

Laboratorijske vježbe iz predmeta **Djelovanje i zaštita od zračenja**

Vježbe 1, 2, 4 i 5.

## Vježba 1. – SPEKTAR GAMA ZRAKE $Cs^{137}$

Mnogi eksperimenti u nuklearnoj fizici zahtjevaju snimanje i analizu energetskog spektra radioaktivnog izvora. Kod gama izvora dominira, osim u slučaju većih zahtjeva na rezoluciju, scintilacioni brojač.

Principi scintilacionog brojača. Kada nabijena čestica prolazi kroz materiju, ona ostavlja trag ekscitiranih i ioniziranih atoma iza sebe. Ekscitirani atomi se deekscitiraju emisijom kvanta svjetlosti. Baš kako se mogu načiniti uređaji s namjenom da detektiraju stvorene ione, isto tako se rade "scintilacioni brojači" koji detektiraju svjetlost emitiranu od strane ekscitiranih atoma. Ekscitirani atomi se ne deekscitiraju trenutačno, emisijom kvanta svjetlosti. Također je vrlo važan podatak o tipičnoj energiji, potrebnoj da bi se proizveo 1 foton svjetlosti. Tako je za organske scintilatore tipična vrijednost 200 eV.

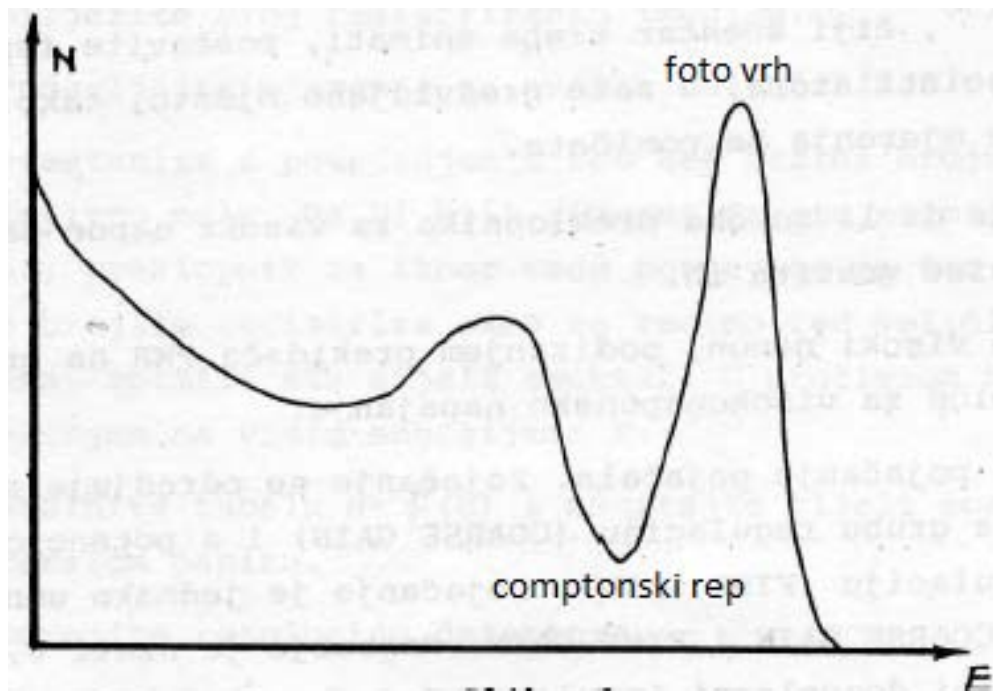
Dobar scintilacioni materijal mora biti proziran baš za onu valnu dužinu svjetlosti koju nam emitira, jer da bi se detektirala stvorena svjetlost, treba je propustiti do uređaja koji će proizvesti naponski impuls proporcionalan emitiranoj svjetlosti, dakle do fotomultiplikatora. To nije sasvim jednostavan zahtjev jer foton koji je rezultat prelaza jednog atoma iz ekscitiranog u osnovno stanje ima baš onu energiju koja je dovoljna da jedan sličan atom u scintilatoru dovede iz osnovnog u uzbuđeno stanje. Tako jedan foton može biti apsorbiran i reemitiran nekoliko puta. Svaki put postoji šansa da se foton transferira u kinetičku energiju atoma (toplina) te je tako broj fotona koji dosegnu fotokatodu fotomultiplikatora smanjen. Taj problem se može riješiti dodavanjem scintilatoru onečišćenja koja snižavaju energiju reemitiranih fotona te za njih materijal scintilatora postaje "prozirniji".

Upadna čestica energije  $E$  upada na scintilator, gdje gubi energiju ionizacijom i ekscitacijom molekula. Dio te energije se pretvara u  $N_0$  fotona, koji su emitirani u sve smjerove. Da bi se maksimalno povećao broj fotona koji pada na fotokatodu, scintilator je okružen jednim reflektorom. Dio tih fotona  $N$  uzrokuju emisiju  $T$  fotoelektrona iz fotokatode. Ti fotoelektroni se ubrzavaju prema prvoj dinodi pomoću potencijala primjenjenoj između fotokatode i prve diode,  $T$  elektron pogađa prvu diodu i izbija iz nje  $RT$  elektrona (sekundarna emisija). Ta elektronska multiplikacija se ponavlja i u slijedećim diodama.

