FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo

**SEMINAR IZ 2. LABORATORIJSKE VJEŽBE**

Linearizacija nelinearnih dinamičkih sustava

Nemesis

@ FER2.NET

Automatsko Upravljanje

Zagreb, ak. g. 2012./2013.

# Uvod

Većina dinamičkih sustava je nelinearna, kako za nelinearne sustave nisu razvijene općenite metode analize i sinteze. Da bi se metode analize i sinteze linearnih sustava mogle primijeniti i na nelinearne sustave, potrebno je model nelinearnog dinamičkog sustava prikazati približnim linearnim matematičkim modelom. Postupkom linearizacije dobiva se valjani linearni matematički model u okolini radne točke. Cilj je ove domaće zadaće spoznati korisnost postupka linearizacije nelinearnih dinamičkih sustava.

# Zadatak 1.

Zadana je nelinearna diferencijalna jednadžba drugog reda:

*(1)*

Potrebno je:

1. Linearizirati nelinearnu diferencijalnu jednadžbu u okolini radne točke određene s

Pri određivanju linearne diferencijalne jednadžbe krećemo od određivanja radne točke oko koje ćemo jednadžbu linearizirati. Kako se radi o stacionarnoj točki gdje su konstante, slijedi:

Te imamo iz (1)

Dobivamo stacionarnu točku .

Dalje sredimo jednadžbu (1) u oblik prikladan za razvoj u Taylorov red, odnosno

Označimo s odstupanje varijable od stacionarnog položaja :

Analogno imamo za

Razvojem funkcije u Taylorov red, te zanemarivanjem viših članova reda dobivamo:

Računamo parcijalne derivacije:

Uvrštavanjem dobivamo lineariziranu diferencijalnu jednadžbu sustava:

(2)

1. Potrebno je odrediti prijenosnu funkciju primjenom Laplaceove transformacije na lineariziranu jednadžbu iznad. Kako je prijenosna funkcija matematička reprezentacija odnosa pobude i odziva LTI sustav pri početnim uvjetima jednakim nula, vrijedi:

**L**

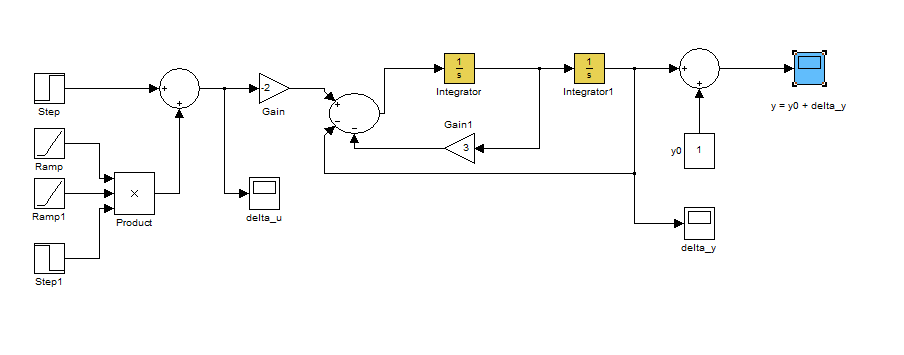
**L**

**L**

**L**

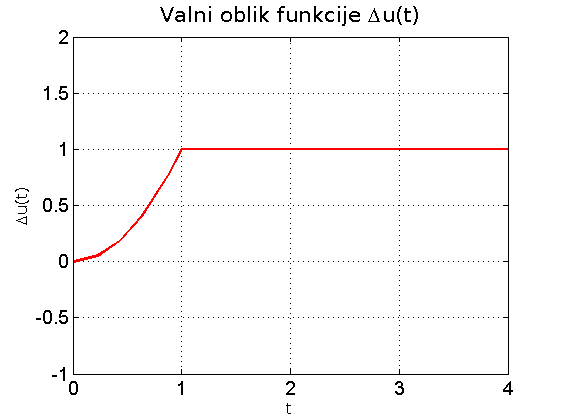
Iz (2) slijedi prijenosna funkcija G(s):

1. Izradom modela dinamičkog sustava u Simulinku (Slika 1.) možemo simulirati odziv sustava na zadanu pobudu .



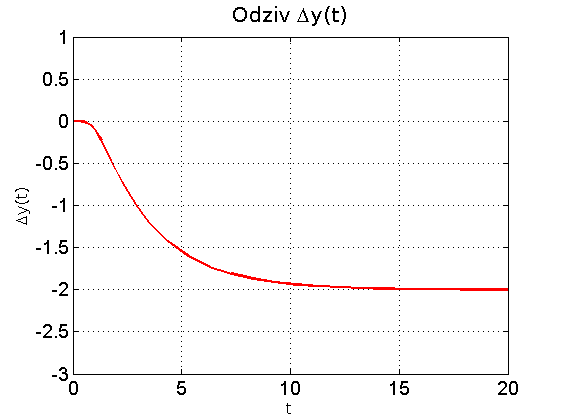
**Slika 1. Simulink Model Sustava**

Pobuda  je zadana funkcijom prikazanom na slici 2.



