



FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo

4. DOMAĆA ZADAĆA

Stabilnost i točnost linearnih kontinuiranih sustava upravljanja

Ime i Prezime
JMBAG

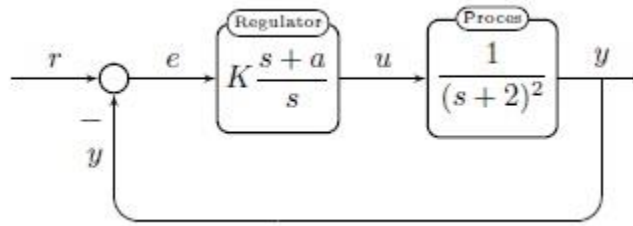
Zagreb, ak. god. 2016/2017

Uvod

Stabilnost sustava upravljanja osnovni je preduvjet njegove praktične primjene. Regulacijski krug - sustav upravljanja može zbog povratne veze biti nestabilan, tj. mogu nastupiti oscilacije regulirane veličine čije bi amplitude poprimile beskonačne vrijednosti. Sustav je stabilan ako za ograničenu pobudu ima ograničeni odziv (engl. Bounded Input Bounded Output, BIBO stable). Za istraživanje stabilnosti nije nužno znati vrijednosti korijena karakteristične jednadžbe. Važno je znati nalaze li se te vrijednosti u lijevoj ili desnoj poluravnini s -ravnine. Za analizu stabilnosti sustava automatskog upravljanja koriste se algebarski i grafički kriteriji.

Zadatak 1

Na slici 1 prikazana je zatvoreni regulacijski krug.



Slika 1: Zatvoreni regulacijski krug.

Potrebno je:

- a) Odrediti Hurwitzovim kriterijem stabilnosti područje u ravnini određenoj parametrima K i a za koje je zatvoreni sustav stabilan. Skicirati rješenje.

Rješenje:

Karakteristična jednadžba sustava upravljanja:

$$G_0(s) = K \frac{s+a}{s(s+2)^2}$$

$$\begin{aligned} G_Z(s) &= \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{K \frac{s+a}{s(s+2)^2}}{1 + K \frac{s+a}{s(s+2)^2}} = \frac{K \frac{s+a}{s(s+2)^2}}{\frac{s(s+2)^2 + K(s+a)}{s(s+2)^2}} = \frac{K(s+a)}{s(s+2)^2 + K(s+a)} \\ &= \frac{K(s+a)}{s(s^2 + 4s + 4) + K(s+a)} = \frac{K(s+a)}{s^3 + 4s^2 + (K+4)s + Ka} \end{aligned}$$

Nužno je da su svi koeficijenti karakteristične jednadžbe istog predznaka:

Prema Hurwitzovom kriteriju:

$$D_1 = a_1 > 0 \rightarrow K + 4 > 0 \rightarrow K > -4$$

$$a_1 = K + 4$$

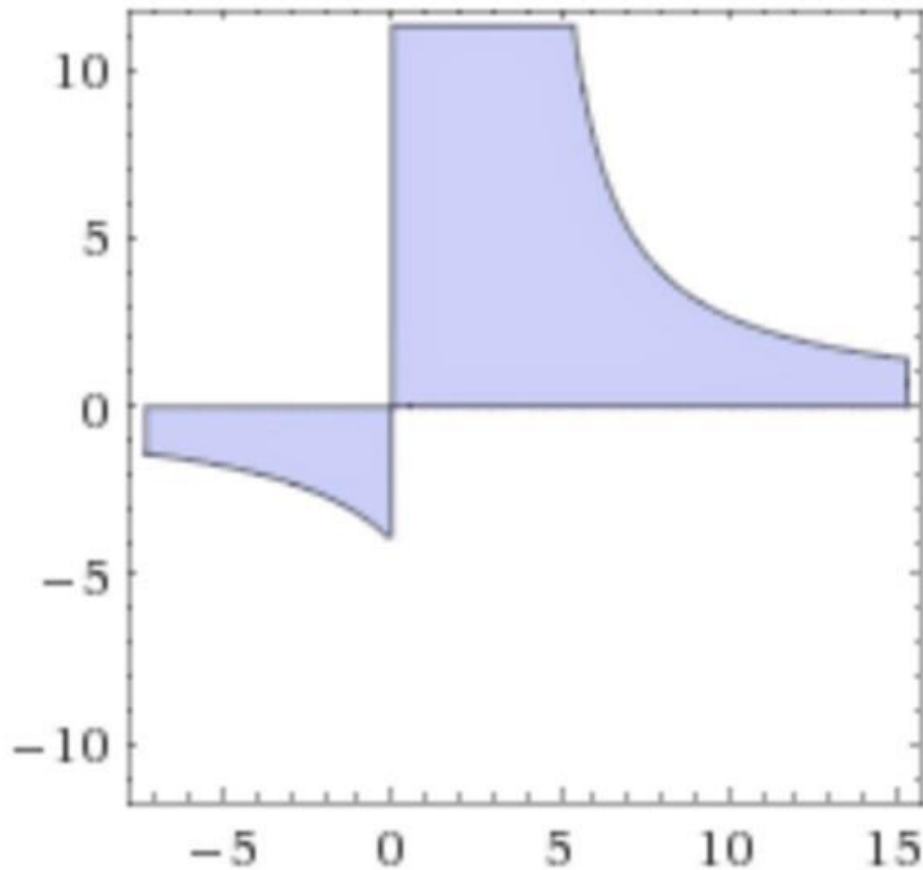
$$a_0 = K \cdot a > 0$$

$$a_3 = 1 > 0$$

$$a_2 = 4 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \rightarrow \begin{vmatrix} K+4 & K \cdot a \\ 1 & 4 \end{vmatrix} > 0 \rightarrow (K+4) \cdot 4 - (K \cdot a) \cdot 1 > 0$$

$$\rightarrow 4K + 16 - K \cdot a > 0 \rightarrow K(4-a) > -16 \rightarrow K > \frac{-16}{4-a} \rightarrow K < \frac{16}{a-4}$$



Slika 2: Područje u ravnini određenoj parametrima K i a za koje je zatvoreni sustav stabilan

b) Provjeriti vladanje sustava korištenjem Matlaba za sljedeće grupe parametara:

1. $K = 10, a = 6,$
2. $K = 4, a = 8,$
3. $K = 6, a = 4.$

Prijelazne funkcije sustava za sve skupine parametara nacrtati na istoj slici (jednu ispod druge). Naslov svake iscrtane prijelazne funkcije neka sadrži zadane parametre.

Rješenje:

```

% Definiranje tf od sva tri regulatora

r1=tf([10 60],[1 0]);
r2=tf([4 32],[1 0]);
r3=tf([6 24],[1 0]);

% Definiranje tf procesa

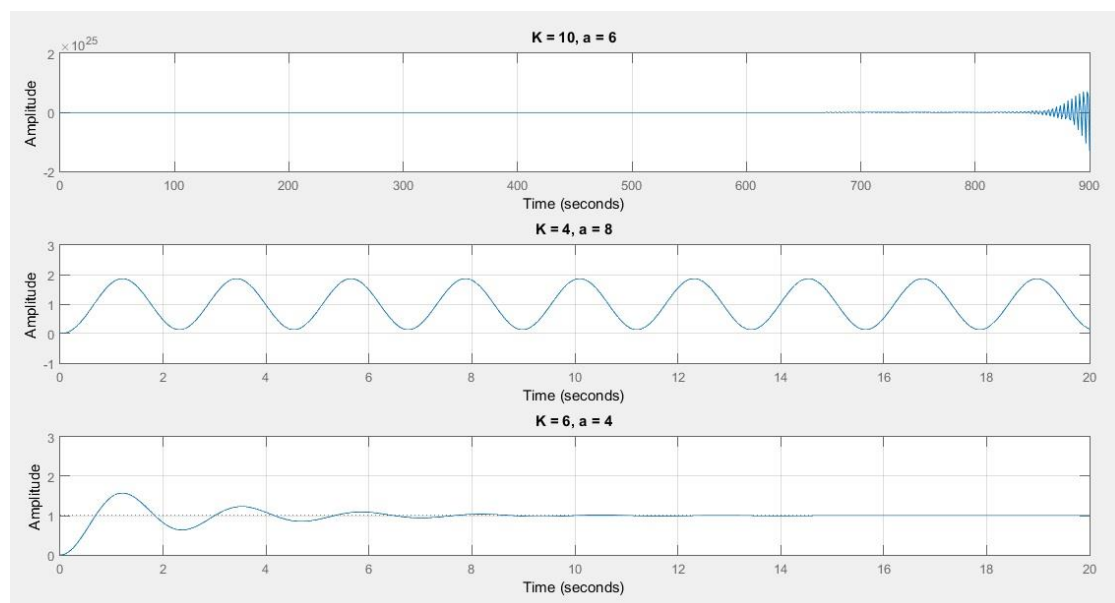
p=tf([1],[1 4 4]);

% Prijenosne funkcije zatvorenog kruga
% jedinica povratna veza u krugu

g1=minreal(feedback(r1*p,1));
g2=minreal(feedback(r2*p,1));
g3=minreal(feedback(r3*p,1));

subplot(3,1,1); step(g1); grid on; axis tight;
title('K = 10, a = 6');
subplot(3,1,2); step(g2); grid on; axis([0 20 -1 3]);
title('K = 4, a = 8');
subplot(3,1,3); step(g3); grid on; axis([0 20 0 3]);
title('K = 6, a = 4');

```

Slika 3: Prijelazne funkcije za zadane parametre K i a

- c) Odrediti regulacijsko odstupanje u ustaljenom stanju e_∞ za pobudu oblika $R(s) = \frac{4}{s}$ uz $K = 2$ i $a = 2$.

Rješenje:

$$R(s) = \frac{4}{s}, K = 2, a = 2$$

$$G_0(s) = \frac{2s+4}{s(s+2)^2}$$

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{R(s)}{1 + G_0(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{4}{s} \cdot \frac{s(s+2)^2}{s(s+2)^2 + 2s + 4} = 0$$

- d) Odrediti regulacijsko odstupanje u ustaljenom stanju e_∞ za pobudu oblika $R(s) = \frac{4}{s^2}$ uz $K = 2$ i $a = 2$.

