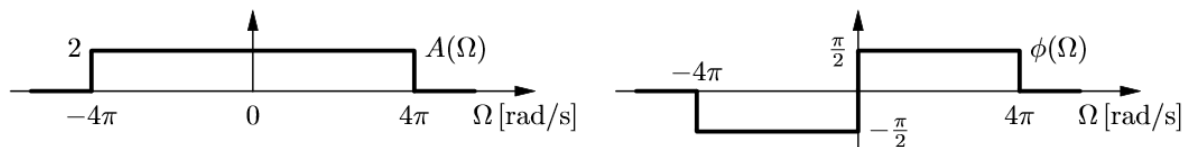
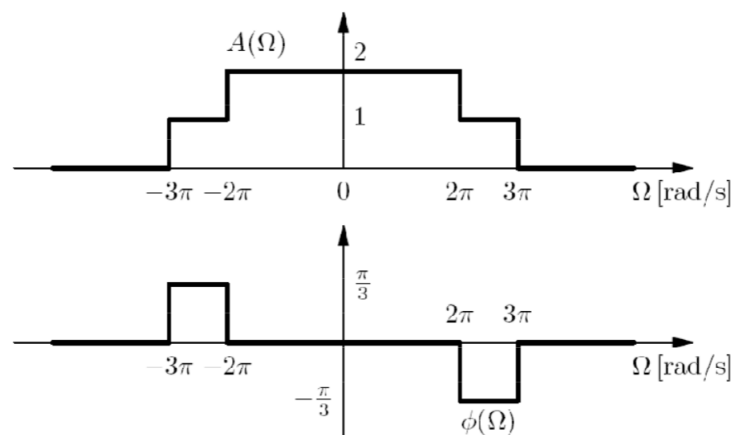


1. Promatramo vremenski kontinuirani signal  $x(t) = 2 + 4 \cos(2t) + 6 \sin(2\pi t + \pi/3)$ .
  - a) Izračunajte i skicirajte amplitudni i fazni spektar zadanog signala.
  - b) Navedite teorem očitavanja. Za koje frekvencije očitavanja hoće, a za koje neće doći do preklapanja spektra?
  - c) Očitajte signal s frekvencijom  $\omega_S = 1$ . Izračunajte i skicirajte amplitudni i fazni spektar očitanoog signala.
2. Zadan je vremenski kontinuirani signal  $x(t) = e^{-t} \mu(t)$ .
  - a) Izračunajte vremenski kontinuiranu Fourierovu transformaciju signala  $x(t)$  i skicirajte dobiveni amplitudni spektar.
  - b) Navedite Nyquist-Shannonov teorem očitavanja.
  - c) Možemo li zadani signal očitati tako da ne dođe do preklapanja spektra (eng. *aliasing*)? Ako možemo odrediti Nyquistovu frekvenciju, a ako ne možemo objasnite zašto ne možemo!
  - d) Odredite vremenski diskretan signal  $y[n]$  dobiven očitavanjem zadanog signala s periodom očitavanja  $T_S = \ln 3$ .
  - e) Odredite DTFT transformaciju signala  $y[n]$ .
  - f) Skicirajte amplitudni spektar transformacije signala  $y[n]$ .
3. Amplitudni i fazni spektar vremenski kontinuiranog signala  $y(t)$  zadani su slikom.



- a) Navedite teorem očitavanja.
  - b) Izračunajte signal  $y(t)$ .
  - c) Za koje frekvencije očitavanja neće doći do preklapanje spektra?
  - d) Očitajte signal  $y(t)$  frekvencijom očitavanja  $f_S = 10$  Hz.
  - e) Nacrtajte amplitudni i fazni spektar vremenski diskretnog signala izračunatog u prethodnom podzadatku.
4. Vremenski kontinuirani signal sa spektrom prikazanim slikom očitao je uz period očitavanja  $T_s = \frac{2}{5}$  s te je zatim rekonstruiran korištenjem idealnog interpolatora.



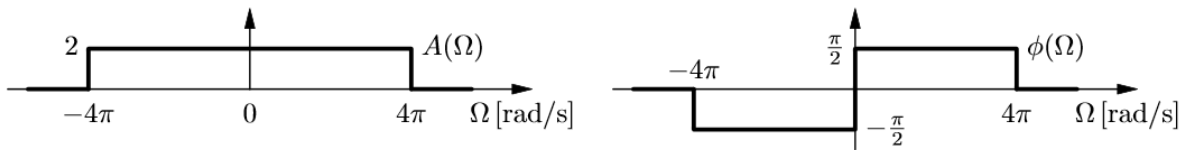
- a) Navedite Nyquist-Shannonov teorem očitavanja.
- b) Možemo li zadani signal očitati tako da ne dođe do preklapanja spektra (eng. *aliasing*)? Ako možemo, odredite Nyquistovu frekvenciju, a ako ne možemo, objasnite zašto ne.
- c) Skicirajte amplitudne i fazne spektre signala nakon očitavanja i nakon rekonstrukcije.

5. Nepoznati signal  $y(t)$  ima CTFT transformaciju zadanu izrazom:

$$Y(\omega) = \begin{cases} 2e^{j\pi/6}, & -10\pi \leq \omega < -9\pi \\ e^{j\pi/2}, & -9\pi \leq \omega < 0 \\ e^{-j\pi/2}, & 0 < \omega \leq 9\pi \\ 2e^{-j\pi/6}, & 9\pi < \omega \leq 10\pi \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

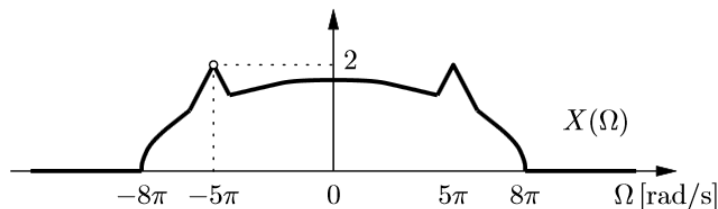
- Kojom frekvencijom treba očitati zadani signal da ne dođe do preklapanja?
- Kojom frekvencijom treba očitati signal  $x(t) = y(-7t) + y(t-7) - 7$  da ne dođe do preklapanja? Objasnite!
- Skicirajte amplitudni i fazni spektar signala dobivenog očitavanjem signala  $y(t)$  frekvencijom 8Hz.
- Skicirajte amplitudni i fazni spektar signala dobivenog idealnom interpolacijom očitanoog signala iz c) podzadatka.