Svaka apsorpcija zrake energije  $E$  daje na izlazu iz fotomultiplikatora naponski impuls  $V < E$ , koji ide u pojačalo. Linearно pojačani naponski impulsi idu u jednokanalni analizator. To je uređaj koji na ulazni signal daje izlazni signal, u obliku pravokutnog pozitivnog impulsa, jedino u slučaju ako napon ulaznog signala (dakle energija čestice) pada u interval  $E_Q < E < E_Q + \Delta E$ , dakle unutar "kanala" širine  $\Delta E$ , energije  $E$ . Elektronsko brojilo tada registrira propuštene naponske impulse. Snimanje energetskog spektra je tada brojenje impulsa u ovisnosti o energiji  $E$ , uz stalnu širinu kanala  $\Delta E$ .

Određenoj energiji pripada izvjesna raspodjela oko energije  $E_0$ . Mjera za razlučivanje je rezolucija detektora, omjer  $\frac{\Delta E}{E}$  gdje je  $\Delta E$  širina raspodjele na polovici visine.

Gledamo tri procesa, fotoelektrični efekt, Comptonov efekt i stvaranje parova. Uzevši u obzir sva tri načina interakcije gama zrake s materijom superpozicijom dobivamo spektar na slici 1.



Slika 1.: Spektar gama zraka

### Izvođenje mjerenja i rad na vježbi

Sve nam je bio unaprijed spojeno. Postavili smo početni napon na 0,2V, a na potenciometru za razliku (deltu) napona vrijednost smo postavili na nulu. Mjerenja smo vršili u vremenu od 30 sekundi, povećavajući napon između mjerenja za 0,1V (kod Comptonovog repa i foto vrha mjerili smo za svakih 0,05V).

Kada nam je brzina brojenja postala mala (za 2.1V uređaj je izbrojio 2650 impulsa) prestali smo s mjerenjima.

## Rezultati

Vrijeme brojanja,  $t = 30$  sek

E [V]	Broj impulsa	E [V]	Broj impulsa
0,2	22754	1,3	4074
0,3	17380	1,4	2704
0,4	14076	1,45	2520
0,5	15261	1,5	2889
0,6	15616	1,6	4843
0,7	13970	1,7	8291
0,8	10643	1,75	9622
0,9	8788	1,8	10257
1,0	7589	1,9	8627
1,1	6975	2,0	5454
1,2	5749	2,1	2560

Tablica 1.: Rezultati mjerenja za različite energije

Na slici 2. (logaritamski papir) nacrtan je cijeli spektar ovisnosti broja impulsa o energijama. Na visini polovice visine foto vrha (za broj impulsa 5129)  $\Delta E$  nam iznosi:

$$\Delta E = 2,01 - 1,61 = 0,4V$$

te nam je rezolucija detektora uz  $E_0 = 1,8V$ :

$$\frac{\Delta E}{E} = 0,222' = 22,22\%$$

Uzmemo li da nam je  $E_0 = 0,662MeV$  možemo izračunati maksimalnu energiju Comptonskih elektrona:

$$E_{e,max} = E_0 \cdot \left(1 + \frac{m_0 c^2}{2E_0}\right)^{-1}$$

$$m_0 c^2 = 0,51MeV$$

$$E_{e,max} = 0,478MeV$$

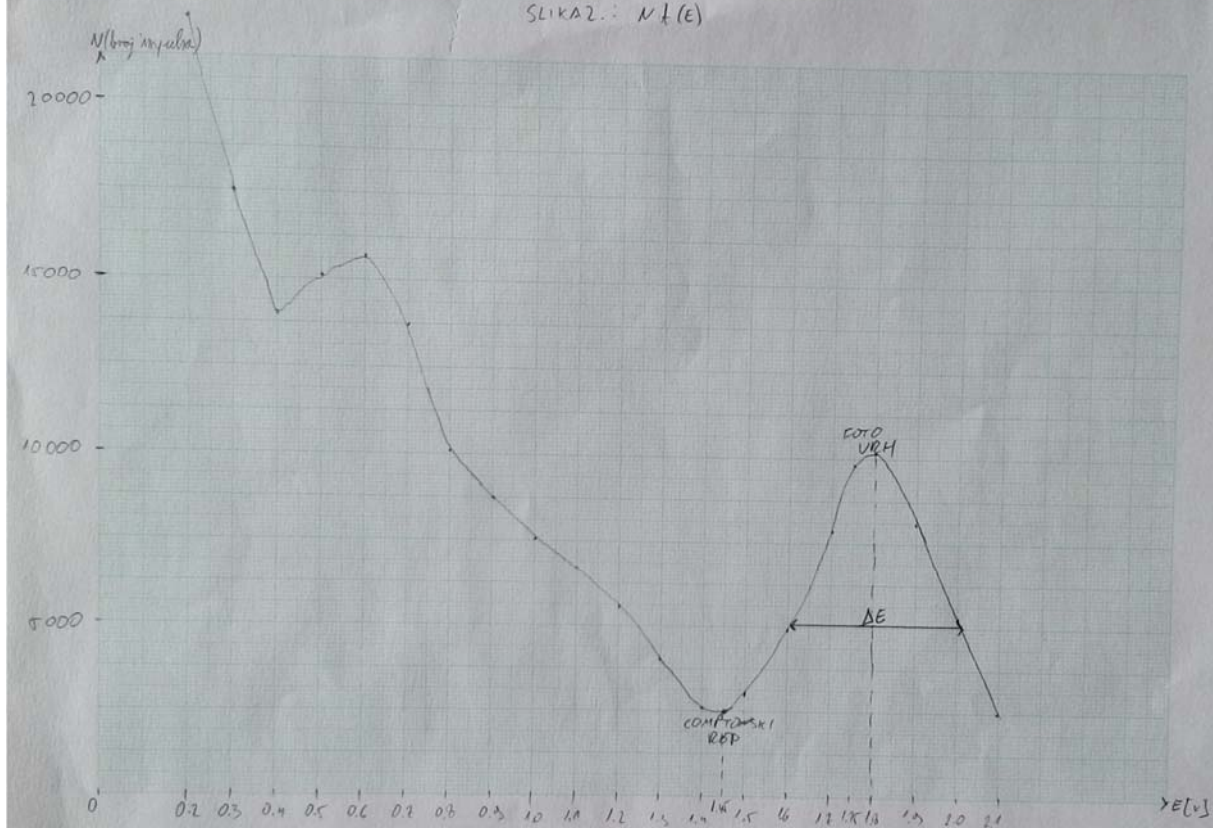
Usporedimo sad izračunati  $E_{e,max}$  sa  $E_{e,max}'$  dobivenim iz grafa i linearizacijom  $E=E(V)$ .

