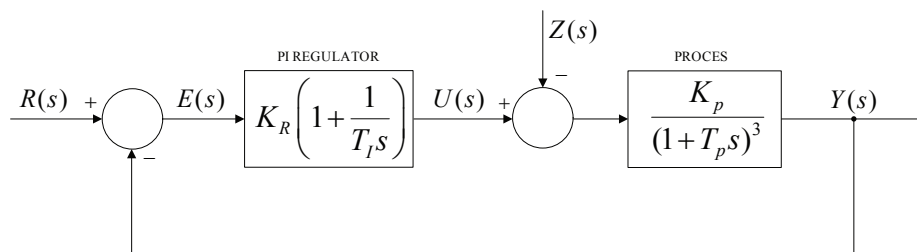




Automatsko upravljanje

6. Domaća zadaća - Rješenja

Zadan je sustav upravljanja s PI regulatorom prikazan blokovskom shemom na Slici 1.



Slika 1: Sustav upravljanja.

Parametri procesa K_p i T_p su:

- Termin A: (10:00-12:00): $K_p = 1.5$, $T_p = 0.3[s]$;
- Termin B: (13:00-15:00): $K_p = 3$, $T_p = 1.25[s]$;
- Termin C: (15:00-17:00): $K_p = 5$, $T_p = 5[s]$;
- Termin D: (18:00-20:00): $K_p = 1$, $T_p = 0.12[s]$;

Potrebno je:

a) Odrediti područje stabilnosti sustava u ravni $K_R - T_I$ parametara PI regulatora, uz $K_R \geq 0$ i $T_I \geq 0$;

Područje stabilnosti određujemo *Routh-Hurwitzovim kriterijem*. Prijenosna funkcija otvorenog kruga je

$$G_o(s) = \frac{K_p K_R (1 + T_I s)}{T_I s (1 + T_p s)^3} \quad (1)$$

Karakterističnu jednadžbu zatvorenog kruga $\alpha_{ce}(s)$ određujemo iz prijenosne funkcije otvorenog kruga $G_o(s)$

$$\alpha_{ce}(s) = 1 + G_o(s) = 0 \quad (2)$$

$$\alpha_{ce}(s) = T_p^3 s^4 + 3T_p^2 s^3 + 3T_p s^2 + (1 + K_p K_R) s + \frac{K_p K_R}{T_I} = 0 \quad (3)$$

Po prvom Hurwitzovom uvjetu, svi koeficijenti karakteristične jednadžbe moraju biti pozitivni

$$a_0 = \frac{K_p K_R}{T_I} > 0 \quad a_1 = 1 + K_p K_R > 0 \quad a_2 = 3T_p > 0 \quad a_3 = 3T_p^2 > 0 \quad a_4 = T_p^3 > 0 \quad (4)$$

Uvjeti koji proizlaze iz prvog Hurwitzovog uvjeta prikazanog relacijom (4) su

$$K_R > 0 \quad T_I > 0 \quad (5)$$

Po drugom Hurwitzovom uvjetu, $n - 1$ Hurwitzovih determinanti mora biti pozitivno

$$D_1 = a_1 = 1 + K_p K_R > 0 \quad K_R > -\frac{1}{K_p} \quad \longrightarrow \quad K_R > 0 \quad (6)$$

$$D_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad \longrightarrow \quad T_I > \frac{T_p K_p K_R}{1 + K_p K_R} \quad (7)$$