6. Neka je  $x(t) = y(7t)e^{-j\pi t}$  pri čemu je  $y(t)$  signal čiji spektar je zadan slikom.



- Izrazite spektar  $X(\Omega)$  signala  $x(t)$  preko spektra  $Y(\Omega)$ .
- Nacrtajte amplitudni i fazni spektar signala  $x(t)$ .
- Za koje frekvencije očitavanja neće doći do preklapanje spektra signala  $x(t)$ ?
- Nacrtajte amplitudni i fazni spektar vremenski diskretnog signala koji se dobije očitavanjem signala  $x(t)$  uz frekvenciju očitavanja  $f_s = 28$  Hz.

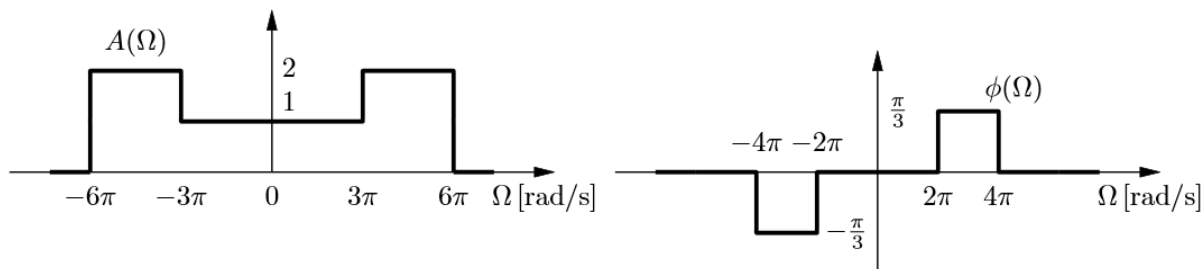
7. Nepoznati signal  $x(t)$  ima čisto realni spektar  $X(\Omega)$  prikazan slikom.



- Odredite interval unutar kojega mora biti period očitavanja  $T_s$  tako da iz uzoraka  $x(nT_s)$  možemo jednoznačno rekonstruirati signal  $x(t)$ .
- Kolika je minimalna dopuštena frekvencija očitavanja?
- Definiramo novi signal  $y(t) = x(2t+2) + \cos(10\pi t + \pi/4)$ . Izrazite spektar signala  $y(t)$  preko spektra  $X(\Omega)$ , skicirajte ga te na skici označite gdje su se preslikale točke  $(\pm 5\pi, 2)$  spektra  $X(\Omega)$  (vrhovi "ušiju")! Kolika je u ovom slučaju minimalna dopuštena frekvencija očitavanja?

8. Promatramo vremenski kontinuirani signal  $x(t)$  čija CTFT transformacija je zadana slikom.

- Navedite teorem očitavanja.
- Za koje frekvencije uzorkovanja neće doći do preklapanja spektra?
- Izračunajte DTFT transformaciju signala  $y[n] = x(\frac{2n}{7})$ .
- Skicirajte amplitudni i fazni spektar DTFT transformacije signala  $y[n]$ .

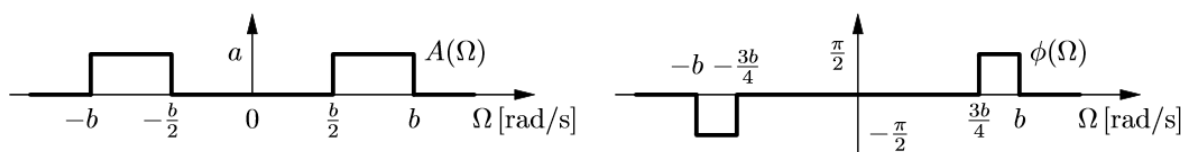


9. Promatramo periodički niz pravokutnih impulsa bez istosmjerne komponente. Neka je amplituda impulsa (PP) 2V te neka je vrijeme između dva susjedna prolaska kroz nulu 25ms.

- Iskažite teorem očitavanja. Za koje frekvencije očitavanja neće doći do preklapanja spektra zadanog signala?
- Na zadani signal primijenjen je idealni nisko propusni filter koji savršeno potiskuje sve frekvencije veće od 140Hz. Skicirajte amplitudni spektar polaznog i filtriranog kontinuiranog signala.
- Filtrirani kontinuirani signal iz c) dijela zadatka uzorkovan je frekvencijom  $f_s = 140\text{Hz}$ . Izračunajte i skicirajte spektar dobivenog diskretnog signala. Je li došlo do preklapanja spektra?

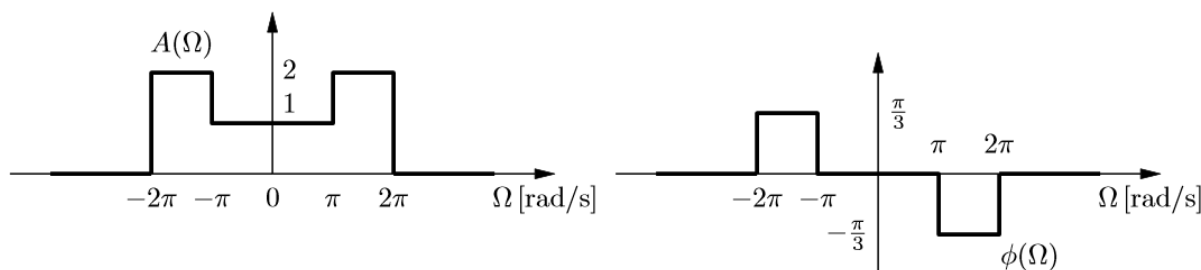
Uputa: Pravokutni niz perioda  $T$  i amplitude  $a$  možemo predstaviti pomoću reda:  $x(t) = \frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi/T(2n+1)t)}{2n+1}$ .

10. Nepoznati signal  $x(t)$  ima CTFT transformaciju prikazanu slikom. Neka su  $a$  i  $b$  pozitivne realne konstante i neka je  $y(t) = 6x(-\frac{t}{3})$ .



