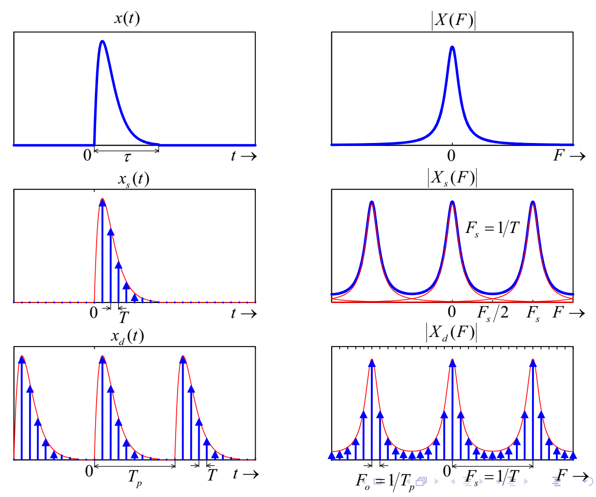
Digitalna obradba signala

Profesor
Branko Jeren

03. listopada 2008.

Numeričko izračunavanje Fourierove transformacije



Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- za veliku većinu signala nije moguće definirati matematički izraz, pa tako nije moguće primijeniti do sada izvedene transformacije
- zato se pristupa numeričkom određivanju spektra i uvodi se diskretna Fourierova transformacija – *DFT*
- signal i njegov spektar treba predstaviti njihovim uzorcima, odnosno otipkati, što znači da će se otipkani signal i njegov spektar periodički produžiti
- spektar aperiodičnog otipkanog signala je kontinuiran i periodičan s periodom 2π

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

- kako je spektar periodičan, dovoljno je, pri otipkavanju spektra, uzeti samo N uzoraka iz osnovnog perioda, pri čemu će razmak između uzoraka biti $2\pi/N$

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- otipkavanjem $X(e^{j\omega})$, na frekvencijama $\omega = \frac{2\pi}{N}k$, slijedi

$$k = 0, 1, \ldots, N-1; \quad X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

suma se transformira u beskonačni broj suma od N članova

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \ldots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} +$$
$$+ \sum_{n=N}^{2N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \ldots =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=mN}^{mN+N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- zamjenom indeksa n u unutarnjoj sumi s $n - mN$ i zamjenom redoslijeda sumiranja slijedi:

$$k = 0, 1, \ldots, N-1;$$
$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} \Bigg[\underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n - mN)}_{\tilde{x}(n)} \Bigg] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$
$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- signal $\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n - mN)$ dobiven je periodičnim ponavljanjem $x(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, i periodičan je s periodom N, te može biti prikazan s Fourierovim redom (*DTFS*)

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

- koeficijenti ovog Fourierovog reda su

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

ako se usporede X_k i $X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$,, za $k = 0, 1, \ldots, N-1$, zaključuje se da vrijedi

$$X_k = \frac{1}{N} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \quad \Rightarrow$$
$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- uvodimo oznaku $X(k)$ za uzorke diskretnog spektra, gdje je $X(k) \triangleq X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$, pa je otipkani spektar

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (1)$$

- otipkavanjem spektra aperiodičnog diskretnog signala može doći do pojave aliasinga u vremenskoj domeni
- za aperiodične diskretne signale x, duljine L, pri čemu je $L \le N$, nema aliasinga i vrijedi da je:

$$x(n) = \tilde{x}(n), \quad 0 \le n \le N-1$$

iz svega slijedi:

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- za aperiodičan diskretni signal $x(n)$, duljine L ($x(n) = 0$ za $n < 0$ i $n \ge L$) vrijedi par

diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (2)$$

inverzna diskretna Fourierova transformacija – *IDFT*

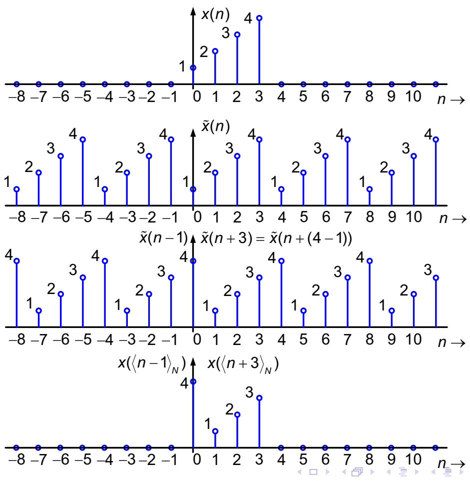
$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (3)$$

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- DFT – diskretnu Fourierovu transformaciju aperiodičnog niz interpretiramo kao otipkavanje njegove DTFT i to je razlog da su gotovo sva svojstva koja vrijede za DTFT primjenjiva za DFT
- ovdje se navode samo neka koja se unekoliko razlikuju:
  - cirkularni vremenski pomak
  - cirkularni frekvencijski pomak
  - cirkularna konvolucija
- važno je uočiti da, iako su DFT i IDFT definirani za $n = 0, 1, \ldots, N-1$, odnosno, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, iz jednadžbi za njihove definicije proizlazi svojstvo periodičnosti

$$x(n+N) = x(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$
$$X(k+N) = X(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Cirkularni pomak u vremenskoj domeni



Cirkularni pomak u vremenskoj domeni

- kako je pokazano u (1) i (2) DFT, $X(k)$, konačnog niza $x(n)$ je ekvivalentna DFT-i periodičnog niza dobivenog periodičnim ponavljanjem niza $x(n)$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN)$$

- pomakom periodičnog niza $\tilde{x}(n)$ za $m \ge 0$ koraka u desno dobijemo niz

$$\tilde{x}_p(n) = \tilde{x}(n-m) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - m - lN)$$

Cirkularni pomak u vremenskoj domeni

- niz konačnog trajanja $x_c(n)$, za koji vrijedi,

$$x_c(n) = x(\langle n-m \rangle_N) = \begin{cases} \tilde{x}(n-m) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

definiramo[1] kao cirkularni pomak, za m koraka, originalnog niza x

- zato iz[2]

$$DFT[\tilde{x}(n-m)] = e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \tilde{X}(k)$$

slijedi

$$DFT[x(\langle n-m \rangle_N)] = e^{-j\frac{2\pi}{N}km} X(k)$$

[1] $\langle w \rangle_N = w$ modulo N

[2] $DFT[\tilde{x}(n-m)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n-m) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{p=-m}^{N-1-m} \tilde{x}(p) e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m+p)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \sum_{p=-m}^{N-1-m} \tilde{x}(p) e^{-j\frac{2\pi}{N}kp} = e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \tilde{X}(k)$

Cirkularni pomak u frekvencijskoj domeni

- slično prethodnom razmatranju pokazuje se da za cirkularni pomak u frekvencijskoj domeni vrijedi

$$DFT[x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}km}] = X(\langle k-m\rangle_N)$$

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 3.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
DFT

Cirkularna konvolucija u vremenskoj domeni

- cirkularnoj konvoluciji u vremenskoj domeni, dvaju konačnih nizova $x_1(n)$ i $x_2(n)$, odgovara produkt njihovih DFT u frekvencijskoj domeni

$$DFT\left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(\langle n-m\rangle_N)\right] = X_1(k)X_2(k)$$

izvod:

$$IDFT[X_1(k)X_2(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_1(k)X_2(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km}\right]\left[\sum_{p=0}^{N-1} x_2(p)e^{-j\frac{2\pi}{N}kp}\right]e^{j\frac{2\pi}{N}kn} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)\sum_{p=0}^{N-1} x_2(p)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m-p)}\right]$$

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 3.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
DFT

