



Digitalna obradba signala - DOS

- Počeci digitalne obradbe signala sežu u sedamnaesto stoljeće
 - Numeričke metode integriranja
 - Numeričke metode interpolacije
- Šezdesetih godina, razvojem digitalnih računala, digitalna obradba signala postaje samostalna disciplina i počinje pravi razvoj
 - Tada uglavnom vezana uz simulaciju metoda analogne obradbe signala

Digitalna obradba signala DOS

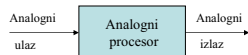
Branko Jeren



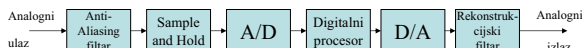
Obradba analognih signala

Obradba analognih signala

- pasivnim mrežama
- aktivnim analognim mrežama



digitalnim sustavima



Prednosti DOS (DSP)

- Nepostojanje pomaka (drift-a) karakteristika realiziranog sustava
 - parametri sustava su fiksirani tj. definirani su u binarnim koeficijentima pohranjenim u memoriju
 - zato su oni nezavisni od okoliša i parametara kao što su to temperatura, vlažnost itd.
 - starenje elemenata nema utjecaj



Prednosti DOS (DSP)

- Poboljšana razina kvalitete
 - kvaliteta obradbe limitirana samo ekonomskim parametrima
 - željena kvaliteta postiže se povećanjem broja bita u prikazu podataka/koeficijenata
 - povećanje za 1 bit u prikazu rezultata pokazuje 6 dB poboljšanje SNR



Prednosti DOS (DSP)

- Reproducibilnost
 - tolerancije komponenti ne utječu na karakteristike sustava
 - nepotrebna podešavanja prigodom proizvodnje
 - nepotrebna podešavanja za vrijeme života sustava



Prednosti DOS (DSP)

- jednostavna implementacija novih i složenih algoritama
- jednostavni razvoj i implementacija adaptivnih, programabilnih filtara, itd.
- realizacija jednim chip-om korištenjem VLSI tehnologije



Prednosti DOS (DSP)

- Multipleksiranje
 - ista oprema može biti istovremeno korištena od više signala s očiglednim financijskim prednostima za svaku funkciju
- Modularnost
 - koriste se standardni digitalni sklopovi za realizaciju



Ograničenja DOS (DSP)

- Niža pouzdanost
 - digitalni sustavi su aktivni uređaji i time koriste više energije i manje su pouzdani
 - moguća kompenzacija pouzdanosti primjenom automatskog nadzora digitalnog sustava



Ograničenja DOS (DSP)

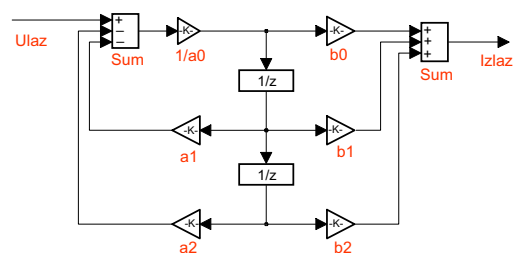
- Ograničeno frekvencijsko područje
 - tehnološki ograničeno na vrijednosti koje odgovaraju vrijednosti određenoj maksimalnim numeričkim mogućnostima rada u stvarnom vremenu procesora
- Dodatna kompleksnost u obradbi analognih signala
 - A/D and D/A pretvornici povećavaju kompleksnost ukupnog sustava za obradbu



Uvod u digitalne filtre



Primjer diskretnog sustava drugog reda



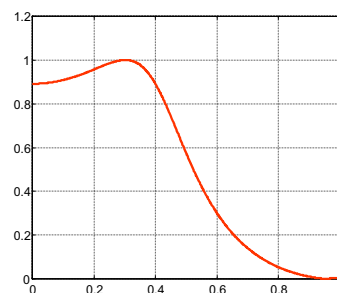
$$H(z) = \frac{0,22 + 0,43 \cdot z^{-1} + 0,22 \cdot z^{-2}}{1 - 0,35 \cdot z^{-1} + 0,33 \cdot z^{-2}}$$



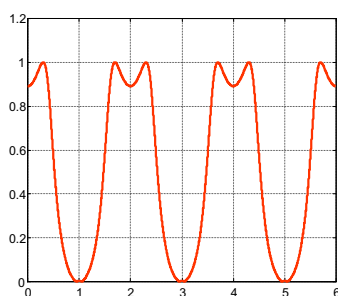
PRIMJER 1. – *MATLAB* filt.m



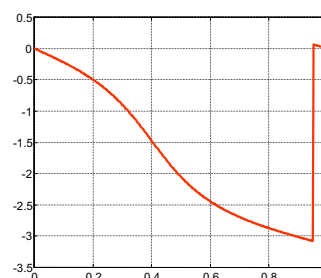
Amplitudno-frekvencijska karakteristika sustava



