Digitalna obradba signala

Profesor
Branko Jeren

19. rujna 2008.

Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala

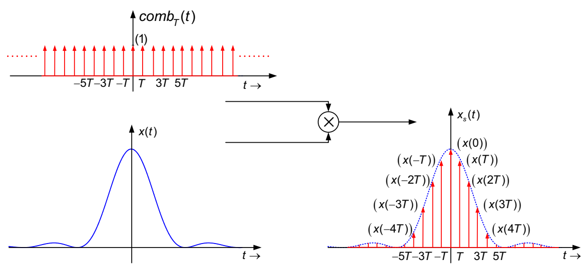
- aperiodični diskretni signal možemo generirati iz kontinuiranog aperiodičnog signala postupkom otipkavanja
- pokazuje se da je postupak otipkavanja ekvivalentan amplitudnoj modulaciji periodičnog niza impulsa
- signal $x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, koji se otipkava, množi se s nizom Diracovih δ impulsa kako bi se generirao novi signal $x_s(t)$

$$x_s(t) = x(t)comb_T(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

- postupak otipkavanja, ili uzimanja uzoraka, vremenski kontinuiranog signala možemo interpretirati kao pridruživanje, funkciji x, niza impulsa čiji je intenzitet proporcionalan njezinim vrijednostima na mjestu impulsa

Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala



Spektar otipkanog signala

- određuje se spektar signala $x_s(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$,
- periodični niz Diracovih δ impulsa možemo prikazati Fourierovim redom

$$comb_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_s t} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t}, \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

gdje je, $X_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-jk\Omega_s t}\,dt = \frac{1}{T}$, pa $x_s(t)$ prelazi u

$$x_s(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = x(t)\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t} =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)e^{jk\Omega_s t}$$

Spektar otipkanog signala

- primjenom svojstva frekvencijskog pomaka, množenje s $e^{jk\Omega_s t}$ u vremenskoj domeni rezultira u frekvencijskom pomaku, pa je Fourierova transformacija[1] signala x_s

$$\forall\Omega \in \mathbb{R}, \quad X_s(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$

- do istog rezultata dolazi se primjenom svojstva množenja u vremenskoj domeni tj. konvolucije u frekvencijskoj domeni, i ovdje se pokazuje i taj postupak
- prije je pokazano kako je

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}\{comb_T(t)\} = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\frac{2\pi}{T})$$

[1] naravno, do istog rezultata se dolazi i izravnom primjenom CTFT $X_s(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-j\Omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)e^{jk\Omega_s t}e^{-j\Omega t}\,dt$

Spektar otipkanog signala

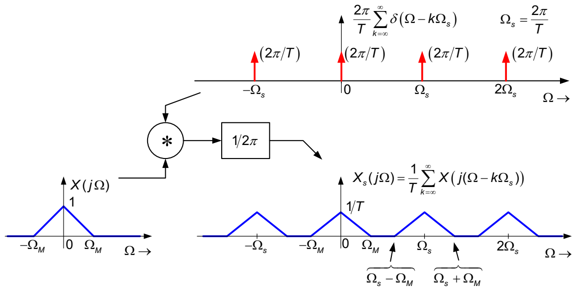
- pa je Fourierova transformacija produkta $x_s(t) = x(t)comb_T(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, i $\forall\Omega \in \mathbb{R}$,

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\Omega) * \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\frac{2\pi}{T}) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\frac{2\pi}{T})) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$

- zaključuje se kako je Fourierova transformacija niza Diracovih δ impulsa, moduliranog s $x(t)$, periodični kontinuirani spektar koji je nastao periodičnim ponavljanjem $X(j\Omega)$
- slijedi prikaz postupka određivanja spektra, korištenjem svojstva množenja u vremenskoj domeni

Spektar otipkanog signala



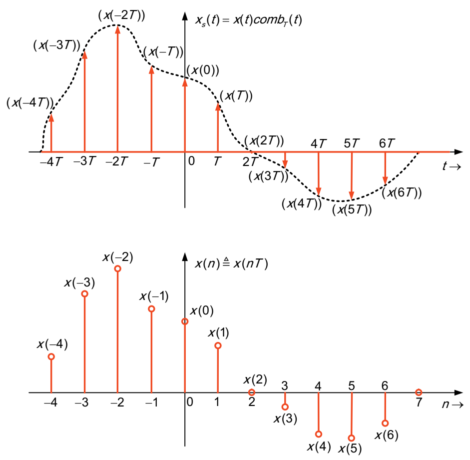
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala

