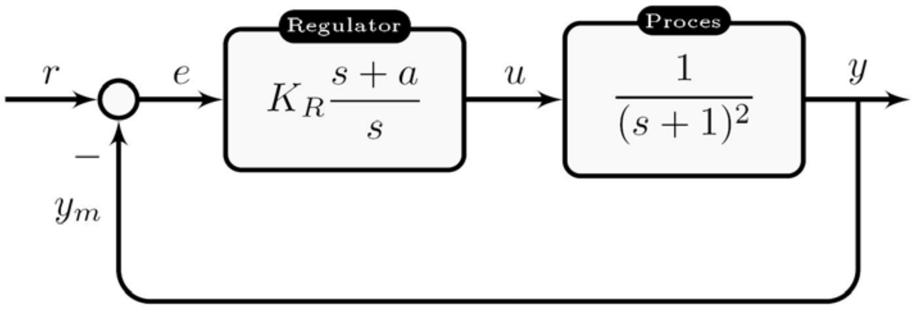
<table>
<tr><td rowspan="3">GULIN MARKO
0036428227</td><td>Fakultet elektrotehnike i računarstva Zagreb
Zavod za ARI</td><td rowspan="3">19. studenog 2009.</td></tr>
<tr><td>AUTOMATSKO UPRAVLJANJE</td></tr>
<tr><td>4. Domaća zadaća:

STABILNOST I TOČNOST LINEARNIH
KONTINUIRANIH SUSTAVA UPRAVLJANJA</td></tr>
</table>

1. Zadatak: Na slici 4.1. prikazan je zatvoreni regulacijski krug.



Slika 4.1. Zatvoreni regulacijski krug

a) *Odrediti Hurwitzovim kriterijem stabilnosti područje u ravnini određenoj parametrima K_R i a za koje je zatvoreni sustav stabilan. Skicirati rješenje;*

Prijenosna funkcija otvorenog kruga je

$$G_o(s) = K_R \frac{s+a}{s(s+1)^2}$$

Karakteristična jednadžba zatvorenog kruga je

$$\alpha_{CE}(s) = 1 + G_o(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + s(1+K_R) + a}{s(s+1)^2}$$

Karakterističnu jednadžbu zatvorenog kruga izjednačavamo sa nulom

$$\alpha_{CE}(s) = s^3 + 2s^2 + s(1+K_R) + K_R a$$

te očitajemo koeficijente koji stoje uz pojedine potencije od s

$$a_3 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_1 = 1 + K_R, \qquad a_0 = K_R a$$

Prvi Hurwitzov uvjet kaže da svi koeficijenti karakteristične jednadžbe zatvorenog kruga moraju biti pozitivni, odnosno

$$a_3 = 1 > 0, \qquad a_2 = 2 > 0, \qquad a_1 = 1 + K_R > 0 \rightarrow K_R > -1, \qquad a_0 = K_R a > 0$$

Na temelju koeficijenta a_0 zaključujemo

$$a < 0, \qquad K_R \in \langle -1,0 \rangle$$

$$a > 0, \qquad K_R \in \langle 0 + \infty \rangle$$

Drugi Hurwitzov uvjet kaže da $n-1$ determinanta mora biti pozitivna, odnosno

$$D_1 = a_1 > 0, \qquad 1 + K_R > 0 \rightarrow K_R > -1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \qquad 2 + 2K_R - K_R a > 0 \rightarrow K_R a < 2K_R + 2$$

