



Sinteza linearnih regulatora

Postupci parametriranja PID regulatora

Proporcionalno-integralno-derivacijski regulator, ili skraćeno PID regulator, jedan je od najraširenijih regulatora u industrijskoj automatizaciji. Kad se kaže da je PID regulator jedan od najraširenijih regulatora, zapravo se misli na njegovu skraćenu inačicu - PI regulator. Vremenska funkcija koja opisuje PID regulator je

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (1)$$

gdje je $u(t)$ vremenska funkcija upravljačkog signala, a $e(t)$ vremenska funkcija regulacijskog odstupanja.

Iz relacije (1) vidljivo je kako se PID regulator sastoji od:

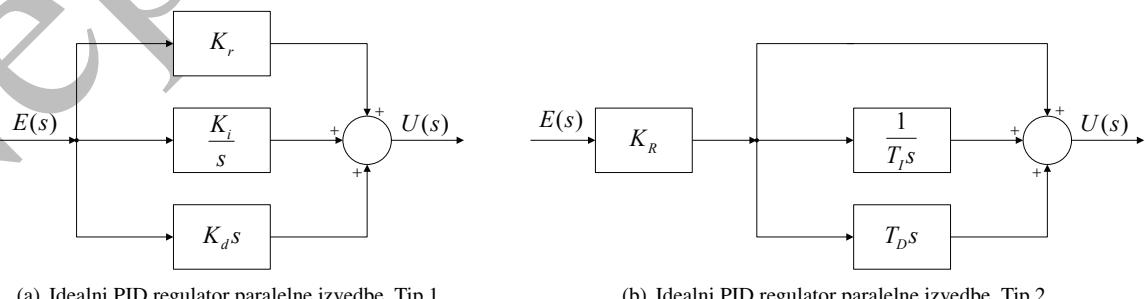
1. Proporcionalnog djelovanja, gdje se upravljački signal određuje na temelju trenutnog regulacijskog odstupanja,
2. Integralnog djelovanja, gdje se upravljački signal određuje na temelju trenutnog regulacijskog odstupanja, kao i na temelju njegove prošlosti, te
3. Derivacijskog djelovanja, gdje se upravljački signal određuje na temelju predikcije ponašanja regulacijskog odstupanja u budućnosti. Bitno je istaknuti kako je derivator zbog toga nekauzalan element, te se stoga umjesto idealnog D člana koristi DT_1 član pa se takav regulator često još i naziva *realni* PID regulator.

U praksi se derivacijsko djelovanje uglavnom nastoji izbjegći gdje je to moguće. Naime, derivator može znatno pojačati mjerni šum, što može biti vrlo pogubno za sustav. S druge strane, integralno djelovanje je uglavnom poželjno jer integracijski element uklanja regulacijsko odstupanje u ustaljenom stanju. Najraširenija inačica PID regulatora je PI regulator opisan sljedećom vremenskom funkcijom

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (2)$$

Osim PI i PID regulatora, u praksi se često koriste i P te PD regulatori.

Postoje dvije osnovne izvedbe PID regulatora - paralelna i serijska. U praksi se češće nalazi paralelna izvedba, iz razloga što serijska ima određena ograničenja o kojima će biti više riječi u nastavku.



Slika 1: Paralelne izvedbe idealnog PID regulatora

Prijenosna funkcija koja opisuje paralelnu izvedbu idealnog PID regulatora prikazanu slikom 1(a) je

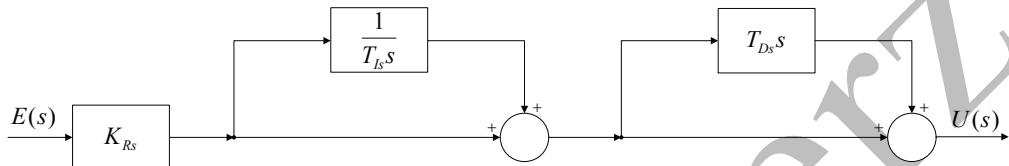
$$G_R(s) = K_r + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (3)$$

Prijenosna funkcija koja opisuje paralelnu izvedbu idealnog PID regulatora prikazanu slikom 1(b) je

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (4)$$

Parametri paralelne izvedbe prvog i drugog tipa povezani su sljedećim relacijama

$$K_R = K_r \quad T_I = \frac{K_r}{K_i} \quad T_D = \frac{K_d}{K_r} \quad (5)$$



Slika 2: Idealni PID regulator serijske izvedbe

Prijenosna funkcija koja opisuje serijsku izvedbu idealnog PID regulatora prikazanu slikom 2 je

$$G_R(s) = K_{Rs} \left(1 + \frac{1}{T_{Is}s} \right) (1 + T_{Ds}s) \quad (6)$$

Transformacija jedne izvedbe u drugu je moguća, pri čemu ima smisla transformirati samo PID regulatore paralelne i serijske izvedbe. Naime, ostale inačice PID regulatora (P, PI ili PD) se ne razlikuju po pitanju izvedbe. Parametri PID regulatora paralelne transformiraju se u parametre serijske izvedbe prema sljedećim relacijama

$$K_{Rs} = \frac{C}{2} K_R \quad T_{Is} = \frac{C}{2} T_I \quad T_{Ds} = \frac{C}{2} T_D \quad (7)$$

gdje je konstanta C definirana kao

$$C = 1 + \sqrt{1 - \frac{4T_D}{T_I}} \quad (8)$$

Iz relacije (8) možemo zaključiti kako transformacija paralelne u serijsku izvedbu nije uvijek moguća. Naime, argument korjena mora biti veći ili jednak od nula (uz pretpostavku da vrijedi $K_R > 0$) iz čega slijedi uvjet transformacije izvedbi

$$T_I \geq 4T_D \quad (9)$$

Parametri PID regulatora serijske transformiraju se u parametre paralelne izvedbe prema sljedećim relacijama

$$K_R = K_{Rs} \frac{T_{Is} + T_{Ds}}{T_{Is}}, \quad T_I = T_{Is} + T_{Ds}, \quad T_D = \frac{T_{Is} T_{Ds}}{T_{Is} + T_{Ds}} \quad (10)$$

Transformacija serijske izvedbe u paralelnu, za razliku od transformacije paralelna-serijska, nema ograničenja.

Kao što smo i ranije spomenuli, idealni PID regulator nije izvediv u stvarnosti zbog nekauzalnosti derivatora. Kako bi se rješio taj problem, derivatoru se dodaje parazitna vremenska konstanta T_v čime se idealni D element zamjenjuje DT_1 članom. Parazitna vremenska konstanta u pravilu je 5 do 20 puta manja od derivacijske vremenske konstante

$$T_D = (5 \div 20)T_v \quad (11)$$

Prijenosna funkcija realnog PID regulatora je

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + T_v s} \right) \quad (12)$$

1. RUČNO UGAĐANJE

U okviru ove metode parametrirarnja regulatora promatra se paralelna izvedba idealnog PID regulatora (Tip 1)

$$G_R(s) = K_r + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

U nastavku su opisana pravila po kojima se parametruje PID regulator metodom ručnog ugađanja:

1. Postaviti konstante K_i i K_d na nulu $K_i = K_d = 0$.
2. Povećavati konstantu K_r dok izlaz iz procesa ne krene oscilirati ($K_{kr} = K_r$). Nakon toga, konstantu K_r postaviti na polovinu vrijednosti K_{kr} .
3. Povećavati konstantu K_i dok se regulacijsko odstupanje ne svede na granice dopuštenosti. Međutim, potrebno je uzeti u obzir da će prevelika vrijednost konstante K_i znatno povećati nadvišenje.
4. Povećavati konstantu K_d , i to samo ako je potrebno, dok sustav ne postigne optimalno vrijeme ustaljivanja.