**Slika 2. Pobuda sustava**

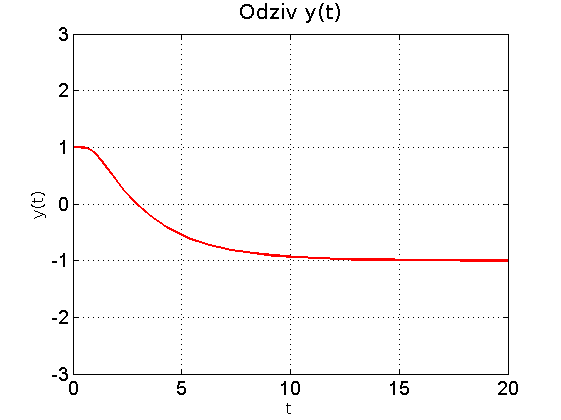
Odziv sustava dobivamo simulacijom za definiranu pobudu .  
Slika 3. prikazuje rezultat simulacije.



**Slika 3. Odziv Sustava NA POBUDU**

Kako znamo da u okolini stacionarne točke vrijedi , . Zaključujemo da odziv nelinearnog modela na pobudu možemo aproksimirati s , gdje , a se vlada prema slici 3.

Odziv sustava možemo vidjeti na slici 4.



**Slika 4. odZIV NELINARNOG SUSTAVA**

1. Stacionarnu vrijednost lineariziranog modela te nagib odziva možemo odrediti i analitičkim putem.

Krećemo od pobudne funkcije sustava zadane slikom 2.

Grafu na slici 2. odgovara funkcija.

Odnosno

Gdje S(t) označava step funkciju. Nadalje pomoću Laplaceove transformacije dobivamo:

Uvrštavamo pobudu u:

Tražimo nagib u točci s

Dobivamo da nagib iznosi

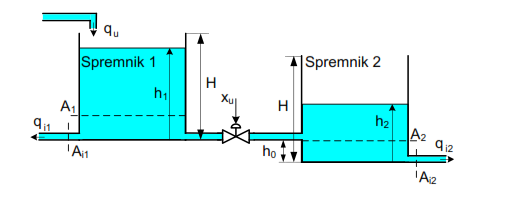
Stacionarnu vrijednost odziva sustava dobivamo iz , slijedi:

Kako znamo da , vrijedi . Dobivamo

što i odgovara vrijednosti na slici 3. koju smo dobili simulacijom modela.

# Zadatak 2.

Na slici 5. prikazan je shema sustava skladištenja fluida.



**Slika 5. Shema Sustava**

Razina ﬂuida u spremnicima regulira se promjenom otvorenosti ventila koja može poprimiti vrijednosti između 0 (potpuno zatvoren ventil) i 1 (potpuno otvoren ventil). Karakteristika ventila opisana je izrazom

pri čemu je:

- otvorenost ventila

- poprečni presjek potpuno otvorenog ventila

- razlika tlakova na krajevima ventila

- gustoća fluida

- maseni protok kroz ventil [kg/s]

Također, poznate su nam sljedeće vrijednosti:

kg/s - ulazni maseni protok u prvi spremnik

- površina poprečnog presjeka spremnika 1

- površina poprečnog presjeka spremnika 2

- poprečni presjek potpuno otovrenog ventila

- površina poprečnog presjeka izlazne cijevi 1

- površina poprečnog presjeka izlazne cijevi 2

- gustoća fluida

m - visina spremnika 1 i 2

m - razlika u nadmorskim visinama spremnika

- gravitacijsko ubrzanje

1. Odrediti otvorenost ventila pri kojoj će visina ﬂuida (u stacionarnom stanju) u drugom spremniku biti . Linearizirati nelinearni matematički model u stacionarnoj radnoj točki određenoj s .