$$E'_{e,max} = \frac{1,45 \cdot 0,662}{1,8} = 0,533MeV$$

Postotna razlika dva rezultata koja nastaje zbog grubih, sistemskih i slučajnih pogrešaka iznosi:

$$1 - \frac{E_{e,max}}{E_{e,max}'} = 0,1031 = 10,31\%$$

SLIKA 2.:  $N(E)$



## Vježba 2. – G.M. BROJAČ

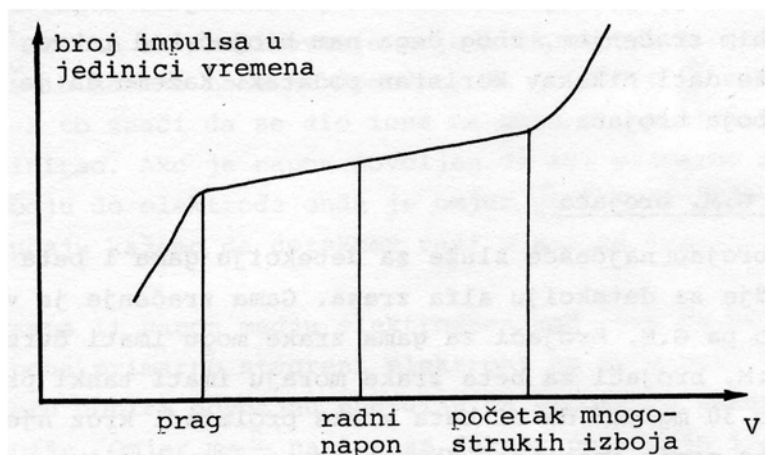
Kada radioaktivno zračenje prolazi kroz materiju, ono predaje tvari energiju. Predana energija troši se na ionizaciju i pobuđivanje atoma ili molekula ozračenog materijala. Ako smo taj materijal stavili u električno polje javljaju se neka nova svojstva u materijalu kojih nije bilo prije ozračavanja. Ako se radi o plinovitoj materiji doći će do kretanja iona - javit će se struja, bilo stalna bilo trenutačna. Na toj se pojavi zasnivaju plinski detektori. Tri su vrste plinskih detektora: ionizacijska komora, proporcionalni brojač i Geiger - Mullerov brojač (G.M. brojač).

Označimo li s  $n$  broj iona koji stignu na kolektor (elektrodu koja služi za odvođenje električnog naboja) onda je omjer  $\frac{n}{n_0}$  bitan za razlikovanje pojedinih tipova brojača. Kod niskih napona može se dogoditi da je omjer  $\frac{n}{n_0}$  manji od jedan, a to znači da se dio iona na putu prema elektrodama rekombinirao. Ako je napon dovoljan da svi primarno nastali ioni dođu do elektroda onda je omjer jednak jedan. U tom slučaju kažemo da detektor radi u režimu ionizacijske komore. Raste li napon među elektrodama kod neke će vrijednosti napona primarno stvoreni elektroni na svom putu prema kolektoru dobiti dovoljnu energiju da prouzroče sekundarnu ionizaciju. Ako napon među elektrodama premaši neku određenu vrijednost onda  $n$  postaje neovisan o  $n_0$  uz uvjet da je  $n_0 > 1$  i time smo došli u područje G.M. brojača. Ukoliko bi se napon i dalje povećavao dolazi do samostalnog izbijanja u brojaču, koje ne ovisi o ionizaciji uzrokovanoj radioaktivnim zračenjem, zbog čega nam brojač kod takvog napona ne može dati nikakav koristan podatak. Kažemo da je došlo do proboja brojača.

Vrste G.M. brojača. G.M. brojači najčešće služe za detekciju gama i beta zraka, a rjeđe za detekciju alfa zraka. G.M. brojači za beta zrake moraju imati tanki prozor debljine do  $30 \text{ mg/cm}^2$  da bi beta zrake prolazeći kroz njega izgubile što manje energije.

Rad G.M. brojača. Elektroni nastali primarnom ionizacijom kreću se u G.M. brojaču prema anodi. Zbog posebne građe G.M. brojača polje je u blizini anode veoma jako i zbog toga elektroni u blizini anode imaju dovoljnu energiju za sekundarnu ionizaciju. Ta se ionizacija širi na obje strane duž žice (anode). Nastaje tzv. elektronska lavina, koja stvara jedan oblak naboja oko anode. Elektroni će brzo stići na anodu dok su pozitivni ioni spori i relativno se dugo zadržavaju u blizini anode i smanjuju jakost električnog polja u blizini anode. Postoji opasnost da ioni stigavši na katodu iz nje izbiju elektrone, koji bi onda krenuli prema anodi i time bi se jednom započeti proces ionizacije neprestano obnavljao. To se sprečava dodavanjem nekih primjesa osnovnom plinu u brojaču (metilni alkohol ili halogenidi).