- razmotrimo još jednom postupak "otipkavanja" postupkom modulacije niza Diracovih δ impulsa s vremenski kontinuiranim signalom $x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$x_s(t) = x(t)comb_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

- rezultirajući $x_s(t)$ je niz δ impulsa čiji su intenziteti (površine) jednaki vrijednostima x u trenucima $t_n = nT$
- ako izdvojimo vrijednosti ovih impulsa i složimo ih u niz, nastaje vremenski diskretan niz uzoraka $x(n) \triangleq x(nT)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,
- zato možemo kazati kako signal $x_s(t)$ predstavlja rezultat otipkavanja vremenski kontinuiranog signala $x(t)$

Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala



Spektar otipkanog signala

- razmotrimo spektre ovih signala
- Fourierova transformacija signala

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x_s(t)\} = X_s(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)\Big]e^{-j\Omega t}\,dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-j\Omega t}\,dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\Omega nT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\Omega T}\end{aligned}$$

Spektar otipkanog signala

- uz $x(n) \triangleq x(nT)$, gdje s $\triangleq$ označavamo jednako po definiciji, i uz[2] $\omega = \Omega T$, Fourierovu transformaciju aperiodičnog diskretnog signala možemo izraziti kao

$$\mathcal{F}\{x_s(t)\} = X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\Omega T} \triangleq$$

$$\triangleq X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

- spektar $X_s(j\Omega)$ je periodičan s periodom Ω_s pa će, zbog $\omega = \Omega T$, spektar $X(e^{j\omega})$ biti periodičan s periodom[3] 2π

[2] pokazano kod postupka otipkavanja sinusoide: $x_a(t) = cos(\Omega t)$ za $t = nT$, $x_a(nT) = cos(n\underbrace{\Omega T}_{\omega}) = cos(\omega n)$

[3] jer je $\Omega_s T = \Omega_s \frac{2\pi}{\Omega_s} = 2\pi$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- za aperiodične diskretne signale $x(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, definira se Fourierova transformacija, koja se prema engleskom nazivu označava DTFT – discrete–time Fourier transform

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \qquad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

- $X(e^{j\omega})$ je dekompozicija aperiodičnog diskretnog signala $x(n)$ na njegove frekvencijske komponente
- $X(e^{j\omega})$, kao i u slučaju kontinuiranih signala, nazivamo spektrom signala $x(n)$, za $\forall n \in \mathbb{Z}$
- važno je uočiti kako je spektar vremenski kontinuiranog signala definiran za $\Omega \in (-\infty, \infty)$, a spektar vremenski diskretnog signala je iz područja $(-\pi, \pi)$ ili, ekvivalentno, $(0, 2\pi)$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- evidentno je da je spektar $X(e^{j\omega})$ kontinuiran, zbog aperiodičnosti signala u vremenskoj domeni, i periodičan s periodom 2π, jer je

$$X(e^{j(\omega+2\pi k)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi k)n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}e^{-j2\pi kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$$

- ovo svojstvo je izravna posljedica činjenice da je frekvencijsko područje bilo kojeg diskretnog signala omeđeno na $(-\pi, \pi)$ ili, $(0, 2\pi)$ i da je svaka frekvencija izvan ovog intervala ekvivalentna odgovarajućoj frekvenciji unutar intervala

Signali i sustavi
školska godina 2008/2009
Cjelina 2.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala
Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- kako je spektar periodičan, izraz za DTFT predstavlja Fourierov red[4], a $x(n)$ koeficijente tog Fourierovog reda

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}, \qquad \omega \in \mathbb{R}$$

- koeficijente Fourierovog reda, dakle $x(n)$, određujemo, sličnim izvodom kao i prije u slučaju Fourierovog reda periodičnih kontinuiranih signala,
- množenjem obje strane s $e^{j\omega m}$, i integracijom preko intervala $(-\pi, \pi)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega m}\, d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right] e^{j\omega m}\, d\omega$$

[4] ovaj puta u frekvencijskoj domeni

Signali i sustavi
školska godina 2008/2009
Cjelina 2.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala
Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega m}\, d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right] e^{j\omega m}\, d\omega$$

- desna strana se preuređuje i izračunava:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}\, d\omega = \begin{cases} 2\pi x(m) & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

pa je konačno:

$$x(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega m}\, d\omega$$

Signali i sustavi
školska godina 2008/2009
Cjelina 2.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala
Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- zaključno, par za Fourierovu transformaciju aperiodičnih vremenski diskretnih signala je