Izbor parametara regulatora direktno će utjecati na pokazatelje kvalitete odziva sustava - vrijeme porasta t_r , maksimalno nadvišenje σ_m , vrijeme smirivanja t_e te na grešku u ustaljenom stanju e_∞ . U tablici 1 prikazani su efekti podizanja vrijednosti pojedinih parametara regulatora K_r , K_i i K_d .

Tablica 1: Efekti podizanja vrijednosti parametara regulatora K_r , K_i , K_d

Parametar	t_r	σ_m	t_e	e_∞
K_r	✓	↗	Mala promjena	✓
K_i	✓	↗	↗	Uklanja
K_d	Nedefinirano	↙	↗	Nema efekta

Postavljanje parametara opisanim postupkom u konačnici će dati relativno malo nadvišenje prijelazne funkcije. Međutim, neki sustavi ne toleriraju nikakvo nadvišenje, pa je za takve sustave konstantu proporcionalnog djelovanja K_r potrebno postaviti na manju vrijednost od polovine vrijednosti kritičnog proporcionalnog pojačanja K_{kr} . Ovakva metoda postavljanja parametara regulatora u praksi se koristi vrlo često, ali samo kao dodatak nekoj od sofisticiranih metoda. Ziegler-Nicholsovom metodom, kao i ostalim metodama parametriranja mogu se postaviti parametri regulatora koji će samo približno zadovoljavati zahteve upravljanja, pa se takvim metodama često pridružuje metoda ručnog ugađanja parametara.

2. ZIEGLER-NICHOLSOVA METODA

Ziegler-Nicholsova¹ pravila parametrisiranja P, PI ili PID regulatora empirijski su izvedena pravila temeljena na simulacijama velikog broja različitih procesa. Regulatori parametrisirani jednom od Ziegler-Nicholsovih metoda dobro otklanjaju utjecaj poremećaja koji mogu djelovati na sustav tijekom rada, ali s druge strane slabo prate promjenu referentne veličine. Postoje dvije različite ZN metode koje se koriste za parametrisiranje regulatora:

1. Ziegler-Nicholsova metoda ruba stabilnosti, eksperiment u zatvorenem krugu
2. Ziegler-Nicholsova metoda prijelazne funkcije, eksperiment u otvorenem krugu

U praksi se češće koristi metoda prijelazne funkcije u odnosu na metodu ruba stabilnosti, o čemu će više riječi biti u nastavku.

2.1. Ziegler-Nicholsova metoda ruba stabilnosti

Ziegler-Nicholsova metoda ruba stabilnosti parametre regulatora postavlja prema svojstvima sustava na rubu stabilnosti. U nastavku su dani koraci prema kojima se parametrisira zadani regulator metodom ruba stabilnosti:

1. Zadanom se regulatoru (P, PI ili PID) ugase sva djelovanja osim proporcionalnog, pa je prijenosna funkcija takvog regulatora $G_R(s) = K_R$.
2. Pojačanje regulatora postepeno se povećava dok se sustav ne dovede na rub stabilnosti. Kada se sustav jednom dovede na rub stabilnosti, očita se kritično pojačanje K_{kr} te period trajnih oscilacija T_{kr} .
3. Parametri traženog regulatora određe se prema Ziegler-Nicholsovoj tablici metode ruba stabilnosti.

Preporučeni izrazi za parametrisiranje regulatora metodom ruba stabilnosti prikazani su u tablici 2.

Tablica 2: Ziegler-Nicholsova metoda ruba stabilnosti

(a) Parametrisiranje regulatora paralelne izvedbe (Tip 1)			(b) Parametrisiranje regulatora paralelne izvedbe (Tip 2)				
Tip regulatora	Vrijednost parametra		Tip regulatora	Vrijednost parametra			
P	$0.5K_{kr}$	—	P	$0.5K_{kr}$	—		
PI	$0.45K_{kr}$	$0.54\frac{K_{kr}}{T_{kr}}$	—	PI	$0.45K_{kr}$	$0.85T_{kr}$	—
PID	$0.6K_{kr}$	$1.2\frac{K_{kr}}{T_{kr}}$	$\frac{0.6}{8}K_{kr}T_{kr}$	PID	$0.6K_{kr}$	$0.5T_{kr}$	$0.12T_{kr}$

Ovakva metoda parametrisiranja regulatora zasnovana je na svojstvima sustava na rubu stabilnosti, u većini praktičnih slučajeva nije poželjna iz razloga što je vrlo nezgodno dovoditi sustave na rub stabilnosti samo kako bi se postavili parametri regulatora.

 **Primjer 1.** Odziv kontinuiranog sustava (Slika 3(a)) na skokovitu pobudu uz primjenu P regulatora, prikazan je na slici 3(b). Potrebno je projektirati PI regulator (paralelna izvedba, Tip 1) Ziegler-Nicholsovom metodom ruba stabilnosti, ako je pojačanje procesa

$$K_p = 4$$

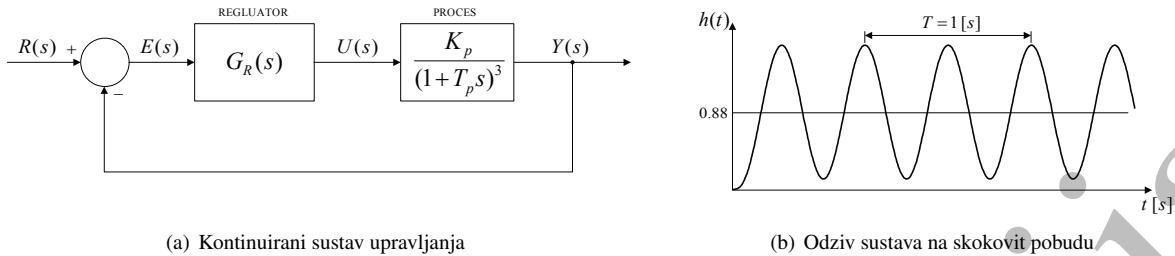
Prijenosna funkcija zatvorenog kruga upravljanja uz primjenu P regulatora je

$$G_r(s) = \frac{K_r K_p}{T_p^3 s^3 + 3T_p^2 s^2 + 3T_p s + (1 + K_r K_p)}$$

Iz odziva sustava na skokovitu pobudu (Slika 3(b)) zaključujemo kako se sustav nalazi na rubu stabilnosti (trajno oscilatoran sustav). Pri tom je statičko pojačanje sustava jednako

