Međuispit iz Diskretne matematike 1
26.11.2019.

1. **(8 bodova)** Na raspolaganju su Vam dana slova: A, A, A, A, A, B, B, B, C, D, E.
   - **(a)** Napišite funkciju izvodnica koja broji broj svih mogućih konačnih riječi koje se sastoje od zadanih slova.
     Napomena: dobiveni izraz **nije** potrebno sređivati do kraja.
   - **(b)** Koliko se riječi od 2 slova mogu složiti od zadanih slova?
   - **(c)** Koliko se riječi od 5 slova mogu složiti od zadanih slova?

2. **(8 bodova)** Dokažite da je skup rješenja homogene rekurzivne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_r a_{n-r}, \quad n \geqslant r,$$

vektorski prostor. Odredite bazu tog vektorskog prostora za rekurzivnu relaciju

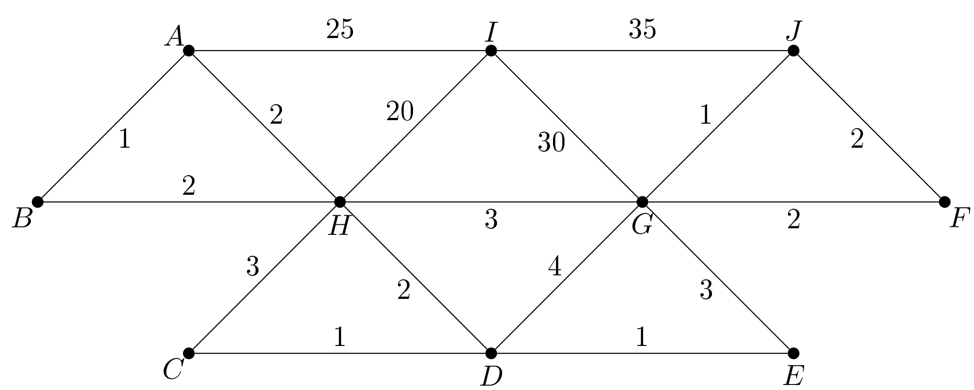
$$a_{n+1} = a_n + 5a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad n \geqslant 2.$$

3. **(8 bodova)** Odredite funkciju izvodnica niza definiranog rekurzivnom relacijom

$$a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = n \cdot 2^n, \ n \geqslant 2, \ a_0 = 1, \ a_1 = 2.$$

4. **(8 bodova)**
   - **(a)** Nacrtajte bridni (linijski) graf potpunog grafa K_4.
   - **(b)** Koliko bridova ima bridni (linijski) graf potpunog grafa K_n, $n \in \mathbb{N}$?
   - **(c)** Koliko ima hamiltonovskih ciklusa u potpunom grafu K_n, $n \geqslant 3$?
   - **(d)** Koliko ima ciklusa duljine $n-1$ u potpunom grafu K_n, $n \geqslant 4$?

5. **(8 bodova)** Riješite kineski problem poštara za zadani graf sa slike. Algoritam obavezno provedite!



Ispit se piše 120 minuta. Korištenje kalkulatora niti formula nije dozvoljeno. Sretno!

Rješenja

1. **(a)** Pripadna (eksponencijalna) funkcija izvodnica glasi

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)(1+x)^3.$$

(b) Traženi broj je jednak

$$2! \cdot \langle x^2 \rangle f(x) = 2! \cdot \left(1 \cdot 1 \cdot \binom{3}{2} + 1 \cdot 1 \cdot \binom{3}{1} + 1 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \binom{3}{0} + 1 \cdot 1 \cdot \binom{3}{1} + 1 \cdot 1 \cdot \binom{3}{0} + \frac{1}{2!}\right) = 22.$$

(c) Kao u prethodnom dijelu, traženi broj je jednak

$$\begin{aligned} 5! \cdot \langle x^5 \rangle f(x) = 5! \cdot \Bigg(1 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \binom{3}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \binom{3}{2} \\ + 1 \cdot 1 \cdot \binom{3}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \binom{3}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \binom{3}{1} \\ + \frac{1}{2!} \cdot 1 \cdot \binom{3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot 1 \cdot \binom{3}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \binom{3}{1} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \binom{3}{0} \\ + \frac{1}{3!} \cdot 1 \cdot \binom{3}{2} + \frac{1}{3!} \cdot 1 \cdot \binom{3}{1} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \binom{3}{0} \\ + \frac{1}{4!} \cdot 1 \cdot \binom{3}{1} + \frac{1}{4!} \cdot 1 \cdot \binom{3}{0} \\ + \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot \binom{3}{0}\Bigg) = 5! \cdot \frac{971}{120} = 971. \end{aligned}$$