Krećemo od određivanja diferencijalnih jednadžbi koje opisuju sustav (koje smo odredili u prvoj laboratorijskoj vježbi). Iz sheme čitamo:

(1)

(2)

U stacionarnoj točci vrijedi, slijedi:

Uvrstimo u (1)

Sređujemo

Te dobivamo

Nastavljamo s linearizacijom dinamičkog nelinearnog modela u stacionarnoj točci određenoj s . Pogledom na prije korištene formule zaključujemo da je visina proporcionalna otvorenosti ventila . Imamo izvedenu vrijednost od za slučaj kada , stoga zaključujemo da pri sigurno vrijedi da u stacionarnom stanju i koristimo formule date za navedeni slučaj.

gdje

Uvrštavanjem poznatih podataka dobivamo:

; ; ;

Dalje imamo

Lineariziramo forume (1) i (2) te koristimo vrijednosti izračunate iznad. Postupak izgleda ovako:

Za diferencijalne jednadžbe

gdje su perturbacijske varijable definirane s

Za u stacionarnoj točki imamo

Za u stacionarnoj točki imamo

Te dobivamo linearne diferencijalne jednadžbe zadanog sustava:

1. Te iste jednadžbe možemo zapisati u vektorskom (matričnom) obliku gdje

Slijedi

1. Odrediti prijenosnu funkciju , uz **L** i **L**.

Slijedi račun:

**L**

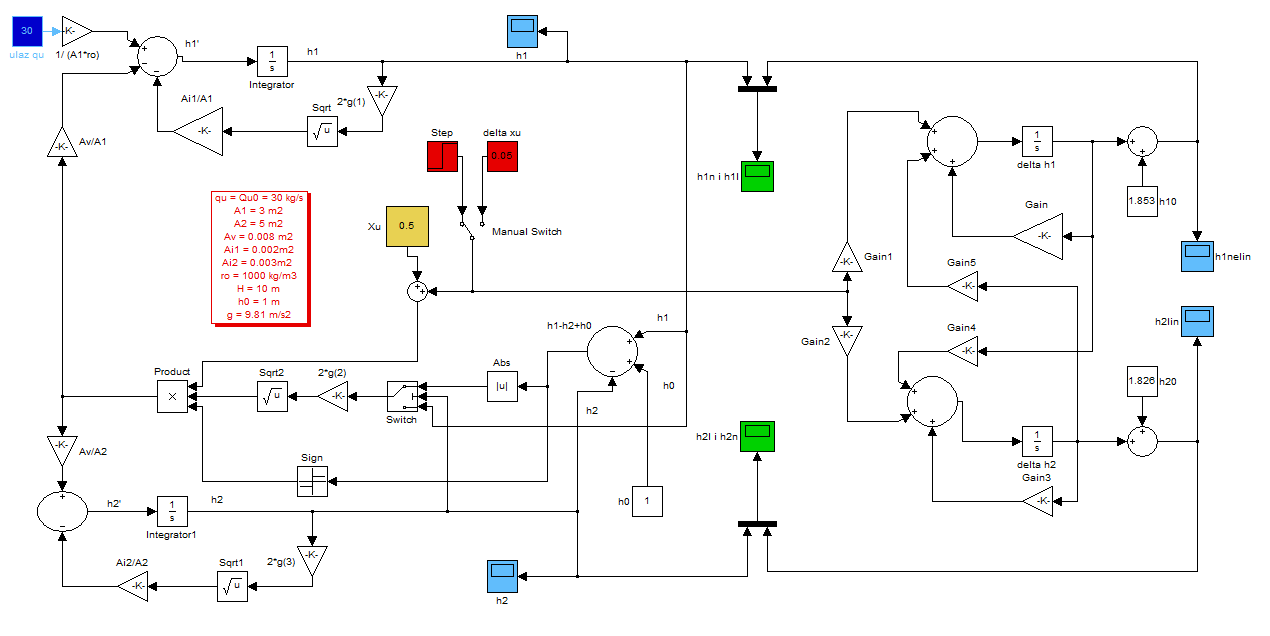
**L**

Uvrštavanjem jednu jednadžbu u drugu i sređivanjem dobivamo

što je tražena prijenosna funkcija.

d,e,f) U posljednjem dijelu vježbe potrebno je napraviti simulacijske sheme nelinearnog i lineariziranog sustava u Simulinku.

