Digitalna obradba signala

Profesor
Branko Jeren

10. listopada 2008.

Diskretna Fourierova transformacija – DFT

- za aperiodičan diskretni signal $x(n)$, duljine L ($x(n) = 0$ za $n < 0$ i $n \geq L$) vrijedi par

diskretna Fourierova transformacija – DFT$_N$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (1)$$

inverzna diskretna Fourierova transformacija – $IDFT_N$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (2)$$

Diskretna Fourierova transformacija – DFT

- pri izračunu DFT$_N$, odnosno IDFT $_N$, izračunava se niz od N kompleksnih brojeva iz niza od N kompleksnih brojeva
- razmotrimo broj potrebnih operacija u izračunu DFT$_N$ (IDFT$_N$)
- iz $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$ slijedi

$$X_{Re}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ x_{Re}(n) \cos\frac{2\pi}{N}kn + x_{Im}(n) \sin\frac{2\pi}{N}kn \right\}$$

$$X_{Im}(k) = -\sum_{n=0}^{N-1} \left\{ x_{Re}(n) \sin\frac{2\pi}{N}kn - x_{Im}(n) \cos\frac{2\pi}{N}kn \right\}$$

  - $2N^2$ proračuna trigonometrijskih funkcija,
    $4N^2$ realnih množenja,
    $4N(N-1)$ realnih zbrajanja i
    određeni broj indeksnih i adresnih operacija

DFT pojednostavljena notacija

- zamjenom

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

- DFT$_N$ pišemo kao

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

- a $IDFT_N$ kao

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

- u nastavku razmatranja algoritama za brzu Fourierovu transformaciju koristimo se ovom notacijom
- isto tako u analizi broja operacija razmatramo broj kompleksnih množenja, N^2, i broj kompleksnih zbrajanja, $N(N-1)$

Brza Fourierova transformacija – FFT

- naziv brza Fourierova transformacija, eng. Fast Fourier Transform (FFT), koristi se za grupu algoritama za brzo izračunavanje DFT
- FFT algoritmi se temelje na dekompoziciji DFT$_N$ u niz parcijalnih DFT-a, odnosno periodičnosti i simetričnosti kompleksne eksponencijale
- tako će razlaganjem DFT$_N$ od N točaka na dva DFT$_{N/2}$, za $N/2$ točaka, broj potrebnih kompleksnih množenja biti

$$2\left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{2},$$

  što je polovica broja kompleksnih množenja potrebnih za izravni izračun DFT$_N$ niza $x(n)$
- treba napomenuti da je potreban još određeni broj aritmetičkih operacija nad parcijalnim DFT-a kako bi se dobio ispravan rezultat

Brza Fourierova transformacija – FFT

- nadalje, efikasnost izračunavanja DFT$_N$ se bitno povećava korištenjem svojstva simetričnosti i periodičnosti kompleksne eksponencijale $e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = W_N^k$
- simetričnost:

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^{k+\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k - j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = \\ = e^{-j\frac{2\pi}{N}k} e^{-j\pi} = -e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = -W_N^k$$

- periodičnost:

$$W_N^{k+N} = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^{k+N} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k - j2\pi} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = W_N^k$$

Brza Fourierova transformacija – FFT

- izračunavamo W_8^{nk} za $0 \leq n \leq 7$ i $0 \leq k \leq 7$ uzimajući u obzir periodičnost $W_N^{m-lN} = W_N^m$

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	W_8^1	W_8^2	W_8^3	W_8^4	W_8^5	W_8^6	W_8^7
2	1	W_8^2	W_8^4	W_8^6	1	W_8^2	W_8^4	W_8^6
3	1	W_8^3	W_8^6	W_8^1	W_8^4	W_8^7	W_8^2	W_8^5
4	1	W_8^4	1	W_8^4	1	W_8^4	1	W_8^4
5	1	W_8^5	W_8^2	W_8^7	W_8^4	W_8^1	W_8^6	W_8^3
6	1	W_8^6	W_8^4	W_8^2	1	W_8^6	W_8^4	W_8^2
7	1	W_8^7	W_8^6	W_8^5	W_8^4	W_8^3	W_2^2	W_8^1

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 5.
Profesor Branko Jeren
Brza Fourierova transformacija – FFT
Metoda podijeli pa vladaj
Radix-2

Brza Fourierova transformacija – FFT

- izračunavamo W_8^{nk} za $0 \leq n \leq 7$ i $0 \leq k \leq 7$ uzimajući u obzir još i simetričnost $W_N^{m+\frac{N}{2}} = -W_N^m$ dakle za $W_8^4 = -W_8^0 = -1$, $W_8^5 = -W_8^1$, $W_8^6 = -W_8^2$, $W_8^7 = -W_8^3$

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	W_8^1	W_8^2	W_8^3	-1	$-W_8^1$	$-W_8^2$	$-W_8^3$
2	1	W_8^2	-1	$-W_8^2$	1	W_8^2	-1	$-W_8^2$
3	1	W_8^3	$-W_8^2$	W_8^1	-1	$-W_8^3$	W_8^2	$-W_8^1$
4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
5	1	$-W_8^1$	W_8^2	$-W_8^3$	-1	W_8^1	$-W_8^2$	W_8^3
6	1	$-W_8^2$	-1	W_8^2	1	$-W_8^2$	-1	W_8^2
7	1	$-W_8^3$	$-W_8^2$	$-W_8^1$	-1	W_8^3	W_2^2	W_8^1

