Pismeni ispit

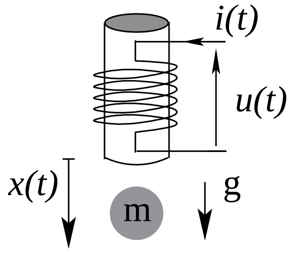
20. ožujka 2009.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (25 bodova)

Položaj magnetski vodljive kuglice se regulira pomoću elektromagnetskog polja (slika 1).



Slika 1: Sustav regulacije položaja magnetske kuglice

Induktivitet zavojnice je ovisan o udaljenosti kuglice i ta ovisnost se može opisati sljedećim izrazom:

$$L(x) = 2\lambda/x \tag{1}$$

Elektromagnetska sila koja djeluje na kuglicu je opisana sljedećom relacijom:

$$F = -\frac{\lambda i^2}{x^2} \tag{2}$$

Newton-ov zakon:

$$m\ddot{x} = mg + F = mg - \frac{\lambda i^2}{x^2} \tag{3}$$

Faraday-ov zakon:

$$u = Ri + \frac{d(L(x)i)}{dt} = Ri + L'(x)i\frac{dx}{dt} + L(x)\frac{di}{dt} = Ri - \frac{2\lambda i}{x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{2\lambda}{x}\frac{di}{dt} \tag{4}$$

Potrebno je:

a) prikazati sustav u prostoru stanja tj. u obliku:

$$\underline{\dot{x}} = f\left(\underline{x}, \underline{u}\right) \tag{5}$$

pretpostavljajući pritom sljedeće varijable stanja: $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$ i $x_3 = i$.

b) nacrtati nelinearnu blokovsku shemu,

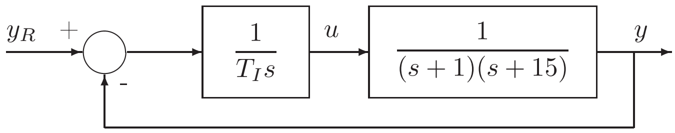
c) linearizirati sustav oko radne točke $x_0 = 700\,[\mu m]$ te nacrtati lineariziranu blokovsku shemu.

Zadano je: $\lambda = 5 \cdot 10^{-6}\left[Nm^2A^{-2}\right]$,$R = 1\,[\Omega]$,$m = 0.2\,[kg]$,$g = 9.81\,\left[ms^{-2}\right]$.

2. zadatak (25 bodova)

Na slici 2 prikazan je regulacijski krug koji se sastoji od procesa (PT_2 član) i regulatora s integralnim djelovanjem (I regulator). Vremenska konstanta regulatora je T_I.

a) približno odrediti prirodnu frekvenciju neprigušenih oscilacija ω_n i relativni koeficijent prigušenja ζ zatvorenog regulacijskog kruga, primjenjujući aproksimaciju s obzirom na položaj polova otvorenog kruga,



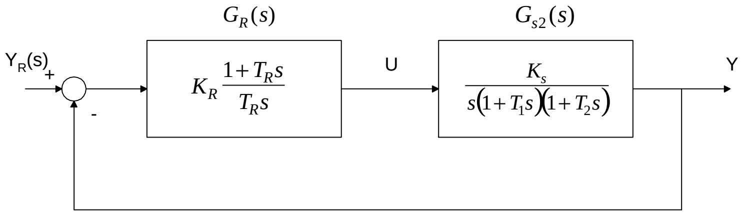
Slika 2: Regulacijski krug.

b) odrediti T_I uz uvjet da je $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

c) uz regulacijski krug i regulator određen prema b) nacrtati Bodeov dijagram $G_O(j\omega)$.

3. zadatak (25 bodova)

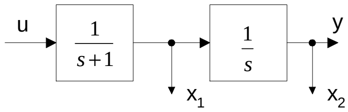
Za regulacijski krug prema slici 3 treba projektirati PI regulator postupkom prema Ziegler-Nicholsu dovođenjem sustava na rub stabilnosti. Parametri procesa su: $K_s = 1$ [s^{-1}], $T_1 = 0.5$ [s], $T_2 = 0.1$ [s].



Slika 3: Regulacijski krug s PI regulatorom.

4. zadatak (25 bodova)

Za proces prikazan na slici 4 treba projektirati regulator stanja i prefiltar u grani referentne vrijednosti tako da nazivnik prijenosne funkcije zatvorenog kruga ima faktor prigušenja $\zeta = 1$ i graničnu frekvenciju $\omega_n = 2[s^{-1}]$.



Slika 4: Proces.

