Međuispit

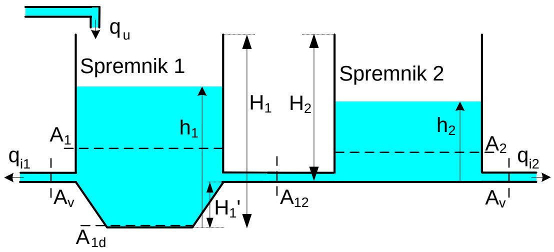
19. studenog 2012.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (6 bodova)

Na slici 1 prikazan je sustav skladištenja fluida.



Slika 1: Sustav skladištenja fluida.

Uz poznatu funkcijsku ovisnost površine presjeka prvog spremnika

$$A_1(h_1) = \begin{cases} A_{1d} + \frac{h_1}{H_1'}(A_1 - A_{1d}), \text{ ako } h_1 \leq H_1', \\ A_1, \text{ ako } h_1 > H_1', \end{cases} \tag{1}$$

potrebno je:

a) *(4 boda)* napisati sustav diferencijalnih jednadžbi $\dot{h}_1 = f_1(q_u, h_1, h_2)$ i $\dot{h}_2 = f_2(q_u, h_1, h_2)$ koje modeliraju dinamiku sustava,

b) *(2 boda)* izvesti izraz za proračun iznosa stacionarnog ulaznog protoka q_{u0} u ovisnosti o stacionarnom iznosu visine prvog spremnika H_{10}.

2. zadatak (8 bodova)

Jednadžba rakete lansirane vertikalno s površine Zemlje dana je sljedećim izrazom:

$$\dot{v} = -G\frac{m_Z}{(r+h)^2} - \frac{v_e}{m}\dot{m} \ ,$$

gdje je $G = 6.673\,84 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ gravitacijska konstanta, $m_Z = 5.9736 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ masa Zemlje, $r = 6.371 \times 10^6\,\mathrm{m}$ srednji radijus Zemlje, $v_e = 4500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ izlazna brzina raketnog goriva. Masa rakete (zajedno s gorivom) dana je s m, visina rakete s h, a $\dot{v}$ označava akceleraciju rakete i $\dot{m} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ maseni protok raketnog goriva.

Masenim protokom raketnog goriva ($\dot{m}$) upravlja se preko aktuatora koji se može aproksimirati PT1 članom, pa prijenosna funkcija ovisnosti mase rakete o upravljačkom signalu glasi:

$$G_M(s) = \frac{M(s)}{X_u(s)} = -\frac{0.2}{s(T_1 s + 1)} \ .$$

a) *(3.5 boda)* Napišite nelinearne diferencijalne jednadžbe stanja sustava, uz varijable stanja $\dot{m}$, m, h i v te ulaznu varijablu x_u.

b) *(4.5 boda)* Uz $x_u(t) = 2.5S(t)$ i $\dot{m}(0) = -0.5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ raketa u prvih 10 s leta dostiže otprilike $h(10) \approx 653\,\mathrm{m}$. Ako je $m(0) = 100\,\mathrm{kg}$ odredite $m(10)$ i linearizirajte sustav u radnoj točki određenoj s $t = 10\,\mathrm{s}$. Zapišite linearizirani sustav u prostoru stanja (odredite matrice **A**, **B**, **C** i **D**).

3. zadatak (10 bodova)

Prijenosna funkcija sustava zatvorenog jediničnom negativnom povratnom vezom glasi:

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s^3 + 2s^2 + 5s + 10} \ .$$

a) *(3 boda)* Nacrtajte Nyquistov dijagram otvorenog kruga.

b) *(3 boda)* Odredite $\frac{E(s)}{U(s)}$, gdje je $E(S) = U(s) - Y(s)$.

c) *(2 boda)* Odredite $e(\infty)$ uz $u(t) = S(t)$.

d) *(2 boda)* Odredite $e(\infty)$ uz $u(t) = tS(t)$.

