DISKRETNA MATEMATIKA 1
Zimski ispitni rok (15.2.2021.)
– RJEŠENJA ZADATAKA i KOMENTARI –

Pitanje **1**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 8,00

U svakom pitanju točan odgovor nosi 2 boda, netočan -0.66, a neodgovoreno pitanje ili odgovor Ne znam 0 bodova.

a) Zadane su funkcije $f_1(x) = \dfrac{1}{1-2x}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1+2x}$, $f_3(x) = \dfrac{2}{2-x}$, $f_4(x) = \dfrac{2}{2+x}$. Od ponuđenih funkcija, obična funkcija izvodnica niza $a_n = 2^{-n}$, $n \geqslant 0$, je

- ☒ f_3
- ○ f_4
- ○ f_1
- ○ Ne znam (0 bodova)
- ○ f_2

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x} = f_3(x)$$

b) Zadane su funkcije $g_1(x) = e^{2x}$, $g_2(x) = e^{-2x}$, $g_3(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, $g_4(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$. Od ponuđenih funkcija, eksponencijalna funkcija izvodnica niza $a_n = 2^n$, $n \geqslant 0$, je

- ○ g_4
- ○ Ne znam (0 bodova)
- ○ g_2
- ☒ g_1
- ○ g_3

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x} = g_1(x)$$

c) Zadani su nizovi $a_n = \dfrac{\ln^n 2}{n!}$, $b_n = \ln^n 2$, $c_n = \dfrac{(-1)^n \ln^n 2}{n!}$, $d_n = (-1)^n \ln^n 2$, $n \geqslant 0$. Od ponuđenih nizova, niz čija je obična funkcija izvodnica $f(x) = 2^{-x}$ je

- ○ Ne znam (0 bodova)
- ○ (d_n)
- ○ (b_n)
- ○ (a_n)
- ☒ (c_n)

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{2^{-0}(-\ln 2)^n}{n!} = \frac{(-1)^n \ln^n 2}{n!} = c_n$$

d) Od ponuđenih nizova iz c) dijela, niz čija je eksponencijalna funkcija izvodnica $f(x) = 2^x$ je

- ○ (d_n)
- ☒ (b_n)
- ○ (c_n)
- ○ Ne znam (0 bodova)
- ○ (a_n)

$$f^{(n)}(0) = 2^0 \ln^n 2 = \ln^n 2 = b_n$$

Pitanje **2**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 8,00

Koliko različitih riječi (nizova slova) duljine 7 možemo sastaviti od slova riječi NARANČA?

420

(2 boda)

Koliko različitih riječi (nizova slova) duljine 6 možemo sastaviti od slova riječi NARANČA?

420

(3 boda)

Koliko različitih riječi (nizova slova) duljine 5 možemo sastaviti od slova riječi NARANČA?

250

(3 boda)

EFI:

$$f(x) = \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)(1+x)^2$$

$$= \frac{1}{12}x^7 + \frac{7}{12}x^6 + \frac{25}{12}x^5 + \frac{19}{4}x^4 + \frac{43}{6}x^3 + 7x^2 + 4x + 1$$

$$a_7 = 7!\,\langle x^7\rangle f(x) = 7!\cdot\frac{1}{12} = 420$$

$$a_6 = 6!\,\langle x^6\rangle f(x) = 6!\cdot\frac{7}{12} = 420$$

$$a_5 = 5!\,\langle x^5\rangle f(x) = 5!\cdot\frac{25}{12} = 250$$

Pitanje **3**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 8,00

Zadana je rekurzivna relacija

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n \cdot 3^n, \quad n \geqslant 2.$$

a) Zadani su nizovi $a_n^H = \lambda \cdot 3^n + \mu \cdot 3^{-n}$, $b_n^H = (\lambda n + \mu) \cdot 3^n$, $c_n^H = \lambda \cdot 3^n + \mu \cdot 9^n$, $d_n^H = (\lambda n^2 + \mu n) \cdot 3^n$, $n \geqslant 0$, pri čemu su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Od ponuđenih nizova, opće rješenje pripadne homogene relacije dano je nizom