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \qquad (1)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \qquad (2)$$

- izraz za Fourierovu transformaciju vremenski diskretnih aperiodičnih signala (DTFT) konvergira za

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty,$$

ili za,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

Signali i sustavi
školska godina 2008/2009
Cjelina 2.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala
Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

Veza DTFT i z – transformacije

- usporedimo izraze za Fourierovu i dvostranu z – transformaciju,[5] za $\forall\omega, \forall z \in \mathbb{C}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \qquad \mathcal{Z}\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- očigledno je kako je Fourierova transformacija vremenski diskretnog signala jednaka z – transformaciji na jediničnoj kružnici, $z = e^{j\omega}$, kompleksne ravnine
- pa, u slučaju da područje konvergencije $\mathcal{Z}$–transformacije sadrži jediničnu kružnicu[6] $z = e^{j\omega}$, vrijedi, $\forall z \in \mathbb{C}$, i $\forall\omega \in \mathbb{R}$

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

[5] Detaljnije o dvostranoj z – transformaciji kasnije tijekom semestra

[6] to je i razlog da je oznaka za $X(e^{j\omega})$ upravo tako izabrana

Signali i sustavi
školska godina 2008/2009
Cjelina 2.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala
Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- Fourierovom transformacijom vremenski diskretnom aperiodičnom signalu, definiranom u vremenskoj domeni, pridružuje se frekvencijski kontinuiran periodičan signal, definiran u frekvencijskoj domeni
- to pridruživanje označujemo kao *DTFT*, prema engleskom Discrete-time Fourier transform, i definiramo kao

$$DTFT : DisktSignali \to KontPeriod_{2\pi}$$

$$\forall\omega \in \mathbb{R}, \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

za $\forall x \in DisktSignali$ i $\forall X \in KontPeriod_{2\pi}$

Inverzna Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- inverznom Fourierovom transformacijom frekvencijski kontinuiranom periodičnom signalu (spektru), definiranom u frekvencijskoj domeni, pridružuje se vremenski diskretan aperiodičan signal, definiran u vremenskoj domeni
- to pridruživanje označujemo *IDTFT*, prema engleskom Inverse Discrete-time Fourier transform, i definiramo kao

$$IDTFT : KontPeriod_{2\pi} \to DisktSignali$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

za $\forall X \in KontPeriod_{2\pi}$ i $\forall x \in DisktSignali$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- Parsevalova jednakost za aperiodične diskretne signale konačne energije je

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

izvod: energija aperiodičkog diskretnog signala $x(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, je

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

uz $|x(n)|^2 = x(n)x^*(n)$ slijedi:

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n}\, d\omega\right]$$

zamjenom redosljeda integracije i sumacije

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})\underbrace{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right]}_{X(e^{j\omega})} d\omega$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})X(e^{j\omega})\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2\, d\omega$$

pa vrijedi: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- spektar je kompleksna funkcija i uobičajen je prikaz kao

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$

gdje su:

$$|X(e^{j\omega})| \quad \text{amplitudni spektar}$$
$$\angle X(e^{j\omega}) \quad \text{fazni spektar}$$

- za realni signal vrijedi:

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

čemu je ekvivalentno:

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \text{ i } \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$$

$$Re\{X(e^{j\omega})\} = Re\{X(e^{-j\omega})\} \text{ i } Im\{X(e^{j\omega})\} = -Im\{X(e^{-j\omega})\}$$

Fourierova transformacija vremenski diskretnog aperiodičnog signala – kauzalna eksponencijala

- izračunava se DTFT aperiodičnog vremenski diskretnog signala

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad -1 < \alpha < 1, \quad x(n) = \alpha^n \mu(n)$$

za $\alpha = 0.5$ i $\alpha = -0.5$

rješenje: signal x zadovoljava uvjet konvergencije Fourierove transformacije jer je, uz $|\alpha| < 1$, zadovoljeno[7]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^n = \frac{1}{1-|\alpha|} < \infty$$

[7] koristi se izraz za sumu geometrijskog reda

Fourierova transformacija vremenski diskretnog aperiodičnog signala – kauzalna eksponencijala