Plato G.M. brojača. Za G.M. brojač je karakteristično da je broj registriranih impulsa unutar nekih granica malo ovisan o promjeni napona. To naponsko područje naziva se platoom G.M. brojača. Plato se karakterizira u postocima porasta brzine brojenja na 100 V. Kod dobrih brojača širina platoa je do 200 V i više, a porast od oko 5% na 100 V.



Slika 1.: Ovisnost brzine brojanja o narinutom naponu

Mrtvo vrijeme G.M. brojača. Kako smo već spomenuli prolaskom ionizirajuće čestice kroz G.M. brojač nastala je elektronska lavina i oblak pozitivnog naboja oko anode koji relativno sporo putuje prema katodi. Taj oblak smanjuje jakost električnog polja oko anode i polje nije dovoljno jako da bi došlo do sekundarne ionizacije. Kako bi se uspostavilo početno električno polje mora proći neko vrijeme. Ako bi unutar tog vremena kroz G.M. brojač prošla neka ionizirajuća čestica, ona se ne bi registrirala. Vrijeme za koje brojač ne može registrirati novu česticu naziva se mrtvo vrijeme. Nakon što se oblak pozitivnog naboja udaljio električno polje je naraslo, ali još nije dostiglo svoju punu vrijednost. To se događa tek kad sav naboj stigne na katodu. Unutar tog vremenskog intervala brojač može registrirati čestice, ali su impulsi manji nego prvi impuls. Govorimo o vremenu oporavljanja.

Određivanje mrtvog vremena brojača (vremena razlučivanja). Ako je  $N$  stvarni broj čestica koje su prošle kroz brojač u jednoj sekundi, a  $n$  broj registriranih čestica u jednoj sekundi, tada je vrijeme razlučivanja  $\tau = \frac{N-n}{n}$ . Kako je teško znati stvarni broj čestica  $N$ , eksperimentalno ćemo odrediti  $\tau$  pomoću 3 mjerenja koristeći dva izvora nepoznate aktivnosti. Aktivnost svakog od njih se može nezavisno mjeriti. Ako su  $n_1$  i  $n_2$  mjereni broj otkucaja za izvore 1 i 2, a  $n_{12}$  mjereni broj otkucaja za oba izvora zajedno, tada će vrijeme rezolucije biti:

$$\tau = \frac{1}{n_{12}} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{n_{12}(n_1 + n_2 - n_{12})}{n_1 \cdot n_2}} \right]$$

Sva tri mjerenja moraju biti izvedena pri istom naponu čija je vrijednost oko sredine vrijednosti napona platoa.

## Izvođenje mjerenja i rad na vježbi

Na stolu se nalazio G.M. brojač, elektronsko brojilo i izvor visokog napona kao jedna jedinica te radioaktivni (gama) izvori.

Spustili smo napon i uključili brojač. Napon smo polagano podizali dok nismo došli do vrijednosti kada brojilo počne brojiti. U našem slučaju ta vrijednost napona je iznosila 375V. Nakon toga smo podizali napon za po 25V i mjerili broj impulsa unutar vremenskog intervala od 1 minute.

## Rezultati

Vrijeme mjerenja,  $t = 1 \text{ min}$

Početni napon kod kojeg brojilo počne brojiti (prag G.M. brojača),  $V_0 = 375V$

V [V]	Broj impulsa	V [V]	Broj impulsa
375	7582	600	9254
400	8101	625	9002
425	8317	650	9034
450	8686	675	9275
475	8727	700	9305
500	9062	725	9330
525	8871	750	9421
550	8928	775	9273
575	9023	800	9295

Tablica 1.: Rezultati mjerenja za različite energije

Na slici 2. (milimetarski papir) rezultati su grafički prikazani. Kako nam se događa da broj impulsa pada povećanjem napona možemo zaključiti da je došlo do nekih pogrešaka prilikom mjerenja. Najveća razlika je pad sa 9254 izbrojana impulsa na 9002 što je razlika od 2,7% što može ući u neke normalne granice pogreške.

Plato brojača smo odredili kao područje između 500V i 700V te je uzeti napon na sredini platoa  $V_p = 600V$ .

Nagib platoa dobili smo kao  $\frac{dN \cdot 10^4}{N \cdot dV} = \frac{(9305 - 9062) \cdot 10^4}{9254 \cdot 200V} = 1,31\%$

Mrtvo vrijeme smo odredili tako što smo izmjerili broj registriranih impulsa za izvor 1, izvor 2 i zajedno oba izvora:

