Ispit iz Diskretne matematike 1
17.2.2020.

1. (8 bodova) Odredite broj cjelobrojnih rješenja nejednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 25$$

uz uvjet $2 \leqslant x_i \leqslant 16$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

2. (8 bodova) Odredite rješenje rekurzije

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

uz početne uvjete $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 15$.

3. (8 bodova)

(a) Koliko različitih hamiltonovskih ciklusa ima potpun bipartitni graf $K_{11,11}$?

(b) Koliko potpunih sparivanja ima potpun bipartitni graf $K_{11,11}$?

4. (8 bodova)

(a) Ako je $(1, 1, \ldots, 1, 2, 3, 4, 5)$ niz stupnjeva stabla, koliko listova ima to stablo?

(b) Ako je najveći stupanj vrha u stablu jednak 2, dokažite da je to stablo lanac.

(c) Ako stablo ima vrh stupnja k, dokažite da to stablo ima barem k listova.

5. (8 bodova)

(a) Iskažite i dokažite Eulerovu formulu.

(b) Koliko vrhova ima planaran graf čije su strane 10 trokuta i 7 četverokuta?

6. (8 bodova) Koliko najmanje bridova treba oduzeti potpunom grafu K_{2r+1}, $r \geqslant 2$, da bi za dobiveni graf G vrijedilo $\chi'(G) = 2r - 2$?

Ispit se piše 150 minuta. Korištenje kalkulatora niti formula nije dozvoljeno. Sretno!

Rješenja

1. Pripadna funkcija izvodnica glasi

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + x^3 + \ldots + x^{16})^4 (1 + x + x^2 + \ldots) \\ &= x^8 \cdot \left(\frac{1 - x^{15}}{1 - x} \right)^4 \cdot \frac{1}{1 - x} \\ &= x^8 (1 - x^{15})^4 (1 - x)^{-5} \\ &= x^8 (1 - 4x^{15} + 6x^{30} - 4x^{45} + x^{60}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5 + k - 1}{k} x^k. \end{aligned}$$

Tražimo

$$\langle x^{25} \rangle f(x) = \binom{5 + 17 - 1}{17} - 4 \cdot \binom{5 + 2 - 1}{2} = 5925.$$

2. $a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$.

3. **(a)** Fiksirajmo jedan vrh grafa $K_{11,11}$. Tada neki njegov susjed možemo odabrati na 11 načina. U idući vrh možemo doći na $11 - 1 = 10$ načina (od 11 susjeda ne brojimo vrh koji smo na početku fiksirali). U idući vrh možemo opet doći na 10 načina i tako dalje. Ovim brojanjem dobivamo ukupno $11 \cdot (10!)^2$ obilazaka vrhova, no budući da smo ovako svaki od njih brojali dvaput, ukupan broj različitih hamiltonovskih ciklusa je $\frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (10!)^2$.

(b) Neka je $\{V_1, V_2\}$ biparticija skupa vrhova grafa $K_{11,11}$ takva da $|V_1| = |V_2| = 11$ te da svaki brid tog grafa spaja neki vrh iz V_1 s nekim vrhom iz V_2. Traženi broj potpunih sparivanja jednak je broju bijekcija sa V_1 u V_2, tj. $11!$.

4. **(a)** Označimo zadano stablo sa T. Ako T ima n listova, onda je prema pretpostavci zadatka $|V(T)| = n + 4$. Sada prema lemi o rukovanju slijedi

$$\sum_{v \in V(T)} \deg(v) = n \cdot 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 2|E(T)| = 2(n + 4 - 1),$$

odakle dobivamo $n = 8$.

(b) Takvo stablo ima samo vrhove stupnja 1 i 2. Neka je k broj vrhova stupnja 2, a $n - k$ broj vrhova stupnja 1. Prema lemi o rukovanju

$$(n - k) \cdot 1 + k \cdot 2 = 2(n - 1) \Rightarrow k = n - 2,$$

odakle slijedi da zadano stablo ima $n - (n - 2) = 2$ lista, tj. to stablo je lanac.

(c) Pretpostavimo suprotno, tj. da takvo stablo ima najviše $k - 1$ listova. Tada to stablo ima barem $n - 1 - (k - 1) = n - k$ vrhova stupnja barem 2 (ne brojeći vrh stupnja k). Sada za zbroj stupnjeva svih vrhova imamo

$$2(n - 1) = \sum_{v \in V(T)} \deg(v) \geq k + (k - 1) \cdot 1 + (n - k) \cdot 2 = 2n - 1.$$

Kontradikcija.

5. **(a)** Skripta, str. 139, teorem 7.6.

(b) Neka je N broj vrhova, M bridova, F strana, a F_k broj strana tog grafa koje su k-ciklusi. Imamo

$$2M = 3F_3 + 4F_4 = 58 \Rightarrow M = 29,$$

pa prema Eulerovoj formuli slijedi

$$N = M - F - 2 = 29 - 17 + 2 = 14.$$

6. K_{2r+1} ima $\frac{1}{2}(2r+1-1)(2r+1) = r(2r+1)$ bridova. Jednom je bojom moguće obojati najviše r bridova tog grafa. Budući da za graf G vrijedi $\chi'(G) = 2r-2$, za njegov broj bridova imamo $|E(G)| = r(2r-2)$. Dakle, zadanom grafu treba oduzeti barem $r(2r+1) - r(2r-2) = 3r$ bridova.

Alternativno, znamo da je $\chi'(K_{2r+1}) = 2r+1$ te je svakom bojom obojano r bridova. Budući da je $\chi'(G) = 2r-2 = (2r+1)-3$ uklonimo bridove obojane s tri različite boje, odnosno $3r$ bridova.