

AUTOMATSKO UPRAVLJANJE

Automatsko upravljanje predstavlja temeljnu disciplinu za mnoge inženjerske znanosti.

Načela automatskog upravljanja susreću se i koriste se i u mnogim netehničkim oblastima.

“**Fenomenološki**” pristup automatskom upravljanju – razvoj teorije i tehnike automatskog upravljanja po pojedinim inženjerskim strukama i po pojedinim primjenama.

Pristup automatskom upravljanju kao **metodičkoj znanosti**, neovisnoj o području primjene – sustavi upravljanja iz različitih područja prikazuju se na jedinstven način.

upravljanje $\hat{=}$ regulacija

1. UVODNA RAZMATRANJA O AUTOMATSKOM UPRAVLJANJU

Doba automatizacije

temelji se na automatskom upravljanju i informacijskim tehnologijama.

Automatsko upravljanje je strogo metodički orijentirano stručno područje koje se koristi ili je zastupljeno u:

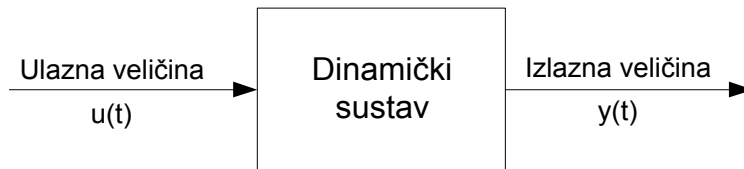
- tehničkim sustavima;
- netehničkim dinamičkim sustavima:
 - biološkim,
 - ekonomskim,
 - sociološkim,
 - političkim.

Zato **dinamički sustav** treba promatrati vrlo globalno, što bi se moglo izraziti na sljedeći način:

Dinamički sustav predstavlja funkcijsku cjelinu za obradbu i prijenos energije, materije, informacije i kapitala, gdje se ulazne veličine sustava promatraju uzrokom, a izlazne veličine sustava njegovom vremenskom posljedicom.

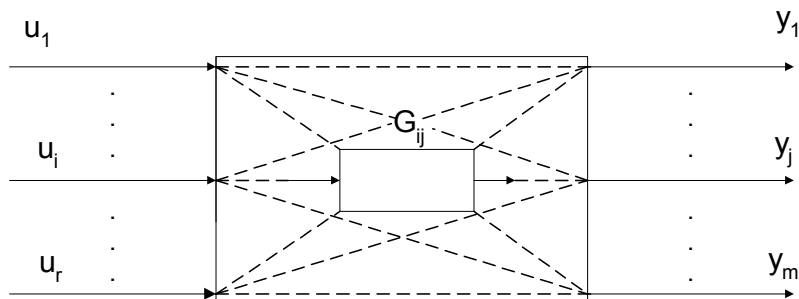
Struktura dinamičkog sustava može biti:

- s jednim ulazom i jednim izlazom - SISO sustav (Single Input Single Output):

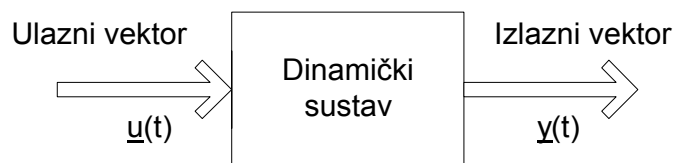


Sl. 1.1.a)

- s više ulaza i više izlaza - MIMO sustav (Multiple Input Multiple Output):

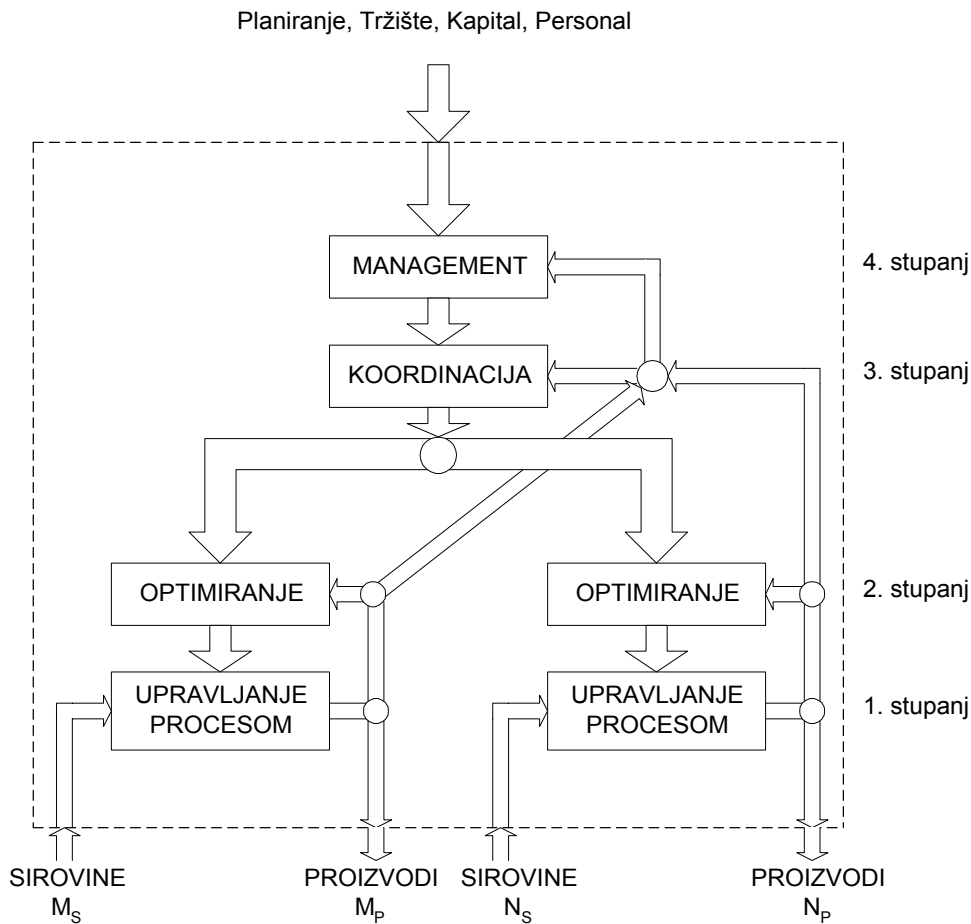


||>



Sl. 1.1.b)

- hijerarhijski strukturirani višerazinski sustavi:



Sl. 1.1.c)

U osnovi se dinamički sustav promatra kroz tzv. **kibernetički pristup**:

Kibernetika je znanost pomoću koje se spoznaju zakonitosti procesa upravljanja u prirodi, tehnici i društvu (→ANALIZA) kako bi se temeljem tih spoznaja (analize) projektirali tehnički sustavi (→SINTEZA) odnosno poboljšali prirodni sustavi.

Norbert Wiener:

Cybernetics or control and communication in the animal and the machine, 1948

1.1. Blokovski prikaz sustava

U smislu definicije dinamičkog sustava, dinamički se sustav može promatrati kao **prijenosni sustav** (prijenosni član, ako se promatra element sustava).

Prijenosni sustavi imaju jednoznačni smjer djelovanja određen smjerom strelice:

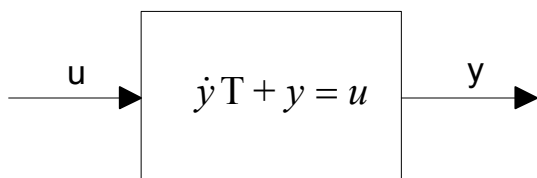


Za povezivanje signala koriste se sljedeći tipični simboli:

Naziv	Simbol	Mat. operacija
Točka grananja		$x_1 = x_2 = x_3$
Točka sumacije		$x_3 = x_1 \pm x_2$
Množenje		$x_3 = x_1 \cdot x_2$

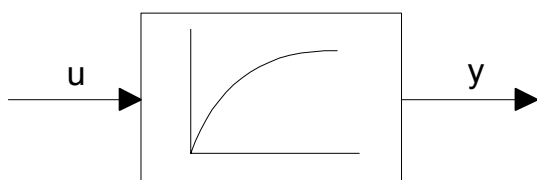
Postoji više načina za prikaz prijenosnog vladanja sustava (člana) uporabom **blokova**:

- pomoću diferencijalne jednačbe



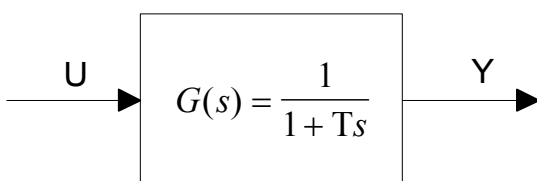
Sl. 1.2.a)

- pomoću prijelazne funkcije (odziv na jediničnu skokovitu funkciju $u = 1 \cdot S(t)$)



Sl. 1.2.b)

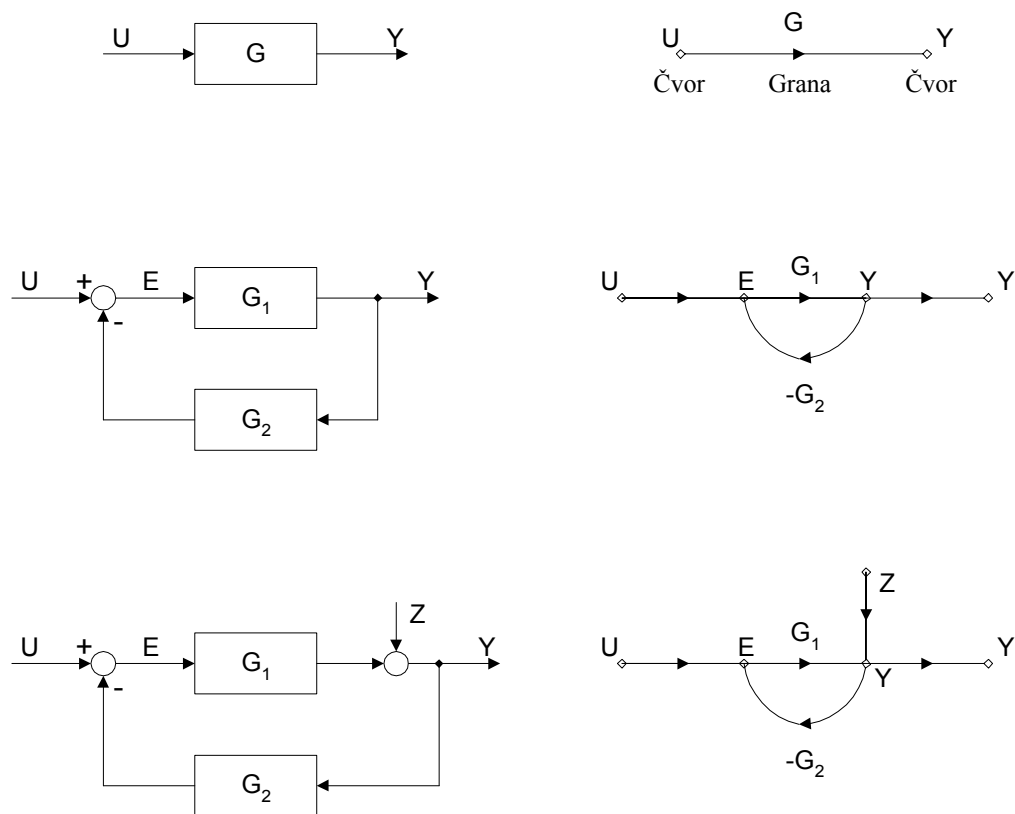
- pomoću prijenosne funkcije



Sl. 1.2.c)

Ako u sustavu postoje nelinearni članovi oni se prikazuju pomoću **statičke nelinearnosti**.

Isto tako, sustavi se mogu prikazati pomoću **dijagrama toka signala**:



Sl. 1.3.

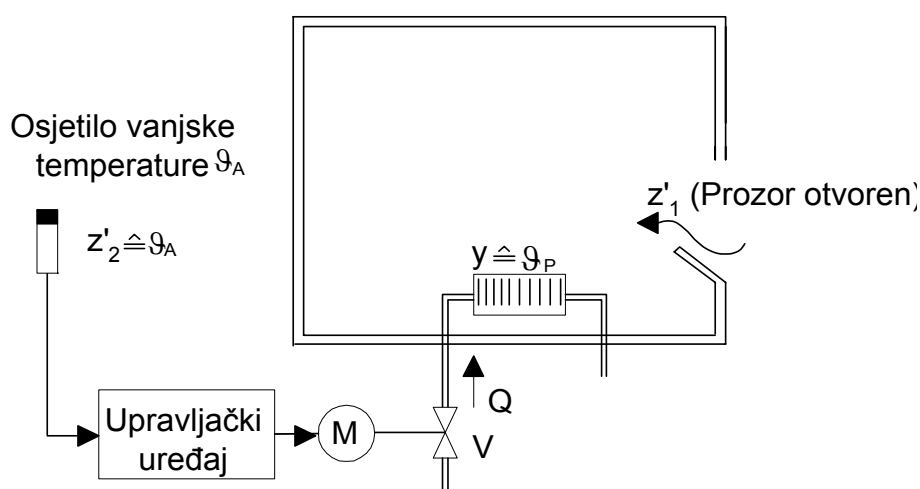
1.2. Upravljanje bez povratne veze i s povratnom vezom

- upravljanje bez povratne veze
(upravljanje u otvorenoj petlji)
- upravljanje s povratnom vezom

feedforward control
(engl.)
Steuerung (njem.)

feedback control
(engl.)
Regelung (njem.)

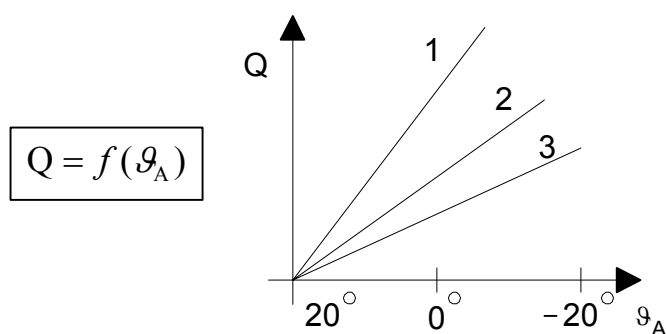
Primjer 1.1: Upravljanje temperaturom prostorije (bez povratne veze)



Sl. 1.4.

Mjeri se vanjska temperatura θ_A , mjerni signal se dovodi na upravljački uređaj, koji djeluje na motor M ventila V i na taj način utječe na protok Q koji ide na radijator.

Pri tome je:



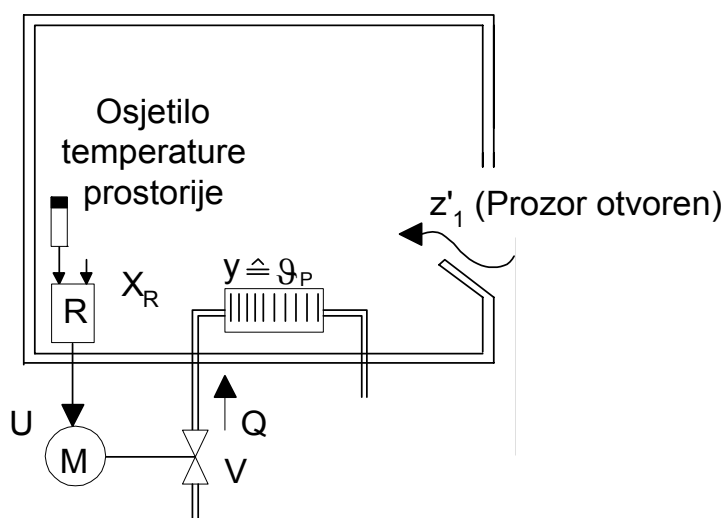
Kod promatranog upravljanja imamo 2 **poremećaja** (smetnje) na sustav:

disturbance (engl.)
Störung (njem.)

z_1' - temperaturni poremećaj uvjetovan otvaranjem prozora (u ovakvom upravljanju ne može se kompenzirati);

z_2' - vanjska temperatura (koja se mjeri).

Primjer 1.2: Upravljanje temperaturom prostorije (s povratnom vezom)

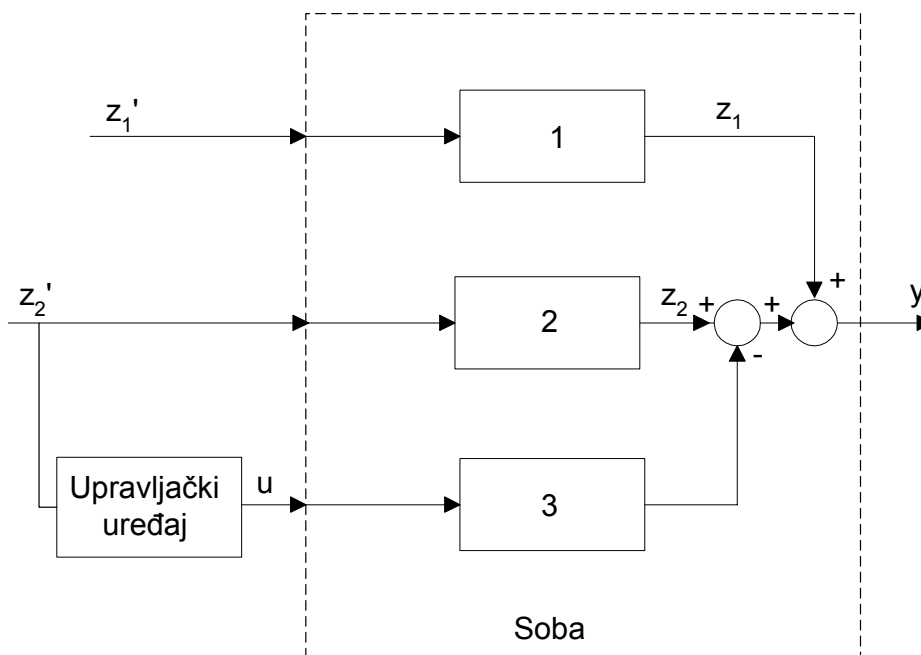


Sl. 1.5.