- [x] (b_n^H)
- [ ] (d_n^H)
- [ ] Ne znam (0 bodova)
- [ ] (c_n^H)
- [ ] (a_n^H)

Karakteristična jednadžba: $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 3$

$\Rightarrow$ opće rješenje: $\lambda n \cdot 3^n + \mu \cdot 3^n = (\lambda n + \mu)3^n = b_n^H$

(2 boda za točan odgovor, -0.66 za netočan, 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

b) Ako je $a_n^P = \dfrac{An^3 + 3n^B}{2} \cdot 3^{n-1}$ partikularno rješenje gornje rekurzivne relacije, onda je A jednako

1

, a B je jednako

2

. **(1 bod za svaki točan odgovor; ukupno 2 boda)**

$a_n^P = (\alpha n^3 + \beta n^2)\cdot 3^n$

Uvrštavanjem u zadanu rekurzivnu relaciju dobivamo:

$a_n^P = \left(\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2}\right)\cdot 3^n = \frac{n^3 + 3n^2}{2}\cdot 3^{n-1} \Rightarrow A = 1,\ B = 2$

c) Neka je $(a_n)_{n\geqslant 0}$ jedno rješenje zadane rekurzivne relacije. Ako je $a_0 = 2$ i $a_1 = 3$, onda je $a_{20} = \alpha \cdot 3^{20}$ i $a_{23} = \beta \cdot 3^{24}$, pri čemu je α jednako

1502

, a β je jednako

752

. **(2 boda za svaki točan odgovor; ukupno 4 boda)**

$a_n = A\cdot 3^n + B\cdot n\cdot 3^n + \frac{1}{2}(n^3 + 3n^2)\cdot 3^{n-1}$

$\left.\begin{array}{l} a_0 = 2 \\ a_1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 2,\ B = -\frac{5}{3}$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2}(n^3 + 3n^2 - 10n + 12)\cdot 3^{n-1}$

$a_{20} = 4506 \cdot 3^{19} = 1502 \cdot 3^{20} \Rightarrow \alpha = 1502$

$a_{23} = 6768 \cdot 3^{22} = 752 \cdot 3^{24} \Rightarrow \beta = 752$

Pitanje **4**

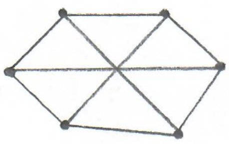
Nije još odgovoreno

Broj bodova od 8,00

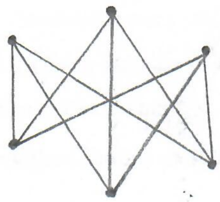
Grafovi G_1, G_2, G_3 zadani su svojim matricama susjedstva A, B, C redom

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

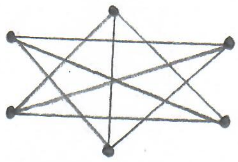
G_1



G_2



G_3



Koji su od grafova G_1, G_2 i G_3 izomorfni?

- Izomorfni su grafovi G_1 i G_3.
- Izomorfni su grafovi G_1 i G_2.
- Nikoja dva grafa nisu izomorfna.
- Ne znam (0 bodova)
- Izomorfni su grafovi G_2 i G_3.
- Sva tri grafa su izomorfna.

(4 boda za točan odgovor, -1 za netočan, 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

Koji su od grafova G_1, G_2 i G_3 bipartitni?

- G_1 i G_2.
- G_2 i G_3.
- Sva tri grafa su bipartitna.
- Samo G_2.
- Ne znam (0 bodova)

$G_1 \cong G_2 \cong K_{3,3}$

G_3 ima ciklus duljine 3

(4 boda za točan odgovor, -1.33 za netočan, 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

Pitanje **5**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 8,00

Zadan je kotač W_{43} s 43 vrha.

Koliko mu najmanje bridova treba dodati kako bi on postao eulerovski graf?

21

W_{43} ima 42 vrha neparnog stupnja pa minimalno treba dodati 21 brid (npr. dijagonale vanjskog ciklusa).

(4 boda)

Dodijelimo li originalnim bridova tog grafa težinu $w(e) = 2$, a dodanim bridovima težinu $w(f) = 3$, kolika je duljina ture koja je rješenje kineskog problema poštara?