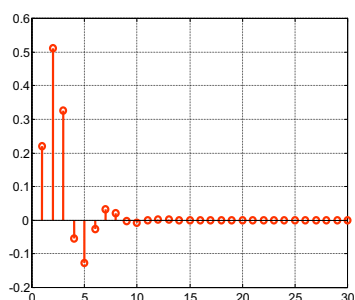
Amplitudno-frekvencijska karakteristika sustava ...



Fazno-frekvencijska karakteristika sustava



Impulsni odziv sustava ...



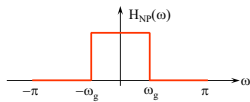
Idealni filtri

- ◆ Idealni filter propušta komponente signala određenih frekvencija bez distorzije, a komponente na ostalim frekvencijama idealno prigušuje.
- ◆ Prema tome, frekvencijska karakteristika ima vrijednost jednaku jedan ili nula.
- ◆ Područje frekvencija u kojima frekvencijska karakteristika ima vrijednost jedan naziva se **propusni pojas**, a područje frekvencija gdje je frekvencijska karakteristika jednaka nuli je **pojas gušenja**.

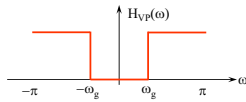


Idealni filtri

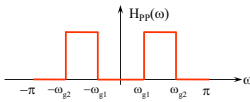
◆ 4 osnovna tipa filtra:



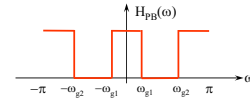
niski propust



visoki propust



pojasni propust



pojasna brana



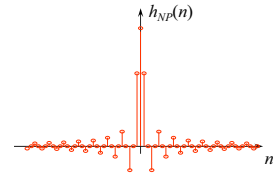
Idealni niskopropusni filter

frekvencijska karakteristika

$$H_{NP}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_g \\ 0 & |\omega| > \omega_g \end{cases}$$

impulzni odziv

$$h_{NP}[n] = \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \frac{\sin n\omega_g}{n\omega_g}$$

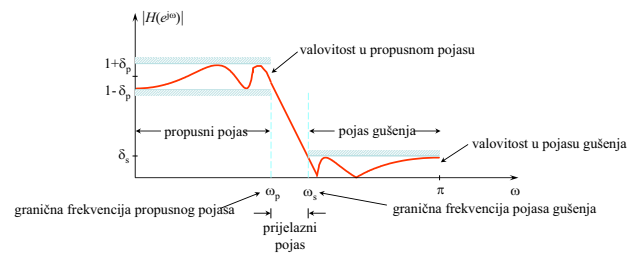


Realni digitalni filtri

- ◆ Idealni filtri imaju nekauzalan odziv i prema tome su neostvarivi.
- ◆ Važan korak pri razvoju digitalnog filtra je određivanje **ostvarive** prijenosne karakteristike $H(z)$ koja **aproximira** željenu frekvencijsku karakteristiku.



Specifikacija karakteristika digitalnog filtra



$$\text{propusni pojas: } 1 - \delta_p \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_p \quad \text{za } |\omega| \leq \omega_p$$

$$\text{pojas gušenja: } |H(e^{j\omega})| \leq \delta_s \quad \text{za } \omega_s \leq |\omega| \leq \pi$$



Specifikacija karakteristika digitalnog filtra

Često se prijenosna karakteristika filtra zadaje u logaritamskom mjerilu:

$$H(\omega) = -20 \log_{10} |H(e^{j\omega})|$$

Tada je

valovitost u propusnom pojasu

$$\alpha_p = -20 \log_{10} (1 - \delta_p) \text{ dB}$$

minimalno gušenje u pojasu gušenja

$$\alpha_s = -20 \log_{10} (\delta_s) \text{ dB}$$

Granične frekvencije područja propuštanja i područja gušenja se računaju na slijedeći način:

$$\omega_p = \frac{2\pi f_p}{f_T}$$

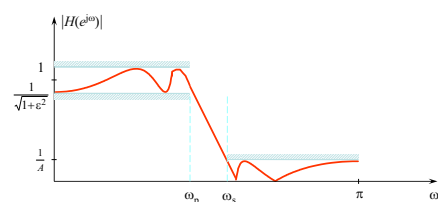
i

$$\omega_s = \frac{2\pi f_s}{f_T}$$

gdje je f_T frekvencija otipkavanja, a f_p i f_s su granične frekvencije pojasa propuštanja i pojasa gušenja u Hz.



