

Ispit iz Diskretne matematike 1
13. 7. 2021.

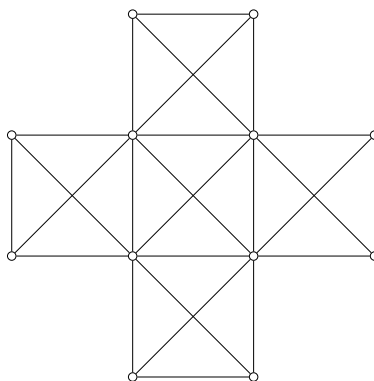
1. (8 bodova) Bacamo 5 različitih igračih kocaka. Na koliko načina zbroj dobivenih brojeva može biti 18?
2. (8 bodova) Nađite homogenu linearnu rekurzivnu relaciju s konstantnim koeficijentima za niz realnih brojeva $(a_n)_{n \geq 0}$ čije je opće rješenje dano sa

$$a_n = \alpha + \beta(-1)^n - \gamma n(-1)^n.$$

Odredite konstante α , β i γ ako još vrijedi:

$$a_0 = 7, \quad a_1 = 6, \quad a_2 = -3.$$

3. (8 bodova) Iskažite i dokažite Eulerov teorem koji karakterizira postojanje zatvorene staze koja prolazi svakim bridom zadanog grafa.
4. (8 bodova) Ispitajte je li graf sa slike planaran. Ako je, odredite mu broj strana u nekom planarnom prikazu. Ako nije, pronađite neki njegov podgraf koji je homeomorfan s K_5 ili $K_{3,3}$.



5. (8 bodova) Neka je G zadan kao kocka dimenzije 2021, Q_{2021} . Odredite kromatski broj $\chi(G)$ i kromatski indeks $\chi'(G)$ te dokažite svoje tvrdnje.
6. (8 bodova) Definirajte usmjerivi graf. Iskažite neki teorem koji karakterizira usmjerive grafove. Ispitajte koji su od sljedećih grafova usmjerivi:
 - (a) kotač W_{10} ,
 - (b) potpuni bipartitni graf $K_{3,8}$,
 - (c) stablo s Prüferovim kodom $(2, 3, 2, 4, 4, 2)$.

Obrazložite sve svoje odgovore.

Ispit se piše 150 minuta. Korištenje kalkulatora niti formula nije dozvoljeno. Sretno!

Rješenja

1. Pripadna funkcija izvodnica problema glasi

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^5 = x^5 \left(\frac{1 - x^6}{1 - x} \right)^5 = x^5 (1 - x^6)^5 (1 - x)^{-5} \\ &= x^5 (1 - 5x^6 + 10x^{12} - 10x^{18} + 5x^{24} - x^{30})^5 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^k. \end{aligned}$$

Tražimo

$$\langle x^{18} \rangle f(x) = \binom{13+4}{4} - 5 \binom{7+4}{7} + 10 \binom{1+4}{1} = 780.$$

2. Uočimo da iz uvjeta zadatka za pripadnu karakterističnu jednadžbu tražene rekurzivne relacije vrijedi da je $x_1 = 1$ njena nultočka kratnosti 1, a $x_2 = -1$ je nultočka kratnosti 2. Zato karakteristična jednadžba glasi $(x - 1)(x + 1)^2 = 0$ pa je tražena rekurzivna relacija

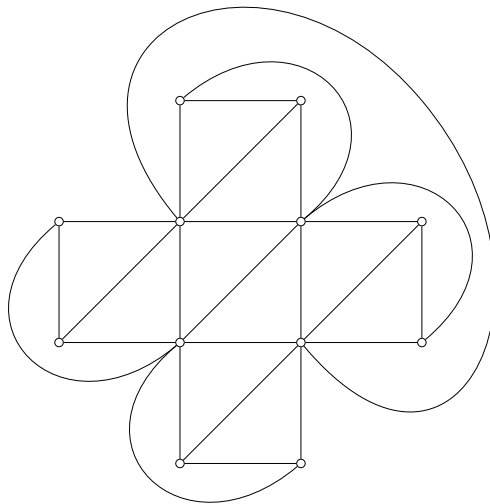
$$a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Nadalje, uvrštavanjem zadanih vrijednosti u opće rješenje te rekurzije dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 7 \\ \alpha - \beta + \gamma & = 6 \\ \alpha + \beta - 2\gamma & = -3 \end{cases}$$

čijim rješavanjem slijedi $\alpha = 4, \beta = 3, \gamma = 5$.

3. Skripta, str. 89, teorem 4.6.
4. Zadani graf je planaran i jedan planarni prikaz tog grafa je dan na sljedećoj slici.



Budući da taj graf ima $n = 12$ vrhova i $m = 6 \cdot 5 - 4 = 26$ bridova, prema Eulerovoj formuli slijedi da taj graf u planarnom prikazu ima $f = m - n + 2 = 16$ strana.

5. Budući da je Q_{2021} bipartitan graf, za kromatski broj tog grafa vrijedi $\chi(Q_{2021}) = 2$. Nadalje, budući da je taj graf i 2021-regularan, prema Königovom teoremu je njegov kromatski indeks jednak $\chi'(Q_{2021}) = 2021$.
6. Za definiciju i karakterizaciju usmjerivog grafa: skripta, str. 175, definicija 9.8 i teorem 9.1. Prema tom teoremu slijedi da W_{10} i $K_{3,8}$ jesu usmjerivi grafovi, dok graf iz (c) podzadatka nije usmjeriv (niti jedan brid tog grafa nije sadržan u nekom ciklusu jer je taj graf stablo).