231 $= 84 \cdot 2 + 21 \cdot 3$

(4 boda)

Pitanje **6**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 8,00

Graf G je zadan kao komplement 5-dimenzionalne kocke, $\overline{Q_5}$.

Koliko G ima bridova?

416

$$|E(\overline{Q_5})| = |E(K_{32})| - |E(Q_5)| = \frac{32 \cdot 31}{2} - 2^4 \cdot 5 = 416$$

(3 boda)

Graf G je hamiltonovski **(2 boda za točan odgovor, -2 za netočan, 0 ako nije odgovoreno)**, zato jer

- ○ je provedena iscrpna pretraga u kojoj nije nađen hamiltonovski ciklus i to je prikazano na papirima.
- ○ G nije planaran, pa ne može biti ni hamiltonovski.
- ○ Ne znam (0 bodova)
- ☒ su ispunjeni uvjeti Diracovog teorema.
- ○ je G bipartitan s parnim brojem vrhova.

Za svaki $v \in V(\overline{Q_5})$:

$$\deg(v) = 31 - 5 = 26 \geq \frac{2^5}{2} = 16$$

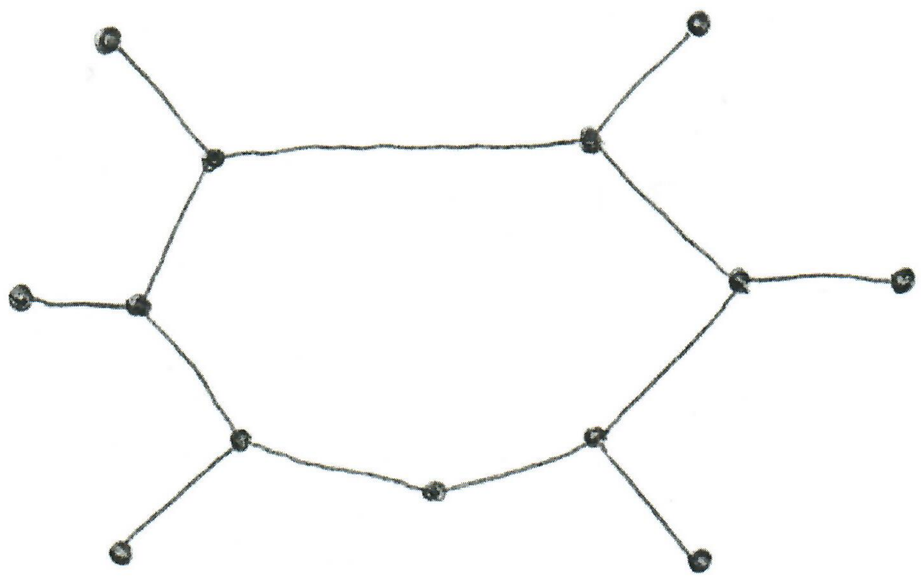
(3 boda za točan odgovor, -1 za netočan, 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

Pitanje **7**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 3,00

Graf G je zadan na sljedećoj slici.



Odredite broj razapinjućih stabala od G.

7

(3 boda)