Cirkularna konvolucija u vremenskoj domeni

$\forall r \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m-p)} = \begin{cases} 1, & \text{za } p = (n-m)+rN = \langle n-m\rangle_N, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

slijedi

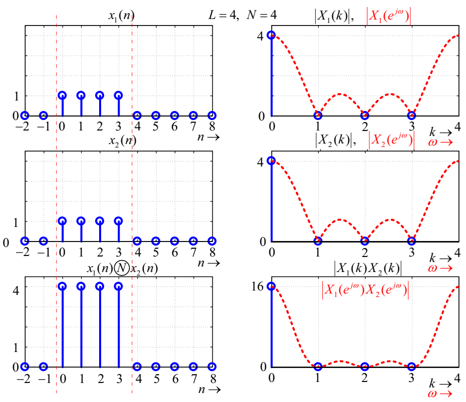
$$IDFT[X_1(k)X_2(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(\langle n-m\rangle_N)$$

- zaključujemo da je cirkularna konvolucija dva konačna niza, niz duljine N
- uobičajena je oznaka

$$y_C(n) = x_1(n) \circledN x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(\langle n-m\rangle_N)$$

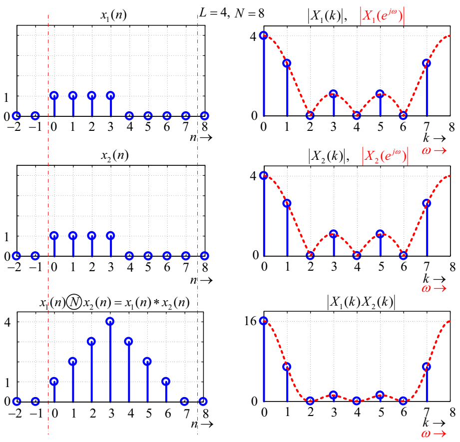
Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 3.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
DFT

Cirkularna konvolucija u vremenskoj domeni



Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 3.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
DFT

Cirkularna konvolucija u vremenskoj domeni



Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 3.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
DFT

DFT – dometak nula

- u prethodnom je primjeru pokazano kako se dodavanjem nula – dometak nula (engl. zero padding) – povećava broj točaka DFT čime se zapravo povećava rezolucija izračunatog spektra
- OPREZ ovdje se radi o povećanju numeričke rezolucije a ne fizikalne rezolucije spektra signala
- linearna konvolucija konačnih signala duljine L i M je $L+M-1$
- dometkom odgovarajućeg broja nula na svaki od njih do duljine $L+M-1$ cirkularna konvolucija postaje jednaka linearnoj

Dimenzionalnost signala

- tipkanje signala u vremenskoj domeni $\Rightarrow$ ponavljanje spektra s Ω_s (aliasing u frekvencijskoj domeni – FD)
- tipkanje signala u frekvencijskoj domeni $\Rightarrow$ ponavljanje signala u vremenskoj domeni s T_p (aliasing u vremenskoj domeni – VD)
- relativna greška u FD i VD može biti ocijenjena energijom signala i spektra izvan izabranog trajanja signala T_p, odnosno frekvencijskog pojasa Ω_s, prema ukupnoj energiji

$$\underbrace{\varepsilon_{FD} = \frac{2\int_{\Omega_s/2}^{\infty}|X(j\Omega)|^2 d\Omega}{2\int_0^{\infty}|X(j\Omega)|^2 d\Omega}}_{\text{relativna greška u FD}} \qquad \underbrace{\varepsilon_{VD} = \frac{2\int_{T_p/2}^{\infty}|x(t)|^2 dt}{2\int_0^{\infty}|x(t)|^2 dt}}_{\text{relativna greška u VD}}$$

- greške se mogu ocijeniti poznavanjem brzine opadanja signala i spektra za $|t| > T_p/2$ odnosno $|\Omega| > \Omega_s/2$

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 3.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
DFT

Dimenzionalnost signala

- uz specificiranu dozvoljenu grešku aliasinga u FD i VD dobivamo T_p i F_s - trajanje i širinu pojasa signala
- potreban broj uzoraka u VD

$$N_T T = T_p = N_T\frac{2\pi}{\Omega_s} \Rightarrow N_T = \frac{T_p\Omega_s}{2\pi} = T_pF_s$$

