FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo

SEMINAR IZ 1. LABORATORIJSKE VJEŽBE

Modeliranje dinamičkih sustava

Ime i Prezime
JMBAG

Zagreb, ak. god. 2016/2017

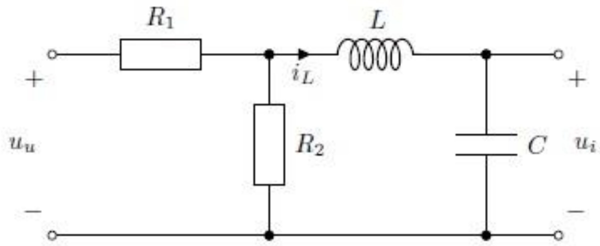
Uvod

Matematički modeli su matematički objekti koji se koriste za opis sustava čija se stanja mijenjaju u vremenu. Glavna svrha modeliranja u automatici su analiza i sinteza sustava upravljanja. Za uspješno projektiranje sustava upravljanja te njegovu analizu i sintezu neophodno je dobro poznavanje vladanja procesa kao dinamičkih sustava. Vladanje procesa se opisuje matematičkim modelom odnosno stacionarnim modelom te dinamičkim modelom. Stacionarni model opisuje vladanje sustava u uravnoteženom stanju, dok dinamički opisuje vladanje sustava pri prijelazu iz jednog stanja u drugo stanje. Cilj ove zadaće je doći do matematičkog modela sustava teoretskom analizom za neke tipične primjere iz prakse.

Zadatak 1

Na slici 1 prikazana je shema električnog kruga. Zadani su parametri sustava:

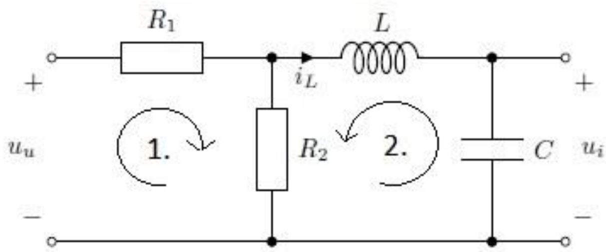
R_1 = 20 Ω, R_2 = 40 Ω, L = 0.01 H, C = 1.5 μF.



Slika 1: Električni krug.

a) Odredite diferencijalnu jednadžbu koja modelira ovisnost izlaznog napona $u_i(t)$ o ulaznom naponu $u_u(t)$. Jednadžbu treba svesti na oblik u kojem je koeficijent uz $u_i(t)$ jednak 1.

<u>Rješenje:</u>



Slika 2: Analiza električnog kruga.

1) $u_u = i_1 R_1 + i_1 R_2 - i_L R_2$
2) $u_i = i_1 R_2 - i_L R_2 - \dot{i}_L L$
3) $u_i = u_C = \frac{1}{C}\int i_L d\tau \; / \frac{d}{dt}$ => $i_L = C\dot{u}_i$ => $\dot{i}_L = C\ddot{u}_i$

1) $u_u = i_1(R_1 + R_2) - R_2 C\dot{u}_i$ => $i_1 = \frac{u_u + R_2 C\dot{u}_i}{R_1 + R_2}$
2) $u_i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_u + \frac{R_2^2 C}{R_1 + R_2}\dot{u}_i - R_2 C\dot{u}_i - LC\ddot{u}_i$

$$\boxed{LC\ddot{u}_i + \frac{R_1 R_2\, C}{R_1 + R_2}\dot{u}_i + u_i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_u}$$

b) Odredite izraze koji opisuju ovisnost stacionarnog iznosa napona u_{C0} i struje i_{L0} o iznosu ulaznog napona u_{u0}. Jesu li statičke karakteristike sustava dovoljne za zaključivanje o linearnosti sustava?

