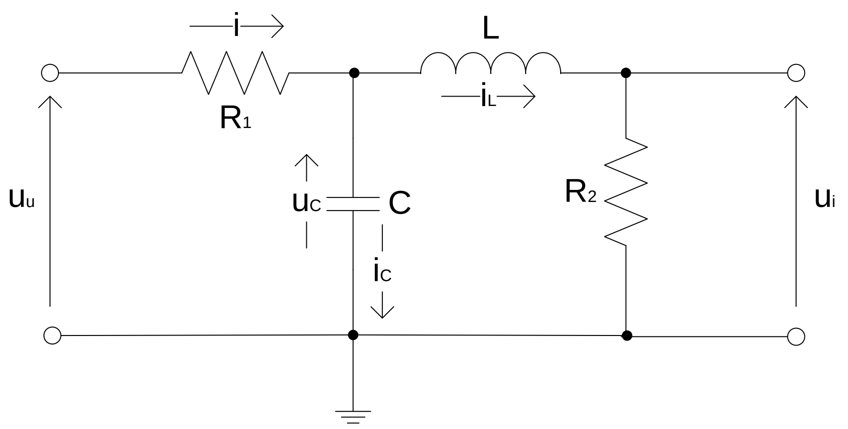
1. Domaća zadaća – Grupa A

ak.god. 2009./2010.

1. Za električni krug prikazan slikom 1.1. potrebno je:



Slika 1.1. Shema električnog sustava sa označenim smjerovima struja

a) Napisati diferencijalnu jednadžbu koja opisuje ovisnost izlaznog napona $u_i(t)$ o ulaznom naponu $u_u(t)$. Jednadžbu treba svesti na oblik u kojem je koeficijent uz $u_i(t)$ jednak 1.

$$u_u = u_{R1} + u_{par}, \qquad u_{R1} = iR_1, \qquad u_{par} = u_L + u_{R2} = u_C$$

$$u_{R2} = u_i = i_L R_2, \qquad i_L = \frac{1}{R_2}u_i, \qquad \frac{d}{dt}i_L = \frac{1}{R_2}\frac{d}{dt}u_i$$

$$u_L = L\frac{d}{dt}i_L, \qquad u_L = \frac{L}{R_2}\frac{d}{dt}u_i, \qquad u_{par} = \frac{L}{R_2}\frac{d}{dt}u_i + u_i$$

$$i = i_C + i_L, \qquad u_C = u_{par} = \frac{L}{R_2}\frac{d}{dt}u_i + u_i = \frac{1}{C}\int i_C d\tau\,, \qquad i_C = \frac{CL}{R_2}\frac{d^2}{dt^2}u_i + C\frac{d}{dt}u_i$$

$$i = \frac{CL}{R_2}\frac{d^2}{dt^2}u_i + C\frac{d}{dt}u_i + \frac{1}{R_2}u_i, \qquad u_{R1} = \frac{R_1CL}{R_2}\frac{d^2}{dt^2}u_i + R_1C\frac{d}{dt}u_i + \frac{R_1}{R_2}u_i$$

Konačno, jednadžba koja opisuje ulazno-izlaznu ovisnost sustava je

$$u_u = \frac{R_1CL}{R_2}\frac{d^2}{dt^2}u_i + R_1C\frac{d}{dt}u_i + \frac{R_1}{R_2}u_i + \frac{L}{R_2}\frac{d}{dt}u_i + u_i$$

$$u_u = \frac{R_1CL}{R_2}\frac{d^2}{dt^2}u_i + \left(R_1C + \frac{L}{R_2}\right)\frac{d}{dt}u_i + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)u_i$$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2}u_u = \frac{R_1CL}{R_1 + R_2}\frac{d^2}{dt^2}u_i + \frac{R_1R_2C + L}{R_1 + R_2}\frac{d}{dt}u_i + u_i$$

b) Odrediti matrice **A**, **B**, **C** i **D** iz zapisa sustava po varijablama stanja

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

pri čemu su vektori stanja, ulaza i izlaza definirani kao: $x = [u_C \quad i_L]^T$, $u = [u_u]$, $y = [u_i]$.

$$u_i = R_2 i_L, \qquad u_C = \frac{1}{C}\int i_C d\tau\,, \qquad \dot{u_C} = \frac{1}{C} i_C, \qquad i_C = i - i_L = \frac{u_u - u_{par}}{R_1} - i_L$$

$$u_{par} = u_C, \qquad i_C = -\frac{1}{R_1}u_C - i_L + \frac{1}{R_1}u_u, \qquad \dot{u_C} = -\frac{1}{CR_1}u_C - \frac{1}{C}i_L + \frac{1}{CR_1}u_u$$