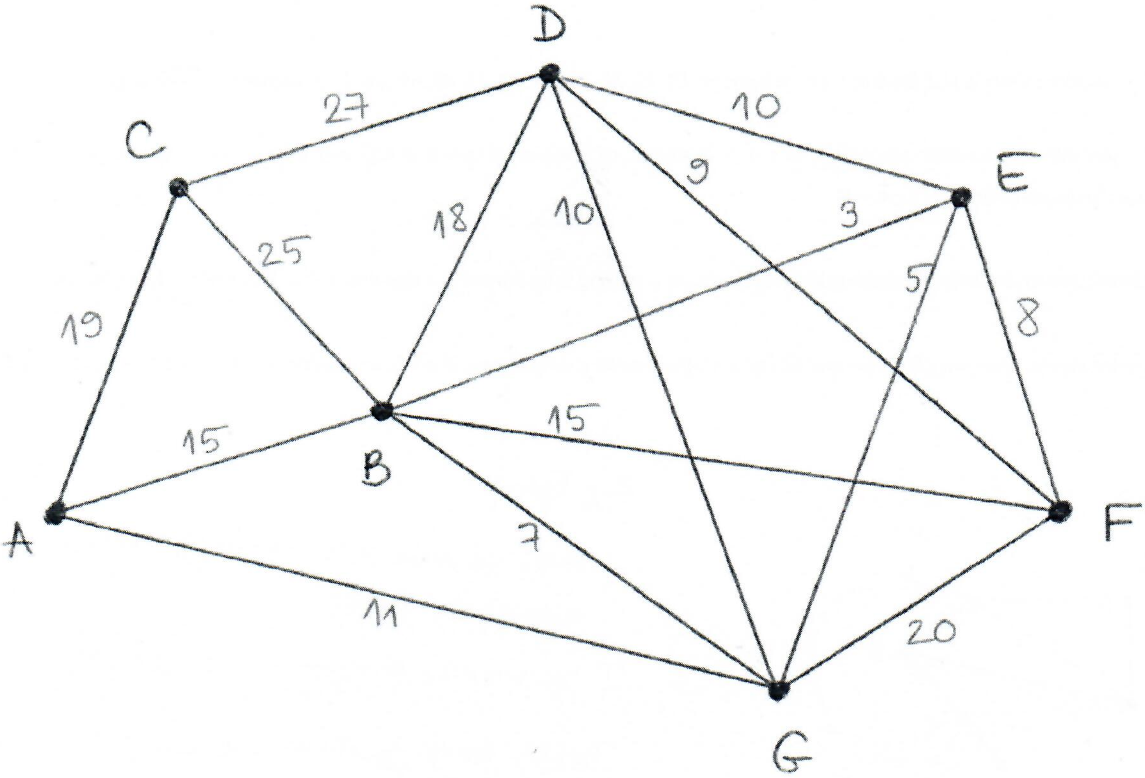
Ciklus C_7 ima 7 razapinjućih stabala, a ostali vrhovi su listovi pa njihovi susjedni bridovi moraju biti sadržani u svakom razapinjućem stablu.

Pitanje **8**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 5,00

Zadan je težinski graf na sljedećoj slici.



Na zadanom grafu provodimo Kruskalov algoritam za nalaženje minimalnog razapinjućeg stabla.

Koji brid odabiremo: (upišite odgovore kao dva velika slova bez razmaka, na primjer, *XY*)

- u prvom koraku algoritma?

  BE

  (1 bod)
- u trećem koraku algoritma?

  EF

  (1 bod)
- u zadnjem koraku algoritma?

  AC

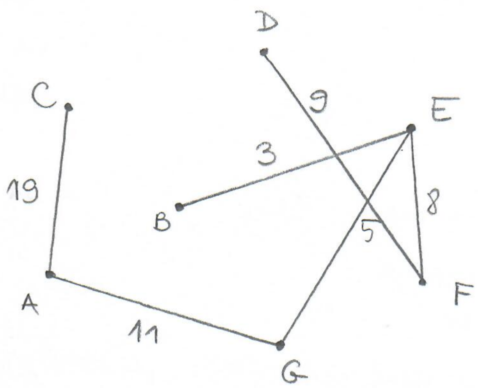
  (1 bod)

Koja je ukupna težina dobivenog minimalnog razapinjućeg stabla?

55 $= 3+5+8+9+11+19$

(2 boda)

Kruskalov algoritam daje rješenje



(1°) BE (3)

(2°) EG (5)

(3°) EF (8)

(4°) DF (9)

(5°) AG (11)

(6°) AC (19)

Pitanje **9**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 8,00

Odredite istinitost sljedećih tvrdnji. Za svaku od tvrdnji točan odgovor nosi 2 boda, netočan -2 boda, a neodgovoreno pitanje 0 bodova.