- evidentno je da je umjesto 64(49) izračuna kompleksne eksponencijale W_8^{nk} dovoljno izračunati samo W_8^1, W_8^2 i W_8^3

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 5.
Profesor Branko Jeren
Brza Fourierova transformacija – FFT
Metoda podijeli pa vladaj
Radix-2

Metoda podijeli pa vladaj

- ovaj se pristup zasniva na dekompoziciji DFT_N u N točaka u sukcesivno manje DFT-e – Cooley-Tukey FFT algoritmi

The Cooley-Tukey algorithm is the most common fast Fourier transform (FFT) algorithm. It re-expresses the discrete Fourier transform (DFT) of an arbitrary composite size n = n1n2 in terms of smaller DFTs of sizes n1 and n2, recursively, in order to reduce the computation time to O(n log n) for highly-composite n. Because of the algorithm's importance, specific variants and implementation styles have become known by their own names. This algorithm, including its recursive application, **was already known around 1805 to Carl Friedrich Gauss**, who used it to interpolate the trajectories of the asteroids Pallas and Juno, but his work was not widely recognized (being published only posthumously and in neo-Latin). **Various limited forms were also rediscovered several times** throughout the 19th and early 20th centuries. FFTs became popular after **J. W. Cooley of IBM and John W Tukey of Princeton** published a paper in 1965 **reinventing the algorithm** and describing how to perform it conveniently on a computer.

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 5.
Profesor Branko Jeren
Brza Fourierova transformacija – FFT
Metoda podijeli pa vladaj
Radix-2

Metoda podijeli pa vladaj

- razmotrimo računanje DFT_N u N točaka gdje je N faktoriziran[1] kao produkt dva cijela broja

$$N = LM$$

- niz $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, se može pohraniti u jednodimenzionalno polje indeksirano s n

n	0	1	2	...	N-1
	x(0)	x(1)	x(2)	...	x(n-1)

[1] N uvijek može biti nadopunjen nulama da se osigura faktorizacija

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 5.
Profesor Branko Jeren
Brza Fourierova transformacija – FFT
Metoda podijeli pa vladaj
Radix-2

Metoda podijeli pa vladaj

- niz $x(n)$ se može pohraniti i u dvodimenzionalno polje indeksirano s l i m

$$0 \leq l \leq L-1 \qquad 0 \leq m \leq M-1$$

gdje l predstavlja indeks redaka a m indeks stupaca

$l \backslash m$	0	1	2	...	$M-1$
0	$x(0,0)$	$x(0,1)$	$x(0,2)$	...	$x(0,M-1)$
1	$x(1,0)$	$x(1,1)$	$x(1,2)$	...	$x(1,M-1)$
2	$x(2,0)$	$x(2,1)$	$x(2,2)$	...	$x(2,M-1)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$L-1$	x(L-1,0)	x(L-1,1)	x(L-1,2))	...	x(L-1,M-1)

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 5.
Profesor Branko Jeren
Brza Fourierova transformacija – FFT
Metoda podijeli pa vladaj
Radix-2

Metoda podijeli pa vladaj

- niz $x(n)$ se može pohraniti u dvodimenzionalno polje na više načina od kojih svaki ovisi o razlaganju indeksa n u indekse (l,m)
- **razlaganje po redcima**, gdje prvi redak sadrži prvih M elemenata $x(n)$, drugi redak sadrži slijedećih M elemenata, itd.

$$n = Ml + m$$

$l \backslash m$	0	1	2	...	$M-1$
0	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	...	$x(M-1)$
1	$x(M)$	$x(M+1)$	$x(M+2)$	...	$x(2M-1)$
2	$x(2M)$	$x(2M+1)$	$x(2M+2)$	...	$x(3M-1)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$L-1$	x((L-1)M)	x((L-1)M+1)	x((L-1)M+2))	...	x(LM-1)

Metoda podijeli pa vladaj

- **razlaganje po stupcima**, gdje prvi stupac sadrži prvih L elemenata $x(n)$, drugi stupac sadrži slijedećih L elemenata, itd.

$$n = l + mL$$

$l \backslash m$	0	1	2	...	$M-1$
0	$x(0)$	$x(L)$	$x(2L)$	...	$x((M-1)L)$
1	$x(1)$	$x(L+1)$	$x(2L+1)$	...	$x((M-1)L+1)$
2	$x(2)$	$x(L+2)$	$x(2L+2)$	...	$x((M-1)L+2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$L-1$	$x(L-1)$	$x(2L-1)$	$x(3L-1)$	...	$x(LM-1)$