- potreban broj uzoraka u FD

$$N_{\Omega_o}\Omega_o = \Omega_s = N_{\Omega_o}\frac{2\pi}{Tp} \Rightarrow N_{\Omega_o} = \frac{T_p\Omega_s}{2\pi} = T_pF_s$$

pa je dimenzija signala

$$N_{\Omega_o} = N_T = \frac{T_p\Omega_s}{2\pi} = T_pF_s$$

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 3.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
DFT

Dimenzionalnost signala – primjer

- želimo numerički odrediti spektar signala otipkanog s $F_s = 44100\,\text{Hz}$, s rezolucijom $F_o = 10\,\text{Hz}$,
- za traženu rezoluciju trajanje signala mora biti minimalno

$$T_p = \frac{1}{F_o} = 0.1\,\text{s}$$

pa je potrebni broj uzoraka

$$N = T_pF_s = 0.1\text{x}44100 = 4410$$

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 3.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
DFT

Cirkularna konvolucija u frekvencijskoj domeni

- slično cirkularnoj konvoluciji u vremenskoj domeni, dvaju konačnih nizova $x_1(n)$ i $x_2(n)$, definira se i cirkularna konvolucija u frekvencijskoj domeni koja odgovara množenju signala u vremenskoj domeni

$$DFT[x_1(n)x_2(n)] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X_1(m)X_2(\langle n-m\rangle_N)$$

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 3.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
DFT

Svojstvo simetrije DFT realnog konačnog niza

- DFT realnog konačnog niza $x(n)$ je

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

vrijedi

$$X(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- pa zaključujemo

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 3.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
DFT

Svojstvo simetrije DFT realnog konačnog niza

$$\left.\begin{aligned} Re[X(k)] &= \textstyle\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{2\pi}{N}kn \\ Im[X(k)] &= -\textstyle\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin\frac{2\pi}{N}kn \\ Re[X(N-k)] &= \textstyle\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{2\pi}{N}kn \\ Im[X(N-k)] &= \textstyle\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin\frac{2\pi}{N}kn \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} Re[X(k)] &= \;\; Re[X(N-k)] \\ Im[X(k)] &= -\,Im[X(N-k)] \end{aligned}$$

pokazuje se da vrijedi i

$$\begin{aligned} |X(k)| &= \;\; |X(N-k)| \\ \angle X(k) &= -\angle X(N-k) \end{aligned}$$

DFT pojednostavljena notacija

- supstitucijom

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

- DFT pišemo kao

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- a IDFT kao

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 3.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
DFT

DFT dvaju realnih nizova uz pomoć jedne kompleksne DFT - RE2FFT

- $x(n)$ i $y(n)$ su dva nezavisna realna i konačna niza
- treba naći $X(k)$ i $Y(k)$
- stvaramo novi kompleksni niz $z(n) = x(n) + jy(n)$ i određujemo njegov DFT

$$Z(k) = \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) + jy(n)] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} =$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) + jy(n)] \left[\cos\frac{2\pi}{N}kn - j\sin\frac{2\pi}{N}kn \right]$$

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 3.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
DFT

DFT dvaju realnih nizova uz pomoć jedne kompleksne DFT - RE2FFT

$$Z(k) = \overbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{2\pi}{N}kn}^{Re[X(k)]} + \overbrace{\sum_{n=0}^{N-1} y(n)\sin\frac{2\pi}{N}kn}^{-Im[Y(k)]}$$
$$= j\left[\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} y(n)\cos\frac{2\pi}{N}kn}_{Re[Y(k)]} - \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin\frac{2\pi}{N}kn}_{Im[X(k)]} \right]$$