Na temelju determinante D_2 zaključujemo

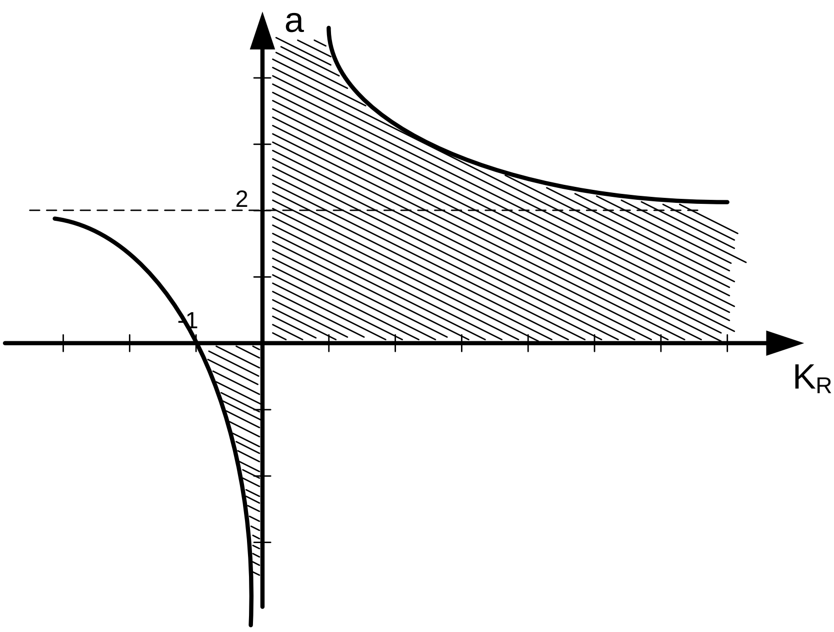
$$a > 2 + \frac{2}{K_R}, \qquad K_R < 0$$

$$a < 2 + \frac{2}{K_R}, \qquad K_R > 0$$

Konačno, da bi zatvoreni regulacijski krug bio stabilan, moraju vrijediti sljedeći uvjeti

$$a < 0, \qquad a > 2 + \frac{2}{K_R}, \qquad -1 < K_R < 0$$

$$a > 0, \qquad a < 2 + \frac{2}{K_R}, \qquad K_R > 0$$



Slika 4.2. Dopuštene vrijednosti parametara K,a prikazane u K-a ravnini

b) Nacrtajte Bodeov dijagram te na temelju njega odredite je li zatvoreni krug stabilan za $K_R = 1$ *i* $a = 1$*;*

Amplitudna karakteristika prijenosne funkcije otvorenog kruga za zadane koeficijente je

$$A(\omega) = -20\log\omega - 20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{1}\right)^2}\ [dB]$$