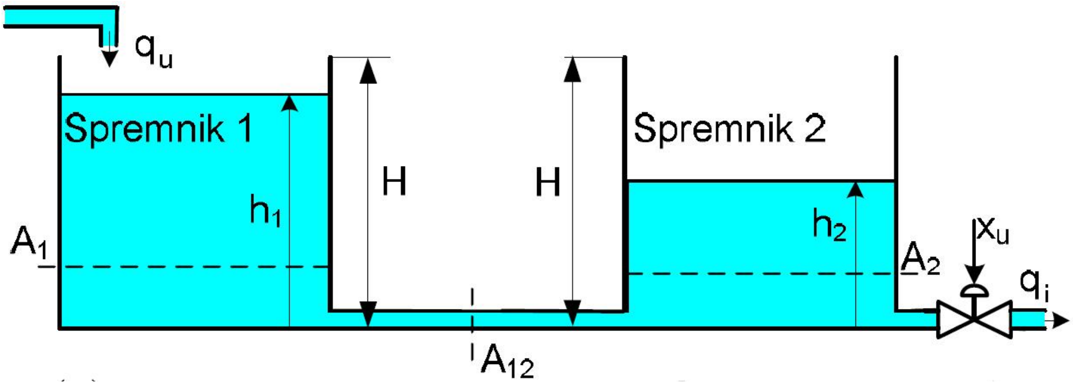
$$u_L = L\frac{d}{dt}i_L, \qquad \frac{d}{dt}i_L = \frac{1}{L}u_L, \qquad u_L = u_{par} - u_i = u_C - R_2 i_L, \qquad \frac{d}{dt}i_L = \frac{1}{L}u_C - \frac{R_2}{L}i_L$$

Konačno, zapis sustava u matričnom obliku je

$$\begin{bmatrix} \dot{u_C} \\ \dot{i_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR_1} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{CR_1} \\ 0 \end{bmatrix} u_u$$

$$[u_i] = [0 \quad R_2] \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + [0] u_u$$

2. Na slici 1.2. prikazana je principna shema skladištenja fluida. Razina fluida u spremnicima regulira se promjenom otvorenosti ventila $x_u(t)$ [%] koja može poprimiti



Slika 1.2. Shema sustava skladištenja fluida

vrijednosti između 0% i 100%. Karakteristika ventila opisana je izrazom

$$q(t) = A_v\sqrt{\rho}\sqrt{2\Delta p} \cdot \frac{x_u}{100\%}$$

pri čemu je:

x_u	- otvorenost ventila [%],
A_v	- poprečni presjek potpuno otvorenog ventila $[m^2]$,
Δp	- razlika tlakova na krajevima ventila $[Pa]$,
ρ	- gustoća fluida $[kg/m^3]$,
q	- maseni protok kroz ventil $[kg/s]$.

Parametri sustava su:

$q_u = Q_{u0} = 40\ kg/s$	- ulazni maseni protok u prvi spremnik,
$A_1 = 4\,m^2$	- površina pop. presjeka spremnika 1,
$A_2 = 4\,m^2$	- površina pop. presjeka spremnika 2,
$A_{12} = 0.008\,m^2$	- površina pop. presjeka spojne cijevi između spremnika,
$A_{i1} = 0.001\,m^2$	- površina pop. presjeka izlazne cijevi prvog spremnika,
$A_{i2} = 0.004\,m^2$	- površina pop. presjeka izlazne cijevi drugog spremnika,
$\rho = 1000\,\frac{kg}{m^3}$	- gustoća fluida,
$A_v = 0.01\,m^2$	- površina pop. presjeka potpuno otvorenog ventila,
$H = 10\,m$	- visina spremnika 1 i spremnika 2,
$g = 9.81\,\frac{m}{s^2}$	- ubrzanje sile teže.

Napomena. Prilikom računanja izlaznih protoka iz spremnika može se uzeti da je $A_{i1}, A_{i2} \ll A_1$ i $A_{i1}, A_{i2} \ll A_2$.

Potrebno je:

a) Odrediti diferencijalne jednadžbe koje opisuju ponašanje razine fluida u spremnicima 1 i 2.