<u>Rješenje:</u>

Kako se radi o statičkim karakteristikama sustava vrijedi:

$$\ddot{u}_\imath = \dot{u}_\imath = 0,$$

pa stoga slijedi da je napon u_{C0} te struja i_L:

$$\boxed{u_{C0} = u_i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_{u0}}$$

$$\boxed{i_L = C\dot{u}_\imath = 0}$$

Možemo ustanoviti da nije dovoljno poznavati statičke karakteristike sustava kako bi zaključili radi li se o linearnom sustavu jer su za istosmjernu struju kapacitivni i induktivni otpor jednaki beskonačno odnosno nula.

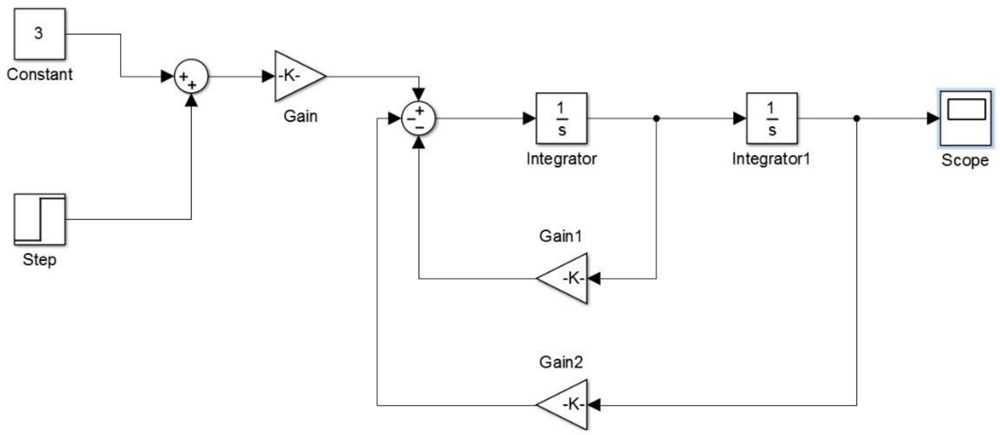
c) Odredite vremenski odziv izlaznog napona $u_i(t)$ uz pobudni signal $u_u(t) = \big(3 + 2S(t - 0.002)\big)\,V$. Početna stanja modela postavite na iznose koji odgovaraju njihovim stacionarnim vrijednostima uz $u_{u0} = 3\ V$.

<u>Rješenje:</u>

Zadatak počinjemo rješavati na način da odredimo početne uvjete:

Od $-\infty$ do 0 pobuda je konstantna i jednaka 3.

U trenutku t = 0: $u_i(0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_{u0} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2,\ \dot{u}_\imath(0) = 0$



Slika 3: Simulink shema

$$LC\ddot{u}_i + \frac{R_1 R_2\ C}{R_1 +\ R_2}\dot{u}_i + u_i = \frac{R_2}{R_1 +\ R_2}u_u \ /: LC$$

