Završni ispit

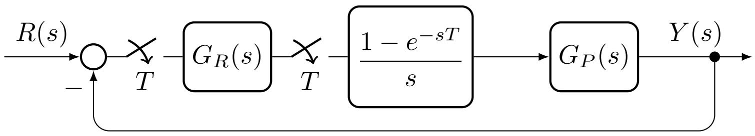
23. siječnja 2017.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

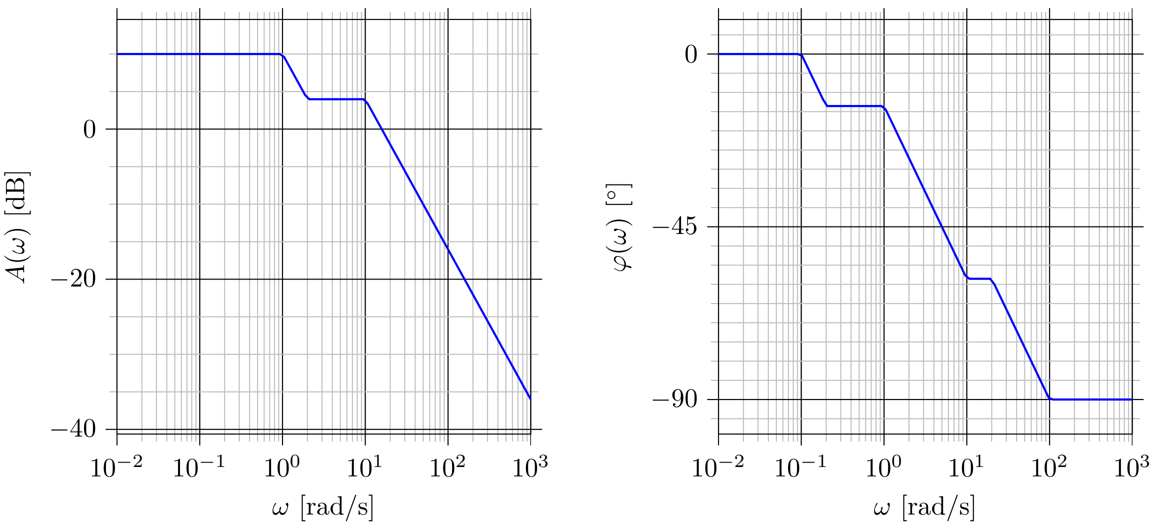
Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (18 bodova)

U sustavu upravljanja prikazanom slikom 1 upravlja se procesom $G_P(s)$. Za upravljanje se koristi diskretni regulator oblika $G_R(z) = \mathcal{Z}\{G_R(s)\} = K_R \frac{z}{z-1}$.



Slika 1: Diskretni sustav upravljanja.



Slika 2: Bodeov dijagram procesa $G_P(s)$ uz zadatak 1.

a) *(3 boda)* Odredite prijenosnu funkciju procesa $G_P(s)$ koji je zadan Bodeovim dijagramom prikazanim na slici 2.

b) *(3 boda)* Neka je prijenosna funkcija procesa zadana s $G_P(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+10)}$, odredite diskretiziranu prijenosnu funkciju procesa $G_P(z)$ korištenjem odgovarajućeg postupka diskretizacije uz vrijeme uzorkovanja $T = 0.05$ s.

c) *(4 boda)* Nacrtajte Bodeov dijagram (amplitudnu i faznu frekvencijsku karakteristiku) otvorenog kruga diskretnoga sustava upravljanja korištenjem aproksimacije pravcima ako je prijenosna funkcija procesa dana sa $G_P(z) = \frac{0.05}{z-0.9}$ i zadano je $K_R = 1$.

d) *(3 boda)* Koristeći jednadžbe pravaca koje aproksimiraju Bodeov dijagram odredite iznos pojačanja K_R za koji se ostvaruje fazno osiguranje sustava $\gamma = 50°$.

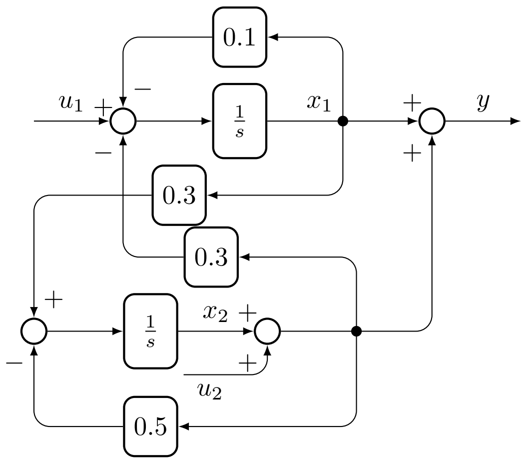
e) *(5 bodova)* Korištenjem Jurijevog kriterija odredite za koje vrijednosti pojačanja K_R je diskretni sustav upravljanja stabilan ako je prijenosna funkcija procesa dana sa $G_P(z) = \frac{0.05z-0.05}{z^2-1.5z+0.5}$.

