

Upravljanje sinkronim motorima sa stalnim magnetima

Verzija 0.1

Igor Erceg, Damir Sumina

21. lipnja 2017.

Sadržaj

1	Uvod	2
2	Matematički model sinkronog stroja sa stalnim magnetima	4
2.1	Prostorni vektor	4
2.2	Naponske jednačbe SMPM-a	7
2.3	Matematički model sinkronog stroja s vanjskim stalnim magnetima	8
2.3.1	Matematički model SMVPM u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu	8
2.3.2	Matematički model SMVPM u dq koordinatnom sustavu	9
2.3.3	Elektomagnetski moment SMVPM-a	10
2.4	Matematički model sinkronog stroja s unutarnjim stalnim magnetima	11
2.5	Potpuni matematički model SMPM-a	12
2.6	Svođenje sustava na relativne jedinice	13
3	Matematički model energetskeg pretvarača spojenog	15
3.1	Matematički model energetskeg pretvarača u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu	16
3.2	Matematički model energetskeg pretvarača u dq koordinatnom sustavu	16
4	Upravljanje pretvaračem napona i frekvencije	18
4.1	Šest koraka modulacija - <i>Six-step</i>	19
4.2	Sinusna širinsko impulsna modulacija (sinusni PWM)	21
4.3	Vektorska širinsko impulsna modulacija (SVPWM)	23
5	Sustavi upravljanja pogonom sa SMPM-om	26
5.1	Određivanje parametara regulatora metodom postavljanja polova	26
5.1.1	Određivanje parametara PI tipa regulatora	26
5.1.2	Određivanje parametara PID tipa regulatora	30
5.2	Sinteza regulatora za sustave upravljanja SMPM-ovima	31
5.2.1	Sinteza sustava regulacije momenta SMPM-a	33
5.2.2	Sinteza sustava regulacije brzine vrtnje SMPM-a	36
5.2.3	Sinteza sustava regulacije pozicije (položaja) SMPM-a	40
6	Sustav regulacije napona istosmjernog međukruga pretvarača napona i frekvencije	43
6.1	Sinteza P tipa regulatora struje i_d	44
6.2	Sinteza PI tipa regulatora struje i_q	45
6.3	Sinteza PI tipa regulatora napona istosmjernog međukruga u_{dc}	45

1 Uvod

Sinkroni strojevi sa stalnim magnetima zbog svojih dinamičkih karakteristika imaju najčešću primjenu u sustavima servopogona, alatnih strojeva i robotici. Izgrađeni su i pogoni sa sinkronim strojevima sa stalnim magnetima čije snage su preko 1 MW. Također, sve češća je upotreba sinkronih strojeva sa stalnim magnetima u području obnovljivih izvora električne energije (npr. vjetroagregati).

Kod sinkronih motora sa stalnim magnetima zahtjeva se da zadovoljavaju sljedeće specifikacije:

- velika gustoća toka u zračnom rasporu,
- velik omjer snaga/masa stroja,
- što veći omjer moment/moment inercije (mogućnost velike akceleracije),
- krivulja momenta bez valovitosti čak i kod vrlo malih brzina vrtnje (posebno kod pozicioniranja),
- upravljanje momentom kod brzine nula,
- veliki faktor korisnosti i (niski troškovi napajanja),
- kompaktan dizajn.

Stalni magneti koji se koriste u sinkronim motorima su specijalni magneti na bazi takozvanih rijetkih zemalja, npr. samarijum-kobalt ili neodimij-željezo-bor [1]. Nedostatak im je relativno visoka cijena, a kod neodimij-željezo-bor magneta prisutan je utjecaj temperature na magnetsko polje.

U ovisnosti o smještaju magneta na rotoru sinkroni motori se dijele u dvije skupine:

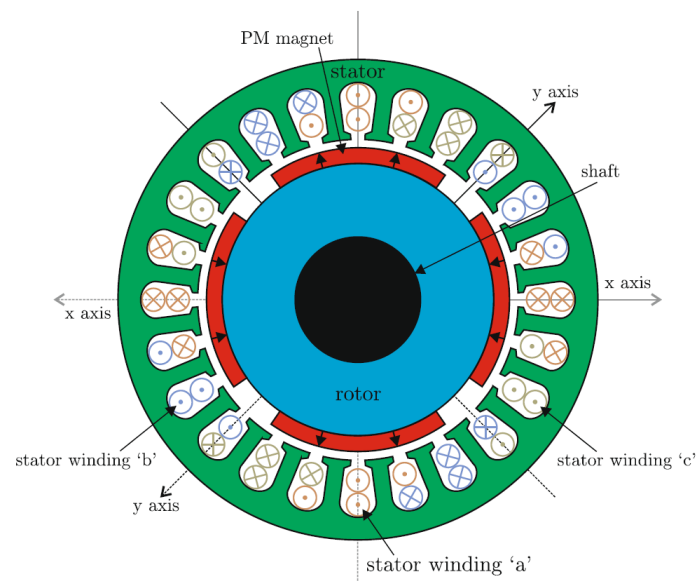
1. sinkroni motori s vanjskim stalnim magnetima (SMVPM) i
2. sinkroni motori s unutarnjim stalnim magnetima (SMUPM).

Kod SMVPM-ova, magneti su pričvršćeni na oplošje rotora najčešće pomoću materijala velike adhezivne čvrstoće (slika 1). Zbog potrebe veće mehaničke izdržljivosti, koja je posebno bitna kod velikih brojeva okretaja, raspori između magneta su popunjeni nemagnetskim materijalom, a cjelokupni rotor može još biti presvučen posebnim materijalom visoke mehaničke čvrstoće.

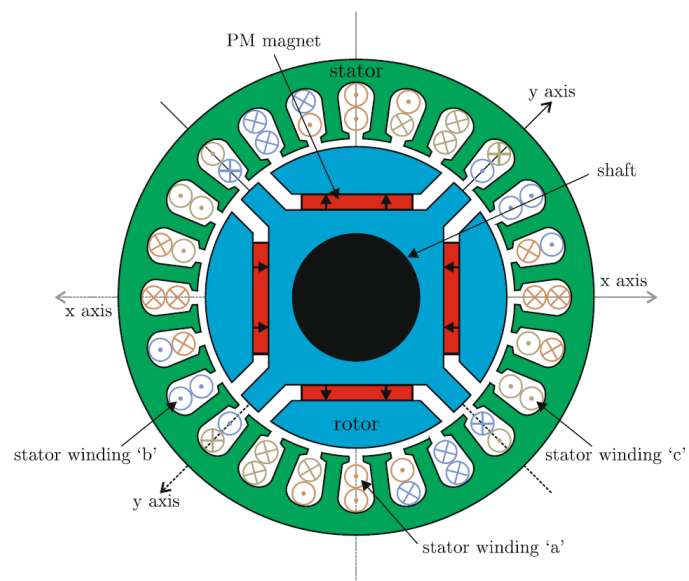
Relativna permeabilnost stalnih magneta za vanjsko polje iznosi $1.02 - 1.2$, pa sinkroni stroj može biti razmatran s konstantnim zračnim rasporom. Nema efekta izraženih polova pa je induktivitet u poprečnoj q osi jednak induktivitetu u direktnoj d osi ($L_d = L_q$). Također, zbog relativno velikog zračnog raspora reakcija armature kod ovakvih motora nije izražena. To je nepovoljno kod upravljanja u području slabljenjem magnetskog toka. Veliki zračni raspor ima za posljedicu malu vremensku konstantu.

Ukoliko se stalni magneti ulože u unutrašnjost rotora (slika 2) postiže se robusna mehanička konstrukcija. Magnetni su dobro oklopljeni i zaštićeni, što je poželjno kod velikih brzina.

Sinkroni stroj s unutrašnjim stalnim magnetima ne može biti razmatran kao stroj s konstantnim zračnim rasporom. Magnetski otpor u d osi je veći u odnosu na magnetski otpor u q osi. Stoga je kod ovakve izvedbe stroja induktivitet u q osi veći od induktiviteta u d osi te se u ovom stroju razvija i reluktantni moment. Strojevi s unutarnjim stalnim magnetima zbog manjeg zračnog raspora imaju izraženiju reakciju armature. Armatura vremenska konstanta je veća u odnosu na stroj s vanjskim stalnim magnetima.



Slika 1: Presjek sinkronog stroja s vanjskim stalnim magnetima [2]



Slika 2: Presjek sinkronog stroja s unutrašnjim stalnim magnetima [2]

2 Matematički model sinkronog stroja sa stalnim magnetima

Dinamički model sinkronog stroja sa stalnim magnetima (SMPM) se najčešće predstavlja u dvoosnom koordinatnom sustavu. Ovaj pristup pojednostavljuje sintezu i analizu pogonskog sustava sa SMPM-ovima. Stator stroja se predstavlja s dva namota dok se rotor modelira kao izvor konstantnog ulančanog toka u jednoj osi.

Stacionarni dvoosni koordinatni sustav (četo zvan $\alpha\beta$ koordinatni sustav) je nepraktičan za analizu rada stroja kako iznosi impedancija statora ovise o položaju rotora. Također, u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu statorske veličine (naponi, struje i dr.) su izmjenične veličine što nije pogodno za sintezu sustava upravljanja SMPM-om. Zbog toga se, prilikom izrade matematičkog modela SMPM-a, statorske veličine transformiraju u dvoosni rotirajući koordinatni sustav (četo zvan dq koordinatni sustav) koji rotira istom brzinom kako i rotor, odnosno koji je sinkroniziran s rotorom stroja.

Prilikom izrade matematičkog modela sinkronog stroja sa stalnim magnetima pretpostavlja se sljedeće:

- stroj je električki i geometrijski simetričan u sve tri faze,
- parametri stroja su koncentrirani,
- raspodjela magnetskog polja u zračnom rasporu je sinusna (zanemareni viši harmonici),
- zasićenje i gubici u željezu se zanemaruju,
- na rotoru nema prigušnog kaveza,
- magnetski tok rotora, otpori i induktivitet imaju konstantnu vrijednost,
- efektivna duljina zračnog raspora je konstantna po cijelom obodu stroja,
- priključak motora na trofazni izvor napona izveden je bez nul vodiča pa vrijedi:

$$i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0$$

gdje su $i_a(t)$, $i_b(t)$ i $i_c(t)$ trenutne vrijednosti faznih struja statora.

U nastavku dan je način transformacije matematičkog modela SMPM-a iz trofaznog statorskog koordinatnog sustava (abc koordinatnog sustava) u rotirajući dq koordinatni sustav korištenjem preslikavanja prostornih vektora fizikalnih veličina. Takav pristup može se primijeniti i za n -polne SMPM-ove ($n > 2$).

Osim transformacija veličina iz abc u dq koordinatni sustavi i obrnuto, dan je način određivanja elektromagnetskog momenta. Također, dane su nelinearne diferencijalne jednadžbe matematičkog modela SMPM-a u $\alpha\beta$ i dq koordinatnom sustavu.

2.1 Prostorni vektor

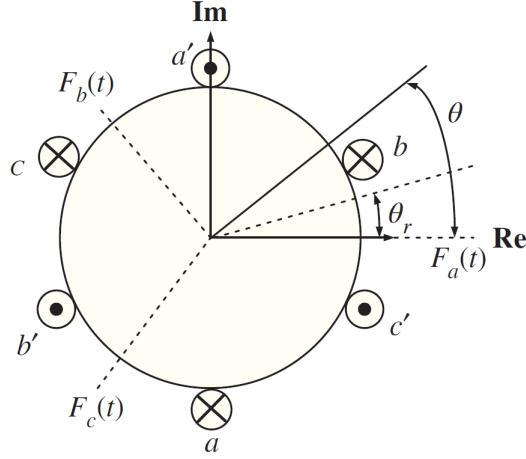
Na slici 3 dan je presjek statora izmjeničnog stroja napajanog iz trofaznog izmjeničnog izvora. Prema Amperovom zakonu, protjecanje (magnetomotivna sila) će biti prisutno kada struja teče kroz namote stroja. Svaki od namota statora je za 120° stupnjeva geometrijski pomaknut.

Uz pretpostavku da je frekvencija napajanja ω , početni kut struje u fazi a jednak ϕ_0 i amplituda struje u svakoj od faza I_s , vrijedi sljedeće:

$$i_a(t) = I_s \cos(\omega t + \phi_0) \quad (1)$$

$$i_b(t) = I_s \cos\left(\omega t + \phi_0 - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (2)$$

$$i_c(t) = I_s \cos\left(\omega t + \phi_0 - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (3)$$



Slika 3: Presjek statora sinkronog stroja [3]

U tom slučaju svaka od faza stvara protjecanje:

$$F_a(t) = N_s i_a(t) = F_m \cos(\omega t + \phi_0) \quad (4)$$

$$F_b(t) = N_s i_b(t) = F_m \cos\left(\omega t + \phi_0 - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (5)$$

$$F_c(t) = N_s i_c(t) = F_m \cos\left(\omega t + \phi_0 - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (6)$$

gdje je $F_m = N_s I_s$ amplituda protjecanja u pojedinoj fazi (pretpostavlja se da je efektivni broj zavoja N_s jednak za sve tri faze).

U određenom položaju θ (slika 3) protjecanje pojedine faze iznosi:

$$F_a(t)^\theta = F_a(t) \cos(0 - \theta) \quad (7)$$

$$F_b(t)^\theta = F_b(t) \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) \quad (8)$$

$$F_c(t)^\theta = F_c(t) \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right) \quad (9)$$

Ukupno protjecanje za kut θ je jednako zbroju izraza (7)-(9):

$$F(t)^\theta = F_a(t) \cos(0 - \theta) + F_b(t) \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) + F_c(t) \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right) \quad (10)$$

Korištenjem izražavanja preko kompleksnih varijabli, izraz (10) može se zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} F(t)^\theta &= \text{Re} \left\{ F_a(t) e^{-j\theta} + F_b(t) e^{j(\frac{2\pi}{3} - \theta)} + F_c(t) e^{j(\frac{4\pi}{3} - \theta)} \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ \left(F_a(t) + F_b(t) e^{j\frac{2\pi}{3}} + F_c(t) e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) e^{-j\theta} \right\} = \\ &= \frac{3}{2} \text{Re} \left\{ \frac{2}{3} \left(F_a(t) + F_b(t) e^{j\frac{2\pi}{3}} + F_c(t) e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) e^{-j\theta} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

gdje vrijedi:

$$\begin{aligned} e^{-j\theta} &= \cos(-\theta) + j \sin(-\theta) = \cos(\theta) - j \sin(\theta) \\ \cos(-\theta) &= \text{Re} \left\{ e^{-j\theta} \right\} \end{aligned}$$

Iz izraza (11), prostorni vektor protjecanja definira se kao:

$$\vec{F}(t) = \frac{2}{3} \left(F_a(t) + F_b(t) e^{j\frac{2\pi}{3}} + F_c(t) e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) \quad (12)$$

dok se ukupno protjecanje u položaju θ može izraziti na sljedeći način:

$$F(t)^\theta = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left\{ \vec{F}(t) e^{-j\theta} \right\} \quad (13)$$

Uvrštavanjem izraza za protjecanje u pojedinoj fazi (4)-(6) u izraz (12), za prostorni vektor protjecanja dobije se:

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) &= \frac{2}{3} \left(F_a(t) + F_b(t) e^{j\frac{2\pi}{3}} + F_c(t) e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) \\ &= \frac{2}{3} F_m \left(\cos(\omega t + \phi_0) + \cos\left(\omega t + \phi_0 - \frac{2\pi}{3}\right) e^{j\frac{2\pi}{3}} + \cos\left(\omega t + \phi_0 - \frac{4\pi}{3}\right) e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) \\ &= \frac{2}{3} F_m \left(\frac{1}{2} \left(e^{j(\omega t + \phi_0)} + e^{-j(\omega t + \phi_0)} \right) + \frac{1}{2} \left(e^{j(\omega t + \phi_0 - \frac{2\pi}{3})} + e^{-j(\omega t + \phi_0 - \frac{2\pi}{3})} \right) e^{j\frac{2\pi}{3}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left(e^{j(\omega t + \phi_0 - \frac{4\pi}{3})} + e^{-j(\omega t + \phi_0 - \frac{4\pi}{3})} \right) e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) = \\ &= \frac{1}{3} F_m \left(e^{j(\omega t + \phi_0)} + e^{-j(\omega t + \phi_0)} + e^{j(\omega t + \phi_0)} e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j(\omega t + \phi_0)} e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{j\frac{2\pi}{3}} + \right. \\ &\quad \left. + e^{j(\omega t + \phi_0)} e^{-j\frac{4\pi}{3}} e^{j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j(\omega t + \phi_0)} e^{j\frac{4\pi}{3}} e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) = \\ &= \frac{1}{3} F_m \left(3e^{j(\omega t + \phi_0)} + e^{-j(\omega t + \phi_0)} \left(1 + e^{j\frac{4\pi}{3}} + e^{j\frac{8\pi}{3}} \right) \right) \end{aligned} \quad (14)$$

te kako vrijedi:

$$1 + e^{j\frac{4\pi}{3}} + e^{j\frac{8\pi}{3}} = 1 + \cos\frac{4\pi}{3} + j\sin\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{8\pi}{3} + j\sin\frac{8\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

onda se prostorni vektor protjecanja može zapisati na sljedeći način:

$$\vec{F}(t) = F_m e^{j(\omega t + \phi_0)} \quad (15)$$

odnosno ukupno protjecanje u položaju θ iznosi:

$$F(t)^\theta = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left\{ \vec{F}(t) e^{-j\theta} \right\} = \frac{3}{2} F_m \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t + \phi_0)} e^{-j\theta} \right\} = \frac{3}{2} F_m \cos(\omega t + \phi_0 - \theta) \quad (16)$$

Prostorni vektor protjecanja $\vec{F}(t)$ je vektor koji rotira frekvencijom ω (frekvencija napajanja statora) u kompleksnoj ravnini. Trenutna vrijednost protjecanja $F(t)^\theta$ u položaju θ je određena iznosom prostornog vektora protjecanja projiciranog na os pod kutem θ (kut između realne osi i a osi statora).

Na slici 4 dan je slučaj prostornog vektora protjecanja za $t = 0$ i $\phi_0 = 0^\circ$. U tom slučaju vektori protjecanja u trenutku $t = 0$ po pojedinoj fazi iznose:

$$\vec{F}_a(0) = F_m \cos(\omega 0 + \phi_0) e^{j0} = F_m \cos(0) e^{j0} \quad (17)$$

$$\vec{F}_b(0) = F_m \cos\left(\omega 0 + \phi_0 - \frac{2\pi}{3}\right) e^{j\frac{2\pi}{3}} = F_m \cos\left(0 - \frac{2\pi}{3}\right) e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (18)$$

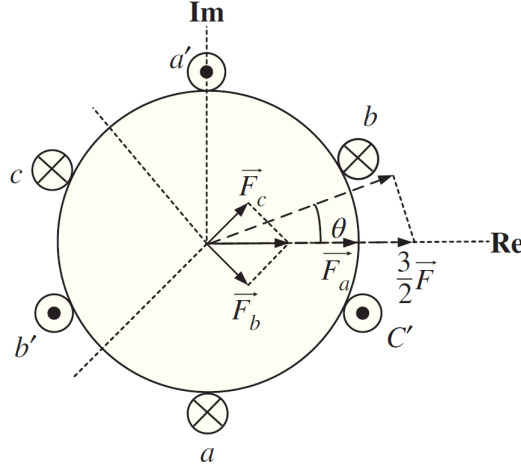
$$\vec{F}_c(0) = F_m \cos\left(\omega 0 + \phi_0 - \frac{4\pi}{3}\right) e^{j\frac{4\pi}{3}} = F_m \cos\left(0 - \frac{4\pi}{3}\right) e^{j\frac{4\pi}{3}} \quad (19)$$

odnosno prostorni vektor protjecanja iznosi:

$$\begin{aligned}
\vec{F}(0) &= \frac{2}{3} \left(\vec{F}_a(0) + \vec{F}_b(0) + \vec{F}_c(0) \right) = \\
&= \frac{2}{3} F_m \left(1 + \cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) e^{j\frac{2\pi}{3}} + \cos \left(-\frac{4\pi}{3} \right) e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) = \\
&= \frac{2}{3} F_m \left(1 + \frac{1}{2} \left(e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{j\frac{2\pi}{3}} \right) e^{j\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{2} \left(e^{-j\frac{4\pi}{3}} + e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) = \\
&= \frac{2}{3} F_m \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{j\frac{4\pi}{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{j\frac{8\pi}{3}} \right) = \\
&= F_m
\end{aligned} \tag{20}$$

Onda je ukupno protjecanje za kut θ :

$$F(0)^\theta = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left\{ \vec{F}(0) e^{j\theta} \right\} = \frac{3}{2} F_m \cos(\theta) \tag{21}$$



Slika 4: Prostorni vektor protjecanja u trenutku $t = 0$ [3]

2.2 Naponske jednadžbe SMPM-a

Izražavanjem fizikalnih veličina SMPM-a korištenjem prostornih vektora dobije se matematički zapis pogodan za daljnje izvođenje matematičkog modela SMPM-a u $\alpha\beta$, odnosno dq koordinatnom sustavu. To je glavna ideja za dobivanje odgovarajućeg matematičkog modela SMPM-a.