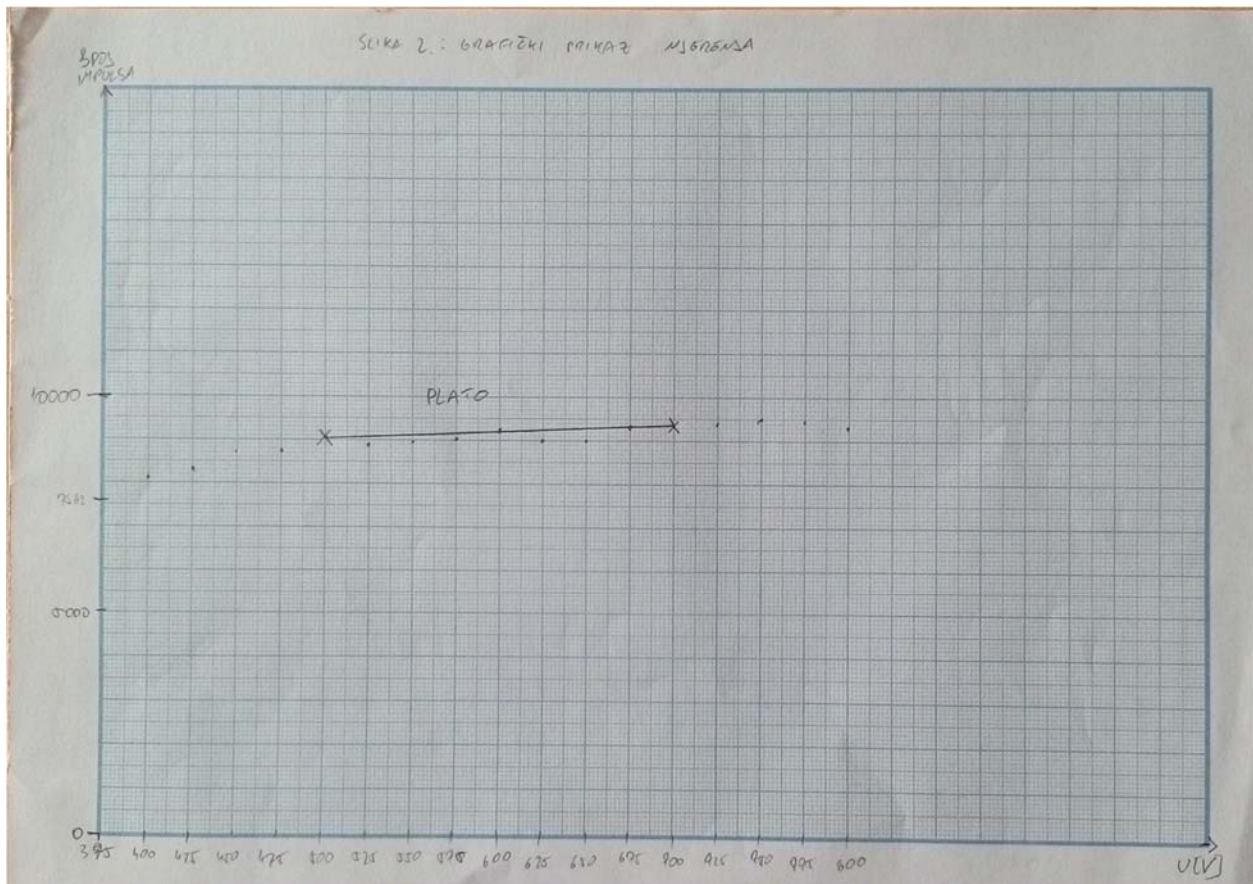
$$n_1 = 3584$$



$$n_2 = 1473$$

$$n_{12} = 5110$$

$$\tau = \frac{1}{5110} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{5110(3584 + 1473 - 5110)}{3584 \cdot 1573}} \right] = 4,21 \mu s$$



#### Vježba 4. – APSORPCIJA GAMA ZRAKA U TVARI

Do interakcije između gama zrake i atoma može doći na dvanaest načina. Tri su **procesa** značajna, i prilikom apsorpcije gama zraka jedino se o njima vodi računa u području od 0,01 do 10 MeV. To su: Comptonov efekt, fotoelektrični efekt i stvaranje parova.

Comptonovo raspršenje je raspršenje gama zrake na slobodnim elektronima, pri čemu gama zraka predaje dio svoje energije elektronu te ona mijenja smjer. Definiramo veličinu koja će biti mjera vjerojatnosti svakog od ova dva procesa te ju nazivamo udarni presjek. Neka je upadna struja fotona  $I$  (broj fotona po sekundi po centimetru kvadratnom) i neka se na jednom elektronu rasprši  $dI_r$  fotona, tada definiramo udarni presjek za raspršenje gama zraka kod Comptonovog efekta kao:

$$dI_r = \sigma_r I_0$$

Udarni presjek ima dimenziju površine.

Budući da se nikada ne radi o raspršenju na jednom izoliranom elektronu, već o raspršenju na makroskopskim veličinama uzorka, koji sadrži veoma mnogo elektrona, moramo definirati koeficijente karakteristične za neki proces, ali koji vode računa o broju elektrona u jedinici volumena. Neka je  $N$  broj atoma po jedinici volumena, a  $Z$  broj elektrona po atomu. Tada definiramo linearni koeficijent apsorpcije kao:

$$\sigma_c = \sigma_r NZ$$

Dimenzija od linearnog koeficijenta apsorpcije je  $\text{cm}^{-1}$ .

Razmotrit ćemo značenje linearnog koeficijenta apsorpcije. Uzorak u obliku folije, debljine  $x$ , odstranit će u debljini sloja između ' $x$ ' i ' $x + dx$ ' sa svake jedinice površine uzorka iz upadnog snopa intenziteta dio snopa  $dI$  proporcionalan s intenzitetom snopa  $I(x)$  (intenzitet snopa na nekoj debljini  $x$ ), s debljinom sloja  $dx$  i s linearnim koeficijentom apsorpcije  $\sigma_c$ :

$$dI = I(x)\sigma_c dx$$

Integracija daje:

$$I = I_0 e^{-\sigma_c x}$$

Koeficijent apsorpcije je funkcija energije, jer je udarni presjek funkcija energije. Linearni koeficijent apsorpcije ovisi o materijalu. Definirat ćemo maseni koeficijent apsorpcije  $\sigma/\rho$  gdje je  $\rho$  gustoća tvari. Dimenzija masenog koeficijenta apsorpcije je  $\text{cm}^2/\text{g}$ .