- Fourierova transformacija signala x je

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\omega})^n$$

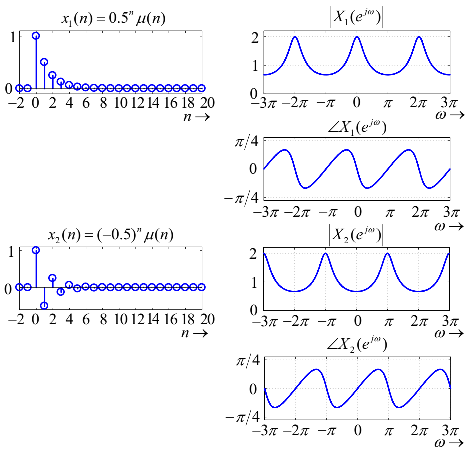
budući je $|\alpha e^{-j\omega}| = |\alpha| < 1$, korištenjem izraza za sumu geometrijskog reda slijedi

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-\alpha\cos(\omega) + j\alpha\sin(\omega)}$$

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha\cos(\omega))^2 + (\alpha\sin(\omega))^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega))}}$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = -\arctan\left[\frac{\alpha\sin(\omega)}{1-\alpha\cos(\omega)}\right]$$

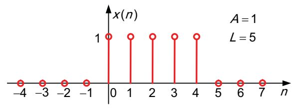
Fourierova transformacija vremenski diskretnog aperiodičnog signala – kauzalna eksponencijala



Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – pravokutni signal

- određuje se Fourierova transformacija aperiodičnog pravokutnog impulsa zadanog kao

$$x(n) = \begin{cases} A, & 0 \le n \le L-1 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases}$$

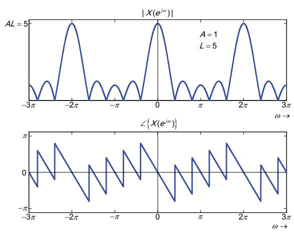


$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} A e^{-j\omega n} = A \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}} =$$
$$= A e^{-j\frac{\omega}{2}(L-1)} \frac{\sin\left(\frac{\omega L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

- pa su amplitudni (paran jer je signal realan) i fazni spektar (neparan jer je signal realan) kontinuirani i periodični

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – pravokutni signal

$$|X(e^{j\omega})| = \begin{cases} |A|L & \omega = 0 \\ |A| \left| \frac{\sin(\frac{\omega L}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right| & \text{inače} \end{cases}$$



$$\angle\{X(e^{j\omega})\} = \angle A - \frac{\omega}{2}(L-1) + \\ + \angle \frac{\sin\left(\frac{\omega L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

napomena[8]

[8] faza realne veličine je nula ako je veličina pozitivna a π kada je veličina negativna – vidi prikaznicu 17. cjeline 6.

Fourierova transformacija Kroneckerovog δ

- Foureirova transformacija vremenski diskretnog jediničnog impulsa δ je

$$DTFT\{\delta(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\omega n} = 1$$

- Fourierova transformacija vremenski pomaknutog Kroneckerovog delta $\delta(n - n_0)$ je

$$DTFT\{\delta(n - n_0)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - n_0) e^{-j\omega n} = e^{-jn_0\omega}$$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – trokutni signal

- određuje se Fourierova transformacija aperiodičnog niza zadanog kao[9]
  $x(n) = \{\ldots 0, 0, \underline{1}, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, \ldots\}$
  signal se može, za $\forall n \in \mathbb{Z}$, prikazati i kao

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 5\delta(n-4) + \\ + 4\delta(n-5) + 3\delta(n-6) + 2\delta(n-7) + \delta(n-8)$$

[9] podcrtan nulti uzorak $x(0)$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – trokutni signal (nastavak 1)

- uzimajući u obzir Fourierovu transformaciju Kroneckerovog δ moguće je odrediti Fourierovu transformaciju signala x

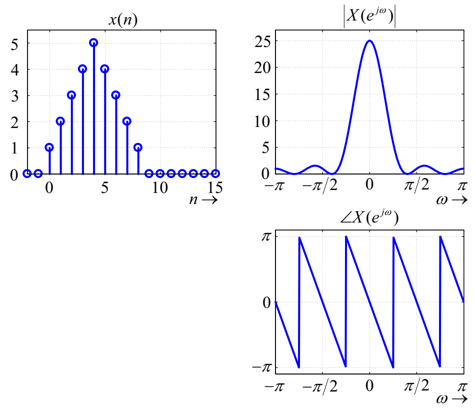
$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 5\delta(n-4) + \\ + 4\delta(n-5) + 3\delta(n-6) + 2\delta(n-7) + \delta(n-8)$$

Fourierova transformacija signala $x(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ je

$$X(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + 3e^{-j2\omega} + 4e^{-j3\omega} + 5e^{-j4\omega} + \\ + 4e^{-j5\omega} + 3e^{-j6\omega} + 2e^{-j7\omega} + e^{-j8\omega}$$