Metoda podijeli pa vladaj

- na isti način razlaže se indeks k u paru indeksa (p, q) gdje su $0 \leq p \leq L-1$ i $0 \leq q \leq M-1$
- $X(k)$ se pohranjuje po redcima uz razlaganje

$$k = Mp + q$$

- $X(k)$ se pohranjuje po stupcima uz razlaganje

$$k = p + qL$$

Metoda podijeli pa vladaj

- izračunava se DFT_N

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

- neka je niz $x(n)$ pohranjen po stupcima a izračunate vrijednosti $X(k)$ neka budu pohranjene po redcima

$$n = l + mL \qquad i \qquad k = Mp + q$$

$$X(Mp+q) = \sum_{n=0}^{N-1} x(l+mL) W_N^{(Mp+q)(l+mL)}$$

- DFT_N se može izraziti kao dvostruka suma preko elemenata polja pomnoženih s odgovarajućom kompleksnom eksponencijalom

Metoda podijeli pa vladaj

$$X(p,q) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x(l,m) W_N^{(Mp+q)(l+mL)}$$

- uz $N = ML$, $W_N^{(Mp+q)(l+mL)} = W_N^{Mpl} W_N^{ql} W_N^{MLpm} W_N^{qmL}$ se pojednostavljuje uzimajući u obzir

$$\begin{aligned}
W_N &= e^{-j\frac{2\pi}{N}}, \\
W_N^L &= e^{-j\frac{2\pi}{N}L} = e^{-j\frac{2\pi}{(N/L)}} = W_{N/L}, \\
W_N^{mqL} &= W_{N/L}^{mq} = W_M^{mq}, \\
W_N^{Mpl} &= W_{N/M}^{pl} = W_L^{pl}, \\
W_N^{MLpm} &= W_N^{Npm} = 1,
\end{aligned}$$

$$X(p,q) = \sum_{l=0}^{L-1} \left\{ W_N^{ql} \left[\sum_{m=0}^{M-1} x(l,m) W_M^{mq} \right] \right\} W_L^{pl}$$

Metoda podijeli pa vladaj

- izračun

$$X(p,q) = \sum_{l=0}^{L-1} \underbrace{\left\{ W_N^{ql} \overbrace{\left[\sum_{m=0}^{M-1} x(l,m) W_M^{mq} \right]}^{F(l,q)} \right\}}_{G(l,q)} W_L^{pl}$$

se može podijeliti u tri koraka

1. izračun $F(l, q)$
2. izračun $G(l, q)$
3. izračun $X(q, p)$

Metoda podijeli pa vladaj

1. računaju se komponente DFT_M u M točaka

$$F(l,q) = \sum_{m=0}^{M-1} x(l,m) W_M^{mq}, \quad 0 \leq q \leq M-1$$

   za svaki od redaka $l = 0, 1, \ldots, L-1$
2. računa se polje
   $G(l,q) = W_N^{ql} F(l,q), \qquad 0 \leq l \leq L-1, \quad 0 \leq q \leq M-1$
3. konačno, računaju se komponente DFT_L u L točaka

$$X(p,q) = \sum_{l=0}^{L-1} G(l,q) W_L^{pl}$$

   za svaki stupac $q = 0, 1, \ldots, M-1$ polja $G(l,q)$

Metoda podijeli pa vladaj

- izračun broja numeričkih operacija
  - broj množenja: $LM^2 + LM + ML^2 = N(M + 1 + L)$
  - broj zbrajanja: $LM(M-1) + ML(L-1) = N(M + L - 2)$
- primjer: neka je $N = 1000$ i neka su $L = 20$ i $M = 50$
  broj množenja :
  $N(M + L + 1) = 1000(20 + 50 + 1) = 71000$
- izravnim izračunom DFT_N potrebno je $N^2 = 10^6$ kompleksnih množenja pa je omjer[2]:

$$\frac{N^2}{N(M+L+1)} = \frac{10^6}{71000} = 14.08$$

[2] za zbrajanje je taj omjer 14.69

Metoda podijeli pa vladaj

- ilustracija postupka izračuna DFT_{15} u 15 točaka uz $N = LM = 5 \times 3 = 15$, dakle $L = 5$ i $M = 3$
- niz $x(n)$ se razlaže po stupcima

red 1	$x(0,0) = x(0)$	$x(0,1) = x(5)$	$x(0,2) = x(10)$
red 2	$x(1,0) = x(1)$	$x(1,1) = x(6)$	$x(1,2) = x(11)$
red 3	$x(2,0) = x(2)$	$x(2,1) = x(7)$	$x(2,2) = x(12)$
red 4	$x(3,0) = x(3)$	$x(3,1) = x(8)$	$x(3,2) = x(13)$
red 5	$x(4,0) = x(4)$	$x(4,1) = x(9)$	$x(4,2) = x(14)$

Metoda podijeli pa vladaj

- u prvom koraku se izračunavaju DFT_3 u 3 točke za svaki od 5 redaka

$$\begin{matrix} F(0,0) & F(0,1) & F(0,2) \\ F(1,0) & F(1,1) & F(1,2) \\ F(2,0) & F(2,1) & F(2,2) \\ F(3,0) & F(3,1) & F(3,2) \\ F(4,0) & F(4,1) & F(4,2) \end{matrix}$$

