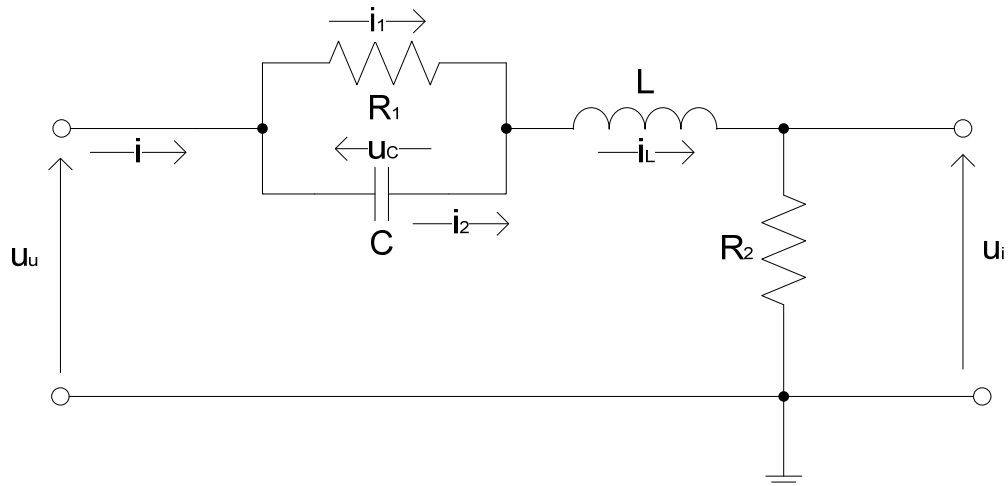


# 1. Domaća zadaća – Grupa B

## ak.god. 2009./2010.

1. Za električni krug prikazan slikom 1.1. potrebno je:



Slika 1.1. Shema električnog sustava sa označenim smjerovima struja

- a) Napisati diferencijalnu jednadžbu koja opisuje ovisnost izlaznog napona  $u_i(t)$  o ulaznom naponu  $u_u(t)$ . Jednadžbu treba svesti na oblik u kojem je koeficijent uz  $u_i(t)$  jednak 1.

$$u_u = u_{par} + u_L + u_{R2}, \quad u_{R2} = iR_2 = u_i, \quad i = \frac{1}{R_2} u_i, \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{R_2} \frac{d}{dt} u_i$$

$$u_L = L \frac{d}{dt} i_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_L = \frac{L}{R_2} \frac{d}{dt} u_i, \quad u_{par} = u_C = u_{R1}$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_2 d\tau, \quad u_{R1} = i_1 R_1, \quad i = i_1 + i_2$$

$$i_1 = \frac{1}{R_1} u_{par} = \frac{1}{R_1} (u_u - u_L - u_i), \quad i_1 = \frac{1}{R_1} \left( u_u - \frac{L}{R_2} \frac{d}{dt} u_i - u_i \right)$$

$$i_1 = i - i_2 = \frac{1}{R_1} \left( u_u - \frac{L}{R_2} \frac{d}{dt} u_i - u_i \right), \quad i_2 = i - \frac{1}{R_1} \left( u_u - \frac{L}{R_2} \frac{d}{dt} u_i - u_i \right)$$

$$u_{par} = \frac{1}{C} \int i_2 d\tau, \quad u_{par} = \frac{1}{C} \int \left[ i - \frac{1}{R_1} \left( u_u - \frac{L}{R_2} \frac{d}{dt} u_i - u_i \right) \right] d\tau$$

Konačno, jednadžba koja opisuje ulazno-izlaznu ovisnost sustava je

$$u_u = \frac{1}{C} \int \left[ i - \frac{1}{R_1} \left( u_u - \frac{L}{R_2} \frac{d}{dt} u_i - u_i \right) \right] d\tau + \frac{L}{R_2} \frac{d}{dt} u_i + u_i$$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} u_u + \frac{CR_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{d}{dt} u_u = \frac{CLR_1}{R_1 + R_2} \frac{d^2}{dt^2} u_i + \frac{L + CR_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{d}{dt} u_i + u_i$$

b) Odrediti matrice **A**, **B**, **C** i **D** iz zapisa sustava po varijablama stanja

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

pri čemu su vektori stanja, ulaza i izlaza definirani kao:  $x = [u_c \quad i_L]^T$ ,  $u = [u_u]$ ,  $y = [u_i]$ .

$$u_L = L \frac{d}{dt} i_L, \quad \frac{d}{dt} i_L = \frac{1}{L} u_L, \quad \frac{d}{dt} i_L = \frac{1}{L} (u_u - u_{par} - u_{R2}), \quad \frac{d}{dt} i_L = \frac{1}{L} (u_u - u_c - R_2 i_L)$$

$$\frac{d}{dt} i_L = -\frac{1}{L} u_c - \frac{R_2}{L} i_L + \frac{1}{L} u_u, \quad u_c = \frac{1}{C} \int i_2 d\tau, \quad i = i_1 + i_2, \quad i_2 = i - i_1$$