- na narednoj prikaznici prikazan je signal $x(n)$ te njegovi amplitudni i fazni spektar

Fourierova transformacija vremenski diskretnog aperiodičnog signala – trokutni signal (nastavak 1)



Signali i sustavi
školska godina 2008/2009
Cjelina 2.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala
Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – trokutni signal (nastavak 1)

- prije je pokazano kako je trokutni signal x moguće prikazati i kao konvoluciju dva pravokutna signala, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$p_L(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le L-1 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases}$$

za $L = 5$

$$(p_5 * p_5)(n) = x(n) = \{\ldots 0, 0, \underline{1}, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, \ldots\}$$

- i za vremenski diskretne signale Fourierovoj transformaciji konvolucije odgovara produkt Fourierovih transformacija oba signala, dakle,

Signali i sustavi
školska godina 2008/2009
Cjelina 2.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala
Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

Svojstva Fourierove transformacije vremenski diskretnih aperiodičnih signala – konvolucija u vremenskoj domeni

- za $X_1(e^{j\omega}) = DTFT\{x_1(n)\}$ i $X_2(e^{j\omega}) = DTFT\{x_2(n)\}$, uz $\forall n \in \mathbb{Z}$ i $\forall \omega \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$DTFT\{(x_1 * x_2)(n)\} = DTFT\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)\right\} = \\ = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

izvod:

$$DTFT\{(x_1 * x_2)(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)\right]e^{-j\omega n} = \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-m)e^{-j\omega n}\right]$$

zamjenom $n - m = k$ slijedi

Signali i sustavi
školska godina 2008/2009
Cjelina 2.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala
Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

Svojstva Fourierove transformacije vremenski diskretnih aperiodičnih signala – konvolucija u vremenskoj domeni

$$DTFT\{(x_1 * x_2)(n)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)e^{-j\omega(m+k)}\right] = \\ = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)e^{-j\omega m}}_{X_1(e^{j\omega})}\underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)e^{-j\omega k}\right]}_{X_2(e^{j\omega})} = \\ = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

Signali i sustavi
školska godina 2008/2009
Cjelina 2.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala
Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – trokutni signal (nastavak 2)

- pokazano je kako je DTFT pravokutnog signala,

$$p_L(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le L-1 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases},$$

$$DTFT\{p_L(n)\} = \begin{cases} L, & \omega = 0 \\ e^{-j\frac{\omega}{2}(L-1)}\dfrac{sin\left(\frac{\omega L}{2}\right)}{sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}, & \text{za ostale } \omega \end{cases}$$

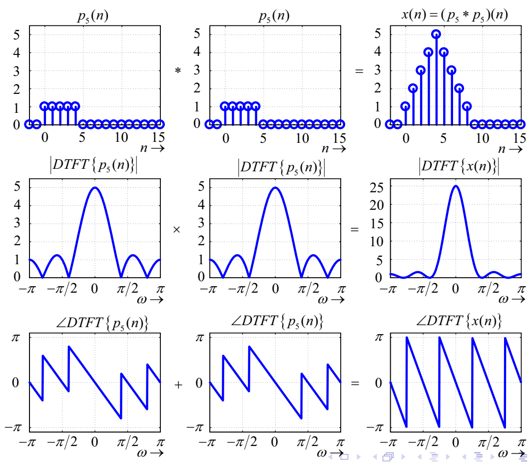
$$DTFT\{(p_L * p_L)(n)\} = DTFT\{p_L(n)\}DTFT\{p_L(n)\}$$

$$DTFT\{(p_L * p_L)(n)\} = \begin{cases} L^2, & \omega = 0 \\ \left[e^{-j\frac{\omega}{2}(L-1)}\dfrac{sin\left(\frac{\omega L}{2}\right)}{sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right]^2, & \text{za ostale } \omega \end{cases}$$

$$DTFT\{(p_5 * p_5)(n)\} = \begin{cases} 25, & \omega = 0 \\ e^{-j4\omega}\dfrac{sin^2\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}, & \text{za ostale } \omega \end{cases}$$

Signali i sustavi
školska godina 2008/2009
Cjelina 2.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala
Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

Fourierova transformacija vremenski diskretnog aperiodičnog signala – trokutni signal (nastavak 2)



Generalizirana Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala – Fourerova transformacija kompleksne eksponencijale

