EKSTREMALNA KOMBINATORIKA

A. Aglić Aljinović

FER, diplomski studij, 2014./2015.

Sadržaj

Uvod

Kombinatorika je grana matematike koja se općenito bavi proučavanjem konačnih ili prebrojivo beskonačnih diskretnih struktura. Ovisno o aspektu proučavanja postoje brojne podgrane kombinatorike:

-**enumerativna kombinatorika** je najklasičnija grana kombinatorike koja se bavi prebrojavanjem odnosno nalaženjem kardinalnog broja konačnih skupova;

-**teorija grafova** proučava grafove, jedne od osnovnih objekata u kombinatorici;

-**algebarska kombinatorika** koristi metode apstraktne algebre (teoriju grupa i teoriju reprezentacija) u kombinatorici, ali i obratno, primjenjuje kombinatorne tehnike za algebarske probleme;

-**kombinatorika na riječima** bavi se formalnim jezicima;

-**teorija dizajna** se bavi konstrukcijom i analizom tzv. blok dizajna koji su familije podskupova čiji presjeci zadovoljavaju određena svojstva; važna podgrana teorije dizajna je **teorija kodova**;

-**analitička kombinatorika** se bavi prebrojavanjem kombinatornih struktura, ali korištenjem alata kompleksne analize i teorije vjerojatnosti;

-**geometrijska kombinatorika** proučava konveksnu i diskretnu geometiju, naročito poliedarsku geometiju;

-**teorija matroida** se bavi konstrukcijom i analizom skupova vektora u vektorskim prostorima s apstraktnim svojstvima linearne zavisnosti;

-**vjerojatnosna kombinatorika** se bavi vjerojatnošću slučajnih diskretnih objekata, primjerice slučajnih grafova;

-**topološka kombinatorika** kombinatornim analogonima topoloških metoda proučava neke probleme u kombinatorici (bojanje grafova, particije, parcijalno uređene skupove, binarna stabla, diskretnu Morseovu teoriju i dr.);

-**aritmetička kombinatorika** povezuje kombinatoriku s teorijom brojeva, ergodskom teorijom i harmonijskom analizom;

-**teorija uređaja** proučava konačne i beskonačne parcijalno uređene skupove;

-**teorija particija** proučava različite probleme prebrojavanja i asimptotike cjelobrojnih particija;

-**kombinatorna optimizacija** se bavi pronalaženjem optimalnog broja konačnog skupa objekata s danim svojstvom;

-**ekstremalna kombinatorika** se bavi pronalaženjem ekstremalnog (najvećeg ili najmanjeg) broja konačnog skupa objekata s danim svojstvom;

-**kombinatorna teorija skupova** se bavi poopćavanjem pojmova kombinatorike na beskonačne skupove i dio je teorije skupova (područja matematičke logike) koji koristi alate i ideje ne samo teorije skupova već i ekstremalne kombinatorike.

Ekstremalna kombinatorika kao grana kombinatorike u posljednjih nekoliko desetljeća doživljava vrlo intezivan razvoj, možda upravo zbog primjena u teorijskom računarstvu, u analizi složenosti algoritama. Naziv "ekstremalna" govori o prirodi problema kojim se bavi: koliko velika ili koliko mala konačna skupina objekata može biti ako mora ispunjavati neka svojstva, odnosno restrikcije. Ti objekti primjerice mogu biti brojevi, skupovi, grafovi, vektori i sl.

Ovdje navodimo nekoliko klasičnih takvih problema: problemi 1 i 2 i 3 su iz *ekstremalne teorije grafova*, problemi 4 i 5 iz *ekstremalne teorije skupova*, problemi 6, 7 i 8 su primjena *vjerojatnosne metode*, *metode linearne algebre* i *Dirichletovog načela* u teoriji brojeva, problem 9 iz *teorije složenosti***.**

Problem 1. Koliko ljudi možemo pozvati na zabavu ako želimo da među bilo koje troje od njih postoje dvoje koji se poznaju i dvoje koji se ne poznaju?

Odgovor: Argumentom *Ramseyevog tipa* lako se pokaže da najviše 5 ljudi može biti na ovakvoj zabavi. Odnosno, među 6 ljudi uvijek postoji troje koji se svi međusobno poznaju ili se međusobno ne poznaju.

Problem 2. Koliko najviše može biti poznanstava u gradu s n stanovnka, ako znamo da među svakih k stanovnika su barem dva koji se ne poznaju.

Odgovor: Za $k = 3$ odgovor je "najviše $n^2/4$ poznanika" i dokazao ga je *Mantel* 1907. godine. Primjetimo da je taj broj blizu pola ukupnog broja poznanika $n\,(n-1)\,/2$. Za proizvoljan k odgovor je dao *Turán* 1941. godine i taj rezultat je bio začetak *ekstremalne teorije grafova.*

Problem 3. Koliko stanovnika mora imati grad da bi bili sigurni da u njemu uvijek postoji k stanovnika koji se svi međusobno poznaju ili svi međusobno ne poznaju?

Odgovor: Ramseyev teorem tvrdi da u gradu s 4^k stanovnika uvijek postoji k stanovnika koji se svi međusobno poznaju ili svi međusobno ne poznaju. S druge strane, koristeći vjerojatnosnu metodu *mađarski matematičar Paul Erdős* je dokazao da u gradu s najviše $2^{k/2}$ stanovnika postoji raspored međusobnih poznanstava takav da nemamo k stanovnika koji se svi međusobno poznaju ili svi međusobno ne poznaju. Koristeći metodu linearne algebre, *Frankl i Wilson* su konstruirali ovakav raspored za grad s najviše $k^{\log k}$ stanovnika.

Problem 4. U gradu s n stanovnika imamo izvjesan broj klubova. Svaki stanovnik može biti član nekoliko klubova ili nijednog od njih. Ako nijedan klub ne sadrži sve članove nekog drugog kluba, koji je maksimalan broj klubova u tom gradu?

Odgovor: Odgovor na ovo pitanje daje *Spernerov teorem,* u gradu s n stanovnika najviše može biti $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ klubova takvih da nijedan klub ne sadrži sve članove nekog drugog kluba.

Problem 5. Familiju klubova zovemo *suncokret* ako je svaki stanovnik (koji je u barem jednom klubu) ili član svih klubova ili samo jednog kluba. Ako svaki klub ima s članova, koliko klubova moramo imati da bi nekih k klubova tvorili suncokret?

Odgovor: *Erdős-Radova suncokretova lema* tvrdi ako imamo barem $s!\,(k-1)^s$ klubova, nekih k klubova će tvoriti suncokret.

Problem 6. Koliko članova može imati podskup unaprijed zadanog skupa cijelih brojeva različitih od nule, uz uvjet da suma bilo koja dva elementa iz tog podskupa nije u tom podskupu (engl. sum-free subset)?

Odgovor: Ispostavlja se da neovisno o početnom skupu, uvijek možemo pronaći ovakav podskup s barem trećinom elemenata početnog skupa! Ovaj rezultat dokazao je *Erdős* 1965. godine koristeći *vjerojatnosnu metodu.*

Problem 7. Za zadani $k \in \mathbb{N}$, koliko dug mora biti niz $a_1, a_2, \ldots, a_n$ da bi bili sigurni da sadrži podniz čija je suma djeljiva s k?

Odgovor: Uzmemo li niz od $k-1$ uzastopnih nula i $k-1$ uzastopnih jedinica $\underbrace{0\cdots0}_{k-1}\underbrace{1\cdots1}_{k-1}$ kao kontraprimjer, jasno je da takav niz mora imati barem $2n-1$ elemenata. Da zaista svaki niz s $2n-1$ elemenata ima podniz čija je suma djeljiva s k, koristeći *metodu linearne algebre* dokazali su *Erdős, Ginzburg i Ziv* 1961. godine.

Problem 8. Koliko dug mora biti niz realnih brojeva da bi bili sigurni da sadrži rastući podniz duljine $s+1$ ili padajući podniz duljine $r+1$?

Odgovor: Svaki niz realnih brojeva s barem $sr+1$ članova ima ovo svojstvo. To su prvi dokazali *Erdős* i *Szekeres* 1935. godine koristeći *Dirichletovo načelo.*

Problem 9. Zadan je skup od m binarnih vektora. Za koliko njihovih koordinata (bitova) moramo znati vrijednosti da bi mogli ih mogli sve međusobno razlikovati?

Odgovor: U prosjeku je dovoljno znati vrijednosti $\sqrt{m}$ koordinata i postoje skupovi za koje se ova granica ne može poboljšati.

Sljedeći niz primjera lijepo ilustrira kako se s malim varijacijama od vrlo jednostavnih problema dolazi do vrlo teških:

Primjer A. Neka je $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Koliko najviše članova može imati familija $\mathcal{F}$ podskupova za koju vrijedi da bilo koja dva podskupa iz te familije imaju neprazni presjek? (Ovakva familija se zove *presijecajuća familija.*)

Odgovor: Najveći mogući broj članova presjecajuće familije je 2^{n-1}. Možemo je dobiti uzimanjem svih podskupova od X koji sadrže element 1. Više od 2^{n-1} ih ne možemo naći jer za bilo koji podskup i njegovog komplement vrijedi da ne mogu oba istovremeno biti u presjecajućoj familiji.

Primjer B. Koliko najviše članova može imati familija podskupova $\mathcal{F}$ za koju vrijedi da za bilo koja dva podskupa iz te familije njihova unija nije jednaka $X = \{1, 2, \ldots, n\}$?

Odgovor: Najveći mogući broj članova ovakve familije $\mathcal{F}$ je opet 2^{n-1}. Možemo je dobiti uzimanjem svih komplemenata podskupova od X iz prethodnog primjera (koji sadrže element 1), dakle podskupova koji ne sadrže element 1.

Primjer C. Koliko najviše članova može imati familija $\mathcal{F}$ podskupova za koju vrijedi da bilo koja dva podskupa iz te familije imaju neprazni presjek i uniju različitu od X?

Odgovor: Jedan primjer familije koja zadovoljava navedeni uvjet je familija svih podskupova koji sadrže element 1 i ne sadrže element 2. Ona ima 2^{n-2} elemenata (podskupova). Međutim dokaz da je ovo zaista i maksimalna familija s traženim svojstvom je daleko teži nego u prethodna dva primjera. Nakon što je Paul Erdős postavio ovaj problem prošlo je nekoliko godina dok Kleitman nije dokazao da ne postoji familija s ovim svojstvom, a s većim brojem elemenata od 2^{n-2}.

Primjer D. (Erdős-Sos hipoteza) Neka je $\mathcal{F}$ familija grafova sa skupom vrhova $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ za koju vrijedi da bilo koja dva grafa iz familije imaju zajednički trokut (ciklus duljine 3). Koliko najviše elemenata (grafova) ova familija može imati?

Odgovor: Ukupan broj grafova s n vrhova je $2^{\binom{n}{2}}$. Jednostavan primjer familije s traženim svojstvom čine svi grafovi koji sadrže primjerice trokut s vrhovima 1, 2, 3, tj. bridove $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$. Ova familija ima točno $2^{\binom{n}{2}-3}$ elementa, odnosno $1/8$ svih grafova. No, postoji li veća familija s ovim svojstvom? Paul Erdős i Vera Sos su postavili hipotezu: ne postoji veća familija s ovim svojstvom. Ova hipoteza je i danas otvorena.

I za kraj, jedan problem ekstremalne prirode, postavljen 1974. godine kada je Ernő Rubik izumio Rubikovu $3 \times 3 \times 3$ kocku , a riješen tek nedavno:

Problem 10. U koliko najviše poteza se može riješiti bilo koja od $(8! \cdot 12! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}) : 12 \approx 4.3 \cdot 10^{19}$ kombinacija Rubikove kocke?

Odgovor: Svaka kombinacija Rubikove kocke rješiva je u najviše 20 poteza! Ovaj problem su u srpnju 2010. godine riješili kalifornijski programer Tomas Rokicki, njemački matematičar Herbert Kociemba, američki matematičar Morley Davidson i Googleov inženjer John Dethridge (više na http://www.cube20.org/).

Osnovni pojmovi

Za praćenje ovog predmeta pretpostavlja se znanje samo osnovnih, ovdje navedenih, pojmova iz 2. ciklusa (Uvod u diskretnu matematiku) i 3. ciklusa (Uvod u teoriju grafova) predmeta MAT3R, kao i predmeta VJEROJATNOST I STATISTIKA. Neki drugi pojmovi ili rezultati iz MAT3R i VIS biti će naknadno izloženi u gradivu ovog predmeta.

Ukratko, **osnovni kombinatorički pojmovi** (s njihovim tipom i brojem) navedeni su u sljedećoj tablici:

PERMUTACIJE	n različitih objekata	$n!$
(poredak bitan)	a_i objekata tipa i, $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$	$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k}$
VARIJACIJE	n različitih objekata, duljine k, bez ponavljanja	$n^{\underline{k}}$
(poredak bitan)	n različitih objekata, duljine k, s ponavljanjem	n^k
KOMBINACIJE	k-podskupovi n-članog skupa, bez ponavljanja	$\binom{n}{k}$
(poredak nije bitan)	k-podskupovi n-članog skupa, s ponavljanjem	$\binom{n+k-1}{k}$

gdje je

$$n^{\underline{k}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1),$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!},$$

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{n!}{a_1! a_2! \cdots a_k!}.$$

Osnovni pojmovi teorije grafova:

Graf (jednostavni graf) sastoji se od nepraznog konačnog skupa $V(G)$, čije elemente zovemo **vrhovi**, i skupa $E(G)$ različitih dvočlanih podskupova skupa vrhova koje zovemo **bridovi**. Za brid $e = \{u, v\}$ kažemo da **spaja** vrhove u i v, odnosno da su vrhovi u i v **susjedni**, a vrh v (ili u) **incidentan** s bridom e. **Stupanj vrha** v je broj bridova koji su incidentni s vrhom v, označavamo ga s $d(v)$.

Šetnja u grafu G je konačan slijed bridova u kojem svaka dva uzastopna brida imaju zajednički vrh ili su jednaki.

Staza u grafu G je šetnja u kojoj su svi bridovi različiti.

Put u grafu je šetnja u kojoj su svi vrhovi (pa onda i bridovi) različiti.

Ciklus je zatvoreni put (početni i krajnji vrh su jednaki) koji sadrži barem jedan brid. Ciklus koji se sastoji od samo jednog brida zovemo **petlja**, od dva je dvostruki brid između dva vrha, no ni jedni i ni drugi nisu mogući kod jednostavnih grafova.

Komponenta povezanosti grafa je skup njegovih vrhova sa svojstvom da postoji put između bilo koja dva vrha iz tog skupa. Graf je **povezan** ukoliko se sastoji od samo jedne komponenete povezanosti.

Šuma je graf bez ciklusa. **Stablo** je povezani graf bez ciklusa. Komponente povezanosti šume su stabla.

Poglavlje 1.

Klasična kombinatorika, ekstremalni problemi

1.1. Prebrojavanje

Prebrojavanje je najstariji alat u kombinatorici. Binomni, multinomni teorem i neki drugi identiteti vezani za binomne koeficijente, ovdje neće biti dokazani matematičkom indukcijom ili algebarski, već mnogo ljepše (iako ne uvijek i jednostavnije): kombinatorno. U kombinatornim dokazima "dvostrukim prebrojavanjem" pokazujemo da se obje strane jednakosti mogu dobiti prebrojavanjem iste vrste objekata, ali na dva različita načina.

1.1.1. Binomni teorem, dvostruko prebrojavanje

Broj k-članih podskupova n-članog skupa označavamo s $\binom{n}{k}$ i nazivamo **binomni koeficijent**. Sljedeći teorem dokazao je Sir Isac Newton oko 1666. godine:

Teorem 1.1. ***(Binomni teorem)*** *Za sve* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *vrijedi*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Dokaz. Množeći izraz $(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$ član $x^k y^{n-k}$ možemo dobiti na jednako načina na koliko možemo odabrati točno k od n zagrada iz kojih ćemo "uzeti" x-eve, a iz preostalih "uzimamo" y-e. Dakle na $\binom{n}{k}$ načina. ■

Definicija 1.1. *Za* $k \in \mathbb{N}$*,* k*-ta padajuća potencija od* n *definira se s*

$$n^{\underline{k}} := n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

Ovaj broj jednak je broju varijacija bez ponavljanja skupa od n *elemenata* k*-tog razreda, odnosno broju poredanih* k*-teraca* $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *gdje su* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *različiti elementi nekog* n*-članog skupa.*

Slično, k*-ta rastuća potencija od* n *definira se s*

$$n^{\overline{k}} := n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1).$$

Negdje u literaturi se za padajuće potencije umjesto oznake $n^{\underline{k}}$ koristi oznaka $(n)_k$ i naziv "*k-ti faktorjel od n*".

Propozicija 1.1. *Vrijedi*

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}. \tag{1.1}$$

Dokaz. Kako je $n^{\underline{k}}$ jednak je broju poredanih k-teraca $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ gdje su $x_1, x_2, \ldots, x_k$ različiti elementi nekog n-članog skupa, a njih možemo dobiti i tako da izaberemo k-člani podskup $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ iz n-članog skupa, a zatim te elemente poredamo/permutiramo na sve moguće načine. Ovo posljednje može se napraviti na $\binom{n}{k} \cdot k!$ načina, pa slijedi $n^{\underline{k}} = \binom{n}{k}k!$. ■

Svojstvo **simetrije** binomnih koeficijenata jednostavnije i ljepše se dokazuje kombinatorno nego algebarski: svaki podskup jedinstveno je određen svojim komplementom i stoga odmah slijedi

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Slično, svojstvo Pasclovog trokuta

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

dobijemo ako prebrojimo k-člane podskupove n-članog skupa na način da prvo prebrojimo sve podskupove koji sadrže neki fiksni element (primjerice n, ako imamo skup $\{1, 2, \ldots, n\}$), a zatim i one koji ga ne sadrže. Podskupova koji ga sadrže ima $\binom{n-1}{k-1}$, a onih koji ga ne sadrže ima $\binom{n-1}{k}$.

Evo prvih osam redova **Pascalovog trokuta** (od nultog do sedmog reda):

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}$$

Teorem 1.2. *Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

tj. zbroj članova n-tog retka Pascalovog trokuta jednak je 2^n.

Dokaz. Na lijevoj strani jednakosti prebrojavamo posebno sve 0-člane, jednočlane, dvočlane,..., n-člane podskupove n-članog skupa, dok je na desnoj strani ukupan broj svih podskupova n-članog skupa (skup svih binarnih nizova duljine n i skup svih podskupova n-članog skupa bijektivno korespondiraju).

Na drugi način, jednakost možemo dobiti iz binomnog teorema ako uvrstimo $x = 1$ i $y = 1$. ■

Teorem 1.3. *Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0,$$

tj. alternirajuća suma svih binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}$ s fiksnim $n \in \mathbb{N}$ je jednaka nuli.

Dokaz. Primijenimo binomni teorem za $x = -1$ i $y = 1$. ■

Sljedeći teorem govori o još jednom zanimljivom svojstvu Pascalovog trokuta, o zbroju nekoliko uzastopnih "dijagonalnih" elemenata počevši od prvog (ili posljednjeg) elementa u k-tom retku.

Teorem 1.4. *Za $n, k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Dokaz. Na desnoj strani jednakosti očito imamo broj $(k+1)$-članih podskupova $(n+1)$-članog skupa. Lijeva strana jednakosti prebrojava isto, ali u odnosu na najveći element u podskupu. Preciznije, $(k+1)$-članih podskupova s najvećim elementom $k+1$ imamo točno $\binom{k}{k}$, $(k+1)$-članih podskupova s najvećim elementom $k+2$ imamo točno $\binom{k+1}{k}$,...,$(k+1)$-članih podskupova s najvećim elementom $n+1$ imamo točno $\binom{n}{k}$. ■

Isključivo zbog ljepote kombinatornih dokaza navodimo i sljedeća dva teorema o svojstvima binomnih koeficijenata.

Teorem 1.5. *Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Dokaz. Obje strane jednakosti jednake su broju načina da između n ljudi izaberemo delegaciju, a zatim iz delegacije izaberemo predsjednika. Na lijevoj strani posebno prebrojavamo sve delegacije s točno k članova, ima ih $\binom{n}{k}$, a zatim u svakoj još možemo izabrati i predsjednika na k načina. Na desnoj strani, predsjednika možemo izabrati na n načina, a zatim i ostatak delegacije na 2^{n-1} načina, jer za svakog od preostalih $n-1$ ljudi postoje dvije mogućnosti: ili je ili nije u delegaciji. Riječnikom skupova, kombinatorni dokaz smo dobili prebrojavanjem svih parova (x, M) gdje je $M \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ i $x \in M$.

Drugi (alebarski) dokaz ovog teorema dobijemo primjenom binomnog teorema za $y = 1$:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

zatim deriviranjem obje strane jednakosti po x

$$n\,(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

i konačno uvrštavanjem $x = 1$. ■

Teorem 1.6. ***(Vandermondova konvolucija)*** *Za $n, m, k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}.$$

Dokaz. Na lijevoj strani jednakosti je broj k-članih podskupova $(n+m)$-članog skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n+m\}$. Na desnoj prebrojavamo to isto, ali u odnosu na to koliko je elemenata iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, a koliko iz ostatka $\{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$. Broj elemenata iz $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ označen je s i i varira od 0 do k. ■

Sljedeći teorem govori o svojstvu **unimodalnosti** niza binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}$, $k = 0, \ldots, n$, koje se lako "vidi" iz n-tog retka Pascalovog trokuta. Za konačan niz kažemo da je **unimodalan** ako je do nekog člana rasući, a nakon tog člana padajući.

Teorem 1.7. *Za $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takav da je $k \leq \frac{1}{2}(n-1)$ vrijedi*

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1}.$$

Jednakost vrijedi jedino ako je $n = 2k+1$.

Dokaz. Teorem dokazujemo algebarski. Ova nejednakost se svodi na

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \leq \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!},$$

pa dijeleći je s $n!$ i množeći s $k!\,(n-k-1)!$ dobijemo

$$\frac{1}{n-k} \leq \frac{1}{k+1}$$

što je ekvivalentno s $2k+1 \leq n$, odnosno $k \leq \frac{1}{2}(n-1)$ i teorem je dokazan. ■

Korolar 1.1. *Za $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takav da je $k \geq \frac{1}{2}(n-1)$ vrijedi*

$$\binom{n}{k} \geq \binom{n}{k+1}.$$

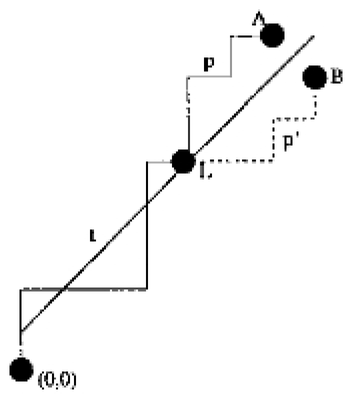
Jednakost vrijedi jedino ako je $n = 2k+1$.

Dokaz. Dokaz slijedi iz tvrdnje prethodnog teorema i svojstva simetrije binomnih koeficijenata. ■

Primjedba 1.1. ** Kombinatorni dokaz unimodalnosti niza binomnih koeficijenata:*

Neka je $k < n/2$ i pogledajmo sve diskretne šetnje po cjelobrojnoj koordinatnoj mreži iz točke $(0,0)$ u točku $(k, n-k)$ takve da je dozvoljeno samo pomicanje za jedan u desno ili gore. Takvih šetnji ima $\binom{n}{k}$, koliko i načina da od ukupno n pomicanja izaberemo njih k za pomicanje u desno, jer ostalih $n-k$ pomicanja prema gore su s time također određena. Konstruirajmo injekciju sa skupa svih šetnji iz $O = (0,0)$ do $A = (k, n-k)$ u skup šetnji iz $O = (0,0)$ do $B = (k+1, n-k-1)$ na sljedeći način (vidi sliku 1.1): označimo sa L točku presjeka šetnje iz O do A sa simetralom dužine $\overline{AB}$. Ako takvih presjeka ima više, sa L označimo presjek najbliži točki A. Kako je $k < n/2$, presjek sigurno postoji. Simetrično preslikajmo p dio šetnje od L do A s obzirom na simetralu dužine $\overline{AB}$. Dobijemo šetnju p' od L do B koja zajedno sa t starim dijelom šetnje od O do L daje novu šetnju $t \cup p'$ od O do B. Ovakvo preslikavanje $f(t \cup p) = t \cup p'$ je očito injekcija, pa kako šetnji iz O do A ima $\binom{n}{k}$, a šetnji iz O do B ima $\binom{n}{k+1}$ dokazali smo da je $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1}$.

Nadalje, zbog simetrije binomnih koeficijenata direktno slijedi $\binom{n}{k} \geq \binom{n}{k+1}$ za $k > n/2$.



Slika 1..1: Konstrukcija injekcije f

Zadatak 1.1. *Algebarski ili kombinatorno dokažite da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$

Ideja: algebarski dokaz iz binomnog teorema za $x = 2$, $y = 1$. Za kombinatorni dokaz promatrajte sve ternarne nizove (od $0, 1, 2$) duljine n.