U ovom slučaju mogu se s pomoću regulatora R kompenzirati utjecaji svih poremećaja.

- Blokovski prikazi za primjere a) i b) prema slikama 1.4. i 1.5.

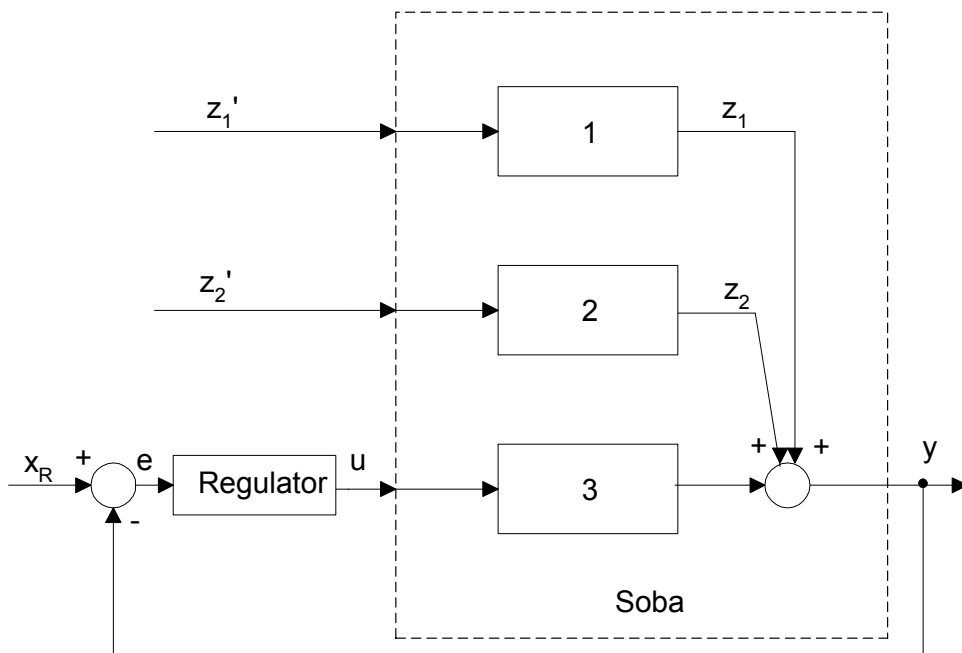
a) upravljanje u otvorenoj petlji:



Sl. 1.6.

- predstavlja otvoreni tok djelovanja (**upravljački lanac**);
- kompenzira utjecaj samo one smetnje s obzirom na koju se projektira upravljački uređaj;
- ako je upravljani objekt sam po sebi stabilan, ostaje stabilan i uz djelovanje ovakvog upravljanja.

b) upravljanje u zatvorenoj petlji:



Sl. 1.7.

- predstavlja zatvoreni tok djelovanja (**regulacijski krug, regulacijska petlja**);
- može kompenzirati utjecaj svih smetnji (negativna povratna veza);
- može postati nestabilan (regulirana veličina može oscilirati, teoretski, preko svih granica).

1.3 Principni način funkcioniranja upravljanja

Upravljanje (regulacija) treba obaviti sljedeće zadaće:

- zadaća je regulacije da kompenzira utjecaje smetnji koje djeluju na proces. Pri tome regulirana veličina y (regulirane veličine) trebaju ostati na vrijednosti određenoj namještenom x_R (željenom) vrijednošću regulatora.

Ovdje se radi o **čvrstoj** regulaciji (stabilizaciji, regulaciji smetnje).

- zadaća je regulacije da regulirana veličina y čim bolje slijedi promjenljivu referentnu vrijednost x_R .

Ovdje se radi o **slijednoj** regulaciji.

U oba slučaja mora se **trajno mjeriti** regulirana veličina y i **uspoređivati** s referentnom vrijednosti x_R s ciljem da **regulacijsko odstupanje** izčezne ($e \rightarrow 0$).

Primjer 1.3: Regulacija brzine vrtnje parne turbine (problem stabilizacije)

(vidi sliku 1.8.)

Na zupčanik je spojeno centrifugalno njihalo koje preko poluge aktivira ventil kroz koji prolazi para (pod određenim tlakom i temperaturom).

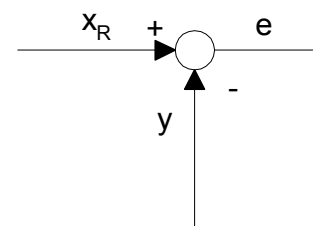
Centrifugalno njihalo s polugom predstavlja **centrifugalni regulator**. Da bi se održavala brzina vrtnje turbine konstantnom mora se dovoditi konstantna struja pare na turbinu (ako nema smetnji).

x_R : namještena $\hat{=}$ željen
a $\hat{=}$ referentna
vrijednost
setpoint (engl.)
Sollwert (njem.)

regulator problem
(engl.)
Festwertregelung
(njem.)
Störgrößenregelung
(njem.)

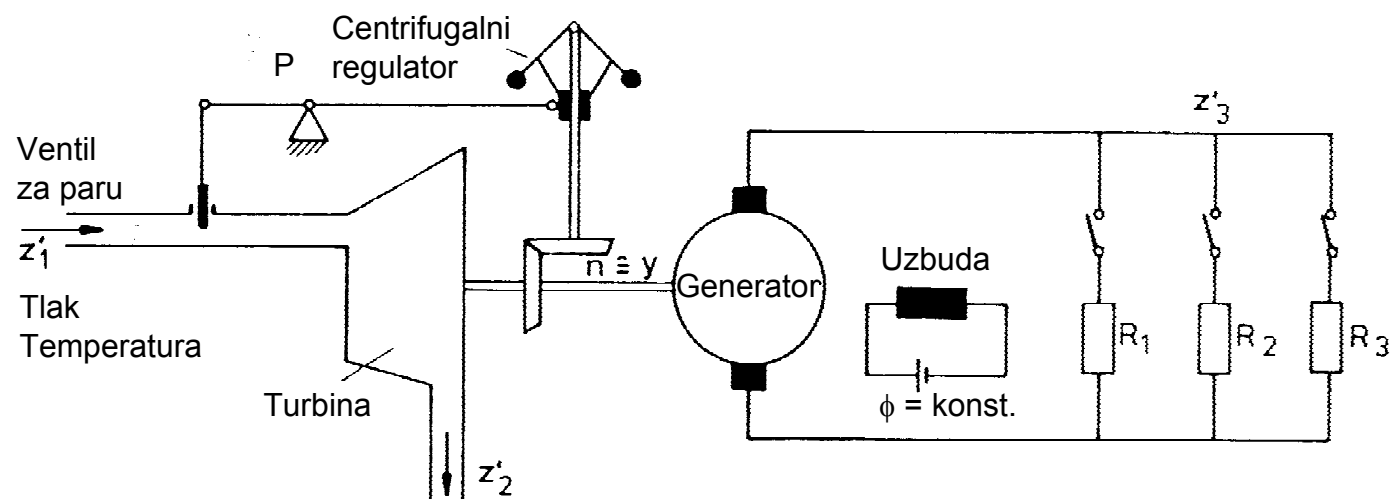
referentna vrijednost $\hat{=}$
vodeća vrijednost
(veličina)

tracking control (engl.)
servo problem (engl.)
Folgeregelung (njem.)
Nachlaufregelung (njem.)



toplinska energija pare

konstantna brzina vrtnje
→ konstantan napon
generatora

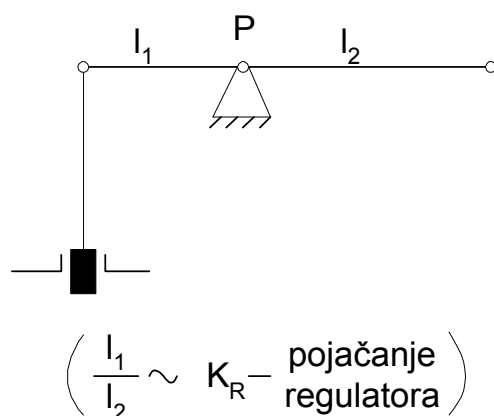


Sl. 1.8.

Smetnje koje mogu djelovati na sustav:

- promjena stanja pare (tlak, temperatura) – z_1' ;
- protutlak – z_2' ;
- promjena opterećenja generatora – z_3' .

Centrifugalni regulator kompenzira utjecaje smetnji. Položaj uporišta P poluge u centrifugalnom regulatoru određuje **pojačanje regulatora**.



Sl. 1.9.

- Ako je uporište poluge pomaknuto daleko u lijevo (malo pojačanje regulatora), tada se za relativno veliku promjenu brzine vrtnje relativno malo promjeni položaj ventila. U ovom slučaju nije zajamčeno da će regulator kompenzirati utjecaj poremećaja.
- Ako se uporište poluge pomakne prema desno (veliko pojačanje regulatora), onda će mala promjena brzine vrtnje jako djelovati na položaj ventila. U ovom slučaju mogu nastupiti **oscilacije** brzine vrtnje. Ako se oscilacije raspiruju, može nastupiti **nestabilni rad** sustava.

Na temelju razmatranja na ovom primjeru dolazi se do **suštinske postavke** automatskog upravljanja u pogledu tehničke uporabe sustava:

- regulator se mora tako projektirati da osigura stabilnost sustava.

Pored toga , moraju se ispuniti i dodatni zahtjevi, npr.:

- da vrijeme potrebno za kompenzaciju utjecaja smetnje bude minimalno;
- da regulacijsko odstupanje prouzročeno smetnjom bude minimalno;
- da slijeđenje vodeće vrijednosti bude čim bolje;
- ⋮

Ovi dodatni zahtjevi formuliraju se obično u obliku **kriterija dobrote** (kakvoće) regulacije.

performance index (engl.)
Gütenkriterium (njem.)

Ako sustav upravljanja ispunjava ove kriterije onda se takav sustav naziva **optimalnim** u smislu primijenjenih kriterija.

Prema tome:

- **analiza stabilnosti, i**
- **projektiranje optimalnog regulatora**

predstavljaju najvažnije zadaće automatskog upravljanja.

Primjer 1.4: Regulacija zakreta (Slijedno upravljanje)

(vidi sliku 1.10.)

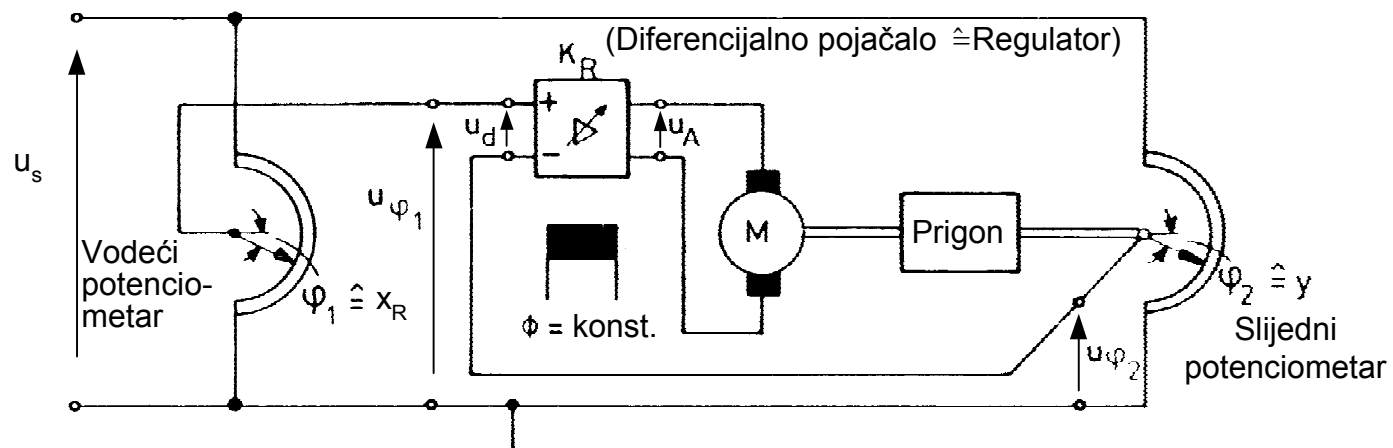
Ovdje istosmjerni motor pogoni potencijometar (slijedni potencijometar) čiji kutni položaj φ_2 treba slijediti kutni položaj vodećeg potencijometra φ_1 , a da pri tome odstupanje $\varphi_1 - \varphi_2$ bude čim manje. Oba potencijometra spojena su u mosni spoj s konstantnim naponom napajanja U_s .

Dijagonala mosnog spoja ima napon:

$$u_d = u_{\varphi_1} - u_{\varphi_2}$$

Ako je $u_d = 0$, onda je $\varphi_1 = \varphi_2$.

Ako se zakrene slijedni potencijometar ($u_d \neq 0$), preko diferencijalnog pojačala se djeluje na napon armature motora, koji preko prigona djeluje na zakret slijednog potencijometra. Taj proces traje sve dotle dok se ne postigne $u_d = 0$.



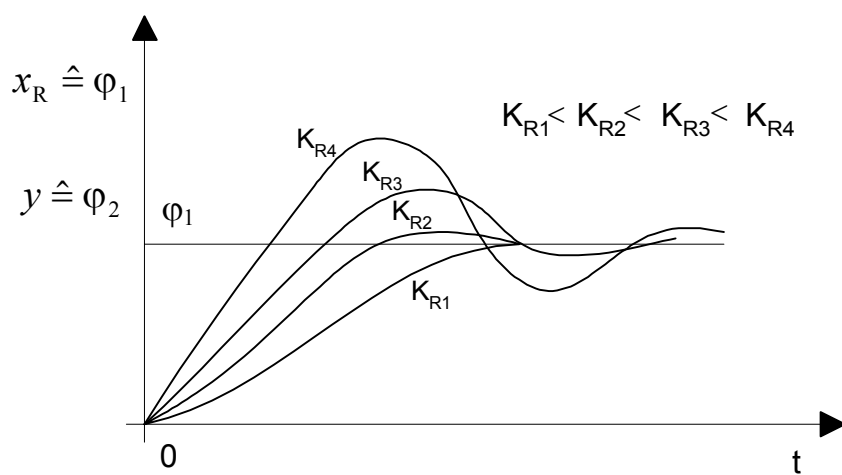
Sl 1.10.

Ovdje je:

$$u_A = K_R \cdot u_d$$



pojačanje (podesivo)



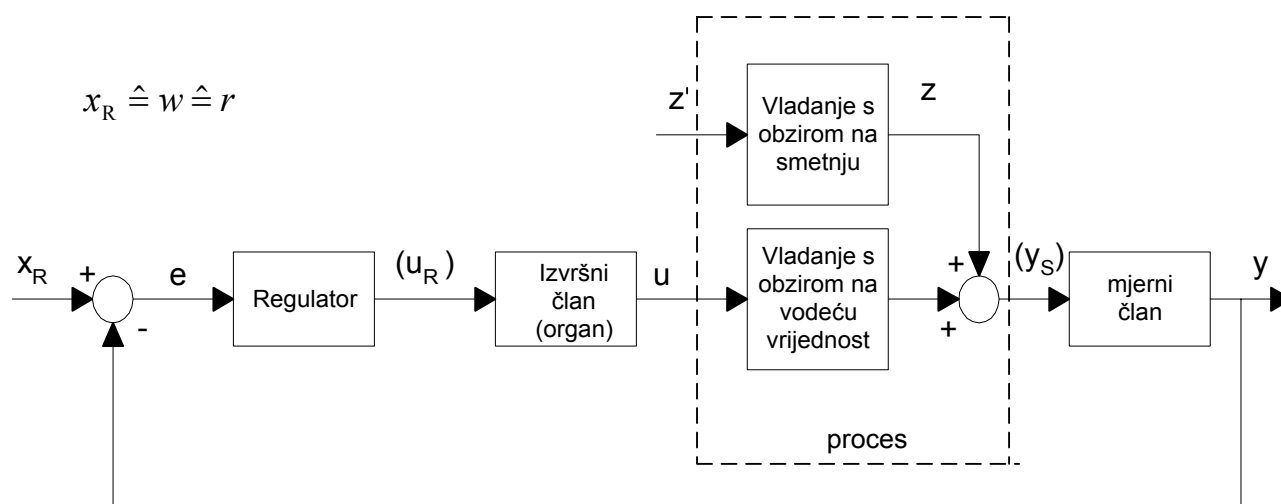
Sl. 1.11.

1.4. Osnovna struktura sustava upravljanja (regulacijskog kruga)

control loop (engl.)
Regelkreis (njem.)

Na temelju dva prethodna primjera može se postaviti struktura regulacijskog kruga. Regulacijski krug sadrži 4 glavna sastavna dijela (sl. 1.12):

- proces (regulacijska staza);
- mjerni član;
- regulator;
- izvršni (postavni) član.