- Fourerova transformacija diskretnog signala $x(n) = e^{j\omega_0 n}$, za $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)n}$$

ne konvergira regularnoj funkciji već nizu Diracovih impulsa, što možemo zaključiti sljedećim razmatranjem

- već je pokazano kako se Fourierova transformacija vremenski kontinuirane eksponencijale $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, može interpretirati kao Diracov impuls na frekvenciji $\Omega = \Omega_0$
- za očekivati je kako će spektar vremenski diskretne kompleksne eksponencijale biti Diracov impuls koji se periodično ponavlja svakih 2π, pa je

Signali i sustavi
školska godina 2008/2009
Cjelina 2.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala
Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

Generalizirana Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala – Fourerova transformacija kompleksne eksponencijale

$$X(e^{j\omega}) = DTFT\{e^{j\omega_0 n}\} = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m)$$

- inverzna Fourerova transformacija potvrđuje ispravnost prethodnog razmatranja[10]

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m)e^{j\omega n}\, d\omega =$$

$$= e^{j(\omega_0 + 2\pi r)n} = e^{j\omega_0 n}$$

[10] uzeti u obzir da postoji samo jedan impuls po intervalu širine 2π, pa je dovoljno uzeti samo jedan član sumacije, npr. $m = r$

Signali i sustavi
školska godina 2008/2009
Cjelina 2.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala
Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

Generalizirana Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala – primjeri

- iz

$$X(e^{j\omega}) = DTFT\{e^{j\omega_0 n}\} = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m)$$

možemo odrediti, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$1 = e^{j0n} \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi m)$$

$$cos(\omega_0 n) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m) + \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m)$$

$$\sin(\omega_0 n) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} j\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m) - j\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m)$$

Signali i sustavi
školska godina 2008/2009
Cjelina 2.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala
Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

Svojstva Fourierove transformacija vremenski diskretnih signala – pomak u vremenskoj domeni

- za $X(e^{j\omega}) = DTFT\{x(n)\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$DTFT\{x(n-m)\} = e^{-j\omega m}X(e^{j\omega})$$

izvod:

$$DTFT\{x(n-m)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)e^{-j\omega n}$$

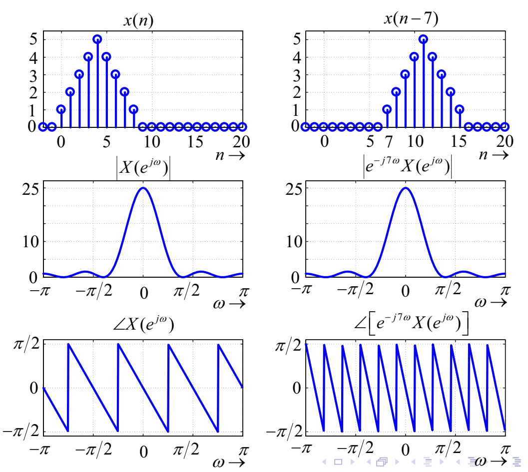
zamjenom $n - m = k$

$$DTFT\{x(n-m)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega(m+k)}$$

$$DTFT\{x(n-m)\} = e^{-j\omega m} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k}}_{X(e^{j\omega})} = e^{-j\omega m}X(e^{j\omega})$$

Signali i sustavi
školska godina 2008/2009
Cjelina 2.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala
Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

Fourierova transformacija vremenski diskretnog aperiodičnog signala – pomak u vremenskoj domeni



Signali i sustavi
školska godina 2008/2009
Cjelina 2.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala
Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

Svojstva Fourierove transformacija vremenski diskretnih signala – pomak u frekvencijskoj domeni

- za $X(e^{j\omega}) = DTFT\{x(n)\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$DTFT\{e^{j\omega_0 n}x(n)\} = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

izvod:

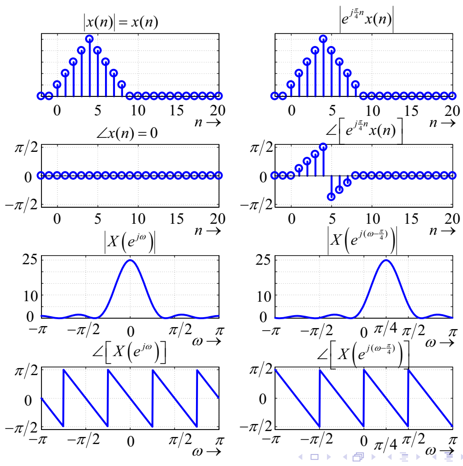
$$DTFT\{e^{j\omega_0 n}x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$DTFT\{e^{j\omega_0 n}x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega-\omega_0)n} = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

primjer: $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$$DTFT\{e^{j\frac{\pi}{4}n}x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega-\frac{\pi}{4})n} = X(e^{j(\omega-\frac{\pi}{4})})$$