Spremnik 1.

$$q_u - q_{12} = A_1 \rho \frac{dh_1}{dt}, \qquad q_{12} = A_{12}\rho\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1\rho} q_u - \frac{A_{12}\sqrt{2g}}{A_1}\sqrt{(h_1 - h_2)}$$

Spremnik 2.

$$q_{12} - q_i = A_2 \rho \frac{dh_2}{dt}, \qquad q_i = A_v\sqrt{\rho}\sqrt{2\Delta p}\cdot\frac{x_u}{100\%}$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (p_a + \rho g h_2) - p_a = \rho g h_2, \qquad q_i = A_v \rho\sqrt{2gh_2}\cdot\frac{x_u}{100\%}$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{A_{12}\sqrt{2g}}{A_2}\sqrt{(h_1 - h_2)} - \frac{A_v\sqrt{2g}}{A_2}\sqrt{h_2}\cdot\frac{x_u}{100\%}$$

b) Odrediti funkcijsku ovisnost stacionarne vrijednosti visine fluida u spremniku 1, H_{10}, o stacionarnoj vrijednosti otvorenosti ventila X_{u0}. Za koju stacionarnu vrijednost otvorenosti ventila počinje prelijevanje vode iz spremnika 1?

Stacionarna vrijednost: $\frac{dh_1}{dt} = \frac{dh_2}{dt} = 0$

$$\frac{1}{A_1\rho} q_{u0} - \frac{A_{12}\sqrt{2g}}{A_1}\sqrt{(h_{10} - h_{20})} = 0$$

$$\frac{A_{12}\sqrt{2g}}{A_2}\sqrt{(h_{10} - h_{20})} - \frac{A_v\sqrt{2g}}{A_2}\sqrt{h_{20}}\cdot\frac{x_{u0}}{100\%} = 0$$

Vrijedi relacija

$$h_{10} = \frac{B}{1 - \frac{1}{A}}\ [m]$$

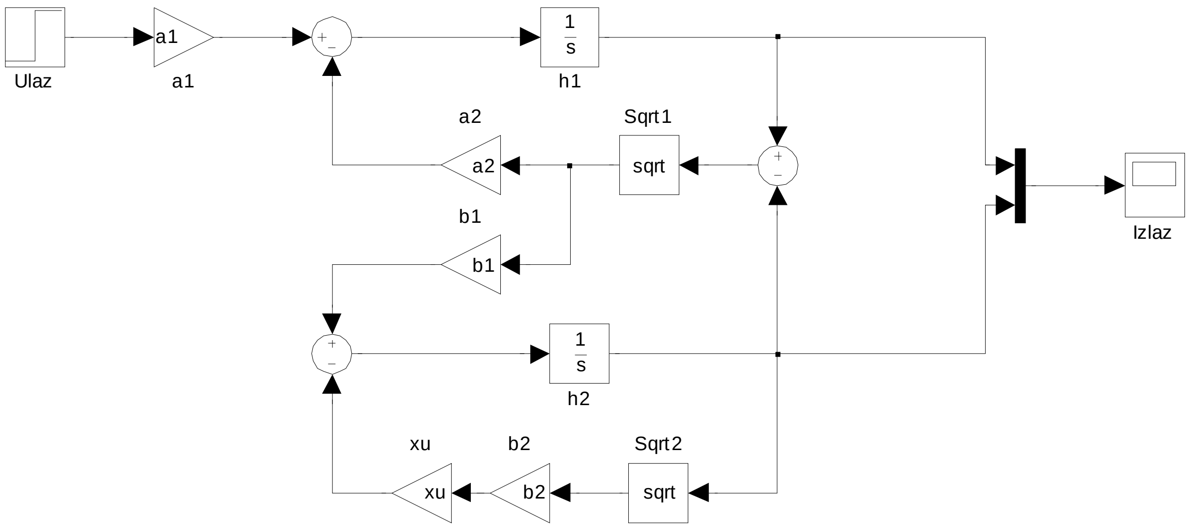
pri čemu je

$$A = \left[1 + \left(\frac{A_v \frac{x_{u0}}{100\%}}{A_{12}}\right)^2\right], \qquad B = \left(\frac{q_{u0}}{\rho\sqrt{2g}A_{12}}\right)^2$$

Za visinu stupca vode prvog spremnika $h_{10} = 10\ m$ vrijedi

$$x_{u0} = 30.57089079\ \%$$

c) Nacrtati blokovsku shemu sustava skladištenja fluida.



Slika 1.3. Blokovska shema sustava skladištenja fluida

Tumač oznaka pojedinih pojačala:

$$a1 = \frac{1}{A_1 \rho}, \qquad a2 = \frac{A_{12}\sqrt{2g}}{A_1}, \qquad b1 = \frac{A_{12}\sqrt{2g}}{A_2}, \qquad b2 = \frac{A_v\sqrt{2g}}{100A_2}$$