2. Dokaz tvrdnje: skripta, str. 38, teorem 2.1. (prva tvrdnja).

Za zadanu rekurziju je pripadna karakteristična jednadžba

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$$

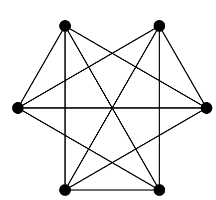
$$\Leftrightarrow (x+1)^2(x-3) = 0.$$

Zato bazu prostora rješenja te rekurzije čine nizovi

$$a_n^{(1)} = (-1)^n, \quad a_n^{(2)} = n \cdot (-1)^n, \; a_n^{(3)} = 3^n.$$

3. $f(x) = \dfrac{1 - 4x + 12x^2 - 8x^3}{(1-2x)^2(1-2x-2x^2)}$.

4. **(a)** Bridni graf potpunog grafa K_4:



(b) K_n je $(n-1)$-regularan graf pa je zato svaki vrh u $L(K_n)$ stupnja $n-2+n-2 = 2(n-2)$ (za svaki brid u K_n i oba njegova vrha vrijedi da taj brid dijeli zajednički vrh s još $n-2$ drugih bridova). Budući da $L(K_n)$ ima $\binom{n}{2}$ vrhova, prema lemi o rukovanju slijedi

$$2|E(L(K_n))| = \sum_{v\in V(L(K_n))} \deg(v) = 2(n-2)\cdot\binom{n}{2}$$

$$\Rightarrow |E(L(K_n))| = (n-2)\cdot\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}.$$

(c) Hamiltonovski ciklus prolazi svakim vrhom grafa - uočimo da vrhove možemo obilaziti u bilo kojem poretku jer iz svakog vrha potpunog grafa možemo doći u bilo koji drugi. Fiksiramo li jedan vrh grafa, poredak (obilazak) ostalih možemo odrediti na ukupno $(n-1)!$ načina.

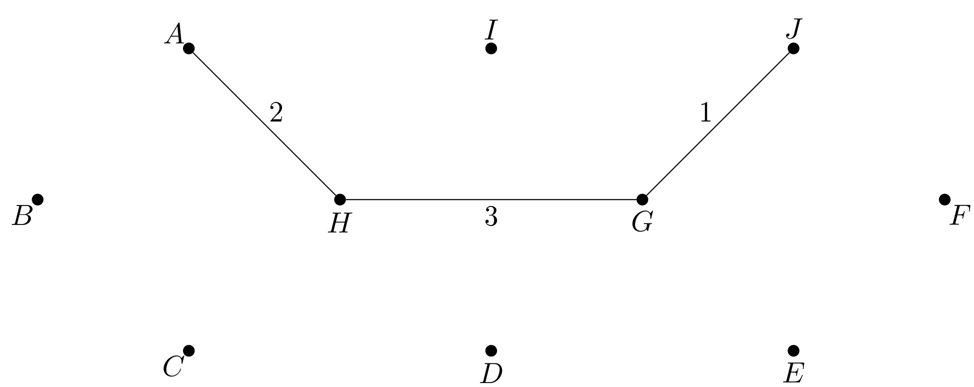
No, na taj smo način svaki hamiltonovski ciklus brojali dvaput (jer svaki obilazak možemo napraviti u "dva smjera") pa je ukupan broj hamiltonovskih ciklusa jednak $\frac{1}{2}(n-1)!$.

(d) $n-1$ vrhova koji su uključeni u ciklus možemo odabrati na $\binom{n}{n-1} = n$ načina. Prema prethodnom dijelu slijedi da je ukupan broj različitih ciklusa među tih $n-1$ vrhova jednak $\frac{1}{2}((n-1)-1)! = \frac{1}{2}(n-2)!$. Zato je ukupan broj traženih ciklusa jednak

$$n\cdot\frac{1}{2}(n-2)! = \frac{n!}{2(n-1)}.$$

5. Zadani graf je skoro eulerovski jer ima točno dva vrha neparnog stupnja, A i J. Zato u grafu postoji skoro eulerovska staza koja počinje u jednom od tih vrhova i završava u drugom. Fleuryevim algoritmom nalazimo jednu takvu stazu, npr. $A-B-H-C-D-E-G-D-H-A-I-H-G-I-J-G-F-J$ i vidimo da je njena ukupna težina jednaka 137.

Nadalje, Dijsktrinim algoritmom nalazimo najkraći put između vrhova A i J koji će zatvoriti tu stazu:



Njegova je težina jednaka 6. Zato je ukupna težina poštareva puta jednaka $137+6 = 143$.