Specifikacija digitalnog filtra - alternativno označavanje



Maksimalna vrijednost amplitudne karakteristike je jedan.

Maksimalna devijacija u propusnom pojasu je $1/\sqrt{1+\epsilon^2}$, te maksimalno gušenje u propusnom pojasu iznosi $\alpha_{\max} = 20 \log_{10} (\sqrt{1+\epsilon^2}) \text{ dB}$.

Maksimum amplitudne karakteristike u pojasu gušenja je $1/A$.



Kako izračunati prijenosnu funkciju?

%primjer projektiranja eliptickog filtra

n=input('Upiši red filtra N=');

Rp=input('Upiši valovitost u pojasu propustanja Rp=');

Rs=input('Upiši valovitost u pojasu gusenja Rs=');

Wg=input('Upiši granicnu frekvenciju Wg=');

[b,a] = ellip(n,Rp,Rs,Wg);

[q w] = freqz(b,a,1024);

plot(w/pi, 20*log10(abs(q)));

grid;

pause

plot(w/pi, abs(q));

grid;

za n=2; Rp=1; Rs=50; Wg=.4

b = 0.2197 0.4341 0.2197

a = 1.0000 -0.3507 0.3307

$$H(z) = \frac{0,22 + 0,43 \cdot z^{-1} + 0,22 \cdot z^{-2}}{1 - 0,35 \cdot z^{-1} + 0,33 \cdot z^{-2}}$$



PRIMJER 2. – MATLAB elipticki_primjer.m



PRIMJER 3. – MATLAB filtdemo



Prijenosna funkcija (IIR)

$$H(z) = \frac{0,06 + 0,30 \cdot z^{-1} + 0,78 \cdot z^{-2} + 1,30 \cdot z^{-3} + 1,53 \cdot z^{-4} + 1,30 \cdot z^{-5} + 0,78 \cdot z^{-6} + 0,30 \cdot z^{-7} + 0,06 \cdot z^{-8}}{1 - 0,95 \cdot z^{-1} + 1,74 \cdot z^{-2} + 1,20 \cdot z^{-3} + 0,92 \cdot z^{-4} + 0,41 \cdot z^{-5} + 0,15 \cdot z^{-6} + 0,03 \cdot z^{-7} + 0,004 \cdot z^{-8}}$$



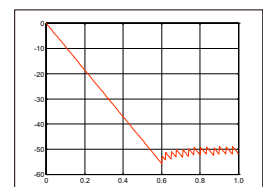
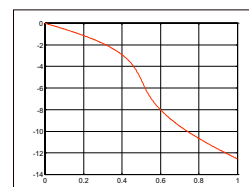
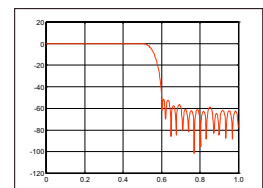
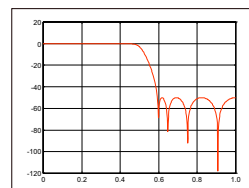
Prijenosna funkcija (FIR)

$$H(z) = \sum_i b_i \cdot z^{-i}$$

1.	0.0004	21	-0.0176	41	-0.0152
2.	-0.0007	22	0.0270	42	0.0172
3.	-0.0004	23	0.0142	43	0.0067
4.	0.0015	24	-0.0432	44	-0.0148
5.	0.0002	25	-0.0042	45	-0.0010
6.	-0.0024	26	0.0673	46	0.0114
7.	0.0007	27	-0.0206	47	-0.0023
8.	0.0034	28	-0.1160	48	-0.0078
9.	-0.0023	29	0.1103	49	0.0038
10	-0.0040	30	0.4839	50	0.0047
11	0.0047	31	0.4839	51	-0.0040
12	0.0038	32	0.1103	52	-0.0023
13	-0.0078	33	-0.1160	53	0.0034
14	-0.0023	34	-0.0206	54	0.0007
15	0.0114	35	0.0673	55	-0.0024
16	-0.0010	36	-0.0042	56	0.0002
17	-0.0148	37	-0.0432	57	0.0015
18	0.0067	38	0.0142	58	-0.0004
19	0.0172	39	0.0270	59	-0.0007
20	-0.0152	40	-0.0176	60	0.0004



Usporedba IIR / FIR



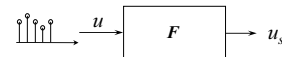


Nerekurzivni digitalni filtri



Primjer - aritmetička sredina

$$u_s = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_M}{M}$$



Interesan je sustav koji služi za “glačanje” (usrednjavanje) slučajnih varijacija u signalu.