Na sličan način kako je definiran prostorni vektor protjecanja (izraz (12)), prostorni vektor struje se definira kao:

$$\vec{i}_s(t) = \frac{2}{3} \left(i_a(t) + i_b(t) e^{j\frac{2\pi}{3}} + i_c(t) e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) = I_s e^{j(\omega t + \phi_0)} \tag{22}$$

dok se prostorni vektor napona statora definira kao:

$$\vec{u}_s(t) = \frac{2}{3} \left(u_a(t) + u_b(t) e^{j\frac{2\pi}{3}} + u_c(t) e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) = U_s e^{j(\omega t + \phi'_0)} \tag{23}$$

gdje su $i_a(t)$, $i_b(t)$, $i_c(t)$, $u_a(t)$, $u_b(t)$ i $u_c(t)$ struje, odnosno naponi statora u pojedinim fazama.

Statorski ulančani tok ψ_s SMPM-a se sastoji od toka proizvedenog statorskim strujama i toka proizvedenog od stalnih magneta na rotoru. Ulančani tok statora se korištenjem prostornih vektora može zapisati na sljedeći način:

$$\vec{\psi}_s(t) = L_s \vec{i}_s(t) + \phi_{mg} e^{j\theta_e(t)} \tag{24}$$

gdje ϕ_{mg} iznos toka stalnih magenta na rotoru, θ_e električni kut rotora i L_s međuinuktivitet i rasipni induktivitet statora (uz pretpostavku da se razmatra SMVPM gdje je $L_d = L_q = L_s$).

Naponska jednadžba statora, pomoću prostornih vektora struje, napona i toka statora, može se izraziti kao:

$$\vec{u}_s(t) = \vec{i}_s(t) R_s + \frac{d\vec{\psi}_s(t)}{dt} \quad (25)$$

gdje je $\vec{i}_s(t) R_s$ pad napona na otporu statora stroja, a $\frac{d\vec{\psi}_s(t)}{dt}$ inducirani napon zbog vrtnje statora, odnosno zbog promjene ulančanog toka statora. Uvrštavanjem izraza (24) u izraz (25) dobije se:

$$\begin{aligned} \vec{u}_s(t) &= \vec{i}_s(t) R_s + L_s \frac{d\vec{i}_s(t)}{dt} + \frac{d(\phi_{mg} e^{j\theta_e(t)})}{dt} \\ &= \vec{i}_s(t) R_s + L_s \frac{d\vec{i}_s(t)}{dt} + \phi_{mg} e^{j\theta_e(t)} j \frac{d\theta_e(t)}{dt} \\ &= \vec{i}_s(t) R_s + L_s \frac{d\vec{i}_s(t)}{dt} + j\omega_e \phi_{mg} e^{j\theta_e(t)} \end{aligned} \quad (26)$$

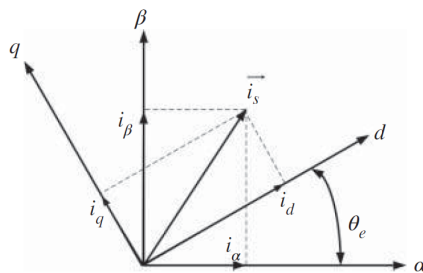
Izraz (26) pokazuje vezu između prostornih vektora struja i napona statora SMVPM-a. Na temelju ovog izraza izveden je matematički model SMPM-a u $\alpha\beta$, odnosno dq koordinatnom sustavu.

2.3 Matematički model sinkronog stroja s vanjskim stalnim magnetima

Prostorni vektori fizikalnih veličina SMPM-a su vektori konstantnog iznosa (amplitude) koji rotiraju sinkronom brzinom, odnosno frekvencijom napajanja ω . Korištenjem metoda preslikavanja i izrazom (26) izvodi se matematički model SMVPM-a u $\alpha\beta$, odnosno dq koordinatnom sustavu.

2.3.1 Matematički model SMVPM u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu

Postavljanjem α (realne) osi u smjeru osi faze a (slika 3) te dodavanjem β (imaginarnu) osi koja je okomita na α os, definira se $\alpha\beta$ stacionarni koordinatni sustav (slika 5).



Slika 5: $\alpha\beta$ koordinatni sustav [3]

Izražavanjem prostornih vektora napona i struje statora pomoću njihovih α i β komponenta dobije se:

$$\vec{u}_s = u_\alpha + j u_\beta \quad (27)$$

$$\vec{i}_s = i_\alpha + j i_\beta \quad (28)$$

Uvrštavanjem izraza (27) i (28) u jednadžbu napona statora (26) te izjednačavanjem realnih

i imaginarnih dijelova dobije se:

$$\begin{aligned}\vec{u}_s &= u_\alpha + ju_\beta = R_s(i_\alpha + ji_\beta) + L_s \frac{d}{dt}(i_\alpha + ji_\beta) + j\omega_e \phi_{mg} e^{j\theta_e} = \\ &= R_s i_\alpha + jR_s i_\beta + L_s \frac{di_\alpha}{dt} + jL_s \frac{di_\beta}{dt} + j\omega_e \phi_{mg} (\cos \theta_e + j \sin \theta_e) = \\ &= R_s i_\alpha + L_s \frac{di_\alpha}{dt} - \omega_e \phi_{mg} \sin \theta_e + j \left(R_s i_\beta + L_s \frac{di_\beta}{dt} + j\omega_e \phi_{mg} \cos \theta_e \right) \quad (29)\end{aligned}$$

$$u_\alpha = R_s i_\alpha + L_s \frac{di_\alpha}{dt} - \omega_e \phi_{mg} \sin \theta_e \quad (30)$$

$$u_\beta = R_s i_\beta + L_s \frac{di_\beta}{dt} + j\omega_e \phi_{mg} \cos \theta_e \quad (31)$$

Izrazima (30) i (31) dan je matematički opis električnih veličina SMVPM-a u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu.

Transformaciju trofaznih statorkih fizikalnih veličina (napona, struja i tokova) u dvoosni stacionarni $\alpha\beta$ koordinatni sustav moguće je definirati na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (32)$$

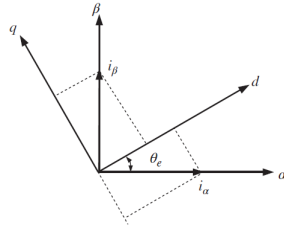
gdje i_0 predstavlja nul komponentu struje koja za simetrični trofazni sustav jednaka nuli. Matrica transformacije u izrazu (32) se naziva Clarkina transformacija. Za određivanje iznosa trofaznih veličina iz poznatih vrijednosti fizikalnih veličina u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu koristi se inverzna Clarkina transformacija koja se definira kao:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Fizikalne veličine u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu su i dalje izmjenične, odnosno sinusne veličine te iznosi impedancija statora i dalje ovise o položaju rotora.

2.3.2 Matematički model SMVPM u dq koordinatnom sustavu

Drugi način modeliranja električnih veličina SMVPM-a je pomoću rotirajućeg dq koordinatnog sustava. d os se postavlja u smjeru toka kojeg proizvode magneti na rotoru dok je q os okomita na nju (slika 6).



Slika 6: dq koordinatni sustav [3]

Iz slike 6 može se zaključiti da je preslikavanje prostornog vektora u dq koordinatni sustav moguće izvršiti jednostavnom rotacijom prostornog vektora prikazanog u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu za kut θ_e . Matematički zapisano, to je množenje prostornog vektora prikazanog u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu s $e^{-j\theta_e}$:

$$\vec{u}_s' = \vec{u}_s e^{-j\theta_e} \quad (34)$$

$$\vec{i}_s' = \vec{i}_s e^{-j\theta_e} \quad (35)$$

gdje \vec{u}_s' i \vec{i}_s' predstavljaju prostorne vektore napona i struje statora u dq koordinatnom sustavu. Uvrštavanjem izraza za prostorni vektor napona (26) u izraz (34) dobije se:

$$\begin{aligned}\vec{u}_s' &= \vec{i}_s e^{-j\theta_e} R_s + L_s \frac{d\vec{i}_s}{dt} e^{-j\theta_e} + j\omega_e \phi_{mg} \\ \frac{d\vec{i}_s}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\vec{i}_s' e^{j\theta_e} \right) = \frac{d\vec{i}_s'}{dt} e^{j\theta_e} + j\omega_e \vec{i}_s' e^{j\theta_e} \\ \vec{u}_s' &= \vec{i}_s' R_s + L_s \frac{d\vec{i}_s'}{dt} + j\omega_e L_s \vec{i}_s' + j\omega_e \phi_{mg}\end{aligned}\quad (36)$$

Prostorni vektori napona \vec{u}_s' i struje \vec{i}_s' mogu se rastavit na svoje realne (d) i imaginarne (q) komponente u sljedećem obliku:

$$\vec{u}_s' = u_d + ju_q \quad (37)$$

$$\vec{i}_s' = i_d + ji_q \quad (38)$$

Izjednačavanjem izraza (36) i (37) dobiju se iznosi d i q komponente napona statora kao:

$$\begin{aligned}u_d + ju_q &= (i_d + ji_q) R_s + L_s \frac{d}{dt} (i_d + ji_q) + j\omega_e L_s (i_d + ji_q) + j\omega_e \phi_{mg} = \\ &= i_d R_s + L_s \frac{di_d}{dt} - \omega_e L_s i_q + j \left(i_q R_s + L_s \frac{di_q}{dt} + \omega_e L_s i_d \omega_e \phi_{mg} \right) \\ u_d &= i_d R_s + L_s \frac{di_d}{dt} - \omega_e L_s i_q \\ u_q &= i_q R_s + L_s \frac{di_q}{dt} + \omega_e L_s i_d + \omega_e \phi_{mg}\end{aligned}\quad (39)$$

$$\quad (40)$$

Transformaciju statorskih fizikalnih veličina (napona, struja i tokova) iz stacionarnog $\alpha\beta$ koordinatnog sustava u dvoosni rotirajući dq koordinatni sustav moguće je definirati na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & \sin \theta_e \\ -\sin \theta_e & \cos \theta_e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix} \quad (41)$$

Matrica transformacije u izrazu (41) se naziva Parkova transformacija. Za određivanje iznosa α i β komponenata prostornog vektora uz poznate d i q komponente istog, koristi se inverzna Parkova transformacija koja se definira kao:

$$\begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & -\sin \theta_e \\ \sin \theta_e & \cos \theta_e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} \quad (42)$$

Kod matematičkog modela SMVPM-a u dq koordinatnom sustavu ((39),(40)) struje i naponi u d i q osima više nisu izmjenične (sinusne) veličine već su zbog transformacije u rotirajuću dq koordinatni sustav istosmjerne veličine. To pojednostavljuje sintezu algoritma upravljanja te sam način upravljanja SMVPM-a.

2.3.3 Elektomagnetski moment SMVPM-a

Induktiviteti SMVPM-a u d i q osi su jednaki ($L_d = L_q = L_s$) jer se nema efekta izraženih polova te je tok statora ψ_s (u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu) dan izrazom (24). Na sličan način kako su transformirani prostorni vektori napona i struje statora, zakretanjem toka statora ψ_s za kut θ_e dobije se vektor ulančanog toka statora u dq koordinatnom sustavu kao:

$$\vec{\psi}_s' = \vec{\psi}_s e^{-j\theta_e} = \psi_d + j\psi_q \quad (43)$$

odnosno:

$$\begin{aligned}
\psi_d + j\psi_q &= \left(L_s \vec{i}_s + \phi_{mg} e^{j\theta_e} \right) e^{-j\theta_e} = \\
&= L_s \vec{i}_s e^{-j\theta_e} + \phi_{mg} = L_s \vec{i}_s' + \phi_{mg} = \\
&= L_s i_d + \phi_{mg} + j L_s i_q \\
\psi_d &= L_s i_d + \phi_{mg} \tag{44} \\
\psi_q &= L_s i_q \tag{45}
\end{aligned}$$

Elektromagnetski moment SMPM-a se računa kao vektorski umnožak prostornih vektora ulančanog toka i struje statora:

$$M_{em} = \frac{3}{2} p \vec{\psi}_s \times \vec{i}_s = \frac{3}{2} p \vec{\psi}_s' \times \vec{i}_s' \tag{46}$$

gdje je s p označen broj pari polova. Elektromagnetski moment, nakon množenja prostornih vektora toka i struje statora, iznosi:

$$M_{em} = \frac{3}{2} p (\psi_d i_q - \psi_q i_d) \tag{47}$$

Uvrštavanjem izraza (44) i (45) u izraz (47) dobije se:

$$M_{em} = \frac{3}{2} p (L_s i_d i_q + \phi_{mg} i_q - L_s i_q i_d) = \frac{3}{2} p \phi_{mg} i_q \tag{48}$$

Iz izraza (48) vidljivo je da se s elektromagnetskim momentom SMVPM-a može upravljati pomoću struje i_q jer se magnetski tok stalnih magneta smatra konstantnim. Nadalje, tako modelirani SMVPM ima analogni princip upravljanja momentom kao i sustavi upravljanja s nezavisno uzbuđenim istosmjernim strojem (kod kojeg se moment motora upravlja armaturnom strujom).

S duge strane, elektromagnetski moment SMVPM-a izražen u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu iznosi:

$$\begin{aligned}
M_{em} &= \frac{3}{2} p (\psi_\alpha i_\beta - \psi_\beta i_\alpha) \\
\vec{\psi}_s &= L_s \vec{i}_s + \phi_{mg} e^{j\theta_e} = L_s i_\alpha + \phi_{mg} \cos \theta_e + j (L_s i_\beta + \phi_{mg} \sin \theta_e) \\
M_{em} &= \frac{3}{2} p [(L_s i_\alpha + \phi_{mg} \cos \theta_e) i_\beta - (L_s i_\beta + \phi_{mg} \sin \theta_e) i_\alpha] \tag{49}
\end{aligned}$$

Iz izraza (49) vidljivo je da uz poznavanje komponenata struja statora i_α i i_β moguće je odrediti elektromagnetski moment SMVPM-a. Međutim, nije moguće zadati iznose komponenta struja (i_α i i_β ; ne zaboraviti da su to izmjenične, sinusne veličine) kako bi se dobio željeni iznos elektromagnetskog momenta. To je jedan od razloga zašto se prilikom izrade algoritma upravljanja SMPM-om najčešće koristi matematički model u dq koordinatnom sustavu.

2.4 Matematički model sinkronog stroja s unutrašnjim stalnim magnetima

Sinkroni stroj s unutrašnjim stalnim magnetima (SMUPM) se ne može razmatrati kao stroj s konstantnim zračnim rasporedom, tj. induktiviteti u d i q osi nisu jednaki ($L_d \neq L_q$). To je osnovna razlika između SMVPM-a i SMUPM-a. Postupak određivanja matematičkog modela je sličan postupku koji je dan za dobivanje modela SMVPM-a. Naponske jednadžbe zapisane pomoću prostornih vektora napona, struja i ulančanog toka statora su iste i glase:

$$\vec{u}_s = R_s \vec{i}_s + \frac{d\vec{\psi}_s}{dt} \tag{50}$$

u α/β koordinatnom sustavu, odnosno u dq koordinatnom sustavu:

$$\vec{u}_s' = R_s \vec{i}_s' + \frac{d\vec{\psi}_s'}{dt} + j\omega \vec{\psi}_s' \quad (51)$$

Ulančani tok statora može se (slično kao i kod SMVPM-a) može se zapisati na sljedeći način:

$$\vec{\psi}_s' = \psi_d + j\psi_q \quad (52)$$

gdje je:

$$\psi_d = L_d i_d + \phi_{mg} \quad (53)$$

$$\psi_q = L_q i_q \quad (54)$$

Tipično je induktivitet L_d manji po iznosu od induktiviteta L_q . Uvrštavanjem izraza (52), (53) i (54) u izraz (51) dobiju se naponske jednadžbe SMUPM-a u dq koordinatnom sustavu kao:

$$\begin{aligned} \vec{u}_s' &= u_d + ju_q = \\ &= R_s (i_d + ji_q) + \frac{d}{dt} (L_d i_d + \phi_{mg} + jL_q i_q) + j\omega_e (L_d i_d + \phi_{mg} + jL_q i_q) = \\ &= R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega_e L_q i_q + j \left(R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega_e L_d i_d + \omega_e \phi_{mg} \right) \\ u_d &= R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega_e L_q i_q \end{aligned} \quad (55)$$

$$u_q = R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega_e L_d i_d + \omega_e \phi_{mg} \quad (56)$$

Substitucijom izraza (43) i (53) u izraz za elektromagnetski moment (47) dobije se:

$$M_{em} = \frac{3}{2}p [(L_d i_d + \phi_{mg}) i_q - L_q i_q i_d] = \frac{3}{2}p [\phi_{mg} i_q + (L_d - L_q) i_d i_q] \quad (57)$$

Usporedbom izraza za elektromagnetski moment SMVPM-a (48) i SMUPM-a (57) može se primijetiti da je jedina razlika u tome što elektromagnetski moment SMUPM-a ima dodatnu komponentu momenta $\frac{3}{2}p (L_d - L_q) i_d i_q$. Ta komponenta momenta naziva se reluktantni moment SMUPM-a.

