Ispit iz Diskretne matematike 1
14. 9. 2021.

1. **(8 bodova)** Odredite funkciju izvodnicu niza $a_n = 1 + 2n + 3n^2$, $n \geqslant 0$.

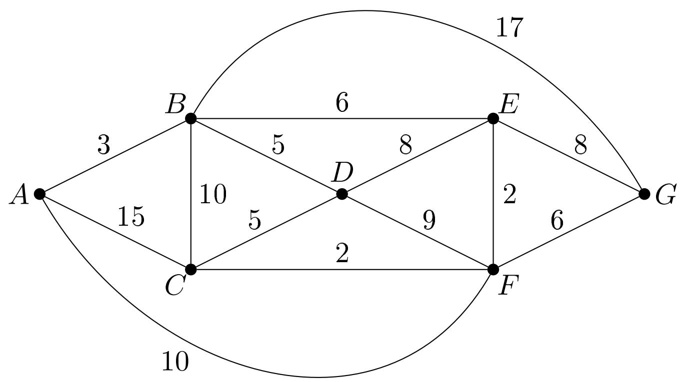
2. **(8 bodova)** Neka je a_n broj nizova duljine n sastavljenih od znamenaka 0, 1, 2, 3, 4, 5, a koji ne sadrže uzastopne znamenke koje nisu djeljive s 3.

   (a) Odredite a_1 i a_2.

   (b) Odredite rekurzivnu relaciju za niz (a_n).

   (c) Riješite dobivenu rekurzivnu relaciju iz (b) podzadatka.

3. **(8 bodova)** Za graf sa slike detaljno provedite postupak i odredite stablo najkraćih puteva od vrha A do svih ostalih vrhova.



4. **(8 bodova)**

   (a) Dokažite da svako stablo s n vrhova, barem jednim vrhom stupnja 4 i barem jednim vrhom stupnja 3, ima barem 5 listova.

   (b) Klasificirajte sva stabla s 8 vrhova koja imaju barem jedan vrh stupnja 4, barem jedan vrh stupnja 3 i točno 5 listova.

5. **(8 bodova)** Iskažite i dokažite Eulerovu formulu za povezan planaran graf.

6. **(8 bodova)** Nadopunite zadani latinski pravokutnik do latinskog kvadrata

1	2	3	4	5	6
4	6	1	2	3	5
3	5	2	6	1	4

Ispit se piše 150 minuta. Korištenje kalkulatora niti formula nije dozvoljeno. Sretno!

Rješenja

1. Računamo traženu funkciju izvodnicu po definiciji:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + 2n + 3n^2) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3n^2 x^n$$
$$= \ldots = \frac{2}{1-x} - \frac{7}{(1-x)^2} + \frac{6}{(1-x)^3}.$$

2. **(a)** Uočimo da svaki jednočlan niz ispunjava zadane uvjete pa je $a_1 = 6$. S druge strane, za dvočlane nizove imamo dvije mogućnosti: ili im je prva znamenka djeljiva s 3 (pa tada prvu znamenku možemo birati na 2, a drugu na 6 načina), ili nije (u tom slučaju prvu znamenku možemo birati na 4 načina, a drugu na 2 jer ona mora biti djeljiva s 3). Dakle, $a_2 = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 20$.

(b) Promotrimo jedan niz duljine n koji zadovoljava zadane uvjete. Razlikujemo iste slučajeve kao u prethodnom podzadatku:

1° Ako je prva znamenka tog niza djeljiva s 3, nju možemo odabrati na 2 načina, a preostalih $n-1$ znamenaka na a_{n-1} način (jer i među njima ne smiju biti dvije uzsatopne koje nisu djeljive s 3). Dakle, takvih nizova $2a_{n-1}$.

2° Ako prva znamenka niza nije djeljiva s 3, nju možemo odabrati na 4 načina. U tom slučaju druga znamenka mora biti djeljiva s 3 pa ju biramo na 2 načina, a preostale $n-2$ znamenke biramo na a_{n-2} načina. Dakle, takvih nizova ima $4 \cdot 2 \cdot a_{n-2} = 8a_{n-2}$.