Rješenje:

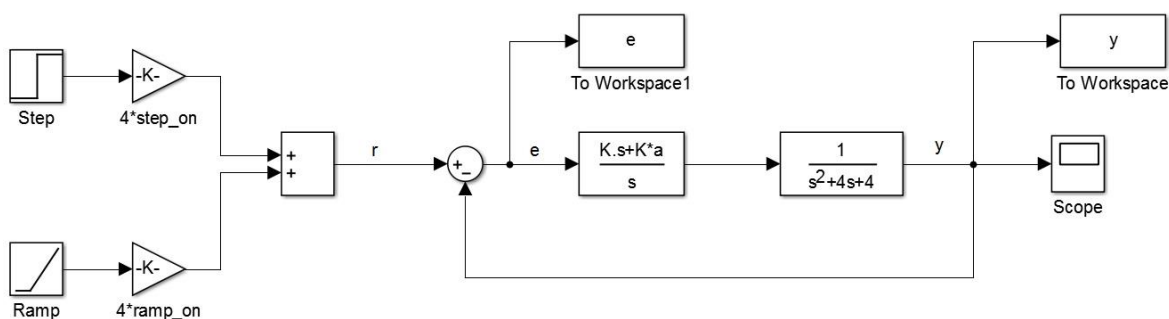
$$R(s) = \frac{4}{s^2}, K = 2, a = 2$$

$$G_0(s) = \frac{2s+4}{s(s+2)^2}$$

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{R(s)}{1 + G_0(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{4}{s^2} \cdot \frac{s(s+2)^2}{s(s+2)^2 + 2s + 4} = 4$$

- e) Napraviti Simulink shemu zadanog sustava. Za K i a parametre u Simulinku iskoristiti varijable K i a iz Matlabovog radnog prostora. Izlaz $y(t)$ i regulacijsko odstupanje $e(t)$ potrebno je snimiti u vektore retke y i e Matlabu. Simulirati shemu za ulazne signale i parametre iz podzadatka c) i d). Usporediti rezultate.

Rješenje:



Slika 4: Simulink shema

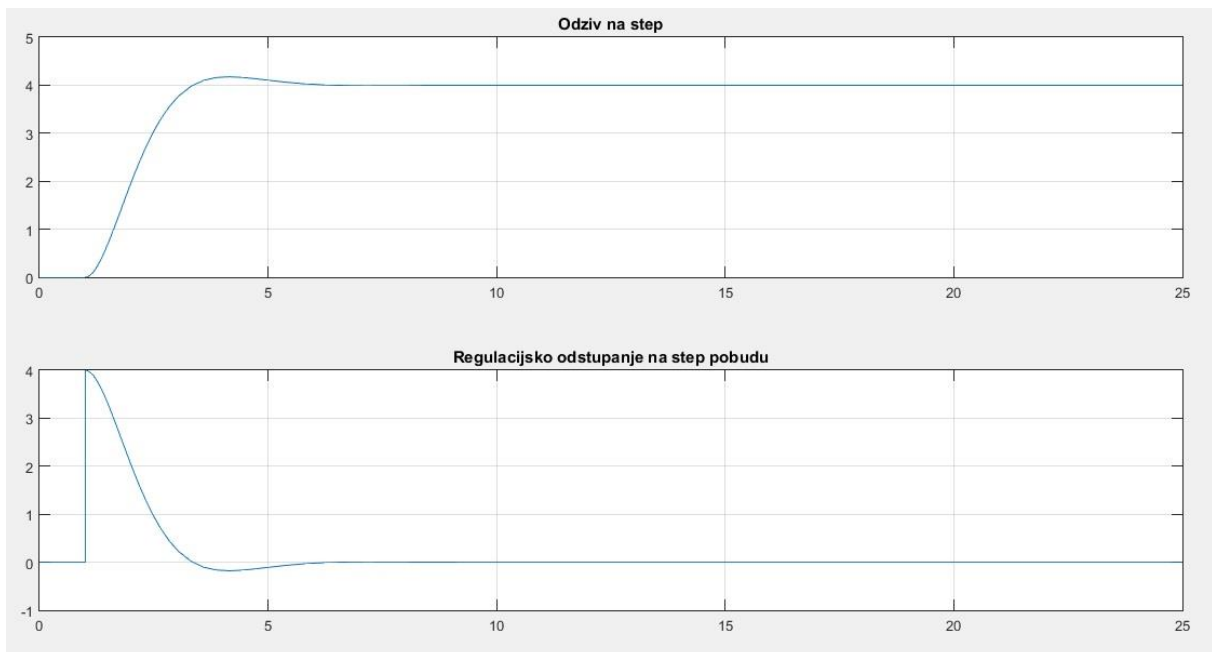
```
Tsim=25;

% parametri simulacije za 1.c zadatak

K=2;
a=2;
step_on=true;
ramp_on=false;

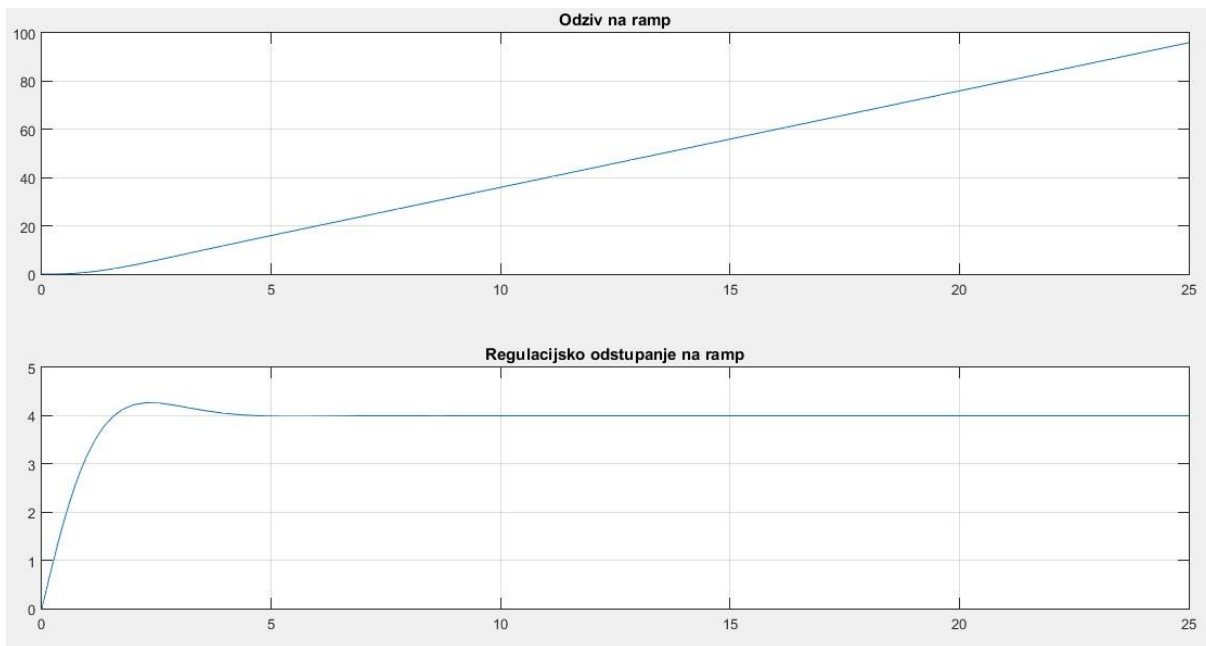
y_step=y;
e_step=e;
t_step=tout;

figure;
subplot(2,1,1); plot(t_step,y_step); grid on;
title('Odziv na step');
subplot(2,1,2); plot(t_step,e_step); grid on;
title('Regulacijsko odstupanje na step pobudu');
```



Slika 5: Simulacija podzadatka c)

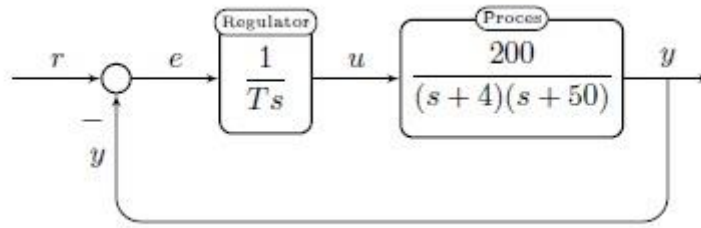
```
Tsim=25;  
  
% parametri simulacije za 1.d zadatak  
  
K=2;  
a=2;  
step_on=false;  
ramp_on=true;  
  
y_ramp=y;  
e_ramp=e;  
t_ramp=tout;  
  
figure;  
subplot(2,1,1); plot(t_ramp,y_ramp); grid on;  
title('Odziv na ramp');  
subplot(2,1,2); plot(t_ramp,e_ramp); grid on;  
title('Regulacijsko odstupanje na ramp');
```



Slika 6: Simulacija podzadatka d)

Zadatak 2

Na slici # prikazan je zatvoreni regulacijski krug.



Slika 7: Zatvoreni regulacijski krug.

Potrebno je:

- a) Odrediti vremensku konstantu T takvu da se dobije nadvišenje prijelazne funkcije zatvorenog kruga $\sigma_m \approx 4\%$.