Fotoelektrični efekt je pojava kod koje gama zraka predaje svu svoju energiju elektronu, te ona potpuno nestaje. Neka je  $\tau_f$  udarni presjek za fotoefekt po jednom atomu, tada je linearni koeficijent apsorpcije za fotoefekt  $\tau$  jednak:

$$\tau = \tau_f N$$

gdje je N broj atoma po jedinici volumena. Definirajmo još maseni koeficijent apsorpcije kao  $\tau/\rho$ . Daljnje razmatranje je analogno kao kod Comptonovog raspršenja.

Stvaranje parova. Ako je energija upadnih fotona veća od 1,02 MeV tada je moguće da se u polju jezgre foton pretvori u par elektron-pozitron. Za taj proces, analogno kao kod fotoelektričnog efekta i Comptonovog raspršenja, definiramo udarni presjek za stvaranje parova  $K_p$  po jednom atomu, linearni K i maseni  $K/\rho$  koeficijent apsorpcije.

Sada možemo definirati ukupni koeficijent apsorpcije kao zbroj koeficijenata za pojedine procese:

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\tau_c}{\rho} + \frac{\tau}{\rho} + \frac{K}{\rho}$$

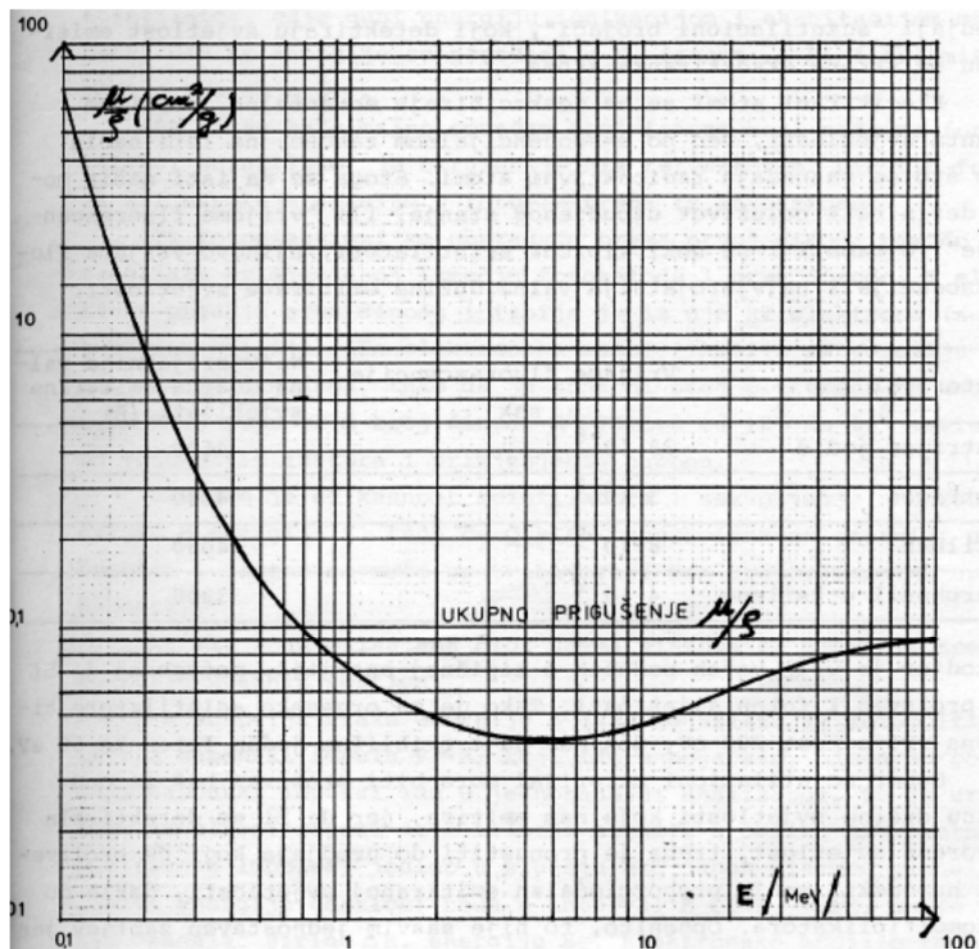
### **Izvođenje mjerenja i rad na vježbi**

Na stolu smo imali brojilo, GM brojač, olovni štit u koji se stavlja izvor, olovne pločice za apsorpciju i radioaktivni izvor. Brojilo je brojilo 2 minute te ispisivalo broj impulsa registriranih u zadanom vremenu.

Prvo smo zabilježili broj impulsa bez olovnih pločica, a zatim smo postepeno stavljali olovne pločice (prvo jednu, zatim dvije i na kraju tri). Svako mjerenje smo načinili 3 puta i tražili srednju vrijednost. Na milimetarski lin-log papir nanjeli smo broj registriranih impulsa, (napomena: nismo umanjili za broj impulsa zračenja pozadine koje je relativno malo pa nam nije bitno utjecalo na konačni rezultat) u ovisnosti o debljini apsorbensa. Iz dobivene krivulje odredili smo koeficijent apsorpcije tako što smo pronašli debljinu poluapsorpcije (debljina apsorbensa za koju zračenje pada na polovicu), a onda i  $\mu$  preko relacije

$$D_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$$

Preko masenog koeficijenta apsorpcije za olovo (gustoća olova je 11,35 g/cm<sup>3</sup>) i priložene krivulje (slika 1.) odredili smo energiju gama zraka našavši odgovarajuću energiju za određeni maseni koeficijent apsorpcije.