(1) $Re[Z(k)] = Re[X(k)] - Im[Y(k)]$

(2) $Im[Z(k)] = Re[Y(k)] + Im[X(k)]$

(3) $Re[Z(N-k)] = Re[X(N-k)] - Im[Y(N-k)]$

(4) $Im[Z(N-k)] = Re[Y(N-k)] + Im[X(N-k)]$

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 3.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
DFT

DFT dvaju realnih nizova uz pomoć jedne kompleksne DFT - RE2FFT

- kombinacijom prethodnih jednadžbi slijede četiri jednadžbe iz kojih određujemo $X(k)$ i $Y(k)$

$$(1) + (3) \Rightarrow Re[X(k)] = \frac{1}{2}\left\{ Re[Z(k)] + Re[Z(N-k)] \right\}$$
$$(2) - (4) \Rightarrow Im[X(k)] = \frac{1}{2}\left\{ Im[Z(k)] - Im[Z(N-k)] \right\}$$
$$(2) + (4) \Rightarrow Re[Y(k)] = \frac{1}{2}\left\{ Im[Z(k)] + Im[Z(N-k)] \right\}$$
$$(3) - (1) \Rightarrow Im[Y(k)] = \frac{1}{2}\left\{ Re[Z(N-k)] - Re[Z(k)] \right\}$$

- zaključujemo kako je **jednom DFT duljine N** moguće istovremeno transformirati **dva realna niza duljine N**

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 3.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
DFT

REDFFT - transformacija realnog niza $v(n)$ duljine $2N$ pomoću DFT duljine N

- prethodno razmatranje sugerira kako je moguće transformirati jedan realni niz duljine $2N$ uz pomoć DFT-e duljine N
- niz $v(n)$ duljine $2N$ razlažemo na dva niza definirana kao

$$x(n) = v(2n) \quad \text{i} \quad y(n) = v(2n+1) \quad \text{za } 0 \le n \le N-1$$

- DFT niza $v(n)$ je, za $0 \le k \le 2N-1$,

$$V(k) = DFT_{2N}[v(k)] = \sum_{m=0}^{2N-1} v(m) W_{2N}^{km} =$$
$$= \sum_{m=0,2,4,\dots} v(m) W_{2N}^{km} + \sum_{m=1,3,5,\dots} v(m) W_{2N}^{km}$$

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 3.
Profesor Branko Jeren
Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala
DFT

REDFFT - transformacija realnog niza $v(n)$ duljine $2N$ pomoću DFT duljine N

$$V(k) = \sum_{m=0,2,4,\dots} v(m) W_{2N}^{km} + \sum_{m=1,3,5,\dots} v(m) W_{2N}^{km} =$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} v(2n) W_{2N}^{2kn} + \sum_{n=0}^{N-1} v(2n+1) W_{2N}^{(2n+1)k}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} v(2n) W_{2N}^{2kn} + W_{2N}^{k} \sum_{n=0}^{N-1} v(2n+1) W_{2N}^{2kn}$$

uz $W_{2N}^2 = e^{-j\frac{2\pi}{2N}2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = W_N \Rightarrow$

$$V(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}}_{X(k)} + W_{2N}^{k} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_N^{kn}}_{Y(k)}$$

$$V(k) = X(\langle k \rangle_N) + W_{2N}^{k} Y(\langle k \rangle_N), \qquad 0 \le k \le 2N-1$$

REDFFT - transformacija realnog niza $v(n)$ duljine $2N$ pomoću DFT duljine N

- ponovimo postupak za REDFFT
  - niz $v(n)$ duljine $2N$ razlažemo u dva realna niza $x(n) = v(2n)$ te $y(n) = v(2n+1)$ duljine N
  - na ta dva niza primijenimo RE2FFT i izračunavamo $X(k)$ te $Y(k)$
  - DFT transformaciju početnoga niza $v(n)$ izračunavamo iz

$$V(k) = X(\langle k \rangle_N) + W_{2N}^{k} Y(\langle k \rangle_N), \qquad 0 \le k \le 2N-1$$