2. zadatak (7 bodova)

Na slici 3 prikazan je blokovski dijagram sustava s ulaznim signalima u_1 i u_2, varijablama stanja x_1 i x_2 te izlaznim signalom y.

a) *(3 boda)* Iz blokovskog dijagrama sustava odredite matrice A, B, C i D iz opisa sustava u prostoru stanja.

b) *(4 boda)* Poznati su iznosi upravljačkih signala $u_1 = 1$ i $u_2 = 0.5$. Odredite iznose varijabli stanja u ustaljenom stanju.



Slika 3: Blokovski dijagram sustava.

3. zadatak (12 bodova)

Zadana je prijenosna funkcija otvorenog kruga

$$G_o(s) = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s} \frac{1}{0.1s^2 + 0.7s + 1}. \tag{1}$$

Procesom se upravlja u zatvorenom krugu s jediničnom negativnom povratnom vezom.

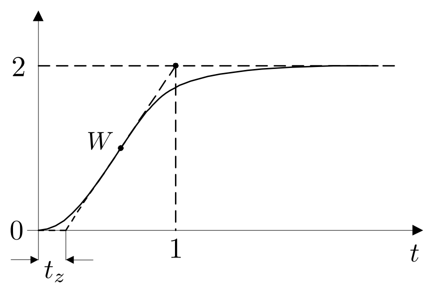
a) *(6 bodova)* Korištenjem Hurwitzog kriterija odredite prostor parametara regulatora (K_R, T_I) za koji je regulacijski krug stabilan i potom skicirajte pripadajuće područje stabilnosti.

b) *(3 boda)* Odredite iznos presječne frekvencije otvorenog kruga ω_c uz $K_R = 1$ i $T_I = 1$.

c) *(3 boda)* Neka je iznos integracijske vremenske konstante jednak iznosu najveće vremenske konstante procesa, odredite najveći iznos parametra K_R uz kojeg je prijelazna funkcija zatvorenog kruga aperiodska.

4. zadatak (10 bodova)

Na slici 4 prikazana je prijelazna funkcija procesa s tangentom u točki infleksije W. Poznato je $t_z = 0.2$ s.



Slika 4: Prijelazna funkcija procesa (puna linija) i tangenta u točki infleksije W (isprekidana linija).

a) *(4 boda)* Odredite prijenosnu funkciju pojednostavljenog $\mathrm{PT_1T_t}$ matematičkog modela $G_p(s)$ takvog da jednadžba tangente njegove prijelazne funkcije $h_p(t)$ u trenutku t_z^+ bude jednaka jednadžbi tangente prijelazne funkcije procesa u točki W. Pritom vrijedi $h_p(t_z) = 0$. *Napomena*: Vrijedi $t_z^+ = t_z + 0^+$.

b) *(3 boda)* Korištenjem Ziegler-Nicholsovog postupka prijelazne funkcije odredite parametre PI regulatora za upravljanje procesom u zatvorenom krugu upravljanja.

c) *(3 boda)* Možete li primijeniti jedan od Ziegler-Nicholsovih postupaka sinteze regulatora ako proces nije stabilan? Objasnite.

RJEŠENJA:

Zadatak 1

a) $G_P(s) = 3.16\frac{1+\frac{s}{2}}{(1+s)(1+\frac{s}{10})} = 15.81\frac{s+2}{(s+1)(s+10)}$