- u drugom koraku množi se svaki od $F(l, q)$ s kompleksnom eksponencijalom

$$W_N^{lq} = W_{15}^{lq}, \qquad 0 \le l \le 4 \quad 0 \le q \le 2$$

Metoda podijeli pa vladaj

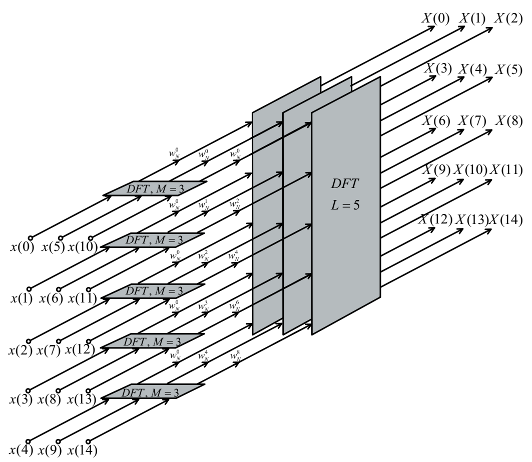
- rezultat množenja je u polju 5×3

$$\begin{matrix} G(0,0) & G(0,1) & G(0,2) \\ G(1,0) & G(1,1) & G(1,2) \\ G(2,0) & G(2,1) & G(2,2) \\ G(3,0) & G(3,1) & G(3,2) \\ G(4,0) & G(4,1) & G(4,2) \end{matrix}$$

- treći, konačni, korak je izračun DFT_5 u 5 točaka za svaki od 3 stupca

$$\begin{matrix} X(0,0) = X(0) & X(0,1) = X(1) & X(0,2) = X(2) \\ X(1,0) = X(3) & X(1,1) = X(4) & X(1,2) = X(5) \\ X(2,0) = X(6) & X(2,1) = X(7) & X(2,2) = X(8) \\ X(3,0) = X(9) & X(3,1) = X(10) & X(3,2) = X(11) \\ X(4,0) = X(12) & X(4,1) = X(13) & X(4,2) = X(14) \end{matrix}$$

Metoda podijeli pa vladaj



Metoda podijeli pa vladaj

- pokazuje se kako se DFT_N može još efikasnije izračunavati ako se N faktorizira kao

$$N = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_j$$

gdje su $\{r_j\}$ prim brojevi

- od posebne je važnosti slučaj kada je $r_1 = r_2 = \ldots = r_j = r$ tako da je

$$N = r^j$$

- u tom slučaju sve DFT-e su dimenzije r, pa je izračunavanje DFT_N u N točaka poprima pravilnu strukturu
- r se tada naziva baza (radix) FFT algoritma

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

- neka je $N = 2^j$ i koristi se postupak "podjeli pa vladaj" tako da se izabere $M = N/2$ i $L = 2$
- niz $x(n)$ razlažemo po stupcima, gdje prvi stupac sadrži prvih $L = 2$ elemenata $x(n)$, drugi stupac sadrži slijedećih $L = 2$ elemenata, itd.
- u prvom retku će tako biti niz $f_1(n)$, a u drugom $f_2(n)$, tako da parni uzorci od $x(n)$ ulaze u $f_1(n)$ a neparni u $f_2(n)$

$$\begin{aligned} f_1(n) &= x(2n), & n &= 0, 1, \ldots, N/2-1 \\ f_2(n) &= x(2n+1), & n &= 0, 1, \ldots, N/2-1 \end{aligned}$$

- $f_1(n)$ i $f_2(n)$ su dobiveni decimacijom niza $x(n)$ za faktor 2 i zato se ovaj FFT algoritam naziva **algoritam decimacije u vremenu** – decimation-in-time algorithm (DIT FFT)

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

- DFT_N je

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \\ &= \sum_{n \text{ je paran}} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n \text{ je neparan}} x(n) W_N^{kn} = \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m) W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m+1) W_N^{(2m+1)k} = \\ &= \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_1(n) W_{\frac{N}{2}}^{mk}}_{F_1(k) = DFT_{\frac{N}{2}}[f_1(n)]} + W_N^k \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_2(n) W_{\frac{N}{2}}^{mk}}_{F_2(k) = DFT_{\frac{N}{2}}[f_2(n)]} \end{aligned}$$

$$X(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k) + W_N, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

$$X(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

- $F_1(k)$ i $F_2(k)$ su DFT-e od $N/2$ točaka i periodični su s periodom $N/2$

$$\begin{aligned} F_1(k + N/2) &= F_1(k) & k &= 0, 1, \ldots, N/2-1 \\ F_2(k + N/2) &= F_2(k) & k &= 0, 1, \ldots, N/2-1 \end{aligned}$$

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

- u potpunosti se poštuje algoritam kojim je objašnjena metoda podijeli pa vladaj

1. računaju se komponente $\mathrm{DFT}_{N/2}$ u $M = N/2$ točaka

$$F(l, q) = \sum_{m=0}^{M-1} x(l, m) W_M^{mq}, \quad 0 \le q \le M-1$$

za svaki od redaka $l = 0, 1$

$$F(0, q) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(0, m) W_{\frac{N}{2}}^{mk} = F_1(k)$$

$$F(1, q) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(1, m) W_{\frac{N}{2}}^{mk} = F_2(k)$$

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

2. računaju se $G(l, q)$

$$G(l, q) = W_N^{lq} F(l, q), \quad 0 \le l \le L-1, \quad 0 \le q \le M-1$$

$$\begin{aligned} G(0, q) &= F(0, q) = F_1(k) \\ G(1, q) &= W_N^k F(1, q) = W_N^k F_2(k) \end{aligned}$$

