Diskretna matematika - teoremi i dokazi

2. Rekurzivne relacije

2.2. Linearne rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima

Teorem 2.1: Skup rješenja homogene relacije $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r}$, $n \geq r$ je vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Dimenzija tog prostora je r.

Dokaz: $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r}$, $f(n) = 0$

- $(a_n')_{n\geq 0}$, $(a_n'')_{n\geq 0}$ zadovoljavaju navedenu homogenu jednadžbu, pa onda i njihova linearna kombinacija $(\alpha a_n' + \beta a_n'')_{n\geq 0}$ također zadovoljava istu homogenu relaciju:

$$c_1(\alpha a_{n-1}' + \beta a_{n-1}'') + c_2(\alpha a_{n-2}' + \beta a_{n-2}'') + \dots + c_r(\alpha a_{n-r}' + \beta a_{n-r}'')$$
$$= \alpha(\underbrace{c_1 a_{n-1}' + c_2 a_{n-2}' + \dots + c_r a_{n-r}'}_{a_n'}) + \beta(\underbrace{c_1 a_{n-1}'' + c_2 a_{n-2}'' + \dots + c_r a_{n-r}''}_{a_n''})$$
$$= \alpha a_n' + \beta a_n''$$

- dimenzija: gledamo nizove od r brojeva, a vektorski prostor tih nizova ima dimenziju $r \Rightarrow \dim = r$

Teorem 2.2: Neka je (a_n^p) neko partikularno rješenje nehomogene relacije $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r} + f(n)$, $n \geq r$. Tada sva rješenja te relacije imaju oblik $a_n = a_n^h + a_n^p$ gdje su a_n^h rješenja pripadne homogene relacije $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r}$.

Dokaz:

1) želimo pokazati da je $(a_n^h + a_n^p)_{n\geq 0}$ rješenje nehomogene relacije:

$$a_n^h + a_n^p = (c_1 a_{n-1}^h + \dots + c_r a_{n-r}^h) + (c_1 a_{n-1}^p + \dots + c_r a_{n-r}^p + f(n))$$
$$= c_1(a_{n-1}^h + a_{n-1}^p) + \dots + c_r(a_{n-r}^h + a_{n-r}^p) + f(n)$$
$$= c_1 a_{n-1} + \dots + c_r a_{n-r} + f(n) = a_n$$

2) Pretpostavimo suprotno: $(a_n^g)_{n\geq 0}$ je neko drugo rješenje nehomogene relacije:

- računamo: $a_n^g - a_n^p = (c_1 a_{n-1}^g + \dots + c_r a_{n-r}^g + f(n)) - (c_1 a_{n-1}^p + \dots + c_r a_{n-r}^p + f(n))$
$$= c_1(a_{n-1}^g - a_{n-1}^p) + \dots + c_r(a_{n-r}^g - a_{n-r}^p)$$

izraz zadovoljava pripadajuću homogenu relaciju i

$a_n^g - a_n^p = a_n^h \Rightarrow a_n^g = a_n^h + a_n^p$ ↯ kontradikcija

2.3. Homogene rekurzivne relacije

Teorem 2.3: Ako su svi korijeni $x_1, \ldots, x_r$ karakteristične jednadžbe linearne homogene rekurzivne relacije $a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_r a_{n-r}$, $n \geq r$ međusobno različiti, tada opće rješenje ima oblik $a_n = \lambda_1 x_1^n + \ldots + \lambda_r x_r^n$

Dokaz: (x_i^n), $n \geq 0$ je rješenje početne rekurzivne relacije

$$x_i^r = c_1 x_i^{r-1} + \ldots + c_r \quad / \cdot x_i^{n-r}$$

$$x_i^n = c_1 x_i^{n-1} + \ldots + c_r x_i^{n-r} \leftarrow \text{homogena rekurzivna relacija}$$

$x_1, \ldots, x_r$ su rješenja jednadžbe te ako raspišemo početne uvjete dobivamo:

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1^0 + \ldots + \lambda_r x_r^0 = a_0 \\ \lambda_1 x_1^1 + \ldots + \lambda_r x_r^1 = a_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 x_1^{r-1} + \ldots + \lambda_r x_r^{r-1} = a_{r-1} \end{cases}$$

Sustav r jednadžbi s r nepoznanica koji ima jedinstveno rješenje (Vandermondeova determinanta $\neq 0$) koje je oblika: $a_n = \lambda_1 x_1^n + \ldots + \lambda_r x_r^n$