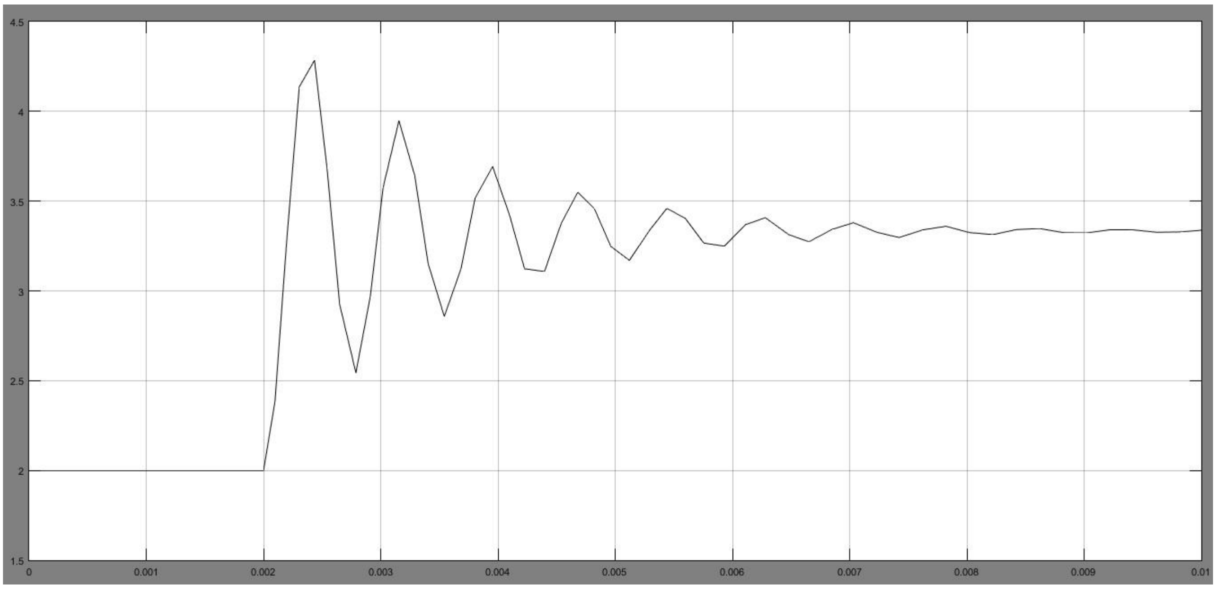
$$\ddot{u}_i = -\frac{1}{L}\frac{R_1 R_2}{R_1 +\ R_2}\dot{u}_i - \frac{1}{LC}u_i + \frac{1}{LC}\frac{R_2}{R_1 +\ R_2}u_u$$

$$\ddot{u}_i = -gain1 \cdot \dot{u}_i - gain2 \cdot u_i + gain \cdot u_u$$

$$gain = \frac{1}{LC}\frac{R_2}{R_1 +\ R_2} = 44{,}444{,}444.44$$

$$gain1 = -\frac{1}{L}\frac{R_1 R_2}{R_1 +\ R_2} = -1{,}333.33$$

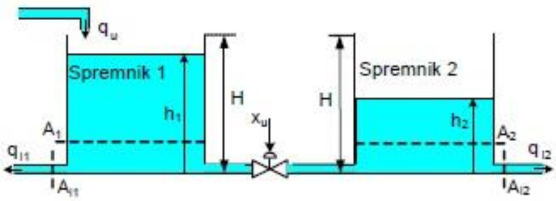
$$gain2 = -\frac{1}{LC} = -66{,}666{,}666.67$$



Slika 4: Vremenski odziv izlaznog napona $u_i(t)$

Zadatak 2

Na slici 5 prikazana je principna shema sustava skladištenja fluida.



Slika 5: Sustav skladištenja fluida

Razina fluida u spremnicima regulira se promjenom otvorenosti ventila $x_u(t)$ koja može poprimiti vrijednosti između 0 (potpuno zatvoren ventil) i 1 (potpuno otvoren ventil). Karakteristika ventila opisana je izrazom

$$q(t) = A_v\sqrt{\rho}\sqrt{2\Delta p} \cdot x_u,$$

pri čemu je:

x_u – otvorenost ventila,

A_v – poprečni presjek potpuno otvorenog ventila [m^2],

Δp – razlika tlakova na krajevima ventila [Pa],

ρ – gustoća fluida [kg/m^3],

q – maseni protok kroz ventil [kg/s].