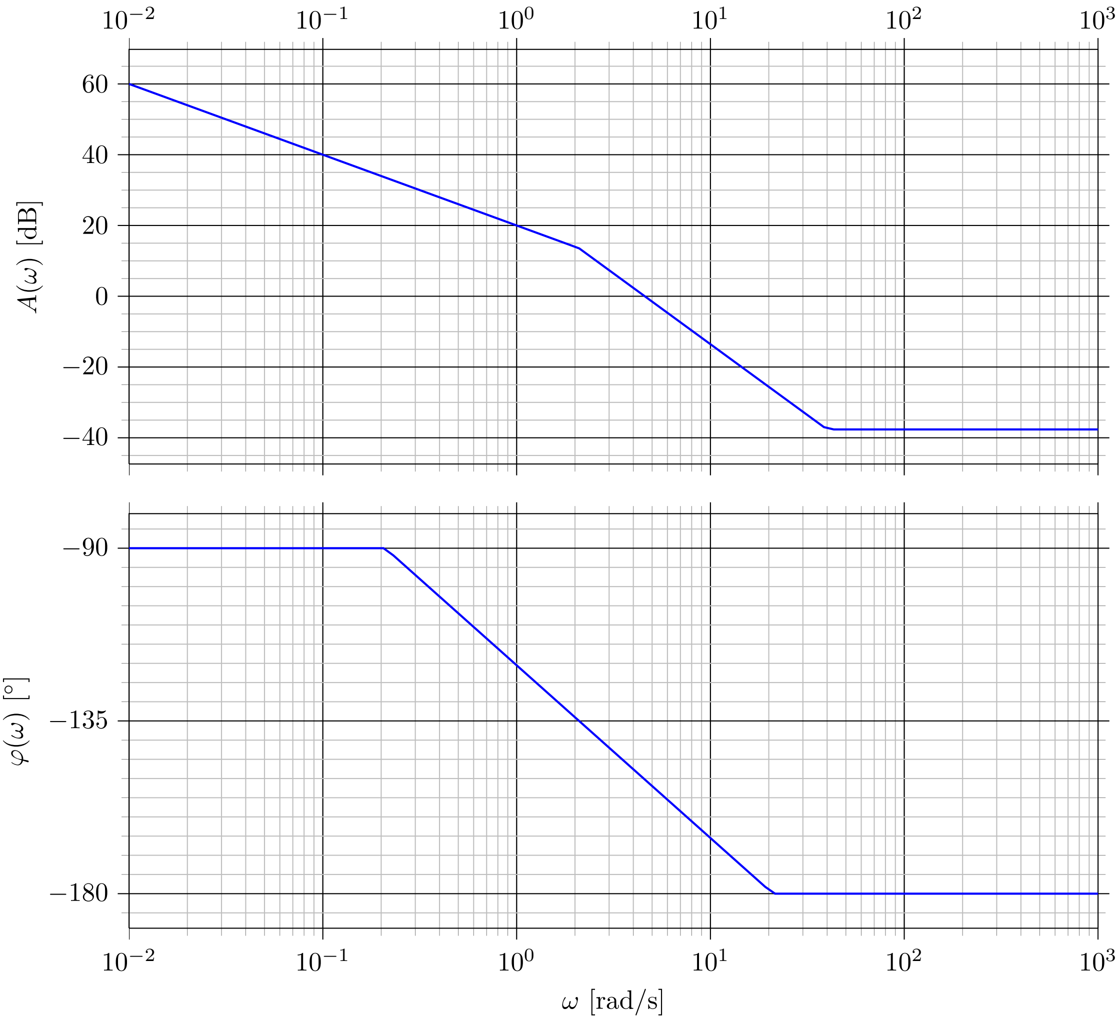
b) Primjenom ZOH diskretizacije uz vrijeme uzorkovanja $T = 0.05$ s dobiva se: $G(z) = \frac{0.04z-0.03}{z^2-1.558z+0.577}$

c) Kako bismo nacrtali aproksimaciju Bodeovim pravcima diskretnoga sustava potrebno je primijeniti modificiranu bilinearnu transformaciju.

$$G_o(z) = \frac{z}{z-1}\frac{0.05}{z-0.09} = \frac{0.05z}{z^2-1.9z+0.9}$$

$$G_o(\Omega) = G_o(z)\big|_{z=\frac{1+\Omega\frac{T}{2}}{1-\Omega\frac{T}{2}}} = 10\frac{(1-\Omega\frac{1}{40})(1+\Omega\frac{1}{40})}{\Omega(1+\Omega\frac{1}{2.1})}$$

Aproksimacija Bodeovog dijagrama pravcima je prikazana na slici 5.