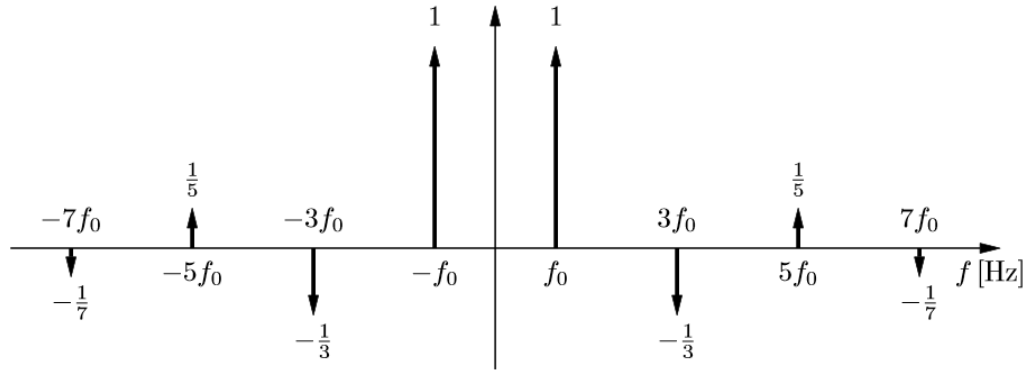
- Kojom frekvencijom treba očitati signal  $x(t)$  kako ne bi došlo do preklapanja spektra?
- Odredite vezu spektara signala  $y(t)$  i  $x(t)$ . Skicirajte spektar signala  $y(t)$ .
- Skicirajte amplitudni i fazni spektar DTFT transformacije signala  $z[n] = x(\frac{8\pi}{7b}n)$ .

11. Promatramo vremenski kontinuirani signal čiji spektar je zadan slikom.



- Navedite teorem očitavanja. Za koje frekvencije uzorkovanja neće doći do preklapanja spektra kod zadanog signala?
- Ako zadani signal očitamo periodom  $T_s = \frac{4}{5}s$  odredite i skicirajte amplitudni i fazni spektar dobivenog vremenski diskretnog signala. Je li došlo do preklapanja spektra?
- Navedite impulsni odziv idealnog interpolatora. Skicirajte amplitudni i fazni spektar rekonstruiranog kontinuiranog signala kojeg dobivamo primjenom idealnog interpolatora na vremenski diskretni signal iz b) dijela zadatka.

12. Promatramo vremenski kontinuirani parni periodički niz pravokutnih impulsa bez istosmjerne komponente frekvencije  $f_0$  čiji generalizirani amplitudni spektar sadrži samo neparne harmonike s alternirajućim predznacima kojima amplituda opada s  $1/n$ . Generalizirani amplitudni spektar do sedmog harmonika je prikazan slikom.



- Navedite teorem očitavanja. Za koje frekvencije uzorkovanja neće doći do preklapanja spektra kod zadanog signala?
- Ako zadani signal očitavamo periodom  $T_S = \frac{1}{2f_0}$  (NEMA AA filtra) odredite i skicirajte amplitudni i fazni spektar dobivenog vremenski diskretnog signala. Je li došlo do preklapanja spektra?
- Navedite impulsni odziv interpolatora prvog reda (FOH) za period očitavanja  $T_S$ .
- Skicirajte kako izgleda rekonstruirani signal u vremenskoj domeni ako koristimo interpolator prvog reda.

Uputa: Beskonačna alternirajuća suma  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$  konvergira u vrijednost  $\frac{\pi}{4}$ .

13. Razmatramo konvoluciju vremenski diskretnih signala.

- a) Neka je  $x[n] = \{1, 2, \underline{1}, 3\}$  signal konačnog trajanja. Izračunajte konvoluciju signala  $x[n]$  sa samim sobom postupkom u vremenskoj domeni.
- b) Za signal iz prethodnog podzadatka izračunajte rezultat cirkularne konvolucije za uzorke signala različite od nule pomoću teorema o cirkularnoj konvoluciji za DFT<sub>N</sub> transformaciju.
- c) Neka su zadani signali  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mu[n]$  i  $y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \mu[n]$ . Izračunajte linearnu konvoluciju signala  $x[n]$  i  $y[n]$ .

14. Promatramo signal  $x[n] = \{\dots, \underline{1}, 0, -1, 0, 1, \dots\}$  za kojega je poznato da su svi uzorci osim zadanih jednaki nuli.

- a) Izračunajte vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju (DTFT) zadanog signala  $x[n]$ . Također izračunajte i skicirajte amplitudni i fazni spektar.
- b) Izračunajte diskretnu Fourierovu transformaciju u 5 točaka (DFT<sub>5</sub>) za prvih 5 uzoraka zadanog signala  $x[n]$ . Također izračunajte i skicirajte amplitudni i fazni spektar.
- c) Označimo s  $X(\omega)$  spektar iz a) dijela te s  $X[k]$  spektar iz b) dijela zadatka. Za koje kružne frekvencije  $\omega_k$  vrijedi  $X(\omega_k) = X[k]$ . Objasnite!

15. DTFT transformacija nepoznatog signala  $x[n]$  je  $X(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega(2k+1)}}{(e^{-j\omega} - \frac{1}{2})^2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

- a) Izračunajte  $x[n]$ .
- b) Neka je  $y[n] = x[-n](e^{jn\pi} + e^{-jn\pi})$ . Izračunajte spektar  $Y(e^{j\omega})$  signala  $y[n]$ .
- c) Izračunajte  $w[n]$  rezultat linearne konvolucije signala  $x[n]$  sa signalom  $z[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \mu[n]$  uz  $k = 0$ .

16. DTFT transformacija nepoznatog signala  $x[n]$  je  $X(e^{j\omega}) = \frac{1 - (ae^{-j\omega})^N}{1 - ae^{-j\omega}}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $|a| < 1$ ,  $N \in \mathbb{N}$ .

- a) Izračunajte  $x[n]$ .
- b) Neka je  $y[n] = x[-n] \cos(n\pi)$ . Izračunajte spektar  $Y(e^{j\omega})$  signala  $y[n]$ .
- c) Izračunajte  $w[n]$  rezultat linearne konvolucije signala  $x[n]$  sa signalom  $z[n] = a^n \mu[n]$ .