3. konačno, računaju se komponente DFT_2 u $L = 2$ točaka

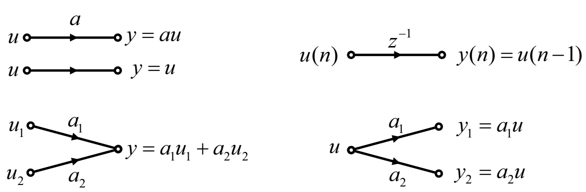
$$X(p, q) = \sum_{l=0}^{L-1} G(l, q) W_L^{pl}$$

za svaki stupac $q = 0, 1, \ldots, M-1$ polja $G(l, q)$

$$X(p, q) = G(0, q) + G(1, q)$$

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

- pokazano je da vrijedi $X(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$
- realizaciju ovog algoritma pogodno je ilustrirati grafom (dijagramom) tijeka signala
- ilustriraju se neki elementi grafa tijeka signala



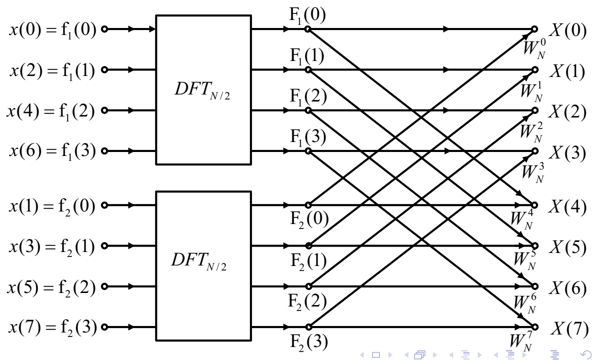
Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 5.

Profesor Branko Jeren

Brza Fourierova transformacija – FFT
Metoda podijeli pa vladaj
Radix-2

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

- neka je $N = 8 = 2^3$
- pokazano je da vrijedi
  $X(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$



Digitalna obradba signala školska godina 2008/2009 Cjelina 5. Profesor Branko Jeren Brza Fourierova transformacija – FFT Metoda podijeli pa vladaj Radix-2

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

- dalje se nastavlja s razlaganjem nizova $f_1(n)$ i $f_2(n)$ što će rezultirati u četiri $\text{DFT}_{N/4}$ od $N/4$ točke

$$v_{11}(n) = f_1(2n), \qquad n = 0, 1, \dots, N/4-1,$$
$$v_{12}(n) = f_1(2n+1), \qquad n = 0, 1, \dots, N/4-1,$$

i

$$v_{21}(n) = f_2(2n), \qquad n = 0, 1, \dots, N/4-1,$$
$$v_{22}(n) = f_2(2n+1), \qquad n = 0, 1, \dots, N/4-1,$$

$$F_1(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} f_1(m) W_{\frac{N}{2}}^{km}, \quad k = 0, 1, \dots, N/2-1$$
$$= \sum_{l=0}^{N/4-1} f_1(2l) W_{\frac{N}{2}}^{2lk} + \sum_{l=0}^{N/4-1} f_1(2l+1) W_{\frac{N}{2}}^{(2l+1)k} =$$

Digitalna obradba signala školska godina 2008/2009 Cjelina 5. Profesor Branko Jeren Brza Fourierova transformacija – FFT Metoda podijeli pa vladaj Radix-2

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

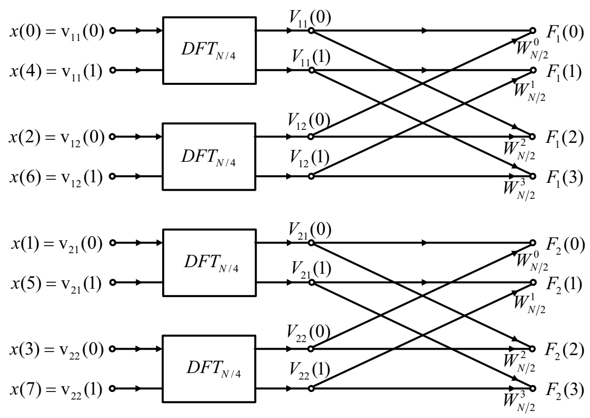
$$F_1(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} f_1(2l) W_{\frac{N}{2}}^{2lk} + \sum_{l=0}^{N/4-1} f_1(2l+1) W_{\frac{N}{2}}^{(2l+1)k} =$$
$$= \sum_{l=0}^{N/4-1} v_{11}(l) W_{\frac{N}{4}}^{lk} + W_{\frac{N}{2}}^{k} \sum_{l=0}^{N/4-1} v_{12}(l) W_{\frac{N}{4}}^{lk} =$$
$$= V_{11}(k) + W_{\frac{N}{2}}^{k} V_{12}(k)$$

slično se izvodi

$$F_2(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} v_{21}(l) W_{\frac{N}{4}}^{lk} + W_{\frac{N}{2}}^{k} \sum_{l=0}^{N/4-1} v_{22}(l) W_{\frac{N}{4}}^{lk}$$

Digitalna obradba signala školska godina 2008/2009 Cjelina 5. Profesor Branko Jeren Brza Fourierova transformacija – FFT Metoda podijeli pa vladaj Radix-2