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{K_r K_p}{1 + K_r K_p} = 0.88$$

¹John G. Ziegler, Nathaniel B. Nichols



Slika 3: Sustav upravljanja

Kritično pojačanje P regulatora K_{kr} koje dovodi sustav na rub stabilnosti je

$$\frac{K_r K_p}{1 + K_r K_p} = 0.88 \quad \rightarrow \quad K_{kr} := K_r = 2$$

Period trajnih oscilacija očita se iz prikazanog odziva sustava

$$T_{kr} = \frac{T}{2} = 0.5[s]$$

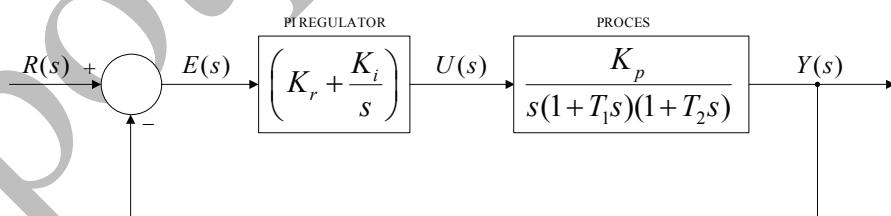
Parametre traženog PI regulatora izračunat ćemo primjenom Ziegler-Nicholsove tablice metode ruba stabilnosti

$$K_r = 0.45 K_{kr} = 0.9, \quad K_i = 0.54 \frac{K_{kr}}{T_{kr}} = 2.16$$

$$G_R(s) = 0.9 + \frac{2.16}{s}$$

Primjer 2. Za kontinuirani sustav upravljanja prikazan slikom 4, potrebno je projektirati PI regulator (paralelna izvedba, Tip 1) uz $K_R > 0$, koristeći Ziegler-Nicholsovnu metodu ruba stabilnosti. Rub stabilnosti odrediti prema Nyquistovom kriteriju stabilnosti. Zadani su parametri procesa

$$K_p = 0.25, \quad T_1 = 1[s], \quad T_2 = 4[s]$$



Slika 4: Kontinuirani sustav upravljanja

Opća prijenosna funkcija PI regulatora (paralelna izvedba, Tip 1) je

$$G_R(s) = K_r + \frac{K_i}{s}$$

Gase se sva djelovanja regulatora osim proporcionalnog pa je prijenosna funkcija regulatora

$$G_R(s) = K_r$$

Prema Nyquistovom kriteriju stabilnosti, sustav je na granici stabilnosti kada vrijedi

$$|G_o(j\omega_\pi)| = 1$$

gdje je ω_π frekvencija na kojoj je faza otvorenog kruga jednaka $\phi_o(\omega_\pi) = \pi$.

Prijenosna funkcija otvorenog kruga je

$$G_o(s) = G_R(s)G_p(s) = \frac{K_r K_p}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

Fazno-frekvencijska karakteristika otvorenog kruga na frekvenciji ω_π je

$$\phi_o(\omega_\pi) = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{5\omega_\pi}{1 - 4\omega_\pi^2} = \pi$$

$$\arctan \frac{5\omega_\pi}{1 - 4\omega_\pi^2} = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad 1 - 4\omega_\pi^2 = 0$$

Frekvencija ω_π iznosi $\omega_\pi = 0.5[s^{-1}]$.

Dobivenu frekvenciju ω_π uvrštavamo u Nyquistov uvjet za graničnu stabilnost

$$|G_o(j\omega_\pi)| = \frac{0.25K_r}{\omega_\pi \sqrt{(1 - 4\omega_\pi^2)^2 + (5\omega_\pi)^2}} = 1$$

Kritični iznos pojačanja regulatora i period trajnih oscilacija iznose

$$K_{kr} := K_r = 5, \quad T_{kr} = \frac{2\pi}{\omega_\pi} = 4\pi[s]$$

Parametri zadanog PI regulatora određuju se primjenom Ziegler-Nicholsove tablice metode ruba stabilnosti

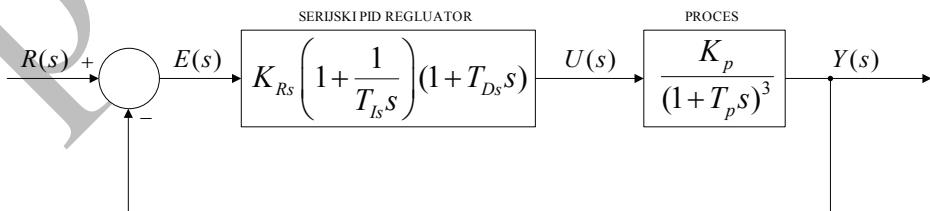
$$K_r = 0.45K_{kr} = 2.25, \quad K_i = 0.54 \frac{K_{kr}}{T_{kr}} = 0.215[s]$$

$$G_R(s) = 2.25 + \frac{0.215}{s}$$



Primjer 3. Za kontinuirani sustav upravljanja prikazan slikom 5, potrebno je projektirati idealni PID regulator serijske izvedbe uz $K_R > 0$, koristeći Ziegler-Nicholsov metodu ruba stabilnosti. Rub stabilnosti odrediti prema Routh-Hurwitzovom kriteriju stabilnosti. Zadani su parametri procesa

$$K_p = 4, \quad T_p = 2[s]$$



Slika 5: Kontinuirani sustav upravljanja

Opća prijenosna funkcija PID regulatora serijske izvedbe je

$$G_R(s) = K_{Rs} \left(1 + \frac{1}{T_{Is}s} \right) (1 + T_{Ds}s)$$

Gase se sva djelovanja regulatora osim proporcionalnog pa je prijenosna funkcija regulatora

$$G_R(s) = K_R$$

Za određivanje stabilnosti prema Routh-Hurwitzovom kriteriju potrebno je odrediti karakterističnu jednadžbu zatvorenog regulacijskog kruga $\alpha_{cl}(s)$

$$\alpha_{cl}(s) = 1 + G_o(s) = 0, \quad G_o(s) = \frac{K_R K_p}{(1 + T_p s)^3}$$

$$\alpha_{cl}(s) = T_p^3 s^3 + 3T_p^2 s^2 + 3T_p s + (1 + K_R K_p)$$

Po prvom Hurwitzovom uvjetu stabilnosti, svi koeficijenti karakteristične jednadžbe moraju biti strogo veći od nula

$$a_3 = 8 > 0, \quad a_2 = 12 > 0, \quad a_1 = 6 > 0, \quad a_0 = 1 + 4K_R > 0 \quad \rightarrow \quad K_R > -\frac{1}{4}$$

Po drugom Hurwitzovom uvjetu stabilnosti, $n - 1$ Hurwitzovih determinanti mora biti pozitivno

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 \quad \rightarrow \quad K_R < \frac{8}{K_p} = 2$$