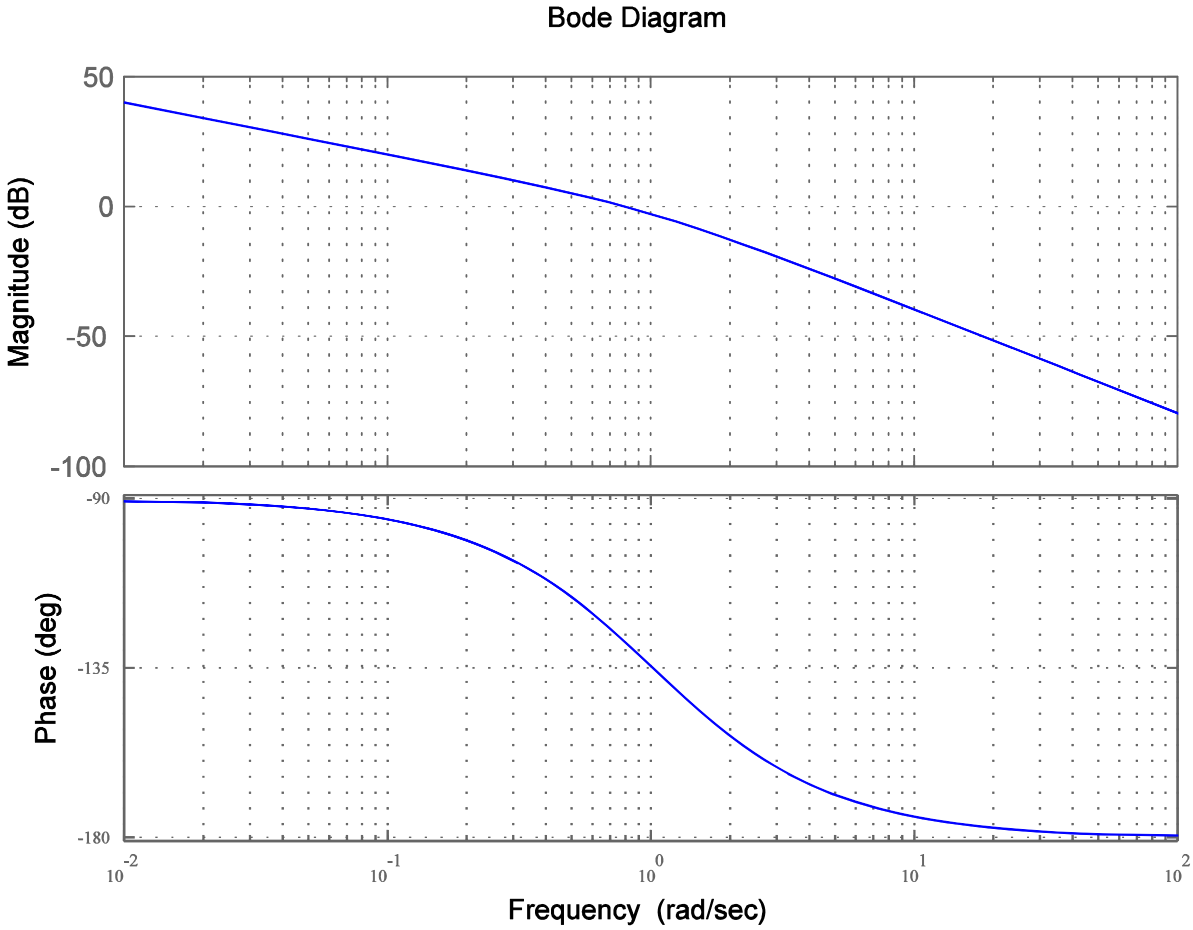
$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\omega}{1}$$

Presječna frekvencija ω_c te frekvencija na kojoj je faza sustava jednaka $\pi\ [rad]$ iznose

$$A(\omega_c) = 0\ [dB] \rightarrow \omega_c = 1\ [s^{-1}]$$

$$\varphi(\omega_\pi) = \pi \rightarrow \omega_\pi = 10\ [s^{-1}]$$

Kako vrijedi $\omega_c < \omega_\pi$ zaključujemo da je sustav stabilan! Bodeov dijagram prikazan je slikom 4.3.



Slika 4.3. Bodeov dijagram otvorenog kruga zadanog sustava

c) Odrediti regulacijsko odstupanje u ustaljenom stanju e_∞ za pobudu oblika $R(s) = \frac{2}{s}$ uz $K_R = 1$ i $a = 1$;

Određujemo izraz za regulacijsko odstupanje $E(s)$ prema slici 4.1

$$E(s) = R(s) - Y(s), \qquad Y(s) = E(s)G_o(s), \qquad E(s) = \frac{R(s)}{1 + G_o(s)}$$

odnosno

$$E(s) = \frac{2s(s+1)}{s(s^2+s+1)} = \frac{2(s+1)}{s^2+s+1}$$

Regulacijsko odstupanje u ustaljenom stanju je

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = 0$$

d) Odrediti regulacijsko odstupanje u ustaljenom stanju e_∞ za pobudu oblika $R(s) = \frac{2}{s^2}$ uz $K_R = 1$ i $a = 1$;

Određujemo izraz za regulacijsko odstupanje $E(s)$ prema slici 4.1

$$E(s) = R(s) - Y(s), \qquad Y(s) = E(s)G_o(s), \qquad E(s) = \frac{R(s)}{1 + G_o(s)}$$