2.5 Potpuni matematički model SMPM-a

Kako bi se SMPM u potpunosti matematički modelirao potrebno je matematički opisati i mehaniku SMPM-a. Za stroj s više pari polova veza između mehaničke ω_m i električne ω_e brzine vrtnje dan je s:

$$\omega_e = p\omega_m \quad (58)$$

gdje je p broj pari polova stroja. Pomoću izraza za ravnotežu momenata opisuje se dinamika mehanike stroja:

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} = M_{em} - D\omega_m - M_t \quad (59)$$

gdje je J_m ukupni moment inercije stroja (stroj i teret na osovinu), D konstanta prigušenja zbog trenja i ventilacije (i drugih gubitaka) te M_t moment tereta. Uvrštavanjem izraza (58) u izraz (59) dobije se:

$$\frac{d\omega_e}{dt} = \frac{p}{J_m} \left(M_{em} - \frac{D}{p} \omega_e - M_t \right) \quad (60)$$

Uvrštavanjem izraza (48) u izraz (60) te dodavanjem izraza (39) i (40) dobije se matematički model SMVPM-a koji glasi:

$$\frac{di_d}{dt} = \frac{1}{L_s} (u_d - i_d R_s + \omega_e L_s i_q) \quad (61)$$

$$\frac{di_q}{dt} = \frac{1}{L_s} (u_q - i_q R_s - \omega_e L_s i_d - \omega_e \phi_{mg}) \quad (62)$$

$$\frac{d\omega_e}{dt} = \frac{p}{J_m} \left(\frac{3}{2} p \phi_{mg} i_q - \frac{D}{p} \omega_e - M_t \right) \quad (63)$$

Na sličan način, uvrštavanjem izraza (57) u izraz (60) te dodavanjem izraza (39) i (40) dobije se matematički model SMUPM-a koji glasi:

$$\frac{di_d}{dt} = \frac{1}{L_d} (u_d - R_s i_d + \omega_e L_q i_q) \quad (64)$$

$$\frac{di_q}{dt} = \frac{1}{L_q} (u_q - R_s i_q - \omega_e L_d i_d - \omega_e \phi_{mg}) \quad (65)$$

$$\frac{d\omega_e}{dt} = \frac{p}{J_m} \left\{ \frac{3}{2} p [\phi_{mg} i_q + (L_d - L_q) i_d i_q] - \frac{D}{p} \omega_e - M_t \right\} \quad (66)$$

2.6 Svođenje sustava na relativne jedinice

Često se zbog jednostavnosti sinteze i same implementacije algoritma upravljanja na digitalni sustav, matematički model SMPM-a ((61)-(63), odnosno (64)-(66)) svodi na relativne jedinice. Ovisno o odabranim baznim vrijednostima, model nije jednoznačno određen. Ako se kao bazne vrijednosti odaberu sljedeće fizikalne veličine:

$$U_b = \sqrt{2} U_f \quad (67)$$

$$I_b = \sqrt{2} I_f \quad (68)$$

$$\omega_b = \omega_e = 2\pi f \quad (69)$$

gdje su U_b , I_b i ω_b bazne vrijednosti napona, struje statora i električne brzine. Ostale bazne vrijednosti mogu izračunati kao:

$$S_b = \frac{3}{2} U_b I_b = \frac{3}{2} \sqrt{2} U_f \sqrt{2} I_f = 3 U_f I_f \quad (70)$$

$$\psi_b = \frac{U_b}{\omega_b} \quad (71)$$

$$R_b = Z_b = \frac{U_b}{I_b} \quad (72)$$

$$L_b = \frac{Z_b}{\omega_b} \quad (73)$$

$$\omega_{mb} = \frac{\omega_b}{p} \quad (74)$$

$$t_b = \frac{1}{\omega_b} \quad (75)$$

$$D_b = \frac{M_b}{\omega_b} \quad (76)$$

Svođenjem na relativne jedinice matematički model SMUPM-a je opisan sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned}
I_b \frac{di_{dpu}}{dt} &= \frac{\omega_b}{Z_b L_{dpu}} \left(U_b u_{dpu} - R_b R_{spu} I_b i_{dpu} + \omega_b \omega_{spu} \frac{Z_b}{\omega_b} L_{qpu} I_b i_{qpu} \right) = \\
&= \frac{\omega_b}{L_{dpu}} (I_b u_{dpu} - I_b R_{spu} i_{dpu} + I_b \omega_{spu} L_{qpu} i_{qpu}) \\
\frac{di_{dpu}}{dt} &= \frac{\omega_b}{L_{dpu}} (u_{dpu} - R_{spu} i_{dpu} + \omega_{spu} L_{qpu} i_{qpu}) \tag{77}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_b \frac{di_{qpu}}{dt} &= \frac{\omega_b}{Z_b L_{qpu}} \left(U_b u_{qpu} - R_b R_{spu} I_b i_{qpu} - \omega_b \omega_{spu} \frac{Z_b}{\omega_b} L_{dpu} I_b i_{dpu} - \right. \\
&\quad \left. - \omega_b \omega_{spu} \frac{U_b}{\omega_b} \phi_{mgpu} \right) = \frac{\omega_b}{L_{qpu}} (I_b u_{qpu} - I_b R_{spu} i_{qpu} - \\
&\quad - I_b \omega_{spu} L_{dpu} i_{dpu} - I_b \omega_{spu} \phi_{mgpu}) \\
\frac{di_{qpu}}{dt} &= \frac{\omega_b}{L_{qpu}} (u_{qpu} - R_{spu} i_{qpu} - \omega_{spu} L_{dpu} i_{dpu} - \omega_{spu} \phi_{mgpu}) \tag{78}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_m \frac{d\omega_m}{dt} &= M_{em} - D\omega_m - M_t \\
T_m &= \frac{J_m \omega_{mb}^2}{S_b} \Rightarrow J_m = \frac{T_m S_b}{\omega_{mb}^2} \tag{79}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{T_m S_b}{\omega_{mb}^2} \frac{d\omega_m}{dt} &= M_{em} - D\omega_m - M_t \\
T_m \frac{S_b}{\omega_{mb}} \frac{1}{\omega_{mb}} \frac{d\omega_m}{dt} &= M_b M_{empu} - D_b D_{pu} \omega_{mb} \omega_{spu} - M_b M_{tpu} \\
T_m M_b \frac{d\omega_{spu}}{dt} &= M_b M_{empu} - \frac{M_b}{\omega_b} D_{pu} \frac{\omega_b}{p} \omega_{spu} - M_b M_{tpu} \\
\frac{d\omega_{spu}}{dt} &= \frac{1}{T_m} \left(M_{empu} - \frac{D_{pu}}{p} \omega_{spu} - M_{tpu} \right) \tag{80}
\end{aligned}$$

gdje je T_m mehanička vremenska konstanta definirana izrazom (79). Matematički model SMV-PM-a opisan sljedećim diferencijalnim jednadžbama:

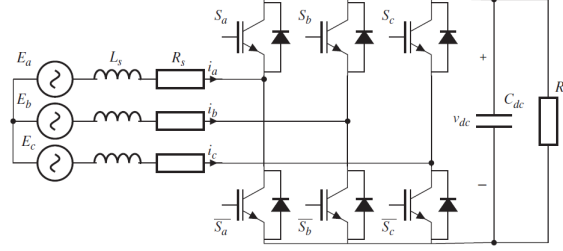
$$\frac{di_{dpu}}{dt} = \frac{\omega_b}{L_{spu}} (u_{dpu} - R_{spu} i_{dpu} + \omega_{spu} L_{spu} i_{qpu}) \tag{81}$$

$$\frac{di_{qpu}}{dt} = \frac{\omega_b}{L_{spu}} (u_{qpu} - R_{spu} i_{qpu} - \omega_{spu} L_{spu} i_{dpu} - \omega_{spu} \phi_{mgpu}) \tag{82}$$

$$\frac{d\omega_{spu}}{dt} = \frac{1}{T_m} \left(M_{empu} - \frac{D_{pu}}{p} \omega_{spu} - M_{tpu} \right) \tag{83}$$

3 Matematički model energetskog pretvarača spojenog

Na slici 7 prikazan je shema spoja energetskog pretvarača spojenog preko RL filtra na elektroenergetski sustav (EES).



Slika 7: Shema spoja energetskog pretvarača na EES [3]

Za izradu matematičkog modela energetskog pretvarača pretpostavlja se sljedeće:

- upravljanje poluvodičkim sklopka (S_a, S_b, S_c) onemogućuje da poluvodičke sklopke u istoj grani vode u isto vrijeme, odnosno njihovi upravljački signali su komplementarni:

$$S_a + \overline{S_a} = 1 \quad (84)$$

$$S_b + \overline{S_b} = 1 \quad (85)$$

$$S_c + \overline{S_c} = 1 \quad (86)$$

- pretpostavlja se da poluvodičke sklopke rade u kontinuiranom režimu rada,
- pretpostavlja se da je napon EES-a simetričan, odnosno da vrijedi:

$$E_a(t) = E_m \cos(\omega_g t) \quad (87)$$

$$E_b(t) = E_m \cos\left(\omega_g t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (88)$$

$$E_c(t) = E_m \cos\left(\omega_g t - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (89)$$

- nema nul-vodića, odnosno vrijedi:

$$i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0 \quad (90)$$

$$E_{an}(t) + E_{bn}(t) + E_{cn}(t) = 0 \quad (91)$$

- vrijednosti otpora R_s i L_s su za sve tri faze jednaki.

Korištenjem prostornih vektora za struju \vec{i}_s , napon EES-a \vec{E}_s i napon na stezaljkama pretvarača \vec{u}_s :

$$\vec{i}_s = \frac{2}{3} \left[i_a(t) + i_b(t) e^{j\frac{2\pi}{3}} + i_c(t) e^{j\frac{4\pi}{3}} \right] \quad (92)$$

$$\vec{E}_s = \frac{2}{3} \left[E_a(t) + E_b(t) e^{j\frac{2\pi}{3}} + E_c(t) e^{j\frac{4\pi}{3}} \right] \quad (93)$$

$$\vec{u}_s = \frac{2}{3} \left[u_a(t) + u_b(t) e^{j\frac{2\pi}{3}} + u_c(t) e^{j\frac{4\pi}{3}} \right] \quad (94)$$

naponska jednažba za spoj na slici 7 glasi:

$$\vec{E}_s = R_s \vec{i}_s + L_s \frac{d\vec{i}_s}{dt} + \vec{u}_s \quad (95)$$

odnosno:

$$\vec{u}_s = \vec{E}_s - R_s \vec{i}_s - L_s \frac{d\vec{i}_s}{dt} \quad (96)$$

Iz izraza za prostorni vektor napona na stezaljkama pretvarača (96) izvodi se matematički model energetskog pretvarača spojenog na EES u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu, odnosno u dq koordinatnom sustavu.

3.1 Matematički model energetskog pretvarača u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu

Prostorni vektori napona EES-a, pretvarača, odnosno struje mogu se zapisati kao (slika 5):

$$\vec{u}_s = u_\alpha + ju_\beta \quad (97)$$

$$\vec{i}_s = i_\alpha + ji_\beta \quad (98)$$

$$\vec{E}_s = E_\alpha + jE_\beta \quad (99)$$

Substitucijom pojedinih prostornih vektora (izrazi (97)-(99)) u vektorsku jednadžbu za napon na stezaljkama pretvarača (96) te rastavljanjem na imaginarnu i realnu komponentu dobije se:

$$u_\alpha + ju_\beta = E_\alpha + jE_\beta - R_s(i_\alpha + ji_\beta) - L_s \frac{d}{dt}(i_\alpha + ji_\beta)$$

$$u_\alpha = E_\alpha - R_s i_\alpha - L_s \frac{di_\alpha}{dt} \quad (100)$$

$$u_\beta = E_\beta - R_s i_\beta - L_s \frac{di_\beta}{dt} \quad (101)$$

Izrazi (100) i (101) opisuju dinamiku električnih veličina na stezaljkama (ulazu) energetskog pretvarača u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu.

3.2 Matematički model energetskog pretvarača u dq koordinatnom sustavu

Za dobivanje matematičkog modela u energetskog pretvarača u dq koordinatnom sustavu potrebno je prostorne vektore \vec{u}_s , \vec{i}_s i \vec{E}_s zakrenuti za kut θ_g (gdje je $\theta_g = \omega_g t$, a $\omega_g = 2\pi f$; slika 6). Matematički napisano:

$$\vec{u}_s' = \vec{u}_s e^{-j\theta_g} = u_d + ju_q \quad (102)$$

$$\vec{i}_s' = \vec{i}_s e^{-j\theta_g} = i_d + ji_q \quad (103)$$

$$\vec{E}_s' = \vec{E}_s e^{-j\theta_g} = E_d + jE_q \quad (104)$$

Množenjem izraza prostornog vektora napona (96) s $e^{-j\theta_g}$ te korištenjem izraza (102) do (104) dobije se:

$$\vec{u}_s' = \vec{E}_s' - R_s \vec{i}_s' - L_s \frac{d\vec{i}_s'}{dt} e^{-j\theta_g}$$

$$\frac{d\vec{i}_s'}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{i}_s' e^{j\theta_g}) = \frac{d\vec{i}_s'}{dt} e^{j\theta_g} + \vec{i}_s' e^{j\theta_g} j \frac{d\theta_g}{dt} = \frac{d\vec{i}_s'}{dt} e^{j\theta_g} + j\omega_g \vec{i}_s' e^{j\theta_g}$$

odnosno:

$$\vec{u}_s' = \vec{E}_s' - R_s \vec{i}_s' - L_s \frac{d\vec{i}_s'}{dt} - jL_s \omega_g \vec{i}_s' \quad (105)$$

Rastavljanjem na d i q komponente izraza (105) dobije se:

$$u_d + ju_q = E_d + jE_q - R_s(i_d + ji_q) - L_s \frac{d}{dt}(i_d + ji_q) - jL_s \omega_g(i_d + ji_q)$$

$$u_d = E_d - R_s i_d - L_s \frac{di_d}{dt} + L_s \omega_g i_q \quad (106)$$

$$u_q = E_q - R_s i_q - L_s \frac{di_q}{dt} - L_s \omega_g i_d \quad (107)$$

Kako dq koordinatni sustav nije stacionaran, već se vrti frekvencijom ω_g , tipično se d os koordinatnog sustava postavlja da bude u fazi s prostornim vektorom napona EES-a \vec{E}_s' što znači da je q komponenta napona EES-a jednaka nuli, odnosno izraz (107) iznosi:

$$u_q = -R_s i_q - L_s \frac{di_q}{dt} - L_s \omega_g i_d \quad (108)$$

Da bi se u potpunosti matematički opisao sustav energetskog pretvarača spojenog na EES, potrebno je matematički opisati i dinamiku istosmjernog međukruga energetskog pretvarača. Za opis dinamike istosmjernog međukruga potrebno je opisati odnose snaga na ulazu i izlazu iz pretvarača, odnosno definirati snagu na kondenzatoru C_{dc} (slika 7) kao:

$$P_c = P_g - P_T \quad (109)$$

gdje je P_g predana snaga pretvaraču iz EES-a, a P_T snaga na trošilu. Izražavanjem pojedinih snaga korištenjem izraza za napone i struje dobije se:

$$\begin{aligned} u_{dc}(t) i_c(t) &= \frac{3}{2} \vec{u}_s \cdot \vec{i}_s - i_T(t) u_{dc}(t) \\ i_c(t) &= C \frac{du_{dc}(t)}{dt} \\ C \frac{du_{dc}(t)}{dt} &= \frac{3}{2u_{dc}} \vec{u}_s \cdot \vec{i}_s - i_T(t) \end{aligned} \quad (110)$$

Substitucijom izraza (97) i (98) u izraz (110) dobije se:

$$C \frac{du_{dc}(t)}{dt} = \frac{3}{2u_{dc}} (u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta) - i_T(t) \quad (111)$$

odnosno korištenjem izraz (102) i (103), izraz (110) glasi:

$$C \frac{du_{dc}(t)}{dt} = \frac{3}{2u_{dc}} (u_d i_d + u_q i_q) - i_T(t) \quad (112)$$

Matematički dinamički model koji opisuje energetski pretvarač spojen na EES zapisan u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu glasi:

$$L_s \frac{di_\alpha}{dt} = -R_s i_\alpha - u_\alpha + E_\alpha \quad (113)$$

$$L_s \frac{di_\beta}{dt} = -R_s i_\beta - u_\beta + E_\beta \quad (114)$$

$$C \frac{du_{dc}(t)}{dt} = \frac{3}{2u_{dc}} (u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta) - i_T(t) \quad (115)$$

odnosno u dq koordinatnom sustavu glasi:

$$L_s \frac{di_d}{dt} = -R_s i_d - u_d + L_s \omega_g i_q + E_d \quad (116)$$

$$L_s \frac{di_q}{dt} = -R_s i_q - L_s \omega_g i_d - u_q \quad (117)$$

$$C \frac{du_{dc}(t)}{dt} = \frac{3}{2u_{dc}} (u_d i_d + u_q i_q) - i_T(t) \quad (118)$$

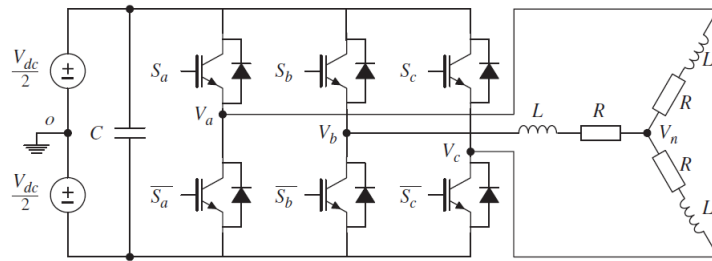
4 Upravljanje pretvaračem napona i frekvencije

Danas postoji čitav niz različitih izvedbi pretvarača napona i frekvencije za napajanje izmjeničnih strojeva na bazi poluvodičkih komponenti. Pretvarači napona i frekvencije za napajanje izmjeničnih strojeva mogu se podijeliti u dvije grupe:

1. pretvarači napona i frekvencije s istosmjernim međukrugom (indirektni pretvarači) i
2. direktni pretvarači, odnosno ciklokonvertori.

Za pretvarače s istosmjernim međukrugom karakteristično je da se energija uzeta iz mreže pretvara dva puta, jedanput s pomoću usmjerivača u istosmjernu energiju i drugi put s pomoću izmjenjivača u trofaznu energiju željenog napona i frekvencije, odnosno struje i frekvencije. Prema vrsti uskladištene energije u istosmjernom krugu (kondenzator ili prigušnica) razlikuju se pretvarači s utisnutim naponom, odnosno s utisnutom strujom. Pretvarači s utisnutim naponom se danas najčešće koriste za napajanje izmjeničnih strojeva promjenjive brzine vrtnje te su u ovom dijelu dane njihove osnove izvedbe i načini rada. Pretvarači s utisnutom strujom kao i ciklokonvertori nisu objašnjeni u nastavku.

Topologija pretvarača s utisnutim naponom (u daljnjem tekstu zvan frekvencijski pretvarač ili izmjenjivač, radi jednostavnosti) dana je na slici 8. Glavna zadaća izmjenjivača je da na određeni način pomoću poluvodičkih sklopki (S_a , S_b i S_c) modulira napon istosmjernog međukruga (U_{dc}) kako bi se na izlazu iz pretvarača dobio izmjenični napon željene amplitude i frekvencije.



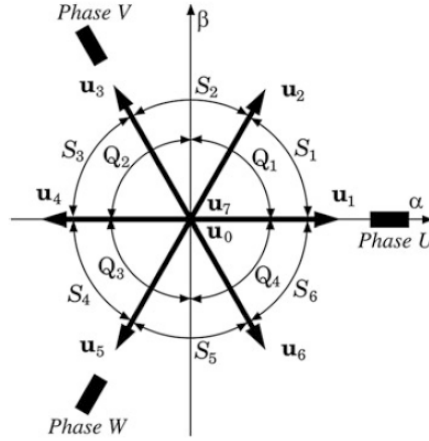
Slika 8: Topologija izmjenjivača pretvarača napona i frekvencije [3]

Trofazni napon na izlazu iz pretvarača se dobije upravljanjem tri para poluvodičkih sklopki (S_a/\bar{S}_a , S_b/\bar{S}_b i S_c/\bar{S}_c) čije impulse definiraju upravljački signali iz digitalnog sustava upravljanja (mikrokontrolera). Najčešće korištena poluvodička sklopka u pretvaračima, odnosno izmjenjivačima je IGBT. Kako IGBT može voditi struju u samo jednom smjeru onda se antiparalelno njemu spaja dioda (slika 8) da se omogući tok struje i u drugom smjeru. U svakoj grani izmjenjivača nalazi se jedan para IGBT sklopki kod kojeg samo jedan IGBT može biti uključen dok je drugi isključen. Ukoliko bi oba IGBT-a bila istovremeno uključena došlo bi do kratkospajanja istosmjernog međukruga. Zbog toga se stanje poluvodičkih sklopki u pojedinoj grani može definirati stanjem samo jedne od poluvodičkih sklopki. Ako se sa S_i označi stanje gornjih poluvodičkih sklopki (S_a , S_b i S_c) onda je stanje donjih poluvodičkih sklopki (\bar{S}_a , \bar{S}_b i \bar{S}_c) definirano s \bar{S}_i . Stoga sveukupno je moguće osam stanja sklopki koja su definirana stanjima gornjih sklopki u pojedinoj grani (stanja donjih sklopki su obrnuta).