Prema tome, interval dopuštenih vrijednosti iznosa pojačanja K_R je

$$K_R \in (0, 2)$$

iz čega proizlazi da je kritično pojačanje K_{kr} jednako

$$K_{kr} = 2$$

Karakteristična jednadžba zatvorenog kruga, uz kritično pojačanje $K_{kr} = 2$ je

$$\alpha_{cl}(s) = 8s^3 + 12s^2 + 6s + 9$$

Nultočke karakteristične jednadžbe zatvorenog kruga $\alpha_{cl}(s)$ predstavljaju polove prijenosne funkcije zatvorenog kruga. Polovi sustava uz kritično pojačanje K_{kr} su

$$\alpha_{cl}(s) = 8s^3 + 12s^2 + 6s + 9 = 0$$

$$s_{p1} = -1.5, \quad s_{p2,3} = \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Primjećujemo kako konjugirano kompleksni par polova $s_{p2,3}$ nema prigušenja (realni dio pola), pa taj par polova predstavlja frekvenciju stalnih oscilacija zatvorenog kruga sustava. Prema tome, frekvencija i period trajnih oscilacija iznose

$$\omega_{kr} = \frac{\sqrt{3}}{2} [s^{-1}] \quad \rightarrow \quad T_{kr} = \frac{2\pi}{\omega_{kr}} = 7.255 [s]$$

Parametre zadalog PID regulatora određujemo primjenom Ziegler-Nicholsove tablice metode ruba stabilnosti

$$K_R = 0.6K_{kr} = 1.2, \quad T_I = 0.5T_{kr} = 3.63 [s], \quad T_D = 0.12T_{kr} = 0.87 [s]$$

Kako dobiveni parametri pripadaju paralelnoj izvedbi PID regulatora (Tip 2), potrebno je odgovarajućim transformacijama proračunati parametre serijske izvedbe

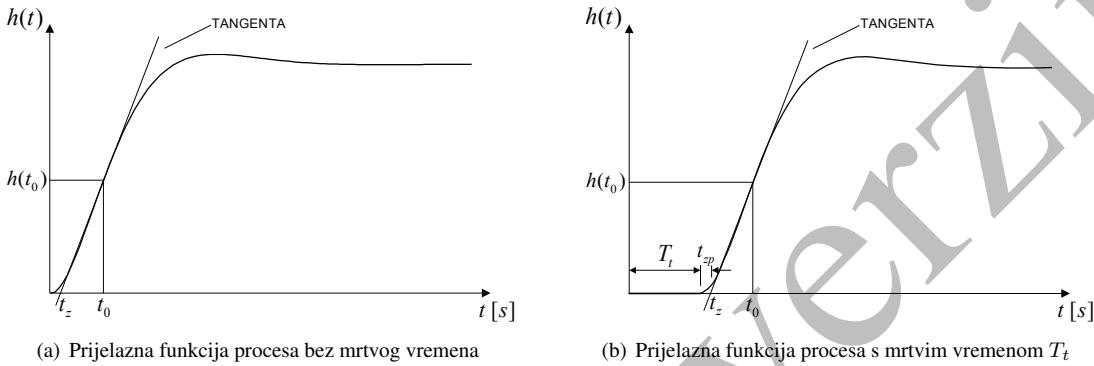
$$C = 1 + \sqrt{1 - \frac{4T_D}{T_I}} = 1.2 \quad \rightarrow \quad K_{Rs} = 0.72, \quad T_{Is} = 2.18 [s], \quad T_{Ds} = 0.52 [s]$$

Traženi PID regulator serijske izvedbe je

$$G_R(s) = 0.72 \left(1 + \frac{1}{2.18s} \right) (1 + 0.52s)$$

2.2. Ziegler-Nicholsova metoda prijelazne funkcije

Ziegler-Nicholsova metoda prijelazne funkcije temelji se na nagibu tangente k_t u točki infleksije prijelazne funkcije procesa $h_p(t)$, te na vremenu zadržavanja prijelazne funkcije t_z (Slika 6). Točka infleksije definira se kao vrijeme t_0 u kojoj je druga derivacija prijelazne funkcije po nezavisnoj varijabli t jednaka $h''_p(t_0) = 0$. Vrijeme zadržavanja t_z definira se kao sjecište tangente $y_t(t)$ s vremenskom osi. Bitno je istaknuti kako se prijelazna funkcija procesa mjeri u otvorenom regulacijskom krugu.



Slika 6: Prijelazna funkcija procesa $h_p(t)$

U slučaju da unutar procesa postoji mrvivo vrijeme, tada se vrijeme zadržavanja i točka infleksije prijelazne funkcije računaju kao da proces nema mrvivo vrijeme, te se na kraju dobivenim vrijednostima samo pribroji i mrvvo vrijeme

$$t_z = T_i + t_{zp} \quad (13)$$

Jednadžba tangente prijelazne funkcije procesa u točki infleksije može se dobiti kao jednadžba pravca kroz jednu točku uz poznat koeficijent smjera

$$y - y_0 = k(x - x_0) \rightarrow y_t - h_p(t_0) = k_t(t - t_0) \quad (14)$$

Preporučeni izrazi za parametriranje regulatora metodom prijelazne funkcije prikazani su u tablici 3.

Tablica 3: Ziegler-Nicholsova metoda prijelazne funkcije

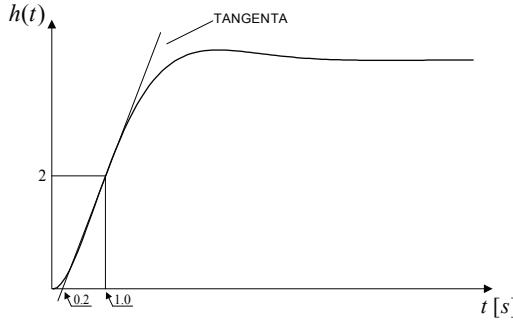
(a) Parametriranje regulatora paralelne izvedbe (Tip 1)			(b) Parametriranje regulatora paralelne izvedbe (Tip 2)		
Tip regulatora	Vrijednost parametra		Tip regulatora	Vrijednost parametra	
P	$\frac{1}{k_t t_z}$	—	P	$\frac{1}{k_t t_z}$	—
PI	$\frac{0.9}{k_t t_z}$	$\frac{0.27}{k_t t_z^2}$	PI	$\frac{0.9}{k_t t_z}$	$3.33 t_z$
PID	$\frac{1.2}{k_t t_z}$	$\frac{0.6}{k_t t_z^2}$	PID	$\frac{1.2}{k_t t_z}$	$2t_z$
		$\frac{0.6}{k_t}$			$0.5t_z$

Ova je metoda parametriranja regulatora pogodnija u odnosu na metodu ruba stabilnosti jer zahtjeva samo mjerjenje prijelazne funkcije procesa, što u pravilu ne predstavlja neki problem.

Ziegler-Nicholsova pravila parametriranja regulatora empirijski su izvedena, pa se prema tome može postići samo približno zahtjevana kvaliteta upravljanja. Stoga se parametri dobiveni jednom od Ziegler-Nicholsovih metoda trebaju uzeti samo kao polazni parametri za daljnje simuliranje i usavršavanje regulatora zadanoj sustava upravljanja.