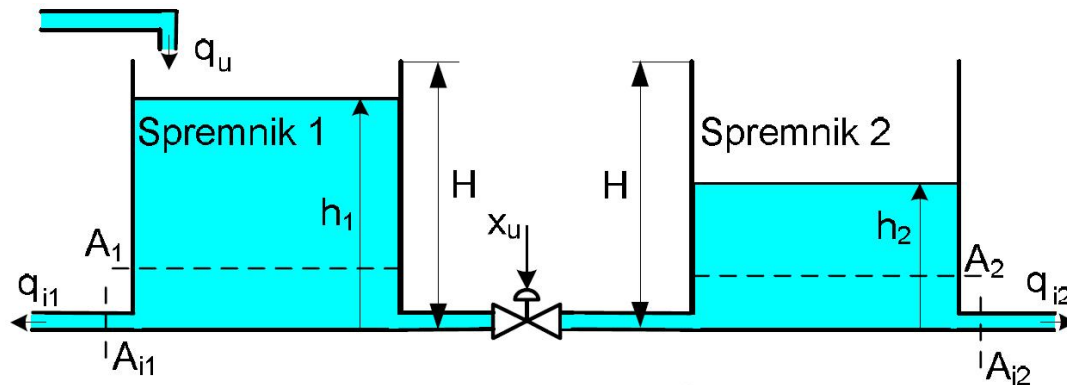
$$i_1 = \frac{1}{R_1} u_{par} = \frac{1}{R_1} u_c, \quad \frac{d}{dt} u_c = \frac{1}{C} \left( i - \frac{1}{R_1} u_c \right), \quad \frac{d}{dt} u_c = -\frac{1}{CR_1} u_c + \frac{1}{C} i_L, \quad u_i = R_2 i_L$$

Konačno, zapis sustava u matičnom obliku je

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_c \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR_1} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u_u$$

$$[u_i] = [0 \quad R_2] \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + [0] u_u$$

2. Na slici 1.2. prikazana je principna shema skladištenja fluida. Razina fluida u spremnicima regulira se promjenom otvorenosti ventila  $x_u(t)$  [%] koja može poprimiti



Slika 1.2. Shema sustava skladištenja fluida

vrijednosti između 0% i 100%. Karakteristika ventila opisana je izrazom

$$q(t) = A_v \sqrt{\rho} \sqrt{2\Delta p} \cdot \frac{x_u}{100\%}$$

pri čemu je:

- $x_u$  - otvorenost ventila [%],
- $A_v$  - poprečni presjek potpuno otvorenog ventila [ $m^2$ ],
- $\Delta p$  - razlika tlakova na krajevima ventila [ $Pa$ ],
- $\rho$  - gustoća fluida [ $kg/m^3$ ],
- $q$  - maseni protok kroz ventil [ $kg/s$ ].

Parametri sustava su:

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| $q_u = Q_{u0} = 40 \text{ kg/s}$ | - ulazni maseni protok u prvi spremnik,                   |
| $A_1 = 4 \text{ m}^2$            | - površina pop. presjeka spremnika 1,                     |
| $A_2 = 4 \text{ m}^2$            | - površina pop. presjeka spremnika 2,                     |
| $A_{12} = 0.008 \text{ m}^2$     | - površina pop. presjeka spojne cijevi između spremnika,  |
| $A_{i1} = 0.001 \text{ m}^2$     | - površina pop. presjeka izlazne cijevi prvog spremnika,  |
| $A_{i2} = 0.004 \text{ m}^2$     | - površina pop. presjeka izlazne cijevi drugog spremnika, |
| $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$     | - gustoća fluida,   |
| $A_v = 0.01 \text{ m}^2$         | - površina pop. presjeka potpuno otvorenog ventila,       |
| $H = 10 \text{ m}$               | - visina spremnika 1 i spremnika 2,                       |
| $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$         | - ubrzanje sile teže.                                     |

**Napomena.** Prilikom računanja izlaznih protoka iz spremnika može se uzeti da je  $A_{i1}, A_{i2} \ll A_1$  i  $A_{i1}, A_{i2} \ll A_2$ .

Potrebno je:

- a) Odrediti diferencijalne jednačbe koje opisuju ponašanje razine fluida u spremnicima 1 i 2.

**Spremnik 1.**

$$q_u - (q_{i1} + q(t)) = A_1 \rho \frac{dh_1}{dt}, \quad q_{i1} = A_{i1} \rho \sqrt{2gh_1}, \quad q(t) = A_v \sqrt{\rho} \sqrt{2\Delta p} \cdot \frac{x_u}{100\%}$$

$$\Delta p = p_1 - p_2, \quad \Delta p = (p_a + \rho gh_1) - (p_a + \rho gh_2), \quad \Delta p = \rho g(h_1 - h_2)$$

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1 \rho} q_u - \frac{A_{i1} \sqrt{2g}}{A_1} \sqrt{h_1} - \frac{A_v \sqrt{2g}}{A_1} \sqrt{(h_1 - h_2)} \cdot \frac{x_u}{100\%}$$

**Spremnik 2.**

$$q(t) - q_{i2} = A_2 \rho \frac{dh_2}{dt}, \quad q_{i2} = A_{i2} \rho \sqrt{2gh_2}$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{A_v \sqrt{2g}}{A_2} \sqrt{(h_1 - h_2)} \cdot \frac{x_u}{100\%} - \frac{A_{i2} \sqrt{2g}}{A_2} \sqrt{h_2}$$

- b) Odrediti funkcijsku ovisnost stacionarne vrijednosti visine fluida u spremniku 1,  $H_{10}$ , o stacionarnoj vrijednosti otvorenosti ventila  $x_{u0}$ . Za koju stacionarnu vrijednost otvorenosti ventila počinje prelijevanje vode iz spremnika 1?