Zadatak 1.2. *Dokažite da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)\binom{n}{k} = n\,(n-1)\,2^{n-2}$$

a) *algebarski,*

b) *kombinatorno.*

Koristeći ovaj rezultat pokušajte izračunati čemu je jednako

$$\sum_{k=m}^{n} k^{\underline{m}}\binom{n}{k}.$$

Rješenje: $\sum_{k=m}^{n} k^{\underline{m}}\binom{n}{k} = 2^{n-m}n^{\underline{m}}$. Algebarski dokaz dobijemo iz binomnog teorema za $y = 1$, derivirajući m puta po varijabli x. Kombinatorni dokaz dobijemo kada pokažemo da su lijeva i desna strana jednakosti jednake broju načina da između n ljudi izaberemo delegaciju, a zatim iz delegacije izaberemo m članova delegacije od kojih svaki ima svoju istaknutu funkciju. Primjerice, u slučaju $m = 2$ na početku zadata, između n ljudi izaberemo delegaciju, a zatim iz delegacije predsjednika i podpresjednika.

Zadatak 1.3. *Kombinatorno dokažite identitet*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Ideja: prebrojite parove (x, M) gdje je $|M| = k$, $M \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ i $x \in M$.

Zadatak 1.4. *Dokažite kombinatorno nejednakost*

$$\binom{2n}{n} < 4^n.$$

Rješenje: $\binom{2n}{n}$ je broj n-članih podskupova $2n$-članog skupa, a $4^n = 2^{2n}$ je broj svih podskupova $2n$-članog skupa.

Zadatak 1.5. *Pokažite da je broj parova (A, B) gdje su A i B različiti podskupovi od $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ i $A \subset B$ jednak $3^n - 2^n$.*

Rješenje: Ako je $|A| = k$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ elemente od A možemo izabrati na $\binom{n}{k}$ načina, svaki od preostalih $n - k$ elemenata ili je, ili nije u B (moramo samo isključiti mogućnost da su svi van B zbog $A \subset B$). Zato imamo

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\left(2^{n-k} - 1\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 3^n - 2^n.$$

Ili direktno, svaki element može biti ili u A ili u $B \setminus A$ ili u $\{1, 2, 3, \ldots, n\} \setminus B$, za n elemenata to je 3^n mogućnosti. Od njih moramo jedino izuzeti slučajeve kada je $A = B$, a takvih ima 2^n.

Zadatak 1.6. *Neka su $n, k, l \in \mathbb{N}$ takvi da je $n \geq k \geq l$. Dokažite kombinatorno identitet*

$$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}.$$

Ideja: prebrojite na dva načina sve parove (L, K) podskupova od $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, takve da vrijedi $L \subseteq K$, $|L| = l$, $|K| = k$.

Zadatak 1.7. *Neka su $k, m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $k + m \leq n$. Dokažite kombinatorno identitet*

$$\binom{n}{m}\binom{n-m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m}.$$

Ideja: prebrojite na dva načina sve parove (M, K) podskupova od $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, takve da vrijedi $M \cap K = \emptyset$, $M \cup K \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $|M| = m$, $|K| = k$.

Zadatak 1.8. *Pokažite da je*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

a) *koristeći binomni teorem za $(1+x)^{2n}$,*

b) *kombinatorno.*

*Ideja: **a)** usporedite koeficijente uz x^n u binomnom razvoju od $(1+x)^{2n}$ i $(1+x)^n (1+x)^n$,*

b) *kod n-članih podskupova skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ prebrojite koliko je elemenata manjih ili jednakih od n, a koliko većih od n.*

Zadatak 1.9. *Kombinatorno dokažite identitet*

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}.$$

Ideja: $\binom{n}{2}$ je broj bridova u potpunom grafu s n vrhova. Razdvojite skup vrhova na dva podskupa od k i $n-k$ vrhova.

Zadatak 1.10. *Dokažite analogon binomnog teorema za padajuće potencije*

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}$$

Rješenje: Matematičkom indukcijom po n. Baza: za $n = 1$ imamo $x + y = x + y$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n \in \mathbb{N}$ i provjerimo korak indukcije:

$$(x+y)^{\underline{n+1}} = (x+y)^{\underline{n}}(x+y-n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} \left((x-k) + (y-(n-k))\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k+1}} y^{\underline{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k+1}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k+1}}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k+1}} + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n+1-k}}.$$

Binomni koeficijenti za "velike" n i k*

Za "velike" n i k binomne koeficijente $\binom{n}{k}$ je teško računati. Umjesto točne vrijednosti u primjenama je dovoljno znati njihovu brzinu rasta. Takve procjene mogu se dobiti pomoću Taylorovog razvoja eksponencijalne funkcije

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots$$

Zato vrijedi nejednakost, koju ćemo često koristiti:

$$1 + t < e^t \quad \text{za sve } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Propozicija 1.2. *Neka su n, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takavi da je $k < n$. Tada vrijedi ocjena*

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

Dokaz. Za donju ogradu imamo:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k = \frac{n}{k} \cdot \frac{n}{k} \cdot \frac{n}{k} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{k} \leq \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \frac{n-2}{k-2} \cdot \cdots \cdot \frac{n-k+1}{1} = \binom{n}{k}.$$

Za gornju ogradu je:

$$(en)^t > (1+t)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i > \binom{n}{k} t^k.$$

Supstitucijom $t = k/n$ dobivamo

$$e^k > \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^k.$$

■

Preciznija asimptotska ocjena može se dobiti Stirlingovom formulom:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\alpha_n},$$

gdje je

$$\frac{1}{12n+1} < \alpha_n < \frac{1}{12n}$$

Iz ove ocjene se dobiva i asimptotska ocjena za k-ti faktorjel od n

$$n^{\underline{k}} = n^k e^{-\frac{k^2}{2n} - \frac{k^3}{6n^2} + o(1)} \quad \text{za } k = o\left(n^{\frac{3}{4}}\right),$$

odnosno za binomne koeficijente

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k e^{-\frac{k^2}{2n} - \frac{k^3}{6n^2}}}{k!} \left(1 + o(1)\right).$$

Prisjetimo se, za dvije realne funkcije f i g oznaka $f = o(g)$ znači da vrijedi

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0.$$

Binomni koeficijenti za realni n

U sljedećoj definiciji je poopćenje binomnog koeficijenta za realni n.

Definicija 1.2. *Neka je $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tada definiramo $\binom{x}{0} = 1$ i*

$$\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!} \quad \text{za } k > 0.$$

n-ta derivacija funkcije $f(x) = (1+x)^m$ je $f^{(n)}(x) = m^{\underline{n}}(1+x)^{m-n}$, pa koristeći Taylorov razvoj funkcije $f(x)$ oko $x = 0$ dobijemo sljedeći teorem.

Teorem 1.8. *Neka je $m \in \mathbb{R}$, tada vrijedi*

$$(1+x)^m = \sum_{n \geq 0} \binom{m}{n} x^n$$

gdje se sumira po svim $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Primijetimo da je suma iz prethodnog teorema konačna jedino ako je $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, jer je u tom slučaju $\binom{m}{n} = 0$ za $m < n$.

Primjer 1.1. *Razvijte u red funkciju $\sqrt{1-4x}$.*

Rješenje

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2} = \sum_{n \geq 0} \binom{1/2}{n} (-4x)^n.$$

Nadalje je

$$\binom{1/2}{n} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{n!} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n \cdot n!}$$

i stoga

$$\sqrt{1-4x} = -\sum_{n \geq 0} \frac{2^n \cdot (2n-3)!!}{n!} x^n.$$

U zapisu su korištene dvostruke faktorjele

$$n!! = \prod_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} (n-2i).$$

Množeći brojnik i nazivnik s $(n-1)!$, nije teško vidjeti da vrijedi

$$\frac{2^n \cdot (2n-3)!!}{n!} = 2 \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!},$$

pa imamo

$$\sqrt{1-4x} = -2 \sum_{n \geq 0} \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n} x^n.$$

Zadatak 1.11. *Dokažite da je*

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} x^n.$$

Zadatak 1.12. *Razvijte u red funkciju* $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Ideja: $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-4(x^2/4)}}$ *i koristite rezultat prethodnog zadatka.*

Primjedba 1.2. *Zadatak 1.10. može se jednostavnije riješititi dijeljenjem obje strane jednakosti s* $n!$ *i zatim svođenjem na Vandermondovu konvoluciju za "realne" binomne koeficijente na sljedeći način*

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} \Leftrightarrow \frac{(x+y)^{\underline{n}}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{\underline{k}}}{k!} \frac{y^{\underline{n-k}}}{(n-k)!}$$
$$\Leftrightarrow \binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}.$$

1.1.2. Multinomni teorem

Slijedi poopćenje pojma binomnog koeficijenta.

Definicija 1.3. *Neka je* $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$, *gdje su* n, $a_1,\ldots,a_k$ *nenegativni cijeli brojevi. Definiramo*

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{n!}{a_1! a_2! \cdots a_k!}.$$

Broj $\binom{n}{a_1,a_2,\ldots,a_k}$ *se zove* ***multinomni koeficijent****.*

Primjetimo, u slučaju $k=2$ multinomni koeficijent se svodi na binomni koeficijent.

Teorem 1.9. ***(Multinomni teorem)*** *Za sve* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *vrijedi*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{a_1,a_2,\ldots,a_k} \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_k^{a_k}$$

pri čemu se sumira po svim k*-tercima nenegativnih cijelih brojeva* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *za koje je* $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$.

Dokaz. Množeći $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$, t.j. uzimajući po jedan x_i iz svake zagrade, član $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_k^{a_k}$ možemo dobiti na toliko načina koliko ima permutacija s ponavljanjem skupa s a_1 elemenata x_1, a_2 elemenata $x_2,\ldots,a_k$ elemenata x_k. Taj broj je upravo $\binom{n}{a_1,a_2,\ldots,a_k}$. ■

Sljedeći teorem opisuje vezu multinomnih i binomnih koeficijenata.

Teorem 1.10. *Za sve nenegativne cijele brojeve n, $a_1,\ldots,a_k$ takve da je $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$, vrijedi .*

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\cdots\binom{n-a_1-\cdots-a_i}{a_{i+1}}\cdots\binom{n-a_1-\cdots-a_{k-1}}{a_k}.$$

Dokaz. Svaku permutaciju s ponavljanjem skupa s a_1 elemenata x_1, a_2 elemenata $x_2,\ldots,a_k$ elemenata x_k možemo dobiti tako da od n mjesta izaberemo a_1 mjesta na kojima će biti x_1, zatim od preostalih $n - a_1$ mjesta izaberemo a_2 mjesta na kojima će biti x_2, itd. ■

Zadatak 1.13. *Dokažite da je*

a)

$$\sum_{a_1+a_2+a_3=n} \binom{n}{a_1, a_2, a_3} = 3^n,$$

b)

$$\sum_{a_1+a_2+a_3=n} \binom{n}{a_1, a_2, a_3} (-1)^{a_2} = 1,$$

c)

$$\sum_{a_1+a_2+a_3=n} \binom{n}{a_1, a_2, a_3} 2^{a_1} (-1)^{a_2+a_3} = 0.$$

Rješenje: multinomni teorem ***a)*** $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, ***b)*** $x_1 = x_3 = 1$, $x_2 = -1$, ***c)*** $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = -1$.

1.1.3. Rasporedi identičkih objekata u kutije koje razlikujemo

U ovom i sljedeća tri podpoglavlja razmatrati ćemo problem prebrojavanja svih rasporeda n *objekata*, primjerice istih ili različitih lopti, u k *kutija* koje također možemo razlikovati ili ne.

U ovom podpoglavlju razmatramo prvi slučaj: **1. "Objekte ne razlikujemo, kutije razlikujemo".**

Pretpostavimo da 20 lopti, iste boje i veličine, moramo podijeliti na četvero djece: Ani, Borni, Cviti i Duji. Kako su lopte iste, bitno je jedino koliko će lopti svako dijete dobiti. Problem se svodi na rastavljanje broja 20 u sumu četiri nenegativna cijela broja. Svakako, ovdje je poredak pribrojnika bitan, jer djecu razlikujemo. Raspored $0 + 7 + 8 + 5$ nije isti kao i $7 + 0 + 5 + 8$.

Definicija 1.4. *Rastavi broja n u zbroj nenegativnih cijelih brojeva, gdje je poredak pribrojnika bitan nazivaju se* ***slabi rasporedi*** *(engl. "weak composition of n"). Rastavi broja n u zbroj prirodnih brojeva, gdje je poredak pribrojnika bitan nazivaju se* ***rasporedi*** *(engl. "composition of n").*

Napomenimo da je pojam **particija broja** n rezerviran za rastav u zbroj prirodnih brojeva, gdje poredak pribrojnika nije bitan, što ćemo uskoro vidjeti.

Teorem 1.11. *Neka su $n,\ k \in \mathbb{N}$. Broj svih nizova $(a_1, \ldots, a_k)$ takvih da je $a_i \geq 0$ za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$ i $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$ jednak je*

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}.$$

Dokaz. Ovaj je broj očito jednak broju načina da n identičkih lopti rasporedimo u k različitih kutija. A ovaj je nadalje jednak broju različitih nizova (permutacija) od koji se svaki sastoji od n istih lopti i $k-1$ pregrada. Svaki takav niz jednoznačno određuje broj lopti po kutijama (u prvu kutiju idu lopte do prve pregrade, u drugu kutiju lopte između prve i druge pregrade, itd.). Dakle, taj broj je jednak

$$\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}.$$

■

Primjedba 1.3. *Ako zamijenimo n i k u posljednjem teoremu dobijemo broj kombinacija s ponavljanjem n-tog razreda s k-elemenata (a_i ovdje bilježi koliko se puta u kombinaciji pojavljuje i-ti element k-članog skupa).*

U našem primjeru s 20 lopti i četvero djece ovaj broj je jednak $\binom{20+4-1}{20} = \binom{23}{3} = 1771$. Što ako dodamo uvjet da svako dijete mora dobiti najmanje jednu loptu? Takvih rasporeda će očito biti manje. Pribrojnici u sumi sada moraju biti pozitivni cijeli brojevi. Ovakvi rastavi broja n na pozitivne cijele pribrojnike gdje je poredak bitan nazivaju se **rasporedi** (engl. "composition of n"). Problem se lako riješi ako najprije svakom djetetu podijelimo po jednu loptu, a zatim preostalih 16 lopti podijelimo kao u prethodno teoremu na $\binom{16+4-1}{16} = \binom{19}{3} = 969$ načina.

Korolar 1.2. *Neka su $n,\ k \in \mathbb{N}$. Broj svih nizova $(a_1, \ldots, a_k)$ takvih da je $a_i > 0$ za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$ i $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$ jednak je $\binom{n-1}{k-1}$.*

Dokaz. Korištenjem rezultata prethodnog teorema ovaj broj je jednak $\binom{(n-k)+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$. Na drugi način, poredajmo lopte u niz, i između njih stavimo najviše jednu pregradu. Raspored ovih pregrada jednoznačno određuje raspored po kutijama i to tako da ne bude praznih kutija. Dakle, imamo $n-1$ mjesto između lopti, a od njih biramo $k-1$ gdje ćemo staviti pregrade. Tvrdnja slijedi. ■

Korolar 1.3. *Za sve $n \in \mathbb{N}$ broj svih rastava broja n u obliku $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$, gdje su $a_i \in \mathbb{N}$ i gdje je poredak bitan, jednak je 2^{n-1}.*

Dokaz. Prvi način: kako k može biti najmanje 1, a najviše n, imamo

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}.$$

Drugi način: matematičkom indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrdnja je očito istinita, postoji samo jedan ovakav rastav. Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za n, tj. imamo 2^{n-1} ovakvih rastava. Ako u svakom takvom rastavu prvom elementu a_1 dodamo jedinicu, dobijemo rastav broja $n+1$ koji za prvi pribrojnik ima najmanje 2. Ako nadalje svakom takvom rastavu dopišemo ispred jedinicu kao prvi pribrojnik, dobijemo rastav broja $n+1$ koji za prvi pribrojnik ima 1. Svaki rastav od $n+1$ može biti dobiven na samo jedan od ova dva načina, što znači da ih ima točno $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ što je i trebalo pokazati. ■

Dakle, dokazali smo sljedeće:

-ako su prazne kutije dozvoljene n identičnih objekata možemo razmjestiti u k različitih kutija na $\binom{n+k-1}{k-1}$ načina,

-ako prazne kutije nisu dozvoljene n identičnih objekata možemo razmjestiti u k različitih kutija na $\binom{n-1}{k-1}$ načina,

-ako prazne kutije nisu dozvoljene n identičnih objekata u različite kutije možemo razmjestiti na 2^{n-1} načina.

1.1.4. Particije skupa, Stirlingovi brojevi druge vrste

U drugom slučaju imamo obratnu situaciju: **2. "Objekte razlikujemo, kutije ne razlikujemo"**.

Stoga možemo zamisliti da su lopte označene brojevima $1, 2, 3, \ldots, n$. Problem se svodi na podjelu (particiju) skupa $\{1, \ldots, n\}$ na k nepraznih, disjunktnih podskupova.

Definicija 1.5. *Rastav skupa $\{1, \ldots, n\}$ na k nepraznih disjunktnih podskupova zovemo **particija skupa**. Broj particija skupa $\{1, \ldots, n\}$ na k dijelova označava se sa $S(n, k)$ i zove **Stirlingov broj druge vrste**. Dijelove (podskupove) partcije zovemo **blokovima.***

Iz definicije slijedi $S(n, k) = 0$ za $n < k$. Dogovorno je $S(0, 0) = 1$.

Primjer 1.2. *Za $n \geq 1$ je $S(n, 1) = S(n, n) = 1$. Također, za $n \geq 2$ je $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ jer od $n-1$ blokova svi su jednočlani, osim jednog dvočlanog.*

Primjer 1.3. *Vrijedi $S(4, 2) = 7$ jer imamo 7 particija skupa $\{1, 2, 3, 4\}$: $\{1, 2, 3\}\{4\}$; $\{1, 2, 4\}\{3\}$; $\{1, 3, 4\}\{2\}$; $\{2, 3, 4\}\{1\}$; $\{1, 2\}\{3, 4\}$; $\{1, 3\}\{2, 4\}$; $\{1, 4\}\{2, 3\}$.*

Zadatak 1.14. *Dokažite da za $n \geq 2$ vrijedi $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.*

Rješenje: svaki podskup A od $\{1, \ldots, n\}$ osim praznog skupa i cijelog $\{1, \ldots, n\}$ određuje jednu particiju tog skupa u dva bloka A i $\overline{A}$. Takvih podskupova A ima $2^n - 2$. Ali kako A i $\overline{A}$ na ovaj način određuju istu particiju $2^n - 2$ treba još podijeliti s 2.

Ne postoji zatvorena formula za $S(n, k)$, ali postoji otvorena formula koja sadrži oznaku za sumu i izvesti ćemo ju u Poglavlju 1.2.3. koristeći formulu uključivanja-isključivanja. U sljedećem teormu dokazati ćemo rekurzivnu relaciju za $S(n, k)$.

Teorem 1.12. *Za sve $n, k \in \mathbb{N}$ takve da je $n \geq k$ vrijedi*

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k).$$

Dokaz. Rekurziju dokazujemo kombinatorno. Pogledajmo maksimalni element n. Ako on čini jednočlani blok, onda preostalih $n-1$ elemenata na $S(n-1,k-1)$ načina može dovršiti particiju. Ako n nije u jednočlanom bloku, preostalih $n-1$ elemenata možemo rasporediti u k blokova na $S(n-1,k)$ načina, a zatim n možemo smjestiti u bilo koji od ovih k blokova i time smo dovršili particiju. ■

Definicija 1.6. *Broj svih particija skupa $\{1,\ldots,n\}$ na neprazne blokove označava se s $B(n)$ i zove* ***Bellov broj****.*

Dogovorno pretpostavljamo da je $B(0) = 1$. Očito vrijedi $B(n) = \sum_{i=0}^{n} S(n,i)$. Bellovi brojevi zadovoljavaju lijepu rekurzivnu relaciju.

Teorem 1.13. *Za sve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi*

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B(i).$$

Dokaz. Dokazati ćemo da i desna strana jednakosti prebrojava sve particije skupa $\{1,\ldots,n+1\}$. Pretpostavimo da je element $n+1$ u bloku veličine $n-i+1$, $i = 0,1,\ldots,n$. Preostale elemente iz tog bloka možemo odabrati na $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$ načina, i nakon toga preostalih i elemenata razmjestiti u blokove na $B(i)$ načina. ■

Zadatak 1.15. *Matematičkom indukcijom po n dokažite da za $n \geq 3$ vrijedi nejednakost*

$$B(n) < n!$$

Rješenje: Baza: za $n = 3$ imamo $B(3) = 5 < 6$. Pretpostavimo neka tvrdnja vrijedi za sve brojeve $\leq n$. Korak:

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B(i) < \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i! = \sum_{i=0}^{n} n^{\underline{i}} < (n+1)\,n! = (n+1)!.$$

U ovom podpoglavlju do sad smo pokazali:

-ako prazne kutije nisu dozvoljene n različitih objekata možemo razmjestiti u k identičnih kutija na $S(n,k)$ načina,

-ako prazne kutije nisu dozvoljene n različitih objekata možemo razmjestiti u identične kutije na $\sum_{i=0}^{n} S(n,i) = B(n)$ načina.

I ako su prazne kutije dozvoljene n različitih objekata u k identičnih kutija možemo razmjestiti na $\sum_{i=1}^{k} S(n,i)$ načina, jer ako je i nepraznih kutija i $k-i$ praznih imamo $S(n,i)$ razmještaja, a i može varirati od 1 do k.

1.1.5. Surjekcije

Sada je lako riješiti problem razmještaja n lopti u k kutija u trećem slučaju:

3. "I objekte i kutije razlikujemo".

Brojevima označene lopte najprije razdijelimo u k blokova na $S(n,k)$ različitih načina, a zatim blokove možemo razmjestiti u k različitih kutija n $k!$ načina. Dakle, n različitih lopti u različitih k kutija možemo razmjestiti na $k! \cdot S(n,k)$ načina.

Korolar 1.4. *Broj svih surjekcija f iz n-članog skupa u k-člani skup jednak je*

$$k! \cdot S(n,k).$$

Dokaz. Surjekcije prirodno definiraju particiju domene. Blokove čine praslike elemenata iz kodomene. Različitih particija domene ima $S(n,k)$, a na $k!$ različitih načina ih još možemo preslikati u kodomenu. ∎

Zanimljiva posljedica ovog rezultata je sljedeći korolar o prikazu običnih potencija x^n pomoću padajućih $x^{\underline{n}}$. Veza (koeficijenti prelaza iz baze $x^{\underline{n}}$ u x^n) su upravo Stirlingovi brojevi druge vrste!

Korolar 1.5. *Za sve $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, x^{\underline{k}}. \tag{1.2}$$

Dokaz. S obje strane jedakosti je polinom n-tog stupnja u x, pa je dovoljno pokazati da se ovi polinomi podudaraju u barem $n+1$ vrijednosti za x. Dokazati ćemo bitno jaču tvrdnju, tj. da se podudaraju za sve $x \in \mathbb{N}$.

Neka je $x \in \mathbb{N}$. Na lijevoj strani jednakosti je broj svih funkcija iz n-članog u x-člani skup. I na desnoj strani je taj isti broj samo u odnosu na kardinalni broj slike k, koji može biti najmanje 1, najviše n. Ako slika funkcije ima točno k elemenata, postoji $\binom{x}{k}$ načina za izbor te slike, a nadalje prema prethodnom korolaru i $k! \cdot S(n,k)$ načina za odabir same funkcije. Kako je $\binom{x}{k}k! \cdot S(n,k) = x^{\underline{k}} \cdot S(n,k)$ tvrdnja je dokazana. ∎

Dakle, dokazali smo:

-ako prazne kutije nisu dozvoljene n različitih objekata u k različitih kutija možemo razmjestiti na $S(n,k)\,k!$ načina.

Zbog toga ako prazne kutije nisu dozvoljene n različitih objetata možemo razmjestiti u različite kutije na $\sum_{i=1}^{n} S(n,i)\, i!$ načina.

U slučaju kada su prazne kutije dozvoljene, umjesto surjekcija imamo funkcije (u slici ne moraju biti svi elementi iz kodomene), pa n različitih objekata u k različitih kutija možemo razmjestiti na k^n načina.

Zadatak 1.16. *Dokažite da vrijedi $S(n,3) = \frac{1}{2}(3^{n-1}+1) - 2^{n-1}$, za $n \geq 3$.*

Ideja: $3! \cdot S(n,3)$ je broj surjekcija iz n-članog u 3-člani skup. Svih funkcija iz n-članog u 3-člani skup ima 3^n, od toga ih 3 imaju jednočlanu sliku, a dvočlanu sliku ih ima $3(2^n-2)$. Slijedi da je $3! \cdot S(n,3) = 3^n - 3(2^n-2) - 3$, odnosno $S(n,3) = \frac{1}{2}(3^{n-1}+1) - 2^{n-1}$.

1.1.6. Particije broja

Preostaje četvrti slučaj: **4. "I objekte i kutije ne razlikujemo"**.

Dakle, ovdje je bitan samo broj lopti po kutijama, jer lopte ne razlikujemo. A kako ni kutije ne razlikujemo $1+1+3$ ili $1+3+1$ ili $3+1+1$ će predstavljati isti raspored, poredak ovih pribrojnika nije bitan.