Primjer 4. Odziv kontinuiranog procesa na jediničnu skokovitu pobudu prikazan je na slici 7. Potrebno je projektirati idealni PID regulator paralelne izvedbe (Tip 2) koristeći Ziegler-Nicholsovou metodu prijelazne funkcije.



Slika 7: Prijelazna funkcija kontinuiranog procesa $h_p(t)$

Iz prikazanog odziva očitaju se vrijeme zadržavanja, te nagib tangente u točki infleksije

$$t_z = 0.2[s], \quad k_t = \frac{h_p(t_0) - 0}{t_0 - t_z} = 2.5$$

Parametre idealnog PID regulatora određujemo primjenom Zigler-Nicholsove tablice metode prijelazne funkcije

$$K_R = \frac{1.2}{k_t t_z} = 2.4, \quad T_I = 2t_z = 0.4[s], \quad T_D = 0.5t_z = 0.1[s]$$

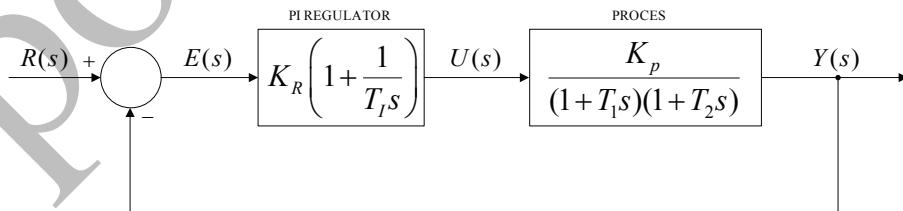
Traženi idealni PID regulator je

$$G_R(s) = 2.4 \left(1 + \frac{1}{0.4s} + 0.1s \right)$$



Primjer 5. Za kontinuirani sustav upravljanja prikazan slikom 8, potrebno je projektirati PI regulator (paralelna izvedba, Tip 2) koristeći Ziegler-Nicholsovou metodu prijelazne funkcije. Zadani su parametri procesa

$$K_p = 2, \quad T_1 = 1[s], \quad T_2 = 0.5[s]$$



Slika 8: Kontinuirani sustav upravljanja

Opća prijenosna funkcija PI regulatora (paralelna izvedba, Tip 2) je

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$

Određujemo odziv procesa na skokovitu pobudu (prijelazna funkcija procesa)

$$H_p(s) = R(s)G_p(s), \quad H_p(s) = \frac{K_p}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

Inverznom \mathcal{L} transformacijom slike $H_p(s)$ određujemo prijelaznu funkciju procesa u gornjem području

$$h_p(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2} \right\} = (2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}) \mu(t)$$

Tražimo točku infleksije prijelazne funkcije

$$h'_p(t) = 4e^{-t} - 4e^{-2t}, \quad h''_p(t) = -4e^{-t} + 8e^{-2t}$$

Točka infleksije je

$$h''_p(t_0) = 0 \quad \rightarrow \quad e^{t_0} = 2 \quad \rightarrow \quad t_0 = \ln 2 = 0.693[s]$$

Nagib prijelazne funkcije procesa u točki infleksije je

$$k_t = h'_p(t_0) = 1$$

Vrijeme zadržavanja definira se kao sjecište tangente u točki infleksije s vremenskom osi. Jednadžba tangente je

$$y_t(t) - h_p(t_0) = k_t (t - t_0), \quad y_t(t) = t - 0.193$$

Vrijeme zadržavanja pronalazimo iz uvjeta

$$y_t(t_z) = 0 \quad \rightarrow \quad t_z = 0.193[s]$$

Parametre zadano PI regulatora određujemo primjenom Ziegler-Nicholsove tablice metode prijelazne funkcije

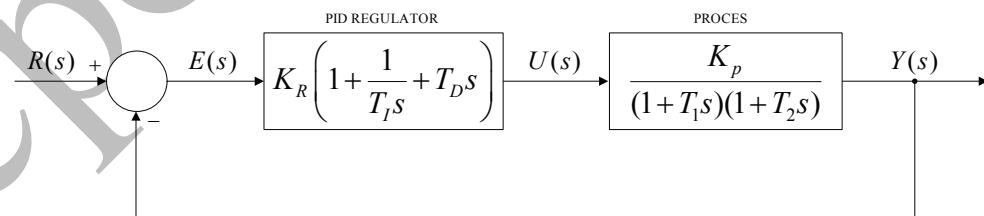
$$K_R = \frac{0.9}{k_t t_z} = 4.66, \quad T_I = 3.33 t_z = 0.64[s]$$

$$G_R(s) = 4.66 \left(1 + \frac{1}{0.64s} \right)$$



Primjer 6. Za kontinuirani sustav upravljanja prikazan slikom 9, potrebno je projektirati idealni PID regulator paralelne izvedbe (Tip 2) koristeći Ziegler-Nicholsovou metodu prijelazne funkcije. Zadani su parametri procesa

$$K_p = 1, \quad T_1 = 2[s], \quad T_2 = 4[s]$$



Slika 9: Kontinuirani sustav upravljanja

Opća prijenosna funkcija idealnog PID regulatora paralelne izvedbe (Tip 2) je

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

Određujemo odziv procesa na skokovitu pobudu (prijelazna funkcija procesa)

$$H_p(s) = R(s)G_p(s), \quad H_p(s) = \frac{K_p}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

Inverznom \mathcal{L} transformacijom slike $H_p(s)$ određujemo prijelaznu funkciju u gornjem području

$$h_p(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{s+0.5} - \frac{2}{s+0.25} \right\} = (1 + e^{-0.5t} - 2e^{-0.25t}) \mu(t)$$

Tražimo točku infleksije prijelazne funkcije

$$h'_p(t) = -0.5e^{-0.5t} + 0.5e^{-0.25t}, \quad h''_p(t) = 0.25e^{-0.5t} - 0.125e^{-0.25t}$$

Točka infleksije je

$$h''_p(t_0) = 0 \quad \rightarrow \quad e^{0.25t_0} = 2 \quad \rightarrow \quad t_0 = 4 \ln 2 = 2.77[s]$$

Nagib prijelazne funkcije procesa u točki infleksije je

$$k_t = h'_p(t_0) = 0.125$$

Vrijeme zadržavanja definira se kao sjecište tangente u točki infleksije s vremenskom osi. Jednadžba tangente je

$$y_t(t) - h_p(t_0) = k_t(t - t_0), \quad y_t(t) = 0.125t - 0.1$$

Vrijeme zadržavanja pronalazimo iz uvjeta

$$y_t(t_z) = 0 \quad \rightarrow \quad t_z = 0.8[s]$$

Parametre zadalog PID regulatora određujemo primjenom Ziegler-Nicholsove tablice metode prijelazne funkcije

$$K_R = \frac{1.2}{k_t t_z} = 12, \quad T_I = 2t_z = 1.6[s] \quad T_D = 0.5t_z = 0.4[s]$$

