

Ispit iz Diskretne matematike 1
4.9.2020.

1. **(8 bodova)** Na koliko se načina 40 jagoda i 50 trešanja može raspodijeliti na petero djece tako da svako dijete dobije barem 5 trešanja i niti jedno dijete više od 15 jagoda?
2. **(8 bodova)** Ako su nizovi $a_n = 5 \cdot 3^n + 4^n$, $b_n = -7 \cdot 4^n$, $c_n = 2^n - 4^{n+3}$, $d_n = 6 \cdot 2^n + 3^n$ rješenja homogene linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima, koji je najmanji mogući red te rekurzije? Dokažite svoj odgovor.
3. **(8 bodova)** Koliko je najmanje bridova potrebno dodati ikosaedru kako bi postao skoro eulerovski graf? Dokažite svoj odgovor.
4. **(8 bodova)** Neka je G potpuni težinski graf sa 7 vrhova koji su obilježeni različitim labelama $l(v)$ iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ tako da je $l(u) \neq l(v)$ za $u \neq v$. Težina svakog brida $\{u, v\} \in E(G)$ dana je izrazom

$$w(\{u, v\}) = |l(u) - l(v)|.$$

Nađite minimalno razapinjuće stablo grafa G . Kolika je njegova težina?

5. **(8 bodova)** Neka je G jednostavan povezan 4-regularan graf. Koje sve vrijednosti može poprimiti njegov kromatski broj? Obrazložite svoj odgovor.
6. **(8 bodova)** Dokažite da se svaki latinski pravokutnik može nadopuniti do latinskog kvadrata.

Rješenja

1. Neka je N broj traženih raspodjela jagoda. Pripadna funkcija izvodnica za tu raspodjelu glasi

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x + \dots + x^{15}\right)^5 = \left(\frac{1 - x^{16}}{1 - x}\right)^5 \\ &= \left(1 - x^{16}\right)^5 (1 - x)^{-5} \\ &= \left(1 - 5x^{16} + 10x^{32} - 10x^{48} + 5x^{64} - x^{80}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5+k-1}{k} x^k. \end{aligned}$$

Zato slijedi

$$N = \langle x^{40} \rangle f(x) = \binom{44}{4} - 5 \binom{28}{4} + 10 \binom{12}{4} = 38\,326.$$

Slično, neka je M broj traženih raspodjela trešanja. Pripadna funkcija izvodnica glasi

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(x^5 + x^6 + \dots\right)^5 = x^{25} \left(1 + x + x^2 + \dots\right)^5 \\ &= x^{25} (1 - x)^{-5} = x^{25} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5+k-1}{k} x^k, \end{aligned}$$

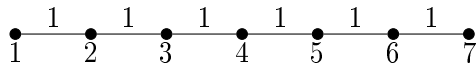
pa imamo

$$M = \langle x^{50} \rangle g(x) = \binom{29}{4} = 23\,751.$$

Zato je ukupan broj raspodjela jednak

$$M \cdot N = 910\,280\,826.$$

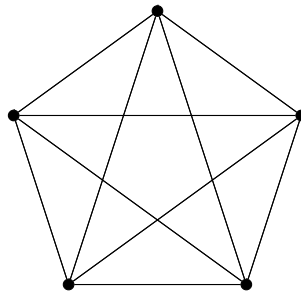
2. Dimenzija prostora razapetog nizovima (a_n) , (b_n) , (c_n) i (d_n) je jednaka 3 pa je najmanji mogući red takve rekurzije jednak 3.
3. Ikosaedar je jednostavan povezan 5-regularan graf s 12 vrhova. Dodavanjem 5 bridova između 10 različitih vrhova tog grafa svi će vrhovi osim njih točno dva biti parnog stupnja, a dodavanjem bilo kojeg manjeg broja bridova imat ćemo barem 3 vrha kojima nismo promijenili stupanj (tj. barem 3 vrha neparnog stupnja). Dakle, potrebno je dodati barem 5 bridova.
4. Kruskalovim algoritmom dobivamo minimalno razapinjuće stablo od G :



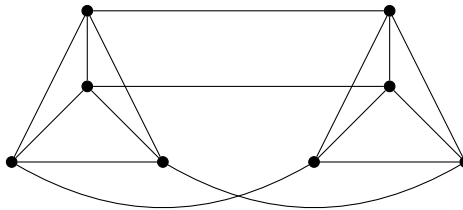
Težina dobivenog stabla je jednaka 6.

5. Budući da je stupanj svakog vrha grafa G jednak 4, on je 5-objiv, tj. za njegov kromatski broj vrijedi $\chi(G) \leq 4 + 1 = 5$. Kromatski broj od G može poprimiti bilo koju vrijednost iz skupa $\{2, 3, 4, 5\}$ i za svaku od tih vrijednosti nalazimo jedan primjer jednostavnog povezanog 4-regularnog grafa:

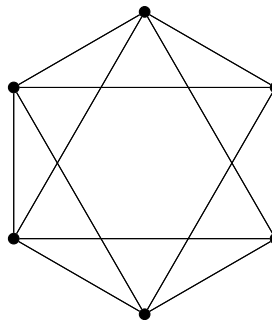
(1) u slučaju $\chi(G) = 5$ traženi graf je K_5



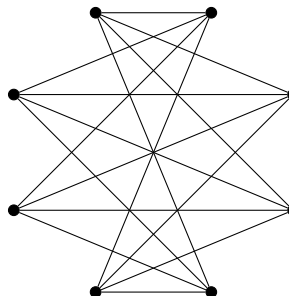
(2) u slučaju $\chi(G) = 4$ traženi graf je dan na sljedećoj slici



(3) u slučaju $\chi(G) = 3$ imamo sljedeći primjer



(4) u slučaju $\chi(G) = 2$ traženi graf je $K_{4,4}$



6. Skripta, str. 190 i 191, teorem 10.6.