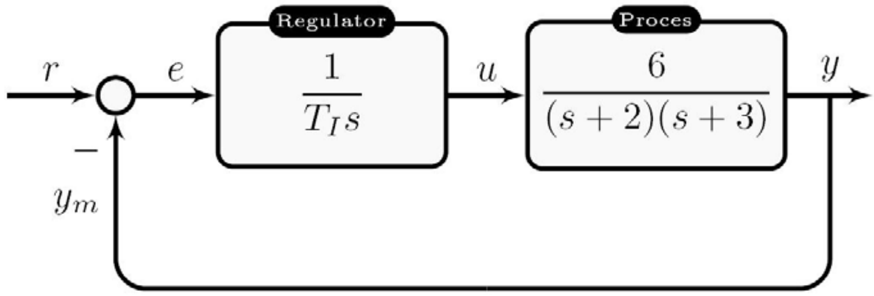
odnosno

$$E(s) = \frac{2s(s+1)}{s^2(s^2+s+1)} = \frac{2(s+1)}{s(s^2+s+1)}$$

Regulacijsko odstupanje u ustaljenom stanju je

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = 2$$

2. Zadatak: Na slici 4.4. prikazan je zatvoreni regulacijski krug.



Slika 4.4. Zatvoreni regulacijski krug

a) *Odredite vremensku konstantu T_I takvu da vrijeme prvog maksimuma prijelazne funkcije zatvorenog kruga bude $t_m \approx 3$ $[s]$. Koristite se pritom približnim relacijama između pokazatelja kvalitete sustava upravljanja u vremenskom i frekvencijskom području;*

Vrijedi relacija

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_c}\ [s] \rightarrow \omega_c \approx 1\ [s^{-1}]$$

pri čemu je ω_c presječna frekvencija otvorenog kruga. Prijenosna funkcija otvorenog kruga je

$$G_o(s) = \frac{6}{T_I s(s+2)(s+3)}$$

Linearno pojačanje otvorenog kruga na presječnoj frekvenciji iznosi 1, odosno

$$|G_o(j\omega_c)| = \frac{6}{T_I \omega_c \sqrt{4+\omega_c^2}\sqrt{9+\omega_c^2}} = 1 \rightarrow T_I = 0.8485\ [s]$$

b) *Nacrtati Bodeov i Nyquistov dijagram otvorenog regulacijskog kruga uz T_I određen pod a) te na temelju tih dijagrama odrediti je li zatvoreni regulacijski krug stabilan;*