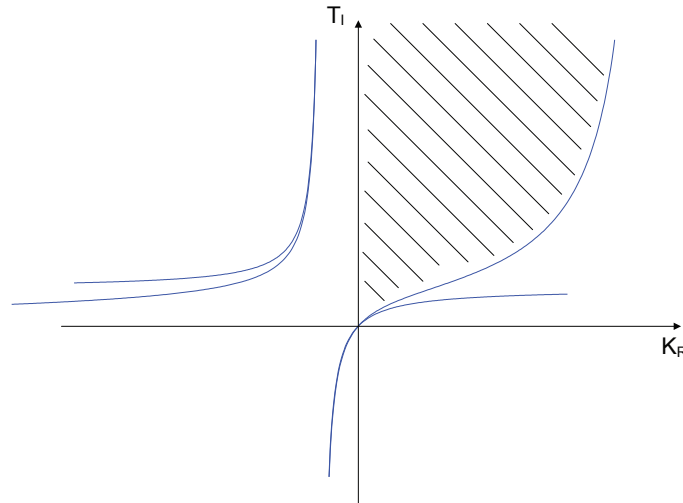
$$D_3 = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0 \quad \longrightarrow \quad T_I > \frac{9 K_p T_p K_R}{(1 + K_p K_R)(8 - K_p K_R)} \quad (8)$$

U tablici u nastavku su prikazana konačna rješenja za svaku pojedinu grupu.

Tablica 1: Granični uvjeti stabilnosti po terminima, uz $K_R > 0$ i $T_I > 0$.

Termin	Granični uvjet (1)	Granični uvjet (2)
A: (10:00-12:00):	$T_I = \frac{0.3 K_R}{K_R + \frac{2}{3}}$	$T_I = \frac{-1.8 K_R}{(K_R + \frac{2}{3})(K_R - \frac{16}{3})}$
B: (13:00-15:00):	$T_I = \frac{1.25 K_R}{K_R + \frac{1}{3}}$	$T_I = \frac{-3.75 K_R}{(K_R + \frac{1}{3})(K_R - \frac{8}{3})}$
C: (15:00-17:00):	$T_I = \frac{5 K_R}{K_R + 0.2}$	$T_I = \frac{-9 K_R}{(K_R + 0.2)(K_R - 1.6)}$
D: (18:00-20:00):	$T_I = \frac{0.12 K_R}{K_R + 1}$	$T_I = \frac{-1.08 K_R}{(K_R + 1)(K_R - 8)}$

Oblik područja stabilnosti univerzalno je za sve termine, razlike postoje samo u skaliranju vremenske osi. Na slici u nastavku prikazano je univerzalno područje stabilnosti za zadani sustav. Točnost prikazane slike može se provjeriti tako da se jedan par vrijednosti iz $K_R - T_I$ ravnine uvrsti u Hurwitzov kriterij stabilnosti.



Slika 2: Područje stabilnosti u $K_R - T_I$ ravnini

b) Parametrirati PI regulator minimizacijom ISE kriterija pri odzivu sustava na skokovitu promjenu vodeće veličine;

Tražimo regulacijsko odstupanje u donjem području, uz $R(s) = \frac{1}{s}$ i $Z(s) = 0$

$$E_r(s) = \frac{R(s)}{1 + G_o(s)}, \quad G_o(s) = G_R(s)G_p(s) \quad (9)$$

Regulacijsko odstupanje $E_r(s)$ je

$$E(s) = \frac{T_p^3 s^3 + 3T_p^2 s^2 + 3T_p s + 1}{T_p^3 s^4 + 3T_p^2 s^3 + 3T_p s^2 + (1 + K_p K_R) s + \frac{K_p K_R}{T_I}} \quad (10)$$

Koeficijenti c_k i d_k odrede se usporedbom dobivenog regulacijskog odstupanja s općim izrazom za regulacijsko odstupanje sustava 4. reda

$$E(s) = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + d_3 s^3 + d_4 s^4} \quad (11)$$

Koeficijenti su

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 3T_p, \quad c_2 = 3T_p^2, \quad c_3 = T_p^3 \quad (12)$$

$$d_0 = \frac{K_p K_R}{T_I}, \quad d_1 = 1 + K_p K_R, \quad d_2 = 3T_p, \quad d_3 = 3T_p^2, \quad d_4 = T_p^3 \quad (13)$$