Slika 9 prikazuje osam karakterističnih prostornih vektora napona u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu. Vektori $u_1 - u_6$ se nazivaju aktivni vektori dok su vektori u_0 i u_7 nul vektori napona. U tablici 1 dana su stanja poluvodičkih sklopki za realizaciju svih karakterističnih prostornih vektora napona.

U slučaju kada vodi gornja poluvodička sklopka, napon odgovarajuće faze je $\frac{U_{DC}}{2}$, dok kad vodi donja poluvodička sklopka je $-\frac{U_{DC}}{2}$. Izlazni naponi po pojedinim fazama izmjenjivača se mogu definirati kao:

$$U_i = U_{DC}S_i - \frac{U_{DC}}{2} \quad (119)$$



Slika 9: Karakteristični prostorni vektori napona izmjenjivača [4]

Tablica 1: Stanja poluvodičkih sklopki za karakteristične prostorne vektore napona

	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
v_{u+}	0	1	1	0	0	0	1	1
v_{v+}	0	0	1	1	1	0	0	1
v_{w+}	0	0	0	0	1	1	1	1

gdje indeks i označava pojedinu fazu ($i = a, b, c$), a S_i stanje gornjih poluvodičkih sklopki u pojedinoj grani (za $S_i = 1$ gornja poluvodička sklopka vodi, za $S_i = 0$ donja poluvodička sklopka vodi). Prema izrazu (119) vidljivo je da izlazni napon izmjenjivača je pravokutnog oblika s amplitudom $\pm \frac{U_{DC}}{2}$. Zbog toga osim osnovnog harmonika izlazni napon će imati i druge više harmonike. Prigušenje neželjenih viših harmonika izlaznog napona ovisi o tipu modulacije koja se primjenjuje za dobivanje željenog izlaznog napona. Tri najčešće metode modulacije za dobivanje željenog napona su [5, 6]:

1. metoda šest koraka (*six-step*),
2. sinusna širinsko-impulsna modulacija i
3. vektorska širinsko-impulsna modulacija.

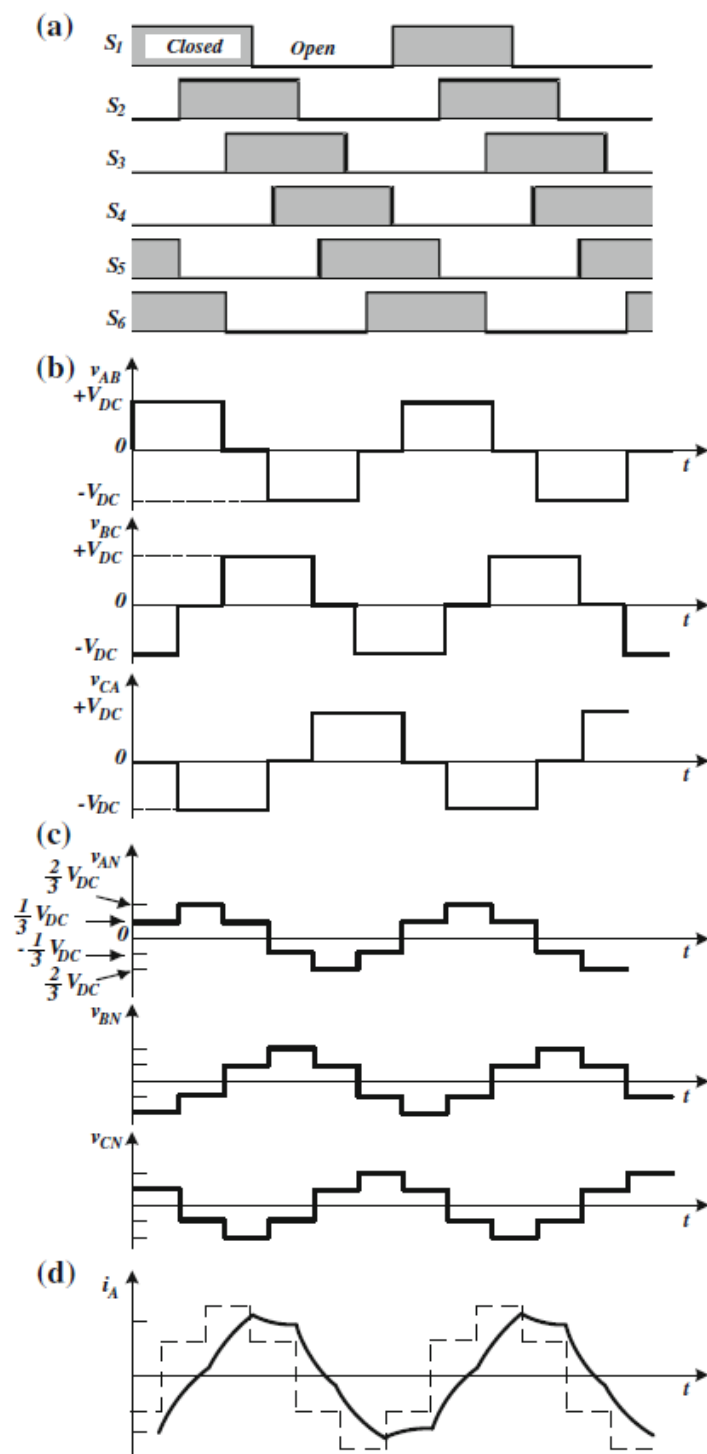
U nastavku su dana objašnjenja načina rada i svojstva pojedinih metoda modulacije napona.

4.1 Šest koraka modulacija - *Six-step*

Jedna od prvih i najjednostavnijih metoda modulacije napona je metoda šest koraka (*Six-step*). U ovoj metodi modulacije svaka poluvodička sklopka, u pojedinoj grani (fazi), vodi $T/2$ gdje je s T određena frekvencija sklapanja ($f = 1/T$). Promjena sklopnog stanja se događa svakih $T/6$, odnosno svakih 60° gdje se mijenja sklopno stanje samo jedne grane (slika 10).

Rastavljanjem izlaznog napona na Fourierov red, osnovni harmonik ima frekvenciju jednaku frekvenciji sklapanja (f). Frekvencije viših harmonika su reda $n = 5, 7, 11, 13, \dots$:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx = \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} U_{dc} \sin(nx) dx = \\
 &= \frac{4U_{dc}}{n\pi} \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)
 \end{aligned} \tag{120}$$



Slika 10: Vremenski dijagrami sklopnih stanja i izlaznih napona i struja izmjenjivača primjenom metode šest koraka [5]

Treći harmonik i njegovi višekratnici nisu prisutni u ovoj metodi modulacije. Promjenom sklopne frekvencije mijenja se frekvencija osnovnog harmonika, dok amplituda izlaznog napona ovisi o iznosu napona istosmjernog međukruga. Da bi se mijenjala amplituda izlaznog napona izmjenjivača, potrebno je moći mijenjati iznos napona istosmjernog međukruga.

Ovakav način modulacije je jednostavan za upravljanje i mali su sklopni gubici, ali ima loš harmonijski sastav izlaznog napona.

4.2 Sinusna širinsko impulsna modulacija (sinusni PWM)

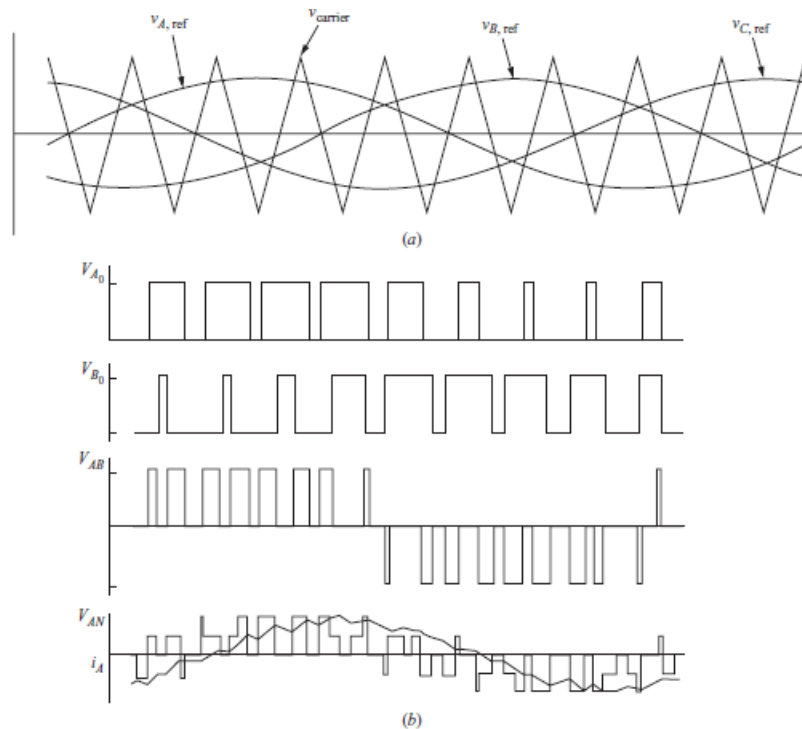
Često korišten tip modulacije u industrijskim pretvaračima napona i frekvencije je sinusna širinsko impulsna modulacija (*Sinusoidal Pulse Width Modulation*, sinusni PWM). Takav tip modulacije se temelji na usporedbi dva signala:

1. referentni signal (sinusni signal promjenjive frekvencije i amplitude) te
2. signal nosilac (trokutasti signal konstantne frekvencije i amplitude).

Usporedbom referentnog signala i signala nosioca određuje se stanje poluvodičkih sklopki u pojedinoj fazi. Frekvencija osnovnog harmonika određena je frekvencijom referentnog signala, dok je amplituda osnovnog harmonika određena odnosom amplituda referentnog signala i signala nosioca (amplitudni indeks modulacije m_a) te iznosom napona istosmjernog međukruga:

$$U_o = m_a \frac{U_{dc}}{2} \quad (121)$$

za $m_a \leq 1$. Za svaku granu izmjenjivača uspoređuje se sinusni signal (referentni signal) s trokutastim signalom (signal nosilac). Koriste se tri sinusna signala iste frekvencije i amplitude, ali fazno pomaknuta za 120° te jedan trokutasti signal s kojim se uspoređuju sinusni signali (slika 11).



Slika 11: Vremenski dijagrami izlaznih napona izmjenjivača primjenom sinusne širinsko impulsne modulacije [6]

Iz slike 11 vidljiv je način upravljanja poluvodičkim sklopkama:

$$\begin{aligned} u_a > u_{\Delta} &\rightarrow S_a = 1 \\ u_b > u_{\Delta} &\rightarrow S_b = 1 \\ u_c > u_{\Delta} &\rightarrow S_c = 1 \\ u_a < u_{\Delta} &\rightarrow \overline{S_a} = 1 \\ u_b < u_{\Delta} &\rightarrow \overline{S_b} = 1 \\ u_c < u_{\Delta} &\rightarrow \overline{S_c} = 1 \end{aligned}$$

Utjecaj viših harmonika se smanjuje ako je frekvencija signala nosioca višekratnik broja tri referentne frekvencije, odnosno ako je frekvencijski indeks modulacije:

$$m_f = \frac{f_c}{f_1} = n \quad (122)$$

gdje je f_c frekvencija signala nosioca, f_1 frekvencija osnovnog harmonika te $n = 3, 9, 15, \dots$

Ukoliko se ne želi ući u područje premodulacije, odnosno nelinearne modulacije, potrebno je ograničiti amplitudu referentnog signala na $\frac{U_{dc}}{2}$. Povećanje linearnog raspona modulacije moguće je upotrebom injektiranja signala nultog slijeda (*Zero Sequence Signal*). U praksi se koriste različite strukture i metode modulacije primjenom signala nultog slijeda, a samo neke su dane u nastavku.

Za razumijevanje širinsko impulsne modulacije s injektiranjem signala nultog slijeda potrebno je razmotriti željene vrijednosti napona trofaznog simetričnog sustava:

$$\begin{aligned} u_a^* &= u_m \sin(\omega_e t) \\ u_b^* &= u_m \sin\left(\omega_e t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ u_c^* &= u_m \sin\left(\omega_e t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (123)$$

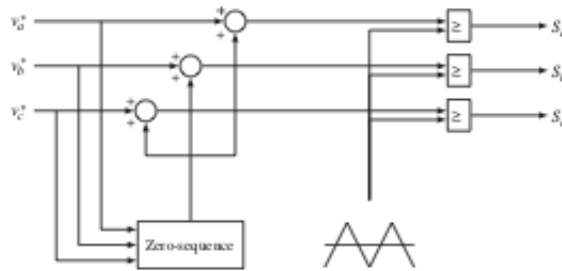
Ako se definira neutralna točke potencijala u_n u odnosu na točku potencijala *zemlje* kao:

$$u_n = \frac{u_a^* + u_b^* + u_c^*}{3} \quad (124)$$

i da su tri željena napona (u_a^* , u_b^* i u_c^*) simetrična, onda je $u_n = 0V$. Zbog toga što većina trofaznih električnih strojeva ima izoliranu nultočku, može se se dodati napon zajedničkoj točki (u_n). U tom slučaju željeni naponi iznose:

$$\begin{aligned} u_a^{**} &= u_a^* + u_n \\ u_b^{**} &= u_b^* + u_n \\ u_c^{**} &= u_c^* + u_n \end{aligned} \quad (125)$$

Primjenom sinusne modulacije moduliraju se definirani referentni signali (slika 12). Potrebno je primijetiti da se isti signal nultog slijeda (u_n) dodaje željenim vrijednostima izlaznih napona.



Slika 12: Injektiranje signala nultog slijeda [3]

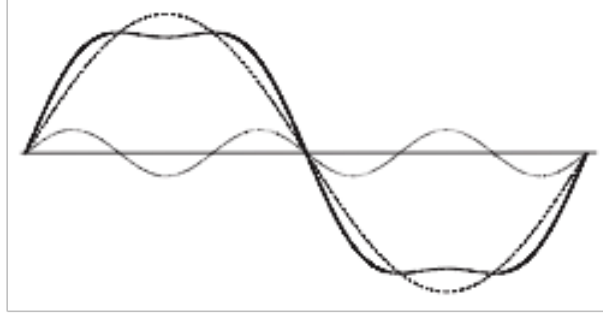
Postoji veliki broj načina odabira signala nultog slijed, a najčešće korišteni su signali nultog slijeda koji sadrže treći harmonik željenog izlaznog napona (izraz (123)). Dva su tipa signala, različitih amplituda koji se često koriste prilikom injektiranja signala nultog slijeda. Jedan tip signala nultog slijeda ima amplitudu jednaku 1/6 amplitude osnovnog harmonika (u_m):

$$u_n = \frac{1}{6} u_m \sin(3\omega_e t) \quad (126)$$

a drugi ima amplitudu jednaku $1/4$ amplitude osnovnog harmonika:

$$u_n = \frac{1}{4} u_m \sin(3\omega_e t) \quad (127)$$

Dodavanje trećeg harmonika smanjuje se maksimalan iznos napona koji se želi modulirati (izraz (125); slika 13).



Slika 13: Rezultantni referentni signal nakon dodavanja signala nultog slijeda $\frac{1}{6} u_m \sin(3\omega_e t)$ [3]

Maksimalan iznos izlaznog napona za slučaj injektiranja signala nultog slijeda tipa (126) je $\frac{1}{\sqrt{3}U_{dc}}$, dok je za slučaj injektiranja signala tipa (127) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}\frac{U_{dc}}{2}}$. Amplitudni modulacijski indeks onda iznosi:

$$m_{1/6} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}U_{dc}}}{\frac{U_{dc}}{2}} = 1.1547 \quad (128)$$

odnosno:

$$m_{1/6} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}\frac{U_{dc}}{2}}}{\frac{U_{dc}}{2}} = 1.1223 \quad (129)$$

Oba tipa modulacije injektiranjem signala nultog slijeda povećavaju linearni spektar modulacije u odnosu na klasičnu sinusnu širinsko impulsnu modulaciju. Dodavanje signala čija amplituda je $1/4$ amplitude željenog osnovnog harmonika smanjuje se THD izlaznog signala, dok se dodavanje signala čija amplituda je $1/6$ osnovnog harmonika se dobije veći spektar linearnog djelovanja modulacije. Ako se želi da modulacija injektiranjem signala nultog slijeda djeluje samo u linearnom dijelu modulacije, onda je potrebno da maksimalni iznos željenih napona (izraz (125)) bude manji od $\frac{1}{\sqrt{3}U_{dc}}$, odnosno $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}\frac{U_{dc}}{2}}$ (ovisno o tome koji tip signala nultog slijeda se primjenjuje).

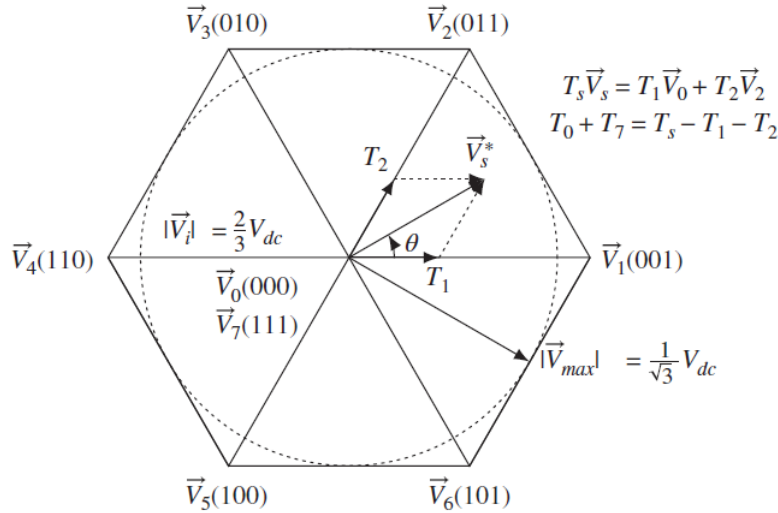
4.3 Vektorska širinsko impulsna modulacija (SVPWM)

Vektorska širinsko impulsna modulacija koristi karakteristične vektore ($\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_7$) kako bi se ostvario željeni prostorni vektor napona:

$$\vec{u}_s^* = \frac{2}{3} \left(u_a^* + u_b^* e^{j\frac{2\pi}{3}} + u_c^* e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) \quad (130)$$

gdje je \vec{u}_s^* željeni (postavljeni) prostorni vektor napona koji rotira kružnom frekvencijom ω_e (jednakojoj frekvenciji osnovnog harmonika).

Za primjenu vektorske modulacije vektorski prostor (u koordinatnom sustavu statora, $\alpha\beta$) podijeljen je u šest sektora, gdje je svaki sektor omeđen s dva susjedna aktivna vektora (slika 14). Modulacija željenog prostornog vektora \vec{u}_s^* se ostvaruje vremenskim *zatezanjem* dva aktivna vektora koji omeđuju prostor u kojem se nalazi željeni prostorni vektor te vremenskim *zatezanjem* odgovarajućeg nul-vektora (\vec{u}_0 ili \vec{u}_7).