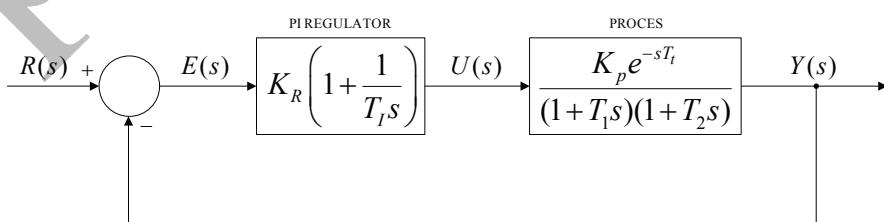
Traženi PID regulator paralelne izvedbe je

$$G_R(s) = 12 \left(1 + \frac{1}{1.6s} + 0.4s \right)$$



Primjer 7. Za kontinuirani sustav upravljanja prikazan slikom 10, potrebno je projektirati PI regulator (paralelna izvedba, Tip 2) koristeći Ziegler-Nicholsovou metodu prijelazne funkcije. Zadani su parametri procesa

$$K_p = 4, \quad T_1 = 0.2[s], \quad T_2 = 1[s], \quad T_t = 3[s]$$



Slika 10: Kontinuirani sustav upravljanja

Opća prijenosna funkcija PID regulatora (paralelna izvedba, Tip 2) je

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$

Pri određivanju prijelazne funkcije procesa pretpostavimo da proces nema mrtvog vremena. Prijelazna funkcija procesa u donjem području je

$$H_p(s) = R(s)G_p(s), \quad H_p(s) = \frac{K_p}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

Inverznom \mathcal{L} transformacijom slike $H_p(s)$ određujemo prijelaznu funkciju u gornjem području

$$h_p(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{1}{s+5} \right\} = (4 - 5e^{-t} + e^{-5t}) \mu(t)$$

Tražimo točku infleksije prijelazne funkcije

$$h'_p(t) = 5e^{-t} - 5e^{-5t}, \quad h''_p(t) = -5e^{-t} + 25e^{-5t}$$

Točka infleksije je

$$h''_p(t_0) = 0 \quad \rightarrow \quad e^{4t_0} = 5 \quad \rightarrow \quad t_0 = 0.25 \ln 5 = 0.402[s]$$

Nagib prijelazne funkcije procesa u točki infleksije je

$$k_t = h'_p(t_0) = 2.675$$

Vrijeme zadržavanja definira se kao sjecište tangente u točki infleksije s vremenskom osi. Jednadžba tangente je

$$y_t(t) - h_p(t_0) = k_t(t - t_0), \quad y_t(t) = 2.675t - 0.285$$

Vrijeme zadržavanja pronalazimo iz uvjeta

$$y_t(t_{zp}) = 0 \quad \rightarrow \quad t_{zp} = 0.1065[s]$$

Dobiveno vrijeme zadržavanja t_{zp} nije stvarno vrijeme zadržavanja prijelazne funkcije procesa. Stvarno vrijeme zadržavanja t_z dobije se pribrajanjem mrtvog vremena procesa

$$t_z = T_t + t_{zp} = 3.1065[s]$$

Parametre zadanih PI regulatora određujemo primjenom Ziegler-Nicholsove tablice metode prijelazne funkcije

$$K_R = \frac{1.2}{k_t t_z} = 0.144, \quad T_I = 2t_z = 6.213[s]$$

$$G_R(s) = 0.144 \left(1 + \frac{1}{6.213s} \right)$$

3. INTEGRALNI KRITERIJI

Integralni kriteriji postavljaju parametre regulatora tako da se minimizira regulacijsko odstupanje. Promatra se kriterijska integralna funkcija oblika

$$I_k = \int_0^\infty f_k [e(t)] dt \quad (15)$$

koja predstavlja mjeru kvalitete upravljanja. Podintegralna funkcija $f_k [e(t)]$ može poprimiti različite oblike prema kojima definiramo sedam integralnih kriterija (Tablica 4).

Tablica 4: Integralni kriteriji

Integralni kriterij	Svojstva
$I_1 = \int_0^\infty e(t) dt$	engl. <i>Integral Error (IE)</i> - Linearna površina regulacijskog odstupanja. Prikladna je za analizu jako prigušenih ili monotonih sustava upravljanja. Karakterizira je jednostavna matematička obradba.
$I_2 = \int_0^\infty e(t) dt$	engl. <i>Integral Absolute Error (IAE)</i> - Linearna površina apsolutne vrijednosti regulacijskog odstupanja. Prikladna je za oscilatorne sustave upravljanja. Karakterizira je mukotrpna matematička obradba.
$I_3 = \int_0^\infty e^2(t) dt$	engl. <i>Integral Square Error (ISE)</i> - Kvadratična površina regulacijskog odstupanja. Daje veće vrijeme ustaljivanja t_e u odnosu na I_2 . U mnogim slučajevima moguća je analitička obradba.
$I_4 = \int_0^\infty t e(t) dt$	engl. <i>Integral Time Absolute Error (ITAE)</i> - Vremenski otežana linearna površina apsolutne vrijednosti regulacijskog odstupanja. Djelovanje kao kod I_2 , ali dodatno uzima u obzir trajanje regulacijskog odstupanja.
$I_5 = \int_0^\infty te^2(t) dt$	engl. <i>Integral Time Square Error (ITSE)</i> - Vremenski otežana kvadratična površina regulacijskog odstupanja. Djelovanje kao kod I_3 , ali dodatno uzima u obzir trajanje regulacijskog odstupanja.
$I_6 = \int_0^\infty [e^2(t) + \alpha e^2(t)] dt$	Poopćena kvadratična površina regulacijskog odstupanja. Izbor težinskog koeficijenta α općenito je subjektivan.
$I_7 = \int_0^\infty [e^2(t) + \beta u^2(t)] dt$	Kvadratična površina regulacijskog odstupanja i energetsko forsiranje. Veća vrijednost σ_m ima za posljedicu bitno kraće t_e . Izbor težinskog koeficijenta β općenito je subjektivan.

Ukoliko u regulacijskom krugu postoji trajno regulacijsko odstupanje e_∞ , tada se u navedenim relacijama integralnih kriterija koristi $e(t) - e_\infty$ umjesto $e(t)$, kako bi integrali konvergirali.

Pri odabiru integralnog kriterija, poželjno je da se odabere onaj čija podintegralna funkcija $f_k [e(t)]$ ovisi o kvadratu ili apsolutnoj vrijednosti regulacijskog odstupanja $e(t)$, kako se pozitivne i negativne vrijednost nebi poništavale. Najčešće korišteni integralni kriterij je ISE kriterij

$$I_3 = \int_0^\infty [e(t) - e_\infty]^2 dt = I_3(r_1, r_2, \dots, r_p) \quad (16)$$

U nastavku je opisana metoda traženja parametara primjenom ISE kriterija.