Parametri sustava su:

$q_u = Q_{u0} = 30\ kg/s$ – ulazni maseni protok u prvi spremnik

$A_1 = 2\ m^2$ – površina poprečnog presjeka spremnika 1,

$A_2 = 3\ m^2$ – površina poprečnog presjeka spremnika 2,

$A_v = 0.001\ m^2$ – poprečni presjek potpuno otvorenog ventila,

$A_{i1} = 0.002\ m^2$ – površina poprečnog presjeka izlazne cijevi prvog spremnika,

$A_{i2} = 0.001\ m^2$ – površina poprečnog presjeka izlazne cijevi drugog spremnika,

$\rho = 1000\ kg/m^3$ – gustoća fluida,

$H = 10\ m$ – visina spremnika 1 i spremnika 2,

$g = 9.81\ m/s^2$ – gravitacijsko ubrzanje.

Napomena: Prilikom računanja izlaznih protoka iz spremnika može se uzeti da je $A_{i1}, A_{i2}, A_v \ll A_1, A_2$.

a) Odredite diferencijalne jednadžbe koje opisuju ponašanje razine fluida u spremnicima 1 i 2. Pritom obratite pozornost na smjer protoka fluida između dva spremnika!

Rješenje:

Za spremnik 1 vrijedi:

1) $q_{1uk} = q_u - q_{i1} - q$
2) $q_{1uk} = \dot{V}_1\rho = A_1\dot{h}_1\rho$
3) $q_u = konst.$

$$\frac{\rho}{2}V_1^2 = \rho g h_1$$

$$V_1^2 = 2gh_1 => V_1 = \sqrt{2gh_1}$$

4) $q_{i1} = V_1 A_{i1}\,\rho = A_{i1}\,\rho\sqrt{2gh_1}$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g(h_1 - h_2)$$

5) $q = A_v\sqrt{\rho}\sqrt{2\Delta p}\cdot x_u = A_v\rho\sqrt{2g(h_1 - h_2)}\cdot x_u$

2), 3), 4) i 5) → 1)

$$=> A_1\dot{h}_1\rho = q_u - A_{i1}\,\rho\sqrt{2gh_1} - A_v\rho\sqrt{2g(h_1 - h_2)}\cdot x_u$$

$$\boxed{\dot{h}_1 = \frac{q_u}{A_1\rho} - \frac{A_{i1}}{A_1}\sqrt{2gh_1} - \frac{A_v}{A_1}\sqrt{2g(h_1 - h_2)}\cdot x_u}$$

Za spremnik 2 vrijedi:

6) $q_{2uk} = q - q_{i2}$
7) $q_{2uk} = \dot{V}_2\rho = A_2\dot{h}_2\rho$

$$\frac{\rho}{2}V_2^2 = \rho g h_2$$

$$V_2^2 = 2gh_2 => V_2 = \sqrt{2gh_2}$$

8) $q_{i2} = V_2 A_{i2}\,\rho = A_{i2}\,\rho\sqrt{2gh_2}$

7), 8) i 5) → 6)

$$=> A_2\dot{h}_2\rho = A_v\rho\sqrt{2g(h_1 - h_2)}\cdot x_u - A_{i2}\,\rho\sqrt{2gh_2}$$

$$\boxed{\dot{h}_2 = \frac{A_v}{A_2}\sqrt{2g(h_1 - h_2)}\cdot x_u - \frac{A_{i2}}{A_2}\sqrt{2gh_2}}$$

b) Odredite funkcijsku ovisnost stacionarne vrijednosti visine fluida u spremnicima 1 i 2, H_{10} i H_{20}, o stacionarnoj vrijednosti otvorenosti ventila X_{u0}. Za koju stacionarnu vrijednost otvorenosti ventila počinje prelijevanje vode iz spremnika?

<u>Rješenje:</u>

Kako se radi o stacionarnoj vrijednosti visine fluida, vrijedi:

$$\dot{h}_1 = \dot{h}_2 = 0,$$

iz čega slijedi:

$q_u = A_{i1}\,\rho\sqrt{2gh_1} + A_v\rho\sqrt{2g(h_1 - h_2)} \cdot x_u$ za spremnik 1,

$A_v\rho\sqrt{2g(h_1 - h_2)} \cdot x_u = A_{i2}\,\rho\sqrt{2gh_2}$ za spremnik 2.