Slika 14: Podjela vektorskog prostora za primjenu vektorske širinsko impulsne modulacije [3]

Ako se razmotri slučaj dan na slici 14, prostorni vektor \vec{u}_s^* se u vremenskom periodu širinsko impulsne modulacije T_s može modulirati pomoću aktivnih vektora $T_1 \vec{u}_1$ i $T_2 \vec{u}_2$ gdje je T_1 vrijeme djelovanja vektora \vec{u}_1 , a T_2 vrijeme djelovanja vektora \vec{u}_2 . Primjenom sinusnog poučka dobije se:

$$\frac{T_s |\vec{u}_s^*|}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{T_1 |\vec{u}_1|}{\sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right)} = \frac{T_2 |\vec{u}_2|}{\sin \theta} \quad (131)$$

odnosno:

$$\frac{T_1}{T_s} = \frac{|\vec{u}_s^*|}{\frac{U_{dc}}{\sqrt{3}}} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \quad (132)$$

$$\frac{T_2}{T_s} = \frac{|\vec{u}_s^*|}{\frac{U_{dc}}{\sqrt{3}}} \sin \theta \quad (133)$$

Za vrijeme preostalo u periodu širinsko impulsne modulacije potrebno je aktivirati odgovarajući nul-vektor, odnosno vrijedi:

$$T_0 + T_7 = T_s - T_1 - T_2 \quad (134)$$

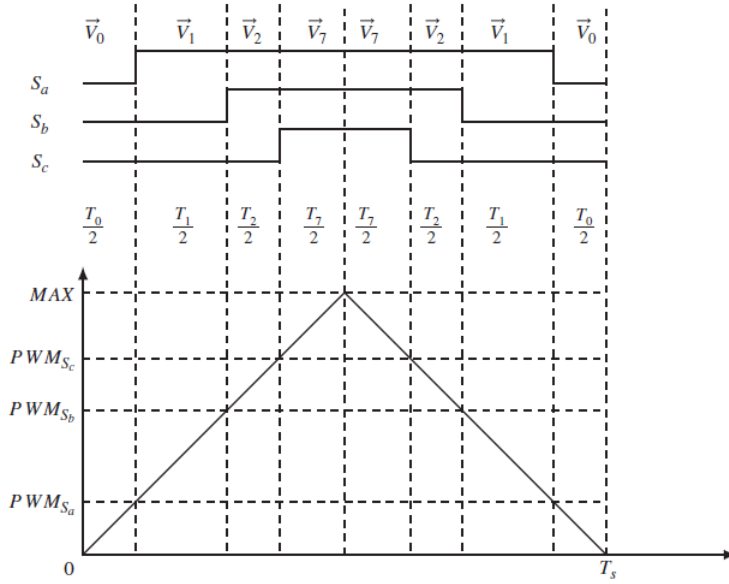
gdje je vremenski period $T_0 + T_7$ ukupno vrijeme djelovanja odgovarajućeg nul-vektora.

Kako je heksagon (slika 14) simetrično podjeljen u šest sektora, na sličan način se mogu odrediti vremena karakteristična vremena djelovanja odgovarajućih aktivnih vektora ostalih pet sektora. Često korištena vektorska modulacija simetrično upravlja s četiri karakteristična vektora (dva aktivna i dva nul-vektora) unutar vremenskog perioda rada vektorske modulacije T_s .

Za realizaciju (implementaciju) vektorske modulacije u digitalni sustav definira se parametar maksimalne vrijednosti brojača te se koristi integrirani brojač koji broji od nula do specificirane maksimalne vrijednosti (MAX) te nazad do nule unutar jednog vremenskog perioda širinsko impulsne modulacije T_s (slika 15). Linearni pravci vremenskog odziva brojača mogu se opisati kao:

$$PWM_{time} = \begin{cases} \frac{2MAX}{T_s} t & \text{za } 0 \leq t < \frac{T_s}{2} \\ 2MAX - \frac{2MAX}{T_s} t & \text{za } \frac{T_s}{2} \leq t < T_s \end{cases} \quad (135)$$

Na ordinati vremenskog odziva danog na slici 15 nalaze se oznake PWM_{S_a} , PWM_{S_b} i PWM_{S_c} kojima je određeno kada će kada će se aktivirati gornja poluvodička sklopka u određenoj



Slika 15: Vremenski dijagrami jednog ciklusa vektorske širinsko impulsne modulacije [3]

grani izmjenjivača. Tako na primjer, za slučaj uzlaznog brojanja ($0 \leq t < \frac{T_s}{2}$) kada trenutna vrijednost brojača PWM_{time} pređe vrijednost određenu parametrom PWM_{S_a} gornja poluvodička sklopka u grani a se uključi (donja isključi; $S_a + \overline{S_a} = 1$). Nadalje, za slučaj silaznog brojanja ($\frac{T_s}{2} \leq t < T_s$) kada vrijedi da je $PWM_{time} < PWM_{S_a}$ gornja poluvodička sklopka u grani a je isključena. Slična logika se primjenjuje na poluvodičke sklopke druge dvije grane izmjenjivača.

Vrijednosti pomoću kojih se određuje trenutak promjene stanja poluvodičkih sklopki se definiraju kao:

$$\frac{PWM_{S_a}}{MAX} = \frac{T_0}{T_s} \quad (136)$$

$$\frac{PWM_{S_b}}{MAX} = \frac{T_0 + T_1}{T_s} \quad (137)$$

$$\frac{PWM_{S_c}}{MAX} = \frac{T_0 + T_1 + T_2}{T_s} \quad (138)$$

Maksimalna amplituda izlaznog napona kad se koristi vektorska širinsko impulsna modulacija iznosi $\frac{U_{dc}}{\sqrt{3}}$ (slika 14), odnosno amplitudni modulacijski indeks iznosi $m_{SVPWM} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155$. Kako bi se osiguralo da modulacija bude unutar linearnog područja djelovanja potrebno je ograničiti izlaze iz regulatora tako da vrijedi:

$$\sqrt{u_\alpha^2 + u_\beta^2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} U_{dc} \quad (139)$$

odnosno:

$$\sqrt{u_d^2 + u_q^2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} U_{dc} \quad (140)$$

Realizacija ograničenja izlaza regulatora korištenjem izraza (139) i (140) će detaljnije biti objašnjena u poglavlju vezanom uz implementaciju algoritma upravljanja.

5 Sustavi upravljanja pogonom sa SMPM-om

Većina reguliranih elektromotornih pogona u industriji se upravlja korištenjem kaskadne strukture upravljanja u kojima se koriste proporcionalne (P), proporcionalno-integralni (PI), odnosno proporcionalno-integralno-derivacijski (PID) tipovi regulatora. Ponašanje reguliranog elektromotornog pogona ovisi o podešenjima parametara sustava upravljanja.

U industriji se upravljani elektromotorni pogoni tipično koriste u sustavima upravljanja momentom, brzinom vrtnje, odnosno položajem (pozicijom) osovine elektromotornog pogona. U kaskadnoj strukturi upravljanja SMPM-om se povratne veze po strujama i_d i i_q definiraju kao unutarnje povratne veze, dok su povratne veze po brzini vrtnje ω_e , odnosno poziciji rotora θ_e definiraju kao vanjske (nadređene) povratne veze.

U nastavku dana je rekapitulacija metode određivanja parametara regulatora postavljanjem polova (teoretski dio) te primjena metode postavljanja polova za određivanje parametara regulatora stroja, brzine vrtnje, odnosno pozicije u sustavima upravljanja SMPM-ovima.

5.1 Određivanje parametara regulatora metodom postavljanja polova

Za određivanje, odnosno podešavanje parametara regulatora primjenom metode postavljanja polova potrebno je znati prijenosnu funkciju objekta upravljanja $G(s)$. Ovisno o strukturi i redu prijenosne funkcije $G(s)$ ovisiti će struktura i jedinstvenost rješenja iznosa parametara regulatora. Ako je prijenosna funkcija prvog reda, onda će se sintetizirati regulator PI tipa. Za $G(s)$ drugog reda, regulator će biti PID tipa. Nakon što je odabran tip regulatora, odredi se prijenosna funkcija zatvorenog kruga s nepoznatim iznosima parametara regulatora, te se dobivena karakteristična jednačba usporedi s karakterističnom jednačbom istog reda čije ponašanje je unaprijed definirano.

5.1.1 Određivanje parametara PI tipa regulatora

Ako se objekt upravljanja može opisati prijenosnom funkcijom prvog reda oblika:

$$G(s) = \frac{b}{s + a} \quad (141)$$

onda se odabere PI tip regulatora čija se prijenosna funkcija definira kao:

$$C(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \quad (142)$$

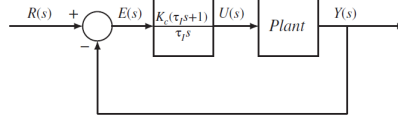
gdje je K_c proporcionalno pojačanje regulatora, a τ_i vremenska integraciona konstanta regulatora.

Blokovska shema zatvorenog kruga dana je na slici 16. Ako se prijenosna funkcija PI regulatora zapiše u obliku:

$$C(s) = \frac{c_1 s + c_0}{s} \quad (143)$$

gdje je $c_1 = K_c$, a $c_0 = \frac{K_c}{\tau_i}$, onda je prijenosna funkcija zatvorenog kruga (s jediničnom povratnom vezom) jednaka:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{C(s) G(s)}{1 + C(s) G(s)} = \\ &= \frac{\frac{c_1 s + c_0}{s} \cdot \frac{b}{s + a}}{1 + \frac{c_1 s + c_0}{s} \cdot \frac{b}{s + a}} = \\ &= \frac{b(c_1 s + c_0)}{s^2 + s(a + bc_1) + bc_0} \end{aligned} \quad (144)$$



Slika 16: Blokovska shema zatvorenog kruga [3]

Polovi prijenosne funkcije zatvorenog kruga (144) su rješenja karakteristične jednadžbe:

$$s^2 + s(a + bc_1) + bc_0 = 0 \quad (145)$$

Kod linearnih vremenski nepromjenjivih sustava polovi sustava određuju stabilnost i dinamiku sustava na promjene postavne veličine, odnosno na poremećaje. Postavljanjem polova moguće je specificirati, odnosno definirati ponašanje zatvorenog kruga. Za karakterističnu jednadžbu sustava drugog reda danu sa:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (146)$$

definiranjem faktora prigušenja ζ i prirodne frekvencije ω_n (frekvencija neprigušenih oscilacija) moguće je specificirati ponašanje sustava zatvorenog kruga danog prijenosnom funkcijom $F(s) = k / (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$. Izjednačavanjem izraza (145) i (146) mogu se odrediti parametri PI regulatora:

$$\begin{aligned} s^2 + s(a + bc_1) + bc_0 &= s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \\ a + bc_1 &= 2\zeta\omega_n \rightarrow c_1 = \frac{2\zeta\omega_n - a}{b} \end{aligned} \quad (147)$$

$$bc_0 = \omega_n^2 \rightarrow c_0 = \frac{\omega_n^2}{b} \quad (148)$$

odnosno:

$$K_c = c_1 = \frac{2\zeta\omega_n - a}{b} \quad (149)$$

$$\tau_i = \frac{c_1}{c_0} = \frac{2\zeta\omega_n - a}{\omega_n^2} \quad (150)$$

Odabirom iznosa parametara faktora prigušenja ζ i prirodne frekvencije ω_n definira se ponašanje sustava drugog reda. Na primjer, odzivi sustava drugog reda:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (151)$$

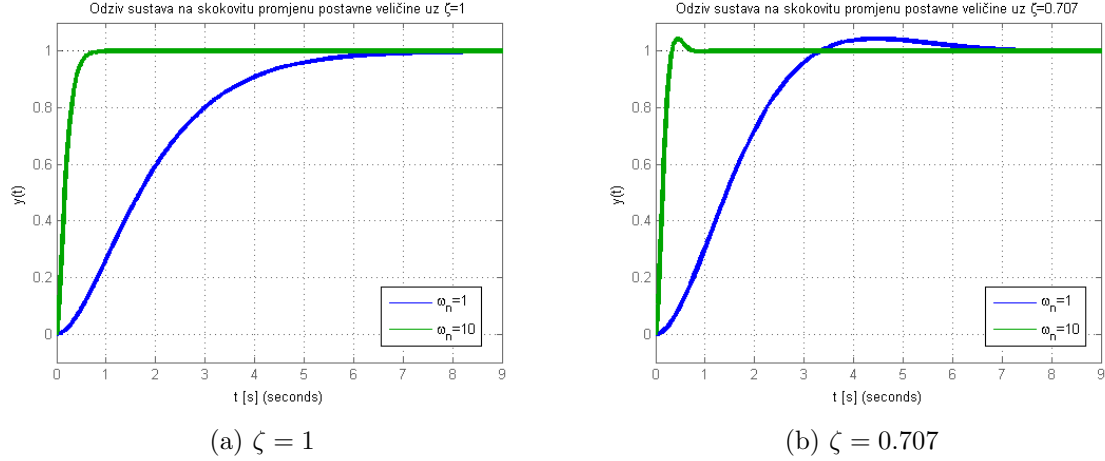
za faktor prigušenja $\zeta = 1$, odnosno $\zeta = 0.707$ i prirodnu frekvenciju $\omega_n = 1$, odnosno $\omega_n = 10$ dani su na slici 17.

Za slučaj kada je faktor prigušenja $\zeta = 1$ (slika 17a) rješenja karakteristične jednadžbe su:

$$\begin{aligned} s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2 &= 0 \\ s_{1,2} &= \frac{-2\omega_n \pm \sqrt{4\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\omega_n \end{aligned} \quad (152)$$

dok je za faktor prigušenja $\zeta = 0.707$ rješenje karakteristične jednadžbe:

$$\begin{aligned} s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 &= 0 \\ s_{1,2} &= \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -0.707\omega_n \pm j0.707\omega_n \end{aligned} \quad (153)$$



Slika 17: Odzivi sustava na skokovitu promjenu postavne veličine

Može se primijetiti da za sustav drugog reda čiji korijeni karakteristične jednadžbe su realni brojevi, odziv na skokovitu promjenu postavne veličine nema nadvišenja. Za takav sustav što je prirodna frekvencija veća to je odziv sustava brži, odnosno brže dođe u stacionarno stanje.

U slučaju kada je faktor prigušenja manja od jedan ($\zeta = 0.707$, slika 17b), rješenja karakteristične jednadžbe su dva komplementarna kompleksna broja odziv sustav na skokovitu promjenu postavne veličine ima nadvišenje tijekom tranzijenta. Kako i kod sustava s realnim polovima (izraz (152)), s povećanjem prirodne frekvencije ω_n smanjuje se vrijeme dostizanja stacionarnog stanja.

Kod specificiranja dinamike ponašanja sustava s povratnom vezom uobičajeno je da se definira maksimalni iznos prvog nadvišenja (ako je dozvoljeno) i vrijeme koje je potrebno da se dostigne stacionarno stanje t_s . Kako je prije objašnjeno, pomoću faktora prigušenja ζ moguće je definirati da li će odziv na skokovitu promjenu postavne veličine imati prvo nadvišenje ($\zeta < 1$) ili ne ($\zeta \geq 1$). Za sustav drugog reda vrijeme postizanja stacionarnog stanja jednako je 3 do 5 vremenskih konstanti sustava, odnosno:

$$t_s = \frac{3 \div 5}{\zeta \omega_n} \quad (154)$$

Ako se stacionarno stanje smatra kada izlazna veličina bude unutar granica od $\pm 1\%$ onda je vrijeme dostizanja stacionarnog stanja [7]:

$$t_s \approx \frac{4.6}{\zeta \omega_n} \quad (155)$$

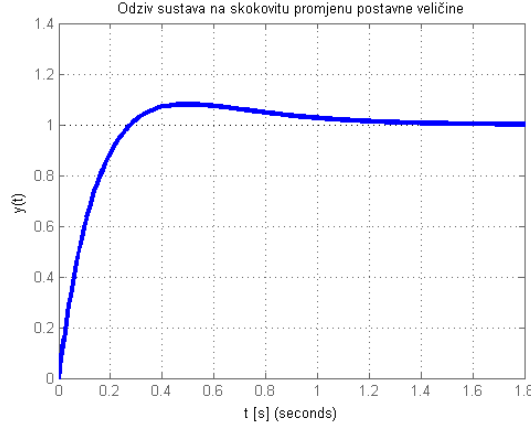
Odabirom iznosa faktora prigušenja ($\zeta = 1$ ili 0.707) te specificiranjem vremena dostizanja stacionarnog stanja (t_s , iz kojeg se izračuna prirodna frekvencija) primjenom metode postavljanja polova mogu se odrediti parametri regulatora.

Primjer 1. Za sustav prvog reda $G(s) = \frac{1}{1+s}$ odrediti parametre regulatora i simulirati odziv na jediničnu skokovitu promjenu postavne veličine zatvorenog kruga.

Iz prijenosne funkcije objekta upravljanja $G(s)$ vidljivo je da oblika (141) gdje je $a = b = 1$. Ako se odabere $\zeta = 1$ i $t_s = 1$ sekunda, onda su parametri PI regulatora:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{4.6}{\zeta t_s} = 4.6 \\ K_c &= \frac{2\zeta\omega_n - a}{b} = 8.2 \\ \tau_i &= \frac{2\zeta\omega_n - a}{\omega_n^2} = 0.3875 \end{aligned}$$

Simuliranjem zatvorenog kruga u programskom paketu Matlab/Simulink dobije se odziv na skokovitu promjenu postavne veličine (slika 18).



Slika 18: Odziv na jediničnu skokovitu promjenu postavne veličine

U primjeru 1 vidljivo je da postoji nadvišenje u odzivu na skokovitu promjenu postavne veličine (slika 18), a postavljeni faktor prigušenja je $\zeta = 1$. Razlog tome je postojanje nule u prijenosnoj funkciji zatvorenog kruga. Upravljački signal (izlaz iz regulatora) iznosi:

$$u(t) = K_c (r(t) - y(t)) + \frac{K_c}{\tau_i} \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau \quad (156)$$

odnosno u Laplaceovoj domeni:

$$U(s) = K_c (R(s) - Y(s)) + \frac{K_c}{s\tau_i} (R(s) - Y(s)) \quad (157)$$

Za tako definiranu strukturu PI regulatora (izraz (157)) prijenosna funkcija zatvorenog kruga je dana s:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \\ &= \frac{\frac{1}{1+s} \frac{K_c(\tau_i s + 1)}{\tau_i s}}{1 + \frac{1}{1+s} \frac{K_c(\tau_i s + 1)}{\tau_i s}} = \frac{K_c(\tau_i s + 1)}{\tau_i s(1 + s) + K_c(\tau_i s + 1)} \end{aligned} \quad (158)$$

Iz izraza (158) vidljivo je da sustav sa zatvorenom petljom ima jednu nulu koja uzrokuje nadvišenje u odzivu na skokovitu promjenu postavne veličine. Ukoliko se definira upravljačka veličina kao:

$$u(t) = -K_c y(t) + \frac{K_c}{\tau_i} \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau \quad (159)$$

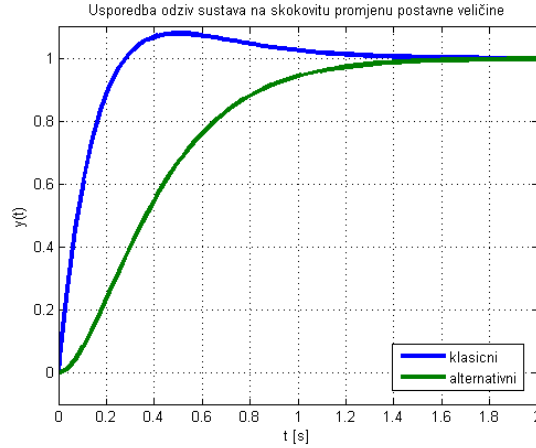
odnosno u Laplaceovoj domeni kao:

$$U(s) = -K_c Y(s) + \frac{K_c}{s\tau_i} (R(s) - Y(s)) \quad (160)$$

može se eliminirati nula zatvorenog kruga. Prijenosna funkcija zatvorenog kruga s regulatorom čiji je izlazni signal definiran izrazom (160) glasi:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{\frac{K_c}{s\tau_i} \frac{G(s)}{1 + K_c G(s)}}{1 + \frac{K_c}{s\tau_i} \frac{G(s)}{1 + K_c G(s)}} \\ &= \frac{K_c}{\tau_i s(1 + s + K_c) + K_c} \end{aligned} \quad (161)$$

Usporedba odziv sustava zatvorenog kruga za objekt upravljanja $G(s) = \frac{1}{1+s}$ na jediničnu skokovitu promjenu postavne veličine uz primjenu regulatora čije upravljačke veličine su dane s izrazima (157) i (160) dana je na slici 19. Vidljivo je da je sustav čiji upravljački signal je definiran izrazom (160) nema nadvišenje, što je za očekivati jer prijenosna funkcija tog zatvorenog kruga nema nulu. Isti efekt bi se dobio da se u sustav dan izrazom (158) definira predfilter $F(s) = \frac{1}{s\tau_i+1}$.