Sl. 1.12.

y - regulirana veličina (stvarna vrijednost)

y - controlled variable (engl.)
y - Regelgröße (Istwert) (njem.)

x_R – referentna veličina (referenca)

x_R - reference value (engl.)
 x_R - Sollwert, Führungsgröße (njem.)

e – regulacijsko odstupanje

e - actuating signal (engl.)
e - Regelabweichung (njem.)

u – upravljačka, izvršna veličina (postavna veličina)

u - manipulated variable (engl.)
u - Stellgröße (njem.)

z – smetnja, poremećaj

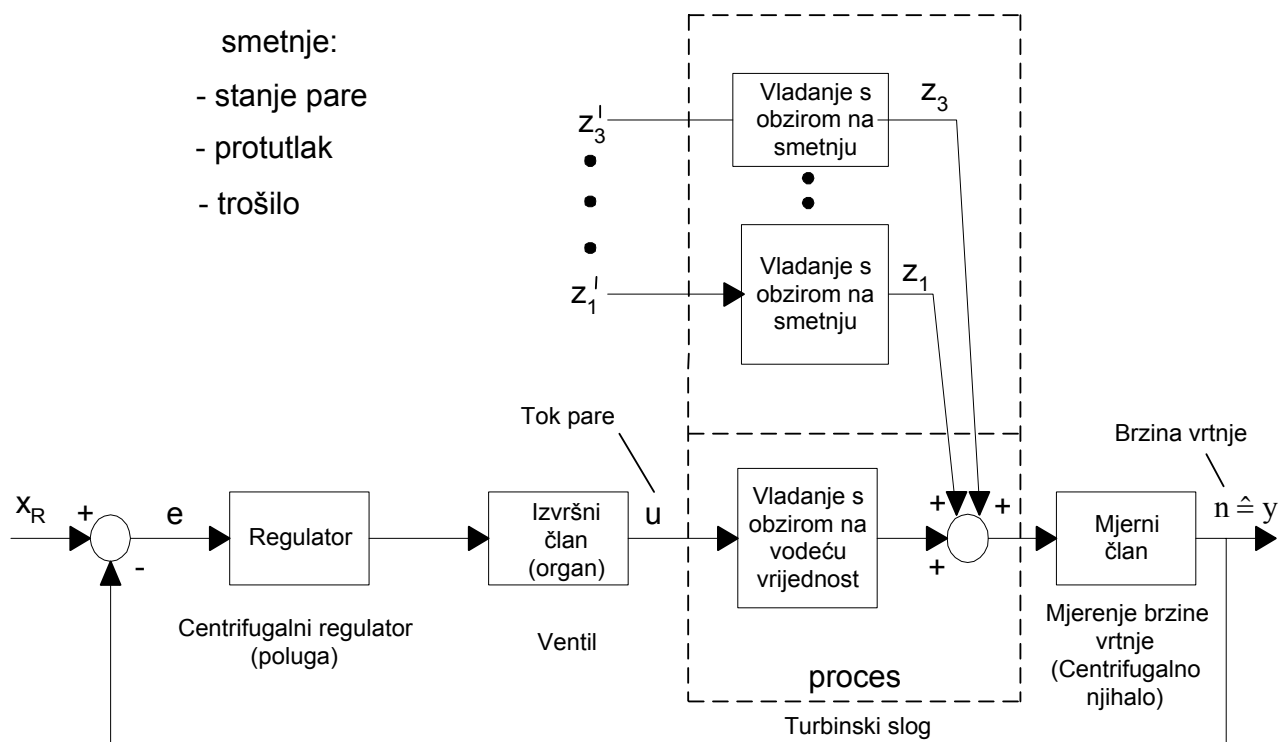
Suštinska je uloga regulatora da obrađuje regulacijsko odstupanje:

$$e(t) = x_R(t) - y(t), \rightarrow u_R = f(e)$$

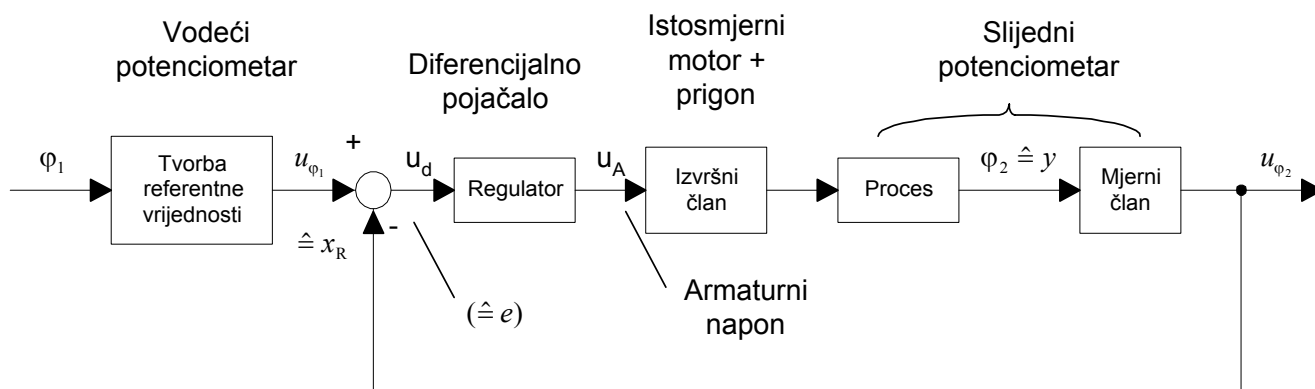
po određenom **algoritmu** (zakonu upravljanja), djelujući preko izvršnog člana na proces.

zatvoreni tok signala

Prikaz regulacije brzine vrtnje parne turbine i regulacije zakreta prikazani su blokovski na slikama 1.13. i 1.14. s pridruženim funkcijama elementima sustava.

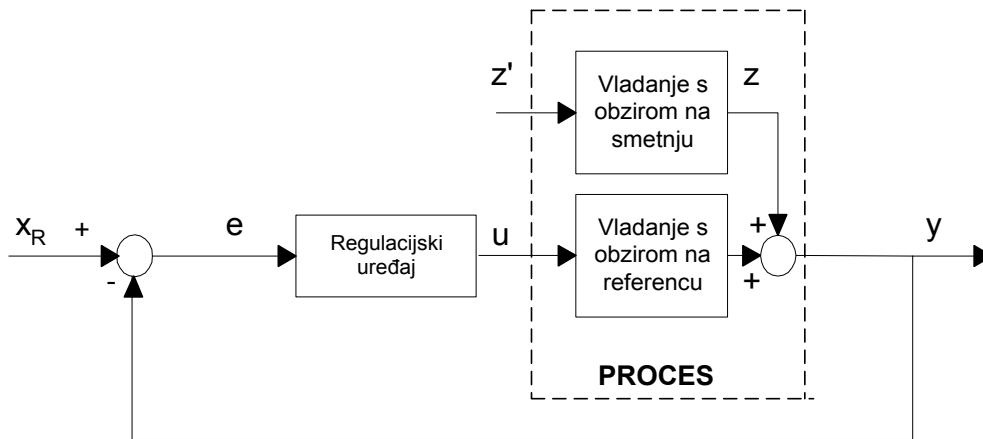


Sl. 1.13.



Sl. 1.14.

Često nije moguće regulacijski krug podijeliti u 4 navedena dijela, iz razloga izvedbe, pa se koristi pojednostavljeni blokovski prikaz kao na slici 1.15.



Sl. 1.15.

Regulacijski uređaj = Regulator + Izvršni član.

Proces uključuje mjerni član.

Na prethodnim blokovskim prikazima $e(t)$ se određuje na temelju **negativne povratne veze**, a koncept upravljanja zasniva se na **principu negativne povratne veze**.

feedback (engl.)
Rückkopplung (njem.)

2. NEKA VAŽNIJA SVOJSTVA SUSTAVA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Općenito se za opis vladanja sustava koriste fizikalne i / ili druge zakonitosti ili se o vladanju sustava zaključuje na temelju mjerenja.

Matematički prikaz vladanja sustava je **matematički model** koji se sastoji od diferencijalnih, algebarskih ili logičkih jednažbi.

Čemu služe matematički modeli?

- općenito predstavljaju polazište pri:

- analizi i sintezi sustava upravljanja
- simulaciji sustava na računalu (omogućava se "eksperimentiranje" na matematičkom modelu umjesto na stvarnom sustavu)

⇒ posebno važno u fazi projektiranja sustava

Određivanje matematičkog modela složen je posao!



treba odrediti **strukturu** i **parametre**

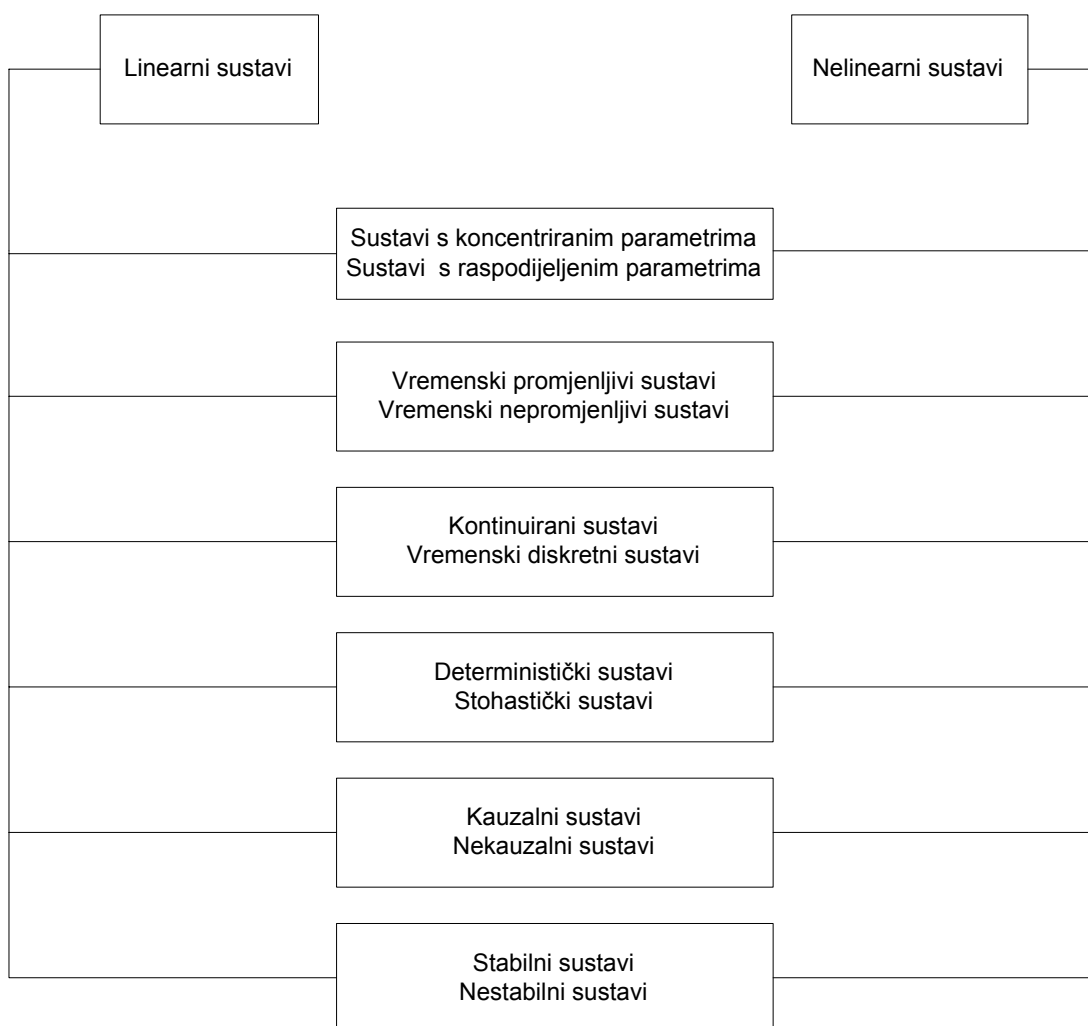
matematičkog modela ⇒ Identifikacija:

- teoretska,
- eksperimentalna.

- Teoretska identifikacija (sistemska analiza) temelji se na poznavanju fizikalnih i drugih zakonitosti procesa i postavljanju **jednažbi ravnoteže** (mase, energije, impulsa gibanja).
- Eksperimentalna identifikacija zasniva se na **mjerenju** ulazno/izlaznih veličina procesa te **obradbi** tih veličina.

jednažbe bilance

Specijalni oblici matematičkog modela ovise o stvarnim svojstvima procesa (sustava), kako slijedi (Sl. 2.1.).



Sl. 2.1.

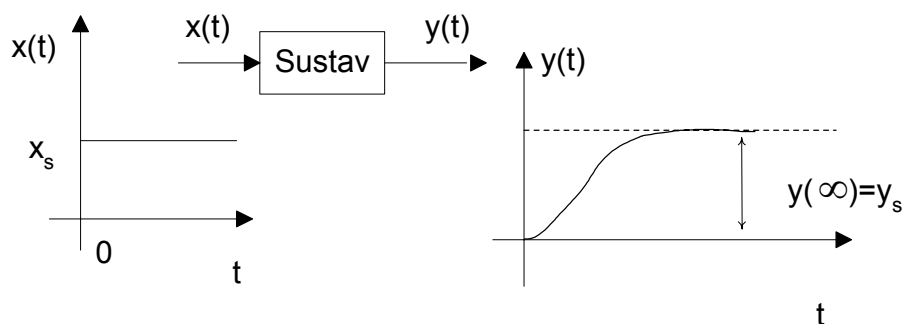
2.1. Sustavi u dinamičkim i stacionarnim stanjima (režimima)

Dinamičko vladanje (vremensko vladanje)

opisuje vremenski tok izlazne veličine sustava (procesa) $y(t)$ uz narinutu ulaznu veličinu sustava (procesa) $x(t)$.

Ova veza između ulazno/izlaznih veličina dađe se općenito izraziti pomoću **operatora** T ; dakle, svakom realnom $x(t)$ pridružen je realni $y(t)$:

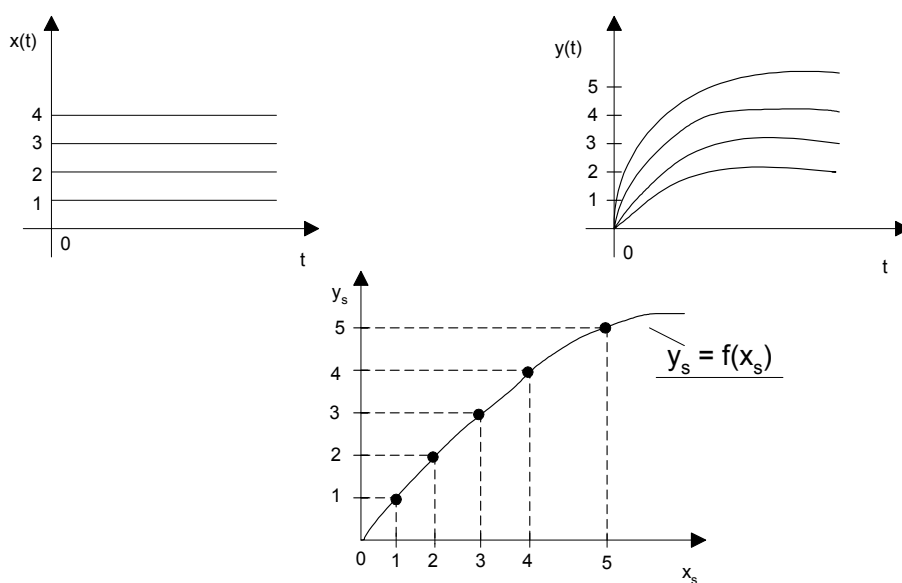
$$y(t) = T[x(t)]. \quad (2 - 1)$$

Primjer: 2.1.

Sl. 2.2.

Vladanje sustava u **stacionarnom stanju** (statičko vladanje)

Za različite vrijednosti $x_s = \text{konst.}$ imamo:



Sl. 2.3.

Krivulja $y_s = f(x_s)$ predstavlja **statičku karakteristiku** (krivulju).

ustaljeno stanje

indeks "s" upućuje na
stacionarno stanje

nelinearnost

2.2 Svojstva sustava

1. Linearni i nelinearni sustavi

Sustav je **linearan** ako vrijedi **princip superpozicije**

$$\sum_{i=1}^n k_i y_i(t) = T \left[\sum_{i=1}^n k_i x_i(t) \right] \quad (2 - 2)$$

za proizvoljnu linearnu kombinaciju ulaznih veličina $x_i(t)$, gdje je:

$$i = 1, 2, \dots, n, \\ k_i - \text{realne konstante.}$$

Linearni kontinuirani sustavi obično se opisuju pomoću linearnih diferencijalnih jednačbi:

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^i}{dt^i} y(t) = \sum_{j=0}^n b_j(t) \frac{d^j}{dt^j} x(t). \quad (2 - 3)$$

Za linearne sustave upravljanja zaokružena je teorija, što nije slučaj za nelinearne sustave.

Za nelinearne sustave šire se primjenjuju približne metode, kao što je **linearizacija**.

a) Linearizacija statičke karakteristike

$y_s = f(x_s) \rightarrow$ može se rastaviti u Taylorov red u proizvoljno odabranoj radnoj točki (x_0, y_0) :

$$y = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)^2 + \dots \quad (2 - 4)$$

Ako ne vrijedi princip superpozicije, sustav je nelinearan.

diferencijalna
jednačba n-tog reda

$y_s \rightarrow y$
 $x_s \rightarrow x$

Ako su odstupanja $(x - x_0)$ oko radne točke dovoljno mala onda je:

$$y \approx y_0 + K(x - x_0), \quad (2 - 5)$$

gdje je:

$$y_0 = f(x_0),$$

$$K = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

Slično se linearizacija može provesti za funkcije dviju ili više neovisnih varijabli.