Fazna karakteristika otvorenog kruga je

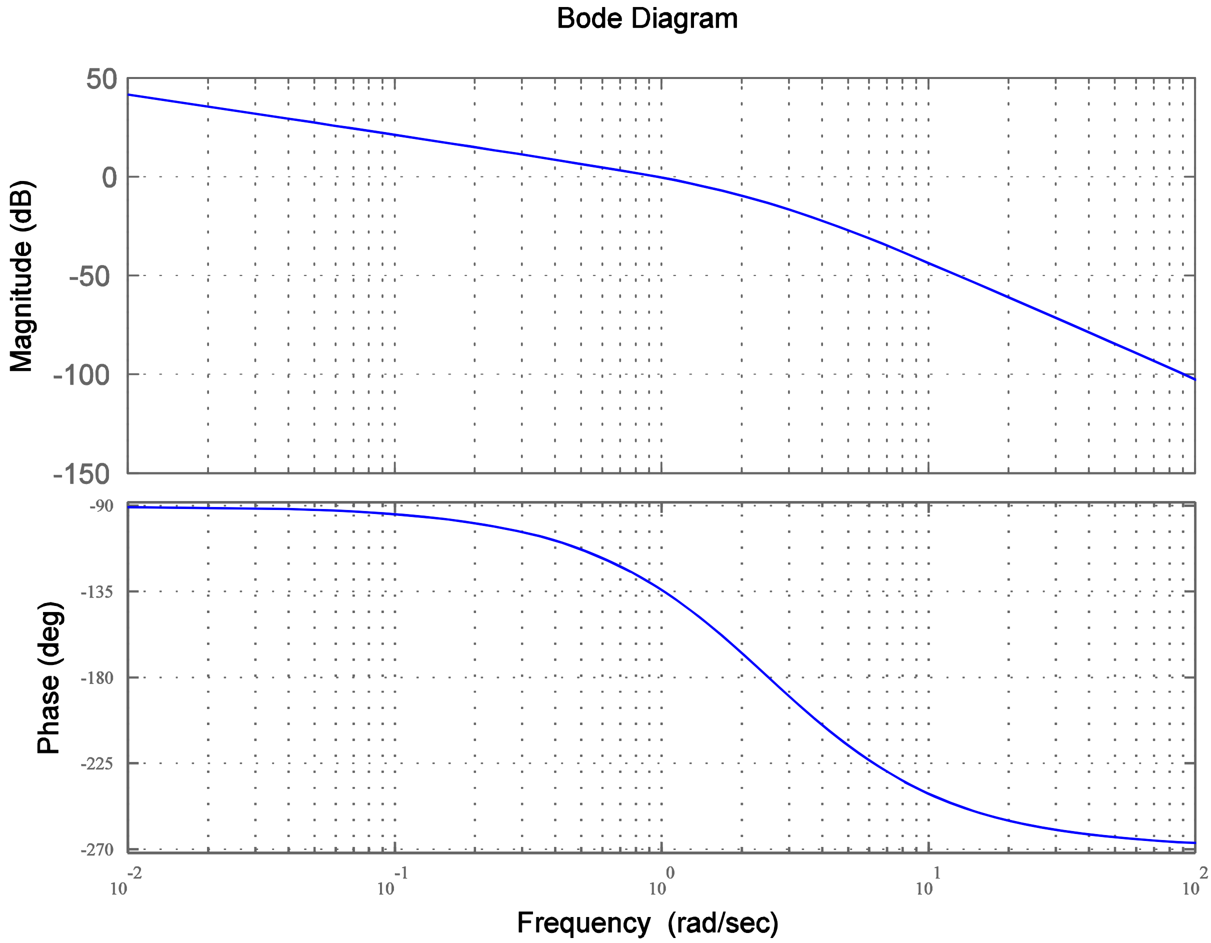
$$G_o(j\omega) = \frac{6}{j0.8485\omega(2+j\omega)(3+j\omega)}$$

Amplitudna karakteristika otvorenog kruga je

$$A(\omega) = 20\log\frac{5\sqrt{2}}{6} - 20\log\omega - 20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2} - 20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{3}\right)^2}\ [dB]$$

Fazna karakteristika otvorenog kruga je

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\omega}{2} - \tan^{-1}\frac{\omega}{3}\ [rad]$$



Slika 4.5. Bodeov dijagram otvorenog kruga zadanog sustava

Fazna karakteristika pripremljena za crtanje Nyquistovog dijagrama je

$$G_o(j\omega) = \underbrace{\frac{-35.3565\omega}{\omega(\omega^4 + 13\omega^2 + 36)}}_{R(\omega)} + j\underbrace{\frac{7.0713(\omega^2 - 6)}{\omega(\omega^4 + 13\omega^2 + 36)}}_{I(\omega)}$$

Početne vrijednosti su

$$\lim_{\omega\to\infty} R(\omega) = 0, \qquad \lim_{\omega\to\infty} I(\omega) = 0$$

Konačne vrijednosti su

$$\lim_{\omega\to 0} R(\omega) = -0.9821, \qquad \lim_{\omega\to 0} I(\omega) = -\infty$$