Postupak parametriranja regulatora započinje traženjem regulacijskog odstupanja u donjem području te određivanjem koeficijenata c_k i d_k prema općoj relaciji za $E(s)$

$$E(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{c_0 + c_1 s + \dots + c_{n-1} s^{n-1}}{d_0 + d_1 s + \dots + d_n s^n} \quad (17)$$

Na temelju određenih koeficijenata c_k i d_k formira se kriterijska funkcija ISE kriterija $I_{3,n}$, prema gotovim izrazima

prikazanim u tablici 5. Za određivanje kriterijske integralne funkcije višeg reda, prikladno je koristiti neki od programske alata (npr. *Matlab*).

Nakon što se odredi funkcija ISE kriterija $I_{3,n}$, potrebno je pronaći parcijalne derivacije po svim nepoznatim parametrima sustava r , te dobivene parcijalne derivacije izjednačiti s nulom.

$$\frac{\partial I_3}{\partial r_1} = 0 \quad \frac{\partial I_3}{\partial r_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial I_3}{\partial r_p} = 0 \quad (18)$$

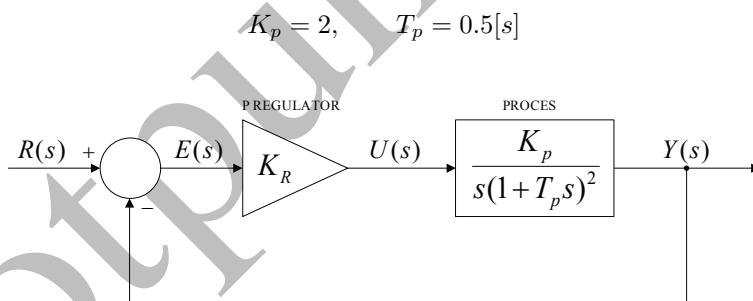
Tako se dobije p jednadžbi s p nepoznanicama, pri čemu p označava broj nepoznatih parametara r .

U nastavku je prikazana tablica za formiranje ISE integralne funkcije za racionalnu funkciju regulacijskog odstupanja $E(s)$ reda $n = 1, 2, 3, 4$.

Tablica 5: ISE kriterij $I_{3,n}$ za racionalnu funkciju $E(s)$ reda $n = 1, 2, 3, 4$

$I_{3,1} = \frac{c_0^2}{2d_0d_1}$
$I_{3,2} = \frac{c_1^2d_0 + c_0^2d_2}{2d_0d_1d_2}$
$I_{3,3} = \frac{c_2^2d_0d_1 + (c_1^2 - 2c_0c_2)d_0d_3 + c_0^2d_2d_3}{2d_0d_3(-d_0d_3 + d_1d_2)}$
$I_{3,4} = \frac{c_3^2(-d_0^2d_3 + d_0d_1d_2) + (c_2^2 - 2c_1c_3)d_0d_1d_4 + (c_1^2 - 2c_0c_2)d_0d_3d_4 + c_0^2(-d_1d_4^2 + d_2d_3d_4)}{2d_0d_4(-d_0d_3^2 - d_1^2d_4 + d_1d_2d_3)}$

 **Primjer 8.** Potrebno je odrediti parametre P regulatora uz $K_R > 0$, minimizacijom ISE kriterija pri odzivu kontinuiranog sustava prikazanog slikom 11, na skokovitu promjenu vodeće veličine. Zadani su parametri procesa



Slika 11: Kontinuirani sustav upravljanja

Prvi korak pri određivanju parametara P regulatora izvođenje je izraza za regulacijsko odstupanje ($R(s) = \frac{1}{s}$)

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G_o(s)}, \quad G_o(s) = G_R(s)G_p(s) = \frac{K_R K_p}{s(1 + T_p s)^2}$$

$$E(s) = \frac{T_p^2 s^2 + 2T_p s + 1}{T_p^2 s^3 + 2T_p s^2 + s + K_R K_p}$$

Sljedeći korak je određivanje koeficijenata c_k i d_k prema općem izrazu za regulacijsko odstupanje sustava 3. reda

$$E(s) = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + d_3 s^3}$$

Koeficijenti su

$$c_0 = 1 \quad c_1 = 2T_p \quad c_2 = T_p^2$$

$$d_0 = K_R K_p \quad d_1 = 1 \quad d_2 = 2T_p \quad d_3 = T_p^2$$

Na temelju određenih koeficijenata c_k i d_k formira se kriterijska funkcija ISE kriterija za sustav 3. reda (Tablica 5)

$$I_{3,3} = \frac{3K_R K_p T_p + 2}{2K_R K_p (2 - K_R K_p T_p)} = \frac{3K_R + 2}{4K_R(2 - K_R)}$$

Traženi parametar K_R dobije se tako da se prva derivacija integralne funkcije $I_{3,3}$ po parametru K_R izjednači s nulom

$$\frac{\partial I_{3,3}}{\partial K_R} = \frac{1.5K_R^2 + 2K_R - 2}{K_R^2(K_R - 2)^2} = 0$$

$$1.5K_R^2 + 2K_R - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad K_R = \frac{2}{3}$$

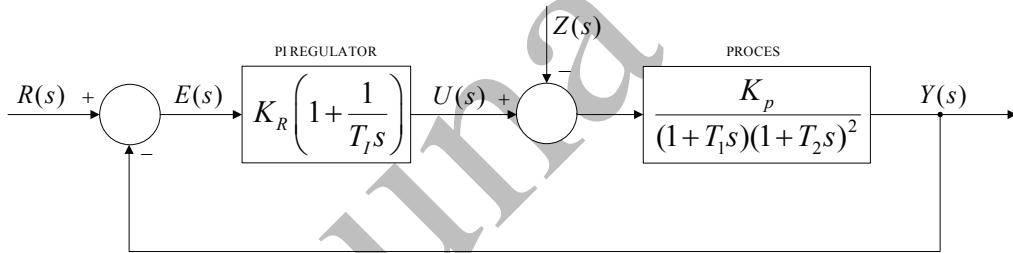
Traženi P regulator je

$$G_R(s) = \frac{2}{3}$$



Primjer 9. Potrebno je odrediti parametre PI regulatora uz $K_R > 0$, minimizacijom ISE kriterija pri odzivu kontinuiranog sustava prikazanog slikom 12, na skokovitu promjenu poremećajne veličine. Zadani su parametri procesa

$$K_p = 1, \quad T_1 = 0.5[s], \quad T_2 = 1[s]$$



Slika 12: Kontinuirani sustav upravljanja

Prvi korak pri parametriranju PI regulatora integralnim kriterijem izvođenje je izraza za regulacijsko odstupanje, uz zadane pobude $R(s) = 0$ i $Z(s) = \frac{1}{s}$

$$E(s) = \frac{Z(s)G_p(s)}{1 + G_o(s)}$$

Prijenosna funkcija otvorenog kruga je

$$G_o(s) = G_R(s)G_p(s) = \frac{K_p K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)^2}$$

Regulacijsko odstupanje $E(s)$ je

$$E(s) = \frac{K_p}{T_1 T_2^2 s^4 + (T_2^2 + 2T_1 T_2)s^3 + (T_1 + 2T_2)s^2 + (K_R K_p + 1)s + \frac{K_R K_p}{T_I}}$$