Rjeąenje zadatka 1

a) Prikaz po varijablama stanja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \frac{\lambda}{m}\frac{x_3^2}{x_1^2} \\ \frac{x_3 x_2}{x_1} - \frac{R}{2\lambda}x_1 x_3 + \frac{1}{2\lambda}x_1 \cdot u \end{bmatrix}$$

b) linearizacija

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{2\lambda}{m}\frac{x_{30}^2}{x_{10}^3}x_1 - \frac{2\lambda}{m}\frac{x_{30}}{x_{10}^2}x_3 \\ \dot{x}_3 &= \left(\frac{u_0}{2\lambda} - \frac{x_{30}x_{20}}{x_{10}^2} - \frac{Rx_{30}}{2\lambda}\right)x_1 + \frac{x_{30}}{x_{10}}x_2 + \left(\frac{x_{20}}{x_{10}} - \frac{Rx_{10}}{2\lambda}\right)x_3 + \frac{x_{10}}{2\lambda}u \end{aligned}$$

Stacionarno stanje:

$$x_{20} = 0$$

$$x_{30} = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}} \cdot x_{10}$$

Rješenje zadatka 2

a) $Y(s) = \dfrac{1}{T_I s^3 + 12T_I s^2 + 20T_I s + 1}X_R(s) + \dfrac{T_I s}{T_I s^3 + 12T_I s^2 + 20T_I s + 1}Z(s)$

b) Kako je jedna vremenska konstanta procesa dominantna tada se proces može nadomjestiti PT_1 članom:

$$G_p(s) \cong \frac{1}{15}\frac{1}{(1+s)}$$

Uzevši u obzir ovu aproksimaciju dobije se:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{15T_I}}$$

$$\zeta = \sqrt{15T_I}\frac{1}{2}$$

c) $\zeta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow T_I = \dfrac{2}{15}$

Rješenje zadatka 3

Dovođenje sustava na rub stabilnosti može se promatrati preko Nyquistovog kriterija stabilnosti. Ukoliko zatvorimo povratnu vezu preko K_R moguće je dani sustav dovesti do ruba stabilnosti. Rub stabilnosti prema Nyquistovom kriteriju stabilnosti određuje se na temelju izraza:

$$1 + G_o(j\omega_\pi) = 0$$

odnosno iz uvjeta $Im(G_o(j\omega_\pi) = 0$.

Ukoliko je povratna veza zatorena preko pojačanja K_R tada je prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_o(s) = \frac{K_R K_S}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

odnosno frekvencijska karakteristika je:

$$G_o(j\omega) = \frac{K_R K_S}{j\omega(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} = \frac{K_R K_S}{j\omega(1 - T_1 T_2 \omega^2) - (T_1 + T_2)\omega^2}$$

Iz uvjeta da je $Im[G_o(j\omega_\pi)] = 0$ dobije se iznos ω_π:

$$\omega_\pi = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}},$$

dok se iz uvjeta $1 + G_o(j\omega_\pi) = 0$ dobije iznos kritičnog pojačanja PI regulatora K_{Rkr}:

$$K_{Rkr} = \frac{1}{K_S}(T_1 + T_2)\omega_\pi^2.$$

Uvrštavanjem vrijednosti dobije se:
$\omega_\pi = 5$ [s^{-1}] i $K_{Rkr} = 12.5$ [s].
Kako je $\omega_\pi = 2\pi f_{kr} = 2\pi\ /T_{kr}$ dobije se : $T_{kr} = 2\pi\ /\omega_\pi = 1.257$ [s].
Odavde slijedi da su parametri PI regulatora:

$$K_R = 0.45 \Rightarrow K_{Rkr} = 5.625,$$

$$T_I = 0.85 \Rightarrow T_{kr} = 1.07[s].$$

———————————————————————————

Rješenje zadatka 4

Model sustava u prostoru stanja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

potrebno je svesti na upravljački kanonički oblik u prostoru stanja. Za određivanje s_1^T potrebno je odrediti $\underline{A} \cdot \underline{b}$:

$$\underline{A} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Iz izraza (knjiga):

$$\mathrm{s}_1^{\mathrm{T}} \cdot \underline{b} = 0, \qquad \mathrm{s}_1^{\mathrm{T}} \cdot \underline{Ab} = 1,$$

slijedi da je: $s_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Vektor povratne veze glasi:

$$\underline{f}^T = p_0 \underline{s}_1^T + p_1 \underline{s}_1^T \underline{A} + p_2 \underline{s}_1^T \underline{A}^2$$

gdje su p_0, p_1, p_2 koeficijenti željenog karakterističnog polinoma $A(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2$. Koeficijenti polinoma su: $p_0 = \omega_n^2$, $p_1 = 2\zeta\omega_n$ i $p_2 = 1$. Dobije se:

$$\underline{f}^T = \begin{bmatrix} 7 & 16 \end{bmatrix}$$

Prefiltar u grani referentne vrijednosti glasi: $K_{pf} = 16$.