17. Razmatramo dva signala  $x[n] = 3^{-n} \mu(n)$  i  $y[n] = 3^n \mu(-n)$ .

- a) Navedite teorem o konvoluciji za DTFT transformaciju.
- b) Izračunajte DTFT transformacije signala  $x[n]$  i  $y[n]$ .
- c) Korištenjem teorema o konvoluciji izračunajte  $x[n] * y[n]$ .
- d) Korištenjem teorema o konvoluciji izračunajte  $x[n] * y[-n]$ .

18. Zadan je signal  $x[n] = \pi^{-n} \mu(n)$ .

- a) Koji uvjet mora zadovoljavati signal  $x[n]$  da bi postojala njegova DTFT transformacija? Pokažite da signal  $x[n]$  zadovoljava taj uvjet.
- b) Izračunajte DTFT transformaciju signala  $x[n]$ .
- c) Korištenjem konvolucije (vremenskoj domeni) izračunajte  $x[n] * x[n]$ .

19. Razmatramo konvoluciju vremenski diskretnih signala.

- a) Neka je  $x[n] = \{1, 2, \underline{1}, 3\}$  signal konačnog trajanja. Izračunajte konvoluciju signala  $x[n]$  sa samim sobom postupkom u vremenskoj domeni.
- b) Za signal iz prethodnog podzadatka izračunajte rezultat cirkularne konvolucije za uzorke signala različite od nule pomoću teorema o cirkularnoj konvoluciji za DFT<sub>N</sub> transformaciju.
- c) Neka su zadani signali  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mu[n]$  i  $y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \mu[n]$ . Izračunajte linearnu konvoluciju signala  $x[n]$  i  $y[n]$ .

- 20.** Zadan je periodičan vremenski diskretni signal  $x[n]$  perioda 4 čiji jedan period jest  $\{1, 3, \underline{3}, 3\}$ .
- Izračunajte DTFS transformaciju zadanog signala.
  - Skicirajte amplitudni i fazni spektar DTFS transformacije.
  - Izračunajte  $\text{DFT}_4$  transformaciju zadanog signala.
  - Skicirajte amplitudni i fazni spektar  $\text{DFT}_4$  transformacije.
  - Izračunajte  $x[n] \circledast x[n]$  (cirkularnu konvoluciju duljine 4 signala sa samim sobom).
- 21.** Razmatramo dva signala  $x[n] = 2^{-n} \mu(n)$  i  $y[n] = 2^n \mu(-n)$ .
- Navedite teorem o konvoluciji za DTFT transformaciju.
  - Izračunajte DTFT transformacije signala  $x[n]$  i  $y[n]$ .
  - Korištenjem teorema o konvoluciji izračunajte  $x[n] * y[n]$ .
  - Korištenjem teorema o konvoluciji izračunajte  $x[n] * y[-n]$ .
- 22.** Zadan je signal  $x[n] = 2\delta[n+2] - 2\delta[n+1] - 2\delta[n] + 2\delta[n-1]$ .
- Izračunajte DTFT transformaciju signala  $x[n]$ .
  - Skicirajte amplitudni i fazni spektar DTFT transformacije.
  - Izračunajte linearnu konvoluciju signala  $x[n]$  sa samim sobom.
- 23.** Zadan je diskretni signal  $x[n] = \{2, 1, 1, 2\}$  za kojega je poznato da su svi uzorci osim zadanih jednaki nuli.
- Izračunajte vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju (DTFT) zadanog signala  $x[n]$ .
  - Izračunajte i skicirajte amplitudni i fazni spektar signala  $x[n]$ . Izračunajte grupno vrijeme kašnjenja.
  - Izračunajte diskretnu Fourierovu transformaciju u 4 točke ( $\text{DFT}_4$ ) za 4 uzorka zadanog signala koji su različiti od nule i označite dobivene koeficijente na grafovima iz b) podzadatka.
  - Označimo s  $X(\omega)$  spektar iz a) dijela te s  $X[k]$  spektar iz c) podzadatka. Za koje kružne frekvencije  $\omega_k$  vrijedi  $X(\omega_k) = X[k]$ ?
- 24.** Promatramo signal  $x[n] = \{\dots, \underline{-2}, 1, -1, 2, -2, 1, -1, 2, \dots\}$  za kojega je poznato da su svi uzorci osim zadanih jednaki nuli.
- Izračunajte vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju (DTFT) zadanog signala  $x[n]$ . Također izračunajte i skicirajte amplitudni i fazni spektar.
  - Izračunajte diskretnu Fourierovu transformaciju u 8 točaka ( $\text{DFT}_8$ ) za prvih 8 uzoraka zadanog signala  $x[n]$ . Također izračunajte i skicirajte amplitudni i fazni spektar.
  - Označimo s  $X(\omega)$  spektar iz a) dijela te s  $X[k]$  spektar iz b) dijela zadatka. Za koje kružne frekvencije  $\omega_k$  vrijedi  $X(\omega_k) = X[k]$ . Objasnite!
- 25.** Zadan je signal  $x[n] = \{2, -2, \underline{-2}, 2\}$ .
- Izračunajte  $\text{DFT}_4$  transformaciju signala  $x[n]$ .
  - Skicirajte amplitudni i fazni spektar  $\text{DFT}_4$  transformacije.
  - Prikažite graf toka signala kojim  $\text{DFT}_4$  realiziramo pomoću dva  $\text{DFT}_2$  bloka.
  - Izračunajte cirkularnu konvoluciju duljine 4 signala  $x[n]$  sa samim sobom.
- 26.** Promatramo signal  $x[n] = \{\dots, \underline{1}, 2, 0, 0, -2, -1, \dots\}$  za kojega je poznato da su svi uzorci osim zadanih jednaki nuli.
- Izračunajte vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju (DTFT) zadanog signala  $x[n]$ . Također izračunajte i skicirajte amplitudni i fazni spektar.
  - Izračunajte diskretnu Fourierovu transformaciju u 6 točaka ( $\text{DFT}_6$ ) za prvih 6 uzoraka zadanog signala  $x[n]$  koji su različiti od nule. Također izračunajte i skicirajte amplitudni i fazni spektar.

- c) Označimo s  $X(\omega)$  spektar iz a) dijela te s  $X[k]$  spektar iz b) dijela zadatka. Za koje kružne frekvencije  $\omega_k$  vrijedi  $X(\omega_k) = X[k]$ . Objasnite!