Slika 1.: ukupno prigušenje upadnog gama zračenja u ovisnosti o energiji

## Rezultati

Vrijeme brojanja,  $t=2\text{min}$

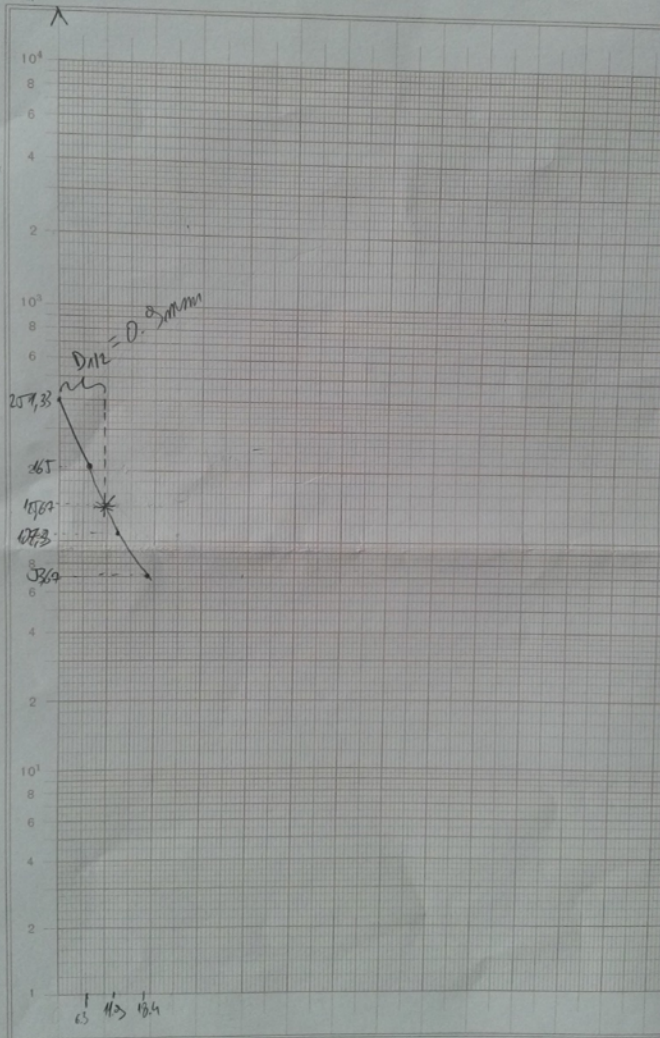
Debljina pločice(a):	d=0mm	d=6,3mm	d=11,9mm	d=18,4mm
Mjerenje broj	Broj impulsa:	Broj impulsa:	Broj impulsa:	Broj impulsa:
1.	248	174	103	55
2.	249	158	108	57
3.	257	163	111	49
Srednja vrijednost:	251,33	165	107,33	53,67

Tablica 1.: rezultati mjerenja za različite debljine pločica

Iz slike 2. proizlazi nam  $D_{1/2}=0,9\text{mm}$  pa je  $\mu=0.7701$  te  $\frac{\mu}{\rho} = 0,0067 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$ .

Sada iz slike 1. možemo odrediti energiju gama zraka  $E_\gamma = 0,6\text{MeV}$ .

LOS  
MUSA



Logar. Teilung 1-10000, Einheit 50 mm

## Vježba 5. – STATISTIKA

Vjerojatnost. Vjerojatnost da se neki događaj ostvari izražavamo relacijom:

$$p_i = \frac{n_i}{n}$$

Gdje je  $n_i$  broj povoljnih događaja, a  $n$  broj mogućih događaja. Ako u određenom broju  $n$  mogućih i ravnopravnih slučajeva ima  $n_1$  povoljan slučaj za događaj  $a_1$  i  $n_2$  povoljan slučaj za događaj  $a_2$  itd., te ako grupe  $a_1, a_2, \dots, a_i$  nemaju zajedničkih članova, tada je vjerojatnost da će se dogoditi ili događaj  $a_1$  ili događaj  $a_2$  jednaka:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n}$$

Zatim, ako je  $P_j$  vjerojatnost nekog događaja  $j$ , a  $P_k$  vjerojatnost događaja  $k$ , a događaji  $j$  i  $k$  su međusobno nezavisni onda je složena vjerojatnost jednaka umnošku vjerojatnosti za pojedini događaj:

$$p = p_1 \cdot p_2$$

Razdioba vjerojatnosti. Određena vrijednost mjerenja  $x_i$  može se pojaviti nekoliko puta u promatranom nizu mjerenja. Učestalost pojave  $x_i$  slijedi neku razdiobu vjerojatnosti, koja odgovara biti procesa.

Binomna razdioba. Binomna razdioba je osnovna razdioba za slučajne događaje, a iz nje se mogu izvesti druge razdiobe. Ako je  $p$  vjerojatnost da se pojavi jedan događaj, a  $q = 1-p$  vjerojatnost da se ne pojavi onda će u grupi od  $n$  neovisnih mjerenja vjerojatnost  $P_z$  da se događaj pojavi  $z$  puta biti dana onim članom u binomnom razvoju  $(p+q)^n$ , u kojem je  $p$  podignuto na  $z$ -tu potenciju. Kod binomne razdiobe dva su nezavisna parametra:  $p$  i  $n$ . Uočimo da je  $(p+q)^n$  uvijek jednako jedinici, nadalje razvoj tog reda predstavlja zbroj pojedinačnih vjerojatnosti od  $P_n$  do  $P_0$ .

$$P_z = \frac{n!}{z!(n-z)!} p^z (1-p)^{n-z}$$

Ova se razdioba primjenjuje kad su  $n$  i  $z$  cijeli brojevi.