Na temelju dobivenih koeficijenata odredi se integralna kriterijska funkcija $I_{3,4}$ prema općem izrazu danom u nastavku

$$I_{3,4} = \frac{c_3^2(-d_0^2 d_3 + d_0 d_1 d_2) + (c_2^2 - 2c_1 c_3)d_0 d_1 d_4 + (c_1^2 - 2c_0 c_2)d_0 d_3 d_4 + c_0^2(-d_1 d_4^2 + d_2 d_3 d_4)}{2d_0 d_4(-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)} \quad (14)$$

Nakon što se pronađe integralna kriterijska funkcija, potrebno je odrediti parcijalne derivacije integralne funkcije $I_{3,4}$ po traženim parametrima K_R i T_I , te ih izjednačiti s nulom. Tako se dobije sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice iz kojih se odrede traženi parametri

$$\frac{\partial I_{3,4}}{\partial K_R} = 0, \quad \frac{\partial I_{3,4}}{\partial T_I} = 0 \quad (15)$$

Prikaz integralne kriterijske funkcije i pripadnih parcijalnih derivacija izostavljen je radi veličine. U nastavku su tablično prikazani traženi parametri svih pojedinih grupa.

Tablica 2: Traženi parametri regulatora K_R i T_I po terminima				
	A: (10:00-12:00)	B: (13:00-15:00)	C: (15:00-17:00)	D: (18:00-20:00)
K_R	1.83	0.92	0.55	2.75
$T_I[s]$	1.65	6.88	27.5	0.66

Parametri prikazani u tablici 2 dobili su se primjenom programskog alata *Matlab*.

c) Parametrizirati PI regulator minimizacijom ISE kriterija pri odzivu sustava na skokovitu promjenu poremećajne veličine;

Tražimo regulacijsko odstupanje u donjem području, uz $R(s) = 0$ i $Z(s) = \frac{1}{s}$

$$E_z(s) = \frac{Z(s)G_p(s)}{1 + G_o(s)}, \quad G_o(s) = G_R(s)G_p(s) \quad (16)$$

Regulacijsko odstupanje $E_z(s)$ je

$$E(s) = \frac{K_p}{T_p^3 s^4 + 3T_p^2 s^3 + 3T_p s^2 + (1 + K_p K_R)s + \frac{K_p K_R}{T_I}} \quad (17)$$

Koeficijenti c_k i d_k odrede se usporedbom dobivenog regulacijskog odstupanja s općim izrazom za regulacijsko odstupanje sustava 4. reda

$$E(s) = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + d_3 s^3 + d_4 s^4} \quad (18)$$

Koeficijenti su

$$c_0 = K_p, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0 \quad (19)$$

$$d_0 = \frac{K_p K_R}{T_I}, \quad d_1 = 1 + K_p K_R, \quad d_2 = 3T_p, \quad d_3 = 3T_p^2, \quad d_4 = T_p^3 \quad (20)$$

Na temelju dobivenih koeficijenata odredi se integralna kriterijska funkcija $I_{3,4}$ prema općem izrazu danom u nastavku

$$I_{3,4} = \frac{c_3^2(-d_0^2 d_3 + d_0 d_1 d_2) + (c_2^2 - 2c_1 c_3)d_0 d_1 d_4 + (c_1^2 - 2c_0 c_2)d_0 d_3 d_4 + c_0^2(-d_1 d_4^2 + d_2 d_3 d_4)}{2d_0 d_4(-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)} \quad (21)$$

Nakon što se pronađe integralna kriterijska funkcija, potrebno je odrediti parcijalne derivacije integralne funkcije $I_{3,4}$ po traženim parametrima K_R i T_I , te ih izjednačiti s nulom. Tako se dobije sustav od dvije jednačbe s dvije nepoznanice iz kojih se odrede traženi parametri

$$\frac{\partial I_{3,4}}{\partial K_R} = 0, \quad \frac{\partial I_{3,4}}{\partial T_I} = 0 \quad (22)$$

Prikaz integralne kriterijske funkcije i pripadnih parcijalnih derivacija izostavljen je radi veličine. U nastavku su tablično prikazani traženi parametri svih pojedinih grupa.