Slika 5: Bodeov dijagram iz podzataka c)

d) Tražimo frekvenciju na faznoj karkteristici gdje fazno kašnjenje iznosi $180° - \gamma = 130°$.

$$10^x = 0.21 \Rightarrow x = -0.6778$$

Iz točke $(-0.6778, -90)$ na faznoj karakteristici slijedi:

$$\begin{aligned} y + 90 &= -45(x + 0.6778) \\ y &= -45x - 120.501 \\ \text{Za y uvrstimo -130, iz čega slijedi} \\ x &= 0.211 \end{aligned}$$

Iz točke $(0, 20)$ na amplitudnoj karakteristici slijedi:

$$\begin{aligned} y - 20 &= -20x \\ y &= -20x + 20 \\ \text{Za x uvrstimo 0.211, iz čega slijedi} \\ y &= 15.78 \end{aligned}$$

Kako bi ostvarili željeno fazno osiguranje moramo spustiti amplitudnu karakteristiku za 15.78 dB.

$$\begin{aligned} -15.78 &= 20 \log K_R \\ K_R &= 0.16 \end{aligned}$$

e) Kako bi primijenili Jurijev kriterij potrebno je pronaći karakterističnu funkciju $f(z)$ zatvorenoga kruga upravljanja $G_z(z) = \frac{G_o(z)}{1+G_o(z)}$.

$$\begin{aligned} G_o(z) &= K_R \frac{z}{z-1} \frac{0.05(z-1)}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{0.05K_R z}{z^2 - 1.5z + 0.5} \\ f(z) &= 1 + G_o(z) = 0 \\ f(z) &= z^2 + (0.05K_R - 1.5)z + 0.5 \end{aligned}$$

Uvjeti:
$f(1) > 0$

$$\begin{aligned} 1 + 0.05K_R - 1.5 + 0.5 &> 0 \\ 0.05K_R &> 0 \\ K_R &> 0 \end{aligned}$$

$(-1)^n f(-1) > 0$

$$\begin{aligned} 1 - 0.05K_R - 1.5 + 0.5 &> 0 \\ -0.05K_R &> -3 \\ K_R &< 60 \end{aligned}$$

$|a_0| < |a_2| \Rightarrow 0.5 < 1$

Sustav je stabilan za $K_R \in (0, 60)$.

Zadatak 2

a) Iz blokovskog dijagrama slijede diferencijalne jednadžbe prvog reda koje opisuju dinamiku varijabli stanja:

$$\dot{x}_1 = -0.1x_1 - 0.3x_2 + u_1 - 0.3u_2,$$

$$\dot{x}_2 = 0.3x_1 - 0.5x_2 - 0.5u_2,$$

dok je izlazna jednadžba definirana s

$$y = x_1 + x_2 + u_2.$$

Možemo odrediti matrice sustava u prostoru stanja:

$$A = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.3 \\ 0.3 & -0.5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & -0.3 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \; 1] \,, \; D = [0 \; 1] \,.$$

b) U ustaljenom stanju vrijedi $\dot{x}_\infty = [0; 0]$ pa se iznos varijabli stanja dobije rješavanjem 2 jednadžbe s 2 nepoznanice. Rješavanjem matrične jednadžbe sustava u prostoru stanja uz $u_\infty = [1; 0.5]$ i $\dot{x}_\infty = [0; 0]$ slijedi:

$$x_\infty = -A^{-1}Bu_\infty = \begin{bmatrix} 3.5714 \\ 1.6429 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3

a) Karakteristični polinom zatvorenog kruga je

$$P(s) = 0.1s^3 + 0.7s^2 + (1 + K_R)s + \frac{K_R}{T_I}$$

- $K_R > -1$, $\frac{K_R}{T_I} > 0 \rightarrow K_R, T_I > 0$ odnosno $K_R, T_I < 0$.
- Iz drugog uvjeta slijedi

$$K_R \left(0.7 - \frac{0.1}{T_I}\right) > -0.7$$

što je zadovoljeno ako:

I)

$$K_R < \frac{-0.7}{0.7 - \frac{0.1}{T_I}} \text{ i } 0 < T_I < \frac{1}{7},$$

II)

$$K_R > \frac{-0.7}{0.7 - \frac{0.1}{T_I}} \text{ i } (T_I > \frac{1}{7} \text{ ili } T_I < 0).$$

Prostor parametara za koje je sustav stabilan prikazan je na slici 6. Priznavala su se i djelomična rješenja u kojima je razmatrana stabilnost uz uvjet $T_I > 0$.