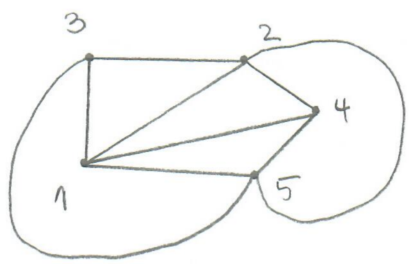
1) Graf G sa skupom vrhova *{1,2,3,4,5,6}* i nizom bridova *13, 15, 21, 24, 26, 23, 41, 45, 61, 63, 65* je planaran. Točno

2) Ako je G jednostavan povezan planaran graf s $n \geqslant 3$ vrhova, m bridova i f strana za koji vrijedi $m = 3n - 6$, tada je svaka strana omeđena trokutom bridova. Točno

3) Postoji jednostavan povezan planaran graf G čiji je stupanj svakog vrha barem 3, a koji ima točno 7 bridova. Netočno

4) Postoji jednostavan povezan planaran graf G čiji je stupanj svakog vrha barem 3, a koji ima točno 30 bridova i 11 strana. Netočno

1) Točno



2) Točno

Graf ne može biti stablo jer bismo u suprotnom imali:

$m = n-1, \; m = 3n-6 \Rightarrow 2n = 5.$

Dakle, svaka je strana omeđena s barem tri brida.

Prema Eulerovoj formuli:

$n - m + f = 2$

$\Rightarrow 3n-6 = 3(m-f+2)-6 = 3m-3f$

$\Rightarrow m = 3m-3f \Rightarrow 3f = 2m$

Ako bi bilo koja strana bila omeđena s više od 3 brida, onda bi vrijedilo $2m > 3f$.

Dakle, zbog $3f = 2m$ je svaka strana omeđena s 3 brida.

3) Netočno

Pretpostavimo $m = 7$. Prema lemi o rukovanju

$3n \leq 2m,$

a budući da je graf jednostavan, povezan i planaran

$3f \leq 2m.$

Uvrstimo $m = 7$ i dobijemo

$\left.\begin{array}{l} n \leq \frac{2}{3}m = \frac{14}{3} \\ f \leq \frac{2}{3}m = \frac{14}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow n, f \leq 4$ jer su to prirodni brojevi

Uvrstimo u Eulerovu formulu:

$2 = n - m + f \leq 4 - 7 + 4 = 1 \quad \Rightarrow\Leftarrow$

4) Netočno

Prema lemi o rukovanju

$3n \leq 2m = 60 \Rightarrow n \leq 20$

G je planaran, jednostavan i povezan pa iz Eulerove formule slijedi

$n - m + f = 2$

$\Rightarrow n = m - f + 2$

$= 30 - 11 + 2 = 21$

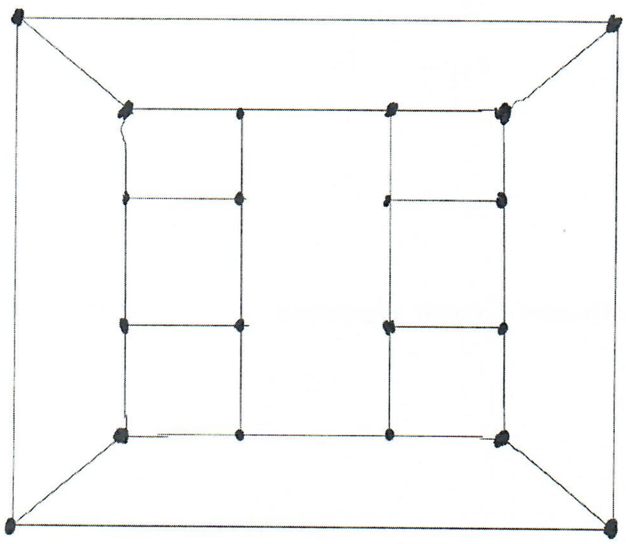
$\Rightarrow\Leftarrow$

Pitanje **10**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 8,00

Dan je graf G na sljedećoj slici.



Odredite kromatski broj $\chi(G)$ grafa G.

2

(1 bod)

Obrazložite svoj odgovor.

○ $\Delta + 1 = 4.$

○ Dvije boje su dovoljne i jedno 2-bojanje je priloženo u papirima.

○ Koristimo teorem koji govori da je svaki graf 6-obojiv.

○ Koristimo Brooksov teorem.