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT



Digitalna obradba signala školska godina 2008/2009 Cjelina 5. Profesor Branko Jeren Brza Fourierova transformacija – FFT Metoda podijeli pa vladaj Radix-2

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

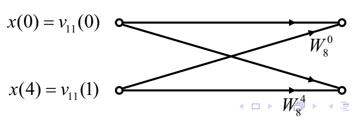
- razmotrimo jedan od izvedenih $\text{DFT}_{N/4}$

$$V_{11}(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} v_{11}(l) W_{\frac{N}{4}}^{lk}, \quad k = 0, 1, \dots, N/4-1$$

- za $N = 8$ vrijedi $\text{DFT}_{N/4} = \text{DFT}_2$ i ne može se više dijeliti
- $V_{11}(k) = \sum_{l=0}^{1} v_{11}(l) W_2^{lk}$, možemo pisati kao

za $k = 0$ $\quad V_{11}(0) = v_{11}(0) W_2^{0\cdot 0} + v_{11}(1) W_2^{0\cdot 1} = v_{11}(0) + v_{11}(1) W_8^{0\cdot 4}$

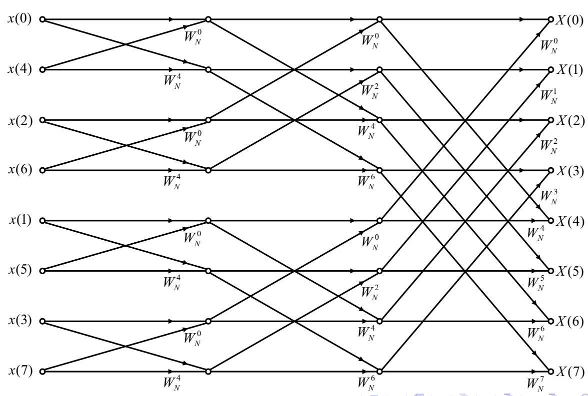
za $k = 1$ $\quad V_{11}(1) = v_{11}(0) W_2^{0\cdot 1} + v_{11}(1) W_2^{1\cdot 1} = v_{11}(0) + v_{11}(1) W_8^{1\cdot 4}$



Digitalna obradba signala školska godina 2008/2009 Cjelina 5. Profesor Branko Jeren Brza Fourierova transformacija – FFT Metoda podijeli pa vladaj Radix-2

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

- konačno, DFT_N, za $N = 8$ možemo prikazati grafom tijeka signala



Digitalna obradba signala školska godina 2008/2009 Cjelina 5.

Profesor Branko Jeren

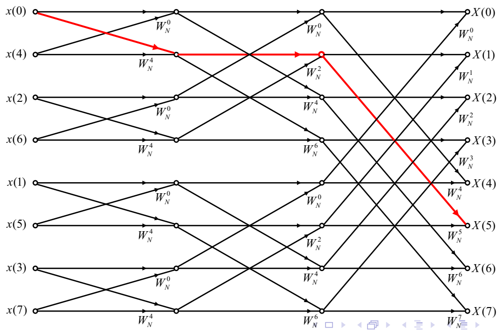
Brza Fourierova transformacija – FFT

Metoda podijeli pa vladaj

Radix-2

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

$$X(5) = x(0) + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^7 + \\ + x(4)W_8^4 + x(5)W_8^9 + x(6)W_8^6 + x(7)W_8^{11}$$



Digitalna obradba signala školska godina 2008/2009 Cjelina 5.

Profesor Branko Jeren

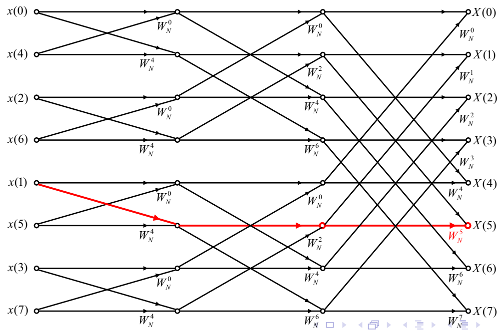
Brza Fourierova transformacija – FFT

Metoda podijeli pa vladaj

Radix-2

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

$$X(5) = x(0) + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^7 + \\ + x(4)W_8^4 + x(5)W_8^9 + x(6)W_8^6 + x(7)W_8^{11}$$



Digitalna obradba signala školska godina 2008/2009 Cjelina 5.

Profesor Branko Jeren

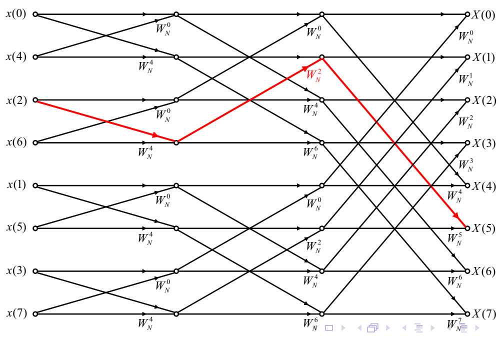
Brza Fourierova transformacija – FFT

Metoda podijeli pa vladaj

Radix-2

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

$$X(5) = x(0) + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^7 + \\ + x(4)W_8^4 + x(5)W_8^9 + x(6)W_8^6 + x(7)W_8^{11}$$



Digitalna obradba signala školska godina 2008/2009 Cjelina 5.