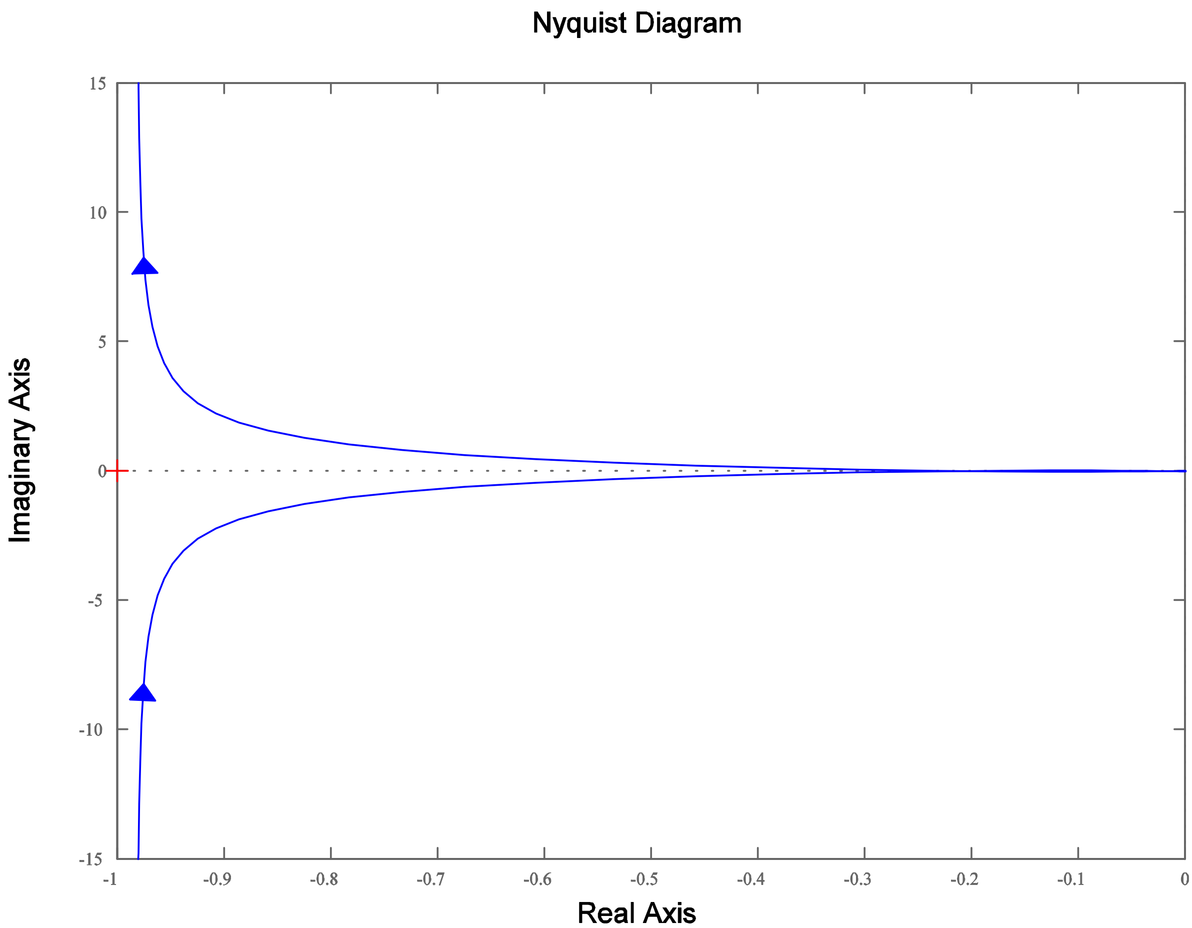
Nultočke su

$$R(\omega_0) = 0 \rightarrow \omega_0 \notin \mathbb{R}$$

$$I(\omega_0) = 0 \rightarrow \omega_0 = 2.45\ [s^{-1}] \rightarrow R(\omega_0) = -0.23571$$

Kut upada je

$$\lim_{\omega\rightarrow\infty} \varphi(\omega) = -\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$



Slika 4.6. Nyquistov dijagram otvorenog kruga zadanog sustava

Iz Bodeovog dijagrama vidimo da vrijedi $\omega_c < \omega_\pi$, a iz Nyquistovog dijagrama vidimo da vrijedi $R(\omega_\pi) > -1$. Zaključujemo da je sustav stabilan.

