

Završni ispit iz Diskretne matematike 1
3.2.2020.

1. (8 bodova)

- (a) Nacrtajte stablo čiji je Prüferov kod $(6, 6, 4, 4, 2)$.
- (b) Nacrtajte stablo čiji je Prüferov kod $(7, 7, 5, 5, 3)$.
- (c) Jesu li stabla iz (a) i (b) podzadatka (nakon uklanjanja oznaka vrhova) izmorfna? Obrazložite svoj odgovor.

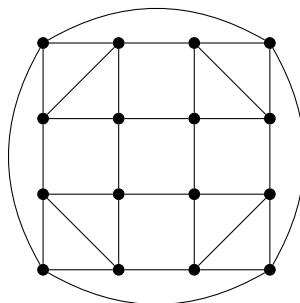
2. (8 bodova) Neka je G povezan planaran graf struka k , $k \geq 3$. Dokažite nejednakost

$$m \leq \frac{k}{k-2}(n-2),$$

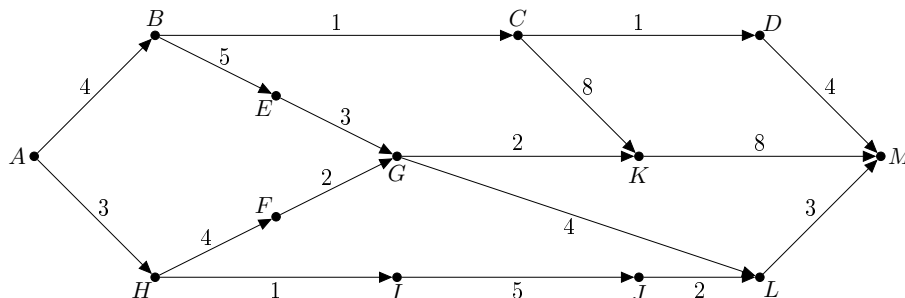
gdje je m broj bridova, a n broj vrhova grafa G .

3. (8 bodova) Dokažite da je svaki jednostavni planarni graf 5-obojev.

4. (8 bodova) Graf G je zadan na sljedećoj slici:



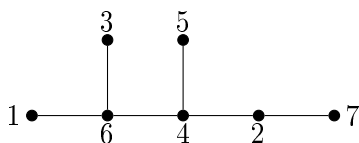
- (a) Odredite kromatski broj od G .
 - (b) Odredite minimalni k takav da je G k -strano obojev.
 - (c) Odredite kromatski indeks od G .
- 5. (8 bodova)** Zagrebačka informatička tvrtka provodi aktivnosti jednog projekta u 13 međusobno zavisnih etapa. Odnosi među etapama i duljina trajanja u mjesecima opisani su usmjerenim grafom na donjoj slici.
- (a) Za koliko će mjeseci završiti projekt?
 - (b) Prema projekcijama voditelja projekta, najizazovnija je provedba etape JL . Za koliko se mjeseci može produljiti trajanje etape JL , a da se ukupno trajanje projekta ne poveća?



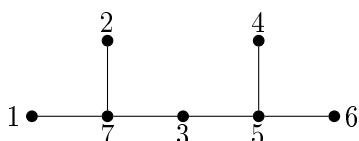
Ispit se piše 120 minuta. Korištenje kalkulatora niti formula nije dozvoljeno. Sretno!

Rješenja

1. (a)



(b)



(c) Dobivena stabla nisu izomorfna. Na primjer, u prvom stablu su oba vrha stupnja 3 susjedna, dok u drugom nisu.