○ Ne znam (0 bodova)

○ $\Delta + 2 = 5.$

(1 bod za točan odgovor, -0.25 za netočan, 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

Odredite minimalni broj boja k da bi graf G bio k-strano obojiv.

3

(1 bod)

Obrazložite svoj odgovor.

○ G je kubična karta i svaka je strana omeđena parnim brojem bridova. Teorem 8.9.

○ G je bipartitan graf.

○ G je eulerovski graf.

○ Ne znam (0 bodova)

○ Svaka karta je 4-strano obojiva.

○ G nije bipartitan graf.

(2 boda za točan odgovor, -0.5 za netočan, 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

Odredite kromatski indeks $\chi'(G)$ grafa G.

3

(1 bod)

Obrazložite svoj odgovor.

○ Koristimo Vizingov teorem.

☒ G je bipartitan i kubični graf. Königov teorem (teorem 8.13.)

○ G nije bipartitan graf, ali je kubični.

○ Ne znam (0 bodova)

○ $\Delta + 2 = 5.$

○ G je bipartitan pa je i $L(G)$ bipartitan.

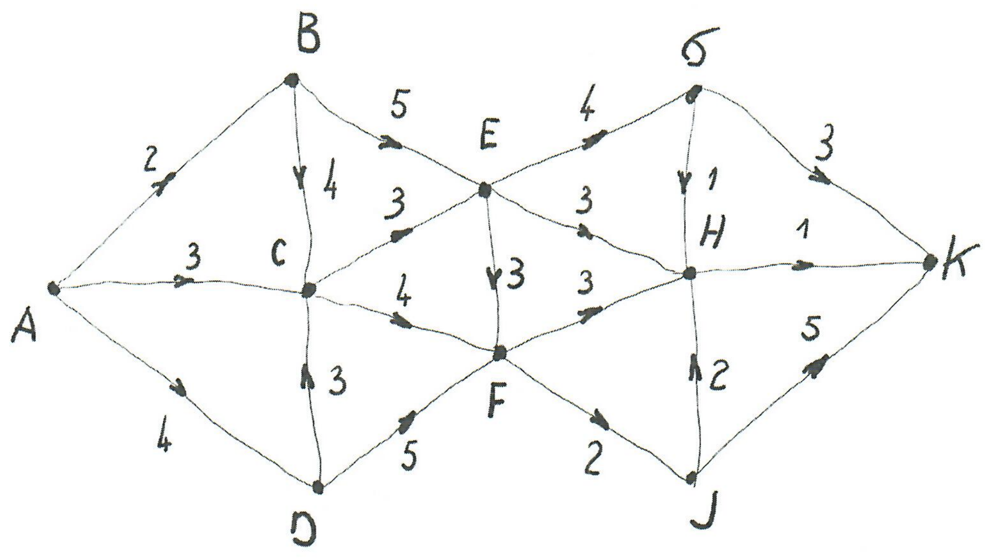
(2 boda za točan odgovor, -0.5 za netočan, 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

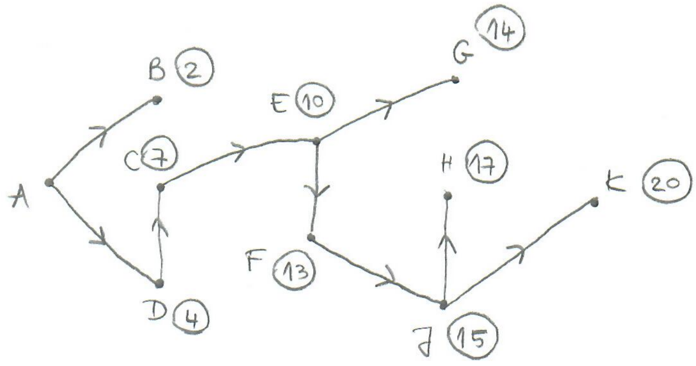
Pitanje **11**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 8,00

Dana je mreža aktivnosti na sljedećoj slici.





Odredite duljinu pripadnog kritičnog puta.

20

(4 boda)

Koliko minimalno lukova trebamo dodati da bi dani digraf postao turnir?

26 $= \binom{10}{2} - 19 = 45 - 19$

(4 boda)