Slika 19: Usporedba odziv na jediničnu skokovitu promjenu postavne veličine

5.1.2 Određivanje parametara PID tipa regulatora

Ako se objekt upravljanja može opisati prijenosnom funkcijom drugog reda oblika:

$$G(s) = \frac{b}{s(s+a)} \quad (162)$$

onda se odabere PID tip regulatora čija se prijenosa funkcija definira kao:

$$C(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + s\tau_d \right) \quad (163)$$

gdje je K_c proporcionalno pojačanje regulatora, τ_i vremenska integraciona konstanta regulatora te τ_d derivacijska vremenska konstanta regulatora.

Ako se prijenosna funkcija PID regulatora zapiše u obliku:

$$C(s) = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s} \quad (164)$$

gdje je $c_2 = \tau_d K_c$, $c_1 = K_c$, a $c_0 = \frac{K_c}{\tau_i}$, onda je prijenosna funkcija zatvorenog kruga (s jediničnom povratnom vezom) jednaka:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \\ &= \frac{\frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s} \cdot \frac{b}{s(s+a)}}{1 + \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s} \cdot \frac{b}{s(s+a)}} = \\ &= \frac{b(c_2 s^2 + c_1 s + c_0)}{s^2(s+a) + (c_2 s^2 + c_1 s + c_0)b} \end{aligned} \quad (165)$$

Iz izraza (165) vidljivo je da je karakteristična jednačba zatvorenog kruga trećeg. U ovom slučaju dva pola se odaberu definiranjem parametara faktora prigušenja (ζ) i prirodne frekvencije (ω_n), dok se treći pol definira kao $-n\omega_n$ gdje je $n \gg 1$. Kao i kod određivanja parametara

PI tipa regulatora potrebno je izjednačiti karakteristične jednadžbe:

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + n\omega_n) = s^2(s + a) + (c_2 s^2 + c_1 s + c_0)b$$

$$s^3 + s^2(n\omega_n + 2\zeta\omega_n) + s(2\zeta n + 1)\omega_n^2 + n\omega_n^3 = s^3 + s^2(s + a) + (c_2 s^2 + c_1 s + c_0)b \quad (166)$$

Definiranjem varijabli:

$$t_2 = (2\zeta + n)\omega_n \quad (167)$$

$$t_1 = (2\zeta n + 1)\omega_n^2 \quad (168)$$

$$t_0 = n\omega_n^3 \quad (169)$$

te izjednačavanjem koeficijenata iz izraza (166) dobije se:

$$t_2 = a + c_2 b \quad (170)$$

$$t_1 = c_1 b \quad (171)$$

$$t_0 = c_0 b \quad (172)$$

odnosno:

$$c_2 = \frac{t_2 - a}{b} = \frac{(2\zeta + n)\omega_n - a}{b} \quad (173)$$

$$c_1 = \frac{t_1}{b} = \frac{(2\zeta n + 1)\omega_n^2}{b} \quad (174)$$

$$c_0 = \frac{t_0}{b} = \frac{n\omega_n^3}{b} \quad (175)$$

Parametri PID regulatora određeni primjenom metode postavljanja polova za objekt upravljanja modeliran prijenosnom funkcijom drugog reda iznose:

$$K_c = c_1 = \frac{(2\zeta + n)\omega_n - a}{b} \quad (176)$$

$$\tau_i = \frac{c_1}{c_0} = \frac{2\zeta n + 1}{n\omega_n} \quad (177)$$

$$\tau_d = \frac{c_2}{c_1} = \frac{(2\zeta + n)\omega_n - a}{(2\zeta n + 1)\omega_n^2} \quad (178)$$

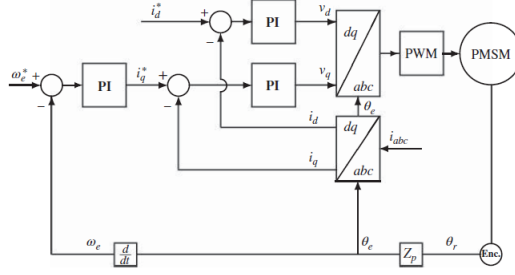
Prilikom implementacije PID regulatora u digitalni sustav upravljanja, derivacijsko djelovanje regulatora se definira da djeluje samo na signal povratne veze, $-\frac{dy(t)}{dt}$. Jedan od razloga zašto se to radi je zbog mogućih skokovitih promjena postavne veličine, što bi značilo da se signal pogreške $e(t) = r(t) - y(t)$ skokovito mijenja te bi derivacija tog signala bila impulsna funkcija (zbog tromosti sustava izlazna veličina sustava $y(t)$ ne može se skokovito promijeniti). Upravljački signal (izlaz) PID regulatora dan je s:

$$u(t) = K_c(r(t) - y(t)) + \frac{K_c}{\tau_i} \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau - K_c \tau_d \frac{dy(t)}{dt} \quad (179)$$

5.2 Sinteza regulatora za sustave upravljanja SMPM-ovima

Blokovska shema kaskadne strukture upravljanja sinkronim strojem sa stalnim magnetima dan je na slici 20. Algoritam upravljanja SMPM-om izveden je u dq koordinatnom sustavu što znači da je potrebno mjerene (struje) i upravljačke (napone) veličine transformirati u odgovarajuće koordinatne sustave.

Za transformaciju mjerenih struja iz trofaznog stacionarnog a, b, c koordinatnog sustava u rotirajući dq koordinatni sustav primjenjuju se Clarkeova i Parkova transformacija. Za dobivanje struje statora SMPM-a u dvoosnom stacionarnom $\alpha\beta$ koordinatnom sustav iz trofaznog



Slika 20: Blokovska shema upravljanja sinkronim strojem sa stalnim magnetima [3]

stacionarnog a, b, c sustava (mjerene struje statora SMPM-a) primjenjuje se Clarkeova transformacija:

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (180)$$

dok se za transformaciju koordinata iz stacionarnog $\alpha\beta$ koordinatnog sustava u rotirajući dq koordinatni sustav se koristi Parkova transformacija:

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & \sin \theta_e \\ -\sin \theta_e & \cos \theta_e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (181)$$

gdje se električni kut rotora θ_e dobiva iz mjernog člana položaja (npr. inkrementalni enkoder; slika 20).

Upravljačke veličine, odnosno izlazi iz regulatora struja i_d i i_q su željene vrijednosti napona u dq koordinatnom sustavu koje je potrebno transformirati u odgovarajući stacionarni sustav. Za tu transformaciju koriste se inverzi transformacijskih matrica izraza (180) i (181). Za određivanje napona u stacionarnom $\alpha\beta$ sustavu iz napona u rotirajućem dq koordinatnom sustavu koristi se inverzna Parkova transformacija:

$$\begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & -\sin \theta_e \\ \sin \theta_e & \cos \theta_e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} \quad (182)$$

dok se za određivanje trofaznih vrijednosti napona iz poznatih komponenata napona u $\alpha\beta$ sustavu koristi inverzna Clarkeova transformacija:

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_0 \end{bmatrix} \quad (183)$$

(NAPOMENA: pretpostavlja se da je sustav simetričan te je komponenta u_0 u izrazu (183) jednaka nula).

Za sintezu sustava upravljanja momentom, brzinom vrtnje ili pozicijom SMPM-a potrebno je poznavati matematički model SMPM-a. U poglavlju 2 dan je izvod matematičkog modela SMPM-a u $\alpha\beta$, odnosno dq koordinatnom sustavu. U nastavku je dan način sinteze sustava upravljanja momentom, brzinom vrtnje, odnosno pozicijom SMPM-a u dq koordinatnom sustavu čiji dinamički matematički model je opisan sa sljedećim diferencijalnim jednadžbama:

$$\frac{di_d}{dt} = \frac{1}{L_d} (u_d - R_s i_d + \omega_e L_q i_q) \quad (184)$$

$$\frac{di_q}{dt} = \frac{1}{L_q} (u_q - R_s i_q - \omega_e L_d i_d - \omega_e \phi_{mg}) \quad (185)$$

$$\frac{d\omega_e}{dt} = \frac{p}{J_m} \left(M_{em} - \frac{D}{p} \omega_e - M_t \right) \quad (186)$$

$$M_{em} = \frac{3}{2} p [\phi_{mg} i_q + (L_d - L_q) i_d i_q] \quad (187)$$

Kod sustava kaskadnog upravljanja prvo je potrebno sintetizirati regulacijske strukture za unutarnje povratne veze, a nakon toga za vanjske. Ako se promotri sustav upravljanja SMPM-om prikazan na slici 20 može se primijetiti da postoje dvije povratne veze po strujama (za struju i_d i i_q) te jedna nadređena povratna veza po brzini vrtnje SMPM-a (ω_e).

5.2.1 Sinteza sustava regulacije momenta SMPM-a

Iz izraza (187) vidljivo je da elektromagnetski moment SMPM-a ovisi o strujama i_d i i_q . Kod sinkronih strojeva s vanjskim stalnim magnetima komponenta reluktantnog momenta je nula zbog same konstrukcije stroja ($L_d = L_q = L_s$), odnosno moment je proporcionalan struji i_q :

$$M_{em} = \frac{3}{2} p \phi_{mg} i_q \quad (188)$$

U slučaju kad se za regulaciju momenta koristi sinkroni stroj s vanjskim stalnim magnetima potrebno je upravljati strujom i_q , odnosno za željeni moment M_{em}^* potrebno je postaviti postavnu veličinu struje u poprečnoj osi na:

$$i_q^* = \frac{2M_{em}^*}{3p\phi_{mg}} \quad (189)$$

Kod sinkronih strojeva s unutarnjim stalnim magnetima induktiviteti u poprečnoj i direktnoj osi nisu jednaki ($L_d \neq L_q$), odnosno postoji komponenta reluktantnog momenta. Ako se umnožak struja u poprečnoj i direktnoj osi (komponenta reluktantnog momenta) rastavi na Taylorov red oko željene radne točke (i_d^*, i_q^*) dobije se:

$$i_d i_q \approx i_d^* i_q^* + i_d^* (i_q - i_q^*) + i_q^* (i_d - i_d^*) + \dots \quad (190)$$

U industrijskim sustavima tipično se odabire da je u stacionarnom stanju struja u direktnoj osi jednaka nuli, odnosno da je postavna veličina $i_d^* = 0$ ¹ [3]. U tom slučaju može se pretpostaviti da je reluktantna komponenta momenta jednaka nuli ($i_d i_q \approx 0$) te se elektromagnetski moment regulira na isti način kao i kod sustava sa sinkronim strojem s vanjskim stalnim magnetima (izraz (189)).

Sinteza PI tipa regulatora za povratne veze po strujama i_d i i_q

Za sintezu regulatora metodom postavljanja polova (poglavlje 5.1) potrebno je poznavati dinamički matematički model, odnosno prijenosnu funkciju objekta upravljanja. Iz diferencijalnih jednadžbi za struje i_d (izraz (184)) i i_q (izraz (185)) vidljivo je da postoje nelinearni članovi te da postoji sprega između tih izraza.

Definiranjem novih varijabli:

$$\hat{u}_d = u_d + \omega_e L_q i_q \quad (191)$$

$$\hat{u}_q = u_q - \omega_e L_q i_q - \omega_e \phi_{mg} \quad (192)$$

diferencijalne jednadžbe za struje se mogu pisati kao (izrazi (184) i (185)):

$$\frac{di_d}{dt} = \frac{1}{L_d} \hat{u}_d - \frac{R_s}{L_d} i_d \quad (193)$$

$$\frac{di_q}{dt} = \frac{1}{L_q} \hat{u}_q - \frac{R_s}{L_q} i_q \quad (194)$$

Iz izraza (193) i (194) vidljivo je da se struje i_d , odnosno i_q mogu upravljati postavljenjem novodefiniranih varijabli \hat{u}_d i \hat{u}_q . To znači da su upravljački signali (izlazi iz PI tipa regulatora)

¹do nazivne brzine vrtnje stroja

definirani kao:

$$\hat{u}_d = K_c^d (i_d^* - i_d) + \frac{K_c^d}{\tau_i^d} \int_0^t (i_d^* - i_d) d\tau \quad (195)$$

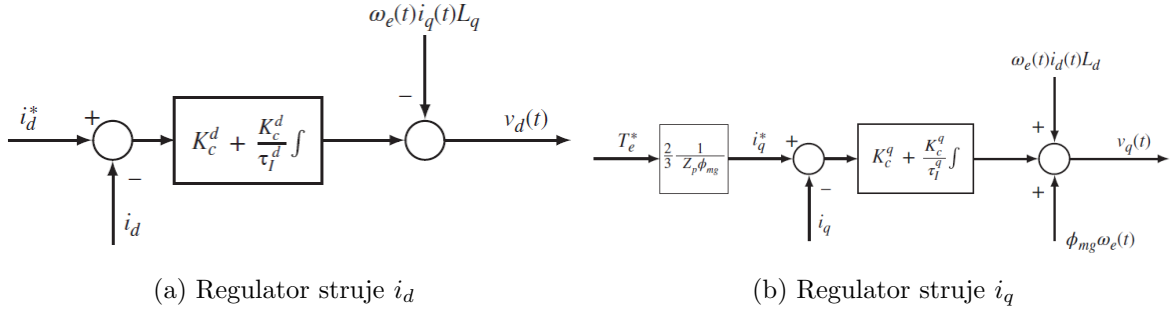
$$\hat{u}_q = K_c^q (i_q^* - i_q) + \frac{K_c^q}{\tau_i^q} \int_0^t (i_q^* - i_q) d\tau \quad (196)$$

gdje je K_c^d proporcionalno pojačanje i τ_i^d integraciona vremenska konstanta PI regulatora struje i_d , odnosno K_c^q proporcionalno pojačanje i τ_i^q integraciona vremenska konstanta PI regulatora struje i_q . Ako se u izraze (195) i (196) uvrste izrazi (191) i (192) dobiju se signali napona u_d i u_q koje je potrebno postaviti na stezaljke stroja:

$$u_d = K_c^d (i_d^* - i_d) + \frac{K_c^d}{\tau_i^d} \int_0^t (i_d^* - i_d) d\tau - \omega_e L_q i_q \quad (197)$$

$$u_q = K_c^q (i_q^* - i_q) + \frac{K_c^q}{\tau_i^q} \int_0^t (i_q^* - i_q) d\tau + \omega_e L_q i_d + \omega_e \phi_{mg} \quad (198)$$

Na slici 21 dane su blokove sheme regulatora struja u direktnoj, odnosno poprečnoj osi.



Slika 21: Blokove sheme regulatora struja i_d i i_q [3]

Za određivanje iznosa parametara regulatora metodom postavljanja polova potrebno je odrediti prijenosnu funkciju objekta upravljanja. Transformacijom izraza za struje (izrazi (193) i (194)) u Laplaceovu domenu dobije se:

$$sI_d = \frac{1}{L_d} \hat{U}_d - \frac{R_s}{L_d} I_d \quad (199)$$

$$sI_q = \frac{1}{L_q} \hat{U}_q - \frac{R_s}{L_q} I_q \quad (200)$$

moгу se odrediti prijenosne funkcije otvorenog kruga po strujama u direktnoj i poprečnoj osi:

$$\frac{I_d}{\hat{U}_d} = \frac{1}{s + \frac{R_s}{L_d}} \quad (201)$$

$$\frac{I_q}{\hat{U}_q} = \frac{1}{s + \frac{R_s}{L_q}} \quad (202)$$

Izraz (201), odnosno izraz (202) definira prijenosnu funkciju prvog reda te u usporedbi s izrazom (141) vidljivo je da su tako zapisane prijenosne funkcije pogodne za određivanje parametara PI tipa regulatora primjenom metode postavljanja polova. Za PI tip regulatora definiran prijenosnom funkcijom (142), primjenom metode postavljanja polova, parametri regulatora u

direktnoj osi (za struju i_d) iznose:

$$K_c^d = \frac{2\zeta\omega_n - \frac{R_s}{L_d}}{\frac{1}{L_d}} = 2\zeta\omega_n L_d - R_s \quad (203)$$

$$\tau_i^d = \frac{2\zeta\omega_n - \frac{R_s}{L_d}}{\omega_n^2} = \frac{2\zeta\omega_n L_d - R_s}{L_d \omega_n^2} \quad (204)$$

odnosno regulatora u poprečnoj osi (za struju i_q) iznose:

$$K_c^q = \frac{2\zeta\omega_n - \frac{R_s}{L_q}}{\frac{1}{L_q}} = 2\zeta\omega_n L_q - R_s \quad (205)$$

$$\tau_i^q = \frac{2\zeta\omega_n - \frac{R_s}{L_q}}{\omega_n^2} = \frac{2\zeta\omega_n L_q - R_s}{L_q \omega_n^2} \quad (206)$$

Promotri li se sustav upravljanja SMPM-om dan na slici 20 može se primijetiti da tako definirani sustav upravljanja nema nadređenu povratnu vezu za krug regulacije struje i_d . Kako bi se osiguralo da u stacionarnom stanju nema statičkog odstupanja, regulatora za upravljanje strujom i_d je PI tipa. Za razliku od kruga regulacije struje i_d , ukoliko se želi regulirati brzina vrtnje ili pozicija, krug regulacije struje i_q može imati nadređenu povratnu vezu po brzini vrtnje, odnosno poziciji. U takovom slučaju moguće je odabrati P tip regulatora za upravljanje strujom i_q jer će djelovanje nadređenog regulacijskog kruga kompenzirati statičko odstupanje uzrokovano unutarnjom povratnom vezom. Međutim, ukoliko se odabere P tip regulatora za krug upravljanja strujom i_q , treba voditi računa o postavljenom parametru proporcionalnog pojačanja K_c^q , odnosno pojačanje zatvorenog kruga u stacionarnom stanju jer će ono utjecati na određivanje parametara regulatora nadređene povratne veze.