Stacionarna vrijednost:  $\frac{dh_1}{dt} = \frac{dh_2}{dt} = 0$

$$\frac{1}{A_1 \rho} q_u - \frac{A_{i1} \sqrt{2g}}{A_1} \sqrt{h_{10}} - \frac{A_v \sqrt{2g}}{A_1} \sqrt{(h_{10} - h_{20})} \cdot \frac{x_u}{100\%} = 0$$

$$\frac{A_v \sqrt{2g}}{A_2} \sqrt{(h_{10} - h_{20})} \cdot \frac{x_u}{100\%} - \frac{A_{i2} \sqrt{2g}}{A_2} \sqrt{h_{20}} = 0$$

Vrijede relacije

$$x_{u0} = \sqrt{\frac{h_{20}}{h_{10} - h_{20}}} \frac{A_{i2}}{A_v} \cdot 100\% [\%]$$

$$h_{20} = \frac{1}{A_{i2}^2} (E^2 - 2EA_{i1}\sqrt{h_{10}} + A_{i1}^2 h_{10}) [m]$$

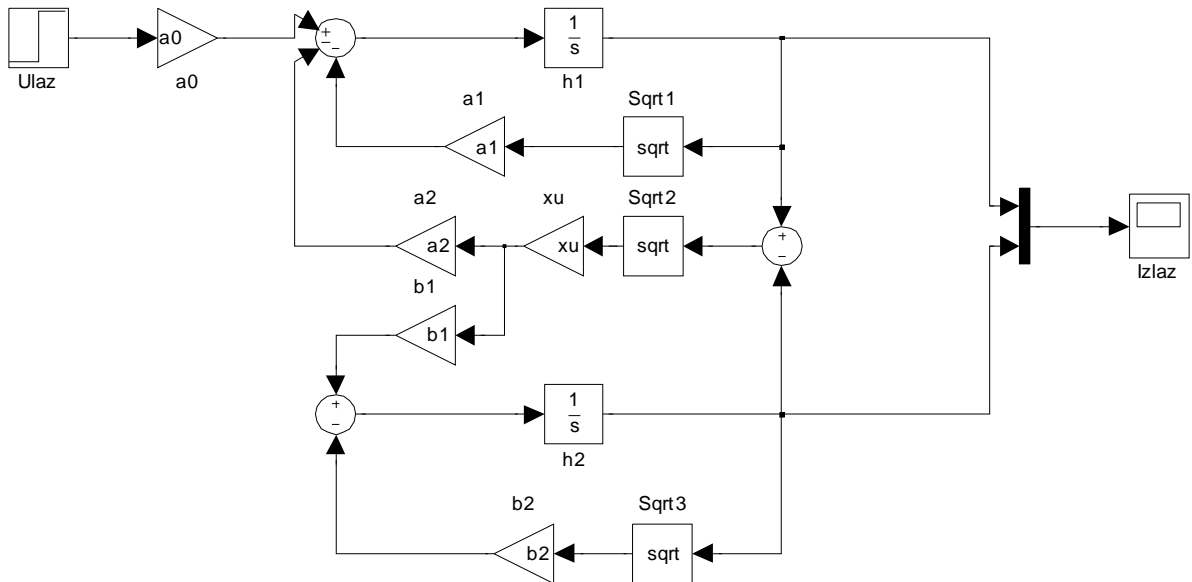
pri čemu je

$$B = A_{i2} \sqrt{2g}, \quad C = A_{i1} \sqrt{2g}, \quad D = \frac{1}{\rho} q_{u0}, \quad E = \frac{1}{\rho \sqrt{2g}} q_{u0}$$

Za visinu stupca vode prvog spremnika  $h_{10} = 10 \text{ m}$  vrijedi

$$x_{u0} = 20.93362273 \%$$

c) Nacrtati blokovsku shemu sustava skladištenja fluida.



**Slika 1.3.** Blokovska shema sustava skladištenja fluida

Tumač oznaka pojedinih pojačala:

$$a0 = \frac{1}{A_1 \rho}, \quad a1 = \frac{A_{i1} \sqrt{2g}}{A_1}, \quad a2 = \frac{A_v \sqrt{2g}}{100 A_1}, \quad b1 = \frac{A_v \sqrt{2g}}{100 A_2}, \quad b2 = \frac{A_{i2} \sqrt{2g}}{A_2}$$