**27.** Promatramo signal  $x[n] = \{\dots, 2, -4, \underline{2}, \dots\}$  za kojega je poznato da su svi uzorci osim zadanih jednaki nuli.

- Izračunajte DTFT transformaciju zadanog signala  $x[n]$ .
- Izračunajte i skicirajte amplitudni i fazni spektar DTFT transformacije.
- Izračunajte DFT<sub>3</sub> transformaciju za jedina 3 uzorka signala  $x[n]$  koji su različiti od nule.
- Izračunajte amplitudni i fazni spektar DFT<sub>3</sub> transformacije.
- Označimo s  $X(\omega)$  spektar iz a) dijela te s  $X[k]$  spektar iz c) dijela zadatka. Za koje kružne frekvencije  $\omega_k$  vrijedi  $X(\omega_k) = X[k]$ . Objasnite!

**28.** Promatramo kauzalni FIR sustav s impulsnim odzivom  $h[n] = \delta[n] + \delta[n - 4]$ . Promatrani FIR sustav realiziramo na računalu obradbom u blokovima duljine 6 uzoraka. Promatrani sustav je pobuđen signalom  $x[n] = (n + 1)\mu[n]$ . Nadalje, označimo s  $x_k[n]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , signal koji odgovara pojedinom nepreklopajućem bloku signala  $x[n]$ , dakle

$$x_k[n] = \begin{cases} x[n], & 6k \leq n < 6k + 6 \\ 0, & \text{inace} \end{cases}.$$

- Definirajte linearnu i cirkularnu konvoluciju. Navedite teorem o konvoluciji za DTFT i DFT<sub>N</sub> transformacije!
- Izračunajte linearnu konvoluciju  $x_0[n] * h[n]$  i cirkularnu konvoluciju  $x_0[n] \circledast h[n]$ . Za koje  $N$ -ove vrijedi  $(x_0 * h)[n] = (x_0 \circledast h)[n]$ ,  $0 \leq n < N$ ?
- Za obradbu u blokovima duljine 6 koristimo PREKLOPI-I-ZBROJI metodu tako da rezultat obradbe pojedinog bloka računamo korištenjem DFT<sub>N</sub> transformacije. Koji  $N$  moramo koristiti i kako se proširuje ulazni signal za svaki blok tako da dobijemo ispravan rezultat obradbe? Provedite opisani postupak za prva dva bloka (za ulaze  $x_0[n]$  i  $x_1[n]$ ) te pokažite kako se vrši preklapanje i zbrajanje kada se računa rezultat obradbe za drugi blok.

**29.** Diskretni signal  $x[n] = \{\underline{1}, 0, -1, 0, 1, 1, 0, -1, 0, 1, 1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$  (ostali uzorci su jednaki nuli) želimo propustiti kroz FIR filter DRUGOG REDA na način da signal rastavimo u blokove duljine  $L = 5$  uzoraka koje obrađujemo preklopi-i-zbroji postupkom (eng. overlap-add). Pri tome FIR filter projektiramo metodom vremenskih otvora iz idealnog prototipa

$$h_I[n] = \frac{3\pi}{2} \text{sinc}\left(\frac{3n}{2}\right)$$

- Definirajte linearnu konvoluciju. Koje su graniče sumacije za signale konačnog trajanja?
- Objasnite kako se iz rezultata obradbe pojedinih blokova dobiva izlazni signal.
- Korištenjem pravokutnog otvora projektirajte FIR filter drugog reda. Neka filter bude kauzalan.
- Korištenjem preklopi-i-zbroji postupka izračunajte prvih 10 uzoraka odziva za FIR filter iz c) podzadatka.

**30.** Vremenski diskretni sustav ima impulsni odziv  $h[n] = \{\underline{1}, 0, -2, 0, 1\}$  (ostali uzroci su jednaki nuli). Želimo zadani sustav realizirati na računalu korištenjem obradbe signala u blokovima duljine  $L$  uzorka i PREKLOPI-I-ZBROJI metode. Neka je ulazni signal  $x[n] = \{\underline{2}, 0, 2, 0, 2, 1, -1\}$  (ostali uzroci su jednaki nuli).

- Kolike su dopuštene vrijednosti duljine bloka  $L$ ? Uz duljinu bloka  $L = 4$  i zadani impulsni odziv, kolika je duljina rezultata obradbe svakog ulaznog bloka?
- Koje su dozvoljene vrijednosti  $N$  ako rezultat obradbe svakog bloka računamo množenjem u domeni DFT<sub>N</sub> transformacije? Odaberite najmanju vrijednost  $N$  koja zadovoljava iskazani uvjet.
- Uz  $L = 4$  i vrijednost  $N$  iz podzadatka b), korištenjem DFT<sub>N</sub> transformacije izračunajte rezultat obradbe prvog bloka  $y_1[n]$ .
- Ako su uzorci rezultata obradbe drugog bloka koji su različiti od nule jednaki  $y_2[k] = \{\underline{2}, 1, -5, -2, 4, 1, -1\}$ , odredite prvih  $2L$  uzoraka odziva sustava.

