DISKRETNA MATEMATIKA 1
Završni ispit (1.2.2021.)
– RJEŠENJA ZADATAKA I KOMENTARI –

Pitanje **1**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 5,00

Zadan je niz stupnjeva grafa: $(1,1,1,1,1,1,3,5)$.

Odredite broj neizomorfnih neoznačenih stabala sa zadanim nizom stupnjeva.

$\boxed{1}$

(2 boda)

Odredite broj različitih stabala s označenim vrhovima sa zadanim nizom stupnjeva.

$\boxed{840}$

$$\frac{8!}{4!\cdot 2!} = \frac{1}{2}(8\cdot 7\cdot 6\cdot 5) = 840$$ (zamjenom oznaka listova dobivamo isti graf)

(2 boda)

Koliko bridova ima graf sa zadanim nizom stupnjeva?

$\boxed{7}$

Prema lemi o rukovanju,

$$|E(G)| = \frac{1}{2}(6\cdot 1 + 3 + 5) = 7$$

(1 bod)

Pitanje **2**

Nije još odgovoreno

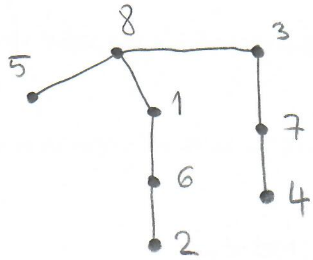
Broj bodova od 4,00

Zadan je sljedeći Prüferov kod: $(6,7,8,1,8,3)$.

Odredite niz stupnjeva stabla sa zadanim Prüferovim kodom. Odgovor upišite kao uređenu n-torku, pri čemu su koordinate odvojene zarezom i između njih nema razmaka (na primjer, *(a,b,c,d,e)*).

$\boxed{(1,1,1,2,2,2,2,3)}$

(3 boda)



Koliko vrhova ima zadano stablo?

$\boxed{8}$

(1 bod)

Pitanje **3**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 5,00

Zadan je planaran graf G čije su strane zadane s

$$F_3 = 2,\ F_4 = 2,\ F_5 = 2,\ F_6 = 1$$

Koliko strana ima graf G?

$\boxed{7}$ $F = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$

(1 bod)

Koliko bridova ima graf G?

$\boxed{15}$ $2M = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 = 30 \Rightarrow M = 15$

(2 boda)

Koliko vrhova ima graf G?

$\boxed{10}$ $N = 2 + M - F = 10$

Eulerova formula

(2 boda)

Pitanje **4**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 8,00

Odredite istinost sljedećih tvrdnji. Za svaku od tvrdnji točan odgovor nosi 2 boda, netočan -2 boda, a neodgovoreno pitanje nosi 0 bodova.

1) Postoji graf G s $n \geqslant 11$ vrhova takav da su G i $\overline{G}$ oba planarni grafovi. Netočno

2) Postoji graf G s $n \geqslant 10$ vrhova takav da niti G, niti njegov komplement $\overline{G}$ nisu planarni grafovi. Točno

3) Postoji 6-regularan planaran graf. Netočno

4) Svaka dva planarna grafa s istim brojem vrhova, bridova i strana su izomorfni. Netočno

Objašnjenje je priloženo na papiru niže.

Pitanje **5**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 6,00

Neka je G graf kojemu je skup vrhova $V(G) = \{v_1, \ldots, v_{20}\}$, a dva vrha v_i i v_j su susjedna ako i samo ako je $|i - j|$ neparan broj.

Kromatski broj $\chi(G)$ grafa G je jednak

2

. **(1 bod)**

Odaberite odgovarajuće obrazloženje za svoj odgovor:

- ○Ne znam (0 bodova)
- ✗Graf je bipartitan jer su spojeni samo parni i neparni vrhovi.
- ○I za parne, i za neparne vrhove trebamo po 2 boje.
- ○Jedna boja je dovoljna.
- ○I za parne, i za neparne vrhove trebamo po 3 boje.
- ○Vrhove s indeksima 1, 6, 11, 16 obojimo jednom bojom itd.
- ○Bojanje s 2 boje nije moguće, a s 3 boje je dano u papirima.

.

(2 boda za točan odgovor; -0.4 za netočan; 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

Kromatski indeks tog grafa je jednak

10

. **(1 bod)**

Odaberite odgovarajuće obrazloženje za svoj odgovor:

- ○Ne znam (0 bodova)
- ○Bridovi su obojani s 5 boja i to je priloženo u papirima.
- ○Bridovi su obojani s 2 boje i to je priloženo u papirima.
- ✗$\chi'(G) = 10$. Graf je bipartitan i $\Delta = 10$. – Königov teorem (teorem 8.13)
- ○Svaki je vrh stupnja 19.
- ○Po teoremu, za bojanje nam je dovoljno $\Delta + 2$ boja.
- ○$\Delta = 10$, ali se bridovi ne mogu obojati s 10 boja.