Svojstva Fourierove transformacija vremenski diskretnih signala – pomak u frekvencijskoj domeni



Svojstva Fourierove transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvencijskoj domeni

- za $X_1(e^{j\omega}) = DTFT\{x_1(n)\}$, i $X_2(e^{j\omega}) = DTFT\{x_2(n)\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$DTFT\{x_1(n)x_2(n)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\psi})X_2(e^{j(\omega-\psi)})\,d\psi$$

izvod:

$$DTFT\{x_1(n)x_2(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(x_1(n)x_2(n))e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\psi})e^{j\psi n}\,d\psi\right]x_2(n)e^{-j\omega n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\psi})\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j(\omega-\psi)n}\right]d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\psi})X_2(e^{j(\omega-\psi)})\,d\psi$$

Svojstva Fourierove transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvencijskoj domeni

- određuje se DTFT produkta svevremenske vremenski diskretne sinusoide, $x_1(n) = \cos(\omega_0 n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, i aperiodičnog vremenski diskretnog signala $x_2(n)$,
- Fourierova transformacija sinusoide je periodična i iznosi

$$X_1(e^{j\omega}) = \pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+\omega_0-2\pi m) + \pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi m)$$

odnosno, za $m = 0$,

$$X_1(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega+\omega_0) + \pi\delta(\omega-\omega_0)$$

Svojstva Fourierove transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvencijskoj domeni

- pa je

$$DTFT\{\cos(\omega_0 n)x_2(n)\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\pi\delta(\psi+\omega_0)+\pi\delta(\psi-\omega_0)]X_2(e^{j(\omega-\psi)})\,d\psi =$$

$$= \frac{1}{2}X_2(e^{j(\omega+\omega_0)}) + \frac{1}{2}X_2(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

- množenje svevremenskog sinusoidalnog signala sa signalom x_2, možemo interpretirati kao modulaciju amplitude sinusoidalnog signala sa informacijom sadržanom u signalu x_2 – u komunikacijama se ovaj postupak naziva amplitudna modulacija

Svojstva Fourierove transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvencijskoj domeni

- slijede dva primjera
  - umnožak sinusoidalnog signala $x_1(n) = cos(\frac{\pi}{4}n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, s pravokutnim signalom, $L = 16$,

$$x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le L-1 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases},$$

  - umnožak[11] dva, vremenski omeđena sinusoidalna signala

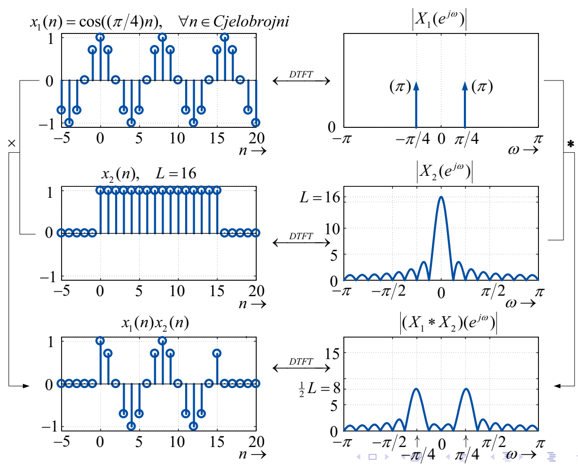
$$x_1(n) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{4}n), & 0 \le n \le 63 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases},$$

i

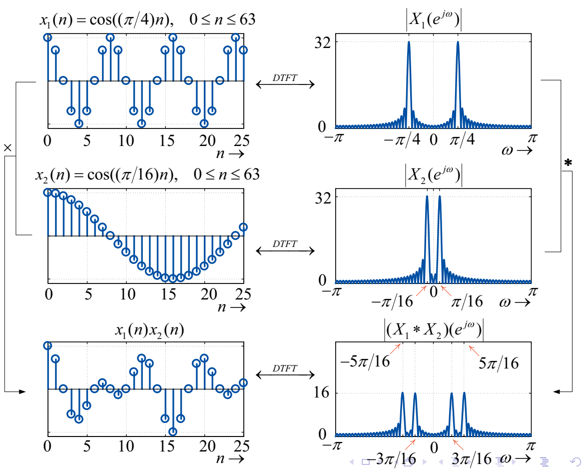
$$x_2(n) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{16}n), & 0 \le n \le 63 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases},$$