Definicija 1.7. *Neka je $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 1$ tako da vrijedi $a_1+a_2+\cdots+a_k = n$. Niz $(a_1,\ldots,a_k)$ zovemo* ***particija broja*** *n. Broj svih particija označavamo s $p(n)$, dok broj particija s točno k pribrojnika označavamo s $p_k(n)$.*

Pojam *particija broja* znači rastav broja $n \in \mathbb{N}$ u zbroj prirodnih brojeva gdje poredak pribrojnika nije bitan i ne smije se brkati s pojmom *particija skupa.* Očito vrijedi sljedeća jednakost

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k(n).$$

Primjer 1.4. *Vrijedi $P(1) = 1, P(2) = 2, P(3) = 3, P(4) = 5, P(5) = 7, P(6) = 11$ itd. Pokažimo $p(5) = 7$, tj. da broj $n = 5$ ima 7 paticija. To su*

$$(5),(4,1),(3,2),(3,1,1),(2,2,1),(2,1,1,1),(1,1,1,1,1).$$

Također je $p_1(5) = 1$, $p_2(5) = 2$, $p_3(5) = 2$, $p_4(5) = 1$, $p_5(5) = 1$.

Teorem 1.14. *Za broj particija s točno k pribrojnika vrijedi rekurzivna relacija*

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k).$$

Dokaz. Pogledajmo sve $(a_1,\ldots,a_k)$ particije broja n. Onih u kojima je $a_k = 1$ ima $p_{k-1}(n-1)$. Ako je $a_k > 1$ uzmimo neka je $b_i = a_i - 1$, $i = 1,\ldots,k$. Tada vrijedi $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_k \geq 1$ i $b_1 + b_2 + \cdots + b_k = n-k$. Dakle $(b_1,\ldots,b_k)$ je particija broja $n-k$, pa $(a_1,\ldots,a_k)$ particija broja n u kojima je $a_k > 1$ ima $p_k(n-k)$. ■

Korolar 1.6. *Vrijedi*

$$p_k(n) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n-k).$$

Dokaz. Koristimo uzastopce rekurziju iz prethodnog teorema za k, $k-1$, $k-2$,...,2. Zbrajajući sve ove jednakosti, zbog $p_1(n-k+1) = 1 = p_1(n-k)$ tvrdnja slijedi.

■

Nije teško vidjeti da vrijedi $p_1(n) = p_n(n) = 1$, $p_2(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Također vrijedi (što nećemo dokazivati) da je $p_3(n) = \left\lfloor \frac{n^2+4}{12} \right\rceil$. Općenito, približne vrijednosti za $p_k(n)$ i $p(n)$ za velike n, dane su asimptotskim formulama

$$p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!\,(k-1)!}, \qquad p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}} e^{\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)},$$

odakle se vidi da $p(n)$ raste brže od bilo kojeg polinoma, ali sporije od bilo koje eksponencijalne funkcije $f(n) = c^n$, za $c > 1$.

Problem pronalaženja egzaktne formule za $p(n)$ još je teži nego za Stirlingove brojeve druge vrste $S(n,k)$. Čak ako i znamo sve $p(i)$ za sve $i < n$, još uvijek ne možemo jednostavno direktno izračunati $p(n)$. Postoji MacMahonova rekurzija koja uključuje tzv. *pentagonalne brojeve,* tj. brojeve oblika $k(3k-1)/2$. Ovdje je navodimo bez dokaza:

$$\begin{aligned} p(n) &= p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \cdots \\ &\quad + (-1)^k p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + (-1)^k p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) + \cdots \end{aligned}$$

Istaknimo i posljednju mogućnost:

-ako prazne kutije nisu dozvoljene n identičnih objekata možemo razmjestiti u k identičnih kutija na $p_k(n)$ načina,

-ako prazne kutije nisu dozvoljene n identičnih objekata možemo razmjestiti u identične kutije na $p(n)$ načina.

Stoga je očito da ako su prazne kutije dozvoljene n identičnih objekata u k identičnih kutija možemo razmjestiti na $\sum_{i=1}^{k} p_i(n)$ načina.

Slijedi nekoliko korisnih rezultata o particijama broja $p(n)$ pomoću funkcija izvodnica.

Definicija 1.8. *Neka je $\{f_n\}_{n\geq 0}$ niz realnih brojeva. Tada red $F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$ zovemo **funkcija izvodnica** niza $\{f_n\}_{n\geq 0}$.*

Propozicija 1.3. *Neka je $p_{\leq k}(n)$ broj particija broja n s pribrojnicima $\leq k$, $p(n)$ broj particija broja n. Tada vrijedi*

$$\sum_{n\geq 0} p_{\leq k}(n)\, x^n = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-x^i}, \qquad \sum_{n\geq 0} p(n)\, x^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}.$$

Dokaz. Odredimo koeficijent uz x^n na desnoj strani jednakosti:

$$\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)\left(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots\right)\cdots\left(1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots\right)$$

Pogledajmo doprinose iz zagrada. Ako iz i–te zagrade odaberemo $x^{j_i i}$, $j_i \geq 0$, onda vrijedi

$$1j_i + 2j_2 + 3j_3 + \cdots + kj_k = n,$$

a to je upravo particija broja n s pribrojnicima koji nisu veći od k. Time je prva jednakost dokazana. Kako je $p_{\leq n}(n) = p(n)$, na sličan način dokazuje se i druga jednakost. ■

Nađimo vezu između particija broja n i particija skupa $\{1, \ldots, n\}$. Primjerice za $n = 10$ particija skupa $\{1,5,6\}, \{2,7\}, \{3,9\}, \{4,8\}, \{10\}$ je tipa $(3,2,2,2,1)$. Općenito, pretpostavimo da je $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ particija skupa $\{1, \ldots, n\}$ gdje π_i označavaju blokove od Π. Poredajmo niz brojeva $|\pi_1|, |\pi_2|, \ldots, |\pi_n|$ od najvećeg do najmanjeg da bi dobili niz $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$ koji je očito particija broja n. Za niz $(a_1, \ldots, a_k)$ kažemo da je *tip particije* Π.

Teorem 1.15. *Neka je* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *particija broja* n*, a* m_i *kratnost od* i *u* $\mathbf{a}$*. Tada je broj particija skupa* $\{1, \ldots, n\}$ *koje su tipa* $\mathbf{a}$ *jednak*

$$P_{\mathbf{a}} = \frac{\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k}}{\prod\limits_{i \geq 1} m_i!}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da imamo a_i identičkih loptica boje i, za $i = 1, \ldots, k$. Poredati u niz ih možemo na $\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k}$ načina. Potom podijelimo skup $\{1, \ldots, n\}$ na blokove tako da su brojevi i i j u istom bloku ako i samo ako su loptice na mjestima i i j u ovom poretku iste boje. Dobili smo jednu particiju skupa $\{1, \ldots, n\}$. Ali ako se i u particiji $\mathbf{a}$ broja n pojavljuje m_i puta, onda odgovarajuće blokove možemo obojati na $m_i!$ načina sa m_i boja koje odgovaraju ovim blokovima, a svi ovi načini određuju istu particiju skupa $\{1, \ldots, n\}$. Zato je broj $\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k}$ potrebno podijeliti s $\prod\limits_{i \geq 1} m_i!$. ■

U sljedeće dvije tablice još jednom dajemo pregled svih mogućih rasporeda objekata u kutije.

1. prazne kutije nisu dozvoljene:

SURJEKCIJE	n različitih objekata u k različitih kutija	$S(n,k)\, k!$
	n različitih objekata u različite kutije	$\sum_{i=1}^{n} S(n,i)\, i!$
RASPOREDI	n identičnih objekata u k različitih kutija	$\binom{n-1}{k-1}$
	n identičnih objekata u različite kutije	2^{n-1}
PARTICIJE SKUPA	n različitih objekata u k identičnih kutija	$S(n,k)$
	n različitih objekata u identične kutije	$B(n)$
PARTICIJE BROJA	n identičnih objekata u k identičnih kutija	$p_k(n)$
	n identičnih objekata u identične kutije	$p(n)$

2. prazne kutije su dozvoljene:

FUNKCIJE	n različitih objekata u k različitih kutija	k^n
SLABI RASPOREDI	n identičnih objekata u k različitih kutija	$\binom{n+k-1}{k-1}$
PARTICIJE SKUPA	n različitih objekata u k identičnih kutija	$\sum_{i=1}^{k} S(n,i)$
PARTICIJE BROJA	n identičnih objekata u k identičnih kutija	$\sum_{i=1}^{k} p_i(n)$

Zadatak 1.17. *Na koliko načina možemo* 7 *raznobojnih lopti*

a) *podijeliti između troje djece, ako svako dijete mora dobiti bar jednu loptu,*

b) *razmjestiti u* 3 *kutije koje ne razlikujemo, ako ni jedna kutija ne smije ostati prazna.*

Rješenje: ***a)*** $S\left(7,3\right)\cdot 3! = 301\cdot 6 = 1806,$ ***b)*** $S\left(7,3\right) = 301$ *(korišten zad.1.16).*

Zadatak 1.18. *Na koliko načina možemo* 7 *raznobojnih lopti*

a) *podijeliti između troje djece, (ako svako dijete ne mora dobiti loptu)*

b) *razmjestiti u* 3 *kutije koje ne razlikujemo (prazne kutije su dozvoljene).*

Rješenje: ***a)*** $3^7 = 2187,$

b) $\sum_{i=1}^{3} S\left(7,i\right) = 1 + 63 + 301 = 365$ *(korišteni zad.1.14 i zad.1.16).*

Zadatak 1.19. *Na koliko načina možemo* 7 *lopti koje ne razlikujemo*

a) *podijeliti između troje djece, ako svako dijete mora dobiti bar jednu loptu,*

b) *razmjestiti u* 3 *kutije koje ne razlikujemo, ako ni jedna kutija ne smije ostati prazna.*

Rješenje: ***a)*** $\binom{6}{2} = 15,$ ***b)*** $p_3\left(7\right) = 4,$ *jer su sve particije broja* 7 *s tri pribrojnika* $\left(5,1,1\right), \left(4,2,1\right), \left(3,3,1\right), \left(3,2,2\right).$

Zadatak 1.20. *Na koliko načina možemo* 7 *lopti koje ne razlikujemo*

a) *podijeliti između troje djece, (ako svako dijete ne mora dobiti loptu)*

b) *razmjestiti u* 3 *kutije koje ne razlikujemo (prazne kutije su dozvoljene).*

Rješenje: ***a)*** $\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36,$ ***b)*** $\sum_{i=1}^{3} p_i\left(7\right) = 1 + 3 + 4 = 8.$

Zadatak 1.21. *Neka je* $k \geq 2n$. *Na koliko načina možemo* k *bombona (koje ne razlikujemo) podijeliti između* n *djece, ako svako dijete mora dobiti barem dva bombona.*

Rješenje: Najprije svakom djetetu podjelimo po dva bombona, a zatim preostalih $k-2n$ *bombona podijelimo između* n *djece bez ikakvih uvjeta na* $\binom{k-2n+n-1}{n-1} = \binom{k-n-1}{n-1}$ *načina.*

Zadatak 1.22. *Na koliko načina možemo izabrati podskup* $S \subseteq \{1,\ldots,n\}$ *tako da je* $|S| = k$ *i niti jedan element iz* S *nije sljedbenik nekog drugog elementa iz* S, *tj.* $x \neq y+1$, *za sve* $x, y \in S$.

Rješenje: Za takav podskup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *ako je* $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ *mora vrijediti i* $a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < \cdots < a_k - (k-1)$. *Stavimo li* $b_i = a_i - i + 1$, *broj načina da odaberemo ovakav podskup* S *jednak broju načina da odaberemo podskup* $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \subseteq \{1, \ldots, n-k+1\}$, *a taj je* $\binom{n-k+1}{k}$.

Zadatak 1.23. ***(Quine 1988.)*** *Poznati Veliki Fermatov teorem (engl. Fermat's Last Theorem) tvrdi da za $n > 2$, jednadžba $x^n + y^n = z^n$ nema rješenja u skupu prirodnih brojeva. Ova tvrdnja se može reformulirati u terminima kombinatorike, preciznije prebrojavanjem rasporeda objekata koje razlikujemo u kutije koje su obojane u crvenu ili bijelu boju ili nisu obojane. Pri tome i sve kutije međusobno razlikujemo. Veliki Fermatov teorem tada glasi: broj rasporeda kada su crvene kutije prazne i broj rasporeda kada su bijele kutije prazne zajedno ne može biti jednak broju svih rasporeda u crvene, bijele i neobojane kutije ako je broj objekata veći od 2. Pokaži da su ove dvije tvrdnje ekvivalentne.*

Ideja: neka je n broj objekata, z broj svih kutija, x broj kutija koje nisu crvene, y broj kutija koje nisu bijele.

1.1.7. Ciklusi u permutacijama, Stirlingovi brojevi prve vrste

Svaku permutaciju $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ skupa $\{1, \ldots, n\}$ možemo poistovjetiti s bijekcijom $p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ za koju je $p(i) = p_i$.

Primjer 1.5. *Permutaciju 321564 je ujedno i bijekcija $g : \{1, \ldots, 6\} \to \{1, \ldots, 6\}$ za koju vrijedi $g(1) = 3$, $g(2) = 2$, $g(3) = 1$, $g(4) = 5$, $g(5) = 6$, $g(6) = 4$. Broj 2 zovemo* ***fiksna točka*** *permutacije. Nadalje vrijedi $g^2(1) = g(g(1)) = g(3) = 1$ i $g^2(3) = g(g(3)) = g(1) = 3$ pa su 1 i 3 fiksne točke za g^2. Slično se provjeri da su 4, 5 i 6 fiksne točke za g^3. Govorimo da točke 1 i 3 čine 2-ciklus, a točke 4, 5 i 6 čine 3-ciklus permutacije g. Kako je g bijekcija, možemo odrediti g^{-1} i to je 321645.*

Lema 1.1. *Neka je $p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ permutacija i $x \in \{1, \ldots, n\}$. Tada postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $p^i(x) = x$.*

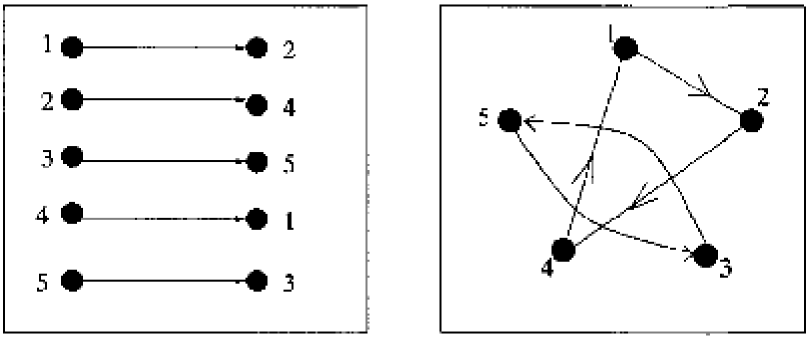
Dokaz. Pogledajmo konačan niz $p(x), p^2(x), p^3(x), \ldots, p^n(x)$ elemenata iz $\{1, \ldots, n\}$. Ako su neka dva od njih jednaka, tj. $p^j(x) = p^k(x)$ i $j < k$, onda primjenjujući inverznu permutaciju p^{-1} na obje strane jednakosti j puta dobijemo $x = p^{k-j}(x)$. Dakle $i = k - j$. Ukoliko nema jednakih, onda je $\{p(x), p^2(x), p^3(x), \ldots, p^n(x)\} = \{1, \ldots, n\}$ i tvrdnja slijedi. ∎

Definicija 1.9. *Neka je $p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ permutacija, $x \in \{1, \ldots, n\}$ te i namanji prirodan broj za kojeg vrijedi $p^i(x) = x$. Tada i zovemo* ***red elementa*** *x, a $(x, p(x), p^2(x), p^3(x), \ldots, p^{i-1}(x))$ zovemo i-**ciklus** permutacije p.*

Korolar 1.7. *Svaka permutacija se može prikazati kao disjunktna unija svojih ciklusa.*

Dokaz. Prema prethodnoj lemi svaki element iz $\{1, \ldots, n\}$ je član nekog ciklusa. Prema definiciji ciklusa i prema dokazu prethodne leme svi članovi ciklusa su različiti, pa tvrdnja slijedi. ∎

Permutacija iz prethodnog primjera 321564 ima ciklički zapis (2) (13) (564). Iako je rastav permutacije na cikluse jedinstven, ovaj zapis to nije. Istu permutaciju smo mogli napisati na način (31) (456) (2) ili (645) (2) (13). Zato dogovorno permutacije zapisujemo u *kanonskoj cikličkoj formi* koja podrazumjeva da ciklus započinje s najvećim elementom, a cikluse zapisujemo prema rastućem poretku njihovih prvih elemenata. U primjeru permutacije 321564 kanonski ciklički zapis je (2) (31) (645), za njenu inverznu permutaciju 321645 je (2) (31) (654), a za permutaciju 24513 je (412) (53) (vidi sliku 1.2). Kanonski ciklički zapis je jedinstven.



Slika 1..2: Permutacija 24513=(412)(53)

Permutacije na skupu $\{1, \ldots, n\}$ kraće ćemo zvati n-permutacije. Skup svih n-permutacija označavamo sa S_n i zovemo *simetrična grupa* (ovaj naziv potiče iz teorije grupa).

Teorem 1.16. *Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takvi da vrijedi $\sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i = n$. Tada je broj n-permutacija s a_i ciklusa duljine i, za $i \in \{1, \ldots, n\}$ jednak*

$$\frac{n!}{a_1! a_2! \cdots a_n! \cdot 1^{a_1} 2^{a_2} \cdots n^{a_n}}.$$

Dokaz. Nanižimo elemente skupa $\{1, \ldots, n\}$ u nekom poretku, zatim s lijeva na desno napišimo zagrade tako da dobijemo redom a_1 1-ciklusa, a_2 2-ciklusa, itd. Postoji $n!$ načina da se ovo napravi, međutim neki različiti zapisi će predstavljati iste permutacije ovog tipa. Zato je potrebno prebrojiti koliko različitih zapisa određuje istu permutaciju i s tim brojevima podijeliti $n!$. Elementi unutar ciklusa duljine i se mogu napisati na i različitih načina, ovisno o prvom elementu, a da svi načini određuju isti ciklus. Kako imamo a_i i-ciklusa za $i \in \{1, \ldots, n\}$ dijeliti trebamo sa $\prod_{i=1}^{n} i^{a_i}$. Osim toga ako u zapisu zamjenimo redoslijed dviju ili više ciklusa iste duljine zapis će i dalje određivati istu permutaciju. A a_i i-ciklusa možemo ispermutirati na $a_i!$ načina. Kako je $i \in \{1, \ldots, n\}$ dijeliti moramo i sa $\prod_{i=1}^{n} a_i!$. ■

Ako n-permutacija ima a_i ciklusa duljine i, za $i \in \{1, \ldots, n\}$ onda kažemo da je tipa $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Prethodni teorem daje dakle ukupan broj permutacija zadanog tipa.

Primjer 1.6. *Broj različitih n-permutacija sa samo jednim ciklusom, odnosno tipa $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ jednak je prema prethodnom teoremu $(n-1)!$. Kombinatorna interpretacija ovog rezultata je sljedeća: broj različitih rasporeda n ljudi za okruglim* *stolom je $(n-1)!$. Kombinatorna interpretacija prethodnog teorema bi bio broj rasporeda n ljudi za okruglim stolovima od kojih je a_i stolova s i mjesta.*

Primjer 1.7. *Uz pretpostavku da su sve n-permutacije jednako vjerojatne, kolika je vjerojatnost da je ciklus koji sadrži 1 duljine k? Elemente ovog ciklusa možemo izabrati na $\binom{n-1}{k-1}$ načina, zatim ih na $(k-1)!$ načina poredati u ciklus, a preostalih $n-k$ elemenata možemo ispermutirati na $(n-k)!$ načina. Zbog toga ciklusa duljine k koji sadrže 1 ima $\binom{n-1}{k-1}\ (k-1)!\,(n-k)! = (n-1)!$, pa je tražena vjerojatnost $(n-1)!/n! = 1/n$. Interesantno je da ova vjerojatnost ne ovisi o duljini ciklusa k.*

Slijedi definicija Stirlingovih brojeva prve vrste.

Definicija 1.10. *Označimo s $c\,(n,k)$ broj n-permutacija s k ciklusa. Broj $s\,(n,k) = (-1)^{n-k}\,c\,(n,k)$ zovemo* ***Stirlingov broj prve vrste****.*

Kao i kod Stirlingovih brojeva druge vrste dogovorno uzimamo da je $c\,(0,0) = 1$ i $c\,(n,k) = 0$ za $n < k$. Također je očito $c\,(n,0) = 0$ za $n > 0$, jer n-permutacije moraju imati cikluse. Za brojeve $c\,(n,k)$ postoji rekurzija slična rekurziji za Stirlingove brojeve druge vrste:

Teorem 1.17. *Za sve $n, k \in \mathbb{N}$ takve da je $n \geq k$ vrijedi*

$$c\,(n,k) = c\,(n-1,k-1) + (n-1)\cdot c\,(n-1,k)\,.$$

Dokaz. Dokazati ćemo da i desna strana jednakosti prebrojava sve n-permutacije s k ciklusa. Pogledajmo gdje se nalazi n u cikličkom zapisu tih permutacija. Dvije su mogućnosti:

(i) Broj n čini zaseban 1-ciklus, pa preostalih $n-1$ brojeva moraju formirati preostalih $k-1$ ciklusa, a to je moguće na $c\,(n-1,k-1)$ načina.

(ii) Broj n ne čini zaseban 1-ciklus, već je umetnut negdje među preostalih $n-1$ brojeva u k ciklusa. $n-1$ brojeva može formirati k ciklusa na $c\,(n-1,k)$ načina, a potom se broj n može umetnuti iza bilo kojeg od njih, dakle na $n-1$ načina.

Tvrdnja teorema slijedi. ■

Konačno ćemo i opravdati naziv Stirlingovih brojeva, odnosno opisati vezu između Stirlingovih brojeva prve i druge vrste.

Lema 1.2. *Za sve $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} c\,(n,k)\,x^k. \tag{1.3}$$

Dokaz. Dokazati ćemo da je koeficijent uz x^k s lijeve strane jednakosti također jednak $c\,(n,k)$ broju n-permutacija s k ciklusa. Uzmimo neka je

$$G_n\,(x) = x^{\overline{n}} = x\,(x+1)\,(x+2)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k.$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned} G_n(x) &= (x+n-1)\, G_{n-1}(x) = (x+n-1)\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{n-1,k-1}x^k + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}x^k. \end{aligned}$$

Dakle, dokazali smo jednakost dvaju polinoma

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-1,k-1}x^k + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}x^k$$

odakle slijedi jednakost odgovarajućih koeficijenata za $n, k \in \mathbb{N}$ takve da je $n \geq k$

$$a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + (n-1)\, a_{n-1,k}.$$

Kako brojevi $a_{n,k}$ i $c(n,k)$ zadovoljavaju istu rekurzivnu relaciju, a i početni uvjeti im se podudaraju tj. $c(0,0) = a_{0,0} = 1$, $c(n,0) = a_{n,0} = 0$ za $n > 0$, slijedi da moraju biti jednaki $a_{n,k} = c(n,k)$. ■

Kako je $(-x)^{\overline{n}}(-1)^n = x^{\underline{n}}$, ako zamijenimo u (1.3) x s $-x$ i pomnožimo obje strane jednakosti s $(-1)^n$ dobijemo

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, x^k.$$

Uspoređujući ovu jednakost s (1.2) koja glasi

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, x^{\underline{k}}$$

vidimo da Stirlingovi brojevi prve vrste imaju "inverzan efekt" od Stirlingovih brojeva druge vrste.

Primjedba 1.4. * *Preciznije, jezikom* ***linearne algebre****, to znači da u vektorskom prostoru polinoma stupnja* $\leq n$*, s realnim koeficijentima i kanonskom bazom* $B = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ *i bazom padajućih potencija* $B' = \{1, x, x^{\underline{2}}, x^{\underline{3}}, \ldots, x^{\underline{n}}\}$*, matrica prijelaza* $\mathbf{S}$ *iz* B' *u* B *ima na mjestu* (i,j) *Stirlingov broj druge vrste* $S(i,j)$*, dok matrica prijelaza* $\mathbf{s}$ *iz* B *u* B' *ima na mjestu* (i,j) *Stirlingov broj prve vrste* $s(i,j)$*. Ove dvije matrice su zato međusobno inverzne matrice tj. vrijedi* $\mathbf{Ss} = \mathbf{sS} = \mathbf{I}$ *gdje je* $\mathbf{I}$ *jedinična matrica reda* $n+1$*, odnosno vrijedi*

$$\sum_{k=m}^{n} S(n,k)\, s(k,m) = \delta_{mn}.$$

Zadatak 1.24. *Red permutacije je najmanji prirodni broj k za kojeg vrijedi $p^k = \underbrace{p \circ p \circ \cdots \circ p}_{k\ puta} = id$, gdje je id identiteta. Dokažite da je red permutacije jednak najmanjem zajedničkom višekratniku duljina ciklusa iz cikličkog zapisa te permutacije.*

Ideja: red svakog elementa x jednak je duljini ciklusa u kojem se nalazi.

