Ispit iz Diskretne matematike 1
15.9.2020.

1. **(8 bodova)** Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Dokažite da funkcija izvodnica niza binomnih koeficijenata,

$$a_n = \binom{\alpha}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

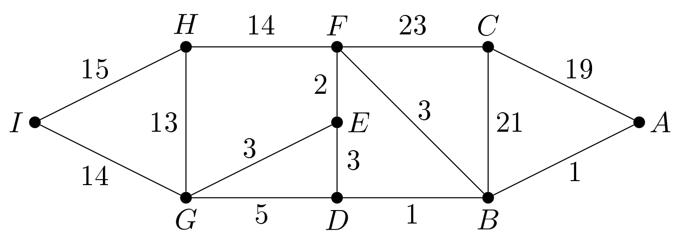
glasi $f(x) = (1+x)^\alpha$.

2. **(8 bodova)** Riješite rekurzivnu relaciju

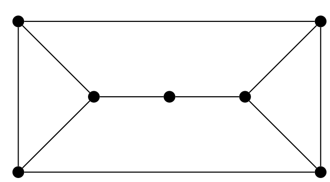
$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} + 8n, \quad n \geqslant 3,$$

uz početne uvjete $a_0 = 2$, $a_1 = 13$, $a_2 = 23$.

3. **(8 bodova)** Nađite stablo najkraćih putova od vrha A na grafu sa slike. Algoritam obavezno provedite!



4. **(8 bodova)** Graf G je zadan na sljedećoj slici



(a) Odredite kromatski broj od G.

(b) Odredite kromatski indeks od G.

5. **(8 bodova)**

(a) Definirajte tranzitivan turnir.

(b) Dokažite da je turnir tranzitivan ako i samo ako ne sadrži ciklus.

(c) Koliko ima tranzitivnih turnira s 4 vrha? Obrazložite svoj odgovor.

6. **(8 bodova)** Nadopunite zadani latinski pravokutnik do latinskog kvadrata.

1	2	3	4	5	6
4	6	2	1	3	5
2	3	5	6	1	4

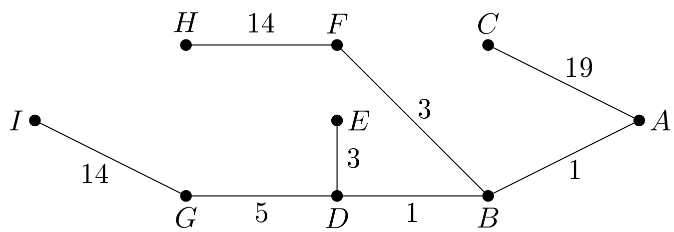
Ispit se piše 150 minuta. Korištenje kalkulatora niti formula nije dozvoljeno. Sretno!

Rješenja

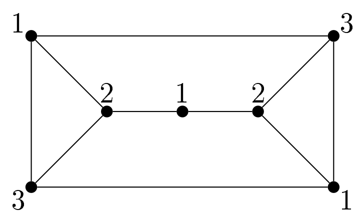
1. Skripta, str. 12, primjer 1.2.

2. $a_n = 10 - 9 \cdot 2^n + 3^n + 2n^2 + 16n$.

3. Dijkstrinim algoritmom dobivamo stablo najkraćih putova od vrha A na slici:

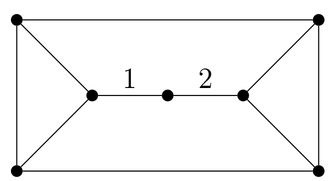


4. **(a)** Budući da u G postoji ciklus duljine 3, za njegov kromatski broj vrijedi $\chi(G) \geqslant 3$. Jedno 3-bojanje vrhova tog grafa je dano na donjoj slici pa zaključujemo da je $\chi(G) = 3$.

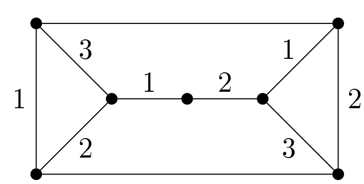


(b) Budući da je najveći stupanj nekog vrha grafa G jednak $\Delta = 3$, prema Vizingovom teoremu slijedi $\Delta = 3 \leqslant \chi'(G) \leqslant 4 = \Delta + 1$.

Pokušajmo naći neko 3-bojanje bridova. Najprije ćemo obojati dva "središnja" brida grafa:



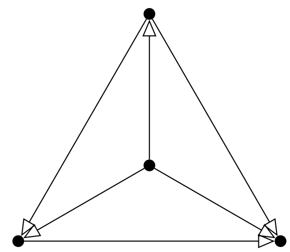
Zatim obojimo sve bridove koji s prethodna dva imaju zajednički vrh te dva "vertikalna" brida (tu ćemo morati uvesti treću boju):



Neovisno o načinu bojanja, vidimo da dva preostala brida imaju zajednički vrh s bridovima svih dosad korištenih boja. Zato njih moramo obojati četvrtom bojom pa slijedi $\chi'(G) = 4$.

5. (a), (b) Skripta, str. 180, zadatak 9.6.

(c) Do na izomorfizam postoje 4 takva turnira, od čega je samo jedan tranzitivan (svi ostali sadrže cikluse).



6.

1	2	3	4	5	6
4	6	2	1	3	5
2	3	5	6	1	4
5	4	1	2	6	3
3	1	6	5	4	2
6	5	4	3	2	1