Za

$$y = f(x_1, x_2) \quad (2 - 6)$$

Taylorov razvoj u radnoj točki (y_0, x_{10}, x_{20}) je:

$$y = f(x_{10}, x_{20}) + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}}}_{K_1} \cdot (x_1 - x_{10}) + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_2=x_{20} \\ x_1=x_{10}}}}_{K_2} \cdot (x_2 - x_{20}) + \dots,$$

iz čega slijedi:

$$y \approx y_0 + K_1 \cdot (x_1 - x_{10}) + K_2 \cdot (x_2 - x_{20}). \quad (2 - 7)$$

b) Linearizacija nelinearne diferencijalne jednadžbe

Neka je nelinearni dinamički sustav s ulazom $x(t)$ i izlazom $y(t)$ opisan nelinearnom diferencijalnom jednadžbom 1. reda:

$$\dot{y}(t) = f[y(t), x(t)], \quad (2 - 8)$$

koju treba **linearizirati** u okolišu **radne točke** (x_0, y_0) .

→ pravac kroz točku (x_0, y_0) s nagibom K

ploha u prostoru

Za stacionarno (mirno) stanje je:

$$\dot{y}(t) = 0.$$

Stacionarno stanje se, prema tome, dobije rješenjem jednadžbe:

$$0 = f(y_0, x_0). \quad (2 - 9)$$

Označimo s $\Delta y(t)$ odstupanje varijable $y(t)$ od mirnog položaja y_0 :

$$y(t) = y_0 + \Delta y(t) \rightarrow \dot{y}(t) = \Delta \dot{y}. \quad (2 - 10)$$

Analogno vrijedi za $x(t)$:

$$x(t) = x_0 + \Delta x(t) \rightarrow \dot{x}(t) = \Delta \dot{x}. \quad (2 - 11)$$

Razvoj u Taylorov red u radnoj točki jednadžbe $\dot{y}(t) = f[y(t), x(t)]$ daje:

$$\dot{y}(t) = f[y_0, x_0] + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{\substack{y=y_0 \\ x=x_0}} \cdot (y - y_0) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot (x - x_0) + \dots \quad (2 - 12)$$

Iz (2 - 9) do (2 - 12) slijedi:

$$\Delta \dot{y}(t) \approx A \Delta y(t) + B \Delta x(t),$$

gdje je:

$$A = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{\substack{y=y_0 \\ x=x_0}}, \quad B = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}. \quad (2 - 13)$$

perturbacijske varijable

Sasvim analogno može se linearizirati nelinearna vektorska diferencijalna jednačina:

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{f}[\underline{y}(t), \underline{x}(t)], \quad (2 - 14)$$

gdje je:

$$\underline{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T,$$

$$\underline{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t)]^T.$$

Linearizacija daje linearnu vektorsku diferencijalnu jednačinu:

$$\Delta \dot{\underline{y}}(t) = \underline{A} \Delta \underline{y}(t) + \underline{B} \Delta \underline{x}(t), \quad (2 - 15)$$

pri čemu su \underline{A} i \underline{B} Jacobijeve matrice:

$$\underline{A} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(\underline{y}, \underline{x})}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\underline{y}, \underline{x})}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\underline{y}, \underline{x})}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\underline{y}, \underline{x})}{\partial y_n} \end{array} \right]_{\substack{\underline{y}=\underline{y}_0 \\ \underline{x}=\underline{x}_0}},$$

$$\underline{B} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(\underline{y}, \underline{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\underline{y}, \underline{x})}{\partial x_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\underline{y}, \underline{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\underline{y}, \underline{x})}{\partial x_r} \end{array} \right]_{\substack{\underline{x}=\underline{x}_0 \\ \underline{y}=\underline{y}_0}}.$$

2. Sustavi s koncentriranim i raspodijeljenim parametrima

Ako se sustav zamisli da je sastavljen od **konačno** mnogo idealiziranih pojedinačnih elemenata (npr. omski otpori, kapaciteti, induktiviteti, prigušivači, opruge, mase itd.), onda se takav sustav naziva **sustavom s koncentriranim parametrima**.

Ako pak sustav posjeduje **beskonačno** mnogo beskonačno malih pojedinačnih elemenata, onda se radi o sustavu s

koncentriran $\hat{=}$
 $\hat{=}$ usredotočen

distribuiran $\hat{=}$
 $\hat{=}$ raspodijeljen

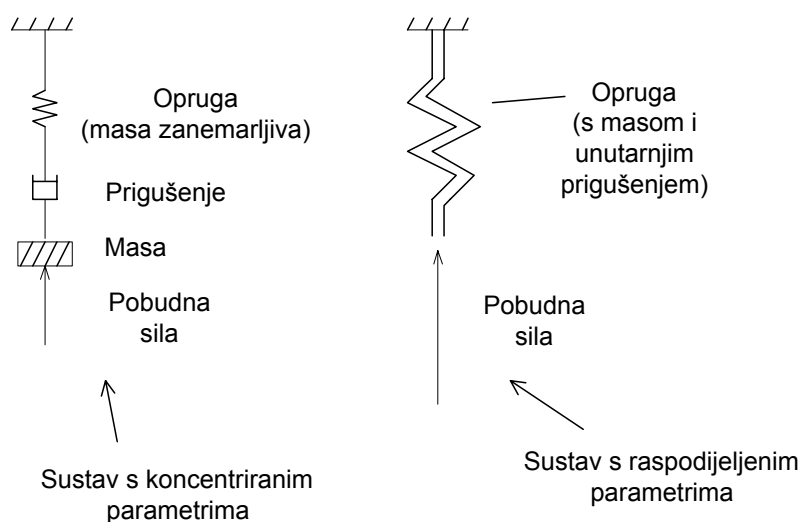
opisuje se pomoću
 običnih diferencijalnih
 jednačbi

raspodijeljenim parametrima.

Primjer 2.1.: Električni vod

Napon na vodu je funkcija mjesta i vremena, pa se stoga opisuje pomoću parcijalnih diferencijalnih jednažbi.

Primjer 2.2.: Oscilatorni sustav (sl. 2.4.)



Sl. 2.4.

3. Vremenski promjenljivi i vremenski nepromjenljivi sustavi

Ako parametri sustava nisu konstantni nego se mijenjaju s vremenom, onda se radi o vremenski **promjenljivim sustavima**. Ako to nije slučaj, onda se radi o **vremenski nepromjenljivim sustavima**.

Primjeri vremenski promjenljivih sustava:

- raketa (promjena mase);
- temperaturno ovisni otpornik (pri vremenskoj promjeni temperature).

opisuje se pomoću parcijalnih diferencijalnih jednažbi

Kada se koriste modeli s koncentriranim, a kada s raspodijeljenim parametrima ?

vremenski varijantan $\hat{=}$
 $\hat{=}$ vremenski varijabilan
 $\hat{=}$
 $\hat{=}$ nestacionaran

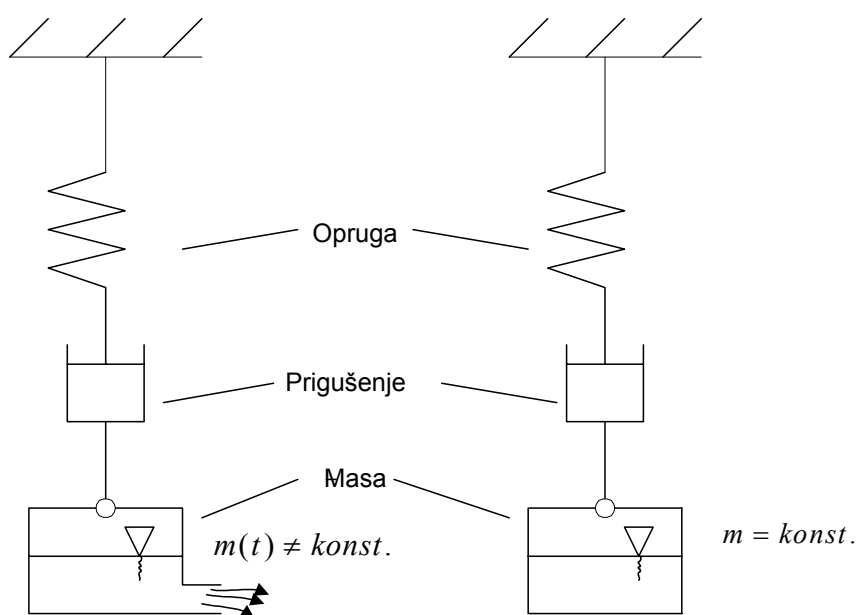
vremenski invarijantan $\hat{=}$
 $\hat{=}$ stacionaran

Vremenska nepromjenjivost (invarijantnost) može se iskazati formalno pomoću operatorskog zapisa:

$$y(t - t_0) = T[x(t - t_0)]. \quad (2 - 16)$$

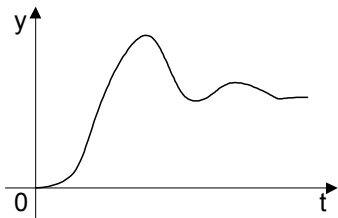
Vremenski pomak ulaznog signala $x(t)$ za t_0 ima za posljedicu isti pomak izlaznog signala $y(t)$, bez da se $y(t)$ izobliči.

Primjer 2.3.: Oscilatorni sustav



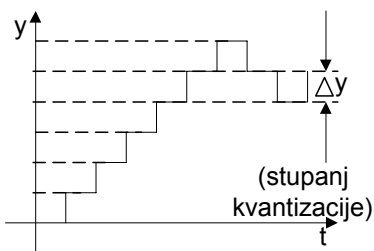
Sl. 2.5.

4. Sustavi s kontinuiranim ili diskretnim načinom rada



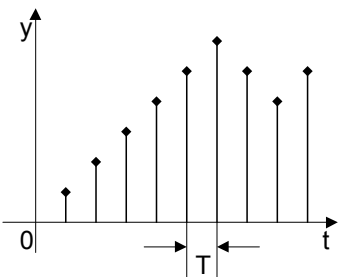
y je unutar određenih granica kontinuirano promjenljiva.

← **kontinuirani signal**



y može poprimiti samo određene vrijednosti amplitude.

← **kvantizirani signal**



y je poznat samo u vremenski diskretnim trenucima.

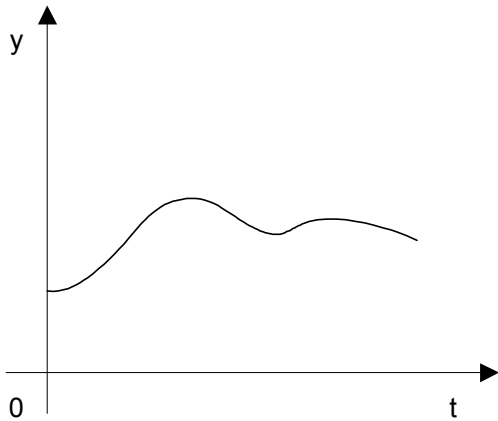
← **vremenski diskretni signal**

T - konstantna perioda uzorkovanja (ekvidistantno uzorkovanje)

Kvantizirane i vremenski diskretne signale susrećemo u **digitalnim sustavima**.

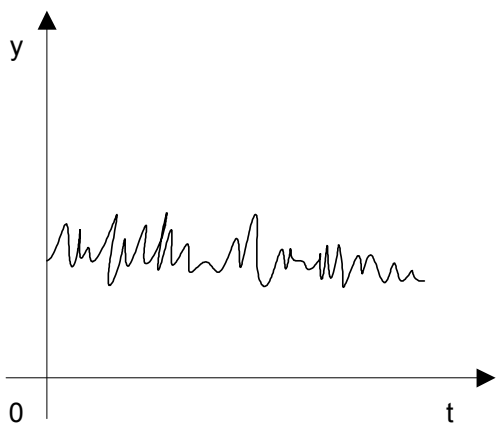
5. Sustavi s determinističkim ili stohastičkim sustavskim varijablama

Deterministički signali (a onda i sustavi) jednoznačno su određeni (dađu se analitički opisati).



deterministički signali
mogu se reproducirati

Stohastički signali (a onda i sustavi) imaju potpuno neregularan karakter (ne dađu se analitički opisati).



Vrijednost signala u svakom trenutku može se opisati samo pomoću **statističkih zakonitosti**.

stohastički signali ne
mogu se reproducirati

6. Kauzalni i nekauzalni sustavi

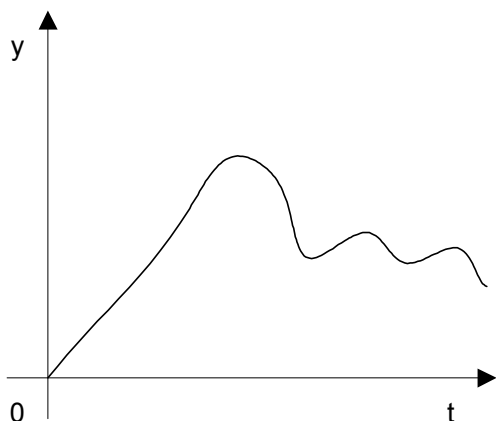
Za kauzalni sustav mora nastupiti prvo pobuda, da bi se potom dobio odaziv.

Svi realni sustavi su stoga kauzalni!

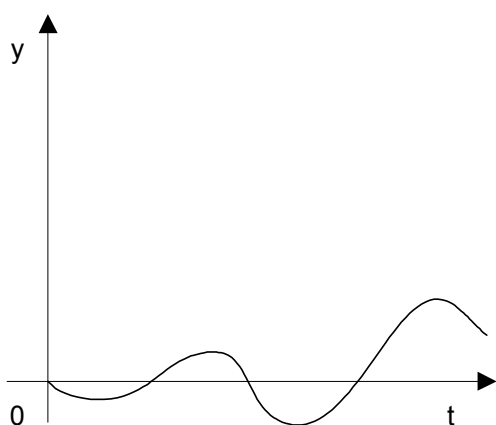
7. Stabilni i nestabilni sustavi

BIBO Stable

Ako svaka po iznosu ograničena pobuda daje izlazni signal sustava koji je također ograničen, onda je sustav stabilan.



stabilan sustav



nestabilan sustav

Dodatak:

Uz navedena systemska svojstva važna su još i svojstva:

- upravljivost;
- osmotrivost.

controlability (engl.)
Steuerbarkeit(njem.)

observability (engl.)
Beobachtbarkeit
(njem.)

3. OPIS LINEARNIH KONTINUIRANIH SUSTAVA U VREMENSKOM PODRUČJU

3.1 Opis pomoću diferencijalnih jednačbi

- obične linearne diferencijalne jednačbe
- parcijalne linearne diferencijalne jednačbe

sustavi s
koncentriranim
parametrima

sustavi s
raspodijeljenim
parametrima

Fizikalni zakoni su polazište pri postavljanju matematičkog modela procesa (dinamičkog modela procesa).

(proces \triangleq sustav)

- Za **električke sustave** su od posebne važnosti:

- Kirchhoffovi zakoni;
- Ohmov zakon;
- zakon indukcije;

·
·
·

kao i

- Maxwellove jednačbe.

za sustave s
koncentriranim
parametrima

za polja kao i sustave s
prostorno
raspodijeljenim
parametrima

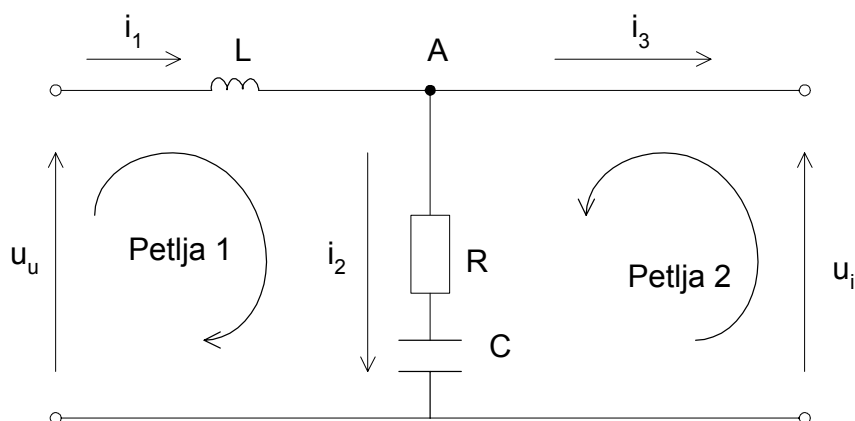
- Za **mehaničke sustave** su od posebne važnosti:

- Newtonovi zakoni;
- zakoni ravnoteža sila i momenata;
- zakoni održanja impulsa gibanja i energije.

- Za **termodinamičke sustave** su od posebne važnosti:

- zakoni očuvanja unutarnje energije ili entalpije;
- zakoni vođenja topline i prijenosa topline (često

povezani sa zakonima termodinamike i dinamike plinova).

Primjer 3.1.: Električki sustav (Sl. 3.1.)

Sl. 3.1.

- Za petlju 1:

$$u_u(t) = L \frac{di_1}{dt} + Ri_2 + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) d\tau + u_c(0).$$

- Za petlju 2:

$$u_i(t) = R \cdot i_2 + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) d\tau + u_c(o).$$

- Za čvor A:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0; \quad i_3 = 0 \Rightarrow i_1 = i_2 = i.$$

Iz ovih triju jednadžbi slijedi:

$$T_2^2 \frac{d^2 u_i}{dt^2} + T_1 \frac{du_i}{dt} + u_i = T_1 \frac{du_u}{dt} + u_u, \quad (\text{E} - 1)$$

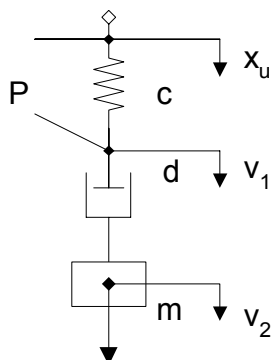
gdje je:

$$T_1 = RC, \quad T_2 = \sqrt{LC}.$$

Za rješenje ove diferencijalne jednadžbe 2. reda mora biti

poznato: $u_i(0)$ i $\dot{u}_i(0)$.