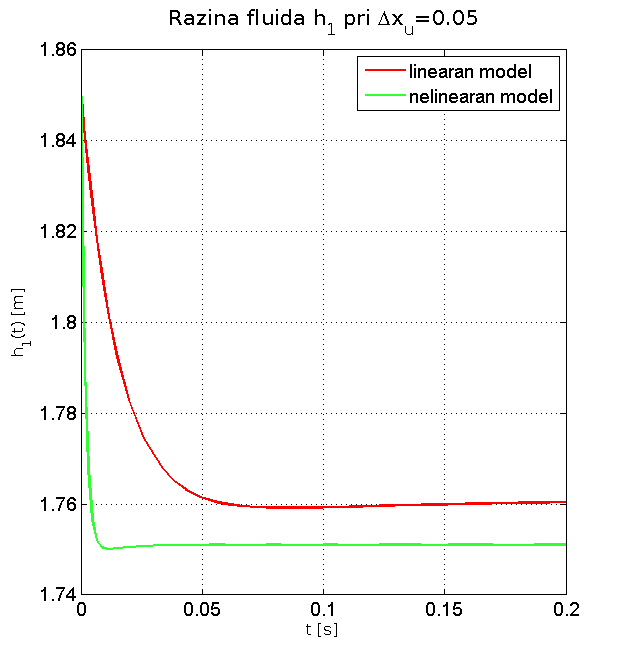
Uz korištenje izračunatih parametara i sheme sustava koju smo koristili u laboratorijskoj vježbi 1., dobivamo kombiniranu shemu koja je prikazana na slici 6.



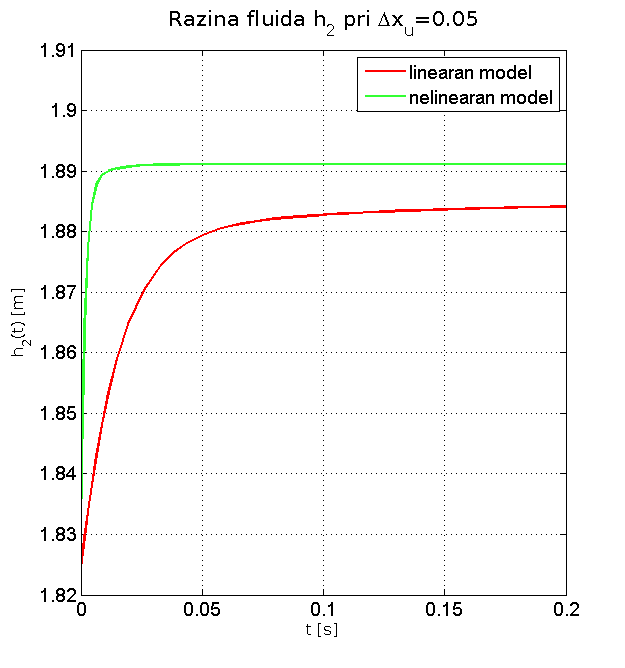
**Slika 6. Shema LIneariziranog i nelinearnog sustava**

Konstruiranim modelima potrebno je simulirati i prikazati odzive razine fluida u spremnicima lineariziranog i nelinearnog sustava na skokovitu pobudu  i .

Simulacijom za  dobivamo odzive prikazane na slici 7 za visinu fluida , odnosno slici 8 za visinu fluida .