Lema 2.4: Ako je x_i nultočka polinoma $P(x)$ kratnosti r_i, tada je x_i nultočka j-te derivacije polinoma $P^{(j)}(x)$ kratnosti $r_i - j$ za $j \in \{0, 1, \ldots, r_i - 1\}$

Dokaz: x_i je nultočka od $P(x)$ kratnosti r_i gdje je $P(x) = (x - x_i)^{r_i} Q(x)$, gdje $Q(x)$ nije djeljiv s $(x - x_i)$

$$P(x) = (x - x_i)^{r_i} Q(x) \quad /'$$

$$P'(x) = r_i (x - x_i)^{r_i - 1} Q(x) + (x - x_i)^{r_i} Q'(x)$$

$$= \underbrace{(x - x_i)^{r_i - 1} \Big[\underbrace{r_i Q(x) + (x - x_i) Q'(x)}_{x_i \text{ nije nultočka}} \Big]}_{x_i \text{ je nultočka kratnosti } r_i - 1 \text{ za } P'(x)}$$

$\vdots$

iterativno ponavljamo

Propozicija 2.5: Ako je x_i nultočka kratnosti r_i karakteristične jednadžbe rekurzivne relacije $a_n = c_1 a_{n-1} + \dots c_r a_{n-r}$, $n \geq r$, tada su nizovi $(x_i^n), (n x_i^n), \dots$ $\dots, (n^{r_i - 1} x_i^n)$ $n \geq 0$ rješenja dane rekurzivne relacije.

Dokaz: Karakteristična jednadžba: $x^r = c_1 x^{r-1} + \dots + c_r$

$$x^r = c_1 x_i^{r-1} + \dots + c_r \quad / \cdot x_i^{n-r}$$

$$x_i^n = c_1 x_i^{n-1} + \dots + c_r x_i^{n-r}$$

- deriviramo $x^n = c_1 x^{n-1} + \dots + c_r x^{n-r} \quad /'$

$$n x^{n-1} = c_1 (n-1) x^{n-2} + \dots + c_r (n-r) x^{n-r-1} \quad / \cdot x$$

$$n x^n = c_1 (n-1) x^{n-1} + \dots + c_r (n-r) x^{n-r}$$

$$n x_i^n = c_1 (n-1) x_i^{n-1} + \dots + c_r (n-r) x_i^{n-r} \Rightarrow (n x_i^n) \text{ je rješenje rekurzivne relacije}$$

$\vdots$

- iterativnim ponavljanjem dokazali bismo da tvrdnja vrijedi i za ostale nizove

Teorem 2.6: Ako korijeni $x_1, \dots, x_k$ karakteristične jednadžbe homogene linearne rekurzivne relacije $a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_r a_{n-r}$, $n \geq r$ imaju kratnosti $r_1, \dots, r_k$, tada opće rješenje ima oblik: $a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 n x_1^n + \dots + \lambda_{r_1} n^{r_1 - 1} x_1^n +$ $+ \lambda_{r_1+1} x_2^n + \lambda_{r_1+2} n x_2^n + \dots + \lambda_r n^{r_k - 1} x_k^n$

Dokaz:

- u propoziciji 2.5 je pokazano da su $(x_i^n), \dots (n^{r_i - 1} x_i^n)$ $n \geq 0$, $i = 1, \dots, k$ rješenja rekurzivne relacije
- u teoremu 2.3 je pokazano da su rješenja linearno nezavisna u vektorskom prostoru rješenja rekurzivne relacije čija je dimenzija $\dim = r$, a ima ih r te čine bazu vektorskog prostora rješenja.

3. Pojam grafa

3.2. Glavne definicije

Lema 3.1: (o rukovanju) U svakom grafu G je zbroj stupnjeva svih vrhova paran, tj. vrijedi $\sum_{v \in G} \deg(v) \equiv 0 \pmod 2$

Dokaz: Tvrdnja se dokazuje dvostrukim prebrojavanjem skupa:

$\{(v, e) : v \in V(G), e \in E(G), v \text{ i } e \text{ incidentni}\}$

- krenemo li od vrhova, vidimo da svaki vrh ima onoliko incidencija koliki je stupanj tog vrha
- krenemo li od bridova, vidimo da svaki brid ima „dva kraja", tj. da je dvočlani skup
- sveukupno incidencija je $2 \cdot |E(G)|$, odnosno vrijedi $\sum_{v \in G} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|$

Teorem 3.3.: (Dirichletov princip) Neka je n predmeta smješteno u m kutija i $n > m$. Onda postoji kutija s barem 2 predmeta.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno: Kada bi u svakoj kutiji bio najviše 1 predmet, onda bi u svim kutijama bilo najviše m predmeta. ↯↯ Kontradikcija s uvjetom $n > m$.