- 31.** Razmatramo diskretnu Fourierovu transformaciju za signale konačnog trajanja duljine 4 uzoraka.
- Objasnite jedan stupanj razlaganja za brzu Fourierovu transformaciju koji koristi korijen-2 decimaciju u vremenu (eng. DIT Radix-2 FFT).
  - Razložite  $DFT_4$  transformaciju do kraja koristeći decimaciju u vremenu.
  - Skicirajte graf toka signala za razlaganje iz b) podzadatka.
  - Navedite pravila za transponiranje grafa toka signala.
  - Transponirajte graf iz c) podzadatka. Koji FFT algoritam ste dobili?
- 32.** Razmatramo signal konačnog trajanja  $x[n] = \{1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0\}$ . Za zadani signal želimo efikasno izračunati  $DFT_{12}$  transformaciju.
- Razložite  $DFT_{12}$  transformaciju na tri  $DFT_4$  transformacije korištenjem decimacije u vremenu.
  - Nacrtajte graf toka signala za dano razlaganje i izračunajte vrijednosti u svakom čvoru grafa za zadani signal  $x[n]$ .
- 33.** Razmatramo efikasne realizacije  $DFT_4$  transformacije signala  $u[n] = \{1, 2, 3, 4\}$ .
- Izračunajte  $DFT_4$  transformaciju signala  $u[n]$ .
  - Objasnite jedan stupanj razlaganja za brzu Fourierovu transformaciju koji koristi korijen-2 decimaciju u vremenu (eng. DIT Radix-2 FFT) za općeniti niz duljine  $2N$  uzoraka.
  - Objasnite jedan stupanj razlaganja za brzu Fourierovu transformaciju koji koristi korijen-2 decimaciju u frekvenciji (eng. DIF Radix-2 FFT) za općeniti niz duljine  $2N$  uzoraka.
  - Nacrtajte graf toka signala bez korištenja  $DFT$  blokova za razlaganje iz c) podzadatka za  $DFT_4$  transformaciju signala  $u[n]$  i na njemu jasno označite ulazne i izlazne signale te vrijednosti signala u svim čvorovima.
- 34.** Raspolazete s dva  $DFT_3$  bloka. Pomoću ta dva bloka želimo realizirati  $DFT_6$  transformaciju.
- Objasnite tri koraka metode *podjeli-pa-vladaj* na primjeru razlaganja  $DFT_6$  transformacije (razložite niz  $x[n]$  trajanja 6 uzoraka po stupcima u  $2 \times 3$  tablicu).
  - Pokažite kako je potrebno povezati dva  $DFT_3$  bloka da bi dobili jedan  $DFT_6$  blok. Koristite decimaciju u vremenu.
- 35.** Razmatramo signal konačnog trajanja  $x[n] = \{1, 0, 1, 0\}$ . Za dani signal želimo brzim postupkom izračunati diskretnu Fourierovu transformaciju u četiri točke ( $DFT_4$ ).
- Objasnite što je to FFT postupak. Kolika je asimptotska složenost u broju operacija Radix-2 FFT postupka?
  - Razložite  $DFT_4$  transformaciju na dvije  $DFT_2$  transformacije korištenjem decimacije u vremenu. Nacrtajte graf tijeka signala za dobiveno razlaganje. Izračunajte vrijednost u svakom čvoru grafa za zadani signal  $x[n]$ .
  - Razložite  $DFT_4$  transformaciju na dvije  $DFT_2$  transformacije korištenjem decimacije u frekvenciji. Nacrtajte graf tijeka signala za dobiveno razlaganje. Izračunajte vrijednost u svakom čvoru grafa za zadani signal  $x[n]$ .
- 36.** Razmatramo signal konačnog trajanja  $x[n] = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0\}$ . označimo s  $x_1[n]$  i  $x_2[n]$  nizove koji sadrže parne i neparne uzorke niza  $x[n]$ , odnosno  $x_1[n] = x[2n] = \{1, 1, 1, 1\}$  i  $x_2[n] = x[2n+1] = \{0, 0, 0, 0\}$
- Ukratko objasnite što je RE2FFT i što je REDFFT postupak?
  - Korištenjem jedne  $DFT_4$  transformacije izračunajte  $DFT_4$  transformacije realnih nizova  $x_1[n]$  i  $x_2[n]$ .
  - Korištenjem jedne  $DFT_4$  transformacije izračunajte  $DFT_8$  transformaciju niza  $x[n]$ .
- 37.** Želimo efikasno izračunati  $DFT_8$  transformaciju signala  $x[n] = \{1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0\}$ .
- Objasnite jedan stupanj razlaganja za brzu Fourierovu transformaciju koji koristi korijen-2 decimaciju u vremenu (eng. DIT Radix-2 FFT).
  - U cijelosti razložite  $DFT_8$  transformaciju korištenjem postupka iz podzadatka a).
  - Nacrtajte graf toka signala za dobiveno razlaganje i na njemu jasno označite ulazne i izlazne signale te sve faktore.



d) Za graf iz podzadatka c) izračunajte vrijednost u svakom čvoru grafa i izlazne vrijednosti za zadani ulaz  $x[n]$ .

**38.** Razmatramo diskretnu Fourierovu transformaciju za signale konačnog trajanja duljine 8 uzoraka.

- a) Opišite jedan stupanj razlaganja DFT transformacije koji koristi korijen-2 decimaciju u vremenu (eng. DIT radix-2 FFT).
- b) Metodom podijeli pa vladaj razložite  $\text{DFT}_8$  transformaciju na četiri  $\text{DFT}_2$  transformacije.
- c) **(3 boda)** Skicirajte izvedbu  $\text{DFT}_8$  transformacije pomoću 4 bloka za  $\text{DFT}_2$  transformaciju.

**39.** Razmatramo diskretnu Fourierovu transformaciju za signale konačnog trajanja duljine 4 uzoraka.

- a) Objasnite jedan stupanj razlaganja za brzu Fourierovu transformaciju koji koristi korijen-2 decimaciju u frekvenciji (eng. DIF Radix-2 FFT).
- b) Razložite  $\text{DFT}_4$  transformaciju do kraja koristeći decimaciju u frekvenciji.
- c) Skicirajte graf tijeka signala za razlaganje iz b) podzadatka.

**40.** Razmatramo efikasnu realizaciju diskretne Fourierove transformacije.

- a) Opišite jedan stupanj razlaganja  $\text{DFT}_{2N}$  transformacije koji koristi korijen-2 decimaciju u vremenu (eng. DIT radix-2 FFT) općenitog niza duljine  $2N$  uzoraka.
- b) Opišite jedan stupanj razlaganja  $\text{DFT}_N$  transformacije koji koristi korijen-2 decimaciju u frekvenciji (eng. DIF radix-2 FFT) općenitog niza duljine  $2N$  uzoraka.
- c) Skicirajte proizvoljnu izvedbu  $\text{DFT}_4$  transformacije pomoću 2 bloka za  $\text{DFT}_2$  transformaciju. Označite na skici ulaze, izlaze i vrijednosti koeficijenata.
- d) Opišite korake za transponiranje filtarske strukture i transponirajte strukturu iz prethodnog podzadatka. Koju izvedbu  $\text{DFT}_4$  transformacije ste dobili?