Promatrani fizikalni sustav posjeduje dva neovisna energetska spremnika (L i C)

Primjer 3.2.: Mehanički sustav (Sl. 3.2.)

v_1 , v_2 i x_u opisuju brzine u označenim točkama.

Sl. 3.2.

Prema Newtonovu zakonu je:

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F_i \quad (F_i - \text{vanjske sile}).$$

U promatranom slučaju je:

$$m \frac{dv_2}{dt} = d(v_1 - v_2).$$

Iz ravnoteže sila u točki P slijedi: (sila prigušenja = sila opruge):

$$d(v_1 - v_2) = c \int_0^t [x_u(\tau) - v_1(\tau)] d\tau.$$

Iz ovih dviju jednadžbi slijedi:

$$T_2^2 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + T_1 \frac{dv_1}{dt} + v_1 = x_u + T_1 \frac{dx_u}{dt}, \quad (\text{M} - 1)$$

gdje je:

$$T_1 = \frac{m}{d}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

prigušeni mehanički oscilator

Usporedi s dif. jednadžbom za električki sustav (E - 1):

imaju iste matematičke strukture

Analogije:

- sila F i struja $i \triangleq i$
- brzina v i napon $u \triangleq u$

(Koriste se i druge analogije, kao:

- sila F i napon $u \triangleq u$
- brzina v i struja $i \triangleq i$)

3.2. Opis sustava pomoću specijalnih izlaznih signala

1. Prijelazna funkcija $h(t)$ (odziv na skokovitu pobudu $S(t)$)

$$S(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } t > 0 \\ 1/2 & \text{za } t = 0 \\ 0 & \text{za } t < 0 \end{cases}, \quad (3-1)$$

ako je pobuda sustava:

$$x_u(t) = \underbrace{x_{u0}}_{\text{konst.}} S(t), \quad (3-2)$$

tada je prijelazna funkcija:

$$h(t) = \frac{x_i(t)}{x_{u0}}. \quad (3-3)$$

2. Težinska funkcija (impulsni odziv) $g(t)$

To je odziv sustava na impulsnu funkciju $\delta(t)$.

$\delta(t)$ nije funkcija u smislu klasične analize, nego se mora promatrati kao poopćena funkcija ili **distribucija**.

step response (engl.)
Übergangsfunktion
(njem.)

skokovita funkcija
 \triangleq odskočna funkcija
 \triangleq jedinični skok

step function (engl.)
Sprungfunktion (njem.)
Einheitssprung (njem.)

impulsna funkcija \triangleq
 \triangleq jedinični impuls \triangleq
 \triangleq Diracova funkcija
impuls response

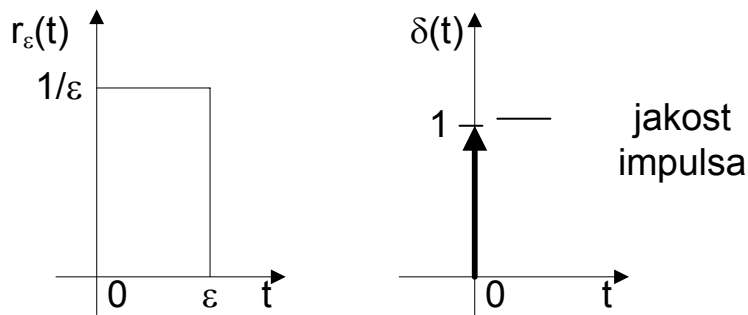
function
(engl.)

Gewichtsfunktion
(njem.)

Jednostavnosti radi, $\delta(t)$ se nadomješta pravokutnim impulsom:

$$r_\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{za } 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases} \quad (3 - 4)$$

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_\varepsilon(t) \text{ (Sl. 3.3.):} \quad (3 - 5)$$



Sl. 3.3.

$$(\delta(0) \rightarrow \infty)$$

Svojstva $\delta(t)$ su:

$$\delta(t) = 0 \text{ za } t \neq 0 \text{ i } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3 - 5)$$

U smislu teorije distribucija $\delta(t)$ i $S(t)$ su povezane na način:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} S(t). \quad (3 - 6)$$

Isto tako:

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t). \quad (3 - 7)$$

3. Konvolucijski integral (Duhamelov integral)

Promatramo dinamički sustav s:

$u(t)$ - ulaz (pobuda),

$y(t)$ - izlaz (odziv).

Tada vrijedi:

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau . \quad (3 - 8)$$

Ako je poznata težinska funkcija $g(t)$ sustava i pobuda $u(t)$, onda se može odrediti i odziv sustava $y(t)$.

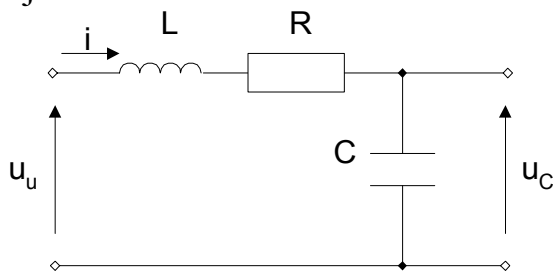
Isto tako:

dekonvolucijom se dobije, za poznati tok signala $u(t)$ i $y(t)$, težinska funkcija $g(t)$.

3.3. Prikaz u prostoru stanja

1. Prikaz u prostoru stanja za SISO sustave

Na RLC mreži (Sl. 3.4.) prikazat ćemo opis sustava u prostoru stanja.



Sl. 3.4.

Dinamičko vladanje sustava je u cijelosti definirano za $t \geq t_0$, ako su poznati:

- početne vrijednosti $u_C(t_0)$ i $i(t_0)$

i

- ulazni napon $u_u(t)$ za $t > t_0$.

Veličine $u_C(t)$ i $i(t)$ karakteriziraju **stanja** mreže i označavaju se **varijablama stanja** mreže.

Za promatranu mrežu vrijedi:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = u_u,$$

$$C \frac{du_C}{dt} = i.$$

⇓

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{L}u_C + \frac{1}{L}u_u,$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}i.$$

Matrični zapis:

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u_u.$$

Pri tome su početni uvjeti:

$$\begin{bmatrix} i(t_0) \\ u_C(t_0) \end{bmatrix}.$$

Prethodna linearna vektorska diferencijalna jednadžba opisuje odnos između ulazne veličine u i varijabli stanja \underline{x} :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u, \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (\text{početno stanje}). \quad (3 - 9)$$

Algebarska jednadžba koja opisuje odnos izlazne veličine y s varijablama stanja \underline{x} i ulaznom veličinom u glasi:

$$y = \underline{c}^T \underline{x} + d \cdot u. \quad (3 - 10)$$

Za analizirani primjer (Sl. 3.4.) je:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ u_C \end{bmatrix}; \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} i(t_0) \\ u_C(t_0) \end{bmatrix};$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad u = u_u;$$

$$\underline{c}^T = [0 \quad 1]; \quad d = 0.$$

2. Prikaz u prostoru stanja za MIMO sustave

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} \quad \text{s početnim uvjetom } \underline{x}(t_0), \quad (3 - 11)$$

$$\underline{y} = \underline{C} \underline{x} + \underline{D} \underline{u}. \quad (3 - 12)$$

gdje je:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad - \quad (n \times 1) - (n \times 1) \text{ vektor - vektor stanja};$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad - \quad (r \times 1) \text{ vektor - ulazni (upravljački) vektor};$$

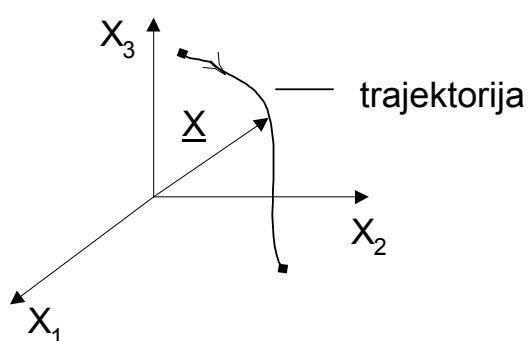
$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad - \quad (m \times 1) \text{ vektor - izlazni vektor};$$

<u>A</u>	$(n \times n)$ matrica	sistemska matrica;
<u>B</u>	$(n \times r)$ matrica	ulazna matrica (upravljачka matrica);
<u>C</u>	$(m \times n)$ matrica	izlazna matrica (matrica osmatranja, matrica mjerenja);
<u>D</u>	$(m \times r)$ matrica	ulazno/izlazna matrica.

Značajke prikaza u prostoru stanja:

1. SISO i MIMO sustavi mogu se formalno obrađivati na isti način;
2. Ovaj je prikaz jako prikladan za teoretsku analizu (analitička rješenja, optimiranje), kao i za numeričko računanje (s računalom);
3. Vrlo je jednostavno izračunavanje vladanja sustava uz poznat početni uvjet $\underline{x}(t_0)$;
4. Ima se dobar uvid u unutarnje vladanje sustava.
U ovakvom prikazu definiraju se opća sistemska svojstva, kao:
 - upravljivost,
 - osmotrivost.

Prikaz sustava u prostoru stanja (3-dimenzionalnom):



Sl. 3.5.

trajektorija \triangleq
 \triangleq putanja \triangleq
 \triangleq krivulja stanja

Svaka promjena stanja sustava u prostoru stanja predstavlja se dijelom trajektorije

4. OPIS LINEARNIH KONTINUIRANIH SUSTAVA U FREKVENCIJSKOM PODRUČJU

4.1. Laplaceova transformacija (L -transformacija)

- najvažnije pomoćno sredstvo za rješavanje linearnih diferencijalnih jednačbi s konstantnim koeficijentima

L - transformacija je linearna integralna transformacija:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (4 - 1)$$

jednostrana L - transformacija

gdje je:

$f(t)$ - **originalna funkcija (original)**;

gornje područje
(vremensko područje)

$F(s)$ - **slika funkcije (slika)**;

donje područje
(područje kompleksne
varijable)

$s = \sigma + j\omega$ - kompleksna varijabla.

Primjena definicijske relacije (4 - 1) temelji se na pretpostavkama:

za kauzalne sustave

a) $f(t) = 0$ za $t < 0$,

b) integral (4 - 1) mora konvergirati.

Pridruženje između slike i originala:

$$F(s) = L\{f(t)\}$$

ili

$$F(s) \bullet \text{---} \circ f(t).$$

• **Integral za obrnutu (inverznu) L - transformaciju**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad t > 0 \quad (4 - 2)$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}.$$

c - konstanta koja je veća od realnog dijela pojedinih singularnih točaka F(s).

Da bi se izbjeglo računanje $L^{-1}\{F(s)\}$ postoje **korespondentne tablice** L - transformacija:

Br.	Vremenska funkcija $f(t)$, $f(t) = 0$ za $t < 0$	L - transformacija $F(s)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$S(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	t	$\frac{1}{s^2}$
4.	t^2	$\frac{2}{s^3}$
5.	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
6.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7.	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8.	$t^2 e^{-at}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$
9.	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10.	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
11.	$\frac{1}{a^2}(e^{-at} - 1 + at)$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
12.	$(1 - at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
13.	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}$
14.	$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
15.	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
16.	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
17.	$\frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)$	$F(as) \quad (a > 0)$
18.	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
19.	$f(t-a) \text{ za } t > a \geq 0$ $0 \text{ za } t < a$	$e^{-as} F(s)$
20.	$-t f(t)$	$\frac{d^n F(s)}{ds}$
21.	$(-t)^n f(t)$	$\frac{d^n F(s)}{ds^n}$
22.	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(p) F_2(s-p) dp$

• **Glavna svojstva L - transformacije**

a) Teorem superpozicije:

$$L\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s), \quad (4 - 3)$$

za proizvoljne konstante a_1 i a_2 .

b) Teorem sličnosti:

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad (4 - 4)$$

za proizvoljnu konstantu $a > 0$.

c) Teorem pomaka:

$$L\{f(t - a)\} = e^{-as} F(s), \quad (4 - 5)$$

za proizvoljnu konstantu $a > 0$.

d) Teorem o deriviranju:

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^+). \quad (4 - 6)$$

Za derivaciju n - tog reda je:

$$L\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{(i-1)} f(t)}{dt^{(i-1)}} \bigg|_{t=0^+}.$$

e) Teorem o integriranju

$$L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s) . \quad (4 - 7)$$

f) Teorem o konvoluciji (kompoziciji) u vremenskom području.

Kompozicija dviju funkcija $f_1(t)$ i $f_2(t)$:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau , \quad (4 - 8)$$

$$L\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s) . \quad (4 - 9)$$

* znak za kompoziciju

g) Teorem o konvoluciji (kompoziciji) u frekvencijskom području:

$$L\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(p) F_2(s-p) dp , \quad (4 - 10)$$

p - kompleksna varijabla integracije .

h) Teoremi o graničnim vrijednostima

1. Teorem o početnoj vrijednosti

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) . \quad (4 - 11)$$

$f(t)$ je kauzalna funkcija

Dokaz:

$$L\{\dot{f}(t)\} = \int_{0^+}^{\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0^+)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^+)] .$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \dot{f}(t) e^{-st} = 0$$

(Ovdje je integracija neovisna o s , pa, uz pretpostavku konvergencije integrala, slijedi:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} \underbrace{\lim_{s \rightarrow \infty} \dot{f}(t) e^{-st}}_{=0} dt = 0).$$

2. Teorem o konačnoj vrijednosti

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (4 - 12)$$

Dokaz:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^+}^{\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^+)]$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[\int_{0^+}^{\infty} \dot{f}(t) dt + \underbrace{\int_{0^+}^{\infty} \dot{f}(t)(-st) dt + \int_{0^+}^{\infty} \dot{f}(t) \frac{(st)^2}{2!} dt + \dots}_0 \right].$$

$e^{-st} \rightarrow$ rastav u
Taylorov red

Ako $F(s)$ ima polove u $s = 0$ ili na imaginarnoj osi, ili u desnoj poluravnini s ravnine, tada se ne može primijeniti teorem o konačnoj vrijednosti.

• Obrnuta (inverzna) Laplaceova transformacija

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad t > 0. \quad (4 - 2)$$

Zbog složenosti određivanja $f(t)$ prema (4-2) koriste se **korespondentne tablice** L - transformacija.

Ako se u tablicama ne nalazi složenija funkcija $F(s)$, onda se ta funkcija prikaže sljedećim rastavom:

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s) \quad (4 - 13)$$

i primjeni L - transformacija:

$$\begin{aligned} L^{-1}\{F(s)\} &= L^{-1}\{F_1(s)\} + L^{-1}\{F_2(s)\} + \dots + L^{-1}\{F_n(s)\} = \\ &= f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) = f(t). \end{aligned} \quad (4 - 14)$$

$F(s)$ je u sustavima upravljanja često razlomljena **racionalna funkcija**:

$$F(s) = \frac{d_0 + d_1 s + \dots + d_m s^m}{e_0 + e_1 s + \dots + s^n} = \frac{Z(s)}{N(s)}. \quad (4 - 14)$$

Dva su slučaja

- $m > n$
- $m < n$

Faktorizacijom polinoma $N(s)$ u izrazu (4 - 14) dobije se:

$$F(s) = \frac{Z(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)}. \quad (4 - 15)$$

Polinom $N(s)$ ima n **korijena** (nul točaka): $s = s_1, s_2, \dots, s_n$. Ove nul točke predstavljaju **polove** od $F(s)$.

Ovisno o polovima, imamo sljedeće slučajeve:

Slučaj 1: $F(s)$ posjeduje samo **jednostruke polove**

$$F(s) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{s - s_k}. \quad (4 - 16)$$

c_k - **reziduum** (realna ili kompleksna konstanta)

$$f(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{s_k t}, \quad \text{za } t > 0 \quad (4 - 17)$$

Ovdje se c_k može odrediti:

- usporedbom koeficijenata
- ili
- teoremom o reziduumu:

$$c_k = \frac{Z(s_k)}{N'(s_k)} = (s - s_k) \frac{Z(s)}{N(s)} \Big|_{s=s_k}, \quad (4 - 18)$$

gdje je:

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$N'(s_k) = \frac{dN}{ds} \Big|_{s=s_k}.$$

Slučaj 2: $F(s)$ posjeduje i **višestruke polove**.

Ako imamo višestruke polove od $F(s)$, višestrukosti r_k ($k = 1, 2, \dots, l$), tada se rastavom u parcijalne razlomke dobije:

$$F(s) = \sum_{k=1}^l \sum_{v=1}^{r_k} \frac{c_{kv}}{(s - s_k)^v} \quad (4 - 19)$$

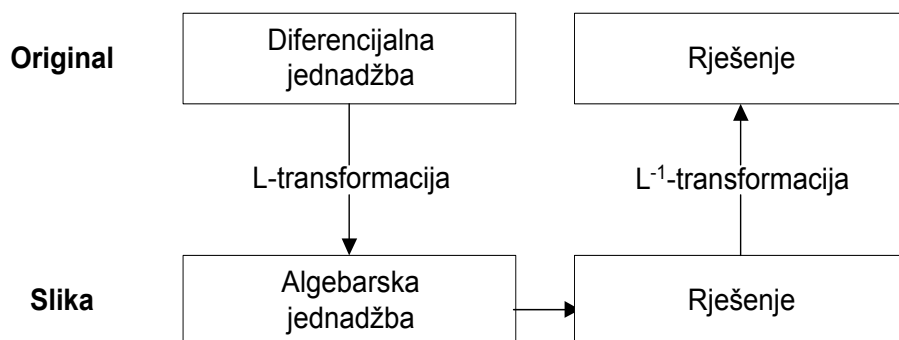
$$f(t) = \sum_{k=1}^l e^{s_k t} \sum_{v=1}^{r_k} \frac{c_{kv} t^{v-1}}{(v-1)!}, \quad \text{za } t > 0 \quad (4 - 20)$$

$$c_{kv} = \frac{1}{(r_k - v)!} \left\{ \frac{d^{(r_k - v)}}{ds^{(r_k - v)}} \left[F(s)(s - s_k)^{r_k} \right] \right\} \Big|_{s=s_k}. \quad (4 - 21)$$

c_{kv} može biti realan ili kompleksan.
 $0! = 1$ (prema definiciji).