M-point moving average system

$$y[n] = \frac{u[n] + u[n-1] + u[n-2] + \dots + u[n-M+1]}{M} \quad \text{ili}$$

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{M} \cdot u[n-i]$$

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{M} u[n-i] = \sum_{i=0}^{M-1} h[i] \cdot u[n-i]$$

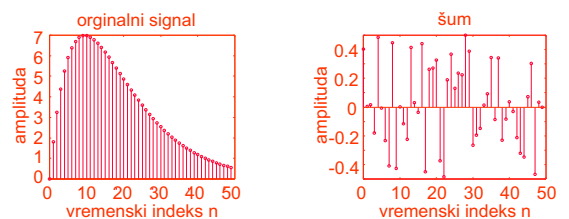
$$\updownarrow$$

$$h[i]$$

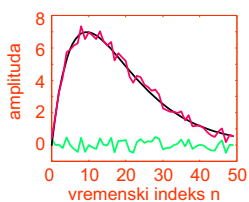
Sustav ima konačan impulzni odziv - FIR sustav



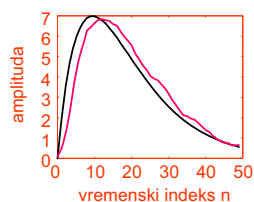
Primjer - MATLAB



Primjer - nastavak



— originalni signal
— šum
— signal + šum



— originalni signal
— $y[n]$ - izlaz iz moving average filtra
— signal + šum



FIR sustav za M=2

Pogledajmo o kojem se sustavu radi:

Uzmimo $M=2$

$$y[n] = \sum_{i=0}^1 h[i] \cdot u[n-i] = \left| h[i] = \frac{1}{M} = \frac{1}{2} \right| =$$

$$= \sum_{i=0}^1 \frac{1}{2} \cdot u[n-i] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^1 u[n-i] =$$



FIR sustav za M=2 ...

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^1 u[n-i] = \left| \begin{array}{l} u[n] = e^{j\omega n} \\ -\infty \leq n \leq \infty \end{array} \right| \\
 &= \frac{1}{2} (e^{j\omega n} + e^{j\omega(n-1)}) = \frac{1}{2} e^{j\omega n} (1 + e^{-j\omega}) = \\
 &= \frac{1}{2} (1 + e^{-j\omega}) \cdot e^{j\omega n} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{H(e^{j\omega})}
 \end{aligned}$$



FIR sustav za M=2 ...

Isto pomoću Z-transformacije

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \frac{1}{2} (1 + z^{-1}) \cdot U(z) \\
 &\quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{H(z)} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad z = e^{j\omega} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad H(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$



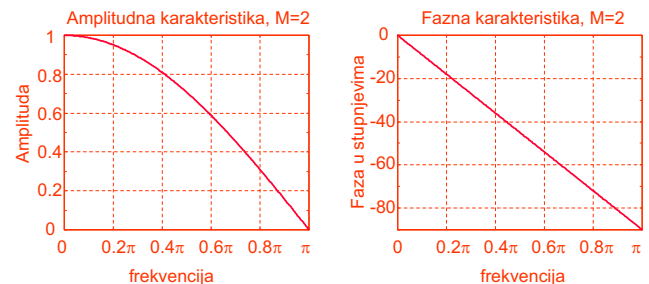
FIR sustav za M=2 ...

