 + \frac{1}{x_{10}} \Delta u_2 \end{bmatrix}$$
(A.4)

#### ■ Zadatak 1.2

a) Linearizirani model po varijablama stanja:

$$\dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_1 - \frac{D}{m}x_2 - \frac{\varepsilon_0 A}{m}x_{30}x_3 + \frac{1}{m}F(t)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{\varepsilon_0 AR}x_{30}x_1 - \frac{1}{\varepsilon_0 AR}x_{10}x_3$$

$$y = R\varepsilon_0 A\dot{x}_3 = -\frac{1}{R}x_{30}x_1 - \frac{1}{R}x_{10}x_3$$

 $\dot{x}_1 = x_2$ 

b) Prijenosna funkcija:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{Rx_{30}s}{(ms^2 + Ds + c)\left(x_{30}^2 - \frac{x_{10}}{\varepsilon_0 A} - Rs\right)}$$

# ■ ZADATAK 1.3

a) Prikaz po varijablama stanja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \frac{\lambda}{m} \frac{x_3^2}{x_1^2} \\ \frac{x_3 x_2}{x_1} - \frac{R}{2\lambda} x_1 x_3 + \frac{1}{2\lambda} x_1 \cdot u \end{bmatrix}$$

b) Linearizirani model:

$$\begin{split} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{2\lambda}{m} \frac{x_{30}^2}{x_{10}^3} x_1 - \frac{2\lambda}{m} \frac{x_{30}}{x_{10}^2} x_3 \\ \dot{x}_3 &= \left(\frac{u_0}{2\lambda} - \frac{x_{30}x_{20}}{x_{10}^2} - \frac{Rx_{30}}{2\lambda}\right) x_1 + \frac{x_{30}}{x_{10}} x_2 + \left(\frac{x_{20}}{x_{10}} - \frac{Rx_{10}}{2\lambda}\right) x_3 + \frac{x_{10}}{2\lambda} u \end{split}$$

Stacionarno stanje:

$$x_{20} = 0$$

$$x_{30} = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}} \cdot x_{10}$$

# **■** Zadatak 2.1

a) 
$$G_o(s) = \frac{U_4(s)}{U_1(s)} = \frac{R_1 R_3}{R^2} \frac{sRC}{1 + 3sRC + s^2 R^2 C^2}$$

b) 
$$G_z(s) = \frac{U_4(s)}{U_1(s)} = \frac{R_1R_3}{R^2} \frac{sRC}{1 + (3R - R_1R_3/R)Cs + s^2R^2C^2}$$

# ■ ZADATAK 2.2

$$G(s) = \frac{100e^{-0.5s}}{s(s+10)^2}$$

#### ■ Zadatak 2.3

$$G(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+4)}$$

# ■ Zadatak 2.4

$$G(s) = \frac{3e^{-0.5s}}{s+5}$$

# ■ Zadatak 2.5

a) 
$$y(t) = -2e^{-8t}$$

b) 
$$y(x) = \frac{1}{18}e^{-3x} \left( 6e^{3x}x - 9e^{2x} - 8e^{3x} + 17 \right)$$

c) 
$$y(x) = \frac{1}{100}e^{-2x} \left(10e^{2x}x - 9e^{2x} - 156e^x \cos(2x) - 118e^x \sin(2x) - 235\right)$$

# **■** Zadatak 2.6

$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = -\frac{5}{2}$$

#### ■ Zadatak 2.7

$$y(t) = \begin{cases} \frac{-3}{8}e^{-4t} + 3e^{-t} - \frac{5}{8} + \frac{1}{2}t, & t \le 5\\ \frac{-27}{72}e^{-4t} + \frac{23}{72}e^{20}e^{-4t} + \frac{216}{72}e^{-t} + \frac{112}{72}e^{-t} + t\frac{240}{72}e^{5}e^{-t}, & t > 5 \end{cases}$$

#### ■ Zadatak 3.1

$$G_o = \frac{K_R}{s^k} \frac{s+1}{s+4} = \frac{\frac{K_R}{4}}{s^k} \frac{1+s}{1+\frac{s}{4}};$$
a)  $k = 0$ ,  $K_R = 196$ ,  $G_x = \frac{196s+196}{197s+200} = 0.98 \frac{s+1}{\frac{197}{200}+1};$ 
b)  $k = 1$ ,  $K_R = 200$ ,  $G_x = \frac{200s+200}{s^2+204s+200} = \frac{s+1}{\frac{1}{200}s^2+\frac{51}{50}s+1};$ 
c)  $k = 2$ ,  $K_R = 200$ ,  $G_x = \frac{200s+200}{s^3+4s^2+200s+200} = \frac{s+1}{\frac{1}{200}s^3+\frac{1}{50}s^2+s+1}.$ 

#### ■ Zadatak 4.1

$$K_R \in \left(\frac{-9.5 - \sqrt{1434.25}}{42}, \frac{-9.5 + \sqrt{1434.25}}{42}\right) = (-1.128, 0.676).$$