Slučaj 3: $F(s)$ posjeduje i **konjugirano kompleksne polove**.

- **Rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi pomoću L - transformacije**



Sl. 4.1.

Rješenje **homogene** diferencijalne jednadžbe predstavlja **vlastito gibanje** sustava, dakle vladanje koje je ovisno samo o početnim uvjetima:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} = 0. \quad (4 - 22)$$

Za n početnih uvjeta:

$$\left. \frac{d^i x(t)}{dt^i} \right|_{t=0^+}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

primjenom L - transformacije na (4 - 22) dobije se:

$$X(s) \left[\sum_{i=0}^n a_i s^i \right] - \left[\sum_{i=0}^n a_i \sum_{v=1}^i s^{i-v} \frac{d^{v-1}}{dt^{v-1}} x(t) \right]_{t=0^+} = 0,$$

$$X(s) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \sum_{v=1}^i s^{i-v} \frac{d^{v-1}}{dt^{v-1}} x(t) \Big|_{t=0^+}}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{Z(s)}{N(s)}.$$

(4 - 23)

početni uvjeti sadržani su samo u polinomu brojnika

Vlastito gibanje opisano je polovima s_k ($k = 1, 2, \dots, n$) od $X(s)$, koji se dobiju rješenjem:

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i = 0. \quad (4 - 24)$$

Faktorizacijom (4 - 24) dobije se:

$$(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) = 0. \quad (4 - 25)$$

Izraz (4 - 23) može se, dakle, razložiti u parcijalne razlomke. Ako se radi, primjerice, o jednostrukim polovima, dobije se:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{s_k t}, \quad t > 0$$

Položaji polova s_k u s - ravnini u cijelosti karakteriziraju vlastito vladanje sustava opisanog homogenom diferencijalnom jednačinom:

Za slučaj $s_k < 0$	isčezavajuće oscilatorno vladanje
Za slučaj $s_k > 0$	raspirivajuće oscilatorno vladanje
Za slučaj $s_k = 0$	trajno osciliranje

Stoga se jednačina (4-24), odnosno (4-25) naziva **karakterističnom jednačinom sustava**. Polovi sustava s_k od $X(s)$ nazivaju se **vlastitim vrijednostima**.

4.2. Prijenosna funkcija

Linearni, kontinuirani, vremenski invarijantni sustav s koncentriranim parametrima opisuje se sljedećom diferencijalnom jednačbom:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j} . \quad (4 - 26)$$

Ako su svi **početni uvjeti** jednaki **nuli**, dobije se L - transformacijom:

$$Y(s) \sum_{i=0}^n a_i s^i = X(s) \sum_{j=0}^m b_j s^j$$

iz čega slijedi:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} = G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} . \quad (4 - 27)$$

$G(s)$ je **prijenosna funkcija** sustava.

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) . \quad (4 - 28)$$

Uvjet realizacije za prijenosnu funkciju $G(s)$:

$$\text{Stupanj}\{Z(s)\} \leq \text{Stupanj}\{N(s)\} . \quad (4 - 29)$$

Prijenosna funkcija sustava je L - transformacija impulsnog odziva sustava:

$$G(s) = L\{g(t)\} . \quad (4 - 30)$$

Dokaz:

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) x(\tau) d\tau \quad (3 - 8)$$

Primjenom L - transformacije i teorema o konvoluciji (4 - 9) slijedi (iz 3 - 8):

$$Y(s) = \underbrace{L\{g(t)\}}_{G(s)} X(s) .$$

Ovdje pretpostavljamo da nema **mrtvog vremena**.

Stupanj $\hat{=}$ Grad

Izlaz sustava dobije se konvolucijom ulaza $x(t)$ s težinskom funkcijom $g(t)$.

• *Polovi i nule prijenosne funkcije*

Za čitav niz istraživanja sustava prikladno je razlomljenu racionalnu prijenosnu funkciju $G(s)$ faktorizirati:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = k_0 \frac{(s - s_{N1})(s - s_{N2}) \cdots (s - s_{Nm})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \cdots (s - s_{pn})}, \quad (4 - 31)$$

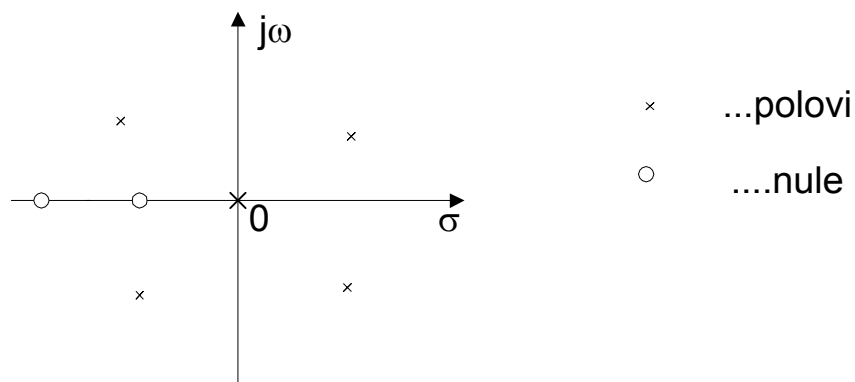
gdje je:

s_{Ni} - **nule** od $G(s)$

s_{pj} - **polovi** od $G(s)$

s_{Ni} i s_{pj} mogu biti:

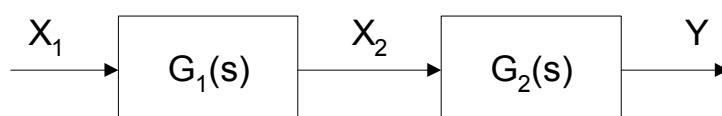
- **realni,**
- **konjugirano kompleksni.**



Sl. 4.2.

• *Operacije s prijenosnim funkcijama (blokovska algebra)*

a) **Serijski spoj (Sl. 4.3.)**



Sl. 4.3.

npr. u analizi
stabilnosti sustava

primjer

$$Y(s) = G_2(s) \cdot X_2(s),$$

$$X_2(s) = G_1(s) \cdot X_1(s),$$

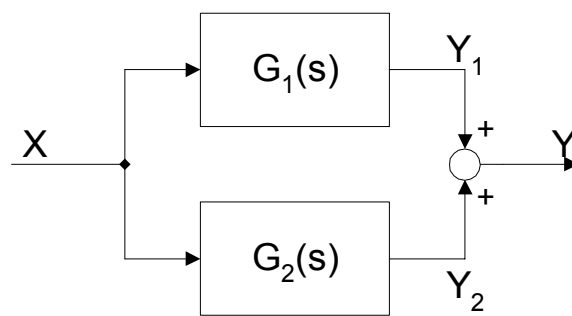
$$Y(s) = G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot X_1(s),$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X_1(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s). \quad (4 - 32)$$

Analogno je za serijski spoj n elemenata

$$G(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s).$$

b) Paralelni spoj (Sl. 4.4.)



Sl. 4.4.

$$Y_1(s) = G_1(s) \cdot X(s),$$

$$Y_2(s) = G_2(s) \cdot X(s),$$

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s),$$

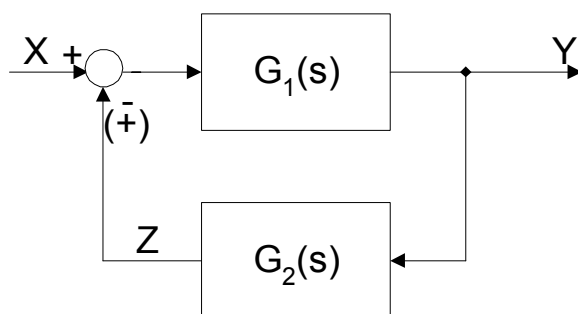
$$Y(s) = [G_1(s) + G_2(s)] X(s),$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s) + G_2(s). \quad (4 - 33)$$

Analogno je za paralelni spoj n elemenata

$$G(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s).$$

c) **Kružni spoj ili povratni spoj (Sl. 4.5.)**



Sl. 4.5.

$$Y(s) = \left[X(s) - Z(s) \right] G_1(s),$$

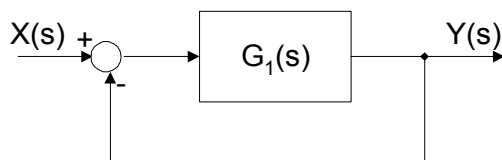
$$Z(s) = G_2(s) \cdot Y(s),$$

$$Y(s) = \left[X(s) - G_2(s)Y(s) \right] G_1(s),$$

$$Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)G_2(s)} \cdot X(s),$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)G_2(s)}. \quad (4 - 34)$$

Kružni spoj s jediničnom povratnom vezom (Sl. 4.6)

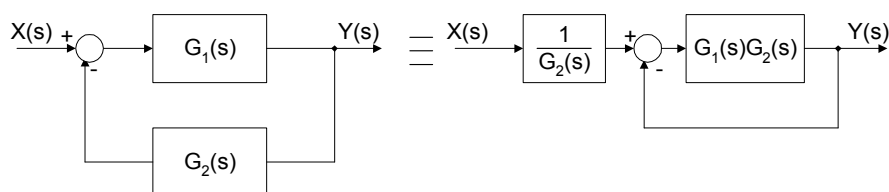


Sl. 4.6.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}. \quad (4 - 35)$$

S povratnom vezom
(negativnom ili
pozitivnom)

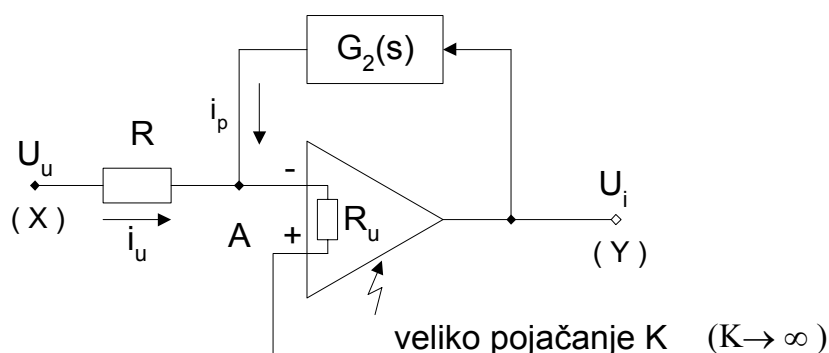
Svođenje na jediničnu povratnu vezu (Sl. 4.7.)



Sl. 4.7.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot \frac{G_2(s)}{G_2(s)} \Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{G_2(s)} \cdot \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

Primjer 4.1.: Operacijsko pojačalo s povratnom vezom (Sl. 4.8)



Sl. 4.8.

$$i_u + i_p = 0$$

jer je točka A virtualna nula (sumacijska točka).

Iz

$$\frac{I_p(s)}{U_i(s)} = G_2(s), \quad I_u(s) = \frac{U_u(s)}{R}, \quad (I_u(s) + I_p(s)) \cdot R_u \cdot K = -U_i(s)$$

slijedi:

$$G(s) = \frac{U_i(s)}{I_u(s)} = \frac{K}{1 + KG_2(s)} = \frac{1}{\frac{1}{K} + G_2(s)} = \frac{1}{G_2(s)}; \quad (4 - 36)$$

odnosno:

$$G(s) = \frac{1}{G_2(s)} = R \cdot \frac{U_i(s)}{U_u(s)}.$$

$$R_u \rightarrow \infty$$

Vanjska mreža oko operacijskog pojačala definira dinamička svojstva sklopa (regulatora).

U slučajevima gdje trajno regulacijsko odstupanje e_{∞} ima konačan iznos (izrazi (5 - 15), (5 - 19) i (5 - 24)), može se konstatirati da se za veće **kružno pojačanje K_o** dobije manje regulacijsko odstupanje.

Izborom tipa regulatora značajno se utječe kako na stacionarno tako i na dinamičko vladanje regulacijskog kruga.

Veliko pojačanje K_o može dovesti do nestabilnosti regulacijskog kruga.

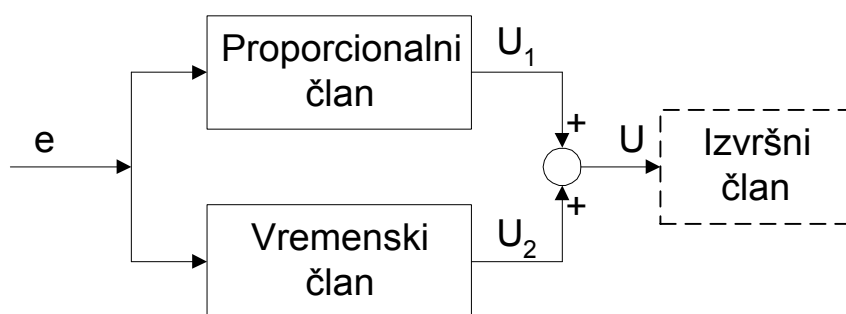
5.3. PID regulator i iz njega izvedeni tipovi regulatora

Regulator tvori regulacijsko odstupanje $e(t) = x_R(t) - y(t)$, koje se dalje obrađuje kako bi se dobila upravljačka veličina $u(t)$. Upravljačka veličina $u(t)$ osigurava, preko izvršnog člana, kontrolirani tok energije (materije) upravljanoj procesi i na taj način "držanje" regulirane veličine na određenom iznosu i uz djelovanje poremećajnih veličina.

Upravljanjani proces ne može trenutačno reagirati na promjenu upravljačke veličine $u(t)$, zbog vremenskog zatezanja, odnosno energetske (materijalne) spremnici procesa ne mogu se trenutačno puniti/prazniti. Brzina promjena stanja energetskih (materijalnih) spremnika procesa određena je vremenskim konstantama. Prema tome, struktura i parametri regulatora moraju proizaći iz strukture i parametara matematičkog modela procesa.

Proces sam po sebi može biti nestabilan. U tom slučaju regulator mora osigurati kompenzaciju nestabilnog rada procesa. Zato se prijenosni član $G_R(s)$ - regulator naziva i **kompenzacijskim članom** ili **korekcijskim članom**, jer korigira dinamiku procesa.

U osnovi se pretvorba regulacijskog odstupanja $e(t)$ u upravljački signal $u(t)$ obavlja na način prikazan slikom 5.7.



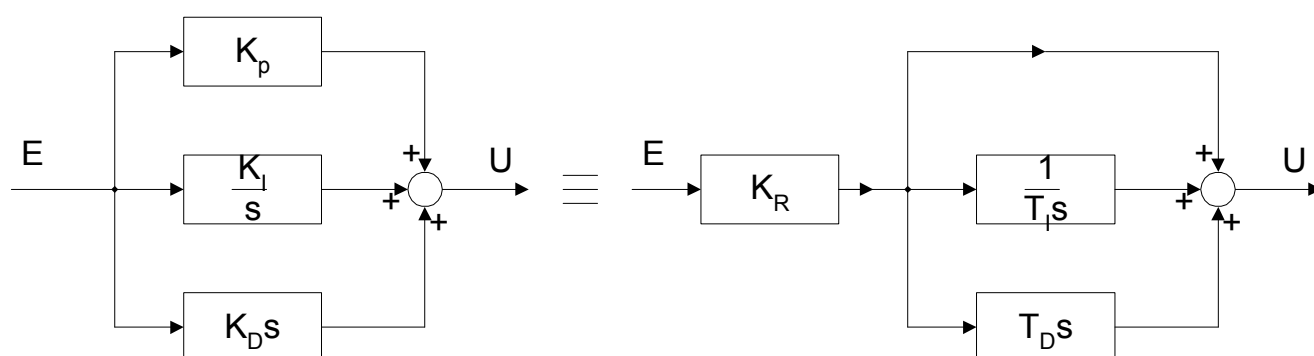
Sl. 5.7.

U praksi su danas široko u uporabi regulatori koji se zasnivaju na P, I i D djelovanju.

Najčešće korišteni standardni regulator je PID tipa.

u_1 : određeno
trenutačnim
iznosom e

u_2 : određeno prošlim
iznosima e i
tendencijom
promjene e



Sl. 5.8.

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \equiv K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right).$$

(5 - 27)

Ovdje je:

$K_R = K_P$ - koeficijent pojačanja,

paralelni spoj

prijenosna funkcija
idealnog PID
regulatora

controller gain (engl.)
Verstärkungsfaktor
(njem.)

$$T_I = \frac{K_P}{K_I} \quad - \text{integralna vremenska konstanta,}$$

$$T_D = \frac{K_D}{K_P} \quad - \text{derivacijska vremenska konstanta.}$$

integral (reset) time
(engl.)
Integralzeit (njem.)
(Nachstellzeit) (njem.)

derivative time (engl.)
Differentialzeit (njem.)
(Vorhaltzeit) (njem.)

K_R , T_I i T_D - obično se mogu **podešavati (ugadati)** u određenom području vrijednosti.