Izlaz iz P tipa regulatora za struju i_q dan u Laplaceovoj domeni iznosi:

$$\hat{U}_q = K_c^q (I_d^* - I_d) \quad (207)$$

Uvrštavanjem izraza (207) u izraz za otvoreni krug struje i_q (izraz (200)) te nakon sređivanja, dobije se prijenosna funkcija zatvorenog kruga po struju i_q s P tipom regulatora:

$$\frac{I_q}{I_q^*} = \frac{\frac{K_c^q}{L_q}}{s + \frac{R_s}{L_q} + \frac{K_c^q}{L_q}} \quad (208)$$

U stacionarnom stanju pojačanje zatvorenog kruga je (određuje se postavljenjem operatora $s = 0$ u izrazu (208)):

$$\alpha = \frac{\frac{K_c^q}{L_q}}{\frac{R_s}{L_q} + \frac{K_c^q}{L_q}} = \frac{K_c^q}{R_s + K_c^q} \quad (209)$$

Tipično se kod sinteze P tipa regulatora za krug upravljanja strujom i_q definira (odabere) iznos parametra α te se onda odredi pojačanje regulatora K_c^q iz:

$$K_c^q = \frac{\alpha}{1 - \alpha} R_s \quad (210)$$

gdje je $0 < \alpha < 1$. Substitucijom izraza (210) u izraz (208), prijenosna funkcija zatvorenog kruga po struji i_q iznosi:

$$\frac{I_q}{I_q^*} = \frac{\frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{R_s}{L_q}}{s + \frac{1}{1 - \alpha} \frac{R_s}{L_q}} \quad (211)$$

Iz prijenosne funkcije:

$$\frac{E}{I_q^*} = \frac{I_q^* - I_q}{I_q^*} = \frac{1}{1 + K_c^q \frac{L_q}{s}} = \frac{1}{1 + K_c^q \frac{\frac{1}{L_q}}{s + \frac{R_s}{L_q}}} = \frac{sL_q + R_s}{sL_q + R_s + K_c^q} \quad (212)$$

primjenom teorema o konačnoj vrijednosti [7] moguće je odrediti statičku pogrešku zatvorenog kruga:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{sL_q + R_s}{sL_q + R_s + K_c^q} I_q^*(s) \right] \end{aligned} \quad (213)$$

Za slučaj kada je postavna veličina struje u poprečnoj osi jedinična skokovita funkcija ($I_q^* = \frac{1}{s}$) pogreška zatvorenog sustav iznosi:

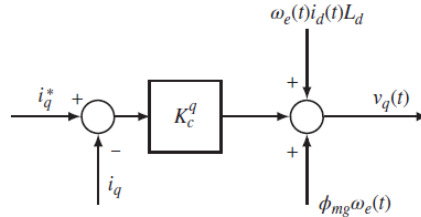
$$\lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{sL_q + R_s}{sL_q + R_s + K_c^q} \frac{1}{s} \right] = \frac{R_s}{R_s + K_c^q} = \frac{R_s}{R_s + R_s \frac{\alpha}{1-\alpha}} = 1 - \alpha \quad (214)$$

Ako se odabere $\alpha = 0.9$ onda se za slučaj jedinične skokovite promjene postavne veličine struje i_q dobije pogreška u stacionarnom stanju od 10%.

Upravljački signal (izlaz iz P tip regulatora struje) u vremenskoj domeni iznosi:

$$u_q(t) = K_c^q [i_q^*(t) - i_q(t)] + \omega_e(t) L_d i_d(t) + \omega_e(t) \phi_{mg} \quad (215)$$

dok je blokovska shema dana na slici 22.



Slika 22: Blokovska shema P tipa regulatora struje u poprečnoj osi [3]

5.2.2 Sinteza sustava regulacije brzine vrtnje SMPM-a

Ovisno o strukturi unutarnje (podređene) povratne veze, razlikovat će se dvije strukture upravljanja brzinom vrtnje SMPM-a:

1. sustav regulacije brzine vrtnje SMPM-a s P tipom regulatora po struji i_q ,
2. sustav regulacije brzine vrtnje SMPM-a s PI tipom regulatora po struji i_q .

Regulacijski krug po struji i_d ima PI tip regulatora kako bi se osiguralo da nema statičke pogreške (nema odstupanja u stacionarnom stanju od željene, postavne veličine $i_d = 0$).

Za sintezu sustava regulacije brzine vrtnje SMPM-a potrebno je poznavati dinamički matematički model SMPM-a, odnosno matematički opisati dinamičko ponašanje regulirane veličine. Diferencijalna jednadžba za brzinu vrtnje SMPM-a je:

$$\frac{d\omega_e}{dt} = \frac{p}{J_m} \left\{ M_{em} - \frac{D}{p} \omega_e - M_t \right\} \quad (216)$$

$$M_{em} = \frac{3}{2} p [\phi_{mg} i_q + (L_d - L_q) i_d i_q] \quad (217)$$

odnosno:

$$\frac{d\omega_e}{dt} = \frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m} i_q + \frac{3}{2} \frac{p^2}{J_m} (L_d - L_q) i_d i_q - \frac{D}{J_m} \omega_e - \frac{p}{J_m} M_t \quad (218)$$

Kod sinkronih strojeva s vanjskim stalnim magnetima je $L_d = L_q$ te nema komponente reluktantnog momenta te komponenta s umnoškom struja iz izraza (218) jednaka nuli. Kod sinkronih strojeva sa unutarnjim stalnim magnetima $L_d \neq L_q$, odnosno postoji komponenta reluktantnog momenta. Postavljanjem postavne veličine $i_d^* = 0$ može se smatrati da je umnožak $i_d i_q$ u izrazu (218) približno jednak nuli, odnosno može ga se zanemariti te diferencijalna jednačba za brzinu vrtnje (bez obzira na tip SMPM-a) glasi:

$$\frac{d\omega_e}{dt} = \frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m} i_q - \frac{D}{J_m} \omega_e - \frac{p}{J_m} M_t \quad (219)$$

U izrazu (219) M_t predstavlja moment tereta, koji se smatra poremećajnom veličinom te se prilikom sinteze regulatora postavlja na nulu ($M_t = 0$). Uz zanemarenje poremećaja te transformiranjem izraza (219) u Laplaceovu domenu dobije se:

$$\begin{aligned} s\Omega_e &= \frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m} I_q - \frac{D}{J_m} \Omega_e \\ \Omega_e &= \frac{\frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m} I_q}{s + \frac{D}{J_m}} \end{aligned} \quad (220)$$

Varijabla I_q nije veličina koja se direktno može postavljati već je mjerena veličina stoga je potrebno ju zamijeniti s varijablom koju je moguće proizvoljno postaviti. Logično se nameće odabir varijable I_q^* . U tom slučaju za sintezu regulatora brzine vrtnje SMPM-a potrebno je odrediti prijenosnu funkciju između regulirane brzine vrtnje Ω_e i postavne veličine struje u poprečnoj osi I_q^* . Oblik tako definirane prijenosne funkcije ovisi o strukturi regulacije struje i_q , odnosno o tipu regulatora struje i_q .

Sinteza regulatora brzine vrtnje ako je regulator struje i_q P tipa

Za P tip regulatora struje i_q vrijedi:

$$\hat{U}_q = K_c^q (I_q^* - I_q) \quad (221)$$

odnosno prijenosna funkcija unutarnje povratne veze po struji i_q s P tipom regulatora iznosi:

$$\begin{aligned} sI_q &= \frac{1}{L_q} \hat{U}_q - \frac{R_s}{L_q} I_q \\ sI_q &= \frac{1}{L_q} K_c^q (I_q^* - I_q) - \frac{R_s}{L_q} I_q \\ \frac{I_q}{I_q^*} &= \frac{\frac{K_c^q}{L_q}}{s + \frac{R_s}{L_q} + \frac{K_c^q}{L_q}} = \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{R_s}{L_q}}{s + \frac{1}{1-\alpha} \frac{R_s}{L_q}} \end{aligned} \quad (222)$$

Substitucijom struje I_q iz izraza (222) u izraz (220) dobije se:

$$\Omega_e = \left(\frac{\frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m}}{s + \frac{D}{J_m}} \right) \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{R_s}{L_q}}{s + \frac{1}{1-\alpha} \frac{R_s}{L_q}} I_q^* = \left(\frac{\frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{D}}{s \frac{J_m}{D} + 1} \right) \frac{\alpha}{s(1-\alpha) \frac{L_q}{R_s} + 1} I_q^* \quad (223)$$

Iz izraza (223) vidljivo je da je prijenosna funkcija $\frac{\Omega_e}{I_q^*}$ drugog reda što bi značilo da bi bilo potrebno primjenom metode postavljanja polova sintetizirati PID tip regulatora. Međutim, ako se razmotri izraz (223), može se primijetiti da je električna vremenska konstanta $\frac{L_q}{R_s}$ puno manja od mehaničke vremenske konstante $\frac{J_m}{D}$. Nadalje, proporcionalno pojačanje regulatora struje i_q

(koje se određuje postavljanjem parametra α) osigurava da je dinamika unutarnje povratne veze puno brža nego dinamika mehaničkog dijela stroja ($(1 - \alpha) \frac{L_q}{R_s} \ll \frac{J_m}{D}$; tipično se postavlja $\alpha \approx 0.9$). Zbog toga se izraz (223) može pojednostavniti tako da se dinamika unutarnje povratne veze zanemari, odnosno $(1 - \alpha) \frac{L_q}{R_s} \approx 0$ daje:

$$\frac{\Omega_e}{I_q^*} = \frac{\frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m} \alpha}{s + \frac{D}{J_m}} \quad (224)$$

Primjenom metode postavljanja polova, za prijenosnu funkciju danu izrazom (224), odrede se parametri PI tipa regulatora brzine vrtnje SMPM-a te iznose:

$$\begin{aligned} K_c^\omega &= \frac{2\zeta\omega_n - a}{b} \\ \tau_i^\omega &= \frac{2\zeta\omega_n - a}{\omega_n^2} \\ a &= \frac{D}{J_m} \\ b &= \frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m} \alpha \\ K_c^\omega &= \frac{2\zeta\omega_n - \frac{D}{J_m}}{\frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m} \alpha} \end{aligned} \quad (225)$$

$$\tau_i^\omega = \frac{2\zeta\omega_n - \frac{D}{J_m}}{\omega_n^2} \quad (226)$$

Iz izraza (225) vidi se da odabir parametar regulatora brzine vrtnje, u slučaju kada se je P tip regulatora postavljen za regulaciju struje i_q , ovisi o stacionarnom pojačanju unutarnje povratne veze.

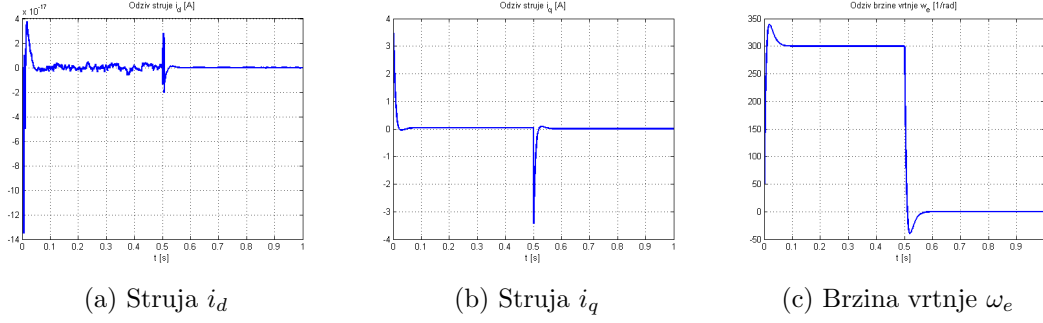
Primjer 2. Za SMPM koji ima $J_m = 0.47 \cdot 10^{-4} \text{kgm}^2$, $B = 1.1 \cdot 10^{-4} \text{Nms}$, $L_d = 7 \cdot 10^{-3} \text{H}$, $L_q = 7 \cdot 10^{-3} \text{H}$, $R_s = 2.98 \Omega$, $\phi_{mg} = 0.125 \text{Wb}$ i $p = 2$ potrebno je odrediti parametre PI tipa regulatora struje i_d i parametre P tipa regulatora struje i_q . Odabrati prirodnu frekvenciju $\omega_n = 100$ i faktor prigušenja $\zeta = 0.707$ za PI tip regulatora, odnosno $\alpha = 0.9091$ za zatvoreni krug po struji i_q . Također, odrediti parametre PI tipa regulatora brzine vrtnje, ako se odabere prirodna frekvencija $\omega_n = 100$ i faktor prigušenja $\zeta = 1$. Izraditi simulacijski model sustava upravljanja brzinom vrtnje SMPM-a te za dobivene parametre regulatora analizirati odzive struja i_d i i_q , odnosno brzine vrtnje ω_e na skokovitu promjenu postavne veličine brzine vrtnje (uz moment tereta $M_t = 0$).

Primjenom metode postavljanja polova, uz zadane uvijete na sintezu regulatora dobiju se sljedeći parametri regulatora:

- za PI tip regulatora struje i_d je $K_c^d = -1.9902$ i $\tau_i^d = -0.0284$,
- za P tip regulatora struje i_q je $K_c^q = 29.8$ te
- za PI tip regulatora brzine vrtnje ω_e je $K_c^\omega = 0.0138$ i $\tau_i^\omega = 0.0198$.

Vremenski odzivi struja i brzine vrtnje na skokovitu promjenu postavne veličine brzine vrtnje dani su na slici 23.

Ukoliko se za regulaciju struje i_q koristi regulator PI tipa, onda nema statičke pogreške, odnosno sustav je robusniji te parametri regulatora brzine vrtnje ne ovise o parametrima regulatora struje u poprečnoj osi.



Slika 23: Vremeski odzivi struja i brzine vrtnje na skokovitu promjenu postavne veličine brzine vrtnje

Sinteza regulatora brzine vrtnje ako je regulator struje i_q P tipa

Na sličan način kao i kod sinteze regulatora brzine vrtnje za slučaj kada se koristi P tip regulatora u unutarnjem krugu po struji i_q , tako i u slučaju kada se koristi PI regulator za regulaciju struje i_q , potrebno je odrediti prijenosnu funkciju $\frac{\Omega_e}{I_q^*}$ kako bi se primijenila metoda postavljanja polova.

Izlaz iz PI tipa regulatora za struju i_q glasi:

$$\hat{u}_q = K_c^q (i_q^* - i_q) + \frac{K_c^q}{\tau_i^q} \int_0^t (i_q^* - i_q) d\tau \quad (227)$$

odnosno transformiran u Laplaceovu domenu iznosi:

$$\hat{U}_q = K_c^q (I_q^* - I_q) + \frac{K_c^q}{s\tau_i^q} (I_q^* - I_q) \quad (228)$$

Transformacijom diferencijalne jednadžbe za struju i_q (izraz (194)) u Laplaceovu domenu te substitucijom varijable \hat{U}_q izrazom (228) dobije se:

$$sI_q = \frac{K_c^q}{L_q} (I_q^* - I_q) + \frac{K_c^q}{s\tau_i^q L_q} (I_q^* - I_q) - \frac{R_s}{L_q} I_q \quad (229)$$

Iz izraza za parametre regulatora dobije se:

$$K_c^q = 2\zeta\omega_n L_q - R_s \rightarrow \frac{K_c^q}{L_q} = 2\zeta\omega_n - \frac{R_s}{L_q} \quad (230)$$

$$\tau_i^q = \frac{2\zeta\omega_n L_q - R_s}{L_q\omega_n^2} \rightarrow \frac{K_c^q}{\tau_i^q} = L_q\omega_n^2 \quad (231)$$

Substitucijom izraza (230) i (231) u izraz (229) dobije se prijenosna funkcija zatvorenog kruga:

$$\begin{aligned} sI_q &= \left(2\zeta\omega_n - \frac{R_s}{L_q}\right) (I_q^* - I_q) + \frac{\omega_n^2}{s} (I_q^* - I_q) - \frac{R_s}{L_q} I_q \\ \frac{I_q}{I_q^*} &= \frac{\left(2\zeta\omega_n - \frac{R_s}{L_q}\right) s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned} \quad (232)$$

Substitucijom struje I_q iz izraza (232) u izraz (220) dobije se prijenosna funkcija objekta upravljanja kao:

$$\frac{\Omega_e}{I_q^*} = \frac{\frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m} \left(2\zeta\omega_n - \frac{R_s}{L_q}\right) s + \omega_n^2}{s + \frac{D}{J_m}} \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (233)$$

Prijenosna funkcija dana izrazom (233) je trećeg reda te nije moguće direktno primijeniti metodu postavljanja polova za određivanje parametara regulatora. Međutim, ako se odaberu parametri unutarnjeg kruga takvi da je $\omega_n \ll \frac{D}{J_m}$ onda se dinamika unutarnje povratne veze može zanemariti te se može aproksimirati:

$$\frac{\Omega_e}{I_q^*} \approx \frac{\frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m}}{s + \frac{D}{J_m}} \quad (234)$$

Primjenom metode postavljanja polova za određivanje parametara regulatora uz prijenosnu funkciju danu izrazom (234) moguće je odrediti parametre PI tipa regulatora brzine vrtnje SMPM-a:

$$\begin{aligned} K_c^\omega &= \frac{2\zeta\omega_n - a}{b} \\ \tau_i^\omega &= \frac{2\zeta\omega_n - a}{\omega_n^2} \\ a &= \frac{D}{J_m} \\ b &= \frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m} \\ K_c^\omega &= \frac{2\zeta\omega_n - \frac{D}{J_m}}{\frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m}} \end{aligned} \quad (235)$$

$$\tau_i^\omega = \frac{2\zeta\omega_n - \frac{D}{J_m}}{\omega_n^2} \quad (236)$$

Primjer 3. Za SMPM iz primjera 2 potrebno je odrediti parametre PI tipa regulatora struje i_d i struje i_q . Odabrati prirodnu frekvenciju $\omega_n = 200$ i faktor prigušenja $\zeta = 1$ za PI tip regulatora struje. Također, odrediti parametre PI tipa regulatora brzine vrtnje, ako se odabere prirodna frekvencija $\omega_n = 20$ i faktor prigušenja $\zeta = 0.707$. Izraditi simulacijski model sustava upravljanja brzinom vrtnje SMPM-a te za dobivene parametre regulatora analizirati odzive struja i_d i i_q , odnosno brzine vrtnje ω_e na skokovitu promjenu postavne veličine brzine vrtnje (uz moment tereta $M_t = 0$).

Primjenom metode postavljanja polova, uz zadane uvjete na sintezu regulatora dobiju se sljedeći parametri regulatora:

- za PI tip regulatora struje i_d je $K_c^d = -0.18$ i $\tau_i^d = -6.4286 \cdot 10^{-4}$,
- za PI tip regulatora struje i_q je $K_c^q = -0.18$ i $\tau_i^q = -6.4286 \cdot 10^{-4}$ te
- za PI tip regulatora brzine vrtnje ω_e je $K_c^\omega = 0.0016$ i $\tau_i^\omega = 0.0648$.

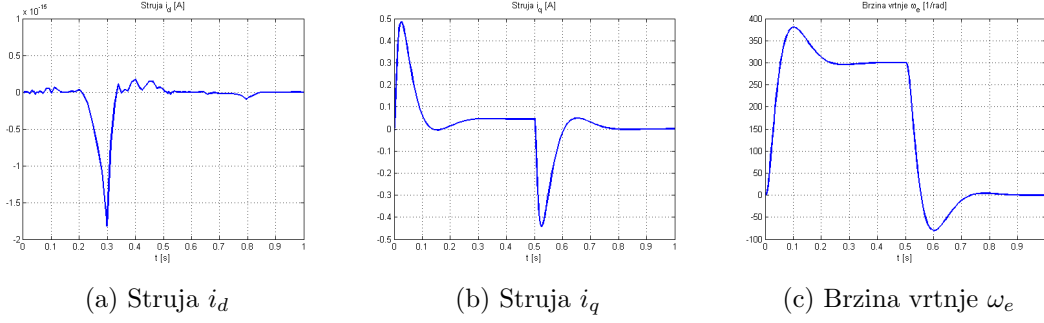
Vremenski odzivi struja i brzine vrtnje na skokovitu promjenu postavne veličine brzine vrtnje dani su na slici 24.

5.2.3 Sinteza sustava regulacije pozicije (položaja) SMPM-a

U nekim industrijskim sustavima potrebno je regulirati položaj osovine motora, odnosno tereta (npr. kod sustava kontrole kvalitete, punionice, strojevi za tiskanje, CNC strojevi, i dr.). U nastavku dan je postupak sinteze regulatora pozicije osovine motora.