Profesor Branko Jeren

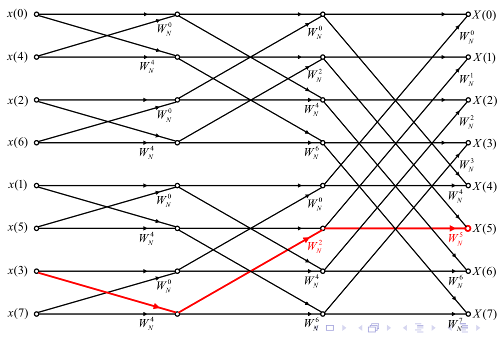
Brza Fourierova transformacija – FFT

Metoda podijeli pa vladaj

Radix-2

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

$$X(5) = x(0) + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^7 + \\ + x(4)W_8^4 + x(5)W_8^9 + x(6)W_8^6 + x(7)W_8^{11}$$



Digitalna obradba signala školska godina 2008/2009 Cjelina 5.

Profesor Branko Jeren

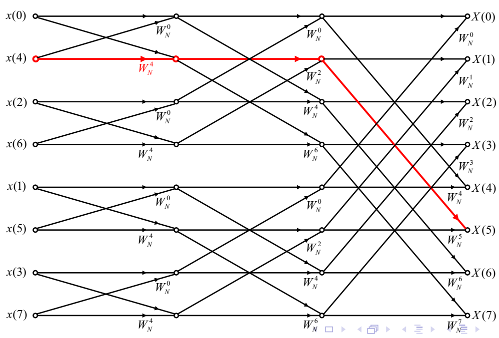
Brza Fourierova transformacija – FFT

Metoda podijeli pa vladaj

Radix-2

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

$$X(5) = x(0) + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^7 + \\ + x(4)W_8^4 + x(5)W_8^9 + x(6)W_8^6 + x(7)W_8^{11}$$



Digitalna obradba signala školska godina 2008/2009 Cjelina 5.

Profesor Branko Jeren

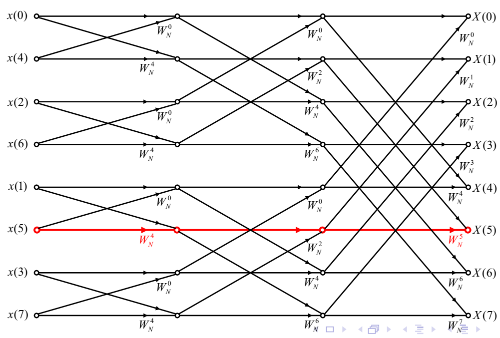
Brza Fourierova transformacija – FFT

Metoda podijeli pa vladaj

Radix-2

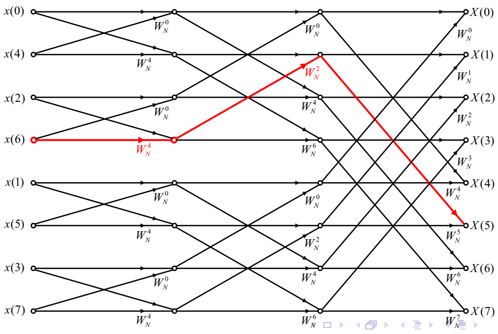
FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

$$X(5) = x(0) + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^7 + \\ + x(4)W_8^4 + x(5)W_8^9 + x(6)W_8^6 + x(7)W_8^{11}$$



FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

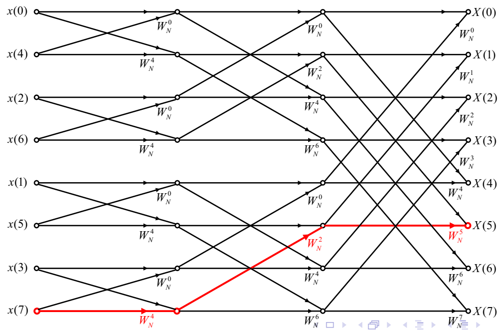
$$X(5) = x(0) + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^7 + \\ + x(4)W_8^4 + x(5)W_8^9 + x(6)W_8^6 + x(7)W_8^{11}$$



Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 5.
Profesor Branko Jeren
Brza Fourierova transformacija – FFT
Metoda podijeli pa vladaj
Radix-2

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

$$X(5) = x(0) + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^7 + \\ + x(4)W_8^4 + x(5)W_8^9 + x(6)W_8^6 + x(7)W_8^{11}$$



Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 5.
Profesor Branko Jeren
Brza Fourierova transformacija – FFT
Metoda podijeli pa vladaj
Radix-2

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

- prolaskom svih N uzoraka niza $x(n)$ kroz graf tijeka signala izračunava se svih N uzoraka $X(k)$
- ovdje se uspoređuje izračunati $X(5)$ dobiven uvidom u graf tijeka signala

$$X(5) = x(0) + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^7 + \\ + x(4)W_8^4 + x(5)\underbrace{W_8^9}_{W_8^1} + x(6)W_8^6 + x(7)\underbrace{W_8^{11}}_{W_8^3}$$