Zadatak 1.25. *Dokažite jednakost $c(n, n-1) = S(n, n-1)$.*

Rješenje: Kako smo pokazali $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ trebamo pokazati $c(n, n-1) = \binom{n}{2}$. n-permutacije s $n-1$ ciklusa mogu biti jedino tipa $(n-2, 1, 0, 0, \ldots, 0)$, pa kada odaberemo dva elementa koji će činiti 2-ciklus, permutacija je jednoznačno određena.

Zadatak 1.26. *Dokažite da vrijedi*

$$c(n, n-2) = \frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{1}{3} n(n-1)(n-2).$$

Rješenje: n-permutacije s $n-2$ ciklusa mogu biti jedino tipa $(n-3, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ ili tipa $(n-4, 2, 0, 0, \ldots, 0)$. Permutacija tipa $(n-3, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ je jednoznačno određena ako izaberemo tri elementa koji će činiti 3-ciklus i zatim izaberemo jedan od dva moguća ciklusa koja se mogu napraviti od ta tri elementa. Broj permutacija ovog tipa je jednak $\binom{n}{3} \cdot 2$. Permutacija tipa $(n-4, 2, 0, 0, \ldots, 0)$ je jednoznačno određena ako izaberemo četri elementa koji će činiti dva 2-ciklusa, a kako su ciklusi ravnopravni rezultat dijelimo s 2. Broj permutacija ovog tipa je jednak $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}/2$. Zbrajajući dobijemo rezultat za $c(n, n-2)$.

Zadatak 1.27. *Neka je $r(n)$ broj n-permutacija čiji kvadrat je jednak identičnoj permutaciji id. Dokažite da vrijedi rekurzivna relacija*

$$r(n+1) = r(n) + n \cdot r(n-1) \quad za\ n \geq 1, \quad r(0) = 1.$$

Ideja: u takvim permutacijama svi ciklusi moraju biti duljine 1 ili 2.

Zadatak 1.28. *Dokažite da su permutacije f i f^{-1} istog tipa.*

Ideja: razmotrite f i f^{-1} u cikličkom obliku.

1.1.8. Eulerov teorem, Turanov broj

Princip dvostrukog prebrojavanja govori o očitoj činjenici: ako elemente nekog skupa prebrojimo na dva različita načina, rezultat će biti jednak. U slučaju matrice tipa $n \times m$ čiji elementi su nule ili jedinice, označimo s r_i broj jedinica u i-tom retku, a sa s_j broj jedinica u j-tom stupcu. Tada je

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{j=1}^{m} s_j$$

i ovaj broj je jednak broju svih jedinica u matrici.

Sljedeća lema je klasičan primjer za dvostruko prebrojavanje.

Lema 1.3. ***(Lema o rukovanju)***
U društvu od konačno mnogo ljudi, uz pretpostavku da se nitko ne rukuje s istom osobom više od jednom i da se nitko ne rukuje sam sa sobom, broj ljudi koji se rukovao neparan broj puta je paran.

Dokaz. Označimo osobe s P_1, P_2,..., P_n i prebrojimo uređene parove (P_i, P_j) osoba koje su se rukovale. Neka je x_i broj rukovanja osobe P_i, a y ukupan broj rukovanja u ovome društvu. S jedne strane, broj parova (P_i, P_j) osoba koje su se rukovale jednak je $\sum_{i=1}^{n} x_i$, jer za svaki P_i imamo x_i mogućnosti za P_j. S druge strane, "rukovati se" je simetrična relacija, tj. ako su se P_i i P_j rukovali imamo dva para (P_i, P_j) i (P_j, P_i), pa je ukupan broj parova $2y$. Dakle, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2y$ i u parnoj sumi broj neparnih pribrojnika ne može biti neparan. ■

Lema o rukovanju je direktna posljedica općenitijeg identiteta iz sljedeće propozicije, čiji specijalni slučaj za grafove je dokazao Euler 1736. godine.

Definicija 1.11. *Za element x iz skupa X, i $\mathcal{F}$ familiju poskupova od X, s $d(x)$ označavamo broj elemenata iz $\mathcal{F}$ koji sadrže x i zovemo* ***stupanj*** *elementa x.*

Definicija 1.12. ***Matrica incidencije*** *$M = (m_{x,A})$ za $\mathcal{F}$ familiju podskupova od X, je matrica s $|X|$ redaka označenih po elementima $x \in X$ i $|\mathcal{F}|$ stupaca označenih po skupovima $A \in \mathcal{F}$, takva da vrijedi*

$$m_{x,A} = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } x \in A, \\ 0, & \textit{ako je } x \notin A. \end{cases}$$

Propozicija 1.4. *Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova od X, tada vrijedi*

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{A \in \mathcal{F}} |A| .$$

Dokaz. Primjetimo da je $d(x)$ jednak broju jedinica u x-tom retku matrice incidencije $M = (m_{x,A})$, a $|A|$ jednak broju jedinica u A-tom stupcu, pa dokaz slijedi.

■

Kako su grafovi familije dvočlanih podskupova skupa vrhova X čije elemente zovemo bridovima, a stupanj vrha $d(x)$ je broj vrhova susjednih s vrhom x, direktna posljedica prethodne propozicije je sljedeći:

Teorem 1.18. ***(Euler 1736.)***
U svakom grafu zbroj stupnjeva svih vrhova jednak je dvostrukom broju svih bridova i stoga je paran.

Navodimo i sljedeće identitiete, koji se dokazuju na sličan način:

$$\sum_{x\in Y} d(x) = \sum_{A\in\mathcal{F}} |Y\cap A|, \quad \text{za svaki podskup } Y\subseteq X \tag{1.4}$$

$$\sum_{x\in X} d(x)^2 = \sum_{A\in\mathcal{F}}\sum_{x\in A} d(x) = \sum_{A\in\mathcal{F}}\sum_{B\in\mathcal{F}} |A\cap B|. \tag{1.5}$$

Slijedi prvi pravi ekstremalni problem ovog poglavlja.

Definicija 1.13. ***Turanov broj*** *$T(n,k,l)$ gdje je $n,k,l\in\mathbb{N}$ i $l\le k\le n$, je najmanji broj l-članih podskupova n-članog skupa X, sa svojstvom da svaki k-člani podskup od X sadrži barem jedan od ovih l-članih podskupova.*

Propozicija 1.5. *Za sve $n,k,l\in\mathbb{N}$ takve da je $l\le k\le n$ vrijedi*

$$T(n,k,l)\ge \frac{\binom{n}{l}}{\binom{k}{l}}.$$

Dokaz. Pretpostavimo neka je $\mathcal{F}$ najmanja l-uniformna familija nad n-članim skupom X (tj. familija l-članih podskupova skupa X) sa svojstvom da svaki k-člani podskup od X sadrži barem jedan element iz $\mathcal{F}$. Neka je $M=(m_{A,B})$ matrica s retcima označenim po skupovima $A\in\mathcal{F}$, i stupcima po svim k-članim podskupovima B od X i neka je

$$m_{A,B}=\begin{cases} 1, & \text{ako je } A\subseteq B,\\ 0, & \text{ako nije } A\subseteq B.\end{cases}$$

Označimo s r_A broj jedinica u retku označenom s A i s_B broj jedinica u stupcu označenom s B. Vrijedi $s_B\ge 1$ za svaki B, jer B mora sadržavati barem jedan element iz $\mathcal{F}$. S druge strane r_A je jednak broju k-članih podskupova B koji sadrže fiksirani l-člani skup A, dakle $r_A=\binom{n-l}{k-l}$ za svaki $A\in\mathcal{F}$. Po načelu dvostrukog prebrojavanja je

$$|\mathcal{F}|\cdot\binom{n-l}{k-l} = \sum_{A\in\mathcal{F}} r_A = \sum_{B} s_B \ge \binom{n}{k},$$

pa nadalje koristeći rezultat zadatka 1.6

$$T(n,k,l)=|\mathcal{F}|\ge \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-l}{k-l}} = \frac{\binom{n}{l}}{\binom{k}{l}}.$$

■

Zadatak 1.29. *Neka je $\mathcal{F}$ familija k-članih podskupova n-članog skupa X sa svojstvom da je svaki l-člani podskup od X sadržan u barem jednom elementu iz $\mathcal{F}$. Dokažite da vrijedi*

$$|\mathcal{F}| \geq \frac{\binom{n}{l}}{\binom{k}{l}}.$$

Ideja: dokaz propozicije 1.5.

Zadatak 1.30. ***(Sperner 1928.)*** *Neka je $\mathcal{F}$ familija k-članih podskupova skupa $\{1, \ldots, n\}$. Familija $\mathcal{S}$ svih $(k-1)$-članih podskupova koji su sadržani u barem jednom elementu iz $\mathcal{F}$ zove se* **sjena** *familije $\mathcal{F}$. Dokažite da vrijedi*

$$|\mathcal{S}| \geq \frac{k\,|\mathcal{F}|}{n-k+1}.$$

Rješenje: Neka je $M = (m_{A,B})$ matrica sa stupcima označenim po svim $B \in \mathcal{F}$ i retcima označenim po svim $(k-1)$-članim skupovima $A \in \mathcal{S}$ koji su sadržani u barem jednom elementu iz $\mathcal{F}$ i neka je

$$m_{A,B} = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } A \subseteq B, \\ 0, & \textit{ako nije } A \subseteq B. \end{cases}$$

Označimo s r_A broj jedinica u retku označenom s A i s_B broj jedinica u stupcu označenom s B. Za svaki $B \in \mathcal{F}$, s_B je jednak broju $(k-1)$-članih podskupova $A \in \mathcal{S}$ koji su podskupovi od B, dakle $s_B = k$ za svaki $B \in \mathcal{S}$. S druge strane za svaki $A \in \mathcal{S}$ vrijedi $r_A \geq 1$ i $r_A \leq n - (k-1)$ jer za $k-1$ danih elemenata skupa A, k-ti element koji je iz $B \setminus A$ biramo između preostalih $n-(k-1)$ elemenata. Po načelu dvostrukog prebrojavanja je

$$(n-(k-1)) \cdot |\mathcal{S}| \geq \sum_{A \in \mathcal{S}} r_A = \sum_{B \in \mathcal{F}} s_B = k \cdot |\mathcal{F}|\,.$$

Odavde slijedi tvrdnja:

$$|\mathcal{S}| \geq \frac{k \cdot |\mathcal{F}|}{n-k+1}.$$

1.1.9. Načelo usrednjavanja

Pretpostavimo da imamo m objekata, pri čemu je i-ti "veličine" l_i i želimo znati postoji li barem jedan među ovih m objekata "veličine" veće od zadanog t. U slučaju $t = \frac{\sum l_i}{m}$ imamo:

Načelo usrednjavanja: *Svaki skup brojeva mora sadržavati barem jedan broj koji nije manji od aritmetičke sredine brojeva ovog skupa i barem jedan broj koji nije veći od te aritmetičke sredine.*

Načelo usrednjavanja je praoblik vrlo korisne **vjerojatnosne metode** koja se često koristi u ekstremalnoj kombinatorici, ali i u drugim područjima diskretne matematike kao i u teorijskom računarstvu. O vjerojatnosnoj metodi biti će riječi u 4. poglavlju, a da bi pokazali kako se koristi načelo usrednjavanja, dokazati ćemo dovoljan uvjet za nepovezanost grafa.

Propozicija 1.6. *Neka je $n \geq 2$. Svaki graf s n vrhova i manje od $n-1$ bridova je nepovezan.*

Dokaz. Matematičkom indukcijom po n. Za $n = 2$ graf s 2 vrha i nijednim bridom je očito nepovezan. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za graf s n vrhova i pogledajmo graf $G = (V, E)$ s $|V| = n + 1$ vrhova i $|E| \leq n - 1$. Po Eulerovom teoremu (teorem 1.18) prosječan stupanj vrha jednak je

$$\frac{1}{|V|} \sum_{x \in V} d(x) = \frac{2|E|}{|V|} \leq \frac{2(n-1)}{n+1} < 2.$$

Po načelu usrednjavanja neki vrh ima stupanj 1 ili 0. Ako je $d(x) = 0$, x je komponenta povezanosti odvojena od ostatka grafa G, pa je G nepovezan. Ako je $d(x) = 1$, pretpostavimo da je y jedini susjedni vrh od x. Tada graf H kojeg dobijemo iz G tako da obrišemo vrh x i incidentan brid ima n vrhova i najviše $n-2$ bridova, pa je prema pretpostavci indukcije nepovezan. Vraćanjem vrha x i brida (x, y) graf G ne može postati povezan i tvrdnja slijedi. ■

1.1.10. Primjena načela usrednjavanja za binarna stabla*

Kod računanja s aritmetičkom sredinom korisna je sljedeća važna nejednakost.

Definicija 1.14. *Za realnu funkciju f kažemo da je **konveksna** ako za svaki $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi*

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

uz pretpostavku $[x, y] \in \mathcal{D}(f)$.

Geometrijski, ovo znači da graf konveksne funkcije na segmentu $[x, y]$ nije iznad spojnice točaka $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$. Dovoljan uvjet za konveksnost funkcije je da joj druga derivacija bude nenegativna.

Propozicija 1.7. ***(Jensenova nejednakost)***
Ako je f konveksna funkcija i $\lambda_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ onda vrijedi

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po broju pribrojnika n. Za $n = 2$ tvrdnja je očito istinita, pa pretpostavimo da je istinita za sve prirodne brojeve od 2 do n. Dokaz da vrijedi i za $n+1$ dobijemo ako zbroj od $n+1$ pribrojnika

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

napišemo u obliku sume od n pribrojnika

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2\right) + \lambda_3 x_3 \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

i primijenimo (dvaput) pretpostavku indukcije. ■

Korisna, direktna posljedica Jensenove nejednakosti je nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine.

Propozicija 1.8. *Neka su $a_1, \ldots, a_n$ nenegativni brojevi. Tada vrijedi*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}.$$

Dokaz. Uzmimo $f(x) = 2^x$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1/n$ i $x_i = \log_2 a_i$, $i = 1, \ldots, n$. Kako je $f(x) = 2^x$ konveksna funkcija, primjenom Jensenove nejednakosti imamo

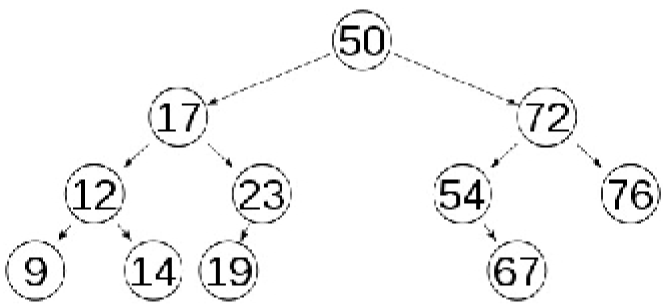
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 2^{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)/n} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}.$$

■

Pogledajmo nadalje binarna stabla s m listova i što možemo reći o njihovoj prosječnoj duljini puta od korijena do lista. Ovo se isto pitanje može prevesti u terminima "prefix-free kodova" (teorija formalnih jezika).

Kod **usmjerenog grafa** (engl. directed graph, digraph) brid je uređeni par $e = (u, v)$ dvaju vrhova (označava se strelicom, vidi sliku 1.3). Prvi vrh nazivamo i roditelj, a drugi dijete.

Binarno stablo je usmjeren i povezan graf čiji svaki vrh ima najviše jednog roditelja i najviše dva djeteta. Vrh bez roditelja naziva se **korijen** (i takav je samo jedan u binarnom stablu), a vrhovi bez djece zovu se **listovi**. **Dubina vrha** je duljina puta od korijena do tog vrha. Tako na slici 1.3. vrh 50 je korijen, vrhovi 9, 14, 19, 67 i 76 su listovi s dubinama redom 3, 3, 3, 3 i 2.



Slika 1..3: Binarno stablo

Neka je Σ konačan skup čije elemente zovema **slova**. Σ zovemo alfabet. **Riječ** nad alfabetom Σ je konačan niz slova iz Σ.

Za primjer uzmimo binarni alfabet $\Sigma = \{0, 1\}$, tada je primjerice 0101 riječ duljine 4 nad Σ. Skup svih riječi nad Σ označavamo sa

$$\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, \ldots\}.$$

Ovdje je sa ε označena prazna riječ (riječ duljine 0). Riječi fiksirane duljine (primjerice duljine k) mogu se zamišljati kao vrhovi hiperkocke (jedinične k-dimenzionalne kocke).

Na Σ^* uvodimo binarnu operaciju **konkatenacije** (ulančavanja), primjerice za riječi $a = 10$ i $b = 1100$ konkatenacijom dobivamo riječ $ab = 101100$. Uz binarnu operaciju konkatenacije Σ^* je monoid (slobodan monoid generiran sa Σ).

Riječ a je **prefiks** (ili **lijevi faktor**) riječi b ako je $b = ac$ za neku riječ c. **Prefix-free kod** ili **kod bez prefiksa** je skup riječi $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ gdje nijedna riječ nije prefiks neke druge.

Svakom binarnom stablu, odnosno njegovim vrhovima možemo bijektivno pridružiti određeni skup riječi iz $\Sigma^* = \{0,1\}^*$ na način da svaki brid koji ide "u lijevo" označimo sa 0, a svaki koji ide "u desno" sa 1. Za svaki vrh postoji jednoznačni put od korijena do danog vrha. Oznake bridova ovog puta zato jednoznačno određuju riječi iz $\{0,1\}^*$. Tako primjerice vrhu 14 sa slike 1.3 odgovara riječ 001, vrhu 17 riječ (slovo) 0, vrhu 19 riječ 010, vrhu 76 riječ 11 itd.

Primijetimo da su na ovaj način prefix-free kodovi u bijektivnoj korespodenciji s listovima binarnog stabla: za dano binarno stablo skup svih putova od korijena do listova čini prefix-free kod, jer se ni jedan takav put ne može produžiti.

Iskažimo sada tvrdnju o prosječnoj duljini puta od korijena do lista kod binarnog stabla.

Propozicija 1.9. *Prosječna duljina riječi za C prefix-free kod nije manja od* $\log_2 |C|$. *Odnosno, u terminima binarih stabala, prosječna dubina lista binarnog stabla s m listova nije manja od* $\log_2 m$.

Dokaz. Neka je $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ prefix-free kod i neka je l_i duljina riječi c_i. Pogledajmo ukupnu duljinu $l(C) = l_1 + l_2 + \cdots + l_m$. Matematičkom indukcijom po m ćemo dokazati da vrijedi $l(C) \geq |C| \cdot \log_2 |C|$. Slučajevi $m = 1$ i $m = 2$ su trivijalni. Nadalje neka je C prefiks-free kod s najmanje 3 riječi. Razdijelimo skup C na dva skupa u ovisnosti s kojim bitom započinje riječ: C_0 i C_1. Možemo b.s.o. pretpostaviti da su oba ova skupa neprazna, jer kad bi sve riječi iz C počimale istim slovom (ili slovima), to slovo (ili slova) bi mogli obrisati, preostali prefix-free kod bi imao isti broj riječi, a duljina $l(C)$ bi se smanjila. Prvi bit (slovo) doprinosi s $|C_0| + |C_1| = |C|$ u ukupnoj duljini $l(C)$, pa po pretpostavci indukcije imamo

$$\begin{aligned} l(C) &= (l(C_0) + |C_0|) + (l(C_1) + |C_1|) \\ &\geq |C_0| \cdot \log_2 |C_0| + |C_1| \cdot \log_2 |C_1| + |C|. \end{aligned}$$

Za $x > 0$ funkcija $f(x) = x \log_2 x$ je konveksna, jer je $f''(x) = (\log_2 e)/x > 0$. Primjenjujući Jensenovu nejednakost na pretodnu procjenu uzimajući $x_1 = |C_0|$, $x_2 = |C_1|$ i $\lambda_1 = \lambda_1 = 1/2$ dobijemo

$$\begin{aligned} l(C) &\geq (|C_0| + |C_1|) \cdot \log_2 \frac{|C_0| + |C_1|}{2} + |C| \\ &= |C| \cdot \log_2 \frac{|C|}{2} + |C| = |C| \cdot \log_2 |C|, \end{aligned}$$

što smo i htjeli dobiti. ■

Primjedba 1.5. *Poznata* ***Kraftova nejednakost*** *iz teorije informacija glasi: ako je $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ prefix-free kod i l_i duljina riječi c_i, onda vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{m} 2^{-l_i} \leq 1.$$

Za binarni graf sa slike 1.3 je $\sum_{i=1}^{m} 2^{-l_i} = 2^{-2} + 4 \cdot 2^{-3} = 3/4 \leq 1$. Da bi dokazali ovu nejednakost uzmemo da je $l = \max l_i$ i A_i skup vrhova na hiperkocki $\{0,1\}^l$ za koje je c_i prefiks. Ovi skupovi su disjunktni i svaki A_i je 2^{-l_i}-ti dio hiperkocke pa Kraftova nejednakost slijedi.

Prethodna propozicija se može jednostavno dokazati i na drugi način, koristeći Kraftovu nejdnakost i Jensenovu nejednakost za $f(x) = 2^{-x}$ i $\lambda_i = 1/m$, $i = 1, \ldots, m$

$$2^{-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} l_i} \leq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} 2^{-l_i} \leq \frac{1}{m}$$

i zato je

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} l_i \geq \log_2 m.$$

1.1.11. Ocjene veličine presjeka*

Koliko ima r-članih podskupova n-članog skupa koji zadovoljavaju uvjet da svaka dva u presjeku nemaju više od k elemenata. Intuitivno, što je k manji, manje će biti ovakvih podskupova. Sljedeća lema daje precizan odgovor, a optimalnost ocjene dana je u primjedbi nakon leme.

Lema 1.4. ***(Corrádi 1969.)*** *Neka su A_1, A_2,…,A_N r-člani podskupovi i X njihova unija. Ako je $|A_i \cap A_j| \leq k$ za sve $i \neq j$ onda vrijedi*

$$|X| \geq \frac{r^2 N}{r + (N-1)k}.$$

Dokaz. Korisreći jednakost (1.4), za svaki $i = 1, \ldots, N$ je

$$\sum_{x \in A_i} d(x) = \sum_{j=1}^{N} |A_i \cap A_j| = |A_i| + \sum_{j \neq i} |A_i \cap A_j| \leq r + (N-1)k.$$

Zbrajajući po svim skupovima A_i i koristeći (1.5) i Cauchy-Schwarzovu nejednakost

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

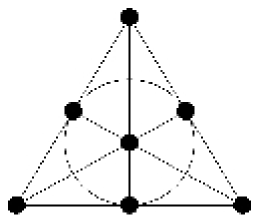
dobijemo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\sum_{x \in A_i} d(x) &= \sum_{x \in X} d(x)^2 = |X|\left(\sum_{x \in X} d(x)^2\right)\left(\sum_{x \in X}\frac{1}{|X|^2}\right)\\ &\geq |X|\left(\frac{\sum_{x \in X} d(x)}{|X|}\right)^2 = \frac{\left(\sum_i |A_i|\right)^2}{|X|} = \frac{(Nr)^2}{|X|},\end{aligned}$$

pa koristeći prethodno dobivenu gornju ogradu za $\sum_{x \in A_i} d(x)$ imamo

$$(Nr)^2 \leq N|X|(r + (N-1)k)$$

i tvrdnja teorema je dokazana. ■



Slika 1..4: Projektivna ravnina reda 2

Primjedba 1.6. *Nejednakost u tvrdnji prethodnog teorema je optimalna, tj. jednakost se postiže za projektivnu ravninu reda $n-1$.* ***Projektivna ravnina reda*** *$n-1$ je familija od $n^2 - n + 1$ r-članih podskupova koje zovemo* ***pravci****, tako da se svaka dva pravca sijeku u točno jednoj točki, a svaka točka leži (pripada) na točno n pravaca. Za projektivnu ravninu reda 2 (engl. the Fano plane) prikazanu na slici 1.4, vrijedi $|X| = 7$, $r = 3$, $N = 7$, $k = 1$.*

Za danu familiju skupova $A_1, A_2, \ldots, A_N$ njena prosječna veličina je $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|A_i|$. Sljedeća lema tvrdi ako je prosječna veličina familije "velika", neka dva elementa familije u presjeku moraju imati "veliki" broj elemenata.