Teorem 3.4: (Poopćeni Dirichletov princip) Ako je n predmeta smješteno u m kutija, onda postoji kutija koja sadrži barem $\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1$ predmeta.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno: svaka kutija sadrži $\leq \left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor$ predmeta.

Ukupan broj predmeta u m kutija $\leq m \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor \leq m \cdot \frac{n-1}{m} \leq n-1$

- dobivamo da je ukupan broj predmeta $\leq n-1$ ↯↯ Kontradikcija jer imamo n predmeta

4. Povezanost

4.1. Šetnje

Teorem 4.1: Relacija „biti povezan" ($\sim$) definirana na skupu vrhova grafa G je relacija ekvivalencije. Razredi (klase) ekvivalencije te relacije su komponente povezanosti grafa G

Dokaz:

- refleksivnost: $u \sim u \Rightarrow$ šetnja duljine 0 ✓ vrijedi
- simetričnost: $u \sim v \Rightarrow$ postoji šetnja $u \to \ldots \to v$

$\Rightarrow$ postoji šetnja $v \to \ldots \to u \Rightarrow v \sim u$ ✓ vrijedi

- tranzitivnost: pretpostavimo $u \sim v$, $v \sim w$ $\Rightarrow$ postoji šetnja $u \to \dots \to v \to \dots \to w$

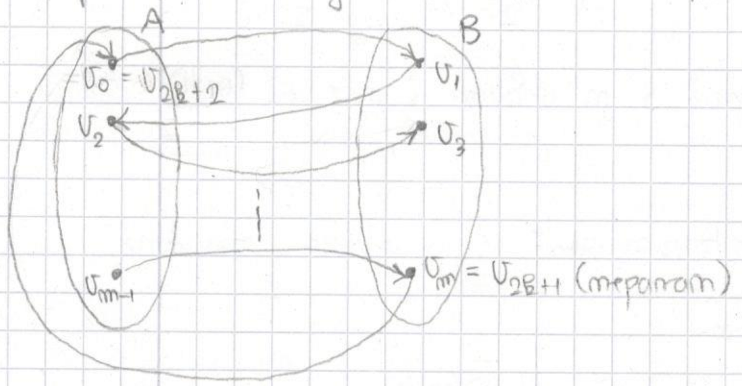
$\Rightarrow u \sim w$ ✓ vrijedi

Zaključujemo da relacija $\sim$ jest relacija ekvivalencije

Teorem 4.2. G je bipartitan graf onda i samo onda ako je svaki ciklus u grafu G parne duljine.

Dokaz:

$\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da je G bipartitan, odnosno vrijedi $V = A \sqcup B$ (dva disjunktna skupa) te neka je $v_0 \to v_1 \to \dots \to v_n$ ciklus u G



- ima ukupno $2k+2$ bridova, što je paran broj, pa zaključujemo da je ciklus parne duljine

$\boxed{\Leftarrow}$ Dokaz u ovom smjeru se ne radi

Teorem 4.3: Neka je G jednostavan graf s n vrhova. Ako G ima k komponenata povezanosti, onda za broj bridova m od G vrijedi

$$n-k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

Dokaz:

1) Dokazujemo da je $n-k \leq m$ matematičkom indukcijom po broju bridova u G.

Baza: $m=0$ N_k - nul-graf $\to k=n$, $n-k=0 \leq m=0$ ✓

Pretpostavimo da G ima najmanji mogući broj bridova te brisanjem jednog brida dolazi do povećanja broja komponenti povezanosti:

$G \setminus e$ će imati n vrhova, $m-1$ bridova, $k+1$ komponenti povezanosti

Pa prema tome vrijedi $n-(k+1) \leq m-1 \Rightarrow n-k \leq m$ ✓

2) Dokazujemo da je $m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$.

