Ispit iz Diskretne matematike 1
25.8.2020.

1. **(8 bodova)** Na koliko načina možemo 123 jednaka bonbona podijeliti među troje djece tako da prvo dijete dobije barem 3 bonbona, drugo barem jedan, ali najviše 10 bonbona, a treće dijete paran broj bonbona (uključujući i nulu)?

2. **(8 bodova)** Riješite rekurzivnu relaciju

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n \cdot 3^n, \quad n \geqslant 2,$$

uz početne uvjete $a_0 = 2$, $a_1 = 3$.

3. **(8 bodova)**
   - **(a)** Nacrtajte neki jednostavan graf čiji je niz stupnjeva $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4)$.
   - **(b)** Nacrtajte stablo čiji je Prüferov kod $(3, 8, 5, 2, 5, 8)$.
   - **(c)** Postoji li jednostavan graf čiji je niz stupnjeva $(1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9)$? Detaljno obrazložite svoj odgovor.

4. **(8 bodova)** Iskažite i dokažite Oreov teorem o dovoljnim uvjetima za hamiltonovost grafa.

5. **(8 bodova)** Neka je G jednostavan 8-regularan graf koji ima 33 vrha. Odredite kromatski indeks od G.

6. **(8 bodova)**
   - **(a)** Koliko postoji turnira s unaprijed označenih n vrhova?
   - **(b)** Koliko vrhova ima tunir T za koji vrijedi

$$\sum_{v \in V(T)} \text{indeg}(v) = 4950?$$

Ispit se piše 150 minuta. Korištenje kalkulatora niti formula nije dozvoljeno. Sretno!

Rješenja

1. Pripadna funkcija izvodnica glasi

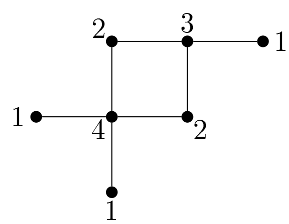
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^3 + x^4 + \dots\right)\left(x + x^2 + \dots + x^{10}\right)\left(1 + x^2 + x^4 + \dots\right) \\ &= x^4\left(1 + x + x^2 + \dots\right)\left(1 + x + \dots + x^9\right)\left(1 + x^2 + x^4 + \dots\right) \\ &= x^4 \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1-x^{10}}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} = x^4(1-x^10) \cdot \frac{1}{(1-x)^3(1+x)} \\ &= x^4(1+x^{10})\left[\frac{1}{8}(1-x)^{-1} + \frac{1}{4}\cdot(1-x)^{-2} + \frac{1}{2}(1-x)^{-3} + \frac{1}{8}(1+x)^{-1}\right] \\ &= x^4(1-x^{10})\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\binom{n+1}{1} + \frac{1}{2}\binom{n+2}{2} + \frac{1}{8}(-1)^n\right]x^n \end{aligned}$$

Tražimo

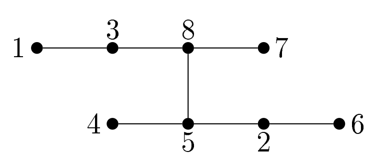
$$\langle x^{123}\rangle f(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cdot 120 + \frac{1}{2}\binom{121}{2} - \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cdot 110 + \frac{1}{2}\binom{111}{2} - \frac{1}{8}\right) = 580.$$

2. $a_n = \frac{1}{2}(n^3 + 3n^2 - 10n + 12)\cdot 3^{n-1}$.

3. **(a)** Na primjer,



(b)



(c) Kada bi postojao takav graf, onda bi vrh stupnja 9 bio susjedan sa svim ostalim vrhovima, pa i s oba vrha stupnja 1. Odavde slijedi da vrh stupnja 8 ne može biti susjedan ni s jednim vrhom stupnja 1. U tom je slučaju preostalo još 7 vrhova od kojih niti jedan ne može biti stupnja 8. Dakle, takav graf ne postoji.

4. Skripta, str. 92, teorem 4.10.

5. Budući da je G 8-regularan graf, najveći stupanj nekog vrha u G je $\Delta = 8$ pa je prema Vizingovom teoremu

$$\Delta = 8 \leqslant \chi'(G) \leqslant 9 = \Delta + 1,$$

tj. $\chi'(G) = 8$ ili $\chi'(G) = 9$.

Pokažimo sada da bridove ne možemo obojati s 8 boja. Naime, svaki brid povezuje dva vrha pa s jednom bojom možemo obojati najviše 16 bridova. Prema tome, s 8 boja možemo obojati najviše $8 \cdot 16 = 128$ bridova.

S druge strane, prema lemi o rukovanju slijedi

$$2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 33 \cdot 8 \Rightarrow |E(G)| = \frac{1}{2} \cdot 33 \cdot 8 = 132.$$

Dakle, s 8 boja nije moguće obojati svih 132 brida grafa G pa je $\chi'(G) = 9$.

6. **(a)** Turnir nastaje orijentiranjem potpunog grafa K_n. Budući da K_n ima $\binom{n}{2}$ bridova, a svaki brid možemo orijentirati na dva načina, slijedi da je broj turnira jednak $2^{\binom{n}{2}}$.

(b) Imamo

$$\begin{aligned}\sum_{v \in V(T)} \operatorname{indeg}(v) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{v \in V(T)} \operatorname{indeg}(v) + \sum_{v \in V(T)} \operatorname{outdeg}(v)\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v \in V(T)} \deg(v) = \frac{1}{2} n(n-1).\end{aligned}$$

Zato iz uvjeta zadatka slijedi

$$\frac{1}{2} n(n-1) = 4950 \Rightarrow n^2 - n - 9900 = 0 \Rightarrow n = 100.$$