#### ■ Zadatak 4.2

$$T_t \le 0.03 \text{ [s]}.$$

#### ■ Zadatak 4.3

pozitivnost koeficijenata :  $T_I>0,$   $K_R>-7 \text{ za } T_I>0,$   $K_R>\frac{-12T_I}{1-T_I} \text{ za } T_I<1, \quad K_R<\frac{-12T_I}{1-T_I} \text{ za } T_I>1,$   $K_R<0$  pozitivnost determinante  $D_2$  :

pozitivnost determinante  $D_2$ :  $84T_I^2 + 8K_RT_I + 5K_RT_I^2 + 4K_R^2T_I - K_R^2T_I^2 > 0$ 

Za  $T_I=0.5$  s raspon pojačanja koji osigurava stabilnost je (-5.38,0), pa bilo koje pojačanje  $K_R$  iz tog intervala stabilizira dani sustav upravljanja.

#### ■ Zadatak 5.1

Provjeriti u Matlabu.

#### ■ Zadatak 5.2

Provjeriti u Matlabu.

#### ■ Zadatak 5.3

Provjeriti u Matlabu.

#### ■ Zadatak 6.1

$$T_I = 6[s]$$

$$K_R = 0.8$$

$$t_m \approx 7.5[s]$$

#### ■ Zadatak 6.2

$$G_R(s) = \frac{K_R}{s} \cdot \frac{1+sT}{1+s\alpha T} = \frac{7.08}{s} \cdot \frac{1+0.1732s}{1+0.0577s}$$

#### ■ Zadatak 6.3

$$G_R(s) = \frac{200}{s} \underbrace{\frac{1+s}{1+1.8487s}}_{\text{Phase Lag}} \cdot \underbrace{\frac{1+0.2145s}{1+0.00466s}}_{\text{Phase Lead}}$$

#### ■ Zadatak 7.1

$$\alpha = 0.3 \; , \frac{1}{T} = 0.4 \; , \frac{1}{\alpha T} = 1.33 \; .$$

# ■ Zadatak 7.2

$$p = 4.57, K = 9.28$$
.

# ■ Zadatak 7.3

Prema  $\gamma=70^\circ-\sigma_m$  te  $\sigma_m=100\mathrm{e}^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$  slijedi  $\zeta=0.36$  čime je određen pravac željenih polova u kompleksnoj ravnini. S tog pravca proizvoljno odabiremo par kompleksno konjugiranih polova. Za odabrani par polova  $s^*=-1\pm 2.61$  dobiva se  $\alpha=0.003$ , T=0.43 i traženi regulator je  $G_R(s)=\frac{0.43s+1}{0.0001s+1}$ .

#### ■ ZADATAK 8.1

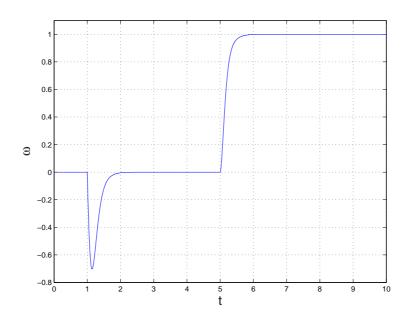
$$G_R(s) = \frac{(s^2 + s + 1)(s + 1)}{s + 2} \cdot \frac{4}{s(s + 2.8)}$$

# ■ Zadatak 8.2

$$G_R(s) = -\frac{4+13s}{7s}$$

# ■ Zadatak 9.1

$$\begin{split} & \omega_n = 10 \text{ rad/s}, \\ & G_R = \frac{K}{K_p} \frac{(3\omega_n^2 T_a T_m - 1)s^2 + (3\omega_n^2 T_m + \omega_n^3 T_a T_m - 3\omega_n)s + \omega_n^3 T_m}{s^2 + 3\omega_n s}, \\ & G_{\nu} = \frac{\frac{T_a}{\omega_n} s^2 + (\frac{1}{\omega_n} + T_a)s + 1}{(\frac{3T_a}{\omega_n} - \frac{1}{\omega_n^3 T_m})s^2 + (\frac{3}{\omega_n} + T_a - \frac{3}{\omega_n^2 T_m})s + 1}, \\ & \text{maksimalni iznos propada: } \omega_m = -0.771 \end{split}$$



Slika A.1: Odziv sustava upravljanja na danu pobudu.

# Bibliografija

- [1] Nedjeljko Perić. Automatsko upravljanje, predavanja. Skriptarnica FER-a, ožujak 2005.
- [2] Zoran Vukić i Ljubomir Kuljača. Automatsko upravljanje: analiza linearnih sustava. Kigen d.o.o. Zagreb, 2004.
- [3] Neven Elezović. Linearna algebra. Element, Zagreb, 1999.
- [4] Ivan Ivanšić. Funkcija kompleksne varijable. Laplaceova transformacija. Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1987.