Rješenje:

$$\sigma_m \approx 4\%, \gamma \approx 70^\circ - \sigma_m = 70^\circ - 4\% = 66^\circ$$

$$G_0(s) = \frac{1}{Ts} \cdot \frac{200}{(s+4)(s+50)} = \frac{1}{Ts} \cdot \frac{200}{s^2 + 54s + 200}$$

$$\begin{aligned} G_0(j\omega) &= \frac{200}{T} \cdot \frac{1}{j\omega(-\omega^2 + 54j\omega + 200)} = \frac{200}{T} \cdot \frac{1}{-j\omega^3 - 54\omega^2 + 200j\omega} \\ &= \frac{200}{T} \cdot \frac{1}{-54\omega^2 + j(200\omega - \omega^3)} \cdot \frac{-54\omega^2 - j(200\omega - \omega^3)}{-54\omega^2 - j(200\omega - \omega^3)} \\ &= \frac{-200}{T[(54\omega^2)^2 + (200\omega - \omega^3)^2]} \cdot [54\omega^2 + j(200\omega - \omega^3)] \\ &= \frac{-200}{T\omega[(54\omega)^2 + (200 - \omega^2)^2]} \cdot [54\omega + j(200 - \omega^2)] \end{aligned}$$

$$\arctg\left(\frac{\text{Im}(G_0)}{\text{Re}(G_0)}\right) = \gamma - \pi \rightarrow \frac{200 - \omega_c^2}{54\omega_c} = \text{tg}(66^\circ - 180^\circ) \rightarrow \omega_c = 1,627$$

$$|G_0(j\omega)| = 1 = \frac{200}{T\omega_c\sqrt{\omega_c^2 + 4^2} \cdot \sqrt{\omega_c^2 + 50^2}} \rightarrow T = \frac{200}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2 + 4^2} \cdot \sqrt{\omega_c^2 + 50^2}} = 0,569$$

- b) Nacrtati Bodeov i Nyquistov dijagram otvorenog regulacijskog kruga uz T određenu pod a).

Rješenje:

$$T = 0,569$$

$$Re(G_0) = \frac{-200 \cdot 54\omega}{T\omega[(54\omega)^2 + (200 - \omega^2)^2]} = \frac{18980,67}{(54\omega)^2 + (200 - \omega^2)^2}$$

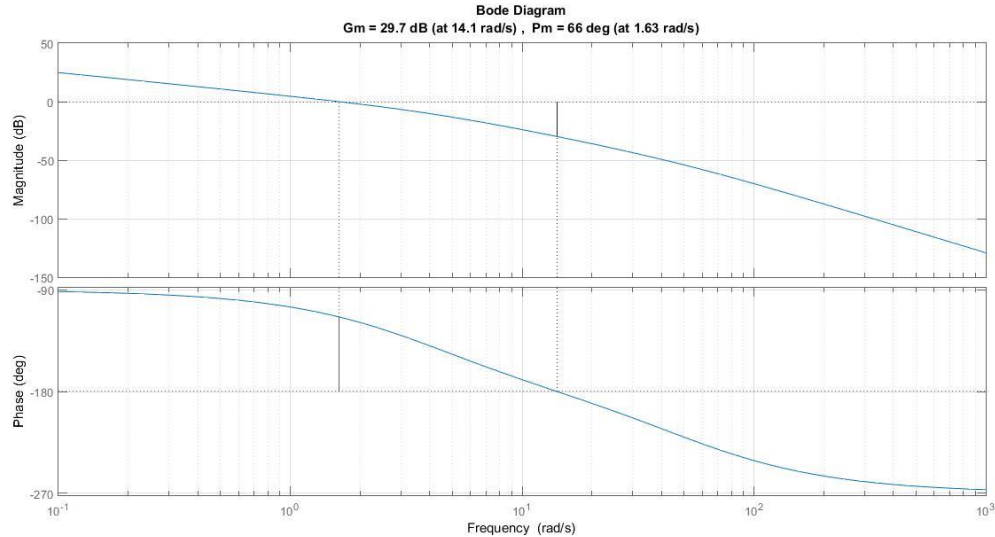
$$Im(G_0) = \frac{-200 \cdot (200 - \omega^2)}{T\omega[(54\omega)^2 + (200 - \omega^2)^2]} = \frac{351,5 \cdot (\omega^2 - 200)}{\omega[(54\omega)^2 + (200 - \omega^2)^2]}$$

$$Re(G_0) = 0 \rightarrow \omega = 0 \rightarrow Im(G_0) = -\infty$$

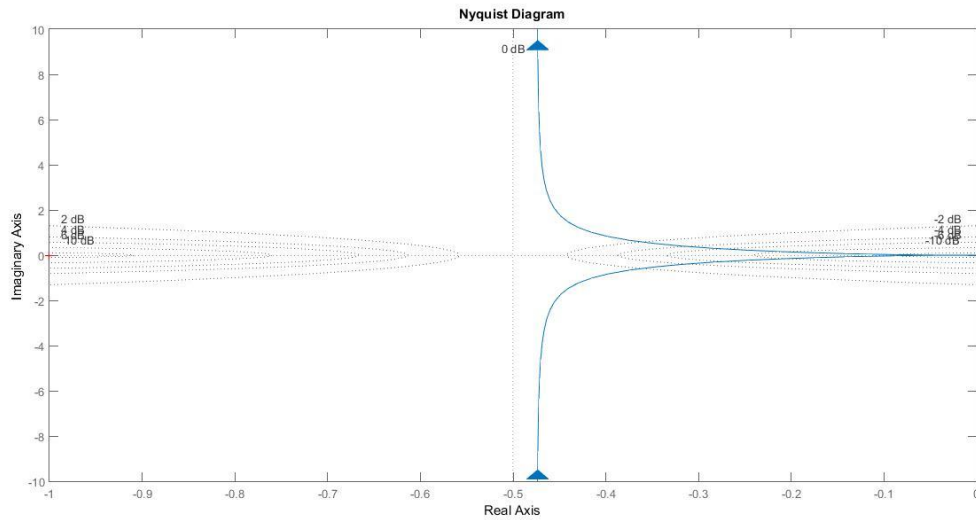
$$Im(G_0) = 0 \rightarrow \omega = 10\sqrt{2} \rightarrow Re(G_0) = -0,0325$$