Nakon kombiniranja jednadžbi i sređivanja te uvrštavanja zadanih parametara dobivamo:

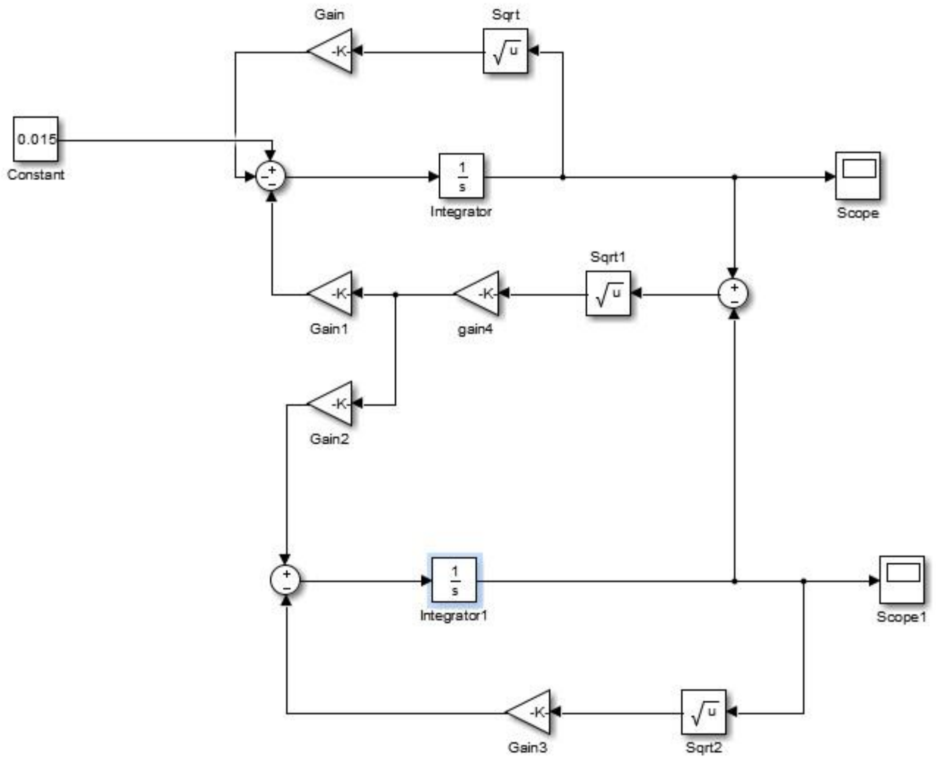
$$H_{10} = \left(\left(\frac{A_{i2}}{A_v X_{u0}}\right)^2 + 1\right)\left(\frac{Q_u}{A_{i1}\rho\sqrt{2g}\sqrt{\left(\frac{A_{i2}}{A_v X_{u0}}\right)^2 + 1} + A_{i2}\,\rho\sqrt{2g}}\right)^2$$

$$H_{20} = \left(\frac{Q_u}{A_{i1}\rho\sqrt{2g}\sqrt{\left(\frac{A_{i2}}{A_v X_{u0}}\right)^2 + 1} + A_{i2}\,\rho\sqrt{2g}}\right)^2$$

$$X_{u0} = \frac{A_{i2}}{A_v}\sqrt{\frac{h_2}{h_1 - h_2}} = \frac{1}{7} \approx 0.14$$

c) Modelirajte sustav skladištenja fluida unutar Simulinka te simulacijom provjerite rezultat iz prethodnog podzadatka.