c) *Analitički odrediti iznos amplitudnog i faznog osiguranja sustava, A_r i γ, te na temelju njih procjeniti iznos nadvišenja σ_m prijelazne funkcije zatvorenog kruga;*

Amplitudno osiguranje određujemo iz relacije

$$A_r = \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|}$$

Frekvenciju ω_π određujemo iz fazne karakteristike, odnosno

$$\varphi(\omega_\pi) = \tan^{-1}\frac{7.0713(\omega_\pi^2 - 6)}{-35.3565\omega_\pi} = \pi \rightarrow \omega_\pi = \sqrt{6}\ [s^{-1}]$$

Linearno pojačanje kruga na frekvenciji ω_π je

$$|G(j\omega_\pi)| = 0.23571$$

Prema tome, amplitudno osiguranje je

$$A_r = 4.2425, \qquad A_r = 12.5524\ [dB]$$

Fazno osiguranje određujemo iz relacije

$$\gamma = \pi + \varphi(\omega_c)$$

Presječna frekvencija ω_c izračunata je u a) dijelu zadatka, te iznosi

$$\omega_c = 1\ [s^{-1}]$$

Fazna karakteristika na presječnoj frekvenciji iznosi

$$\varphi(\omega_c) = -135°$$

Prema tome, fazno osiguranje je

$$\gamma = 45°$$

Iznos maksimalnog nadvišenja određujemo iz relacije

$$\sigma_m = 70 - \gamma\ [\%]$$

Maksimalno nadvišenje iznosi

$$\sigma_m = 25\ [\%]$$

d) Procijeniti mjesta dominantnog para polova zatvorenog kruga $s_{p1,2}$, tj. odrediti pripadne veličine ζ i ω_n na temelju σ_m i t_m;

U nastavku su prikazane izvedene relacije za maksimalno nadvišenje i vrijeme prvog maksimuma za PT2-S član

$$\sigma_m = 100 \cdot e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\ [\%], \qquad t_m = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\ [s]$$

Iz navedenih relacija proračunamo relativno priguešenje ζ te frekvenciju neprigušenih oscijalicija ω_n

$$\zeta = 0.4037, \qquad \omega_n = 1.1446\ [s]$$

Iz općeg izraza za polove zatvorenog kruga sustava 2. reda

$$s_{p1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Prema tome, dominantni polovi zatvorenog kruga su

$$s_{p1,2} = -0.46207 \pm j1.0472$$

e) Odrediti kritični iznos vremenske konstante T_I regulatora pri kojoj je zatvoreni regulacijski krug na rubu stabilnosti te frekvenciju trajnih oscilacija na rubu stabilnosti.

Iznos kritične vremenske konstante T_I odredit ćemo iz uvjeta

$$R(\omega_\pi) > -1, \qquad I(\omega_\pi) = 0$$

Frekvencijska karakteristika sustava u ovisnosti o vremenskoj konstanti T_I je

$$G_o(j\omega) = \underbrace{\frac{6}{\omega T_I}\frac{-5\omega}{\omega^4 + 13\omega^2 + 36}}_{R(\omega)} + j\underbrace{\frac{6}{\omega T_I}\frac{\omega^2 - 6}{\omega^4 + 13\omega^2 + 36}}_{I(\omega)}$$

Iz uvjeta $I(\omega_\pi)$ dobijemo frekvenciju na kojoj je faza susustava jednaka $\pi\ [rad]$

$$\omega_\pi^2 - 6 = 0 \rightarrow \omega_\pi = \sqrt{6}\ [rad]$$

Dobivenu frekvenciju uvrštavamo u uvjet stabilnosti

$$R(\omega_\pi) = \frac{-30}{T_I}\frac{1}{150} > -1 \rightarrow T_I > 0.2\ [s]$$