4. zadatak (4 boda)

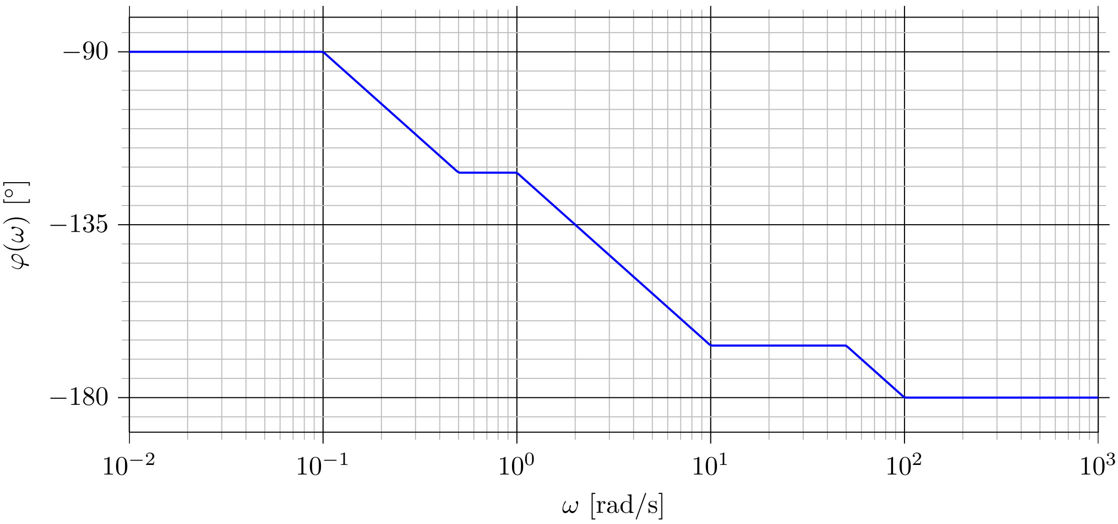
Zadana je prijenosna funkcija procesa s konjugirano-kompleksnim polovima

$$G_1(s) = \frac{10}{s^2 + 3s + 8}.$$

Odredite sve prijenosne funkcije G_2 s jednakim brojem polova kao G_1 za koje vrijedi: (i) $\sigma_2 = \sigma_1$ i (ii) $t_{m2} = 0.5 t_{m1}$.

5. zadatak (7 bodova)

Na slici 2 prikazana je aproksimacija fazno-frekvencijske karakteristike sustava trećeg reda koji nema polove i nule u desnoj poluravnini. Amplitudno-frekvencijska karakteristika $|G(j\omega)|$ aproksimirana pravcima na frekvenciji $\omega = 1$ rad/s ima jedinično pojačanje.



Slika 2: Aproksimacija fazno-frekvencijske karakteristika sustava.

a) *(3 boda)* Odredite prijenosnu funkciju sustava.

b) *(2 boda)* Skicirajte amplitudno-frekvencijsku karakteristiku sustava.

c) *(2 boda)* Korištenjem jednadžbi pravaca koje aproksimiraju Bodeov dijagram izračunajte za koju je frekvenciju zadovoljena jednakost $\varphi(\omega) = -140°$.

RJEŠENJA:

Zadatak 1

a) Matematički model treba vrijediti za dva slučaja: I. $h_1 > H_1'$ i II. $h_1 \leq H_1'$.

I.

$$\rho A_1 \frac{dh_1}{dt} = q_u - \rho A_{12}\,\mathrm{sign}(h_1 - H_1' - h_2)\sqrt{2g|h_1 - H_1' - h_2|)} - \rho A_v \sqrt{2g(h_1 - H_1')},$$

$$\rho A_2 \frac{dh_2}{dt} = \rho A_{12}\,\mathrm{sign}(h_1 - H_1' - h_2)\sqrt{2g|h_1 - H_1' - h_2|} - A_v \rho \sqrt{2gh_2}.$$

Sređivanjem se dobije

$$\begin{aligned}\frac{dh_1}{dt} =& \frac{1}{A_1\rho} q_u - \frac{A_{12}}{A_1}\,\mathrm{sign}(h_1 - H_1' - h_2)\sqrt{2g|h_1 - H_1' - h_2|} \\ &- \frac{A_v}{A_1}\sqrt{2g\,(h_1 - H_1')}, \\ \frac{dh_2}{dt} =& \frac{A_{12}}{A_2}\,\mathrm{sign}(h_1 - H_1' - h_2)\sqrt{2g|h_1 - H_1' - h_2|} - \frac{A_v}{A_2}\sqrt{2gh_2}.\end{aligned}$$

II.