$$\omega = 0 \rightarrow \begin{cases} Re(G_0) = -0,475 \\ Im(G_0) = -\infty \end{cases}$$

$$\omega = \infty \rightarrow \begin{cases} Re(G_0) = 0 \\ Im(G_0) = 0 \end{cases}$$



Slika 8: Bodeov dijagram



Slika 9: Nyquistov dijagram

- c) Odrediti iznos amplitudnog i faznog osiguranja sustava, A_r i γ te ih označiti na Bodeovom i Nyquistovom dijagramu.

Rješenje:

$$\arctg\left(\frac{200 - \omega_\pi^2}{54\omega_\pi}\right) = -\pi \rightarrow \omega_\pi = 10\sqrt{2} = 14,14$$

$$A_r = \frac{1}{|G_0(\omega_\pi)|} = 30,726$$

- d) Skicirati prijelaznu funkciju zatvorenog kruga uz proračunate aproksimacije nadvišenja i vremena prvog maksimuma dobivenih iz karakterističnih vrijednosti frekvencijskog dijagrama otvorenog kruga.

Rješenje:

$$\omega_c = 1,627$$

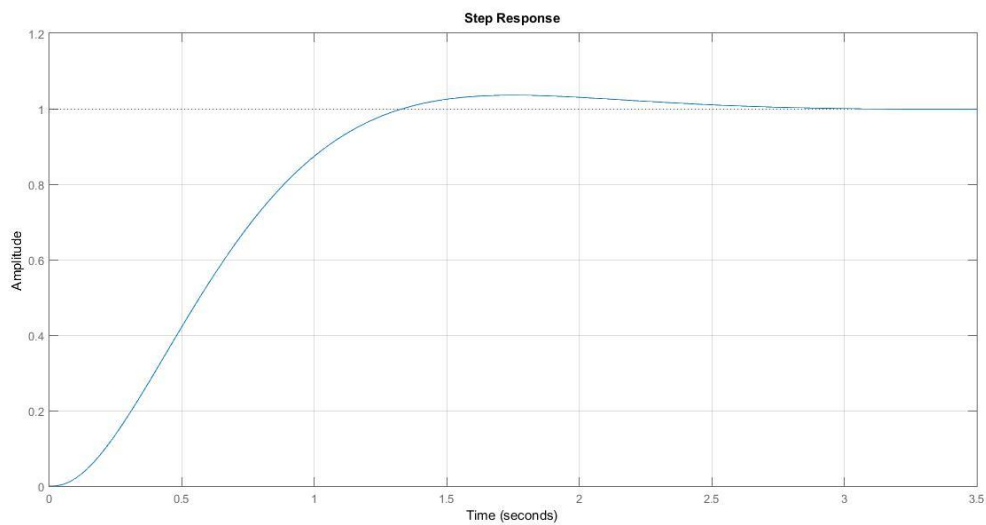
$$\sigma_m \approx 4\%$$

$$t_m = \frac{3}{\omega_c} = 1,844$$

$$\sigma_m = 100 \cdot e^{\frac{-\varepsilon \cdot \pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}} \rightarrow \varepsilon = 0,7156$$

$$G_z(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{200}{T \cdot s \cdot (s + 4)(s + 50) + 200}$$

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_z(s) \cdot \frac{1}{s} = 1$$