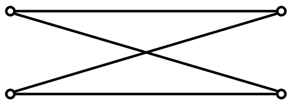
s izravno izračunatim $X(5) = \sum_{n=0}^{7} x(n)W_N^{n\cdot 5}$

$$X(5) = x(0)W_8^{0\cdot 0} + x(1)W_8^{1\cdot 5} + x(2)\underbrace{W_8^{2\cdot 5}}_{W_8^2} + x(3)\underbrace{W_8^{3\cdot 5}}_{W_8^7} + \\ + x(4)\underbrace{W_8^{4\cdot 5}}_{W_8^4} + x(5)\underbrace{W_8^{5\cdot 5}}_{W_8^1} + x(6)\underbrace{W_8^{6\cdot 5}}_{W_8^6} + x(7)\underbrace{W_8^{7\cdot 5}}_{W_8^3}$$

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 5.
Profesor Branko Jeren
Brza Fourierova transformacija – FFT
Metoda podijeli pa vladaj
Radix-2

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

- uvidom u graf tijeka signala uočavaju se pravilne strukture oblika



- naziv strukture je
- uvidom u graf tijeka signala zaključuje se o broju kompleksnih množenja
- za $N = 8 = 2^3$ zaključuje se da postoji $log_2 N = 3$ stupnjeva
- kako se u svakom stupnju provodi N kompleksnih množenja ukupni broj kompleksnih množenja je

$$Nlog_2 N = 8log_2 8 = 8 \times 3 = 24$$

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 5.
Profesor Branko Jeren
Brza Fourierova transformacija – FFT
Metoda podijeli pa vladaj
Radix-2

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

- uvidom u graf tijeka signala uočava se i poseban poredak uzoraka niza $x(n)$

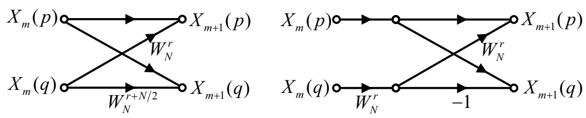
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

- poredak uzoraka prema grafu tijeka signala za FFT algoritam s bazom 2 postiže se gore ilustriranim algoritmom – **bit reversed algoritmom**

Digitalna obradba signala
školska godina 2008/2009
Cjelina 5.
Profesor Branko Jeren
Brza Fourierova transformacija – FFT
Metoda podijeli pa vladaj
Radix-2

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

- uvidom u bilo koji leptir ukazuje se mogućnost dodatnog smanjenja broja operacija

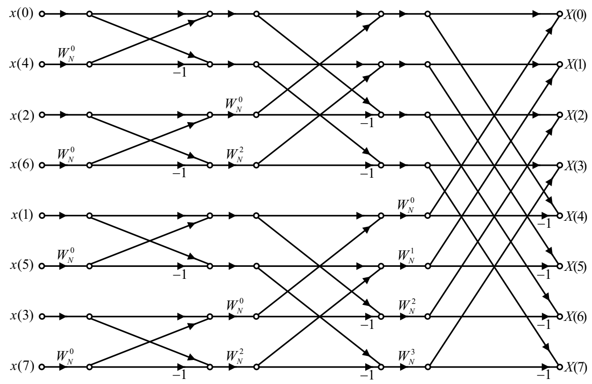


- uz $W_N^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1$

$$X_{m+1}(p) = X_m(p) + W_N^r X_m(q)$$

$$X_{m+1}(q) = X_m(p) + W_N^{r+N/2} X_m(q) = X_m(p) - W_N^r X_m(q)$$

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT



- broj kompleksnih množenja je $\frac{N}{2}\log_2 N$

FFT algoritam s bazom 2 – Radix-2 FFT

- uspoređuje se broj kompleksnih množenja za DFT i FFT–Radix2

N	broj množenja N^2	broj množenja $(N/2)\log_2 N$	faktor smanjenja broja množenja
4	16	4	4.00
8	64	12	5.33
16	256	32	8.00
32	1024	80	12.80
64	4096	192	21.33
128	16384	448	36.57
256	65536	1024	64.00
512	262144	2304	113.78
1024	1048576	5120	204.80
2048	4194304	11264	372.36
4096	16777216	24576	682.67

FFT algoritam s bazom 2 – decimacija u frekvencijskoj domeni

- neka je $N = 2^j$ i koristi se postupak "podjeli pa vladaj" tako da se izabere $L = N/2$ i $M = 2$
- niz $x(n)$ je razložen po stupcima, gdje prvi stupac sadrži prvih $L = N/2$ elemenata $x(n)$ a drugi stupac sadrži slijedećih $L = N/2$ elemenata
- postupkom sličnim kao kod decimacije u vremenu dolazimo do strukture kao na slici na narednoj prikaznici
- kako se tijekom postupka $X(k)$ razlaže na parne i neparne uzorke ovaj postupak nazivamo **algoritam decimacije u frekvenciji** – decimation-in-frequency algorithm (DIF FFT)
- treba uočiti kako je sada niz $x(n)$ u prirodnom poretku uzoraka a izračunati niz $X(k)$ u "bit reversed" poretku

FFT algoritam s bazom 2 – decimacija u frekvencijskoj domeni