Tablica 3: Traženi parametri regulatora K_R i T_I po terminima				
	A: (10:00-12:00)	B: (13:00-15:00)	C: (15:00-17:00)	D: (18:00-20:00)
K_R	3.33	1.66	1.00	5.00
$T_I[s]$	1.50	6.25	25.0	0.60

Parametri prikazani u tablici 5 dobili su se primjenom programskog alata *Matlab*.

d) Parametrirati PI i idealni PID regulator za prikazani proces korištenjem Ziegler-Nicholsove metode ruba stabilnosti;

Prema Ziegler-Nicholsovoj metodi ruba stabilnosti, zadanom regulatoru gase se sva djelovanja osim proporcionalnog, pa je prijenosna funkcija regulatora

$$G_R(s) = K_R \quad (23)$$

Rub stabilnosti sustava određujemo primjenom Nyquistovog kriterija. Prema Nyquistu, sustav je na rubu stabilnosti kada vrijedi

$$|G_o(j\omega_\pi)| = 1 \quad (24)$$

gdje je ω_π frekvencija na kojoj je faza otvorenog kruga jednaka

$$\phi_o(\omega_\pi) = \pi[rad] \quad (25)$$

Prijenosna funkcija otvorenog kruga je

$$G_o(s) = G_R(s)G_p(s), \quad G_o(s) = \frac{K_p K_R}{(1 + T_p s)^3} \quad (26)$$

$$G_o(s) = \frac{K_p K_R}{T_p^3 s^3 + 3T_p^2 s^2 + 3T_p s + 1} \quad (27)$$

Frekvencijska karakteristika otvorenog kruga je

$$G_o(j\omega) = \frac{K_p K_R}{(1 - 3T_p^2 \omega^2) + j(3T_p \omega - T_p^3 \omega^3)} \quad (28)$$

Fazno-frekvencijska karakteristika otvorenog kruga na frekvenciji ω_π , uz $K_R > 0$ je

$$\phi_o(\omega_\pi) = -\arctan \frac{3T_p \omega_\pi - T_p^3 \omega_\pi^3}{1 - 3T_p^2 \omega_\pi^2} = \pi \quad (29)$$

Izraz za računanje frekvencije ω_π je

$$3T_p \omega_\pi - T_p^3 \omega_\pi^3 = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega_\pi = \frac{\sqrt{3}}{T_p} [s^{-1}] \quad (30)$$

Tablica 4: Iznos frekvencije ω_π po terminima

	A: (10:00-12:00)	B: (13:00-15:00)	C: (15:00-17:00)	D: (18:00-20:00)
$\omega_\pi [s^{-1}]$	5.7735	1.3856	0.3464	14.4338

Period trajnih oscilacija T_{kr} računa se prema relaciji

$$T_{kr} = \frac{2\pi}{\omega_\pi} \quad (31)$$

Kritično pojačanje sustava K_{kr} dobije se iz uvjeta prikazanog relacijom (24)

$$|G_o(\omega_\pi)| = 1 \quad \longrightarrow \quad K_{kr} := K_R = \left| \frac{1}{K_p} (1 - 3T_p^2 \omega_\pi^2) \right| = \frac{8}{K_p} \quad (32)$$

U nastavku su tablično prikazane vrijednosti kritičnog pojačanja K_{kr} i perioda trajnih oscilacija T_{kr}

Tablica 5: Kritično pojačanje K_{kr} i period trajnih oscilacija T_{kr} po terminima

	A: (10:00-12:00)	B: (13:00-15:00)	C: (15:00-17:00)	D: (18:00-20:00)
K_{kr}	5.3333	2.6667	1.6000	8.0000
$T_{kr} [s]$	1.0883	4.5345	18.138	0.4353

Parametri regulatora odrede se prema Ziegler-Nicholsovoj tablici metode ruba stabilnosti (Tablica 6).