Slika 10: Prijelazna funkcija

- e) Ponoviti prethodna tri podzadatka korištenjem Matlaba. Napraviti usporedbu sa prethodnim rezultatima.

```
p=tf([200],[1 54 200]); % prijenosna funkcija procesa

% Prikaz Bode i Nyquist dijagrama za T=0.56897

r=tf([1],[0.56897 0]);

go=minreal(r*p);

[Gm1,Pm1,Wg1,Wp1]=margin(go);

figure;
margin(go); grid on;

figure;
nyquist(go);grid on; axis normal;

gz=feedback(go,1);

figure;
step(gz); grid on;

% Prikaz Bode i Nyquist dijagrama za T=1/54

r=tf([1],[1/54 0]);

go=minreal(r*p);

[Gm2,Pm2,Wg2,Wp2]=margin(go);

figure;
margin(go); grid on;

figure;
nyquist(go);grid on;

gz=feedback(go,1);

figure;
step(gz); grid on; axis([0 2 0 2]);

% Prijelazna funkcija za T= 0.03973

r=tf([1],[0.03973 0]);

go=minreal(r*p);

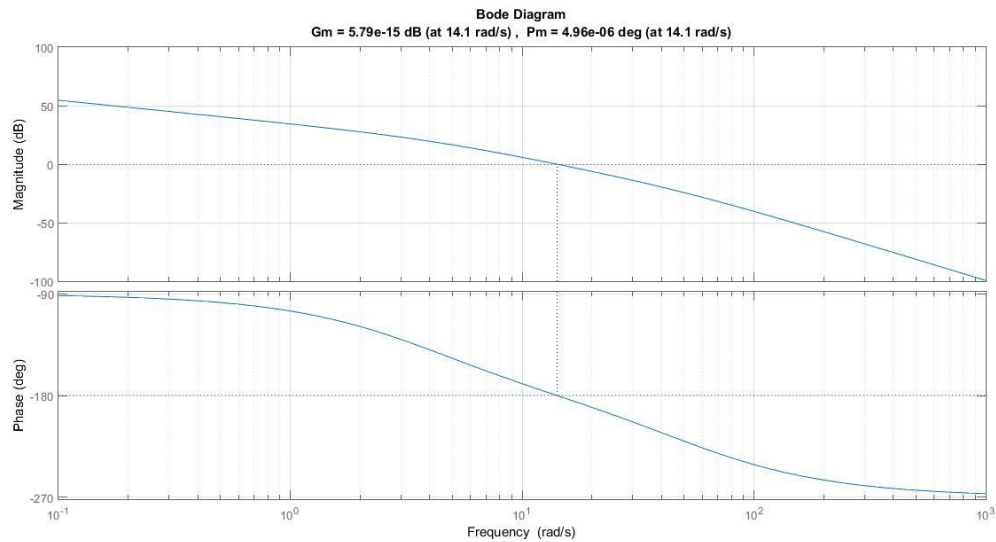
gz=feedback(go,1);

figure;
step(gz); grid on;
```

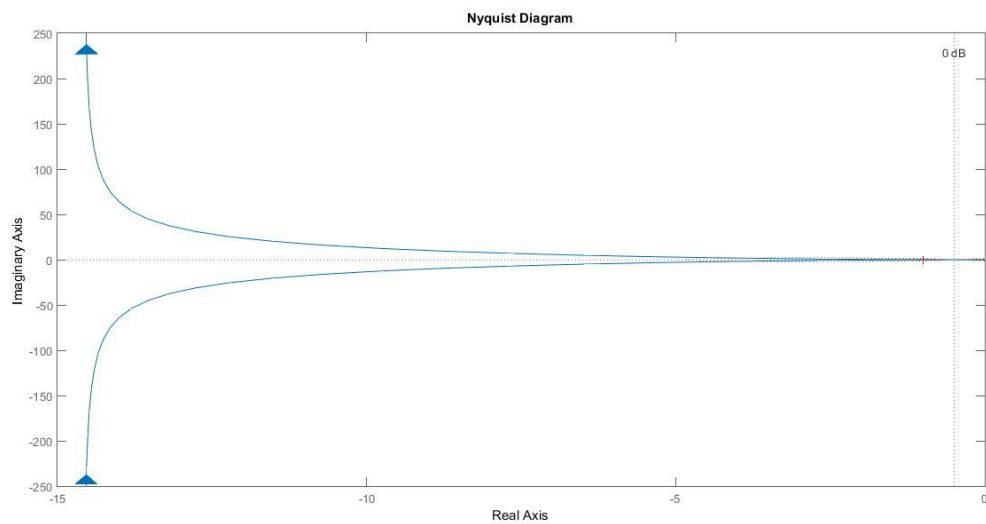
- f) Odrediti kritični iznos vremenske konstante $T = T_{krit}$ regulatora pri kojoj je zatvoreni regulacijski krug na rubu stabilnosti te frekvenciju trajnih oscilacija sustava na rubu stabilnosti. Ponovite podzadatak e) uz kritični iznos vremenske konstante $T = T_{krit}$.

Rješenje:

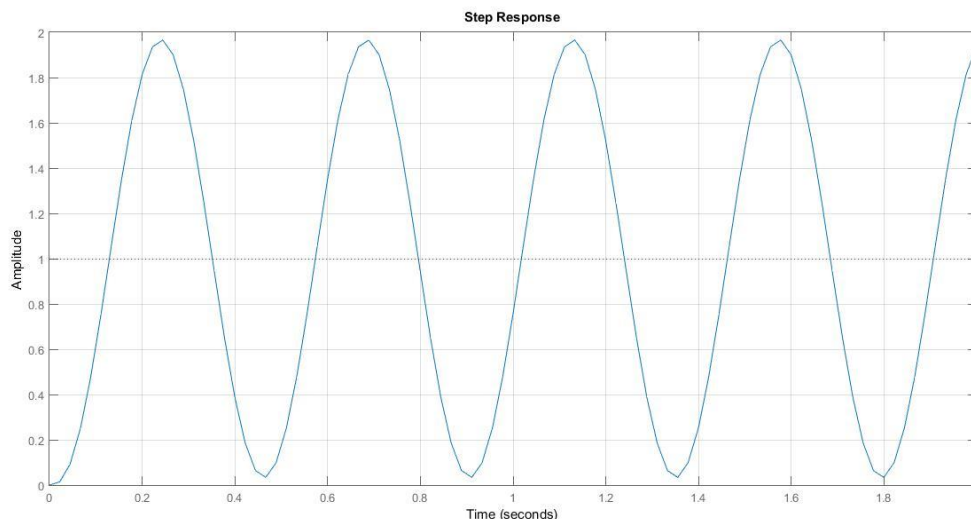
$$Re[G_0(j\omega_\pi)] = -1 = \frac{-200 \cdot 54}{T_{krit.} \cdot 54^2 \cdot 200} \rightarrow T_{krit.} = \frac{1}{54} = 0,0185$$