2. Neka je f broj strana grafa. Budući da je svaka strana grafa omeđena s barem k bridova, slijedi

$$kf \leq 2m \Rightarrow f \leq \frac{2m}{k}.$$

Sada iz dobivene nejednakosti i Eulerove formule slijedi

$$-n + m + 2 = f \leq \frac{2m}{k} \Rightarrow m - \frac{2m}{k} \leq n - 2,$$

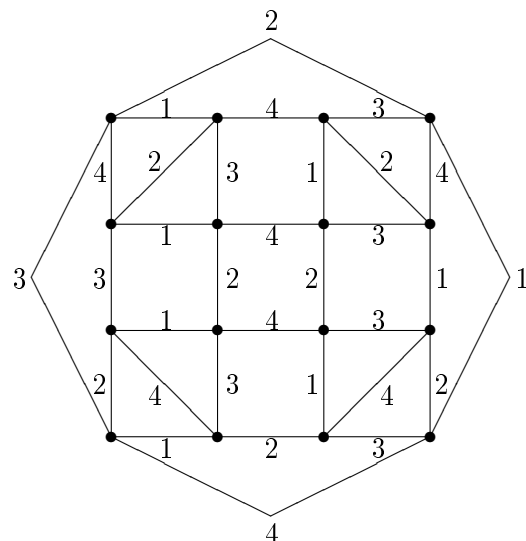
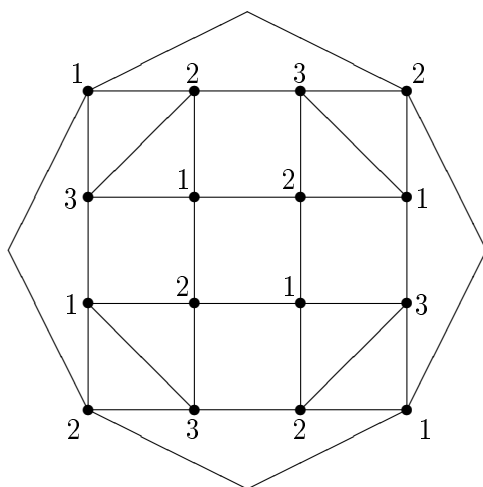
odakle sređivanjem dobivamo traženu nejednakost.

3. Skripta, str. 156, teorem 8.4.

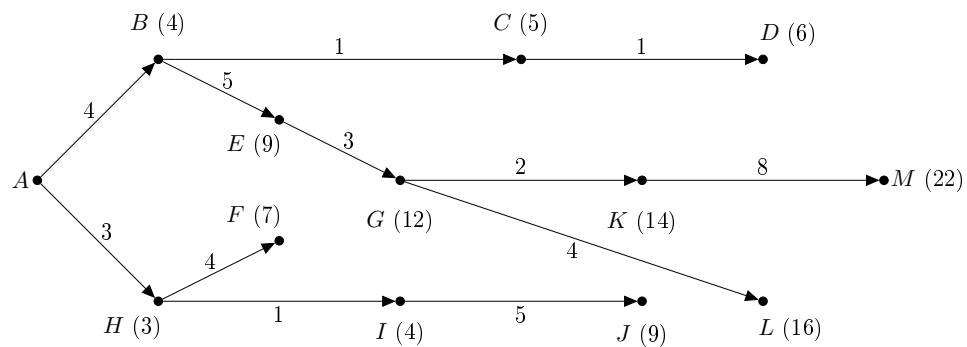
4. (a) Prema Brooksovom teoremu vrijedi $\chi(G) \leq 4$. Graf G nije 2-obojev (sadrži cikluse duljine 3 pa ne može biti bipartitan), no jedno moguće 3-bojanje tog grafa dano je na donjoj slici lijevo. Dakle, $\chi(G) = 3$.

(b) Budući da je graf G eulerovski, slijedi $k = 2$.

(c) Prema Vizingovom je teoremu $4 \leq \chi'(G) \leq 5$. Jedno moguće 4-bojanje bridova tog grafa je dano na donjoj slici desno pa slijedi $\chi'(G) = 4$.



5. (a) Kritični put za zadani graf je dan na sljedećoj slici:



Ukupno trajanje projekta je 22 mjeseca.

- (b) Imamo $l(M) - l(L) - w(LM) = 3$ pa se vrijednost $l(L)$ može povećati za 3 mjeseca, te $(l(L) + 3) - l(J) - w(JL) = 8$ pa se trajanje etape JL može povećati za 8 mjeseci.