Lema 1.5. *Neka je X n-člani skup i $A_1, A_2, \ldots, A_N$ podskupovi od X prosječne veličine barem n/w. Ako je $N \geq 2w^2$, onda postoje i, j, $i \neq j$ takvi da je*

$$|A_i \cap A_j| \geq \frac{n}{2w^2}.$$

Dokaz. Prema propoziciji 1.3

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{j=1}^{N} |A_i| \geq \frac{nN}{w}.$$

Stoga, zbroj $\sum_{x \in X} d(x)^2$ je minimalan kada je $d(x) = N/w$ za sve x, što znači da je

$$\sum_{x \in X} d(x)^2 \geq \frac{nN^2}{w^2}. \tag{1.6}$$

S druge strane, pretpostavljajući da tvrdnja leme nije točna i koristeći (1.4) i (1.5) dobili bi

$$\begin{aligned}\sum_{x \in X} d(x)^2 &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} |A_i \cap A_j| = \sum_{i=1}^{N} |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| \\ &< nN + \frac{nN(N-1)}{2w^2} = \frac{nN^2}{2w^2} + \left(1 + \frac{2w^2}{N} - \frac{1}{N}\right) \leq \frac{nN^2}{w^2}\end{aligned}$$

što je kontradikcija s (1.6). ■

1.2. Načelo uključivanja-isključivanja

Načelo uključivanja-isključivanja je vrlo korisno ne samo kod kombinatornog prebrojavanja, već i u drugim područjima matematike kao teoriji brojeva ili vjerojatnosti. Ono dovodi u vezu kardinalni broj unije skupova s kardinalnim brojevima presjeka tih skupova i općenito generalizira jednostavnu formulu za kardinalni broj unije dva skupa $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ odnosno $\left|\overline{A} \cap \overline{B}\right| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|$.

1.2.1. Načelo U-I za skupove i funkcije na skupovima

Propozicija 1.10. ***(Načelo uključivanja-isključivanja)*** *Neka su A_1, A_2,...,A_n podskupovi od X. Tada je*

$$\left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = |X| + \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|. \tag{1.7}$$

Dokaz. Zbog jednostavnijeg zapisivanja uvedimo oznaku

$$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Desnu stranu jednakosti u (1.7) možemo zapisati na drugi način, koristeći $|A_I| = \sum_{x \in A_I} (1)$ i promjenivši u dvostrukoj sumi redosljed sumiranja

$$|X| + \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|} |A_I| = \sum_{x \in X} (1) + \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ I \neq \emptyset}} \sum_{x \in A_I} (-1)^{|I|} = \sum_{x \in X} \left(1 + \sum_{I : x \in A_I} (-1)^{|I|} \right).$$

Za svaki $x \in X$ računamo njegov doprinos u zbroju. Pretpostavimo prvo da x nije ni u jednom A_i, stoga nije ni u jednom A_I. Za taj x imamo "praznu sumu" u zagradi, pa je zagrada jednaka 1. Inače je skup $J = \{i : x \in A_i\}$ neprazan i vrijedi da je $x \in A_I$ kada je $I \subseteq J$. Prema binomnom teoremu (ili teoremu 1.3) doprinos za ovakav x jednak je

$$1 + \sum_{\substack{I \subseteq J \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|} = \sum_{I \subseteq J} (-1)^{|I|} = \sum_{i=0}^{|J|} \binom{|J|}{i} (-1)^i = (1-1)^{|J|} = 0.$$

Ovdje smo u drugoj jednakosti stavili $i = |I|$ i sumu razložili po kardinalnosti skupova I. Pokazali smo da elementi koji ne leže ni u jednom A_i doprinose desnoj strani jednakosti (1.7) s 1, dok ostali doprinose s 0, pa je zbroj očito jednak

$$\left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|.$$

■

U primjenama je nekad pogodniji drugi oblik načela uključivanja-isključivanja pa ga navodimo u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 1.11. *Za (ne nužno različite) skupove* A_1, A_2,...,A_n *vrijedi*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|. \tag{1.8}$$

Dokaz. Lijeva strana jednakosti (1.8) jednaka je

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |X| - \left|X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$$

pa koristeći (1.7) odmah slijedi tvrdnja propozicije

$$|X| - \left(|X| + \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|} |A_I|\right) = \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|+1} |A_I|.$$

■

Sljedeća propozicija govori o broju elemenata koji pripadaju skupovima A_i za $i \in I$, gdje je I zadan skup, a ujedno ne pripadaju preostalim skupovima. To je generalizacija propozicije 1.10, preciznije (1.7) odgovara slučaju $I = \emptyset$ iz sljedeće tvrdnje.

Propozicija 1.12. **Za skupove* A_1, A_2,...,A_n *i* $I \subseteq \{1,\dots,n\}$ *vrijedi*

$$\left|\bigcap_{i\in I} A_i \setminus \bigcup_{k\in\{1,\dots,n\}\setminus I} A_k\right| = \sum_{J\supseteq I} (-1)^{|J\setminus I|} \left|\bigcap_{j\in J} A_j\right|.$$

Dokaz. Promotrimo skup $Y = \cap_{i\in I} A_i$ i njegove podskupove $B_k = Y \cap A_k$ za sve $k \in \{1,\dots,n\}\setminus I$. Trebamo prebrojati sve elemente iz Y koji ne pripadaju ni jednom B_k (pa tako ni njihovoj uniji). Koristeći (1.7) dobivamo

$$\begin{aligned}\left|Y \setminus \bigcup_{k\in\{1,\dots,n\}\setminus I} B_k\right| &= \sum_{K\subseteq\{1,\dots,n\}\setminus I} (-1)^{|K|} \left|\bigcap_{k\in K} B_k\right| \\ &= \sum_{K\subseteq\{1,\dots,n\}\setminus I} (-1)^{|K|} \left|\bigcap_{i\in K\cup I} A_i\right| = \sum_{J\supseteq I} (-1)^{|J\setminus I|} \left|\bigcap_{j\in J} A_j\right|.\end{aligned}$$

■

Na kraju navodimo i načelo uključivanja-isključivanja za općenite funkcije na skupovima. Funkcija kardinalnosti skupa je samo specijalan slučaj takvih funkcija. Ovim rezultatom ćemo se više baviti u poglavlju 2.3. "Parcijalno uređeni skupovi, lanci i antilanci".

Propozicija 1.13. **Neka su* f *i* g *dvije realne funkcije definirane na podskupovima nekog konačnog skupa i takve da je* $f(A) = \sum_{B\subseteq A} g(B)$. *Tada je*

$$g(A) = \sum_{B\subseteq A} (-1)^{|A\setminus B|} f(B).$$

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{B\subseteq A}(-1)^{|A\setminus B|}f(B) &= \sum_{B\subseteq A}\sum_{C\subseteq B}(-1)^{|A\setminus B|}g(C)\\ &= \sum_{C\subseteq A}g(C)\sum_{C\subseteq B\subseteq A}(-1)^{|A\setminus B|}=g(A),\end{aligned}$$

jer za fiksni skup $C \subseteq A$ je

$$\sum_{C\subseteq B\subseteq A}(-1)^{|A\setminus B|}=\begin{cases}1, & \text{za } C=A\\ \sum_{i=0}^{|A\setminus C|}\binom{|A\setminus C|}{i}(-1)^{|A\setminus C|+i}=0, & \text{za } C\subset A\end{cases}$$

gdje se sumira po svim skupovima B za koje je $C \subseteq B \subseteq A$. U posljednjoj jednakosti je $i = |B \setminus C|$. ■

1.2.2. Broj deranžmana

Pretpostavimo da je n ljudi u kazalištu prije predstave ostavilo svoje kapute i nakon predstave svatko nasumce uzme kaput. Kolika je vjerojatnost da nitko od ovih n ljudi nije uzeo svoj kaput? Načelom uključivanja-isključivanja se pokazuje da je ova vjerojatnost približno (za veliki n) jednaka $e^{-1} \approx 0.3678$.

Formalizirajmo problem na sljedeći način.

Definicija 1.15. ***Deranžman*** *je n-permutacija koja nema ni jednu fiksnu točku, tj. permutacija za koju vrijedi $f(i) \neq i$ za svaki $i \in \{1,\dots,n\}$.*

Pitanje sada glasi: od ukupno $n!$ permutacija koliko su ih deranžmani?

Propozicija 1.14. *Broj deranžmana skupa $\{1,\dots,n\}$ jednak je*

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)! = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

Dokaz. Primjenjujemo (1.7) za X skup svih permutacija i za A_i skup svih permutacija koje fiksiraju element i. Zato je $|A_i| = (n-1)!$ i općenitije $\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right| = (n-|I|)!$. Permutacija je deranžman ako i samo ako ne pripada ni jednom A_i, pa prema (1.7) vrijedi

$$\sum_{I\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^{|I|}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right| = \sum_{I\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^{|I|}(n-|I|)! = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)!$$

U posljednjoj jednakosti smo stavili $i = |I|$. ■

Kako je $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!} = e^{-1}$, omjer deranžmana i broja svih permutacija $n!$ je približno jednak e^{-1}.

1.2.3. Primjena za Stirlingove brojeve druge vrste

U sljedećem teoremu dana je formula za Stirlingove brojeve druge vrste definirane u poglavlju 1.1.4.

Teorem 1.19. *Za sve $n, k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{(k-i)^n}{i!\,(k-i)!}.$$

Dokaz. Umjesto $S(n,k)$ računamo $k!\cdot S(n,k)$ koji je jednak broju surjekcija iz n-članog skupa u k-člani skup (korolar 1.5). Primjenjujemo (1.7) za X skup svih funkcija iz n-članog skupa u k-člani skup (kojih ima k^n) i A_i skup svih funkcija iz X koje u slici ne sadrže element i. Zato je $|A_i| = (k-1)^n$ i općenitije $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = (k-|I|)^n$. Funkcija iz X je surjekcija ako i samo ako ne pripada ni jednom A_i, pa prema (1.7) vrijedi

$$\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}}(-1)^{|I|}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right| = \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}}(-1)^{|I|}(k-|I|)^n = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

U posljednjoj jednakosti smo stavili $i = |I|$. ■

Zadatak 1.31. *(Eulerova funkcija) Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$ kanonski rastav broja n. Eulerova funkcija $\phi(n)$ se definira kao broj prirodnih brojeva k koji su manji od n i relativno prosti s n. Dokažite da vrijedi*

$$\phi(n) = n - \sum_{i=1}^{r}\frac{n}{p_i} + \sum_{1\le i<j\le r}\frac{n}{p_ip_j} - \sum_{1\le i<j<k\le r}\frac{n}{p_ip_jp_k} + \cdots = n\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).$$

Ideja: primjenite načelo uključivanja-isključivanja na skupove $X = \{1,\ldots,n\}$, A_i skup brojeva iz X djeljivih s p_i.

Zadatak 1.32. *Koristeći načelo uključivanja-isključivanja odredite broj različitih rasporeda tri bračna para za okruglim stolom, uz uvjet da supružnici ne sjede jedan pored drugog.*

Rješenje: Neka je A_i označava rasporede kada i-ti bračni par sjedi zajedno, $i = 1,2,3$. Kako je $|A_i| = 2\cdot 4!$, $|A_i\cap A_j| = 2^2\cdot 3!$, $|A_1\cap A_2\cap A_3| = 2^3\cdot 2!$, primjenom načela uključivanja-isključivanja dobijemo rezultat $5! - 3(2\cdot 4!) + 3(2^2\cdot 3!) - 2^3\cdot 2! = 32$.

Zadatak 1.33. *U jednom razredu svi učenici su članovi tri sportska tima. Za bilo koja dva učenika vrijedi da postoji barem jedan tim čiji su oni članovi. Dokažite da postoji tim koji sadrži barem 2/3 svih učenika tog razreda.*

Rješenje: Primjetimo da zbog uvjeta zadatka "za bilo koja dva učenika vrijedi da postoji barem jedan tim čiji su oni članovi" ni jedan učenik ne može biti u samo jednom sportskom timu, osim ako su svi učenici članovi tog tima. Označimo s a *broj učenika koji su samo u prvom i drugom timu, s* b *broj učenika koji su samo u drugom i trećem timu, s* c *broj učenika koji su samo u prvom i trećem timu i s* d *broj učenika koji su u sva tri tima. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je* $c \le a$ *i* $c \le b$ *(pa je i* $c \le (a+b)/2$*). Koristeći činjenicu da se razlomak manji od* 1 *smanji ako mu brojnik i nazivnik umanjimo za* 1 *imamo*

$$\frac{a+b+d}{a+b+c+d} \ge \frac{a+b}{a+b+c} \ge \frac{a+b}{a+b+(a+b)/2} = \frac{2}{3}.$$

Zadatak 1.34. *Dokažite da vrijedi*

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \begin{cases} n! & \text{ako je } k = n, \\ 0 & \text{ako je } k > n. \end{cases}$$

Rješenje: lijeva strana jednakosti jednaka je broju surjekcija iz n*-članog skupa u* k*-člani, pa jednakost očito vrijedi.*

Zadatak 1.35. *(Dualno načelo uključivanja-isključivanja za funkcije na skupovima) Neka su* h *i* r *dvije realne funkcije definirane na podskupovima nekog konačnog skupa* X *i takve da je* $r(S) = \sum_{S \subseteq T} h(T)$*. Dokažite da je tada*

$$h(S) = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T \setminus S|} r(T).$$

Ideja: definirajte funkcije f *i* g *tako da je* $f(A) = h(A^c)$ *i* $g(A) = r(A^c)$ *gdje* A^c *označava komplement skupa* A *u* X*.*

Zadatak 1.36. *Dokažite da za bilo koja dva skupa* $I \subseteq J$ *vrijedi*

$$\sum_{I \subseteq K \subseteq J} (-1)^{|K \setminus I|} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } I = J, \\ 0, & \text{ako je } I \ne J. \end{cases}.$$

Ideja: kao u posljednjoj jednakosti iz dokaza propozicije 1.13.

1.3. Dirichletovo načelo

Dirichletovo načelo (engl. pigeonhole principle) govori o "očitoj" činjenici: $n+1$ lopti (golubova) ne možemo smjestiti u n kutija (golubinjaka) tako da je u svakoj kutiji najviše jedna lopta. Općenitije, Dirichletovo načelo glasi:

Ako skup s n *elemenata podijelimo u* k *klasa, postoji klasa s brojem elemenata većim ili jednakim od* $\frac{n}{k}$*. Il preciznije, postoji klasa s barem* $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ *elemenata.*

Istinitost se lako provjeri: ako bi svaka klasa sadržavala najviše $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$ elemenata, ukupno bi imali najviše $n-1$ elemenata, što je kontradikcija.

Dirichletovo načelo jedan je od najstarijih "nekonstruktivnih" načela: ono daje samo egzistenciju, ali ne govori ništa o tome kako konstruirati samu razdiobu sa opisanim svojstvom. Neka važna i dalekosežna poopćenja ovog principa poput teorema Ramseyevog tipa ili vjerojatnosne metode ćemo razmatrati u narednim pogavljima.

Koliko god trivijalno izgledalo, Dirichletovo načelo ima veliki broj netrivijalnih primjena. Slijede neke od njih.

1.3.1. Nekoliko jednostavnih primjena za grafove

Evo tri jednostavne primjene za grafove.

Propozicija 1.15. *U svakom grafu postoje dva vrha jednakog stupnja.*

Dokaz. U grafu s n vrhova stupnjevi vrhova mogu varirati od 0 do najviše $n-1$. Označimo kutije s $0, 1, \ldots, n-1$, a vrh smjestimo u kutiju k ako i samo ako je stupanj tog vrha jednak k. Ako su u nekoj kutiji dva vrha dokaz je gotov. Zato pretpostavimo suprotno, da je u svakoj kutiji po jedan vrh. Neka je vrh v u kutiji 0, a vrh w u kutiji $n-1$. Kako v nema incidentnih bridova, w mu nije susjedni vrh. S druge strane w ima $n-1$ susjednih vrhova, odnosno susjedan je svim vrhovima uključujući i vrh v. Kontradikcija! ■

Definicija 1.16. *Za konačan graf G definiramo* ***broj nezavisnosti grafa*** *$\alpha(G)$ kao maksimalni broj međusobno nesusjednih vrhova.* ***Kromatski broj grafa*** *$\chi(G)$ je minimalni broj boja kojima možemo obojiti vrhove tako da bilo koja dva susjedna vrha nisu iste boje.*

Propozicija 1.16. *Za graf G s n vrhova vrijedi*

$$n \leq \alpha(G) \cdot \chi(G).$$

Dokaz. Neka su vrhovi grafa G obojani u $\chi(G)$ boja tako da bilo koja dva susjedna vrha nisu iste boje. Podijelimo skup vrhova grafa G u $\chi(G)$ klasa, tako da svaka klasa sadrži vrhove iste boje. Prema Dirichletovom načelu postoji klasa s brojem vrhova većim ili jednakim od $\frac{n}{\chi(G)}$. Kako svi ovi vrhovi moraju biti nesusjedni vrijedi $\alpha(G) \geq \frac{n}{\chi(G)}$. ■

U sljedećoj propoziciji dan je dovoljan uvjet da bi graf bio povezan. Taj rezultat je *najbolji mogući* u smislu ako oslabimo uvjete, zaključak više ne vrijedi, što je pokazano u primjedbi nakon dokaza propozicije.

Propozicija 1.17. *Neka je G graf s n vrhova. Ako svaki vrh ima stupanj barem $(n-1)/2$, graf G je povezan.*

Dokaz. Uzmimo bilo koja dva vrha x i y. Ako nisu susjedni onda prema uvjetima propozicije ih zajedno barem $n-1$ bridova povezuje s ostalim vrhovima (po $(n-1)/2$ bridova iz svakog). Kako preostalih vrhova ima $n-2$ prema Dirichletovom načelu postoji vrh susjedan i sa x i sa y. Dokazali smo da za svaka dva nesusjedna vrha postoji zajednički susjedni vrh, pa je graf G povezan. ■

Primjedba 1.7. *Rezultat prethodne propozicije je najbolji mogući. To ćemo pokazati primjerom konkretnog grafa s n vrhova čiji stupnjevi su najviše $(n-1)/2 - 1 = (n-2)/2$ i koji je nepovezan. Neka je G unija dvaju potpunih grafova s $n/2$ vrhova (n je paran). Tada je svaki vrh stupnja $n/2 - 1 = (n-2)/2$ i graf je nepovezan.*

1.3.2. Erdős-Szekeresov teorem

U ovom podpoglavlju baviti ćemo se duljinom najduljeg rastućeg i najduljeg padajućeg podniza konačnog niza n različitih brojeva $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Intuitivno je prihvatljivo da su ove dvije duljine u neproporcionalnom odnosu. Ako je primjerice najdulji rastući niz kratak i njegova duljina iznosi s, onda bilo koji niz duljine $s+1$ mora imati par padajućih elemenata, a kako je s malen, takvih parova ima mnogo. Stoga možemo očekivati da je najdulji padajući niz dug. Ekstremni slučaj je za $s = 1$. Tada je čitav niz padajući.

Kako možemo kvantitativno izraziti slutnju da ova oba niza ne mogu biti istovremeno kratka? Odgovor na ovo pitanje dali su Erdős i Szekeres 1935. godine i to je bio jedan od prvih rezultata iz ekstremalne kombinatorike.

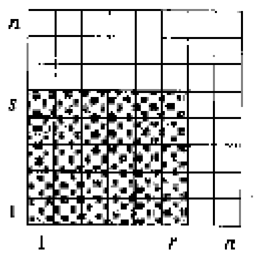
Teorem 1.20. ***(Erdős-Szekeres 1935.)*** *Neka je $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ konačan niz od n različitih realnih brojeva. Ako je $n \geq sr + 1$ tada A ima rastući podniz duljine $s+1$ ili padajući podniz duljine $r+1$ (ili oboje).*

Dokaz. Ovdje ne iznosimo originalni dokaz iz 1935. godine, već jednostavniji dokaz koji je dao Seidenberg 1959.

Pridružimo svakom članu a_i niza A uređeni par prirodnih brojeva (x_i, y_i) gdje je x_i broj članova najduljeg rastućeg podniza od A koji završavaju članom a_i, a y_i broj članova najduljeg padajućeg podniza od A koji započinju članom a_i. Dokažimo da su različitim članovima a_i i a_j niza $\cdots a_i \cdots a_j \cdots$ pridruženi različiti parovi, tj. $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$ kad god je $i \neq j$:

-ako je $a_i < a_j$, najdulji rastući podniz koji završava članom a_i se može produljiti dodavanjem posljednjeg člana a_j (pa je $x_i < x_j$),

-ako je $a_i > a_j$, najdulji padajući podniz koji započinje članom a_j može produljiti dodavanjem prvog člana a_i (pa je $y_i > y_j$).



Napravimo sada mrežu od n^2 kvadratića (kao na slici). Smjestimo svaki član a_i u kvadratić s koordinatama (x_i, y_i), gdje je $1 \leq x_i, y_i \leq n$ za sve $i = 1, \ldots, n$. U svakom kvadratiću je najviše jedan član niza A, pa kako je $|A| = n \geq sr + 1$ prema

Dirichletovom načelu jedan će član niza biti izvan osjenčene $s \times r$ podmreže. Zato je $x_i \geq s+1$ ili $y_i \geq r+1$ (ili oboje) pa tvrdnja slijedi. ■

Primjedba 1.8. *Rezultat Erdős-Szekeresovog teorema je najbolji mogući u smislu da se gornja ograda tj. desna strana nejednakosti ne može smanjiti (pogledajte zadatak 1.46).*

Skup realnih brojeva je **totalno uređen** (ili **linearno uređen**), što znači da za bilo koja dva različita realna broja x i y je ili $x < y$ ili $y < x$. Sljedeća lema, zahvaljuući Dilworth-u, poopćava Erdős-Szekeresov teorem na skupove u kojima dva različita elementa mogu, ali i ne moraju biti usporediva.

Definicija 1.17. ** **Parcijalni uređaj** (ili **slabi uređaj**) na skupu P je binarna relacija $\preccurlyeq$ na P koja je refleksivna, tranzitivna i **antisimetrična**, tj. $\forall x, y \in P$, $(x \preccurlyeq y) \wedge (y \preccurlyeq x) \Rightarrow (x = y)$. Kažemo da su elementi x i y **usporedivi** ako je $x \preccurlyeq y$ ili $y \preccurlyeq x$ (ili oboje). **Lanac** je podskup od P čija svaka dva elementa su usporediva. **Antilanac** je podskup od P čija nikoja dva različita elementa nisu usporediva. Duljina lanca (ili antilanca) je njegov kardinalni broj.*

Lema 1.6. ***(Dilworth 1950.)**** *Za bilo koji parcijalni uređaj na skupu P s $n \geq sr+1$ elemenata, postoji lanac duljine $s+1$ ili antilanac duljine $r+1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da ne postoji lanac duljine $s+1$. Tada možemo definirati funkciju $f : P \to \{1, 2, \ldots, s\}$ gdje je $f(x)$ jednak maksimalnom broju elemenata u lancu s najvećim elementom x. Prema Dirichletovom načelu postoji $r+1$ elemenata od P s istom slikom od f, a prema definiciji funkcije f ovi elementi moraju biti neusporedivi, pa čine antilanac duljine $r+1$. ■

Primjedba 1.9. ** Za niz realnih brojeva $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, gdje je $n \geq sr+1$, definiramo parcijalni uređaj $\preccurlyeq$ na $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ s $a_i \preccurlyeq a_j$ ako je $a_i \leq a_j$ & $i \leq j$. U ovom posebnom slučaju Dilworth'ova lema se svodi na Erdős-Szekeresov teorem.*

1.3.3. Mantelov teorem

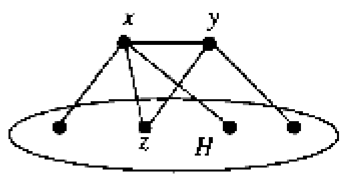
Razmatrati ćemo jedan tipičan ekstremalni problem za grafove: koliko najviše bridova može imati graf bez trokuta (engl. triangle-free graph) s $2n$ vrhova? Pod trokutom podrazumjevamo skup od tri međusobno susjedna vrha. Graf s ovim svojstvom i točno n^2 bridova postoji, uzmimo za primjer potpuni bipartitni graf $K_{n,n}$, tj. graf s dva skupa od n nesusjednih vrhova, dok su svi vrhovi iz jednog skupa spojeni sa svim vrhovima iz drugog skupa. Štoviše, n^2 je maksimalni mogući broj bridova u ovoj situaciji, uzmemo li brid više dobijemo trokut.

Ovdje ćemo dati tri dokaza ovog lijepog rezultata: prvi pomoću Dirichletovog načela, drugi pomoću dvostrukog prebrojavanja koji je i originalni Mantelov dokaz i treći korištenjem nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine. Četvrti dokaz metodom prebacivanja težine napraviti ćemo u poglavlju 1.3.6.

Teorem 1.21. ***(Mantel 1907.)*** *Ako graf G s $2n$ vrhova ima n^2+1 bridova, onda G sadrži trokut.*

Dokaz. *Prvi dokaz.*

Matematičkom indukcijom po n. Za $n=1$ G ne može imati 2 brida pa je tvdnja istinita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n \in \mathbb{N}$ i pogledajmo graf s $2(n+1)$ vrhova i $(n+1)^2+1$ bridova. Neka su x i y dva susjedna vrha i H inducirani podgraf od preostalih $2n$ vrhova (skup bridova od H je podskup bridova od G čija su oba kraja u H). Ako H ima barem n^2+1 bridova, onda H pa stoga i G sadrži trokut. Ako H ima najviše n^2 bridova, onda barem $2n+1$ bridova od G spajaju x i y s vrhovima iz H. Kako H ima $2n$ vrhova, prema Dirichletovom načelu postoji vrh z iz H koji je susjedan i sa x i sa y, pa imamo trokut $\{x,y,z\}$ (na slici).



Drugi dokaz.