Sljedeći korak je određivanje koeficijenata c_k i d_k prema općem izrazu za regulacijsko odstupanje 4. reda

$$E(s) = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + d_3 s^3 + d_4 s^4}$$

Koeficijenti su

$$c_0 = K_p \quad c_1 = 0 \quad c_2 = 0 \quad c_3 = 0$$

$$d_0 = \frac{K_R K_p}{T_I} \quad d_1 = K_R K_p + 1 \quad d_2 = T_1 + 2T_2 \quad d_3 = T_2^2 + 2T_1 T_2 \quad d_4 = T_1 T_2^2$$

Na temelju koeficijenata c_k i d_k formira se funkcija ISE kriterija za sustav 4. reda

$$I_{3,3} = \frac{(K_R - 9)T_I^2}{2K_R(K_R^2 T_I + 8K_R - 8K_R T_I - 9T_I)}$$

Traženi parametri regulatora dobiju se izjednačavanjem prvih derivacija funkcije ISE kriterija $I_{3,4}$ po parametrima K_R i T_I s nulom

$$\frac{\partial I_{3,4}}{\partial K_R} = 0, \quad \frac{\partial I_{3,4}}{\partial T_I} = 0$$

Za rješavanje parcijalnih derivacija i sustava jednadžbi s više nepoznаницa prikladno je koristiti neki od programskih alata (npr. *Matlab*). Zbog veličine izraza, prikaz parcijalnih derivacija je izostavljen. Konačno, parametri PI regulatora su

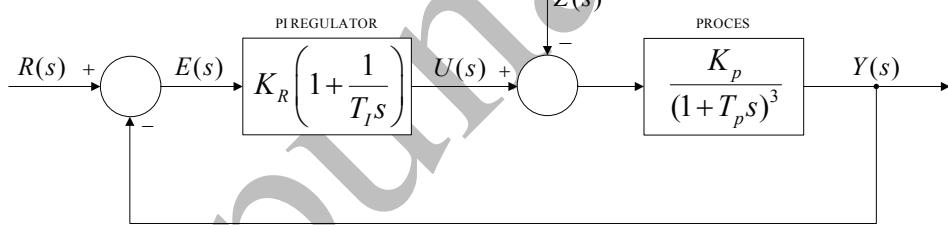
$$K_R = 1.85, \quad T_I = 1.5[s]$$

$$G_R(s) = 1.85 \left(1 + \frac{1}{1.5s} \right)$$



Primjer 10. Potrebno je odrediti parametre PI regulatora uz $K_R > 0$, minimizacijom ISE kriterija pri odzivu kontinuiranog sustava prikazanog slikom 13, na skokovitu promjenu vodeće i poremećajne veličine. Zadani su parametri procesa

$$K_p = 2, \quad T_p = 0.5[s]$$



Slika 13: Kontinuirani sustav upravljanja

Prvi korak pri određivanju parametara PI regulatora integralnim kriterijem izvođenje je izraza za regulacijsko odstupanje. Kako na linearni sustav djeluju i vodeća i poremećajna veličina, potrebno je prvo pronaći regulacijsko odstupanje s obzirom na vodeću veličinu $E_r(s)$, a zatim s obzirom na poremećajnu veličinu $E_z(s)$

$$E_r(s) = \frac{R(s)}{1 + G_o(s)}, \quad E_z(s) = \frac{Z(s)G_p(s)}{1 + G_o(s)}$$

Prijenosna funkcija otvorenog kruga je

$$G_o(s) = G_R(s)G_p(s) = \frac{K_p K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)}{(1 + T_p s)^3}$$

Regulacijsko odstupanje s obzirom na vodeću veličinu ($R(s) = \frac{1}{s}$, $Z(s) = 0$) je

$$E_r(s) = \frac{T_p^3 s^3 + 3T_p^2 s^2 + 3T_p s + 1}{T_p^3 s^4 + 3T_p^2 s^3 + 3T_p s^2 + (K_R K_p + 1)s + \frac{K_R K_p}{T_I}}$$

Regulacijsko odstupanje s obzirom na poremećajnu veličinu ($R(s) = 0$, $Z(s) = \frac{1}{s}$) je

$$E_z(s) = \frac{K_p}{T_p^3 s^4 + 3T_p^2 s^3 + 3T_p s^2 + (K_R K_p + 1)s + \frac{K_R K_p}{T_I}}$$

Ukupno regulacijsko odstupanje $E(s)$ može se izračunati kao zbroj regulacijskog odstupanja s obzirom na vodeću i poremećajnu veličinu, što proizlazi iz načela superpozicije linearnih sustava. Regulacijsko odstupanje je

$$E(s) = E_r(s) + E_z(s)$$

$$E(s) = \frac{T_p^3 s^3 + 3T_p^2 s^2 + 3T_p s + (K_p + 1)}{T_p^3 s^4 + 3T_p^2 s^3 + 3T_p s^2 + (K_R K_p + 1)s + \frac{K_R K_p}{T_I}}$$

Sljedeći korak je određivanje koeficijenata c_k i d_k prema općem izrazu za regulacijsko odstupanje sustava 4. reda

$$E(s) = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + d_3 s^3 + d_4 s^4}$$

Koeficijenti su

$$c_0 = K_p + 1 \quad c_1 = 3T_p \quad c_2 = 3T_p^2 \quad c_3 = T_p^3$$

$$d_0 = \frac{K_R K_p}{T_I} \quad d_1 = K_R K_p + 1 \quad d_2 = 3T_p \quad d_3 = 3T_p^2 \quad d_4 = T_p^3$$

Na temelju koeficijenata c_k i d_k formira se kriterijska funkcija ISE kriterija za sustav 4. reda

$$I_{3,4} = \frac{3}{4} \frac{K_R^2 - 4K_R^2 T_I + 7K_R T_I + 6K_R T_I^2 - 24T_I^2}{K_R (9K_R + 4K_R^2 T_I - 14K_R T_I - 8T_I)}$$

Traženi parametri regulatora dobiju se izjednačavanjem prvih derivacija funkcije ISE kriterija $I_{3,4}$ po parametrima K_R i T_I s nulom

$$\frac{\partial I_{3,4}}{\partial K_R} = 0, \quad \frac{\partial I_{3,4}}{\partial T_I} = 0$$

Zbog veličine izraza, prikaz parcijalnih derivacija je izostavljen. Konačno, parametri PI regulatora su

$$K_R = 1.85, \quad T_I = 1.5[s]$$

$$G_R(s) = 1.85 \left(1 + \frac{1}{1.5s} \right)$$

LITERATURA

- [1] Z. Vukić, Lj. Kuljača, *Automatsko upravljanje - analiza linearnih sustava*, Kigen, Zagreb, 2005.
- [2] N. Perić, Z. Vukić, M. Baotić i M. Vašak, *Automatsko upravljanje - Predavanja*
- [3] http://en.wikipedia.org/wiki/PID_controller