Slika 11: Bodeov dijagram



Slika 12: Nyquistov dijagram



Slika 13: Prijelazna funkcija

- g) Korištenjem Bodeovog dijagrama odrediti iznos vremenske konstante T za koju fazno osiguranje iznosi $\gamma = 15^\circ$. Aproximativnim relacijama proračunati očekivano nadvišenje prijelazne funkcije. Snimiti prijelaznu funkciju takvog sustava. Komentirati ostvareno nadvišenje.

Rješenje:

$$y_1 + 90 = -45(\log 5 - \log 0,4) \rightarrow y_1 = -139,36^\circ$$

$$y - y_1 = -90(x - \log 5)$$

$$-180 + 15 - (-139,36) = -90(x - \log 5) \rightarrow x = 0,9838$$

$$\omega_{c \text{ now}} = 10^x = 9,65 \text{ rad/s}$$

$$\omega_\pi = 10\sqrt{2} = 14,14 \text{ rad/s}$$

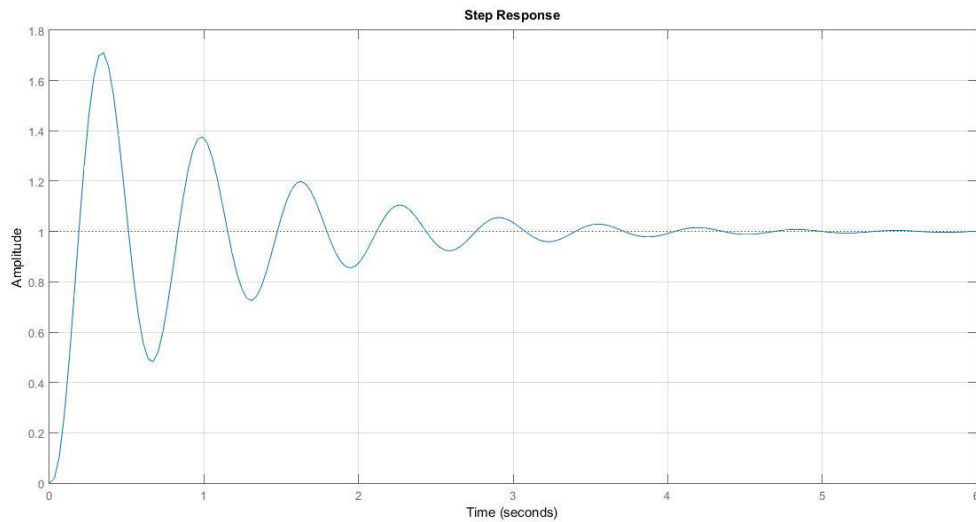
$$A_{\omega_\pi} = -20 \log \frac{1}{A_r} = -29,76 \text{ dB}$$

$$A_{\omega_c} - A_{\omega_\pi} = -40(\log \omega_c - \log \omega_\pi) = -40(\log 9,65 - \log 14,14) = -23,12 \text{ dB}$$

$$20 \log K = \left| -23,12 - 20 \log \frac{1}{T} \right| = \left| -23,12 - 20 \log \frac{1}{0,569} \right| \rightarrow K = 25,17$$

$$T = \frac{1}{K} = 0,03973$$

$$\sigma_m = 70^\circ - 15^\circ = 55^\circ$$



Slika 14: Prijelazna funkcija

Zaključak

Za određivanje stabilnosti linearnih kontinuiranih sustava automatskog upravljanja iz njihovih karakterističnih jednačbi nije potrebno izračunavati polove sustava; iz koeficijenata karakteristične jednačbe, pomoću algebarskih kriterija stabilnosti, zaključuje se o apsolutnoj stabilnosti sustava. Analizom stabilnosti linearnih kontinuiranih sustava automatskog upravljanja pomoću frekvencijskih karakteristika otvorenog sustava prikazanih Nyquistovim i Bodeovim dijagramima (grafički kriteriji stabilnosti) dobiva se uvid u relativnu stabilnost sustava automatskog upravljanja. Relativna stabilnost sustava automatskog upravljanja određuje se pomoću amplitudnog i faznog osiguranja. Iz presječne frekvencije ω_c i faznog osiguranja γ frekvencijske karakteristike otvorenog sustava jednostavno se određuje maksimalno nadvišenje σ_m i vrijeme prvog maksimuma t_m zatvorenog sustava upravljanja.