$$A_1(h) = \left[A_{1d} + \frac{h_1}{H_1'}\,(A_1 - A_{1d})\right],$$

$$V(h_1) = h_1 \frac{1}{2}\left(A_{1d} + A_{1d} + \frac{h_1}{H_1'}(A_1 - A_{1d})\right),$$

$$\frac{dV(h_1)}{dt} = \left(A_{1d} + \frac{h_1}{H_1'}(A_1 - A_{1d})\right)\frac{dh_1}{dt} = A_1(h)\frac{dh_1}{dt},$$

$$\rho A_1(h)\frac{dh_1}{dt} = q_u + \rho A_{12}\sqrt{2gh_2}$$

$$\rho A_2 \frac{dh_2}{dt} = -\rho A_{12}\sqrt{2gh_2} - \rho A_v \sqrt{2gh_2}$$

Sređivanjem se dobije

$$\begin{aligned}\frac{dh_1}{dt} &= \frac{q_u}{\rho A_1(h)} + \frac{A_{12}}{A_1(h)}\sqrt{2gh_2}, \\ \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{A_{12} + A_v}{A_2}\sqrt{2gh_2}.\end{aligned}$$

b) Traži se $q_{u0}(H_{10})$.

(i) $H_{10} \leq H_1' \rightarrow q_{u0} = 0$.

(ii) $H_{10} > H_1'$,

$$q_{i1} = q_{i2},$$

uvijek vrijedi $h_1 - H_1' > h_2$,

$$A_{12}\sqrt{2g(h_1 - H_1' - h_2)} = A_v \rho \sqrt{2gh_2},$$

$$h_2 = \frac{A_{12}^2}{A_v^2 + A_{12}^2}(h_1 - H_1'),$$

$$q_{u0} = \rho A_v \sqrt{2g(H_{10} - H_1')} + \rho A_{12}\sqrt{2g\left[H_{10} - H_1' - \frac{A_{12}^2}{A_v^2 + A_{12}^2}(H_{10} - H_1')\right]}.$$

$$q_{u0} = \rho\left(A_v + A_{12}\sqrt{\frac{A_v^2}{A_{12}^2 + A_v^2}}\right)\sqrt{2g(H_{10} - H_1')}.$$

Zadatak 2

a) *(3.5 boda)* Nelinearne diferencijalne jednadžbe stanja sustava glase:

$$
\begin{aligned}
\ddot{m} &= f_{\ddot{m}}(\dot{m}, m, h, v, x_u) = -\frac{1}{T_1}\dot{m} - \frac{0.2}{T_1}x_u \quad \text{uz } \dot{m}(t) \leq 0 \text{ i } m(t) \geq m_r \\
\dot{m} &= f_{\dot{m}}(\dot{m}, m, h, v, x_u) = \dot{m} \\
\dot{h} &= f_{\dot{h}}(\dot{m}, m, h, v, x_u) = v \\
\dot{v} &= f_{\dot{v}}(\dot{m}, m, h, v, x_u) = -G\frac{m_Z}{(r+h)^2} - \frac{v_e}{m}\dot{m}
\end{aligned}
$$

Iako je ovisnost mase rakete i goriva o upravljačkom signalu aktuatora dana u linearnom obliku, nakon lansiranja rakete maseni protok goriva ne može biti pozitivan ($\dot{m}(t) \leq 0$) te masa rakete i goriva ne može biti manja od m_r—mase rakete bez goriva.

b) *(4.5 boda)* Ovisnost masenog protoka raketnog goriva o upravljačkom signalu dana je prijenosnom funkcijom $sG_M(s)$. Statičko pojačanje te prijenosne funkcije iznosi -0.2, tj. za pobudu $x_u(t) = 2.5S(t)$ imat ćemo $\dot{m}(\infty) = -0.5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$, što je jednako početnom uvjetu $\dot{m}(0)$. Drugim riječima, neće biti nikakve prijelazne pojave u vezi masenog protoka raketnog goriva: $\dot{m}(t) = -0.5S(t)$. Iz prethodnog razmatranja lako možemo zaključiti kako je

$$m(10) = m(0) - 0.5\,\mathrm{kg\,s^{-1}} \cdot 10\,\mathrm{s} = 95\,\mathrm{kg} \tag{2}$$

Do istog rješenja može se doći i bez prethodnog razmatranja, određivanjem $M(s)$ i prebacivanjem iz Laplaceove u vremensku domenu. Iz prijenosne funkcije $G_M(s)$ prvo odredimo diferencijalnu jednadžbu.