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2} (1 + e^{-j\omega}) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{\omega}{2}} \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}} \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}} \right) = \\
 &= e^{-j\frac{\omega}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}} \right) = \underbrace{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}_{\text{Niskopropusni filter}} \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}}
 \end{aligned}$$



FIR sustav za M=2 ...

$$H(e^{j\omega}) = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}}$$



FIR sustav za proizvoljni M

Za proizvoljni M vrijedi:

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \cdot e^{-j\omega n} = \left| \begin{array}{l} h[n] = \frac{1}{M}, \quad 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, \quad \text{inače} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} = \dots\dots\dots \\
 &= \frac{1}{M} \cdot \frac{\sin \frac{M \cdot \omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j \frac{(M-1) \cdot \omega}{2}}
 \end{aligned}$$

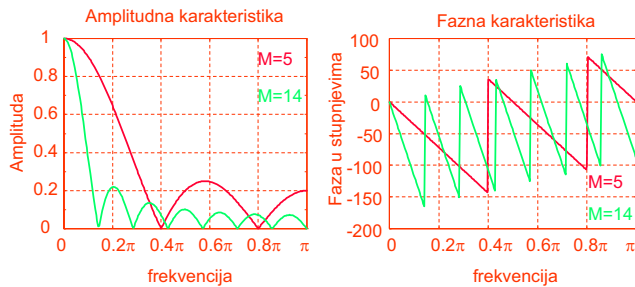


FIR sustav za proizvoljni M ...

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M} \cdot \frac{\sin \frac{M \cdot \omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j \frac{(M-1) \cdot \omega}{2}} \quad \text{Amplitudno-fazna karakteristika} \\
 \text{Amplitudna karakteristika} \quad |H(e^{j\omega})| &= \left| \frac{1}{M} \cdot \frac{\sin \left(\frac{M \cdot \omega}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\omega}{2} \right)} \right| \\
 \text{Fazna karakteristika} \quad \theta(H(e^{j\omega})) &= -\frac{(M-1) \cdot \omega}{2} + \pi \cdot \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor} \mu \left(\omega - \frac{2\pi i}{M} \right) \\
 &\quad \text{gdje je } \mu(\omega) \text{ step u } \omega
 \end{aligned}$$



FIR sustav za proizvoljni M ...



Grupno kašnjenje

Daljnji parametar za karakterizaciju filtera je **grupno kašnjenje**.



mjera linearnosti fazne funkcije

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega}, \text{ gdje je } \theta_c(\omega) \text{ faza}$$

za prije navedeni primjer:

$$\tau(\omega) = \frac{M-1}{2}$$



Projektiranje FIR filtra

Pretpostavimo signal koji je suma kosinusnih signala

$$u[n] = u_1[n] + u_2[n] = \{\cos(0,1 \cdot n) + \cos(0,4 \cdot n)\} \mu(n)$$

Pretpostavimo da želimo sustav (filter) koji će:

- gušiti signal $u_1[n]$ (kosinus kutne frekv. **0,1 rad/sec**)
- propuštati signal $u_2[n]$ (kosinus kutne frekv. **0,4 rad/sec**)

Radi jednostavnosti uzmimo:

- red filtra **N=2** (tri uzorka impulsnog odziva)
- impulsni odziv filtra $h[0] = h[2] = \alpha \wedge h[1] = \beta$



Projektiranje FIR filtra ...

Jednadžba diferencija ovog sustava je:

$$y[n] = h[0] \cdot u[n] + h[1] \cdot u[n-1] + h[2] \cdot u[n-2] = \alpha \cdot u[n] + \beta \cdot u[n-1] + \alpha \cdot u[n-2]$$

a pripadna frekvencijska karakteristika

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= h[0] + h[1] \cdot e^{-j\omega} + h[2] \cdot e^{-j2\omega} = \\ &= \alpha \cdot (1 + e^{-j2\omega}) + \beta \cdot e^{-j\omega} = \\ &= 2\alpha \cdot \left(\frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \right) \cdot e^{-j\omega} + \beta \cdot e^{-j\omega} = \\ &= (2\alpha \cdot \cos(\omega) + \beta) \cdot e^{-j\omega} \end{aligned}$$



Projektiranje FIR filtra ...

Amplitudna i fazna karakteristika filtera su

$$|H(e^{j\omega})| = 2\alpha \cdot \cos(\omega) + \beta$$

$$\theta(\omega) = -\omega$$

Iz zahtjeva na filter određujemo α i β

$$\left. \begin{aligned} |H(e^{j0,1})| &= 2\alpha \cdot \cos(0,1) + \beta = 0 \\ |H(e^{j0,4})| &= 2\alpha \cdot \cos(0,4) + \beta = 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha &= -6,76195 \\ \beta &= 13,456335 \end{aligned}$$

što daje

$$y[n] = -6,76195 \cdot (u[n] + u[n-2]) + 13,456335 \cdot u[n-1]$$



Projektiranje FIR filtra ...

Uz pobudu: $u[n] = \{\cos(0,1 \cdot n) + \cos(0,4 \cdot n)\} \mu(n)$