[11] podsjeta: $\cos(\frac{\pi}{4}n)\cos(\frac{\pi}{16}n) = \frac{1}{2}\cos(\frac{3\pi}{16}n) + \frac{1}{2}\cos(\frac{5\pi}{16}n)$

Svojstva Fourierove transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvencijskoj domeni



Svojstva Fourierove transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvencijskoj domeni



Svojstva Fourierove transformacija vremenski diskretnih signala – inverzija vremenske osi

- za $X(e^{j\omega}) = DTFT\{x(n)\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$DTFT\{x(-n)\} = X(e^{-j\omega})$$

izvod:

$$DTFT\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-j\omega n}$$

zamjenom $n = -m$

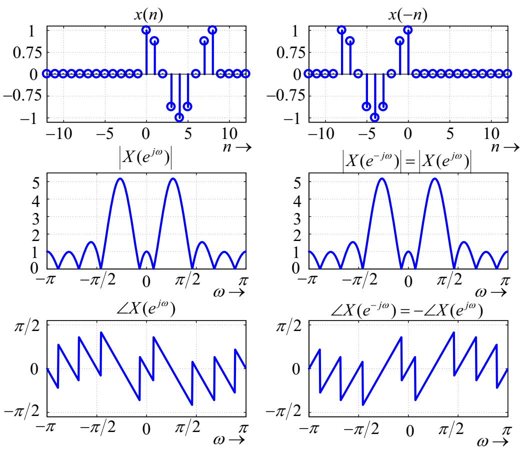
$$DTFT\{x(-n)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{j\omega m} = X(e^{-j\omega})$$

$$DTFT\{x(-n)\} = |X(e^{-j\omega})|e^{\angle X(e^{-j\omega})}$$

za realni signal $x(n)$ vrijedi

$$DTFT\{x(-n)\} = |X(e^{-j\omega})|e^{\angle X(e^{-j\omega})} = |X(e^{j\omega})|e^{-\angle X(e^{j\omega})}$$

Svojstva Fourierove transformacija vremenski diskretnih signala – inverzija vremenske osi



Tablica parova osnovnih Fourierovih transformacija

Vrem. domena: $x(n)$	Frek. domena: $X(e^{j\omega})$
$\delta(n)$	1
$\delta(n-n_0)$	$e^{-j\omega n_0}$
$\mu(n)$	$\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi m)+\frac{1}{1-e^{-j\omega}}$
1	$2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi m)$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi m)$
$\begin{cases}1, & 0\le n\le L-1\\ 0, & \text{za ostale } n\end{cases}$	$e^{-j\frac{\omega}{2}(L-1)}\frac{\sin(\frac{\omega L}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$
$\alpha^n\mu(n), \quad \lvert\alpha\rvert<1$	$\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$
$(n+1)\alpha^n\mu(n), \quad \lvert\alpha\rvert<1$	$\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+\omega_0-2\pi m)+$ $+\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi m)$
$\sin(\omega_0 n)$	$j\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+\omega_0-2\pi m)-$ $-j\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi m)$

Neka svojstva Fourierove transformacije

Svojstvo	Vrem. domena: $x(t)$	Frek. domena: $X(e^{j\omega})$
Linearnost	$ax_1(n)+bx_2(n)$	$aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$
Konjugiranost	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
V. inverzija	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
V. pomak	$x(n-n_0)$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
F. pomak	$x(n)e^{j\omega_0 n}$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Modulacija	$x(n)\cos(\omega_0 n)$	$\frac{1}{2}X(e^{j(\omega+\omega_0)})+\frac{1}{2}X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Derivacija u frek.	$nx(n)$	$(j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega})$
Konvolucija	$(x_1 * x_2)(n)$	$X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$
Množenje	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j\psi})X_2(e^{j(\omega-\psi)})\,d\psi$
Konjugirana simetrija za realne signale	$x(n)$ realan signal	$X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$ $Re\{X(e^{j\omega})\}=Re\{X(e^{-j\omega})\}$ $Im\{X(e^{j\omega})\}=-Im\{X(e^{-j\omega})\}$ $\lvert X(e^{j\omega})\rvert=\lvert X(e^{-j\omega})\rvert$ $\angle X(e^{j\omega})=-\angle X(e^{-j\omega})$
Simetrija za realne i parne signale	$x(n)$ realan i paran	$X(e^{j\omega})$ realan i paran