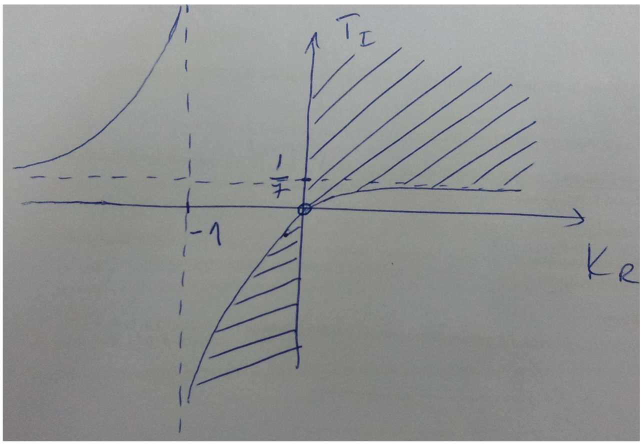
b) Presječna frekvencija slijedi iz jednadžbe $|G_o(j\omega_c)| = 1$, odnosno uzima se realno i pozitivno rješenje sljedećeg polinoma:

$$\boxed{0.01\omega^6 + 0.29\omega^4 - 1 = 0.}$$

(Presječna frekvencija jednaka je $\omega_c = 1.3423$ rad/s)

c) Integracijska vremenska konstanta je $T_I = 0.5$ pa dobivamo za prijenosnu funkciju otvorenog kruga

$$G_o(s) = \frac{K_R}{0.1s^2 + 0.5s}.$$



Slika 6: Prostor parametara PI regulatora za koje je zatvoreni krug upravljanja stabilan.

Karakteristični polinom zatvorenog kruga je

$$P(s) = 0.1s^2 + 0.5s + K_R.$$

Prijelazna funkcija zatvorenog kruga bit će aperiodska ako su nultočke karakterističnog polinoma realne i negativne (čitaj polovi zatvorenog kruga su realni i negativni). Iznos najvećeg pojačanja koji zadovoljava uvjet dobije se izjednačavanjem diskriminante karakterističnog polinoma s 0, a rezultat je $K_R = 0.625$ (pripadajući polovi su $s_{p_{1,2}} = -2.5$).

Zadatak 4

a) Prijenosna funkcija $\mathrm{PT_1T_t}$ člana je

$$G(s) = e^{-sT_d}\frac{K_s}{Ts+1}.$$

- Postupak 1: Do trenutka t_z prijelazna funkcija modela je 0 pa iz toga zaključujemo $T_d = t_z = 0.2$. Iz odziva također možemo odrediti iznos koeficijenta pojačanja modela $K_s = 2$. Uvrštavanjem vremena kašnjenja t_z slijedi diferencijalna jednadžba modela

$$T\dot{y}(t) + y(t) = K_s u(t - t_z).$$

U trenutku $t = t_z^+$ nagib tangente prijelazne funkcije modela dan je jednadžbom

$$T\dot{y}(t_z^+) = 2, \tag{2}$$

a nagib tangente prijelazne funkcije procesa je

$$\dot{y}_p(t_z^+) = \frac{2}{0.8}. \tag{3}$$

Izjednačavanjem jednadbžbi (2) i (3) slijedi iznos vremenske konstante modela

$$T = 0.8.$$

- Postupak 2: Prijelazna funkcija modela zadana je s

$$H(s) = \frac{1}{s}e^{-sT_d}\frac{K_s}{Ts+1},$$

odnosno možemo pisati

$$H(s)e^{sT_d} = \frac{1}{s}\frac{K_s}{Ts+1}. \tag{4}$$

S lijeve strane jednadžbe (4) imamo u vremenskoj domeni $h(t+T_d)$. Primijetimo kako vrijedi $T_d = t_z$ i primjenom teorema o početnoj vrijednosti dobivamo

$$\dot{h}(t_z^+) = \lim_{s\to\infty} s^2 \frac{1}{s} \frac{K_s}{Ts+1} = \frac{K_s}{T}.$$

Iz stacionarnog stanja prijelazne funkcije procesa možemo očitati iznos statičkog pojačanja PT_1 člana $K_s = 2$ pa izjednačavanjem nagiba tangente modela s tangentom procesa

$$\frac{2}{T} = \frac{2}{0.8}$$

slijedi iznos vremenske konstante modela $T = 0.8$.

b) Iz odziva možemo očitati: $t_a = 0.8$, $t_z = 0.2$ i $K_s = 2$ pa prema ZN preporukama slijede iznosi parametara regulatora

$$K_R = 0.9\frac{t_a}{t_z K_s} = 1.8,$$
$$T_I = 3.33 t_z = 0.67.$$

c) Da. Moguće je primijeniti ZN postupak ruba stabilnosti ako se sustav može stabilizirati u zatvorenom krugu upravljanja korištenjem P regulatora.