$$\ddot{m}T_1 + \dot{m} = -0.2x_u \tag{3}$$

Uz zadan $X_u(s) = \frac{2.5}{s}$ i početne uvjete, prebacimo diferencijalnu jednadžbu u donje područje, vodeći računa o slobodnom odzivu.

$$
\begin{aligned}
T_1\left(s^2M(s) - sm(0) - \dot{m}(0)\right) + sM(s) - m(0) &= -0.2X_u(s) \\
M(s)\left(T_1s^2 + s\right) - 100T_1s + 0.5T_1 - 100 &= -\frac{0.5}{s} \\
M(s)\left(T_1s^2 + s\right) &= 100\,(T_1s+1) - 0.5\frac{T_1s+1}{s} \\
M(s) &= 100\frac{\cancel{T_1s+1}}{s\cancel{(T_1s+1)}} - 0.5\frac{\cancel{T_1s+1}}{s^2\cancel{(T_1s+1)}} \\
M(s) &= \frac{100}{s} - \frac{0.5}{s^2}
\end{aligned}
$$

Računanjem $m(t) = \mathcal{L}^{-1}\{M(s)\}$ dobivamo $m(t) = (100 - 0.5t)S(t)$, odnosno $m(10) = 95\,\mathrm{kg}$.

Prve tri jednadžbe stanja sustava su linearne, pa nam ostaje pozabaviti se jednadžbom $f_{\dot{v}}$.

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f_{\dot{v}}}{\partial h}\right|_{\text{R.T.}} &= 2G\frac{m_Z}{(r+h(10))^3} = 3.0824 \times 10^{-06} \\
\left.\frac{\partial f_{\dot{v}}}{\partial m}\right|_{\text{R.T.}} &= \frac{v_e}{m^2(0)}\dot{m}(0) = -0.2493 \\
\left.\frac{\partial f_{\dot{v}}}{\partial \dot{m}}\right|_{\text{R.T.}} &= -\frac{v_e}{m(0)} = -47.3684
\end{aligned}
$$

Jednadžbe lineariziranog sustava u prostoru stanja glase:

$$\begin{bmatrix}\Delta\ddot{m}\\ \Delta\dot{m}\\ \Delta\dot{h}\\ \Delta\dot{v}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{1}{T_1} & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{v_e}{m(0)} & \frac{v_e}{m^2(0)}\dot{m}(0) & 2G\frac{m_Z}{(r+h(10))^3} & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix}\Delta\dot{m}\\ \Delta m\\ \Delta h\\ \Delta v\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{0.2}{T_1}\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}\Delta x_u$$

$$y = \underbrace{\mathbf{I}_{4\times 4}}_{\mathbf{C}}\begin{bmatrix}\Delta\dot{m} & \Delta m & \Delta h & \Delta v\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + \underbrace{\mathbf{0}_{4\times 1}}_{\mathbf{D}}\Delta x_u$$

Napomena: U zadatku nije zadano što imamo na izlazu lineariziranog sustava, pa smo pretpostavili da imamo sve varijable stanja.

Zadatak 3

a) Potrebno je izračunati prijenosnu funkciju otvorenog kruga:

$$G_o(s) = \frac{G_z(s)}{1 - G_z(s)} = \frac{10}{s(s^2 + 2s + 5)} \ .$$

Supstitucijom $s = j\omega$ dobivamo

$$G_o(j\omega) = \frac{10}{j\omega(5-\omega^2) - 2\omega^2}\,\frac{j\omega(\omega^2-5) - 2\omega^2}{j\omega(\omega^2-5) - 2\omega^2} = \frac{10j\omega(\omega^2-5) - 20\omega^2}{4\omega^4 + \omega^2(5-\omega^2)^2} \ .$$

Odatle možemo odvojiti realni i imaginarni dio:

$$\Re\{G_o(j\omega)\} = \frac{-20\omega^2}{4\omega^4 + \omega^2(5-\omega^2)^2}$$

$$\Im\{G_o(j\omega)\} = \frac{10\omega(\omega^2-5)}{4\omega^4 + \omega^2(5-\omega^2)^2}$$

Analiziranjem karakterističnih točaka dobit ćemo ideju kako izgleda Nyquistov dijagram:

- $\omega = 0$

$$\Re\{G_o(0)\} = \left.\frac{-20}{4\omega^2 + (5-\omega^2)^2}\right|_{\omega=0} = -\frac{4}{5}$$

$$\Im\{G_o(0)\} = \lim_{\omega\to 0}\frac{10(\omega^2-5)}{4\omega^3 + \omega(5-\omega^2)^2} = -\infty$$

- $\omega = \infty$

$$\Re\{G_o(j\infty)\} = \lim_{\omega\to\infty}\frac{-20}{4\omega^2 + (5-\omega^2)^2} = 0$$

$$\Im\{G_o(j\infty)\} = \lim_{\omega\to\infty}\frac{10(\omega^2-5)}{4\omega^3 + \omega(5-\omega^2)^2} = 0$$

- $\Re\{G_o(j\omega_i)\} = 0$ Ispunjeno jedino za $\omega_i \to \infty$.
- $\Im\{G_o(j\omega_r)\} = 0$

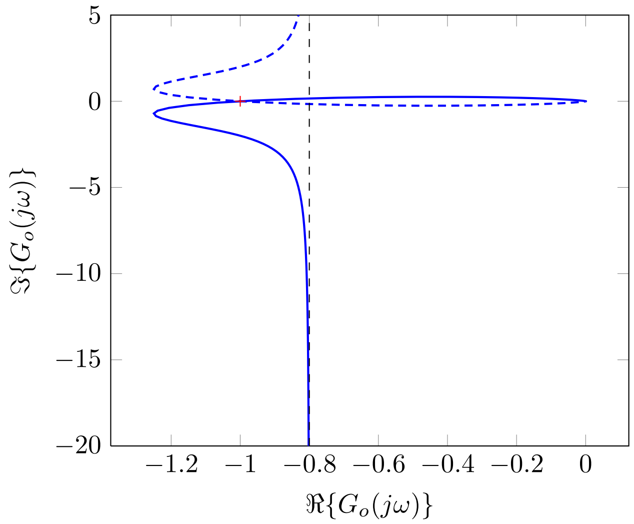
$$\frac{10(\omega^2-5)}{4\omega^3 + \omega(5-\omega^2)^2} = 0$$

$$\omega^2 - 5 = 0$$

$$\omega_r = \sqrt{5}$$

Odatle imamo

$$\Re\{G_o(j\sqrt{5})\} = \frac{-20}{4\omega^2 + (5-\omega^2)^2} = -1 \ .$$



Slika 3: Nyqvistov dijagram prijenosne funkcije $G_o(s)$

Nyquistov dijagram prikazan je slikom 3.

b) Kako je $E(s) = U(s) - Y(S)$ slijedi:

$$\begin{aligned}\frac{E(s)}{U(s)} &= 1 - \frac{Y(s)}{U(s)}\\ &= 1 - G_z(s)\\ &= \frac{s^3+2s^2+5s+10}{s^3+2s^2+5s+10} - \frac{10}{s^3+2s^2+5s+10}\\ &= \frac{s(s^2+2s+5)}{s^3+2s^2+5s+10}\end{aligned}$$

c) Uz $u(t) = S(t)$ imamo $U(s) = \frac{1}{s}$, odnosno

$$E(s) = \frac{s^2+2s+5}{s^3+2s^2+5s+10}\ .$$

Prema teoremu o konačnoj vrijednosti

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = 0$$

d) Uz $u(t) = tS(t)$ imamo $U(s) = \frac{1}{s^2}$, odnosno

$$E(s) = \frac{s^2+2s+5}{s(s^3+2s^2+5s+10)}\ .$$

Prema teoremu o konačnoj vrijednosti

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Zadatak 4

Za PT2s član vrijedi

$$G_1(s) = \frac{10}{s^2+3s+8} = \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}. \tag{4}$$

Rješenja zadatka će se raspisati za dva slučaja: (i) σ – nadvišenje i (ii) σ – realan dio pola. Iz (4) proizlazi $\zeta_1 = \frac{3\sqrt{2}}{8}$ i $\omega_{n_1} = 2\sqrt{2}$.

(i) Za nadvišenje vrijedi $\sigma = f(\zeta)$ pa iz uvjeta jednakosti nadvišenja mora vrijediti $\zeta_2 = \zeta_1$, odnosno $\zeta_1 = \zeta_2 = \frac{3\sqrt{2}}{8}$.