Neka je G graf sa skupom od $2n$ vrhova V i $m \geq n^2+1$ bridova. Pretpostavimo da ne sadrži trokut. Tada susjedni vrhovi nemaju zajedničkig susjeda pa je $d(x)+d(y) \leq 2n$ za svaki brid $\{x,y\} \in E$. Sumirajući po svim bridovima iz G i koristeći (1.5) imamo

$$\sum_{x \in V} d(x)^2 = \sum_{\{x,y\} \in E} (d(x)+d(y)) \leq 2mn.$$

S druge strane, koristeći Cauchy-Schwarz nejednakost i Eulerovu jednakost $\sum_{x \in V} d(x) = 2m$ (teorem 1.18) dobijemo

$$\sum_{x \in V} d(x)^2 \geq \frac{\left(\sum_{x \in V} d(x)\right)^2}{|V|} = \frac{2m^2}{n}.$$

Iz ove dvije nejednakosti slijedi $\frac{2m^2}{n} \leq 2mn$, tj. $m \leq n^2$ što je kontradikcija. Dakle, pretpostavka da G ne sadrži trokut ne može biti istinita.

Treći dokaz.

Neka je $G=(V,E)$ graf s $2n$ vrhova i pretpostavimo da ne sadrži trokut. Neka je $A \subseteq V$ maksimalan nezavisan skup vrhova, tj. maksimalan skup međusobno nesusjednih vrhova. Kako G ne sadrži trokut, svi vrhovi susjedni sa $x \in V$ čine nezavisan skup, pa vrijedi $d(x) \leq |A|$ za sve $x \in V$. Svaki brid grafa G incidentan je s nekim vrhom iz skupa $B = V \setminus A$. Prebrojavajući sve bridove iz G s obzirom na njihove krajeve dobijemo $|E| \leq \sum_{x \in B} d(x)$. Konačno, nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine daje

$$|E| \leq \sum_{x \in B} d(x) \leq |A| \cdot |B| \leq \left(\frac{|A|+|B|}{2}\right)^2 = n^2.$$

■

1.3.4. Turánov teorem

Potpuni graf s k vrhova (ili k*-klika*) je graf čija su svaka dva vrha susjedna. Mantelov teorem tvrdi: ako graf s parnim brojem n vrhova ne sadrži 3-kliku onda može imati najviše $n^2/4$ bridova. Za $n \in \mathbb{N}$ (bilo paran ili neparan) vrijedi: ako graf s n vrhova ne sadrži 3-kliku onda može imati najviše $\lfloor n^2/4 \rfloor$ bridova (pogledajte zadatak 1.47).

Poopćenje ovog teorema za $k > 3$ dao je Paul Turán i taj rezultat je bio začetak *ekstremalne teorije grafova.* Iako Turánov teorem kao i Mantelov teorem, ima brojne različite dokaze, ovdje iznosimo originalni Turánov dokaz, a neke druge, kao dokaz vjerojatnosnom metodom ćemo vidjeti u narednim poglavljima.

Teorem 1.22. ***(Turán 1941.)*** *Ako graf $G = (V, E)$ s n vrhova ne sadrži $(k+1)$-kliku i $k \geq 2$, onda je*

$$|E| \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po broju vrhova n. Za $n = 1$ ili 2 tvrdnja je trivijalno ispunjena. Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za sve grafove s najviše $n-1$ vrhova i neka je $G = (V, E)$ graf s n vrhova koji ne sadrži $(k+1)$-kliku i s maksimalnim brojem bridova. Ovaj graf sigurno sadrži k-kliku, inače bi mogli dodavati bridove, što je u kontradikciji sa svojstvom maksimalnog broja bridova. Označimo tu k-kliku s A i stavimo $B = V \setminus A$. Označimo s e_A broj bridova koji spajaju vrhove iz A, s e_B broj bridova koji spajaju vrhove iz B i s $e_{A,B}$ broj bridova između vrhova iz A i iz B. Vrijedi $e_A = \binom{k}{2}$ i po pretpostavci indukcije

$$e_B \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{(n-k)^2}{2}.$$

Kako G nema $(k+1)$-kliku, svaki brid iz B je susjedan s najviše $k-1$ vrhova iz A, pa je

$$e_{A,B} \leq (k-1)(n-k).$$

Zbrajajući ove dvije nejednakosti i koristeći identitet

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2} = \binom{k}{2} \left(\frac{n}{k}\right)^2$$

zaključujemo da je

$$\begin{aligned} |E| = e_A + e_B + e_{A,B} &\leq \binom{k}{2} + \binom{k}{2} \left(\frac{n-k}{k}\right)^2 + (k-1)(n-k) \\ &= \binom{k}{2} \left(1 + \frac{n-k}{k}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}. \end{aligned}$$

■

Primjedba 1.10. *Rezultat Turánovog teorema je najbolji mogući u smislu da se desna strana nejednakosti ne može smanjiti (pogledajte zadatak 1.48).*

1.3.5. Dirichletov teorem o aproksimaciji racionalnim brojevima

Ovdje iznosimo teorem o egzistenciji dobre aproksimacije iracionalnih brojeva racionalnim. Iako ovaj Dirichletov rezultat pripada teoriji brojeva, on ga je dokazao kombinatorno. Po tom dokazu je Dirichletovo načelo dobilo ime.

Teorem 1.23. ***(Dirichlet 1879.)*** *Neka je $x \in \mathbb{R}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji racionalan broj $p/q \in \mathbb{Q}$ tako da vrijedi*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq} \leq \frac{1}{q^2}.$$

Dokaz. Neka u ovom dokazu $\{x\}$ označava decimalni dio od x, tj. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Ako je $x \in \mathbb{Q}$ tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo zato da je x iracionalan, $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ i pogledajmo brojeve $\{kx\}$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Kako je x iracionalan, ovi brojevi ne mogu biti racionalni, pa su iz unije otvorenih intervala

$$\left(0, \frac{1}{n}\right) \cup \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \cup \left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right) \cup \cdots \cup \left(\frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Prema Dirichletovom načelu jedan od ovih otvorenih intervala sadrži barem dva broja, recimo $\{lx\}$ i $\{mx\}$, $l > m$, koji se stoga razlikuju za manje od $\frac{1}{n}$. Stavimo li $q = l - m$, i $p = \lfloor lx \rfloor - \lfloor mx \rfloor$ vidimo da je $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ i da vrijedi

$$|qx - p| = |\{lx\} - \{mx\}| < \frac{1}{n},$$

pa rezultat slijedi nekon dijeljenja s q. Kako su $l, m \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, vrijedi $q \leq n$, pa onda i $1/(nq) \leq 1/q^2$. ∎

1.3.6. Prebacivanje težine*

Jedna inačica Dirichletovog načela je *načelo usrednjavanja* iz poglavlja 1.1.8: *svaki skup brojeva mora sadržavati barem jedan broj koji nije manji od aritmetičke sredine brojeva ovog skupa i barem jedan broj koji nije veći od te aritmetičke sredine.*

Ako želimo pokazati da neki "dobri" objekti postoje možemo im pridružiti njihove "težine" tako da su objekti s dovoljno velikom težinom dobri (ili obratno) i potom pokažemo da je prosječna težina velika. Načelo usrednjavanja tada jamči da je barem jedan objekt dobar. Glavni problem je definirati težine relevantne za dano svojstvo i izračunati sumu težina svih objekata. Metoda "prebacivanja težine" ovdje može pomoći. Pokažimo to na tri primjera.

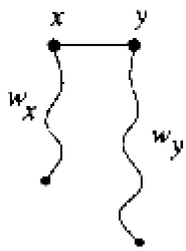
Propozicija 1.18. *Neka je $n \leq m < 2n$. Tada za svaki raspored m golubova u n golubinjaka tako da nijedan golubinjak nije prazan, najviše $2(m-n)$ golubova će biti sretni tj. neće biti sami u golubinjacima.*

Dokaz. Ako su u nekom golubinjaku više od dva goluba, onda prebacivanjem tog goluba u gulubinjak sa samo jednim golubom povećavamo broj sretnih goluba za jedan. Ponavljanjem ovog dobivamo maksimalni broj sretnih golubova $2\,(m-n)$, kada su u svakom golubinjaku najviše dva goluba. ∎

Podsjetimo se: *staza* u grafu G je šetnja u kojoj su svi bridovi različiti.

Teorem 1.24. ***(Graham-Kleitman 1973.)*** *Ako su bridovi potpunog grafa s n vrhova proizvoljno označeni s brojevima $1, 2, 3, \ldots, \binom{n}{2}$ (različiti bridovi imaju različite oznke), onda postoji staza duljine barem $n-1$ s rastućim nizom oznaka bridova.*

Dokaz. Pridružimo svakom vrhu x težinu w_x jednaku duljini najduže staze s rastućim nizom oznaka bridova i s krajem u vrhu x. Ako dokažemo da je $\sum_x w_x \geq n\,(n-1)$, načelo usrednjavanja jamči da imamo vrh s težinom barem $n-1$. Težine vrhova ćemo zbrajati iterativno: započnimo s praznim grafom, zbroj težina je 0. U i-tom koraku dodajemo brid $e = \{x, y\}$ s oznakom i. Neka su w_x i w_y do ovog koraka akumulirane težine vrhova x i y (na slici). Ako je $w_x = w_y$ onda se i w_x i w_y povećavaju za 1. Ako je $w_x < w_y$ onda brid e produljava za 1 najdulju stazu s rastućim nizom oznaka bridova i s krajem u vrhu x, pa su nove težine $w'_x = w_y + 1$ i $w'_y = w_y$. U oba slučaja, kada dodamo novi brid zbroj težina vrhova naraste za barem 2. Na ovaj način nakon svih $\binom{n}{2}$ koraka, zbroj težina vrhova nije manji od $n\,(n-1)$, što smo i željeli dobiti. ∎



Konačno, treći primjer za metodu prebacivanjem težine je četvrti dokaz *Mantelovog teorema*: *" Ako graf G s $2n$ vrhova ima n^2+1 bridova, onda G sadrži trokut."*

Dokaz. (Motzgin-Straus 1965.) Neka je $G = (V, E)$ graf s $2n$ vrhova. Pretpostavimo da G ne sadrži trokut. Cilj nam je dokazati da za broj bridova m tada vrijedi $m \leq n^2$. Svakom vrhu x dodijelimo nenegativnu težinu w_x tako da je $\sum_x w_x = 1$. Želimo maksimizirati

$$S = \sum_{e \in E} w_x w_y,$$

gdje se sumira po svim bridovima grafa G. Primjerice težine možemo dodijeliti uniformno $w_x = \frac{1}{2n}$, za svaki $x \in V$. Tada je

$$S \geq \frac{m}{(2n)^2}. \tag{1.9}$$

Želimo dokazati da S nikada ne prelazi $1/4$, što zajedno s prethodnom donjom ogradom za S povlači $m \leq n^2$. Koristimo metodu prebacivanja težine: pretpostavimo da su x i y dva nesusjedna vrha, a W_x i W_y zbroj težina svih vrhova susjednih s x, odnosno y. Također pretpostavimo $W_x \geq W_y$. Tada je za svaki $\varepsilon \geq 0$

$$(w_x + \varepsilon) W_x + (w_y - \varepsilon) W_y \geq w_x W_x + w_y W_y.$$

U posebnom slučaju ovo znači da se vrijednost od S ne smanjuje ako prebacimo svu težinu vrha y vrhu x. Zbog toga je S maksimalan kada je sva težina koncentrirana na potpunom podgrafu od G. Kako G ne sadrži trokut, ne može imati potpuni podgraf veći od K_2 (jednog brida), S je maksimalan kada je sva težina skoncentrirana na dva susjedna brida primjerice x i y. Dakle,

$$S \leq \max \{w_x w_y : w_x + w_y = 1\} = \frac{1}{4}$$

što zajedno s (1.9) povlači da je $m \leq n^2$. ■

Zadatak 1.37. *Dokažite da za bilo kojih* 5 *točaka unutar jednakostraničnog trokuta stranice duljine* 1 *postoje dvije koje su udaljene najviše* $1/2$.

Ideja: podijelite ovaj jednakostranični trokut na četiri manja jednakostranična trokuta stranice duljine $1/2$.

Zadatak 1.38. *Dokažite da u nizu* $7, 77, 777, 7777, \ldots$ *postoji broj djeljiv s* 2011.

Ideja: ako ni jedan od prvih 2011 *članova niza nije djeljiv s* 2011 *onda po Dirichletovom načelu postoje dva, recimo* i*-ti i* j*-ti* $(i < j)$ *čija je razlika djeljiva s* 2011. *Ta razlika je oblika* $\underbrace{77\ldots77}_{j-i} \cdot 10^i$.

Zadatak 1.39. *Na turniru u šahu natječe se* n *šahista, svaki će odigrati jednu partiju protiv svakoga. Dokažite da u svakom trenutku postoje dva igrača s jednakim brojem odigranih partija.*

Ideja: propozicija 1.15.

Zadatak 1.40. *Dokažite da u skupu od* 9 *prirodnih brojeva od kojih ni jedan nema prostog djeljitelja većeg od* 6, *postoje dva broja čiji produkt je potpun kvadrat.*

Ideja: Ti brojevi su oblika $2^i 3^j 5^k$. *Razvrstajte ih u* 8 *klasa prema parnosti eksponenata* i, j, k.

Zadatak 1.41. *Dokažite da svaki* $(n+1)$*-člani podskup skupa* $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ *sadrži par uzastopnih brojeva i par čija je suma* $2n+1$. *Pokažite kontraprimjerom da za* n*-podskupove ova tvrdnja ne vrijedi.*

Ideja: primijenite Dirichletovo načelo s golubinjacima $\{2i, 2i-1\}$, $i = 1, \ldots n$ *i* $\{i, 2n-i+1\}$, $i = 1, \ldots n$.

Zadatak 1.42. *Dokažite da svaki* $(n+1)$*-člani podskup skupa* $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ *sadrži par brojeva takvih da je jedan djelitelj drugog.*

Ideja: napišite svaki broj u obliku $x = k_x 2^a$ *gdje je* $k_x \in \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$.

Zadatak 1.43. *Dano je n^2+1 točaka (x_i, y_i) iz $\mathbb{R}^2$ tako da je $x_i \neq x_j$ i $y_i \neq y_j$ za sve različite i, j. Dokažite da postoji podniz od $n+1$ ovih točaka $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ takav da vrijedi $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$ i $y_1 > y_2 > \cdots > y_{n+1}$, ili podniz od $n+1$ ovih točaka $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ takav da vrijedi $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$ i $y_1 < y_2 < \cdots < y_{n+1}$.*

Ideja: početni niz ispermutirajte tako da prve koordinate čine rastući niz i primijenite Erdős-Szekeresov teorem na niz drugih koordinata.

Zadatak 1.44. *Ako je $n > srp$ onda bilo koji niz od n realnih brojeva ima ili rastući podniz duljine barem $s+1$ ili padajući podniz duljine barem $r+1$ ili konstantan podniz duljine barem $p+1$.*

Ideja: prema Dirichletovom načelu ako nemamo više od sr različitih vrijednosti ovog niza, onda se neka od tih vrijednosti pojavljuje više od p puta u nizu. Ako imamo više od sr različitih vrijednosti primijenimo Erdős-Szekeresov teorem.

Zadatak 1.45. **Neka je $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{sr+1}$ niz prirodnih brojeva. Dokažite da postoji podniz od $s+1$ članova tako da svaki dijeli slijedećeg člana podniza, ili $r+1$ među njima tako da ni jedan ne dijeli nekog drugog člana podniza.*

Ideja: pogodno definirajte relaciju parcijalnog uređaja i primijenite Dilworthovu lemu.

Zadatak 1.46. *Dokažite da je ograda Erdős-Szekeresovog teorema najbolja moguća.*

Ideja: niz $A = (B_{s-1}, B_{s-2}, \ldots, B_o)$ gdje je $B_i = (ir+1, ir+2, \ldots, ir+r)$.

Zadatak 1.47. *Dokaži da graf s n vrhova i $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ bridova koji ne sadrži 3-kliku je bipartitni graf $K_{k,k}$ za $n = 2k$ i $K_{k,k+1}$ za $n = 2k+1$.*

Zadatak 1.48. *Pretpostavimo da je n višekratnik od k. Konstruirajte graf bez $(k+1)$-klike u kojem broj bridova doseže $\left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}$, gornju granicu u Turánovom teoremu.*

*Ideja: razdvojite vrhove u k jednakih dijelova, i spojite sve vrhove iz različitih dijelova (**kompletan k-partitni graf**).*

Zadatak 1.49. **Neka je G usmjereni, aciklički, povezani graf, čiji svi vrhovi osim listova imaju out-stupanj 2. Definiramo težinu vrha kao broj listova koji su dostupni iz tog vrha, tj.do kojih postoji put iz tog vrha. Dokažite da postoji vrh čija je težina između $m/3$ i $2m/3$, ako je m broj listova u G.*

Ideja: Težina korijena je m. Težina vrha ne može biti veća od sume težina vrhova-djece.

Zadatak 1.50. **Koristeći Dirichletovo načelo dokažite **Kineski teorem o ostacima**: neka su $a_1, a_2, \cdots, a_k, b$ cijeli brojevi i $m = m_1 m_2 \cdots m_k$ gdje su m_i i m_j relativno prosti za sve $i \neq j$. Tada postoji cijeli broj a, $b \leq a < b+m$, takav da je $a \equiv a_i \mod m_i$ za sve $i = 1, \ldots, k$.*

Ideja: svi brojevi $x \in \{b, b+1, \ldots, b+m-1\}$ su različiti modulo m, pa njihovi ostaci $(x \bmod m_1, \ldots, x \bmod m_k)$ postižu svih mogućih m vrijednosti.

1.4. Sustavi izrazitih predstavnika

Sustav izrazitih predstavnika za konačan niz ne nužno različitih skupova $S_1, S_2, \ldots, S_m$ je konačan niz različitih elemenata $x_1, x_2, \ldots, x_m$ takvih da je $x_i \in S_i$ za svaki $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Kada ovakav sustav postoji? Ovaj problem je poznat pod imenom "problem ženidbe" jer njegova jednostavna reformulacija glasi: možemo li udati svaku od m djevojaka za nekog od mladića koje ona poznaje? U ovom slučaju je S_i skup svih mladića koje poznaje i-ta djevojka.

Očito, ako skupovi $S_1, S_2, \ldots, S_m$ imaju sustav izrazitih predstavnika onda je sljedeći *Hallov uvjet* ispunjen:

za svaki $k = 1, 2, \ldots, m$ unija bilo kojih k od ovih skupova ima bar k elemenata tj.

$$\left| \bigcup_{i \in I} S_i \right| \geq |I| \quad \text{za sve } I \subseteq \{1, \ldots, m\}\,. \tag{1.10}$$

Interesantno je da je ovaj nužan uvjet također i dovoljan.

1.4.1. Hallov teorem o ženidbi

Sljedeći *teorem o ženidbi* Hall je dokazao 1935. godine. Specijalni slučaj za jednaki broj djevojaka i mladića dokazao je Frobenius 1917. godine.

Teorem 1.25. ***(Hallov teorem)*** *Skupovi $S_1, S_2, \ldots, S_m$ imaju sustav izrazitih predstavnika onda i samo onda ako vrijedi (1.10).*

Dokaz. Matematičkom indukcijom po m dokazati ćemo da je uvjet (1.10) dovoljan. Za $m = 1$ tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo da (1.10) vrijedi za bilo koju familiju koja ima manje od m skupova.

Prvi slučaj: Za svaki k, $1 \leq k < m$, unija od bilo kojih k skupova sadrži više od k elemenata.

Uzmimo bilo koji od skupova $S_1, S_2, \ldots, S_m$, zatim uzmimo bilo koji njegov element x za predstavnika i izbacimo x iz preostalih skupova. Unija od $s \leq m - 1$ bilo kojih preostalih $m - 1$ skupova ima bar s elemenata i stoga oni imaju svoj sustav izrazitih predstavnika koji zajedno s x čini sustav izrazitih predstavnika za $S_1, S_2, \ldots, S_m$.

Drugi slučaj: Unija nekih k skupova, $1 \leq k < m$, sadrži točno k elemenata. Po pretpostavci indukcije ovi skupovi imaju svoj sustav izrazitih predstavnika. Izbacimo ovih k elemenata iz preostalih $m-k$ skupova. Uzmimo s skupova od njih. Njihova unija sadrži barem s elemenata, jer bi inače unija ovih s skupova i početnih k skupova sadržavala manje od $s + k$ elemenata. Zato i preostalih $m - k$ skupova po pretpostavci indukcije ima svoj sustav izrazitih predstavnika. Ova dva sustava zajedno čine sustav izrazitih predstavnika za $S_1, S_2, \ldots, S_m$. ∎

Hallov uvjet (1.10) je općenito teško provjeriti za proizvoljne skupove $S_1, S_2, \ldots, S_m$, ali ovi skupovi mogu ispunjavati neke dodatne uvjete koji olakšavaju provjeru (1.10).

Korolar 1.8. *Neka su $S_1, S_2, \ldots, S_m$ r-člani podskupovi n-članog skupa i neka svaki od n elemenata pripada istom broju d podskupova $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Ako je $m \leq n$, onda skupovi $S_1, S_2, \ldots, S_m$ imaju sustav izrazitih predstavnika.*

Dokaz. Koristeći načelo dvostrukog prebrojavanja (iz propozicije 1.4) dobivamo $mr = nd$, pa nejednakost $m \leq n$ povlači $d \leq r$. Pretpostavimo da $S_1, S_2, \ldots, S_m$ nemaju sustav izrazitih predstavnika. Po Hallovom teoremu unija $Y = S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \cdots \cup S_{i_k}$ nekih k $(1 \leq k \leq m)$ skupova sadrži manje od k elemenata. Za $x \in Y$ neka je d_x broj ovih skupova koji sadrže x. Očito vrijedi $d_x \leq d$. Koristeći opet načelo dvostrukog prebrojavanja (iz propozicije 1.4) dobivamo

$$rk = \sum_{j=1}^{k} \left|S_{i_j}\right| = \sum_{x \in Y} d_x \leq \sum_{x \in Y} d = d\,|Y| < dk,$$

što je kontradikcija s uvjetom $d \leq r$. ■

Zadatak 1.51. *Skupovi $S_1 = \{1,2,6\}$, $S_2 = \{1,2\}$, $S_3 = \{1,6\}$, $S_4 = \{2,6\}$ nemaju sustav izrazitih predstavnika. Smislite primjer s pet različitih skupova koji nemaju sustav izrazitih predstavnika.*

Rješenje: *$S_1 = \{1,2,3\}$, $S_2 = \{1,2,4\}$, $S_3 = \{1,3,4\}$, $S_4 = \{2,3,4\}$, $S_5 = \{1,2,3,4\}$ nemaju sustav izrazitih predstavnika, jer ne ispunjavaju Hallov uvjet za $I = \{1,2,3,4,5\}$.*

Zadatak 1.52. *Koliko različitih sustava izrazitih predstavnika imaju skupovi $S_1 = \{1,3\}$, $S_2 = \{1,8\}$, $S_3 = \{3,8\}$? Navedite ih!*

Rješenje: *imaju dva različita sustava izrazitih predstavnika: $1,8,3$ i $3,1,8$.*

Zadatak 1.53. *Neka je $S_1, S_2, \ldots, S_m$ niz skupova takvih da*

(i) svaki skup sadrži barem r elemenata, $r > 0$,

(ii) ni jedan element nije u više od r ovih skupova.

Pokažite da $S_1, S_2, \ldots, S_m$ imaju sustav izrazitih predstavnika.

Rješenje: *kao u dokazu korolara 1.8, pretpostavimo da $S_1, S_2, \ldots, S_m$ nemaju sustav izrazitih predstavnika. Po Hallovom teoremu unija $Y = S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \cdots \cup S_{i_k}$ nekih k $(1 \leq k \leq m)$ skupova sadrži manje od k elemenata. Za $x \in Y$ neka je d_x broj ovih skupova koji sadrže x. Koristeći načelo dvostrukog prebrojavanja i uvjete iz zadatka $\left|S_{i_j}\right| \geq r$, $d_x \leq r$ dobivamo kontradikciju:*

$$rk \leq \sum_{j=1}^{k} \left|S_{i_j}\right| = \sum_{x \in Y} d_x \leq \sum_{x \in Y} r = r\,|Y| < rk,$$

pa je polazna pretpostavka netočna, slijedi da $S_1, S_2, \ldots, S_m$ imaju sustav izrazitih predstavnika.

Zadatak 1.54. *Dokažite da u grupi od m djevojaka i n mladića postoji nekih t djevojaka koje se mogu udati ako i samo ako bilo koji k-podskup djevojaka od njih poznaje barem $k+t-m$ mladića.*

Rješenje: *Zamislimo novu situaciju: da se ovim mladićima pridružilo još novih $m-t$ mladića koje poznaju sve djevojke. Dokažimo da vrijedi: u grupi od m djevojaka i n mladića postoji bar t djevojaka koje se mogu udati u originalnoj situaciji (iz uvjeta zadatka) onda i samo onda ako se svih m djevojaka može udati u novoj situaciji s $n+m-t$ mladića.*

Ako se u originalnoj situaciji od m djevojaka može njih t udati, ostalih $m-t$ se može udati za novih $m-t$ mladića koje poznaju sve djevojke.

