Međuispit iz Diskretne matematike 1
25.11.2020.

1. (8 bodova) Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Odredite običnu funkciju izvodnicu niza

(a) $a_n = n^2 \binom{\alpha}{n}$, $n \geqslant 0$, **(b)** $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}$, $n \geqslant 0$.

2. (8 bodova) Izračunajte broj svih nizova duljine n, $n \in \mathbb{N}_0$, s elementima u skupu $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ koji imaju paran broj nula i neparan broj jedinica.

3. (8 bodova)

(a) Odredite homogenu rekurzivnu relaciju čije je opće rješenje

$$\alpha \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2} \right)^n, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(b) Dokažite da je

$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2} \right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2} \right)^n$$

neparan prirodan broj za sve $n \in \mathbb{N}$.

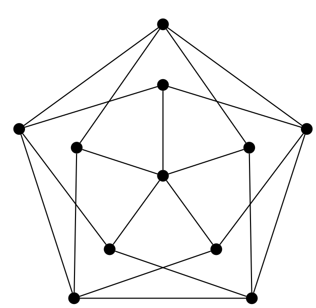
4. (8 bodova) Graf G_1 zadan je svojom matricom susjedstva A, a graf G_2 matricom incidencije B. Jesu li G_1 i G_2 izomorfni? Dokažite svoj odgovor.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. (8 bodova) Koliko najmanje bridova treba

(a) oduzeti, **(b)** dodati

Grötzschovom grafu s donje slike da bi on postao jednostavan eulerovski graf?



Ispit se piše 120 minuta. Korištenje kalkulatora niti formula nije dozvoljeno. Sretno!

Rješenja

1. (a) Uzastopnim deriviranjem formule za razvoj u binomni red i množenjem sa x dobivamo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha x(1+\alpha x)(1+x)^{\alpha-2}.$$

(b) Uočimo da je niz (b_n) konvolucija nizova (c_n) i (d_n), gdje je

$$c_n = 1,\ d_n = \binom{\alpha}{n}, \quad n \geqslant 0.$$

Budući da funkcije izvodnice nizova (c_n) i (d_n) redom glase $g_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$ i $g_2(x) = (1+x)^{\alpha}$, slijedi da je funkcija izvodnica niza (b_n)

$$g(x) = g_1(x)g_2(x) = \frac{(1+x)^{\alpha}}{1-x}.$$

2. Pripadna ekeponencijalna funkcija izvodnica glasi

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^8 \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot e^{8x} = \frac{1}{4}e^{8x}(e^{2x} - e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^{10x} - e^{6x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n - 6^n}{4} \cdot \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Dakle, traženi broj takvih nizova je $\dfrac{10^n - 6^n}{4}$.

3. (a) Brojevi $\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ i $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ trebaju biti nultočke pripadne karakteristične jednadžbe pa ona glasi

$$\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 2 = 0.$$

Dakle, tražena homogena rekurzivna relacija glasi

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n,\ n \geqslant 0. \tag{1}$$

(b) Niz

$$a_n = \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n,\ n \in \mathbb{N},$$

je rješenje rekurzivne relacije (1) uz početne uvjete $a_1 = 3$, $a_2 = 13$. Korištenjem te činjenice možemo matematičkom indukcijom dokazati da su svi članovi tog niza neparni prirodni brojevi:

1) Baza indukcije
Vidimo da su $a_1 = 3$ i $a_2 = 13$ neparni prirodni brojevi.

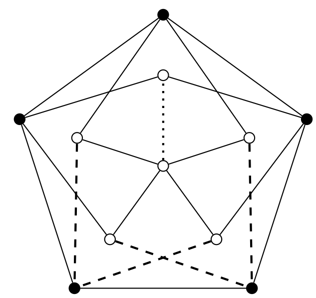
2) Korak indukcije
Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ tvrdnja vrijedi za brojeve n i $n+1$. Tada imamo

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n,$$

tj. a_{n+2} je neparan broj kao zbroj neparnog $(3a_{n+1})$ i parnog $(2a_n)$ prirodnog broja. Time je tvrdnja dokazana.

4. G_1 i G_2 nisu izomorfni grafovi. Naime, oba ta grafa imaju točno jedan vrh stupnja 1 i jedan vrh stupnja 4. Ti su vrhovi u grafu G_2 susjedni, ali u G_1 nisu.

5. **(a)** U Grötzschovom grafu je 6 vrhova neparnog stupnja (na slici označeni bijelim kružićem), a samo je jedan od njih susjedan s preostalima. Dakle, grafu svakako treba oduzeti jedan brid koji taj vrh spaja s jednim od preostalih (na slici označen istočkanom linijom). Nakon toga nam preostaju 4 vrha neparnog stupnja između kojih je moguće naći lanac duljine 2 (na slici su ti lanci označeni isprekidanim linijama). Uklanjanjem tih lanaca nismo promijenili parnost stupnjeva drugih vrhova, a spomenuta 4 vrha su postala parnog stupnja. Dakle, potrebno je oduzeti $1 + 2 + 2 = 5$ bridova.



(b) Dodavanjem bridova graf mora ostati jednostavan. Od 6 vrhova neparnog stupnja, 2 para nesusjednih vrhova možemo povezati bridom (na slici označeni istočkanim linijama), a preostala dva vrha neparnog stupnja možemo spojiti lancem duljine 2, odnosno preko nekog drugog vrha koji je već parnog stupnja (taj je lanac na slici označen isprekidanim linijama). Ukupno treba dodati $2 + 2 = 4$ brida.