Iz drugog uvjeta zadatka slijedi

$$\frac{t_{m_2}}{t_{m_1}} = 0.5 \rightarrow \frac{\omega_{n_1}}{\omega_{n_2}} = 0.5,$$

odnosno $\omega_{n_2} = 4\sqrt{2}$. Tražene prijenosne funkcije su

$$G_2(s) = \frac{K \cdot 32}{s^2 + 6s + 32},\ K > 0.$$

(ii) Položaj konjugirano-kompleksnog para polova PT2s člana je određen na način

$$s_{p_{1,2}} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\frac{\pi}{t_m}.$$

Vrijedi $\sigma_2 = \sigma_1$ odnosno

$$\omega_{n_1}\zeta_1 = \omega_{n_2}\zeta_2. \tag{5}$$

Nadalje iz omjera vremena prvog maksimuma slijedi

$$\omega_{n_2}\sqrt{1-\zeta_2^2} = 2\omega_{n_1}\sqrt{1-\zeta_1^2} \approx 4.8. \tag{6}$$

Kombinacijom (5) i (6) slijedi $\omega_{n_2}^2 = 25.29$. Tražene prijenosne funkcije su

$$G_2(s) = \frac{K \cdot 25.29}{s^2 + 3s + 25.29},\ K > 0.$$

Zadatak 5

a) Iz slike 2 i uvažavajući uvjete u zadatku moguće je prepoznati sljedeće polove/nule: -1 (p), -5 (n), -10 (p), 0 (p).

Prijenosna funkcija otvorenog kruga je

$$G(s) = K\frac{1}{s}\frac{\frac{s}{5}+1}{(s+1)\left(\frac{s}{10}+1\right)}.$$

Iznos koeficijenta K proizlazi iz $|G(j1)|_{aproks.} = 1$. Na frekvenciji $\omega = 1$ rad/s je aproksimacija amplitudno-frekvencijske karakteristike određena samo integralnim članom, vrijedi

$$|G(j1)|_{aproks.} = K\frac{1}{\omega} = 1$$

što je zadovoljeno za $K = 1$.

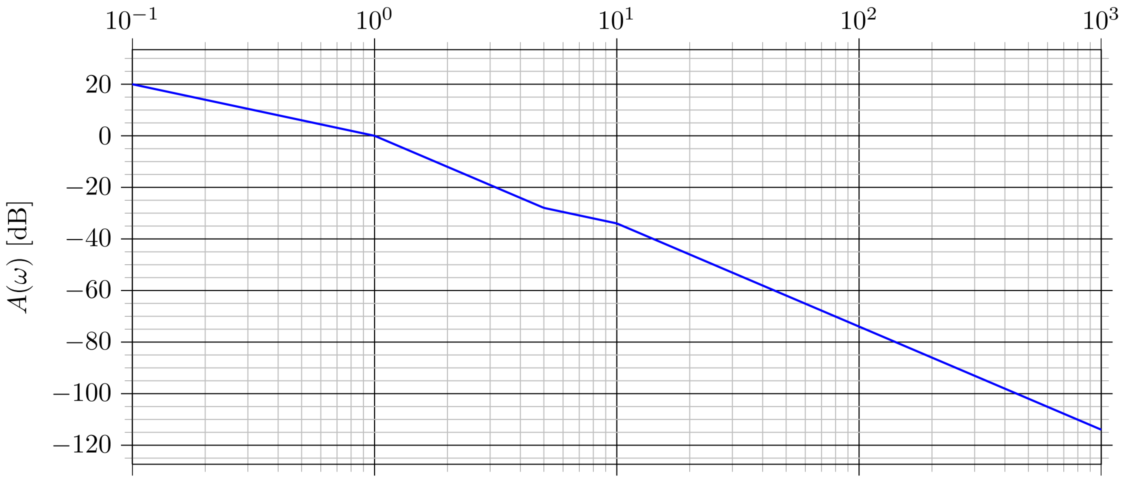
b) Vidi sliku 4.

c) Frekvencija ω za koju vrijedi $\varphi(\omega) = -140°$ nalazi se na segmentu $1 \leq \omega \leq 10$.

$$-140° = \varphi_0 - 45\log\left(\frac{\omega}{1}\right),$$

$$\varphi_0 = -90 - 45\log(5) = -121.45°,$$

$$45\log(\omega) = 18.54635 \rightarrow \omega = 10^{\frac{18.546}{45}} = 2.583.$$



Slika 4: Aproksimacija amplitudno-frekvencijske karakteristike sustava.