Obratno, ako se sve djevojke mogu udati u novoj situaciji i izdvojimo one koje bi se udale za $m-t$ mladića koje sve djevojke poznaju, znači preostalih t se može udati za mladiće iz originalne situacije.

Primijenimo sada Hallov teorem na novu situaciju: neka je S_i skup svih mladića koje poznaje i-ta djevojka. Kako je $|S_i| \geq m-t$ vrijedi

$$\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| \geq |I| \quad \text{za } I \text{ takve da je } |I| \leq m-t.$$

Treba još provjeriti uvjet za I takve da je $|I| > m-t$, prema uvjetima zadatka za $k=|I|$ vrijedi:

$$\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| \geq (m-t)+k+t-m = k = |I|\,.$$

Hallov uvjet je ispunjen, pa po Hallovom teoremu svih m djevojaka može udati (u novoj situaciji, pa zbog toga i u staroj).

Zadatak 1.55. *Neka je $S_1, S_2, \ldots, S_m$ niz skupova koji ispunjava Hallov uvjet (1.10). Pretpostavimo da za neki k, $1 \leq k < m$ unija $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$, prvih k skupova ima točno k elemenata. Pokažite da ni jedan od preostalih skupova $S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_m$ ne može biti potpuno sadržan u uniji $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$.*

Rješenje: *Pretpostavimo da za neki k, $1 \leq k < m$ unija $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$, prvih k skupova ima točno k elemenata. Ako bi neki od preostalih skupova $S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_m$, označimo ga sa X, bio potpuno sadržan u uniji $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$ onda bi imali $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k \cup X$ uniju od $k+1$ ovih skupova s točno k elemenata. Ovo je u kontradikciji s uvjetom iz zadatka da $S_1, S_2, \ldots, S_m$ ispunjavaju Hallov uvjet.*

Zadatak 1.56. * *Neka je $S_1, S_2, \ldots, S_m$ niz skupova od kojih svaki ima barem r elemenata i koji imaju sustav izrazitih predstavnika. Dokažite da on ima barem*

$$f(r,m) = \prod_{i=1}^{\min\{r,m\}} (r+1-i)$$

različitih sustava izrazitih predstavnika.

Rješenje: *Razlikujući slučajeve kao u dokazu Hallovog teorema:*

-za *prvi slučaj* kada za svaki k, $1 \leq k < m$, unija od bilo kojih k skupova sadrži više od k elemenata imamo barem $r \cdot f(r-1, m-1) \geq f(r, m)$ različitih sustava izrazitih predstavnika (strogu nejednakost imamo za $r > m$),

-za *drugi slučaj* kada unija nekih k skupova, $1 \leq k < m$, sadrži točno k elemenata imamo barem $f(r, k) \cdot f(\max\{r-k, 1\}, m-k) = f(r, m)$ različitih sustava izrazitih predstavnika.

1.4.2. Primjena za latinske pravokutnike

Latinski pravokutnik $\mathbf{r \times n}$ je matrica tipa $r \times n$ s elementima iz $\{1, 2, \ldots, n\}$ tako da se svaki od brojeva $1, 2, \ldots, n$ pojavljuje točno jednom u svakom retku i najviše jednom u svakom stupcu.

1	2	3	4	5
2	3	5	1	4
3	5	4	2	1

Latinski kvadrat je latinski pravokutnik za kojeg je $r = n$. Latinski kvadrati su jedan od najstarijih kombinatornih objekata.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

2	4	3	1
3	1	2	4
4	2	1	3
1	3	4	2

1	2	3	4	5
2	3	5	1	4
3	5	4	2	1
4	1	2	5	3
5	4	1	3	2

Zamislimo da imamo $n \times n$ matricu čiji su neki elementi popunjeni brojevima iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ tako da se nijedan broj ne pojavljuje više od jednom u bilo kojem retku ili stupcu. Je li moguće ovu matricu nadopuniti do latinskog kvadrata? Jednostavan sljedeći primjer pokazuje da to nije uvijek moguće.

1	5	2	4	
				3

1			
	1		
		1	
			2

Travor Evans je 1960. godine postavio problem: ako je u $n \times n$ matricu upisano manje od n elemenata (tako da se nijedan broj ne pojavljuje više od jednom u bilo kojem retku ili stupcu), može li se ona nadopuniti do latinskog kvadrata? Evansovu hipotezu da se ovakva matrica može nadopuniti do latinskog kvadrata dokazao je Smetaniuk 1981. godine.

S druge strane, već se dugo zna da ako parcijalno popunjeni latinski kvadrat nema parcijalno popunjenih redaka, onda uvijek može biti nadopunjen do latinskog kvadrata dodavanjem jednog po jednog retka. To se lagano dokazuje Hallovim teoremom.

Teorem 1.26. ***(Ryser 1951.)*** *Ako je $r < n$, onda se bilo koji latinski pravokutnik $r \times n$ može nadopuniti do latinskog pravokutnika $(r+1) \times n$.*

Dokaz. Neka je R latinski pravokutnik $r \times n$. Za $j = 1, \dots, n$ definirajmo S_j skup brojeva $1, 2, \dots, n$ koji ne pripadaju j-tom stupcu od R. Sada je dovoljno dokazati da skupovi $S_1, S_2, \dots, S_n$ imaju sustav izrazitih predstavnika. Kako svaki skup S_j ima točno $n - r$ elemenata, a svaki element je u točno r stupaca, pa pripada istom broju $n - r$ skupova $S_1, S_2, \dots, S_n$, prema korolaru 1.8 skupovi $S_1, S_2, \dots, S_n$ imaju sustav izrazitih predstavnika. ■

Zadatak 1.57. *U teoremu 1.26. smo pokazali da se za $r < n$ bilo kojem latinskom pravokutniku $r \times n$ može nadodati redak tako da dobijemo latinski pravokutnik $(r + 1) \times n$. Dokažite da se to može učiniti na barem $(n - r)!$ načina.*

Rješenje: *Prvo mjesto u $(r + 1)$. retku može se nadopuniti na $(n - r)$ načina Nakon toga, drugo mjesto u $(r+1)$. retku se može nadopuniti na $(n - r)$ ili $(n - r - 1)$ načina ovisno nalazi li se ili ne u drugom stupcu element koji je izabran za prvo mjesto; znači najmanje $(n - r - 1)$ načina. Treće mjesto u $(r + 1)$. retku se može nadopuniti na $(n - r)$ ili $(n - r - 1)$ ili $(n - r - 2)$ načina ovisno nalaze li se ili ne u trećem stupcu elementi koji su izabrani za prvo i drugo mjesto; to je najmanje $(n - r - 2)$ načina, itd. Zaključak: imamo barem $(n - r)!$ načina za nadopunu $(r + 1)$. retka.*

Zadatak 1.58. *Permutacijom redaka ili permutacijom stupaca latinskog kvadrata opet se dobiva (novi) latinski kvadrat. Obrazložite zašto!*

Rješenje: *Permutacijom redaka ili stupaca latinskog kvadrata opet se dobiva latinski kvadrat, jer se nakon permutiranja svaki od brojeva $1, 2, \dots, n$ opet pojavljuje točno jednom u svakom retku i svakom stupcu.*

Zadatak 1.59. *Latinski kvadrat kojemu su elementi prvog retka i prvog stupca poredani zove se* ***reducirani latinski kvadrat*** *(latinski kvadrat 3×3 i 5×5 iz primjera na početku ovog poglavlja). Ako je $N(n)$ broj svih latinskih kvadrata $n \times n$, a $L(n)$ broj reduciranih latinskih kvadrata $n \times n$ onda je*

$$N(n) = n!\,(n - 1)!L(n)$$

Dokažite!

Rješenje: *Prvi redak reduciranog latinskog kvadrata možemo ispermutirati na $n!$ načina, a potom još sve osim prvog elementa prvog stupca na $(n - 1)!$. Na ovaj način iz reduciranog kvadrata možemo postići bilo kakav željeni raspored elemenata u prvom retku i prvom stupcu. Zato vrijedi $N(n) = n!\,(n - 1)!L(n)$.*

Zadatak 1.60. *Uvjerite se da postoji samo jedan reducirani latinski kvadrat 3×3. Postoje 4 reducirana latinska kvadrata reda 4. Napišite ih!*

Rješenje: *Nakon popunjavanja prvog retka i stupca, preostala 4 mjesta se mogu nadopuniti na jedan jedini način: 3, 1, 1, 2. Reducirani latinski kvadarati reda 4 su*

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

Primjedba 1.11. *Ne postoji jednostavna formula za $L(n)$ broj reduciranih latinskih kvadrata $n \times n$. Rezultat za donju i gornju ogradu za ovaj broj dali su Lint i Wilson (više u [3])*

$$\frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}} \leq L(n) \leq \prod_{k=1}^{n} (k!)^{n/k}.$$

Navedimo za kraj i natpis na latinskom prvi put pronađen u iskopinama Pompeja, koji se može čitati u 4 različita smjera:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
 & \multicolumn{1}{c}{\rightarrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \\
\cline{2-6}
\downarrow & S & A & T & O & R & \\
\cline{2-6}
 & A & R & E & P & O & \\
\cline{2-6}
 & T & E & N & E & T & \\
\cline{2-6}
 & O & P & E & R & A & \\
\cline{2-6}
 & R & O & T & A & S & \uparrow \\
\cline{2-6}
 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\leftarrow} &
\end{array}$$

1.4.3. Primjena za dvostruko stohastičke matrice*

Osnovni rezultat poliedarske kombinatorike kojeg su dokazali Birkhof 1949. godine i nezavisno von Neumann 1953. može se dokazati Hallovim teoremom.

Definicija 1.18. *Kvadratna matrica reda $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $i, j = 1, \ldots, n$ s realnim nenegativnim elementima $a_{ij} \geq 0$ je* ***dvostruko stohastička matrica*** *(ili* ***bistohastička****) ako joj je zbroj bilo kojeg retka i zbroj bilo kojeg stupca jednak 1.* ***Permutacijska matrica*** *je dvostruko stohastička matrica s elementima 0 i 1.*

Permutacijska matrica u svakom retku i svakom stupcu ima točno jednu jedinicu. Dvostruko stohastičke matrice se javljaju u teoriji Markovljevih lanaca, gdje je a_{ij} je vjerojatnost prelaska sustava iz stanja i u stanje j.

Teorem 1.27. ***(Birkhoff-Von Neumannov teorem)*** *Svaka dvostruko stohastička matrica $\mathbf{A}$ je konveksna kombinacija permutacijaskih matrica, tj.*

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathbf{P}_i$$

gdje su $\mathbf{P}_i$, $i = 1, \ldots, s$ permutacijske matrice, a $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, s$ nenegativni realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po broju pozitivnih elemenata matrice $\mathbf{A}$. Ako je točno n pozitivnih elemenata u matrici $\mathbf{A}$ onda je $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ za neku permutacijsku matricu $\mathbf{P}$. Pretpostavimo sada da matrica $\mathbf{A}$ ima točno m, $(m > n)$ pozitivnih elemenata i da tvrdnja teorema vrijedi za sve matrice s manje od m pozitivnih elemenata. Definirajmo

$$S_i = \{j : a_{ij} > 0\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Skupovi $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ispunjavaju uvjete Hallovog teorema: ako bi unija nekih k $(1 \leq k \leq n)$ od ovih skupova imala manje od k elemenata, onda bi svi pozitivni elementi iz odgovarajućih k redaka zauzimali manje od k stupaca pa bi suma ovih elemenata po retcima bila k, a po stupcima manja od k, što je kontradikcija.

Prema Hallovom teoremu $S_1, S_2, \ldots, S_n$ imaju sustav izrazitih predstavnika

$$j_1 \in S_1, j_2 \in S_2 \ldots, j_n \in S_n.$$

Definirajmo permutacijsku matricu $\mathbf{P}_1$ sa elemntima $p_{ij} = 1$ ako i samo ako je $j = j_i$. Neka je $\lambda_1 = \min \{a_{1j_1}, \ldots, a_{nj_n}\}$, i pogledajmo matricu $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{P}_1$. Po definiciji skupova S_i, mora biti $\lambda_1 > 0$ i matrica $\mathbf{A}_1$ ima manje pozitivnih elemenata od matrice $\mathbf{A}$. Zato matrica $(1 - \lambda_1)^{-1} \mathbf{A}_1$ zadovoljava uvjete teorema, pa je po pretpostavci indukcije

$$(1 - \lambda_1)^{-1} \mathbf{A}_1 = \alpha_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \alpha_s \mathbf{P}_s, \qquad \sum_{i=2}^{s} \alpha_i = 1$$

Stavljajući $\lambda_i = (1 - \lambda_1)\, \alpha_i, \;\; i = 2, \ldots, s$ imamo prikaz

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathbf{P}_i$$

pri čemu je $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = \lambda_1 + (1 - \lambda_1) \left(\sum_{i=2}^{s} \alpha_i\right) = 1$ i teorem je dokazan. ■

1.4.4. Min-maks teoremi*

U min-maks teoremima u kombinatorici minimum broja jednog skupa objekata jednak je maksimumu broja drugog. Uzmimo za primjer:

•**König-Egerváryjev min-max teorem**, broj bridova u maksimalnom sparivanju u bipartitnom grafu jednak je broju vrhova u minimalnom pokrivaču.

•**Dilworthov teorem za parcijalno uređene skupove**, minimalni broj lanaca koji čine particiju parcijalno uređenog skupa jednak je broju elemenata u maksimalnom antilanacu.

Dokaz Dilworthovog teorema ćemo dati u poglavlju 2.3. "Parcijalno uređeni skupovi, lanci i antilanci", a sada ćemo dokazati König-Egerváryjev min-max teorem, ali iskazan na drugi način, pomoću matrice susjedstva za bipartitne grafove.

Hallov teorem nam kaže može li se svaka od djevojaka udati za nekog mladića kojeg poznaje. Ako može, svi su sretni (osim mladića koji nisu izabrani). No, što ako ne može? Tada bi bilo dobro da sretnih brakova bude što više je moguće. Odnosno za dane skupove $S_1, S_2, \ldots, S_m$ pokušavamo naći sustav izrazitih predstavnika $x_i \in S_i$ za što je moguće veći broj skupova S_i. Problem ćemo riješiti u terminima 0-1 matrica.

Definicija 1.19. *Neka je* $\mathbf{A}$ *matrica tipa* $m \times n$ *s elementima* 0 *ili* 1. *Za dvije jedinice u matrici kažemo da su* ***zavisne*** *ako su u istom retku ili istom stupcu. Inače su* ***nezavisne****.*

Teorem 1.28. ***(König 1931., Egerváry 1931.)*** *Neka je* $\mathbf{A}$ 0-1 *matrica tipa* $m \times n$. *Maksimalni broj nezavisnih jedinica jednak je minimalnom broju redaka i stupaca koji sadrže sve jedinice u matrici* $\mathbf{A}$.

Dokaz. Označimo s r maksimalni broj nezavisnih jedinica, s R minimalni broj redaka i stupaca koji sadrže sve jedinice u matrici $\mathbf{A}$. Očito je $R \geq r$, jer svaki redak ili stupac sadrži najviše jednu nezavisnu jedinicu. Želimo pokazati i obratnu nejednakost $R \leq r$. Pretpostavimo da nekih a redaka i b stupaca sadrži sve jedinice i $a+b = R$. Permutiranje redaka i stupaca ne mijenja r ni R pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti i da su to prvih a redaka i prvih b stupaca. Zapišimo matricu $\mathbf{A}$ u obliku blok matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{a\times b} & \mathbf{C}_{a\times(n-b)} \\ \mathbf{D}_{(m-a)\times b} & \mathbf{E}_{(m-a)\times(n-b)} \end{bmatrix}.$$

U matrici $\mathbf{E}$ nema jedinica, a pokazati ćemo da u matrici $\mathbf{C}$ ima točno a nezavisnih jedinica. Neka je

$$S_i = \{j : c_{ij} = 1\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n-b\}, \quad i = 1, \ldots, a,$$

skup mjesta svih jedinica u i-to retku matrice $\mathbf{C} = (c_{ij})$. Niz $S_1, S_2, \ldots, S_a$ ima sustav izrazitih predstavnika, jer inače po Hallovom teoremu bi se jedinice iz nekih k redaka ($1 \leq k \leq a$) nalazile u manje od k stupaca pa bi sve jedinice bile sadržane u manje od $a+b$ redaka i stupaca, što je kontradikcija.

Zbog simetrije isto tako u matrici $\mathbf{D}$ ima točno b nezavisnih jedinica. Kako je zajedno ovih $a+b$ jedinica nezavisno, imamo da je $r \geq a + b = R$ što smo i htjeli pokazati. ∎

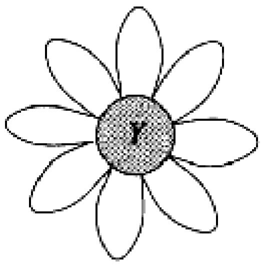
Poglavlje 2.

Ekstremalna teorija skupova

2.1. Suncokreti

Jedan od najljepših rezultata u ekstremalnoj teoriji skupova je "*Suncokretova lema*" koju su dali Erdős i Rado 1960. godine (prisjetite se problema 5. iz uvoda). Tvrdnja ove leme je da bez obzira na veličinu univerzalnog skupa, u dovoljno velikoj uniformnoj familiji poskupova će se uvijek pojaviti pravilne strukture koje se nazivaju "*suncokreti*". U ovom poglavlju baviti ćemo se ovim rezultatom, nekim njegovim modifikacijama i primjenama u teoriji kompleksnosti.

2.1.1. Suncokretova lema



Definicija 2.1. ***Suncokret*** *(ili* $\boldsymbol{\Delta}$***-sustav****) s k* ***latica*** *i* ***jezgrom*** *je konačan niz skupova $S_1, S_2, \ldots, S_k$ takvih da je $S_i \cap S_j = Y$ i za sve $i \neq j$ i $S_i \setminus Y \neq \emptyset$ za sve $i = 1, \ldots, k$. Skupovi $S_i \setminus Y$ nazivaju se* ***latice****, a Y* ***jezgra****.*

Primjetimo da je par disjunktnih skupova također suncokret, s dvije latice i praznom jezgrom.

Lema 2.1. ***(Suncokretova lema)*** *Neka je $\mathcal{F}$ familija s-članih skupova. Ako je*

$$|\mathcal{F}| > s!\,(k-1)^s$$

onda $\mathcal{F}$ sadrži suncokret s k latica.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po s. Za $s = 1$ je $|\mathcal{F}| > k-1$ pa imamo barem k disjunktnih jednočlanih skupova i bilo kojih k od njih čine suncokret (s praznom jezgrom). Za $s \geq 2$ neka je $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$ maksimalna familija međusobno disjunktnih članova od $\mathcal{F}$.

Ako je $t \geq k$, ovi skupovi čine suncokret sa t latica (i praznom jezgrom) pa onda $\mathcal{F}$ sadrži i suncokret s k latica.

Ako je $t \leq k-1$ uzmimo neka je $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t$. Vrijedi

$$|B| = st \leq s\,(k-1)\,.$$

Zbog maksimalnosti familije $\mathcal{A}$ skup B ima neprazan presjek sa svakim članom familije $\mathcal{F}$. Po Dirichletovom načelu neki $x \in B$ mora biti sadržan u barem

$$\frac{|\mathcal{F}|}{|B|} > \frac{s!\,(k-1)^s}{s\,(k-1)} = (s-1)!\,(k-1)^{s-1}$$

članova od $\mathcal{F}$. Izbrišimo x iz ovih skupova i pogledajmo familiju

$$\mathcal{F}_x = \{S \setminus \{x\} : S \in \mathcal{F},\, x \in S\}\,.$$

Kako je $|\mathcal{F}_x| > (s-1)!\,(k-1)^{s-1}$ prema pretpostavci indukcije ova familija sadrži suncokret s k latica. Dodavajući x skupovima koji čine ovaj suncokret dobivamo suncokret u familiji $\mathcal{F}$. ■

Još uvijek nije poznato je li ograda $s!\,(k-1)^s$ najbolja moguća. Neka $f\,(s,k)$ označava najmanji prirodan broj za koji vrijedi da bilo koja s-uniformna familija od $f\,(s,k)$ skupova sadrži suncokret s k latica. Tada je

$$(k-1)^s < f\,(s,k) \leq s!\,(k-1)^s + 1 \tag{2.1}$$

Gornja ograda je iz suncokretove leme, donja iz zadatka 2.2. Razlika između ograda je dosta velika (kvocijent je veći od $s!$).

Hipoteza (Erdős i Rado) *Za svaki fiksni* k postoji konstanta $C = C\,(k)$ takva da je $f\,(s,k) < C^s$.

Ova hipoteza je i danas otvorena čak i za $k = 3$ (za $k = 3$ suncokretova lema zahtijeva barem $s!2^s \approx s^s$ skupova). Nekoliko autora je uspjelo dobiti mala poboljšanja za gornju ogradu u (2.1), ali dokaza ili pobijanja Erdős-Rado hipoteze još nema na vidiku.

Definicija 2.2. *Familija* $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ *zove se* ***slabi* $\boldsymbol{\Delta}$*-sustav*** *ako postoji neki* λ *takav da je* $|S_i \cap S_j| = \lambda$ *kad god je* $i \neq j$.

Jasno je da svaki slabi Δ-sustav nije i Δ-sustav, kod slabog Δ-sustava kardinalni broj presjeka svaka dva različita skupa S_i i S_j može biti λ, a da svi ti presjeci nemaju iste elemente. Sljedeći interesantan rezultat tvrdi da ako slabi Δ-sustav ima dovoljno mnogo članova, onda je suncokret. Ovdje ga navodimo bez dokaza.

Teorem 2.1. ***(Deza 1973.)*** *Neka je $\mathcal{F}$ s-uniformni slabi Δ-sustav. Ako je*

$$|\mathcal{F}| \geq s^2 - s + 2$$

onda je $\mathcal{F}$ suncokret.

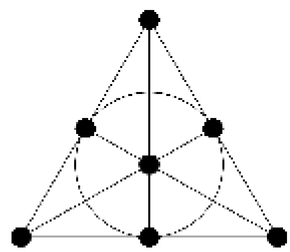
Primjer familije pravaca projektivne ravnine reda $s-1$ pokazuje da je ova ograda optimalna (vidite zadatak 2.1).

S ovim u vezi je pitanje je odrediti najveći mogući broj $F(n,k)$ članova familije $\mathcal{F}$ podskupova n-članog skupa takve da $\mathcal{F}$ ne sadrži slabi Δ-sustav s k članova. Poznato je da vrijedi

$$2^{0.01(n \ln n)^{1/3}} \leq F(n,k) \leq 1.99^n.$$

Gornju granicu su dokazali Frankl and Rődl 1987. godine, a gornju Kostocha i Rődl 1998. godine.

Definicija 2.3. ***Projektivna ravnina reda*** *$s-1$ je familija od $n = s^2 - s + 1$ s-članih podskupova koje zovemo* ***pravci****, tako da se svaka dva pravca sijeku u točno jednoj točki, a svaka od n točka leži (pripada) na točno s pravaca.*



Za projektivnu ravninu reda 2 (engl. the Fano plane) prikazanu na slici, vrijedi $n = 7$, $s = 3$. Imamo 7 točaka: $0,1,2,3,4,5,6$; i 7 pravaca od kojih svaki ima 3 točke: $\{0,1,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{3,4,6\}$, $\{4,5,0\}$, $\{5,6,1\}$, $\{6,0,2\}$. Označite točke na slici! Primjerice na bazi neka su $0,1,3$, na lijevom kraku $0,5,4$, na desnom kraku $3,6,4$, u centru 2. Očito se svaka dva pravca sijeku u točno jednoj točki, a svaka točka leži na točno 3 pravaca. Osim toga svake dvije točke leže točno na jednom pravcu.

Kako smo konstruirali pravce? Počevši od prvog pravca $\{0,1,3\}$ sljedeći smo dobili dodavanjem (zbrajanjem modulo 7) jedinice svim točkama. Ovakva konstrukcija ne vrijedi za bilo kakav početni pravac, već samo za tzv. diferencijski skup. Skup

$\{0,1,3\}$ je diferencijski skup jer se među $3\cdot 2 = 6$ mogućih razlika njegovih elemenata pojavljuju svi brojevi od 1 do 6. Pri tome se računa modulo 7:

$$\begin{aligned}
&1 - 0 = 1,\\
&3 - 1 = 2,\\
&3 - 0 = 3,\\
&0 - 3 = -3 \equiv 4 \pmod 7,\\
&1 - 3 = -2 \equiv 5 \pmod 7,\\
&0 - 1 = -1 \equiv 6 \pmod 7.
\end{aligned}$$

Uvjerite se da je $\{0,1,3,9\}$ također diferencijski skup (među $4 \cdot 3 = 12$ mogućih razlika njegovih elemenata pojavljuju svi brojevi od 1 do 12). Zato njime kao u prethodnom primjeru možemo izgenerirati elemente projektivne ravnine reda 3 zbrajajući jedinicu modulo 13 (imamo 13 točaka: $0, 1, \ldots, 12$, i 13 pravaca od kojih svaki ima 4 točke, svaka dva prvaca sijeku se u jednoj točki, svaka točka leži na 4 pravca).

Općenito, projekivna ravnina reda $s-1$ postoji ako je $s-1$ potencija prostog broja. Jedine do sada poznate projektivne ravnine su one čiji je red potencija prostog broja.