**Slika 7. Odziv h1**

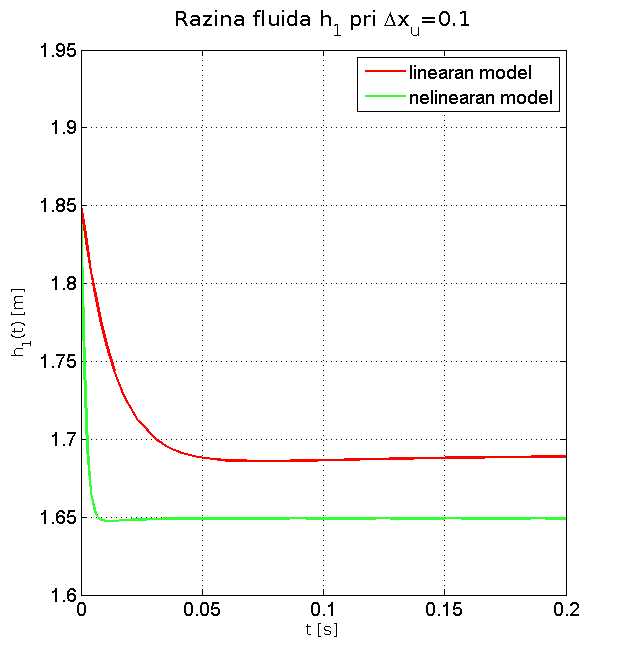


**Slika 8. odziv h2**

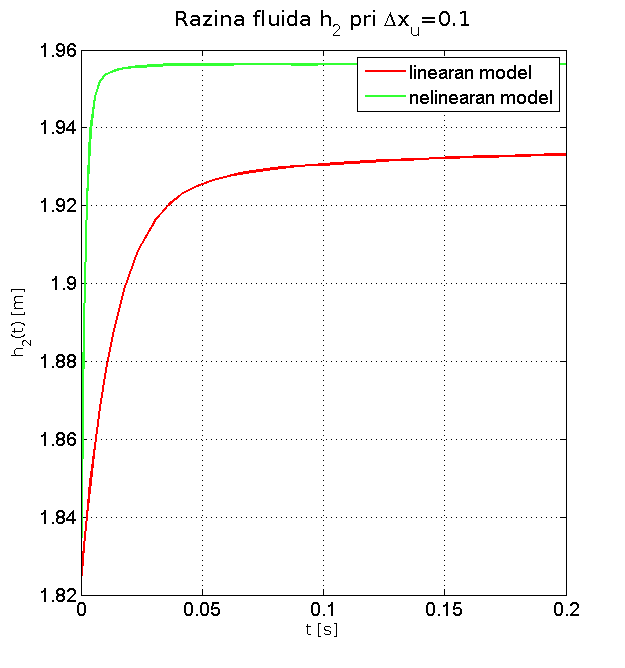
Na prikazanim odzivima za vidimo da odziv lineariziranog sustava ne prati savršeno odziv nelinearnog modela tokom prijelazne pojave. Kod nelinearnog odziva prvo postizanje ustaljenih vrijednosti se događa puno prije nego kod lineariziranog te možemo uočiti izraženiji impulsni karakter nelinearnog modela, gdje je nadvišenje izraženije no kod linearnog odziva.

Kada se oba odziva razine fluida h1 ustale u stacionarno stanje, linearizirani model zadovoljavajuće dobro prati nelinearan model s odstupanjem od približno 0.01 m što je i za očekivati jer se linearizacija sustava obavlja za određenu statičku točku te je valjana samo u okolini iste konkretno .

Pri , dobivamo odzive razina fluida prikazane u nastavku.



**Slika 9. odziv h1**

****

**Slika 10. ODZIV h2**

Možemo primijetiti da je odziv obiju sustava pri skokovitoj promjeni otvorenosti ventila od sličan odzivu pri , no zamjećujemo da se promijenilo odstupanje odziva lineariziranog od odziva nelinearnog modela sustava u stacionarnom stanju. Odzivi razina fluida pri se razlikuju za približno 0.04 m, što je zamjetno povećanje od 0.01m koje smo primijetili pri .

Dolazimo do zaključka da linearizirani model nelinearnog sustava adekvatno aproksimira nelinearan sustav samo u okolini stacionarne točke oko koje je lineariziran. Što se više udaljavamo od korištene stacionarne točke, to je naš linearizirani model neprecizniji do trena kada je praktično neupotrebljiv.

# Zaključak

Svi sustavi koje srećemo u praksi su nelinearni. Analiza i sinteza takvih sustava je vrlo složena jer nelinearni matematički modeli nisu prikladni za rješavanje. Danas ne postoji zaokružena teorija rješavanja nelinearnih diferencijalnih jednadžbi koja bi davala opće rezultate za sve nelinearne sustave. Zbog toga su rješenja koja dobijemo za određeni nelinearni sustav najčešće svojstvena samo danom sustavu i ne mogu se proširiti na ostale nelinearne sustave.

Tu uviđamo važnost linearizacije koja nam omogućava svođenje nelinearnog sustava oko jednog ravnotežnog stanja[[1]](#footnote-1) na linearizirani matematički model. Pomoću tog modela možemo adekvatno opisati ponašanje nelinearnog sustava u (i samo u) okolini odabrane stacionarne točke , odnosno ravnotežnog stanja. Pri tome treba imati u vidu da linearizirani model neće moći objasniti neka ponašanja nelinearnog sustava. Takav linearizirani model daje zadovoljavajuće rezultate samo ako u okolini odabranog ravnotežnog stanja prevladavaju linearni učinci.

U ovo vježbi smo proučili postupke linearizacije sustava. Uvjerili smo se, pomoću simulacija i izračuna, da linearizirani modeli daju dobru aproksimaciju nelinearnih sustava. Također, pokazano je da udaljavanje od stacionarne točke oko koje je sustav lineariziran narušava vjerodostojnost iste aproksimacije, te da treba biti oprezan u korištenju vrijednosti dobivenih iz lineariziranih modela sustava.

1. Za razliku od linearnog, nelinearni sustav može imati više od jednog ravnotežnog stanja. [↑](#footnote-ref-1)