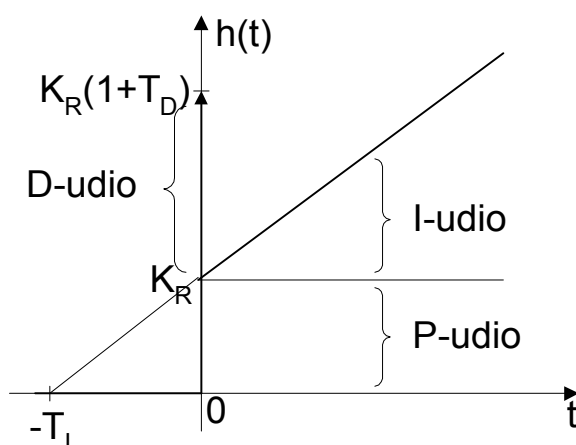
**podesivi (ugodivi)
parametri regulatora**

Izborom podesivih parametara regulatora, može se regulator prilagoditi vladanju procesa tako da se postigne najpovoljnije regulacijsko vladanje sustava.

Iz (5 - 27) dobije se:

$$U(t) = K_R e(t) + \frac{K_R}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + K_R T_D \frac{de(t)}{dt}. \quad (5 - 28)$$

Ako je $e(t) = S(t)$, onda se dobije prijelazna funkcija $h(t)$ PID regulatora (Sl. 5.9.).



Sl. 5.9.

Ovdje visina strelice $K_R T_D$ derivacijskog udjela predstavlja samo mjeru za otežavanje δ - impulsa.

Idealno D - vladanje ne može se tehnički realizirati. Stoga se umjesto idealnog D - člana koristi DT_1 - član:

$$G_D(s) = K_D \frac{T_v s}{1 + T_v s}, \quad (5 - 29)$$

pa se dobije za **realni** PID:

$$G_R(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \frac{T_v s}{1 + T_v s}, \quad (5 - 30a)$$

PID T_1 - regulator

odnosno

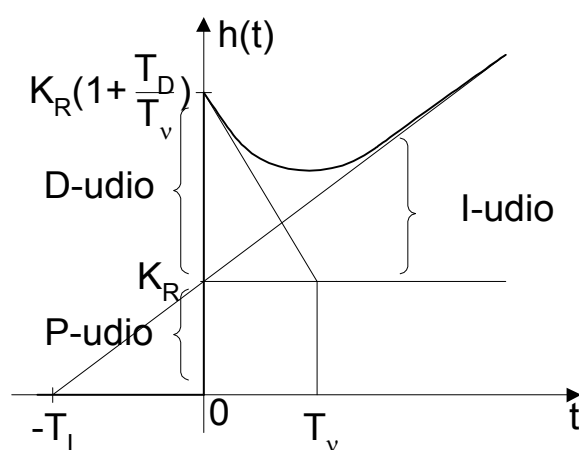
$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D \frac{s}{1 + T_v s} \right), \quad (5 - 30b)$$

T_v - mala vremenska konstanta (parazitna vremenska konstanta)

gdje su podesivi parametri:

$$K_R = K_P, \quad T_I = \frac{K_R}{K_I}, \quad T_D = \frac{K_D T_v}{K_R}.$$

$h(t)$ za realni PID ima oblik kao na slici 5.10.



Sl. 5.10.

forsiranje

Kao posebni slučajevi PID regulatora dobiju se:

a) $T_D = 0 \rightarrow$ **PI regulator:**

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right). \quad (5 - 31)$$

b) $T_I \rightarrow \infty \rightarrow$ **PD regulator:**

$$G_R(s) = K_R (1 + T_D s), \quad (5 - 32)$$

odnosno **PDT₁ regulator**

$$G_R(s) = K_R \left(1 + T_D \frac{s}{1 + T_v s} \right). \quad (5 - 33)$$

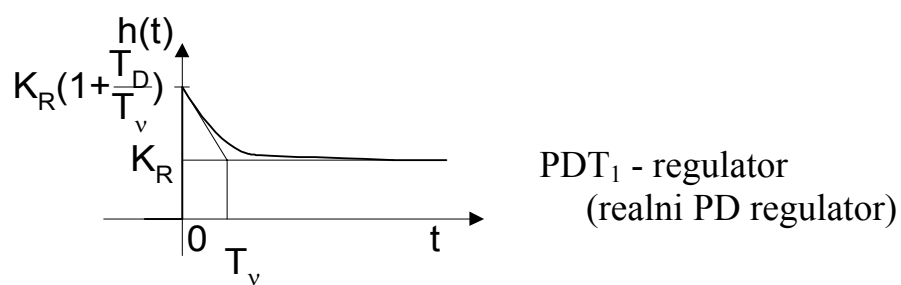
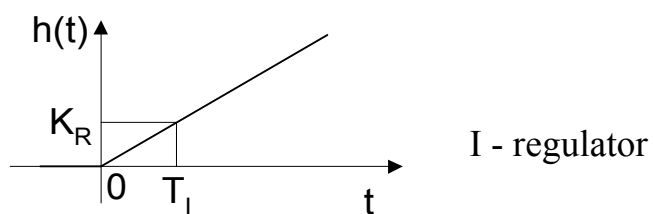
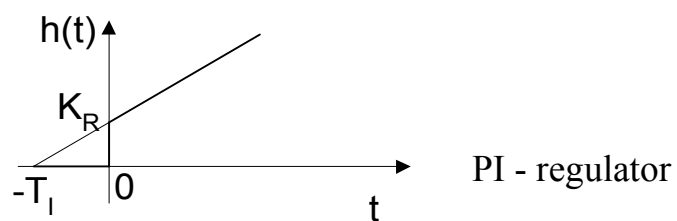
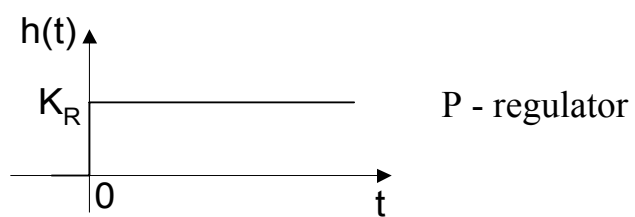
c) $T_D = 0$ i $T_I \rightarrow \infty \rightarrow$ **P regulator:**

$$G_R(s) = K_R. \quad (5 - 34)$$

d) **I – regulator:**

$$G_R(s) = \frac{K_I}{s} = \frac{K_R}{T_I s}. \quad (5 - 35)$$

Prijelazne funkcije za P, PI, I, PD i PDT₁ imaju oblike kako slijedi (Sl. 5.11.):



Sl. 5.11.

6. STABILNOST LINEARNIH KONTINUIRANIH SUSTAVA UPRAVLJANJA

6.1. Definicija stabilnosti i uvjeti stabilnosti

Regulacijski krug (sustav upravljanja) može zbog povratne veze biti nestabilan, tj. mogu nastupiti oscilacije regulirane veličine čije bi amplitude poprimile beskonačne vrijednosti (teoretski).

Sustav je stabilan ako se za ograničenu pobudu (ulazni signal) ima ograničeni odziv.

Prema tome, valjana bi bila sljedeća definicija stabilnosti:

Linearni vremenski nepromjenljivi sustav upravljanja asimptotski je stabilan ako za njegovu težinsku funkciju vrijedi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0 \quad (6 - 1)$$

*Sustav je **nestabilan** ako $g(t)$ poprimi beskonačan iznos za rastući t .*

*Sustav se nalazi na **granici stabilnosti** kada $g(t)$ poprimi konstantan iznos za rastući t .*

Prethodna definicija stabilnosti pokazuje da je kod linearnih sustava stabilnost **sistemska svojstvo**, budući da težinska funkcija u cjelosti opisuje sistemsko vladanje.

Ako je ispunjeno $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$, onda ne postoje takvi početni

uvjeti niti takve ograničene ulazne veličine koje mogu izazvati neograničeni rast izlazne veličine. Stoga bi se ova definicija mogla iskoristiti za ispitivanje stabilnosti linearnih sustava.

Međutim, često nije na raspolaganju $g(t)$; na raspolaganju je češće $G(s)$ (prijenosna funkcija sustava).

Ako $G(s)$ ima oblik racionalne prijenosne funkcije:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{Z(s)}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \quad (6 - 2)$$

i ako su:

Stabilnost sustava upravljanja osnovni je preduvjet njegove praktične primjene.

BIBO stable

(npr.: neprigušeni PT₂S - član, I - član)

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt$$

$s_k = \sigma_k + j\omega_k$ - polovi prijenosne funkcije, odnosno nule polinoma $N(s)$:

$$N(s) = a_n(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = \sum_{i=0}^n a_i s^i, \quad (6 - 3)$$

onda se dobije pripadajuća težinska funkcija $g(t)$ iz konačnog broja sumanada sljedećeg oblika:

$$g_k(t) = c_k t^\mu e^{s_k t}, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6 - 4)$$

gdje je:

c_k - općenito kompleksna konstanta,

μ - višestrukost pola s_k .

Iznos $g_k(t)$ dobije se kao:

$$|g_k(t)| = |c_k t^\mu e^{s_k t}| = |c_k| \cdot t^\mu e^{\sigma_k t}. \quad (6 - 4a)$$

Ako je $\sigma_k < 0$, onda $|g_k(t)| \rightarrow 0$ za $t \rightarrow \infty$.

Prema tome, **sustav je stabilan ako njegovi polovi imaju negativne realne dijelove.**

Ako je realni dio od s_k pozitivan ili ako se radi o višestrukom polu, koji je jednak nuli, tada $g(t)$ raste preko svih granica.

Prema tome, dovoljno je za ispitivanje stabilnosti sustava ispitati polove prijenosne funkcije $G(s)$ sustava, odnosno korjene s_k njegove karakteristične jednadžbe:

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n = 0. \quad (6 - 5)$$

Na temelju rečenog mogu se formulirati nužni i dovoljni **uvjeti stabilnosti** linearnih sustava:

a) *Asimptotska stabilnost*

$$\operatorname{Re} s_k < 0 \quad \text{za} \quad \forall s_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$|e^{j\omega t}| = 1$$

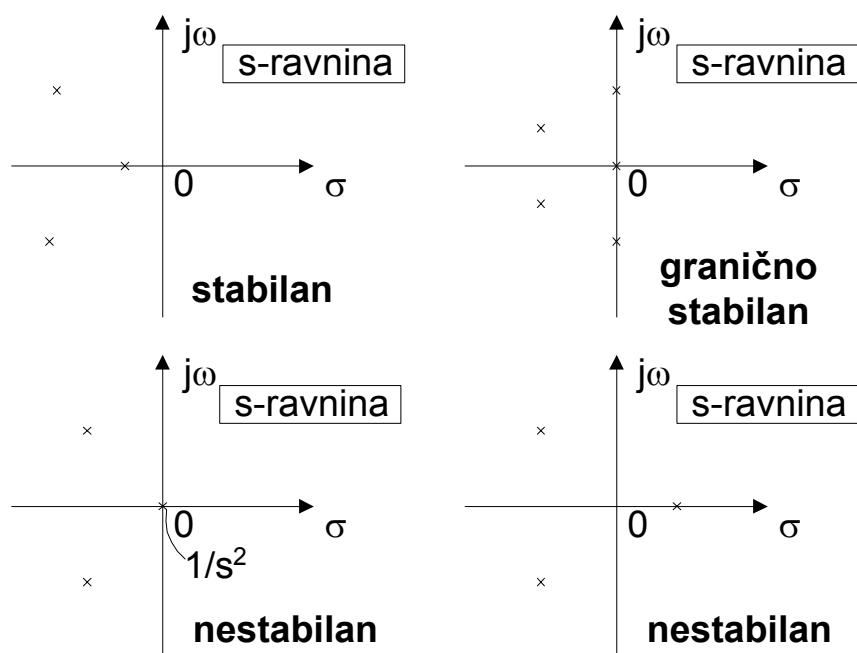
Svi polovi su u lijevoj poluravnini s-ravnine.

b) *Nestabilnost*

Barem jedan pol se nalazi u desnoj poluravnini s - ravnine ili ako se najmanje jedan višestruki pol (višestrukost $\mu \geq 1$) nalazi na imaginarnoj osi s - ravnine.

c) *Granična stabilnost*

Ne postoje polovi prijenosne funkcije sustava u desnoj poluravnini s - ravnine, niti višestruki polovi na imaginarnoj osi. Postoji međutim na imaginarnoj osi barem jedan **jednostruki pol**.



Sl. 6.1.

Evidentno je da za istraživanje stabilnosti nije nužno znati vrijednosti korjena karakteristične jednadžbe. Važno je znati da li se te vrijednosti nalaze u lijevoj ili desnoj poluravnini s - ravnine.

Za to se koriste **kriteriji stabilnosti**.

Ovi kriteriji mogu biti:

- * **algebarski (numerički),**
- * **grafički.**

analitički

6.2. Algebarski kriteriji stabilnosti

Algebarski kriteriji stabilnosti polaze od karakteristične jednačbe analiziranog sustava. Pri tome se postavljaju uvjeti na koeficijente a_i karakteristične jednačbe (6 - 5).

Nuždan, ali ne i dovoljan uvjet za asimptotsku stabilnost sustava, jest da su svi koeficijenti a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) karakteristične jednačbe različiti od nule i da su istog predznaka.

Dokaz:

Faktorizirajmo karakterističnu jednačbu (6 - 5):

$$(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0. \quad (6 - 6)$$

Neka prvih $2q$ korjena (od ukupno n korjena) tvori q konjugirano-kompleksnih korjenskih parova:

$$s_{2k-1}, s_{2k} = \sigma_{2k} \pm j\omega_{2k}, \text{ za } k = 1, 2, \dots, q$$

onda se dobije:

$$\prod_{k=1}^q (s - \sigma_{2k} - j\omega_{2k})(s - \sigma_{2k} + j\omega_{2k}) \prod_{k=2q+1}^n (s - \sigma_k) = 0. \quad (6 - 7)$$

Za asimptotsku stabilnost vrijedi:

$$\sigma_k < 0, \text{ odnosno } \sigma_k = -|\sigma_k| \text{ za sve realne dijelove } \sigma_k.$$

Iz jednačbe (6 - 7) slijedi:

$$\prod_{k=1}^q \left[(s + |\sigma_{2k}|)^2 + \omega_{2k}^2 \right] \prod_{k=2q+1}^n (s + |\sigma_k|) = 0. \quad (6 - 8)$$

Nakon množenja u jednačbi (6 - 8) dobiju se za koeficijente a_i ispred članova s^i ($i = 0, 1, \dots, n$) samo pozitivne i od nule različite vrijednosti.

Ovo nije i dovoljan uvjet za stabilnost.

Za određivanje **dodatnih uvjeta stabilnosti** promotrimo sustav koji se nalazi na granici stabilnosti. Neka taj sustav ima par polova na imaginarnoj osi:

$$s_{i,i+1} = \pm j\omega_i, \quad (\omega_i \neq 0). \quad (6 - 8)$$

Ovom paru polova odgovara komponenta težinske funkcije:

$$g_i(t) = c_i \cos(\omega_i t + \varphi_i).$$

Ako je $s_i = j\omega_i$ korjen karakteristične jednačbe:

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n = 0,$$

onda se dobije:

$$a_0 + a_1(j\omega_i) + a_2(j\omega_i)^2 + \dots + a_n(j\omega_i)^n = 0$$

iz čega slijedi:

$$(a_0 - a_2\omega_i^2 + a_4\omega_i^4 - \dots + \dots) + j(a_1\omega_i - a_3\omega_i^3 + a_5\omega_i^5 - \dots + \dots) = 0. \quad (6 - 9)$$

⇓

$$a_0 - a_2\omega_i^2 + a_4\omega_i^4 - \dots + \dots = 0, \quad (6 - 10)$$

$$a_1 - a_3\omega_i^2 + a_5\omega_i^4 - \dots + \dots = 0. \quad (6 - 11)$$

Eliminacijom ω_i iz (6 - 10) i (6 - 11) dobiju se dovoljni uvjeti za granično stabilno vladanje sustava.

Primijenimo jednačbe (6 - 10) i (6 - 11) na sustav trećeg reda:

oscilacije konstantne amplitude

Zbog $\omega_i \neq 0$.

$\omega_i = \omega_{kr}$ - frekvencija trajnog osciliranja

$$\begin{aligned} a_o - a_2 \omega_i^2 &= 0 \\ a_1 - a_3 \omega_i^2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \omega_i^2 = \omega_{kr}^2 = \frac{a_o}{a_2} = \frac{a_1}{a_3}$$

$$\Downarrow$$

$$a_o a_3 - a_1 a_2 = 0 .$$

Dakle, da bi sustav 3. reda bio asimptotski stabilan potrebno je ispuniti:

- a) uvjet predznaka,
- b) nejednadžbu

$$a_o a_3 - a_1 a_2 < 0 .$$

Za sustav 4. reda dobilo bi se:

$$a_4 a_1^2 + a_o a_3^2 - a_1 a_2 a_3 < 0 .$$

$$\left(\text{Ovdje je } \omega_i^2 = \omega_{kr}^2 = \frac{a_1}{a_3} . \right)$$

Prethodna razmatranja mogu se interpretirati kroz prikladne kriterije stabilnosti.

• **Hurwitzov kriterij stabilnosti**

Polinom

$$P(s) = a_o + a_1 s + \dots + a_n s^n = a_n (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) \quad (6 - 12)$$

naziva se **Hurwitzovim polinomom** ako svi korjeni s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) imaju negativni realni dio.

Linerni sustav je asimptotski stabilan ako je njegov karakteristični polinom Hurwitzov polinom.

Hurwitzov kriterij stabilnosti može se izraziti pomoću nekoliko uvjeta koji se postavljaju na koeficijente Hurwitzova polinoma:

nužni i dovoljni uvjeti

1895.

