**Ispit iz Diskretne matematike 1**
**7.7.2020.**

1. **(8 bodova)** Koliko riječi (nizova slova) od 4 slova možemo sastaviti od slova riječi MATEMATIKA? Pritom se slova u riječi mogu ponavljati.

2. **(8 bodova)** Riješite rekurzivnu relaciju

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = (-4n+6)\cdot 2^n + (9n^2+63n+57)\cdot 3^n, \quad n \geqslant 0,$$

uz početne uvjete $a_0 = 0$ i $a_1 = 4$.

3. **(8 bodova)** Kineski poštar raznosi pisma po 4-kocki $Q_4$ u kojoj je težina brida od vrha $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ do vrha $(b_1, b_2, b_3, b_4)$ jednaka $2^j$, gdje je $j$ indeks za koji je $a_j \neq b_j$ (na primjer, duljina brida od $(1,0,1,0)$ do $(1,0,0,0)$ je jednaka $2^3 = 8$). Zbog izbijanja epidemije koronavirusa u bridu koji spaja vrhove $(0,0,0,0)$ i $(0,0,0,1)$, taj je brid u karanteni i poštar ga mora zaobići. Koliki je minimalni put koji poštar mora prijeći? *Napomena:* Ne morate koristiti Dijsktrin algoritam.

4. **(8 bodova)** U Clarkeovom dokazu Cayleyjevog toerema, broj svih obilježenih stabala s $n$ vrhova jednak je

$$T(n) = T(n,1) + T(n,2) + \ldots + T(n,n-1).$$

   **(a)** Definirajte $T(n,k)$.
   **(b)** Napišite izraz za $T(n, n-1)$.
   **(c)** Odredite $T(4)$, $T(4,1)$, $T(4,2)$ i $T(4,3)$.

5. **(8 bodova)** Unutar trokuta danog vrhovima $A_1$, $A_2$ i $A_3$ te bridovima $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ i $\overline{A_3A_1}$ dano je još $n-3$ točaka, $A_4, A_5 \ldots, A_n$. Točke spajamo dužinama tako da se niti jedne dvije dužine ne sijeku te da su sva dobivena područja unutar zadanog trokuta ponovno trokuti. Koliko još dužina moramo povući? Dokažite da taj broj ne ovisi o načinu povlačenja dužina.

6. **(8 bodova)**

   **(a)** Neka je $P$ lanac $M_1D_1M_2D_2M_3D_3M_4D_4M_5D_5M_6D_6M_7$, gdje slova $M$ predstavljaju mladiće, a slova $D$ djevojke. Koliko postoji potpunih sparivanja? Popišite ih.
   **(b)** U skupu od sedam djevojki, $D_1, \ldots, D_7$, i sedam mladića, $M_1, \ldots, M_7$, djevojka $D_i$ poznaje mladića $M_j$ ako i samo ako je $|i-j|$ neparan broj. Ima li ovaj ženidbeni problem rješenje?

*Ispit se piše 150 minuta. Korištenje kalkulatora niti formula nije dozvoljeno. Sretno!*

## Rješenja

**1.** Pripadna (eksponencijalna) funkcija izvodnica glasi

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)^2(1+x)^3 \\ &= \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)\left(1+2x+2x^2+x^3+\frac{1}{4}x^4\right)(1+3x+3x^2+x^3) \end{aligned}$$

Tražimo

$$4!\cdot\langle x^4\rangle f(x) = 4!\cdot\left(\frac{45}{4}+14+\frac{11}{2}+\frac{5}{6}\right) = 4!\cdot\frac{379}{12} = 758.$$

**2.** $a_n = 2^n - 3^n + n^2\cdot 2^n + n^3\cdot 3^n$.

**3.** Kocka $Q_4$ bez brida između vrhova $(0,0,0,0)$ i $(0,0,0,1)$ je skoro eulerovski graf pa je potrebno dući duljinu najkraćeg puta između tih dvaju vrhova. Uočimo da na tom putu moramo barem jednom prijeći od vrha sa zadnjom koordinatom 0 do vrha sa zadnjom koordinatom 1 (i duljina tog brida jednaka je 16). Ostatak tog puta pokušajmo prijeći preko bridova minimalne duljine, tj. duljine 2. Tako dobivamo obilazak $(0,0,0,0)-(1,0,0,0)-(1,0,0,1)-(0,0,0,1)$ čija je duljina $4+16=20$.

Nadalje, u zadanom grafu imamo $4\cdot 2^3-1=31$ brid, od toga $2^3=8$ bridova duljine 2, $2^3=8$ bridova duljine 4, $2^3=8$ bridova duljine 8 i $2^3-1=7$ bridova duljine 16. Dakle, zbroj duljina svih bridova u grafu je $8\cdot(2+4+8)+7\cdot 16=224$ pa je ukupna duljina poštareva puta jednaka $224+20=244$.

**4.** **(a)** $T(n,k)$ je broj obilježenih stabala sa $n$ vrhova u kojima je istaknuta labela pridružena vrhu stupnja $k$.

**(b)** $T(n,n-1)=1$ (postoji samo jedno obilježeno stablo kod kojeg je istaknuta labela pridružena vrhu stupnja $n-1$ i to je zvijezda).

**(c)** $16=(3+1)^{4-2}=\binom{2}{0}3^2+\binom{2}{1}3^1+\binom{2}{2}3^0$ pa je $T(4)=16$, $T(4,1)=9$, $T(4,2)=6$ i $T(4,3)=1$.

**5.** Riječ je o planarnom grafu sa $n$ vrhova, $m$ bridova i $f$ strana. Prema Eulerovoj formuli slijedi

$$n-m+f=2. \tag{1}$$

S obzirom da su sve strane tog grafa trokuti, prebrojavanjem parova strana i njihovih bridova dobivamo

$$3f=2m. \tag{2}$$

Pomnožimo li jednakost (1) s 3 i uvrstimo jednakost (2), dobivamo

$$3n-3m+2m=6 \Rightarrow m=3n-6.$$

Dakle, treba povući još $3n-6-3=3n-9$ dužina (neovisno o načinu na koji ih povlačimo).

**6.** **(a)** Ukupno postoji 7 potpunih sparivanja - popisat ćemo ih pomoću uređenih šestorki, gdje je na $k$-tom mjestu mladić koji pripada $k$-toj djevojci: $(1,2,3,4,5,6)$, $(1,2,3,4,5,7)$, $(1,2,3,4,6,7)$, $(1,2,3,5,6,7)$, $(1,2,4,5,6,7)$, $(1,3,4,5,6,7)$, $(2,3,4,5,6,7)$.

**(b)** Prema Hallovom teoremu ovaj ženidbeni problem nema rješenje. Naime, četiri djevojke, $D_1, D_3, D_5, D_7$, poznaju tri mladića, $M_2, M_4, M_6$.