Rješenje:



Slika 6: Simulink shema sustava skladištenja fluida

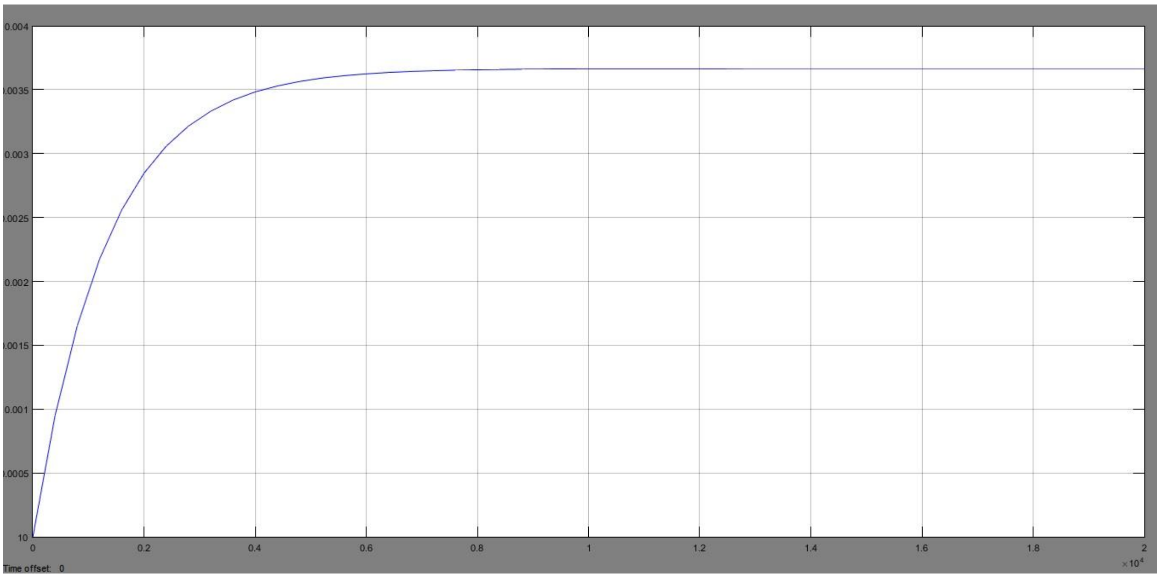
$$gain = \frac{A_{i1}}{A_1}\sqrt{2g} = 0.00443$$

$$gain1 = \frac{A_v}{A_1}\sqrt{2g} = 0.00221$$

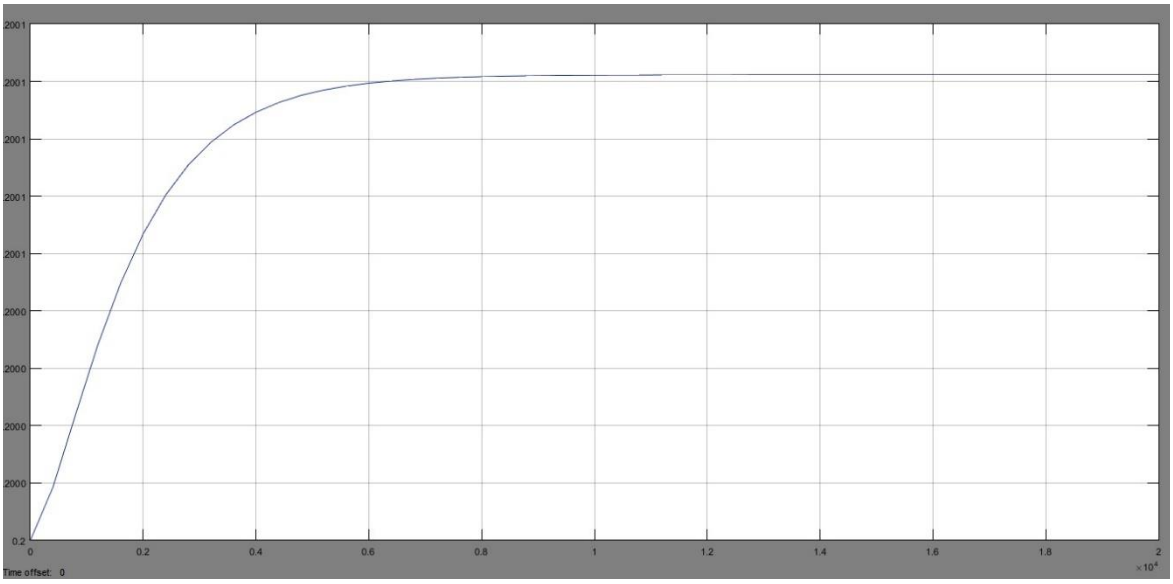
$$gain2 = \frac{A_v}{A_2}\sqrt{2g} = 0.00148$$