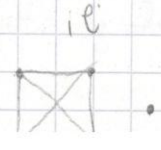
$K_{i_1} \sqcup K_{i_2} \sqcup \dots \sqcup K_{i_k} = G$

komponenta povezanosti

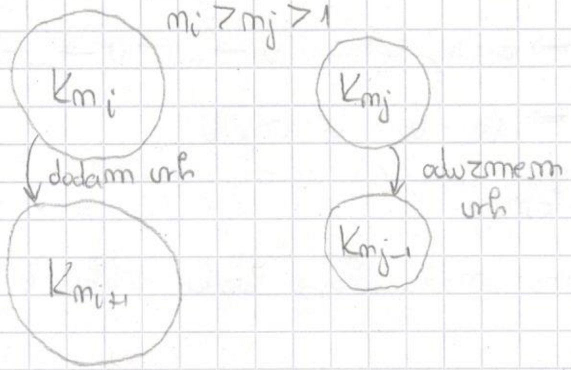
Primjer: $n=5$, $k=2$

4 brida

ili



6 bridova



$$\overbrace{\left[\binom{m_i+1}{2}+\binom{m_j-1}{2}\right]}^{\text{završno stanje}}-\overbrace{\left[\binom{m_i}{2}+\binom{m_j}{2}\right]}^{\text{početno stanje}}=$$

$$=\frac{[m_i(m_i+1)-m_i(m_i-1)]+[(m_j-1)(m_j-2)-m_j(m_j-1)]}{2}$$

$$= m_i - m_j + 1 > 0$$

↳ povećao se broj bridova

Optimalno: $G = \overbrace{\underbrace{K_1 \sqcup K_1 \sqcup \dots \sqcup K_1}_{k-1 \text{ članova}}}^{0 \text{ bridova}} \sqcup K_{n-k+1}$

↳ $\binom{n-k+1}{2} = \frac{(n-k+1)(n-k)}{2}$ bridova

Korolar 4.4.: Svaki jednostavan graf s n vrhova i više od $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ bridova je povezan.

Dokaz: Najveći nepovezan jednostavan graf s n vrhova ima dvije komponente povezanosti: $G = K_1 \sqcup K_{n-1}$

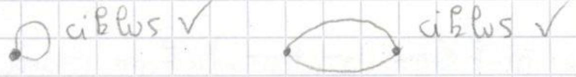
Broj bridova u takvom grafu je: $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

4.2. Eulerovski grafovi

Lema 4.5.: Ako je G graf u kojem je stupanj svakog vrha najmanje 2, onda G sadrži ciklus

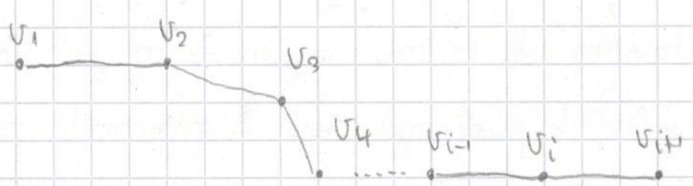
Dokaz:

1) G nije jednostavan:



2) G jest jednostavan:

- konstruiramo šetnju:

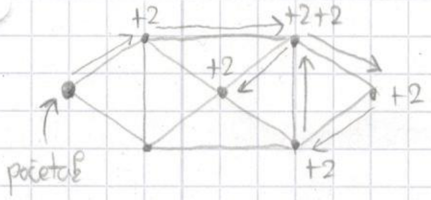


- iz v_i idemo bridom u v_{i+1} tako da je $v_{i+1} \neq v_{i-1}$
- s obzirom da je ukupan broj vrhova od G konačan, neki će se vrh kad tad ponoviti, tj. nastati će ciklus ✓

Teorem 4.6.: (Eulerov teorem) Povezani graf G je eulerovski onda i samo onda ako je stupanj svakog vrha paran.

Dokaz :

$\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da G ima eulerovsku stazu



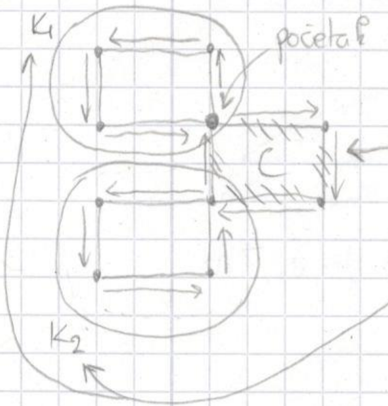
Eulerovska staza P doprinosi stupnju svakog vrha sa 2 za svaki prolazak kroz taj vrh. Prolazimo svim bridovima točno jednom, pa vrijedi $\deg(v) \equiv 0 \pmod 2$

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da je svaki vrh parnog stupnja

Pokazuje se matematičkom indukcijom po broju bridova u grafu G

Baza : $m = 1$ +2 petlja ✓ eulerovski

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki graf H sa manjim brojem bridova od grafa G



Nakon eliminacije ciklusa C :