**41.** Razmatramo diskretnu Fourierovu transformaciju za signale konačnog trajanja duljine 4 uzoraka.

- a) Objasnite jedan stupanj razlaganja za brzu Fourierovu transformaciju koji koristi korijen-2 decimaciju u vremenu (eng. DIT Radix-2 FFT).
- b) Razložite  $\text{DFT}_4$  transformaciju do kraja koristeći decimaciju u vremenu.
- c) Skicirajte graf tijeka signala za razlaganje iz b) podzadatka.

**42.** Raspolažete s dva  $\text{DFT}_4$  bloka koja trebate povezati kako bi dobili strukturu za računanje  $\text{DFT}_8$  transformacije korištenjem *decimacije u frekvenciji*.

- a) Objasnite jedan stupanj razlaganja za brzu Fourierovu transformaciju koji koristi korijen-2 decimaciju u frekvenciji (eng. *DIF Radix-2 FFT*).
- b) Provedite razlaganje  $\text{DFT}_8$  transformacije na dvije  $\text{DFT}_4$  transformacije.
- c) Nacrtajte graf toka signala za dobiveno razlaganje i na njemu jasno označite ulazne i izlazne signale te sve faktore.

**43.** Raspolažete s dva  $\text{DFT}_5$  bloka. Pomoću ta dva bloka želimo realizirati  $\text{DFT}_{10}$  transformaciju.

- a) Objasnite tri koraka metode *podjeli-pa-vladaj* na primjeru razlaganja  $\text{DFT}_{10}$  transformacije (razložite niz  $x[n]$  trajanja 10 uzoraka po stupcima u  $2 \times 5$  tablicu).
- b) Pokažite kako je potrebno povezati dva  $\text{DFT}_5$  bloka da bi dobili jedan  $\text{DFT}_{10}$  blok. Koristite decimaciju u vremenu.

**44.** Razmatramo realizacije  $\text{DFT}_8$  transformacije kauzalnih signala konačnog trajanja.

- a) Objasnite tri koraka metode *podjeli-pa-vladaj* na primjeru razlaganja  $\text{DFT}_8$  transformacije (razložite općeniti niz  $x[n]$  trajanja 8 uzoraka po stupcima u  $2 \times 4$  tablicu).
- b) Nacrtajte graf toka signala za razlaganje iz podzadatka a) i na njemu jasno označite ulazne i izlazne signale te sve faktore.

- c) Objasnite jedan stupanj razlaganja za brzu Fourierovu transformaciju koji koristi korijen-2 decimaciju u vremenu (eng. DIT Radix-2 FFT).
- d) Nacrtajte graf toka signala za razlaganje iz podzadatka c) za  $\text{DFT}_8$  transformaciju i na njemu jasno označite ulazne i izlazne signale te sve faktore.
- 45.** Neka su zadani realni kauzalni nizovi  $x[n]$  i  $y[n]$ , svaki duljine  $N$  uzoraka. Njihove  $\text{DFT}_N$  transformacije želimo efikasno izračunati korištenjem samo jedne kompleksne  $\text{DFT}_N$  transformacije pomoću RE2FFT postupka.
- a) Ako je  $X[k]$   $\text{DFT}_N$  transformacija signala  $x[n]$ , matematički dokažite da vrijedi  $X[k] = X^*[N - k]$ .
- b) Izvedite RE2FFT izraze za računanje  $\text{DFT}_N$  transformacije zadana dva niza pomoću jedne kompleksne  $\text{DFT}_N$  transformacije.
- 46.** Razmatramo signal konačnog trajanja  $x[n] = \{1, 2, 0, 0, 1, 2, 0, 0\}$ . Označimo s  $x_1[n]$  i  $x_2[n]$  nizove koji sadrže parne i neparne uzorke niza  $x[n]$ , odnosno  $x_1[n] = x[2n] = \{1, 0, 1, 0\}$  i  $x_2[n] = x[2n + 1] = \{2, 0, 2, 0\}$
- a) Ukratko objasnite što je RE2FFT i što je REDFFT postupak?
- b) Korištenjem jedne  $\text{DFT}_4$  transformacije izračunajte  $\text{DFT}_4$  transformacije realnih nizova  $x_1[n]$  i  $x_2[n]$ .
- c) Korištenjem jedne  $\text{DFT}_4$  transformacije izračunajte  $\text{DFT}_8$  transformaciju niza  $x[n]$ .
- 47.** Raspolazete s dva  $\text{DFT}_5$  bloka. Pomoću ta dva bloka želimo realizirati  $\text{DFT}_{10}$  transformaciju.
- a) Objasnite tri koraka metode *podjeli-pa-vladaj* na primjeru razlaganja  $\text{DFT}_{10}$  transformacije (razložite niz  $x[n]$  trajanja 10 uzoraka po stupcima u  $2 \times 5$  tablicu).
- b) Pokažite kako je potrebno povezati dva  $\text{DFT}_5$  bloka da bi dobili jedan  $\text{DFT}_{10}$  blok. Koristite decimaciju u vremenu.

48. Promatramo vremenski diskretan vremenski stalan linearan sustav čiji jedan period prijenosne funkcije u domeni vremenski diskretne Fourierove transformacije jest

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{j\pi/2}, & -\pi < \omega < 0 \\ e^{-j\pi/2} & 0 < \omega < \pi \\ 0 & \omega = -\pi, 0, \pi \end{cases}.$$

- Izračunajte impulsni odziv zadanog sustava. Je li sustav FIR ili IIR i na temelju čega to zaključujete?
- Je li moguće odrediti polove i nule zadanog sustava? Ako jest odredite polove i nule, a ako nije objasnite zašto!

49. Neka je zadan vremenski diskretan sustav opisan diferencijskom jednačbom

$$y[n] = -x[n+1] + bx[n] - 3x[n-1] + x[n-2],$$

gdje je  $b$  realni parametar.