$a_n > 0$

- a) svi koeficijenti a_i polinoma $P(s)$ su različiti od nule;
- b) svi koeficijenti a_i imaju pozitivan predznak;
- c) sljedećih n determinanti su pozitivne:

$$D_1 = a_1 > 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix} > 0, \quad (6 - 13)$$

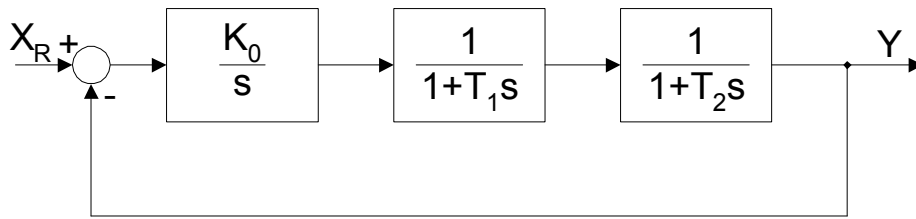
$$D_n = a_n D_{n-1} > 0.$$

Sljedeći poredak koeficijenata može poslužiti za postavljanje Hurwitzovih determinanti:

$$\begin{array}{l} D_1 \quad \begin{vmatrix} a_1 \end{vmatrix} \quad a_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ D_2 \quad \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \end{vmatrix} \quad a_1 \quad a_0 \quad 0 \\ D_3 \quad \begin{vmatrix} a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} \quad a_2 \quad a_1 \quad . \quad . \quad . \\ D_4 \quad \begin{vmatrix} a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} \quad a_3 \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}$$

U glavnoj dijagonali su koeficijenti a_1, a_2, \dots, a_n (rastući koeficijenti od desna na lijevo).

Hurwitzov kriterij prikladan je kako za ispitivanje stabilnosti, uz poznate koeficijente a_i , tako i za određivanje **područja vrijednosti podesivih parametara** sustava uz koje je sustav asimptotski stabilan.

Primjer 6.1.(Sl. 6.2.):

Sl. 6.2.

T_1 i T_2 - poznate vremenske konstante.

Treba odrediti područje vrijednosti K_0 da bi zatvoreni regulacijski krug bio asimptotski stabilan.

$$G_0(s) = \frac{K_0}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s)}$$

$$G_x(s) = \frac{Y(s)}{X_R(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

$$G_x(s) = \frac{K_0}{K_0 + s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1T_2s^3}$$

Karakteristična jednadžba zatvorenog kruga je:

$$K_0 + s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1T_2s^3 = 0 .$$

Uvjeti Hurwitzovog kriterija:

a) Koeficijenti

$$\begin{aligned} a_0 &= K_0, & a_2 &= T_1 + T_2, \\ a_1 &= 1, & a_3 &= T_1T_2, \end{aligned}$$

moraju biti pozitivni.

$$b) (a_1 a_2 - a_3 a_0) > 0,$$

odnosno:

$$T_1 + T_2 - T_1 T_2 K_0 > 0$$

↓

$$K_0 < \frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2}.$$

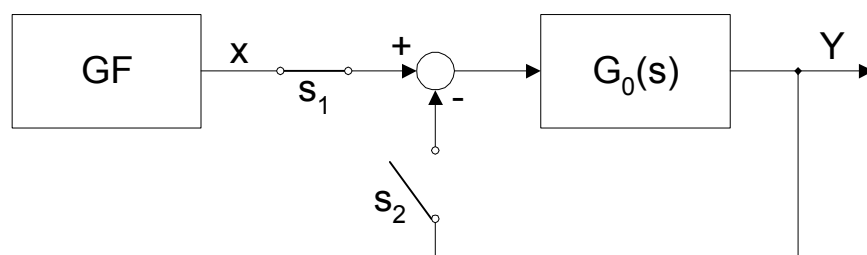
Prema tome, regulacijski krug je asimptotski stabilan za:

$$0 < K_0 < \frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2}.$$

Hurwitzov kriterij stabilnosti ekvivalentan je **Routhovom kriteriju stabilnosti**.

6.3. Grafički (grafoanalitički) kriteriji stabilnosti

- *Nyquistov kriterij stabilnosti*



Sl. 6.3.

$x(t) = X_m \sin \omega t$ - pobuda sustava generirana u generatoru funkcija (GF) promjenljive frekvencije ω .

Pretpostavimo da je na slici 6.3. sklopka S_2 otvorena (tj. povratna veza je prekinuta) i S_1 zatvorena.

1932.

fizikalno objašnjenje

Ako elementi sustava ne bi unosili vremenska kašnjenja (fazno zaostajanje), onda bi izlazni signal $y(t)$ bio u fazi s ulaznim signalom $x(t)$.

U realnom sustavu izlazni signal $y(t)$ fazno zaostaje za ulaznim signalom $x(t)$ s porastom frekvencije ω . Kod neke frekvencije ($\omega = \omega_1$) izlazni signal može fazno zaostajati za 180° , što znači da su $x(t)$ i $y(t)$ u **protufazi**. Pretpostavimo da je pri toj frekvenciji amplituda izlaznog signala Y_m jednaka amplitudi ulaznog signala X_m .

$$K_o = 1$$

Ako istovremeno isključimo ulazni signal $x(t)$ i uključimo signal povratne veze $y(t)$, signal povratne veze nadomjestit će ulazni signal. Sustav podržava oscilacije (**samooscilacije**); sustav se nalazi na **rubu stabilnosti**.

Ako je pak uz iste uvjete $K_o > 1$, sustav je **apsolutno nestabilan**, amplitude oscilacija bi se povećavale teoretski do beskonačnosti.

Za $K_o < 1$ sustav je stabilan.

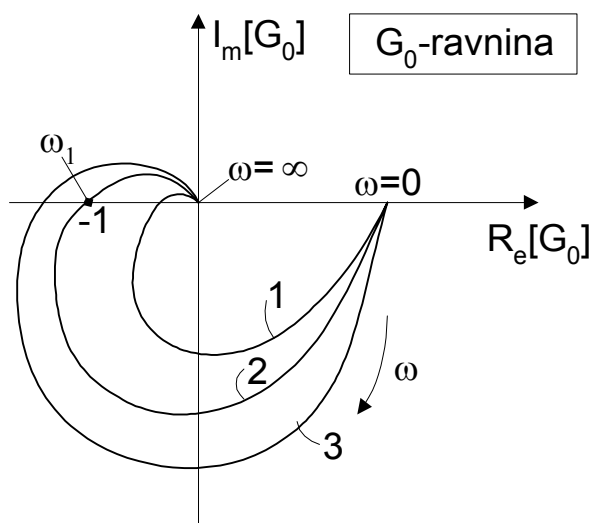
Stabilnost sustava određena je isključivo parametrima sustava; stabilnost ne ovisi o pobudi sustava.

* Grafička interpretacija fizikalnog objašnjenja

Promatramo otvoreni regulacijski krug: S_1 - zatvoreno, S_2 - otvoreno (Sl. 6.3.):

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \xrightarrow{s=j\omega} G_0(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}.$$

Pretpostavimo sustav 3. reda:



Sl. 6.4.

Na slici 6.4. iz frekvencijskog hodografa slijedi:

1 - sustav stabilan,

2 - sustav na granici stabilnosti

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = 1 \Rightarrow \begin{aligned} |y| &= |x| \\ \varphi &= -180^\circ, \end{aligned}$$

3 - sustav je apsolutno nestabilan

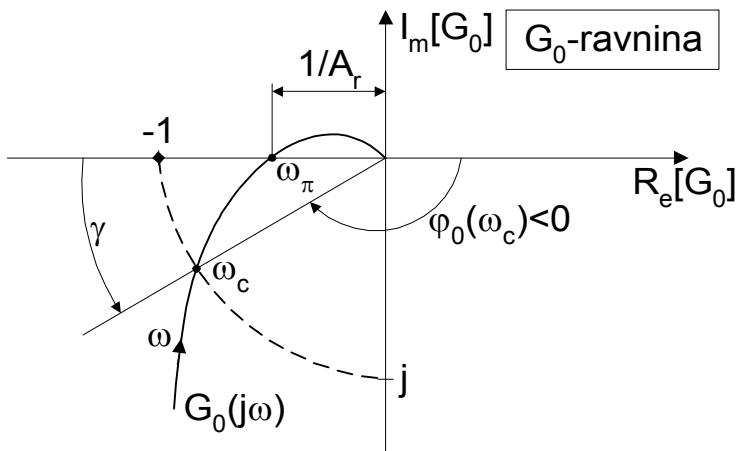
$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} > 1 \Rightarrow \begin{aligned} |y| &> |x| \\ \varphi &= -180^\circ, \end{aligned}$$

(Nyquistov dijagram siječe negativnu realnu os s lijeve strane točke: -1, j0).

Iz frekvencijske karakteristike otvorenog regulacijskog kruga $G_0(j\omega)$ zaključuje se o stabilnosti zatvorenog regulacijskog kruga.

Točka (-1, j0) označava se "kritičnom točkom".

- **Pokazatelji stabilnosti sustava upravljanja korištenjem Nyquistovog kriterija stabilnosti (Sl. 6.5.)**



Sl. 6.5.

* **Amplitudna rezerva (amplitudno osiguranje):**

$$A_r = \frac{1}{|G_0(j\omega_\pi)|}, \quad \arg G_0(j\omega_\pi) = -\pi,$$

$$[A_r \cdot |G_0(j\omega_\pi)| = 1]. \quad (6 - 14)$$

amplitudna pričuva
gain margin (engl.)
Amplitudenrand
(njem.)

* **Fazna rezerva (fazno osiguranje):**

$$\gamma = \pi + \arg G_0(j\omega_c) = \pi + \varphi_c(\omega_c), \quad (6 - 15)$$

gdje je:

ω_c - **presječna frekvencija** otvorenog regulacijskog kruga $G_0(j\omega)$.

fazna pričuva
phase margin (engl.)
Phasenrand (njem.)

Pri tome je:

$$|G_0(j\omega_c)| = 1. \quad (6 - 16)$$

Sustav je stabilan ako je:

$$\omega_c < \omega_\pi.$$

crossover frequency
(engl.)
Durchtrittsfrequenz
(njem.)

Prosječna frekvencija
predstavlja mjeru
"dinamičnosti"
regulacijskog kruga.

Sustav je prigušeniji i sporiji za veće iznose A_r i γ .

Amplitudno osiguranje nema smisla za sustave 1. i 2. reda. Zato je fazno osiguranje bolja mjera za ocjenu stabilnosti sustava.

Za praktičnu primjenu je orijentacijski:

$$30^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ, \quad (\text{za slijednu regulaciju})$$

$$20^\circ \leq \gamma \leq 50^\circ, \quad (\text{za stabilizaciju})$$

$$12dB \leq A_r \leq 20dB, \quad (\text{za slijednu regulaciju})$$

$$3,5dB \leq A_r \leq 9,5dB. \quad (\text{za stabilizaciju})$$

Dobre strane Nyquistovog kriterija stabilnosti:

- * nije potrebno poznavati diferencijalnu jednadžbu sustava; polarna krivulja se može odrediti pokusom ili iz poznatih prijenosnih funkcija pojedinih elemenata,
- * pored apsolutne stabilnosti dolazi se do uvida i u relativnu stabilnost preko amplitudne i fazne rezerve,
- * može se odrediti utjecaj pojedinačno svakog elementa sustava što je važno sa stajališta i analize i sinteze,
- * mogu se analizirati i sustavi s raspodijeljenim parametrima (npr. sustavi s mrtvim vremenima).

Nedostaci Nyquistovog kriterija stabilnosti:

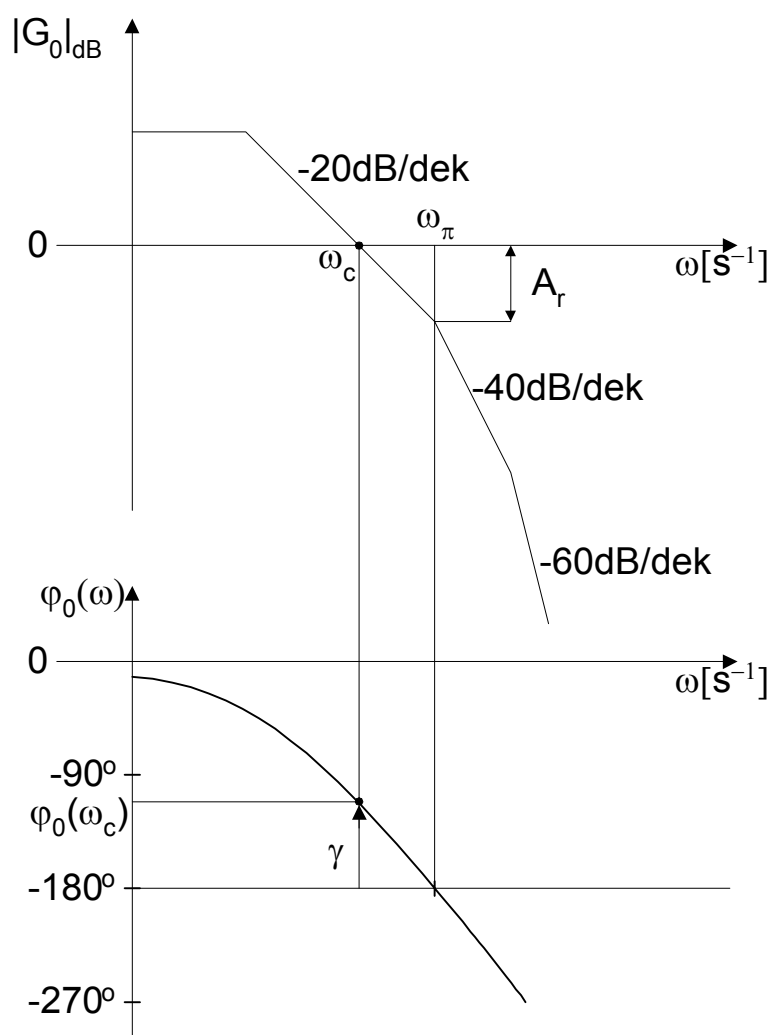
- * iziskuje puno vremena da se dođe do informacije o stabilnosti sustava.

• *Bodeov kriterij stabilnosti*

Vrlo je praktičan i često se koristi.

Razmatranja provedena uz Nyquistov dijagram lako se mogu prenijeti u Bodeov dijagram.

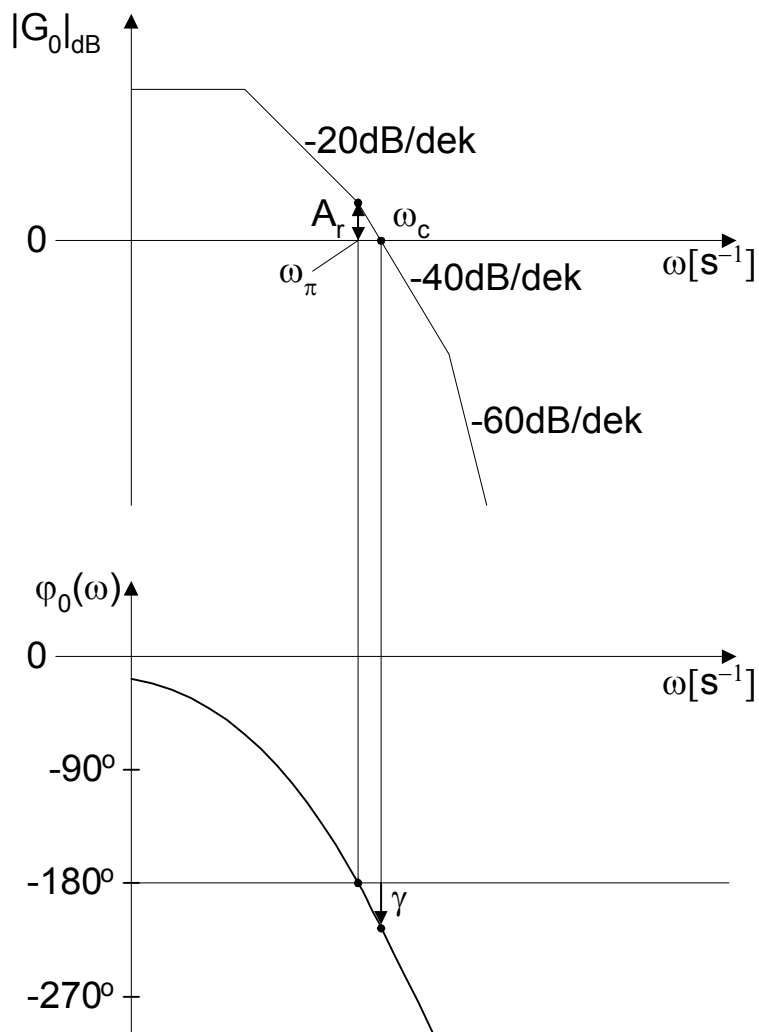
1. Ako otvoreni regulacijski krug ima pojačanje manje od 1 (0 dB) na frekvenciji kod koje je fazno kašnjenje 180° , onda je regulacijski krug stabilan.



Sl. 6.6.

$$|G_o|_{\text{dB}} \triangleq L_0 [\text{dB}]$$

sustav je stabilan



Sl. 6.7.

sustav je nestabilan
 $(\omega_c > \omega_\pi)$
 $\varphi_0(\omega)$ siječe liniju
 -180° uz $|G_0| > 0$ dB

Gruba procjena stabilnosti sustava:

sustav je vjerojatno nestabilan ako $|G_0|_{dB}$ siječe
 frekvencijsku os pod nagibom - 40 dB/dek.

Bodeov dijagram veoma je prikladan za analizu i sintezu
 sustava upravljanja:

- * vrlo je zoran utjecaj parametara sustava na stabilnost sustava;
- * relativno je jednostavno povezati frekvencijske karakteristike otvorenog sustava s vremenskim ponašanjem zatvorenog sustava upravljanja.