.

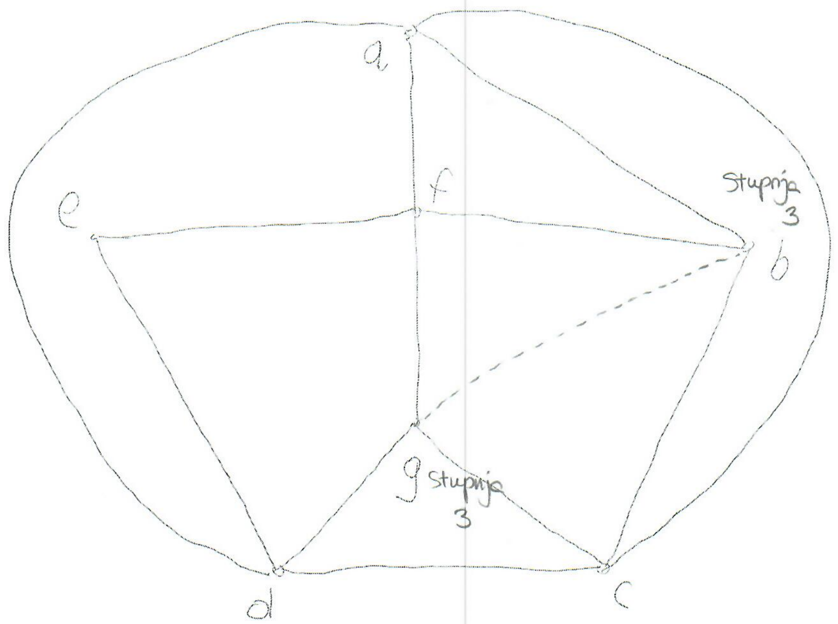
(2 boda za točan odgovor; -0.4 za netočan; 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

Pitanje **6**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 4,00

Graf G je dan na sljedećoj slici.



Koji brid treba dodati grafu G kako bi novodobiveni graf bio k-strano obojiv, pri čemu je k minimalan mogući? Odgovor upišite kao dva slova bez razmaka (na primjer, *pq*).

bg

(2boda)

Odredite k u tom slučaju.

2

(2 boda)

Po teoremu 8.6, karta G je 2-strano obojiva ako i samo ako je G eulerovski graf.

S druge strane, G ima točno dva vrha neparnog stupnja pa dodavanjem brida između ta dva vrha dobivamo eulerovski graf.

Pitanje **7**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 3,00

Je li 5-kocka, Q_5, usmjeriv graf? Da **(1 bod za točan odgovor; -1 za netočan; 0 ako nije odgovoreno)**

Zašto?

- Stupanj svakog vrha je veći od 2.
- Q_5 je bipartitan graf.
- Stupanj svakog vrha je paran.
- Ne znam (0 bodova)
- Q_5 sadrži ciklus neparnog stupnja.
- Svaki brid je most.
- ☒ Svaki je brid u nekom ciklusu. — teorem 9.1

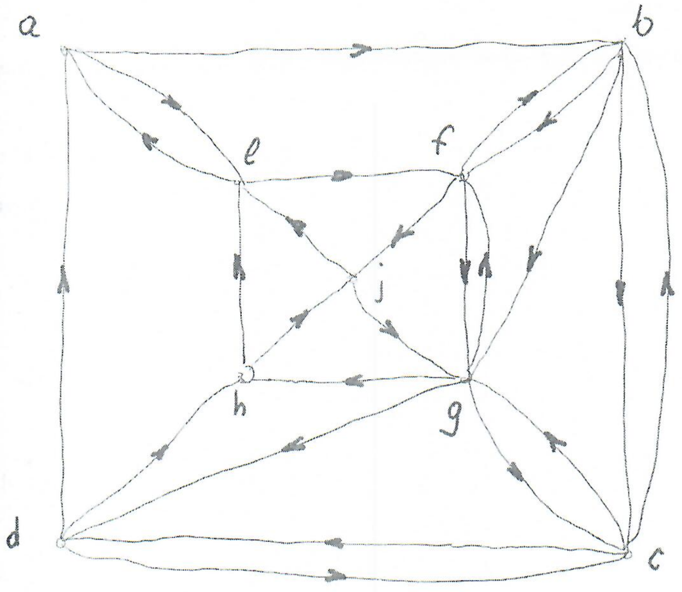
(2 boda za točan odgovor; -0.4 za netočan; 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

Pitanje **8**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 2,00

Digraf D je dan na sljedećoj slici.