- G\C ima svaki vrh parnog stupnja i ima manji bridova od G. Vrijedi da je G\C eulerovski, odnosno svaka komponenta povezanosti je eulerovski graf
- eulerovska staza od G = eulerovske staze komponenti povezanosti od G\C + ciklus C ✓

Korolar 4.7. : Povezan graf je eulerovski onda i samo onda ako se njegov skup bridova može rastaviti u disjunktnu uniju ciklusa

Korolar 4.8 : Povezan graf je skoro eulerovski onda i samo onda ako ima točno dva vrha neparnog stupnja

Teorem 4.9 : (Fleuryev algoritam) Neka je G eulerovski graf. Tada je sljedeća konstrukcija uvijek moguća i vodi do eulerovske staze od G. Započni u bilo kojem vrhu u i prolazi vrhovima u bilo kojem redoslijedu, pazeći pritom samo na sljedeća pravila :

1) prekriži bridove kojima si prošao, a ako nakon prolaska vrh ostane izoliran, pobriši i njega
2) prijeđi mostom trenutnog grafa samo ako nemaš druge mogućnosti

Dokaz : Nadajmo se da se neće pojaviti

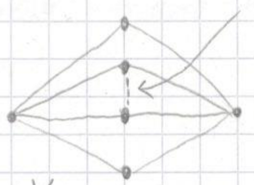
4.3. Hamiltonovski grafovi

Teorem 4.10. (Oreov teorem) Ako je G jednostavni graf s n vrhova, $n \geq 3$, te ako vrijedi $\deg(v) + \deg(w) \geq n$ za svaki par nesusjednih vrhova v i w grafa G, onda je G hamiltonovski

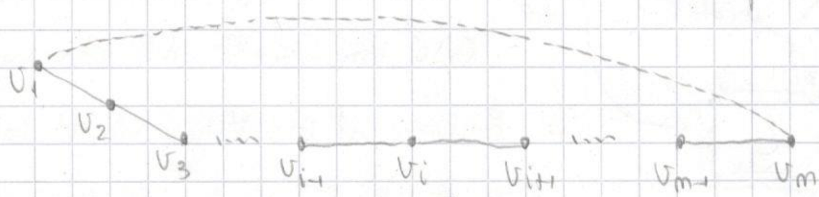
Dokaz: Pretpostavimo suprotno: neka je G nehamiltonovski, ali zadovoljava uvjet sa stupnjevima.

Uočimo: možemo dodati bridove grafu koji nije hamiltonovski i time se neće pokvariti pretpostavljena relacija sa stupnjevima

- dodajemo bridove i zastanemo korak do hamiltonovosti



← skoro hamiltonovski (ima hamiltonovski put)



- v_1 i v_n nisu susjedni; $\deg v_1 + \deg v_1 \geq n$

- prebrojimo susjede od v_1 i v_n:

$A = \{ i : 2 \leq i \leq n, v_i \text{ susjedan s } v_1 \}$ $\quad |A| = \deg v_1$

popunjavamo A s indeksima

$B = \{ i : 2 \leq i \leq n, v_{i-1} \text{ susjedan s } v_n \}$ $\quad |B| = \deg v_n$

$|A| + |B| = \deg v_1 + \deg v_n \geq n$

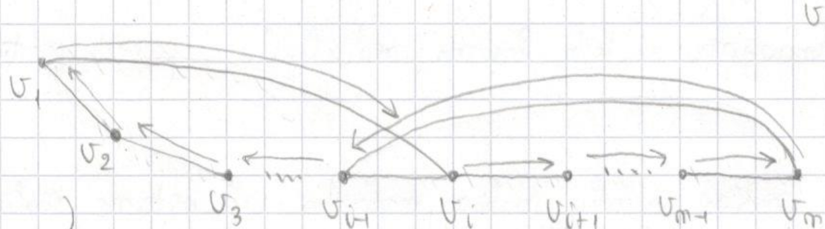
S druge strane: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B| \leq n-2 \leq n-1$

$|A \cap B| > 0$

$\underbrace{A \cap B}_{} \neq \emptyset$

v_i susjedan s v_1
v_{i-1} susjedan s v_n



↳ postoji hamiltonovski put ϟϟ kontradikcija s pretpostavkom.

Teorem 4.11 (Diracov teorem) Ako je G jednostavni graf s n $(n \geq 3)$ vrhova, te ako je $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ za svaki vrh v iz G, onda je G hamiltonovski

Dokaz: Neka su v i w nesusjedni vrhovi u G

$\deg(v) + \deg(w) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \geq n$, primjenom Oreovog teorema zaključujemo da je G hamiltonovski