$$gain3 = \frac{A_{i2}}{A_2}\sqrt{2g} = 0.00148$$

$$gain4 = \frac{1}{7} = 0.14286$$



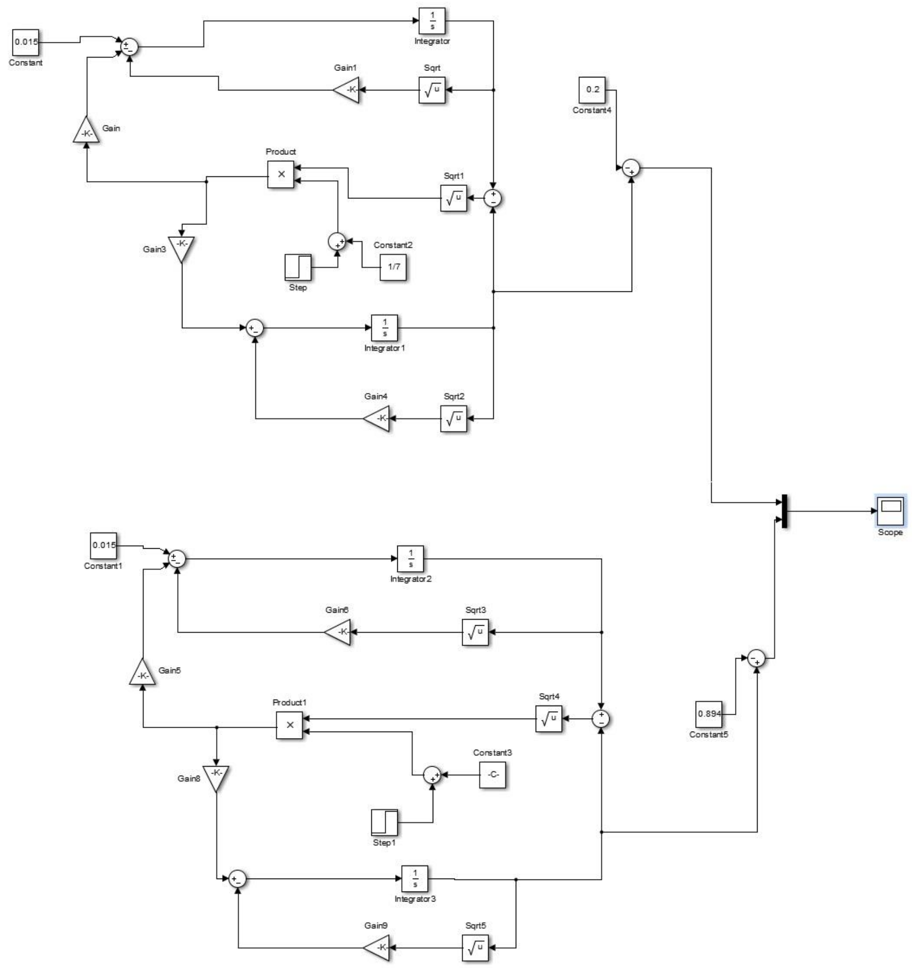
Slika 7: Odziv sustava (spremnik 1)