Poissonova razdioba. Poissonova razdioba je granični slučaj binomne kad je  $n$  veoma veliko, a  $p$  veoma malo. Ti su uvjeti zadovoljeni kod radioaktivnog raspada, za koji su ispunjeni slijedeći uvjeti:

- vjerojatnost za raspad atoma u određenom vremenskom intervalu jednaka je za svaki atom dane vrste,
- raspad pojedinog atoma u danom vremenskom intervalu ne utječe na vjerojatnost raspada drugog atoma u istom vremenskom intervalu,

- vjerojatnost da se atom raspadne za vrijeme danog vremenskog intervala jednaka je za sve vremenske intervale jednakog trajanja,
- ukupan broj atoma i vremenskih intervala promatranja je velik.

Neka je  $a$  broj jezgara koje se raspadnu u jedinici vremena (brzina raspadanja). Tada se u vremenu  $t$  raspadne  $at$  jezgara. Odaberemo li vremenski interval  $dt$  takav da je  $adt \ll 1$ , tada je  $P_1(dt) = adt$  vjerojatnost da se u intervalu  $dt$  pojavi, tj. raspadne jedna jezgra. Nadalje, vjerojatnost raspada dviju ili više jezgara je malena u usporedbi s vjerojatnošću raspada jedne čestice u istom vremenskom intervalu:

$$p_1(dt) \gg p_2(dt) \gg p_3(dt)$$

Želimo li nekim uređajem registrirati radioaktivne čestice, može se pokazati da je vjerojatnost opažanja  $x$  čestica u intervalu vremena  $t$  dana relacijom:

$$P_x(t) = \frac{(at)^x}{x!} e^{-at}$$

Veličina  $at$  je prosječni broj čestica koji registriramo u jednakim intervalima  $t$  i označavamo je s  $m$ :

$$P_x = \frac{m^x}{x!} e^{-m}$$

To je uobičajeni oblik Poissonove razdiobe.  $P_x$  je vjerojatnost da se u vremenskom intervalu  $t$  pojavi  $x$  događaja, ako se u istom intervalu u prosjeku pojavljuje  $m$  događaja.

Hi - kvadrat test. Pearson je (1900te) uveo hi-kvadrat test kao način provjeravanja skladnosti između eksperimentalno mjerenih i teoretskih raspodjela. Veličina  $\chi^2$  definira se kao:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[(n_x)_i - (n'_x)_i]^2}{(n'_x)_i}$$

gdje je  $(n_x)_i$  mjerena vrijednost za neku veličinu  $x$ , a  $(n'_x)_i$  očekivana vrijednost za tu istu veličinu. Suma ide preko ukupnog broja nezavisnih razreda u koje su podaci svrstani.

### **Izvođenje mjerenja i rad na vježbi**

Na stolu smo imali elektronsko brojilo s ugrađenim visokim naponom za GM brojač. Brojač i brojilo su bili spojeni i vršili smo samo uključivanje i stopiranje brojača. Mjerili smo broj impulsa unutar vremenskog intervala od 15 sekundi. Mjerenje smo ponovili 100 puta (rezultati u Tablici 1.)

## Rezultati

Mjerenje broj n*m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	7	3	3	10	6	8	6	2	6
2	5	7	3	3	5	2	5	8	2	2
3	4	8	5	6	5	8	7	4	6	5
4	13	5	5	5	9	16	2	7	8	3
5	6	8	6	4	5	6	2	2	6	5
6	4	8	9	4	5	8	3	6	5	5
7	3	5	9	3	4	3	6	3	6	5
8	3	9	2	4	3	6	4	2	3	6
9	5	9	4	5	4	8	4	4	4	6
10	6	5	5	6	5	9	5	5	6	4

Tablica 1.: rezultati mjerenja

Srednja vrijednost broja otkucaja GM brojača:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{100} x_i = \frac{531}{100} = 5,31$$

x	n <sub>x</sub>
2	10
3	13
4	14
5	23
6	18
7	4
8	9
9	6
10	1
13	1
16	1

Tablica 2.: ponavljanje određenog rezultata

Sa x je označen broj otkucaja u zadanom vremenu, a sa n<sub>x</sub> koliko puta se pojavio taj broj u 100 mjerenja.

Prosječan broj impulsa m:

$$m = \frac{\sum x \cdot n_x}{n} = 5,18 = 5,2$$

Uzimamo da nam je r (broj stupnjeva slobode) jednak 2.



Kako bi dobili  $\chi^2$  radimo sljedeću tablicu:

x	$n_x$	$n_x'$	$n_x - n_x'$	$\frac{(n_x - n_x')^2}{n_x'}$
2	10	7,46	2,54	0,2621
3	13	12,93	0,07	
4	14	16,81	-2,81	
5	23	17,48	5,52	
6	18	15,15	2,85	
7	4	11,25	-7,25	
8	9	7,31	1,69	
9	6	4,23	1,77	
10	1	2,20	-1,20	
13	1	0,18	0,82	
16	1	0,01		

Tablica 3.: računanje hi-kvadrata

$n_x'$  smo dobili tako što smo podatke iz tablice Poissonove razdiobe koji odgovaraju našem zaokruženom broju stupnjeva slobode množili sa brojem mjerenja (100).

Kako nam svi  $n_x'$  ne zadovoljavaju uvjet  $n_x' \gg 3$  pribrojili smo ih zajedno pa dobivamo:

$$\chi^2 = 0,2621$$

Iz tablica dobivenih u vježbi sad očitamo vjerojatnost za  $P(\chi^2 > 0,26)$ . Za dobiveni stupanj slobode imamo  $P(\chi^2 > 0,211) = 0,9$  i  $P(\chi^2 > 0,446) = 0,8$  pa interpolacijom dobivamo da je  $P(\chi^2 > 0,26) = 88\%$ . Možemo očekivati da će se u 88% slučajeva vrijednost  $\chi^2$  nalaziti u intervalu od 0,2621 do beskonačnosti.