Tablica 6: Ziegler-Nicholsova tablica metode ruba stabilnosti

Tip regulatora	Vrijednost parametra		
	K_R	T_I	T_D
P	$0.5K_{kr}$	—	—
PI	$0.45K_{kr}$	$0.85T_{kr}$	—
PID	$0.6K_{kr}$	$0.5T_{kr}$	$0.12T_{kr}$

Parametri traženog PI i PID regulatora za svaku pojedinu grupu, prikazani su u tablici 7.

Tablica 7: Traženi parametri PI i idealnog PID regulatora po terminima

(a) Parametri PI regulatora

	A: (10:00-12:00)	B: (13:00-15:00)	C: (15:00-17:00)	D: (18:00-20:00)
K_R	2.4000	1.2000	0.7200	3.6000
$T_I [s]$	0.9250	3.8543	15.4173	0.3700

(b) Parametri idealnog PID regulatora

	A: (10:00-12:00)	B: (13:00-15:00)	C: (15:00-17:00)	D: (18:00-20:00)
K_R	3.2000	1.6000	0.9600	4.8000
$T_I [s]$	0.5441	2.2672	9.0690	0.2177
$T_D [s]$	0.1306	0.5441	2.1766	0.0522

e) Diskretizirati idealni PID regulator parametriran pod d) korištenjem Tustinova postupka, uz vrijeme diskretizacije odabrano na temelju frekvencijskih karakteristika otvorenog kontinuiranog regulacijskog kruga. Navedene frekvencijske karakteristike odredit crtanjem Bodeovog dijagrama korištenjem aproksimacije pravcima;

Prijenosna funkcija idealnog PID regulatora parametriranog pod d) je

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (33)$$

Prijenosna funkcija otvorenog kruga je

$$G_o(s) = G_R(s)G_p(s) \quad (34)$$

Vrijeme uzorkovanja određuje se prema sljedećoj relaciji

$$T = (0.17 \div 0.34) \frac{1}{\omega_c} [s] \quad (35)$$

Vrijeme uzorkovanja odabrat ćemo tako da se nalazi na sredini dopuštenog područja

$$T = \frac{255}{\omega_c} [ms] \quad (36)$$

Presječne frekvencije ω_c i pripadna vremena uzorkovanja prikazani su u tablici u nastavku

Tablica 8: Presječne frekvencije ω_c i pripadna vremena uzorkovanja T po terminima

	A: (10:00-12:00)	B: (13:00-15:00)	C: (15:00-17:00)	D: (18:00-20:00)
$\omega_c [s^{-1}]$	4.5718	1.0972	0.2743	11.4295
$T [ms]$	55.777	232.40	929.61	22.311

Kontinuirani PID regulator diskretizira se primjenom Tustinovog supstitucije (trapezne integracije)