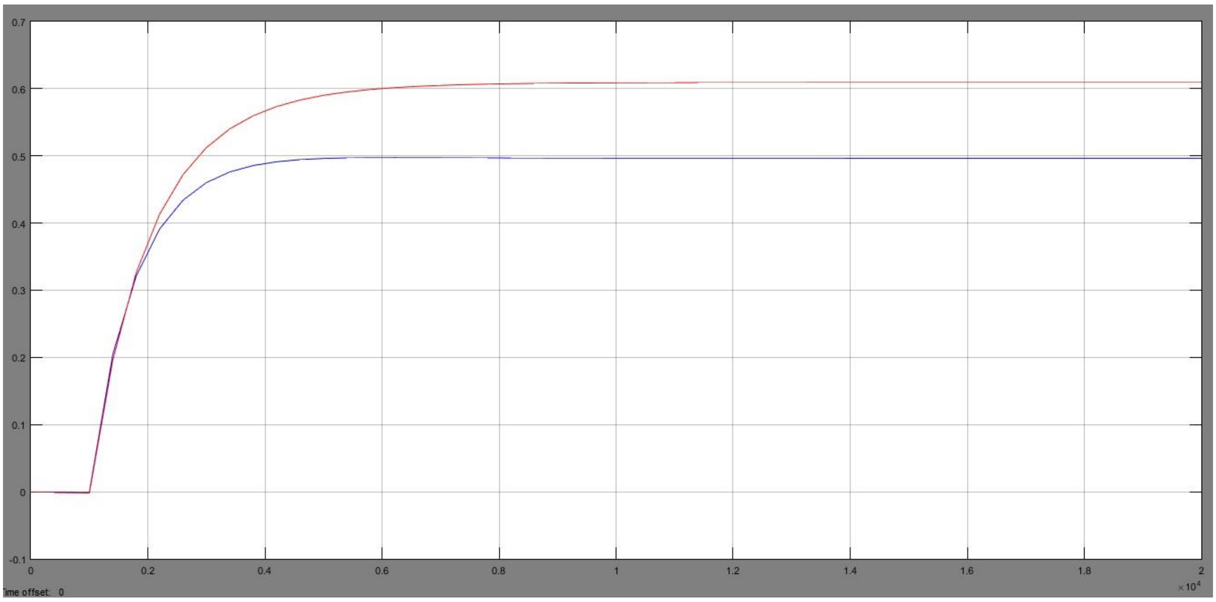
Slika 8: Odziv sustava (spremnik 2)

d) U simulacijskom modelu za proizvoljno odabranu otvorenost ventila X_{u0} simulirajte sljedeće slučajeve: (i) za otvorenost ventila $x_u(t) = X_{u0} \pm 0.15S(t-1000)$ i (ii) $x_u(t) = (X_{u0} + 0.2) \pm 0.15S(t-1000)$. Na jednom grafu usporedno prikažite vremenske odzive apsolutnog iznosa promjene visine drugog spremnika u odnosu na njegovo početno stanje, $|\Delta h_2| = |h_2(t) - h_2(0)|$. Komentirajte dobivene odzive osvrnuvši se na brzine prijelaznih pojava kao i na iznose promjene visine drugog spremnika Δh_2 u stacionarnom stanju.
Napomena: U trenutku promjene otvorenosti ventila sustav mora biti u stacionarnom stanju.

<u>Rješenje:</u>



Slika 9: Simulink shema sustava



Slika 10: Odziv sustava

Prijelazna pojava traje kraće u drugom slučaju $(X_{u0} + 0.2)$ jer se spremnik 2 brže puni kad je ventil otvoreniji. U stacionarnom stanju $\Delta h_2 = 0$.

Zaključak

Matematički modeli procesa osnova su za sintezu i analizu sustava automatskog upravljanja te se mogu dobiti pomoću sustavske analize procesa ili identifikacijom procesa. Modeli dobiveni sustavskom analizom temelje se na općem principu očuvanja – održavanja ravnoteže mase, energije i gibanja.