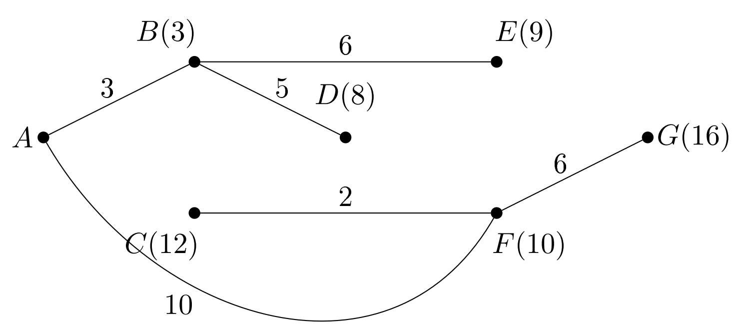
Zato tražena rekurzivna relacija glasi

$$a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n_2}, \ n \geqslant 2,$$

uz početne uvjete $a_1 = 6$, $a_2 = 20$.

(c) $a_n = \frac{1}{3}\left(4^{n+1} - (-2)^n\right)$.

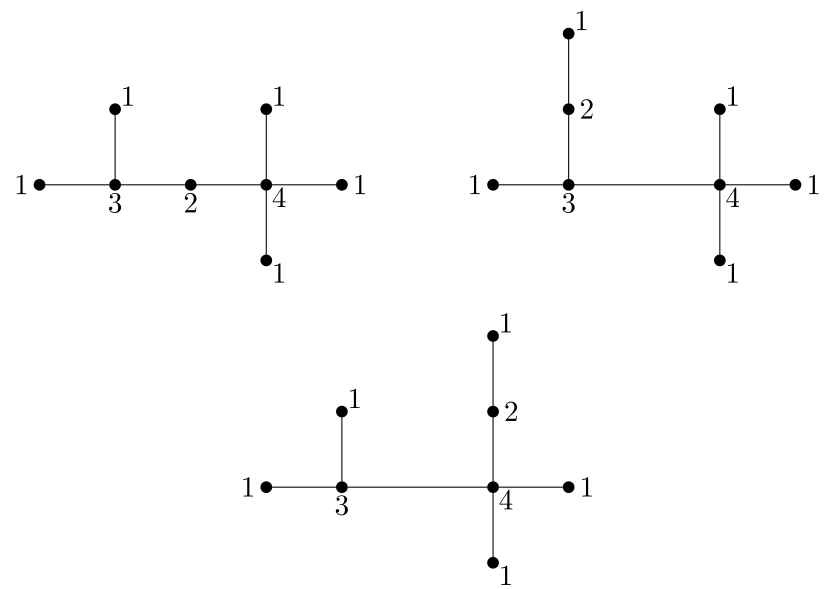
3. Traženo stablo najkraćih puteva je dano na sljedećoj slici (uz svaki je vrh napisana duljina najkraćeg puta od vrha A do tog vrha):



4. **(a)** Neka su v i w vrhovi tog stabla takvi da je $\deg(v) = 4$ i $\deg(w) = 3$. Budući da je riječ o stablu, u njemu postoji jedinstveni put između v i w. Uz taj put postoje još 3 brida incidentna sa v te 2 brida incidentna sa w. Uočimo da za svaki od tih 5 bridova možemo konstruirati put koji ga sadrži, a koji spaja jedan od vrhova v, w

s nekim od listova tog grafa. Ti putevi neće imati zajedničkih bridova ni vrhova (osim v i w) jer bi u suprotnom u grafu postojao ciklus. Dakle, takav graf ima barem 5 listova.

(b) Uočimo da u ovom slučaju jedinstveni put između vrhova stupnja 3 i 4 sadrži najviše jedan vrh (uz ta dva). Ovisno o tome, do na izomorfizam nalazimo tri takva stabla koja sva imaju niz stupnjeva $(1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4)$:



5. Skripta, str. 141, teorem 7.6.

6.

1	2	3	4	5	6
4	6	1	2	3	5
3	5	2	6	1	4
5	1	4	3	6	2
6	4	5	1	2	3
2	3	6	5	4	1