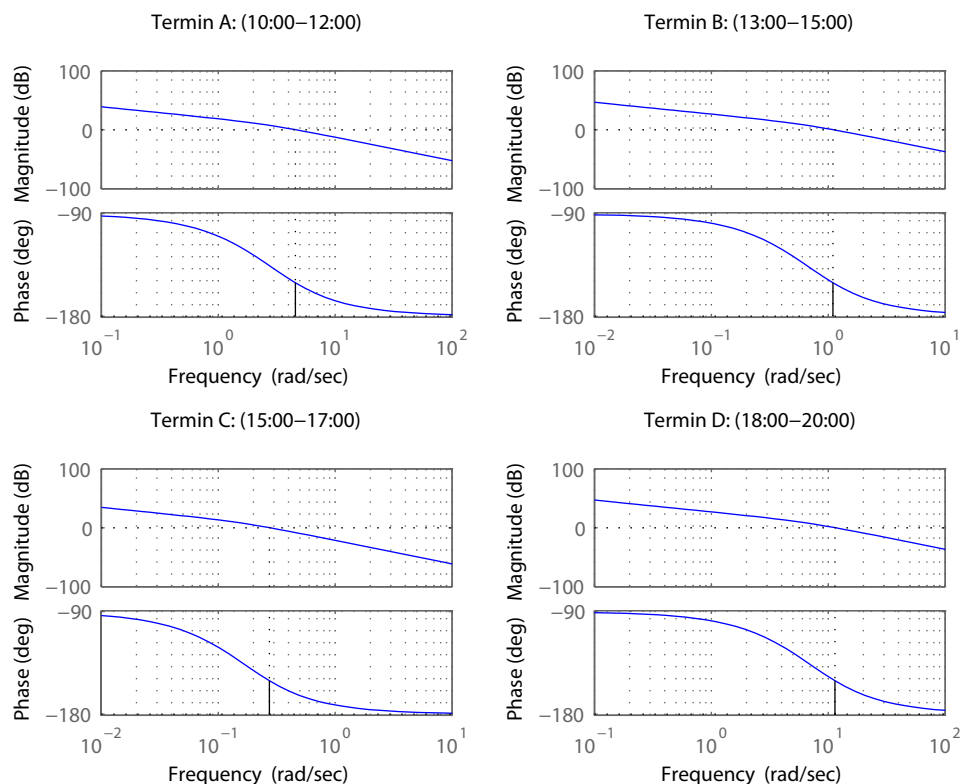
$$G_R(z) = G_R(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}} \quad (37)$$

U nastavku su prikazani odgovarajući diskretni PID regulatora po terminima.

Tablica 9: Diskretni PID regulatori po terminima

	Diskretni PID regulator $G_R(z)$
Termin A: (10:00-12:00):	$G_R(z) = \frac{18.35z^2 - 29.64z + 11.95}{z^2 - 1}$
Termin B: (13:00-15:00):	$G_R(z) = \frac{9.174z^2 - 14.82z + 5.974}{z^2 - 1}$
Termin C: (15:00-17:00):	$G_R(z) = \frac{5.505z^2 - 8.892z + 3.585}{z^2 - 1}$
Termin D: (18:00-20:00):	$G_R(z) = \frac{27.52z^2 - 44.46z + 17.92}{z^2 - 1}$

Bodeovi dijagrami zadanih kontinuiranih sustava, uz primjenu PID regulatora, prikazani su na slici 3. Pritom je bitno uočiti kako su prikazani dijagrami dobiveni primjenom Matlaba, te nisu prikazani aproksimacijom pravcima.



Slika 3: Bodeovi dijagrami zadanog kontinuiranog sustava po terminima

f) Odrediti rekurzivnu jednadžbu PID regulatora diskretiziranog pod e);

Pripadne rekurzivane jednadžbe određuju se iz općeg oblika prijenosne funkcije regulatora

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} \quad (38)$$

gdje je u upravljački signal, a e regulacijsko odstupanje.

Ako je \mathcal{Z} transformaciju vremenskog signala $x(k)$ označimo s $X(z)$, tada je (Z) transformacija tog isto zakašnjenog signala

$$\{x(k - m)\} = X(z)z^{-m} \quad (39)$$

U nastavku su prikazani odgovarajući rekurzivni algoritmi po terminima.

Tablica 10: Rekurzivni algoritmi PID regulator po terminima

Diskretni PID regulator $G_R(z)$	
Termin A: (10:00-12:00):	$u(k) = 18.35e(k) - 29.64e(k - 1) + 11.95e(k - 2) + u(k - 2)$
Termin B: (13:00-15:00):	$u(k) = 9.174e(k) - 14.82e(k - 1) + 5.974e(k - 2) + u(k - 2)$
Termin C: (15:00-17:00):	$u(k) = 5.505e(k) - 8.892e(k - 1) + 3.585e(k - 2) + u(k - 2)$
Termin D: (18:00-20:00):	$u(k) = 27.52e(k) - 44.46e(k - 1) + 17.92e(k - 2) + u(k - 2)$