Kut, odnosno poziciju rotora motora je moguće odrediti integriranjem brzine vrtnje SMPM-a:

$$\theta(t) = \int_0^t \omega_e(\tau) d\tau \quad (237)$$



Slika 24: Vremeski odzivi struja i brzine vrtnje na skokovitu promjenu postavne veličine brzine vrtnje

odnosno transformacijom u Laplaceovu domenu dobije se:

$$\begin{aligned}\Theta_e &= \frac{1}{s} \Omega_e \\ \frac{\Theta_e}{\Omega_e} &= \frac{1}{s}\end{aligned}\quad (238)$$

Uvrštavanjem izraza (220) za brzinu vrtnje SMPM-a u izraz (238) dobije se sljedeća prijenosna funkcija:

$$\begin{aligned}\Omega_e &= \frac{\frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m}}{s + \frac{D}{J_m}} I_q \\ \frac{\Theta_e}{I_q} &= \frac{\frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m}}{s \left(s + \frac{D}{J_m} \right)}\end{aligned}\quad (239)$$

Kako struju i_q nije moguće direktno postavljati potrebno je u izrazu (239) struju I_q zamijeniti s njenom postavnom veličinom I_q^* . Ovisno o tipu regulatora, odnosno strukturi unutarnje povratne veze po struju i_q ovisi izraz prijenosne funkcije unutarnje povratne veze. Ako je P tip regulatora odabran za regulaciju struje i_q , onda je prijenosna funkcija zatvorenog kuga po porečnoj struji dana izrazom (222) te se uvrštavanjem u prijenosnu funkciju (239) dobije:

$$\frac{\Theta_e}{I_q^*} = \frac{\frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m}}{s \left(s + \frac{D}{J_m} \right)} \frac{\alpha}{(1 - \alpha) \frac{L_q}{R_s} s + 1}\quad (240)$$

Prijenosna funkcija dana izrazom (240) nije pogodna za promjenu metode postavljanja polova jer je trećeg reda. Zanimarenjem dinamike unutarnje povratne veze (električna vremenska konstanta je puno manja od mehaničke vremenske konstante) dobije se pojednostavljeni oblik prijenosne funkcije (sličnog oblika kao prijenosna funkcija dana izrazom (162)) potrebne za sintezu regulatora pozicije:

$$\frac{\Theta_e}{I_q^*} = \frac{\frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m} \alpha}{s \left(s + \frac{D}{J_m} \right)}\quad (241)$$

Primjenom metode za postavljanja polova, parametri PID tipa regulatora pozicije iznose:

$$\begin{aligned}K_c^\theta &= \frac{(2\zeta\omega_n + 1) \omega_n^2}{b} \\ \tau_i^\theta &= \frac{2\zeta n + 1}{n\omega_n} \\ \tau_d^\theta &= \frac{(2\zeta + n) \omega_n - a}{(2\zeta n + 1) \omega_n^2}\end{aligned}$$

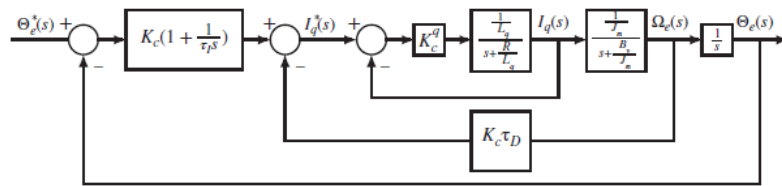
gdje su (iz izraza (241)):

$$\begin{aligned} a &= \frac{D}{J_m} \\ b &= \frac{3}{2} \frac{p^2 \phi_{mg}}{J_m} \alpha \end{aligned} \quad (242)$$

Upravljački signal, odnosno izlaz iz PID tipa regulatora pozicije iznosi:

$$i_q^* = K_c^\theta (\theta_e^* - \theta_e) + \frac{K_c^\theta}{\tau_i^\theta} \int_0^t (\theta_e^* - \theta_e) d\tau - K_c^\theta \tau_d^\theta \omega_e \quad (243)$$

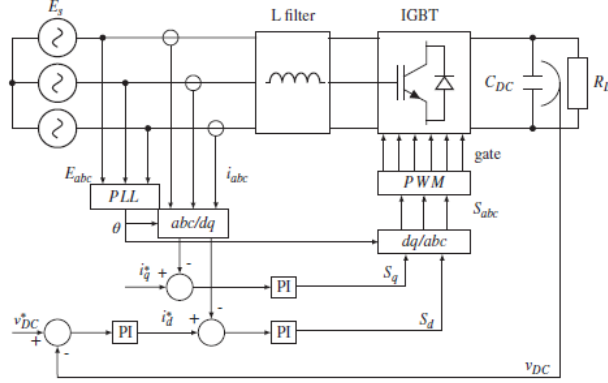
Blokovska shema PID regulatora pozicije, odnosno kaskadna struktura regulacije pozicije SMPM-a dana je na slici 25.



Slika 25: Blokovska shema sustava regulacije pozicije SMPM-a [3]

6 Sustav regulacije napona istosmjernog međukruga pretvarača napona i frekvencije

Na slici 26 dana je blokovska shema regulacije napona istosmjernog međukruga pretvarača napona i frekvencije.



Slika 26: Blokovska shema sustava regulacije napona istosmjernog međukruga pretvarača napona i frekvencije [3]

Transformacija koordinata iz a, b, c u dq koordinatni sustav obavlja se prema već poznatim Clarkeovim i Parkovim transformacijama (izrazi (180) i (181)) te obrnuto korištenjem njihovih inverza (izrazi (183) i (182)).

Dva su osnovna zadatka sustava regulacije napona istosmjernog međukruga pretvarača napona i frekvencije:

1. održavanje napona istosmjernog međukruga (u_{dc}) konstantnim s obzirom na poremećaje te
2. održavanje faktora snage oko jedinične vrijednosti, odnosno održavanje poprečne komponente struje na nuli ($i_q \approx 0$).

Definiranjem dvije nove varijable koje predstavljaju skalirane vrijednosti napona u direktnoj i poprečnoj osi:

$$S_d = \frac{u_d}{\frac{u_{dc}}{2}} \rightarrow u_d = S_d \frac{u_{dc}}{2} \quad (244)$$

$$S_q = \frac{u_q}{\frac{u_{dc}}{2}} \rightarrow u_q = S_q \frac{u_{dc}}{2} \quad (245)$$

dinamički model pretvarača napona i frekvencije (izrazi (116)-(118)) glasi:

$$L_s \frac{di_d}{dt} = -R_s i_d - u_d + L_s \omega_g i_q + E_d \quad (246)$$

$$L_s \frac{di_q}{dt} = -R_s i_q - L_s \omega_g i_d - u_q \quad (247)$$

$$C \frac{du_{dc}}{dt} = \frac{3}{4} (S_d i_d + S_q i_q) - i_T \quad (248)$$

Vidljivo je da se novo uvedene varijable (S_d i S_q) upravljačke veličine, odnosno izlazi iz regulatora struja i_d i i_q , dok su poremećajne veličine napone mreže (odnosno EES-a E_s) te struja tereta i_T . Ovisno o tipu regulatora unutarnje povratne veze (slika 26) ovisit će tip regulatora vanjske povratne veze po naponu istosmjernog međukruga (slično kao i kod regulatora za sustave sa SMPM-om).

6.1 Sinteza P tipa regulatora struje i_d

Diferencijalna jednačina koja opisuje dinamiku struje i_d (izraz (246)) sadrži nelinearne članove koje je potrebno substituirati kako bi se dobio linearni oblik diferencijalne jednačine. Slično kao i kod sustava sa SMPM-om, definiše se varijabla koja obuhvaća nelinearne članove izraza (246):

$$-\frac{1}{2L_s}\hat{S}_d = -\frac{S_d u_{dc}}{2L_s} + \omega_g i_q + \frac{E_d}{L_s} \quad (249)$$

Substitucijom izraza (249) u izraz (246) te nakon sređivanja dobije se:

$$\frac{di_d}{dt} = -\frac{R_s}{L_s}i_d - \frac{1}{2L_s}\hat{S}_d \quad (250)$$

Transformacijom izraza (250) u Laplaceovu domenu moguće je odrediti prijenosnu funkciju otvorenog kruga:

$$\begin{aligned} sI_d &= -\frac{R_s}{L_s}I_d - \frac{1}{2L_s}\hat{S}_d \\ \frac{I_d}{\hat{S}_d} &= \frac{-\frac{1}{2L_s}}{s + \frac{R_s}{L_s}} \end{aligned} \quad (251)$$

Za P tip regulatora za regulaciju direktne komponente struje, upravljačka veličina iznosi:

$$\hat{S}_d = K_c^d (I_d^* - I_d) \quad (252)$$

Uvrštavanjem izraza (252) u izraz (251) te nakon sređivanja dobije se prijenosna funkcija zatvorenog kruga po struji i_d s P tipom regulatora:

$$\frac{I_d}{I_d^*} = \frac{-\frac{1}{2L_s}K_c^d}{s + \frac{R_s}{L_s} - \frac{K_c^d}{2L_s}} \quad (253)$$

Pojačanje zatvorenog kruga (izraz (253)) u stacionarnom stanju iznosi ($s = 0$):

$$\alpha = \frac{-\frac{1}{2L_s}K_c^d}{\frac{R_s}{L_s} - \frac{K_c^d}{2L_s}} = \frac{-K_c^d}{2R_s - K_c^d} \quad (254)$$

Obično se definiše iznos stacionarnog pojačanja te preko njega odredi pojačanje P tipa regulatora kao:

$$K_c^d = \frac{-2\alpha}{1 - \alpha}R_s \quad (255)$$

te substitucijom izraza (255) u izraz (253) prijenosna funkcija zatvorenog kruga se može zapisati kao:

$$\frac{I_d}{I_d^*} = \frac{\alpha}{s(1 - \alpha)\frac{L_s}{R_s} + 1} \quad (256)$$

Upravljački signal, odnosno izlaz iz P tipa regulatora struje i_d je definiran s:

$$S_d = \frac{1}{u_{dc}} \left[K_c^d (i_d^* - i_d) + 2L_s\omega_g i_q + 2E_d \right] \quad (257)$$

6.2 Sinteza PI tipa regulatora struje i_q

Diferencijalna jednadžba koja opisuje dinamiku struje i_q (izraz (247)) sadrži nelinearne članove koje je potrebno substituirati kako bi se dobio linearni oblik diferencijalne jednadžbe. Definira se varijabla koja obuhvaća nelinearne članove izraza (247):

$$-\frac{1}{2L_s}\hat{S}_q = -\frac{S_q u_{dc}}{2L_s} - \omega_g i_d \quad (258)$$

Substitucijom izraza (258) u izraza (247) te nakon sređivanja dobije se:

$$\frac{di_q}{dt} = -\frac{R_s}{L_s}i_q - \frac{1}{2L_s}\hat{S}_q \quad (259)$$

Transformacijom izraza (259) u Laplaceovu domenu moguće je odrediti prijenosnu funkciju otvorenog kruga:

$$\begin{aligned} sI_q &= -\frac{R_s}{L_s}I_q - \frac{1}{2L_s}\hat{S}_q \\ \frac{I_q}{\hat{S}_q} &= \frac{-\frac{1}{2L_s}}{s + \frac{R_s}{L_s}} \end{aligned} \quad (260)$$

Prijenosna funkcija (260) je sličnog oblika kako prijenosna funkcija (141) te je moguće primijeniti metodu postavljanja polova kako bi se odredili parametri PI tipa regulatora struje i_q . U tom slučaju upravljački signal, odnosno izlaz iz PI tipa regulatora iznosi:

$$S_d = \frac{1}{u_{dc}} \left[K_c^q (i_q^* - i_q) + \frac{K_c^q}{\tau_i^q} \int_0^t (i_q^* - i_q) d\tau - 2L_s \omega_g i_d \right] \quad (261)$$

6.3 Sinteza PI tipa regulatora napona istosmjernog međukruga u_{dc}

Jedan od osnovnih zadataka sustava je održavanje napona istosmjernog međukruga konstantnim s obzirom na poremećaje. Za to je potrebno moći regulirati napon u_{dc} koristeći povratnu vezu po naponu u_{dc} .

Diferencijalna jednadžba koja opisuje dinamiku napona u_{dc} (izraz (248)) sadrži nelinearne članove, umnoške $S_d i_d$ i $S_q i_q$. Rastavljanjem pojedinih nelinearnih komponenti na Taylorov red dobije se:

$$S_d i_d \approx S_d^* i_d^* + S_d^* i_d + S_d i_d^* + \dots \quad (262)$$

$$S_q i_q \approx S_q^* i_q^* + S_q^* i_q + S_q i_q^* + \dots \quad (263)$$

(viši članovi su zanemareni). Iz specifikacije da se faktor snage održi približno jedan sljedi da je postavna veličina poprečne struje $i_q^* = 0$. Kako je regulator poprečne struje PI tipa može se smatrati da se struja i_q ne mijenja puno od željene (postavne) vrijednosti, odnosno može se smatrati da je član $S_q i_q \approx 0$.

Uvrštavanjem lineariziranog izraza (262) u izraz (248) dobije se se linearizirana diferencijalna jednadžba za napon u_{dc} :

$$C \frac{du_{dc}}{dt} = \frac{3}{4} (S_d^* i_d^* + S_d^* i_d + S_d i_d^*) - i_T \quad (264)$$

Komponente $S_d^* i_d^*$, $S_d i_d^*$ i i_T u izrazu (264) mogu se promatrati kao poremećaji te se pri sintezi regulatora mogu zanemariti, odnosno izraz (264) se može pisati kao:

$$C \frac{du_{dc}}{dt} = \frac{3}{4} S_d^* i_d \quad (265)$$

Transformacijom izraza (265) u Laplaceovu domenu dobije se prijenosna funkcija:

$$\frac{U_{dc}}{I_d} = \frac{3}{4} \frac{S_d^*}{sC} \quad (266)$$

Ako unutarnja povratna veze po struji i_d ima P tip regulatora po struji i_d , onda je prijenosna funkcija zatvorenog kruga unutarnje povratne veze dana izrazom (256). Uvrštavanjem struje I_d iz izraza (256) u izraz (eq:prijenosnaFunkcijaUdc-Id) dobije se prijenosna funkcija objekta upravljanja kao:

$$\frac{U_{dc}}{I_d^*} = \frac{3}{4} \frac{S_d^*}{sC} \frac{\alpha}{s(1-\alpha) \frac{L_s}{R_s} + 1} \quad (267)$$

Usporedbom vremenske konstante $(1-\alpha) \frac{L_s}{R_s}$ s integratorom $\frac{1}{s}$ u izrazu (267) vidljivo je da se dinamika unutarnje povratne veze može zanemariti u usporedbi s dinamikom integratora, odnosno prijenosna funkcija dana izrazom (267) se može pojednostaviti:

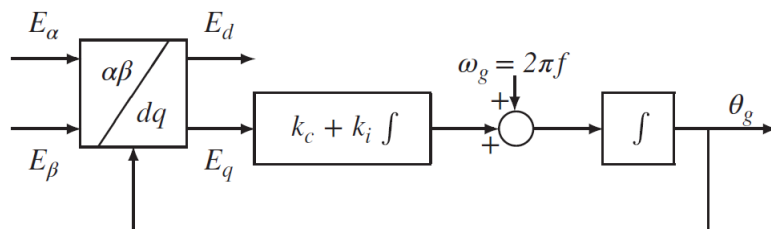
$$\frac{U_{dc}}{I_d^*} = \frac{3}{4} \frac{S_d^* \alpha}{sC} = \frac{3S_d^* \alpha}{4C} \frac{1}{s} \quad (268)$$

Prijenosna funkcija dana izrazom (268) prilagođena je za primjenu metode postavljanja polova ($b = \frac{3S_d^* \alpha}{4C}$ i $a = 0$) gdje je upravljački signal, odnosno izlaz iz PI regulatora napona u_{dc} dan s:

$$i_d^* = K_c^{dc} (u_{dc}^* - u_{dc}) + \frac{K_c^{dc}}{\tau_i^{dc}} \int_0^t (u_{dc}^* - u_{dc}) d\tau \quad (269)$$

Sve varijable koje se koriste u sustavu regulacije napona istosmjernog međukruga su definirane (transformirane) u dq koordinatnom sustavu. Međutim, nije definirano kako se vrši transformacija, odnosno kako je definiran taj sustav.

Razmotri li se upravljački sustav dan na slici 26 može se primijetiti blok **PLL** čiji ulazi su tri napona mreže (E_a , E_b i E_c), a izlaz kut θ_g koji se koristi za transformaciju ulaznih struja (i_a , i_b i i_c) iz a, b, c trofaznog sustava u rotirajući dq koordinatni sustav (i_d i i_q). Ako se odabere dq koordinatni sustav takav da je d os u smjeru prostornog vektor napona \vec{E}_s i rotira frekvencijom mreže f_g (sinkrono s prostornim vektorom napon; $\omega_g = 2\pi f_g$), onda je direktna komponenta napona jednaka modulu vektora \vec{E}_s ($E_d = \|\vec{E}_s\|$) dok je poprečna komponenta napona mreže jednaka nuli ($E_q = 0$). Za postavljanje tako definiranog dq koordinatnog sustava, odnosno za estimaciju kuta θ_g potrebnog transformaciju koristi se blok **PLL**, odnosno *Phase Locked Loop* blok. Blokova shema **PLL**-a dana je na slici 27.



Slika 27: Blokova shema **PLL**-a [3]

Osnovna ideja **PLL**-a je da s korištenjem PI tipa regulatora estimira električni kut mreže θ_g . Kada je estimirani θ_g (izlaz iz **PLL**-a) jednak stvarnom električnom kutu mreže onda je napon mreže u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu jednak:

$$E_\alpha = E \cos \theta_g \quad (270)$$

$$E_\beta = E \sin \theta_g \quad (271)$$

gdje je E amplituda napona mreže i smatra se konstantnom. Primjenom Parkove transformacije (izraz (181)) na izraze (270) i (271) dobije se:

$$\begin{aligned} E_d &= E_\alpha \cos \theta_g + E_\beta \sin \theta_g = \\ &= E \cos \theta_g \cos \theta_g + E \sin \theta_g \sin \theta_g = E \end{aligned} \quad (272)$$

$$\begin{aligned} E_q &= -E_\alpha \sin \theta_g + E_\beta \cos \theta_g = \\ &= -E \cos \theta_g \sin \theta_g + E \sin \theta_g \cos \theta_g = 0 \end{aligned} \quad (273)$$

što znači kada je komponenta napona $E_q = 0$ onda je estimirani električni kut θ_g točan kut.

Za određivanje parametara regulatora PI tipa **PLL**-a uzima se u obzir dinamika integratora u **PLL**-a i njegovo pojačanje, odnosno prijenosna funkcija objekta upravljanja je:

$$G(s) = \frac{\sqrt{E_d^2 + E_q^2}}{s} = \frac{k_p}{s} \quad (274)$$

Primjenom metode postavljanja polova (danom u poglavlju 5.1) moguće je odrediti parametre PI tipa regulatora **PLL**-a ($a = 0$ i $b = k_p$).

Literatura

- [1] R. Krishnan, Permanent magnet synchronous and brushless DC motor drives, CRC press, 2009.
- [2] R. De Doncker, D. W. Pule, A. Veltman, Advanced electrical drives: analysis, modeling, control, Springer Science & Business Media, 2010.
- [3] L. Wang, S. Chai, D. Yoo, L. Gan, K. Ng, PID and Predictive Control of Electrical Drives and Power Converters Using MATLAB/Simulink, John Wiley & Sons, 2015.
- [4] J.-A. D. Nguyen Phung Quang, Vector Control of Three-Phase AC Machines: System Development in the Practice, 2nd Edition, Power Systems, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015.
- [5] B. L. Dokić, B. Blanuša, Power Electronics, Springer, 2015.
- [6] D. W. Hart, Power electronics, Tata McGraw-Hill Education, 2011.
- [7] Z. Vukić, L. Kuljača, B. Novaković, S. Tešnjak, B. Tovornik, Automatsko upravljanje-analiza linearnih sustava, Kigen, 2005.