- Izračunajte impulsni odziv sustava.
  - Radi li se o FIR ili IIR sustavu?
  - Za koje vrijednosti realnog parametra  $b$  sustav ima linearnu fazu?
  - Za vrijednost parametra  $b$  određenu u prethodnom podzadatku izračunajte prijenosnu funkciju sustava, skicirajte njegovu amplitudnu i faznu karakteristiku, te izračunajte grupno vrijeme kašnjenja sustava.
50. Promatramo svepropusni kauzalni vremenski nepromjenjiv diskretni sustav za kojeg je poznato da ima četiri nule:  $n_1 = -2 - 2j$ ,  $n_2 = -2 + 2j$ ,  $n_3 = 2 - 2j$  i  $n_4 = 2 + 2j$ .
- Odredite polove sustava. Je li zadani sustav stabilan? Objasnite!
  - Izračunajte prijenosnu funkciju sustava.
  - Izračunajte impulsni odziv sustava.
  - Izračunajte amplitudno-frekvencijsku karakteristiku sustava.

51. Promatramo diskretan vremenski nepromjenjiv sustav zadan diferencijskom jednačbom

$$y[n] = 2u[n+1] + 4u[n] + 4u[n-1] + 2u[n-2].$$

- Radi li se o FIR ili IIR sustavu i na temelju čega to zaključujete?
- Izračunajte impulsni odziv  $h[n]$  i prijenosnu funkciju sustava  $H(z)$ .
- Izračunajte i skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku sustava.
- Izračunajte grupno vrijeme kašnjenja zadanog sustava.
- Kako se mijenja fazna karakteristika sustava ako uzorke impulsnog odziva pomaknemo za jedno mjesto u desno?

52. Digitalni filter zadan je na temelju impulsnog odziva  $h[n] = \{\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}, \underline{a}, \frac{1}{2}\}$ , gdje je  $a$  realni parametar.

- Izračunajte prijenosnu funkciju filtra  $H(z)$ .
- Radi li se o FIR ili IIR filtru i na temelju čega to zaključujete?
- Za koje vrijednosti realnog parametra  $a$  sustav ima linearnu fazu?
- Za vrijednost parametra  $a$  određenu u prethodnom podzadatku izračunajte i skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku filtra, te izračunajte grupno vrijeme kašnjenja sustava.

53. Vremenski diskretan sustav opisan je diferencijskom jednačbom  $y[n] = u[n+1] + 2u[n] - 2u[n-2] - u[n-3]$ .

- Radi li se o FIR ili IIR sustavu, te je li on stabilan? Objasnite svoje odgovore.
- Izračunajte impulsni odziv  $h[n]$  i prijenosnu funkciju sustava  $H(z)$ .
- Izračunajte i nacrtajte amplitudnu i faznu frekvencijsku karakteristiku te grupno vrijeme kašnjenja.

54. Promatramo digitalni filter opisan jednađbom  $4y[n] + y[n - 2] = 4u[n] - 4u[n - 2]$ .

- a) Odredite prijenosnu funkciju zadanog sustava. Radi li se o FIR ili IIR sustavu i zašto?
- b) Izračunajte polove i nule zadanog sustava. Je li sustav stabilan i na temelju čega to zaključujete?
- c) Izračunajte impulsni odziv filtra.
- d) O kojem se tipu filtra radi (NP, VP, PP, PB) i na temelju čega to zaključujete?

55. Promatramo linearan kauzalni vremenski diskretni sustav zadan prijenosnom funkcijom  $H(z) = \frac{8 - 2z^{-1} - z^{-2}}{6 + 5z^{-1} + z^{-2}}$ .

- a) Izračunajte impulsni odziv zadanog sustava? Je li zadani sustav IIR ili FIR sustav?
- b) Odredite polove i nule zadanog sustava. Je li sustav stabilan? Objasnite!
- c) Za zadani sustav skicirajte graf toka signala koji odgovara direktnoj II realizaciji. Zatim transponirajte dobivenu strukturu.

56. Vremenski diskretni LTI sustav opisan je diferencijskom jednađbom  $4y[n] - y[n - 2] = u[n] - 4u[n - 2]$ .

- a) Radi li se o FIR ili IIR sustavu, te je li on stabilan? Objasnite svoje odgovore.
- b) Izračunajte impulsni odziv  $h[n]$  i prijenosnu funkciju sustava  $H(z)$ .
- c) Izračunajte i skicirajte amplitudnu frekvencijsku karakteristiku.

57. Neka je zadan vremenski diskretni sustav opisan diferencijskom jednađbom

$$y[n] = -x[n + 1] + bx[n] - 3x[n - 1] + x[n - 2],$$

gdje je  $b$  realni parametar.

- a) Izračunajte impulsni odziv sustava.
- b) Radi li se o FIR ili IIR sustavu?
- c) Za koje vrijednosti realnog parametra  $b$  sustav ima linearnu fazu?
- d) Za vrijednost parametra  $b$  određenu u prethodnom podzadatku izračunajte prijenosnu funkciju sustava, skicirajte njegovu amplitudnu i faznu karakteristiku, te izračunajte grupno vrijeme kašnjenja sustava.

58. Zadana je jednađba diferencija  $y[n] = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^2 u[n - i]$  koja opisuje usrednjivač širine 3 uzorka i ulazni signal  $u[n] = \{1, 4, 0, 2, 2, 0, 1, 4\}$ .

- a) Izračunajte impulsni odziv  $h[n]$  i prijenosnu funkciju zadanog sustava  $H(z)$ .
- b) Izračunajte amplitudnu karakteristiku, faznu karakteristiku i grupno vrijeme kašnjenja sustava.
- c) Nacrtajte amplitudnu i faznu karakteristiku sustava i označite vrijednosti nultočaka i ekstrema.
- d) Izračunajte rezultat linearne konvolucije impulsnog odziva  $h[n]$  sa signalom  $u[n]$ .
- e) Izračunajte rezultat cirkularne konvolucije ( $N = 8$ ) impulsnog odziva  $h[n]$  sa signalom  $u[n]$  postupkom u  $DFT$  domeni.

59. Promatramo vremenski diskretni sustav opisan jednađbom  $4y[n] - y[n - 2] = 3u[n]$ .

- a) Izračunajte impulsni odziv zadanog sustava te odredite je li sustav FIR ili IIR.
- b) Odredite prijenosnu funkciju zadanog sustava.
- c) Izračunajte polove i nule zadanog sustava.
- d) Izračunajte i skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku zadanog sustava.
- e) Ima li zadani sustav linearnu fazu? Ako ima odredite kojem od četiri tipa FIR filtera pripada (I, II, III ili IV), a ako nema odredite kojoj vrsti filtra zadani sustav pripada (NP, VP, PP ili PB).