Koji luk treba dodati digrafu D da bi on postao eulerovski? Odgovor upišite kao dva slova bez razmaka, od čega prvo predstavlja početak, a drugo završetak luka (na primjer, *pq*).

ed

(2boda)

$\left.\begin{array}{l} \text{outdeg}(e) = 2 \\ \text{indeg}(e) = 3 \end{array}\right\}$ Dodavanjem luka ed izlazni i ulazni stupnjevi ovih vrhova postaju jednaki $\left\{\begin{array}{l} \text{outdeg}(d) = 3 \\ \text{indeg}(d) = 2 \end{array}\right.$

pa je digraf po teoremu 9.2 eulerovski.

Pitanje **9**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 3,00

Neka je $\{d_1, \ldots, d_{10}\}$ skup djevojki, a $\{m_1, \ldots, m_{10}\}$ skup momaka. Poznanstva su dana sljedećom tablicom

$d_1 \rightarrow \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$
$d_2 \rightarrow \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$
$d_3 \rightarrow \{m_2, m_3, m_4, m_5\}$
$d_4 \rightarrow \{m_4, m_5\}$
$d_5 \rightarrow \{m_4, m_5\}$
$d_6 \rightarrow \{m_5, m_6\}$
$d_7 \rightarrow \{m_5, m_6, m_7\}$
$d_8 \rightarrow \{m_5, m_6, m_7\}$
$d_9 \rightarrow \{m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}\}$
$d_{10} \rightarrow \{m_7, m_8, m_9, m_{10}\}$

Ima li ovaj ženidbeni problem rješenje? Ne **(1 bod za točan odgovor; -1 za netočan; 0 ako nije odgovoreno)**

Zašto?

- X Djevojke $\{d_4, d_5, d_6, d_7, d_8\}$ poznaju momke $\{m_4, m_5, m_6 m_7\}$. - Hallov teorem (teorem 10.1)
- ○ Djevojke d_3 i d_4 poznaju različit broj momaka.
- ○ Svakog momka poznaje barem jedna djevojka.
- ○ Ne znam (0 bodova)
- ○ Djevojci d_i pridružimo momka m_i za svaki i iz skupa {1,2,...,10}.
- ○ Niti jedna djevojka ne poznaje više od 5 momaka.
- ○ Svaka djevojka poznaje barem jednog momka.

(2 boda za točan odgovor; -0.4 za netočan; 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

4) 1) Netočno

Pretpostavimo suprotno, tj. da je G planaran graf. Ako G ima n vrhova i m bridova tada prema korolaru 7.8. vrijedi $m \leq 3n-6$.

Ako $\overline{G}$ ima m' bridova, onda imamo

$$m + m' = |E(G)| + |E(\overline{G})| = |E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow m' = \frac{n(n-1)}{2} - m,$$

a budući da je po pretpostavci i $\overline{G}$ planaran, korolar 7.8. ponovno povlači $m' \leq 3n-6$.

Dakle

$$\left.\begin{aligned} m &\leq 3n-6 \\ \frac{n(n-1)}{2} - m &\leq 3n-6 \end{aligned}\right\} +$$

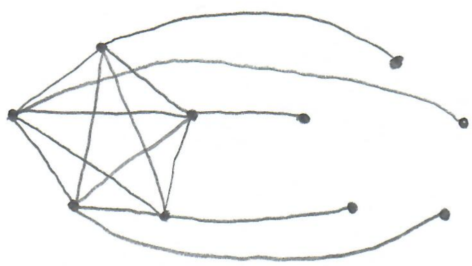
$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \leq 6n-12$$

$$\Rightarrow n^2 - 13n + 24 \leq 0$$

Posljednja jednakost nije ispunjena ni za koji $n \geq 10$. Kontradikcija, dakle takav graf ne postoji.

2) Točno

Na, primjer, za graf G



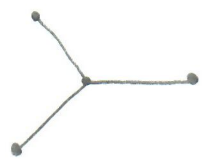
Uočimo da G i $\overline{G}$ oba sadrže podgraf homeomorfan s K_5 pa po teoremu Kuratowskog niti jedan od tih grafova nije planaran.

3) Netočno

Svaki planaran graf ima vrh stupnja ne većeg od 5 (teorem 7.10).

4) Netočno

Jedan mogući protuprimjer su grafovi



i

.