Bruck-Ryserov teorem tvrdi ako je $s - 1 \equiv 1 \pmod 4$ ili $s - 1 \equiv 2 \pmod 4$ i ako postoji projektivna ravnina reda $s-1$ onda je $s-1$ zbroj kvadrata dva cijela broja. Zbog toga ne postoje projektivne ravnine reda 6, 14, 21, 22. Složenim računom upotrebom računala dokazano je i da ne postoji projektivna ravnina reda 10. Pitanje egzistencije projektivne ravnine reda 12 je još uvjek otvoreno.

Zadatak 2.1. *Dokažite da je granica u nejednakosti iz tvrdnje Dezinog teorema 2.1. optimalna, primjerom projektivne ravnine reda $s-1$ (kada ona postoji).*

Rješenje: *Granica $s^2 - s + 2$ se ne može smanjiti, jer tvrdnja ne vrijedi za projektivnu ravninu reda $s-1$ koja ima točno $s^2 - s + 1$ pravaca koji su s-člani podskupovi. Pogledajmo projektivnu ravninu reda 2. Lako se vidi da skupovi $\{0,1,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{3,4,6\}$, $\{4,5,0\}$, $\{5,6,1\}$, $\{6,0,2\}$ po dva međusobno imaju u presjeku jedan element, međutim nemaju svi zajednički presjek. Ova struktura je zato 3-uniformni slabi Δ-sustav, ali nije suncokret.*

Zadatak 2.2. *Neka su $V_1, \ldots, V_s$ u parovima disjunktni $(k-1)$-člani skupovi, i neka je familija*

$$\mathcal{F} = \{S : |S| = s, \quad |S \cap V_i| = 1 \text{ za sve } i = 1, \ldots, s\}.$$

Ova familija ima $(k-1)^s$ skupova. Pokažite da ne sadrži suncokret s k latica.

Rješenje: *Pretpostavimo suprotno, $\mathcal{F}$ sadrži suncokret s k latica. U familiji $\mathcal{F}$ su skupovi koji sadrže točno po jedan element iz svakog od disjunktnih V_i, $i = 1, \ldots, s$. Zato ih i ima $(k-1)^s$. U skupu V_1 imamo $k-1$ elemenata pa neka dva skupa iz suncokreta s k latica sigurno sadrže isti element iz V_1. Taj element zato mora biti u jezgri (latice su disjunktne), pa zato i u svim skupovima iz suncokreta. Isti zaključak vrijedi i za ostale skupove $V_2, \ldots, V_s$. Dakle, svih s elemenata skupa iz takvog suncokreta su u jezgri i latice su prazne. Kontradikcija!.*

Zadatak 2.3. ***Sparivanje*** *(engl. matching) veličine k u grafu je skup od k njegovih bridova, tako da nikoja dva brida nemaju zajednički vrh.* ***Zvijezda*** *(engl. star) veličine k u grafu je skup od k njegovih bridova koji su incidentni s jednim vrhom. Dokažite da u grafu s više od $2\,(k-1)^2$ bridova postoji ili sparivanje veličine k ili zvijezda veličine k.*

Rješenje: *Bridovi su dvočlani podskupovi skupa vrhova pa primjenimo suncokretovu lemu za $s = 2$. Kako imamo više od $s!\,(k-1)^s = 2\,(k-1)^2$ bridova u skupu bridova je suncokret s k latica. Ako je to suncokret s praznom jezgrom, riječ je o sparivanju veličine k (jer nikoja dva od k njegovih bridova nemaju presjek-zajednički vrh), a ukoliko je u jezgri jedan element (vrh v) riječ je o zvijezdi veličine k (vrh v je zajednički za svih k bridova). Jezgra ne može sadržavati dva elementa, jer bi u tom slučaju latice bile prazne.*

Zadatak 2.4. *Neka je $n - k + 1 < s \leq n$ i razmotrite familiju $\mathcal{F}$ svih s-članih podskupova n-članog skupa. Dokažite da $\mathcal{F}$ ne sadrži suncokret s k latica.*

Rješenje: *Pretpostavimo suprotno i prebrojite elemente u takvom suncokretu. Neka je jezgra ima y elemenata. Onda suncokret ima:*

$$\begin{aligned} k\,(s-y) + y = ks - (k-1)\,y &> k\,(n-k+1) - (k-1)\,y \\ &= nk - (k+y)\,(k-1)\,. \end{aligned}$$

Ovo je nemoguće jer je taj broj veći od n:

$$nk - (k+y)\,(k-1) \geq n \;\Leftrightarrow\; n\,(k-1) \geq (k+y)\,(k-1) \;\;\Leftrightarrow\;\; n \geq k+y.$$

Nejednakost $n \geq k + y$ je ispunjena jer latice moraju imati najmanje po jedan element.

Zadatak 2.5. **Za dani graf $G = (V, E)$ i broj $2 \leq s \leq |V|$ neka G^s označava novi graf čiji su vrhovi svi s-člani podskupovi od V, a dva takva podskupa A i B su spojeni bridom ako i samo ako postoji brid $\{u, v\} \in E$ takav da je $u \in A \setminus B$ i $v \in B \setminus A$. Pretpostavimo da je graf G "rijedak" u sljedećem smislu: svaki podskup od najviše sk vrhova razapinje manje od $\binom{k}{2}$ bridova. Dokažite da G^s ne sadrži kliku s više od $s!\,(k-1)^s$ vrhova.*

Ideja: koristite rezultat suncokretove leme.

2.1.2. Oslabljen uvjet za jezgru suncokreta*

Zbog svoje važnosti suncokretova lema je modificirana na različite načine. Suncokret ima sljedeća svojstva:

(i) jezgra Y ($Y = S_i \cap S_j$, za sve $i \neq j$) je pravi podskup svakog od skupova $S_1, S_2, \ldots, S_k$;

(ii) skupovi $S_i \setminus Y$, $i = 1, \ldots, k$ su međusobno disjunktni.

Prva mogućnost za modifikaciju je izmjena uvjeta (i), uvjet za jezgru možemo oslabiti zahtjevajući samo da su za neki skup Y razlike $S_i \setminus Y$, $i = 1, \ldots, k$ neprazne i međusobno disjunktne.

Zajednički dio familije $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ je skup

$$Y(\mathcal{F}) = \bigcup_{i \neq j} (S_i \cap S_j).$$

Primijetimo, ako je $\mathcal{F}$ s-uniformna familija i ako njen zajednički dio ima manje od s elemenata, onda su skupovi $S_i \setminus Y$, $i = 1, \dots, k$ međusobno disjunktni.

Lema 2.2. ***(Füredi 1980.)*** *Neka je $\mathcal{F}$ familija skupova od kojih svaki ima najviše s elemenata. Ako je $|\mathcal{F}| > k^s$ onda zajednički dio nekih $k+1$ članova ove familije ima manje od s elemenata.*

Dokaz. Slučajevi $k = 1$ i $s = 1$ su trivijalni. Primijenimo prvo matematičku indukciju po k i nakon što smo fiksirali k, primijenimo indukciju po s. Možemo retpostaviti da $\mathcal{F}$ ima barem jedan skup sa točno s elemenata. Neka je to $B_0 \in \mathcal{F}$, definirajmo

$$\mathcal{F}(B) = \{S \setminus B : S \in \mathcal{F}, S \cap B_0 = B\}, \text{ za sve } B \subseteq B_0.$$

Tvrdimo da je

$$|\mathcal{F}(B)| > (k-1)^{s-|B|}$$

za svaki pravi podskup $B \subseteq B_0$, a za $B = B_0$ je $|\mathcal{F}(B_0)| = |\emptyset| = 1$. U suprotnom bi imali

$$|\mathcal{F}| = \sum_{B \subseteq B_0} |\mathcal{F}(B)| = \sum_{i=0}^{s} \sum_{\substack{B \subseteq B_0 \\ |B|=i}} |\mathcal{F}(B)| \leq \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} (k-1)^{s-i} = k^s,$$

što je kontradikcija s $|\mathcal{F}| > k^s$.

Fiksirajmo jedan takav skup B i primijenimo pretpostavku indukcije na $\mathcal{F}(B)$. Tako dobijemo familiju $S_1 \setminus B, S_2 \setminus B, \dots, S_k \setminus B$ gdje su $S_i \in \mathcal{F}$ i čiji zajednički dio ima manje od $s - |B|$ elemenata. Dodajmo skup B natrag svim ovim skupovima i pogledajmo familiju $S_1, S_2, \dots, S_k, B_0$. Svi oni pripadaju $\mathcal{F}$ i njihov zajednički dio ima manje od $|Y| + |B| < (s - |B|) + |B| = s$ elemenata, kao što smo i željeli dobiti.

■

2.1.3. Oslabljen uvjet za razdvojenost latica*

Druga mogućnost za izmjenu uvjeta suncokretove leme je izmjena uvjeta (ii). Uvjet za razdvojenost možemo oslabiti zahtjevajući samo da sve razlike $S_1 \setminus Y$, $S_2 \setminus Y$,..., $S_k \setminus Y$ ne mogu imati presjek sa skupom s manje od k elemenata (kažemo da ne mogu biti blokirani skupom s manje od k elemenata). U ovom slučaju $S_1, S_2, \dots, S_k$ zovemo **cvijet**.

Definicija 2.4. ***Blokirajući skup*** *familije $\mathcal{F}$ je skup koji ima neprazan presjek sa svim članovima familije $\mathcal{F}$. Najmanji kardinalni broj blokirajućeg skupa se zove* ***blokirajući broj*** *i označava se s $\tau(\mathcal{F})$. Ako je $\emptyset \in \mathcal{F}$ tada stavljamo $\tau(\mathcal{F}) = 0$.*

Restrikcija *familije $\mathcal{F}$ na skup Y je familija*

$$\mathcal{F}_Y = \{S \setminus Y : S \in \mathcal{F}, S \supseteq Y\}.$$

Cvijet *s k latica i* ***jezgrom*** *Y je familija $\mathcal{F}$ takva da je $\tau(\mathcal{F}_Y) \geq k$.*

Nije svaki cvijet suncokret. Håstad i dr. su 1995. godine vidjeli da se dokaz suncokretove leme može modificirati do sličnog rezultata koji umjesto za suncokrete vrijedi za cvijeće.

Lema 2.3. *Neka je $\mathcal{F}$ familija s-članih skupova. Ako je $|\mathcal{F}| > (k-1)^s$ onda $\mathcal{F}$ sadrži cvijet s k latica.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po s. Za $s = 1$ tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $s-1$. Uzmimo neka je $\mathcal{F}$ familija skupova od kojih svaki ima s elemenata i $|\mathcal{F}| > (k-1)^s$. Ako je $\tau(\mathcal{F}) \geq k$ onda je $\mathcal{F}$ cvijet s barem $(k-1)^s + 1 \geq k$ latica (i praznom jezgrom). Ako je $\tau(\mathcal{F}) < k$ neki skup s $k-1$ elemenata ima neprazan presjek sa svim članovima od $\mathcal{F}$ i zato barem $|\mathcal{F}| / (k-1)$ članova sadrži neki element x. Familija $\mathcal{F}_x = \{S \setminus \{x\} : S \in \mathcal{F}, x \in S\}$ ima

$$|\mathcal{F}_x| \geq \frac{|\mathcal{F}|}{k-1} > (k-1)^{s-1}$$

članova s $s-1$ elemenata. Po pretpostavci indukcije familija $\mathcal{F}_x$ sadrži cvijet s k latica i jezgrom Y, $x \notin Y$. Dodavanjem elementa x natrag u skupove cvijeta dobivamo cvijet u $\mathcal{F}$ s k latica i jezgrom $Y \cup \{x\}$. ■

Zadatak 2.6. *Pokažite da su granice iz nejednakosti leme 2.2 i leme 2.3 optimalne.*

Ideja: razmotrite familiju iz zadatka 2.2.

Zadatak 2.7. ****(Andreev 1987.)*** *Neka je $\mathcal{F}$ familija skupova od kojih svaki ima najviše s elemenata i $|\mathcal{F}| > (k-1)^s$. Dokažite da tada postoji k skupova $S_1, \ldots, S_k$ iz $\mathcal{F}$ takvih da su skupovi $S_i \setminus (S_1 \cap S_2)$, $i = 1, \ldots, k$ u parovima disjunktni.*

Ideja: primjenite argument kao u dokazu leme 2.2.

2.1.4. Primjena za broj minterma*

Suncokretova lema i njene inačice imaju mnoge primjene u teoriji kompleksnosti. Primjerice, kombinatorni dio dokaza Razborova iz 1985. za donju ogradu monotonih sklopova (engl. monotone circuits) temelji se na suncokretovoj lemi i Füredijevoj inačici lemi 2.2. Andreev je 1987. godine, koristeći svoju inačicu suncokretove leme (zadatak 2.5) poboljšao ovaj rezultat i dokazao eksponencijalnu donju ogradu monotonih sklopova. U ovom poglavlju ćemo pokazati kako se lema 2.3. može primijeniti za dobivanje gornje ograde broja minterma i za dokazivanje donje ograde za nemonotone sklopove male dubine (engl. small depth non-monotone circuits).

Slijede osnovne definicije i notacije iz Booleove algebre.

Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **Booleove varijable** koje poprimaju vrijednosti iz skupa $\{0,1\}$. **Booleova funkcija** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u n varijabli je funkcija

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}.$$

Posebno

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n, \qquad x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n, \qquad x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$$

su redom **konjunkcija**, **disjunkcija** i **funkcija pariteta** (jednaka je nuli ako i samo ako je $x_i = 1$ za paran broj broj varijabli x_i). Za funkciju f sa $\overline{f} = f \oplus 1$ označavamo njenu **negaciju** ili **komplement**. Varijable x_i i njihove negacije $\overline{x_i} = x_i \oplus 1$ nazivamo **atomima**.

Monom je konjunkcija, a **klauzula** disjunkcija Bolleovih varijabli x_i ili njihovih negacija $\overline{x_i}$. Broj atoma u monomu ili klauzuli nazivamo njihovom **duljinom**.

Disjunkcija proizvoljnog broja monoma naziva se **disjunktivna normalna forma** i dualno konjunkcija proizvoljnog broja klauzula je **konjunktivna normalna forma**.

1**-term** Booleove funkcije $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ je monom M takav da je $M(a) \leq f(a)$ za svaki ulaz $a \in \{0,1\}^n$. 0**-term** Booleove funkcije $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ je klauzula C takva da je $C(a) \geq f(a)$ za svaki ulaz $a \in \{0,1\}^n$. **Minterm** od f je monom M za kojeg vrijedi $M \leq f$ i koji je minimalan u smislu ako izbrišemo bilo koji od atoma nejednakost više ne vrijedi.

Booleova funkcija je t**-And-Or** ako se može prikazati kao konjunkcija proizvoljnog broja klauzula, od kojih je svaka duljine najviše t. Dualno, Booleova funkcija je s**-Or-And** ako se može prikazati kao disjunkcija proizvoljnog broja monoma, od kojih je svaki duljine najviše s.

Primjetimo da ima $2^s\binom{n}{s}$ monoma i jednako toliko klauzula duljine s.

Lema 2.4. *Neka je f t-And-Or Booleova funkcija u n varijabli. Tada za svaki $s = 1, \ldots, n$ funkcija f ima najviše t^s minterma duljine s.*

Dokaz. Uzmimo neka je $f = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ gdje je svaka klauzula C_i duljine najviše t. Klauzule C_i ćemo ovdje interpretirati kao skupove atoma, a $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ kao familiju ovih skupova. Neka je $\mathcal{F}$ familija svih minterma od f s točno s elemenata (i minterme interpretiramo kao skupove atoma). Tada svaki skup u $\mathcal{C}$ ima neprazan presjek sa svakom skupom u $\mathcal{F}$ (zadatak 2.8).

Pretpostavimo neka je $|\mathcal{F}| > t^s$. Po lemi 2.3. $\mathcal{F}$ sadrži cvijet s $t+1$ latica, tj. postoji skup atoma Y takav da nijedan skup od najviše t atoma ne može imati neprazan presjek sa svim članovima familije

$$\mathcal{F}_Y = \{M \setminus Y : M \in \mathcal{F}, M \supseteq Y\}.$$

Skup Y je dio bar jednog minterma od f koji ne može imati neprazan presjek sa svim kluzulama iz $\mathcal{C}$. Uzmimo klauzulu $C \in \mathcal{C}$ takvu da je $C \cap Y = \emptyset$. Kako C ima neprazan presjek sa svim skupovima u $\mathcal{F}$, znači da ima i neprazan presjek sa svim skupovima u $\mathcal{F}_Y$. Ovo je nemoguće jer C po pretpostavci ima najviše t elemenata. Kontradikcijom smo dokazali da je pretpostavka $|\mathcal{F}| > t^s$ neistinita. Vrijedi $|\mathcal{F}| \leq t^s$, što je i trebalo dokazati. ■

2.1.5. Primjena za formule male dubine*

Definicija 2.5. ***Funkcija*** s***-praga*** *(engl. s-treshold function) je monotona Booleova funkcija (bez negacija)* T_n^s *koja prihvaća* $0-1$ *vektor ako i samo ako on ima barem* s *jedinica, tj.*

$$T_n^s(x_1,\dots,x_n)=1 \quad \textit{ako i samo ako je } x_1+\cdots+x_n\geq s.$$

Funkcije s-praga se mogu dobiti pomoću sljedeće formule

$$T_n^s(x_1,\dots,x_n)=\bigvee_{I:|I|=s}\bigwedge_{i\in I}x_i.$$

Ova formula je monotona, jer nema negacija Bolleovih varijabli x_i i ima dubinu 2, jer su samo dvije izmjene I i ILI operatora. Duljina formule je $s\binom{n}{s}$. Postavlja se pitanje može li se T_n^s prikazati sa formulom bitno manje duljine ako dozvolimo i negacije varijabli i/ili veću dubinu formule.

Håstad je 1986. dokazao da za $s=\lfloor n/2\rfloor$ svaka takva formula koja računa T_n^s mora imati duljinu koja eksponencijalno ovisi o n, čak i ako dozvolimo bilo koju konstantnu dubinu (konstantni broj izmjena I i ILI operatora). Razborov je 1987. dokazao da isto vrijedi ako dozvolimo i zbrajanje modulo 2 kao dodatnu operaciju. Oba dokaza koriste netrivijalne tehnike: "switching lemu" i aproksimacije Booleovih funkcija polinomima niskog stupnja (dokazi se mogu naći u [1], poglavlja 10.5 i 20.5).

S druge strane Håstad i dr. su 1995. elementarno dokazali koristeći cvjetnu lemu 2.3. da se za formule dubine najmanje 3 može dobiti ista donja ograda. Njihov dokaz vrijedi za sklopove dubine 3, ali da bi prikazali njihovu ideju dovoljno je pokazati kako ona djeluje na specijalnom obliku formula dubine 3.

Or-And-Or formula je formula oblika

$$F=F_1\vee F_2\vee\cdots\vee F_t,$$

gdje je svaki F_i And-Or formula, tj. konjunkcija proizvoljnog broja klauzula. Kažemo da ova formula ima k**-dno** (engl. bottom fan-in k) ako svaka od ovih kluzula ima najviše k Bolleovih varijabli, dok broj negiranih Bolleovih varijabli može biti proizvoljan.

Spomenimo da uvjet k**-dna** u formuli nije presudan jer ako duljina of F nije prevelika moguće je vrijednosti nekih varijabli uzeti za 1, pa će rezultirajuća formula zadovoljavati ovaj uvjet (vidite zadatak 2.9).

Ideja Håstada i koautora iz 1995. je sažeta u sljedećoj lemi.

Lema 2.5. *Neka je* $F=F_1\vee F_1\vee\cdots\vee F_t$ *Or-And-Or formula koja ima* k*-dno. Ako* F *ne prihvaća* $0-1$ *vektore s manje od* s *jedinica, onda* F *ne može prihvatiti više od* tk^s *vektora s točno* s *jedinica.*

Ova lema direktno povlaći da svaka Or-And-Or formula koja ima k-dno i računa funkciju s-praga T_n^s ima duljinu barem

$$\binom{n}{s} k^{-s} > \left(\frac{n}{ks}\right)^s.$$

Dokaz. Pretpostavimo da F prihvaća više od tk^s vektora s točno s jedinica. Tada neka od And-Or podformula F_i prihvaća više od k^s tih vektora. Neka je A skup tih vektora, zato je

$$|A| > k^s.$$

Formula F_i je oblika

$$F_i = C_1 \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_r,$$

gdje su $C_1, \ldots, C_r$ klauzule s najviše k Bolleovih varijabli. Neka je B skup svih vektora s najviše $s-1$ jedinica. F_i ne prihvaća vektore iz B, jer ih ne prihvaća F. Cilj nam je pokazati da skup B sadrži vektor v na kojem svaka od klauzula $C_1, \ldots, C_r$ daje na izlazu jednake vrijednosti kao na nekom vektoru iz A; što znači da F_i radi grešku za ovaj ulaz, odnosno "prisiljena" je prihvatiti vektor v.

Kažemo da je vektor v k**-granica** za A (engl. k-limit) ako za svaki podskup S od k koordinata postoji vektor $u \in A$ takav da je $v \leq u$ i koji se podudara s v u svim koordinatama iz S.

Tvrdnja $(*)$: Postoji vektor $v \in B$ koji je k-granica za A.

Dokaz tvrdnje $(*)$: Za vektor $u \in \{0,1\}^n$ neka je E_u odgovarajući podskup od $\{1,2,3,\ldots,n\}$ sa vektorom incidencije u tj. takav da je $E_u = \{i : u_i = 1\}$. Pogledajmo familiju $\mathcal{F} = \{E_u : u \in A\}$. Ova familija je s-uniformna i ima više od k^s članova. Prema lemi 2.3. $\mathcal{F}$ sadrži cvijet s $k+1$ latica, odnosno postoji skup Y takav da ni jedan skup s najviše k članova ne može imati neprazan presjek sa svim članovima familije

$$\mathcal{F}_Y = \{E \setminus Y : E \in \mathcal{F}, E \supseteq Y\}.$$

Neka je v vektor incidencije za skup Y. Tvrdimo da je vektor v k-granica za A. Da bi to dokazali uzmimo proizvoljan podskup S od $\{1,2,3,\ldots,n\}$ s najviše k elemenata. Tada je

$$S \cap (E_u \setminus Y) = \emptyset \tag{2.2}$$

za barem jedan skup $E_u \in \mathcal{F}$ takav da je $Y \subseteq E_u$. Posljednji uvjet povlaći $v \leq u$ i zato se v podudara s u na svim koordinatama iz $S \setminus E_u$ i iz $S \cap Y$. Zbog jednakosti (2.2) nema drugih koordinata u S, stoga se v podudara s u na svim koordinatama iz S čime je tvrdnja $(*)$ dokazana.

Fiksirajmo vektor v iz tvrdnje. Pretpostavimo suprotno da F_i ne prihvaća vektor v. Tada je $C(v) = 0$ za neku klauzulu C od F_i.koja je oblika

$$C = \left(\bigvee_{i \in S} x_i\right) \vee \left(\bigvee_{i \in T} \overline{x}_i\right)$$

za neka dva disjunktna skupa S, T i tako da je $|S| \leq k$. Prema tvrdnji $(*)$ postoji vektor $u \in A$ takav da je $v \leq u$ i koji se s v podudara na svim koordinatama iz S. Formula F_i mora prihvaćati vektor u, pa stoga i klauzula C. Ovo je moguće samo ako u ima jedinicu na nekoj od koordinata $i \in S$ ili nulu na nekoj koordinati $j \in T$ (ili oboje). U prvom slučaju je $C(v) = 1$, jer se u podudara s v na S. U drugom slučaju je $C(v) = 1$ jer zbog $v \leq u$ vektor v ima nule na svim koordinatama gdje ih ima i u. Kako je u oba slučaja $C(v) = 1$ imamo kontradikciju. ■

Zadatak 2.8. *Dokažite da svaki* 0*-term* C *i svaki* 1*-term* K *Booleove funkcije* f *moraju imati barem jedan zajednički atom.*

Rješenje: *Pretpostavimo suprotno: postoje jedan* 0*-term* C *i* 1*-term* K *Booleove funkcije* f *koji nemaju zajednički atom. Pretpostavimo BSO da su to* 1*-term* $C = x_1\overline{x_2}x_3$ *iz disjunktivne normalne forme Booleove funkcije* $f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ *i* 0*-term* $K = \overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}$ *iz konjunktivne normalne forme. Ukoliko su* 1*-term ili* 0*-term manje duljine moguće ih je u bilo kojoj kombinaciji nadopuniti do maksimalne duljine, u ovom primjeru to je duljina* 3*. Zbog* $x_1\overline{x_2}x_3$ *u konjunktivnoj normalnoj formi funkcija* f *za ulaz* 101 *daje izlaz* 1*, a zbog* $\overline{x_1}+x_2+\overline{x_3}$ *u disjunktivnoj normalnoj formi za isti ulaz* 101 *daje izlaz* 0*. Kontradikcija!*

Zadatak 2.9. **Neka je* F *skup svih klauzula u* n *varijabli. Kažemo da je klauzula* ***duga*** *ako ima barem* $k+1$ *pozitivnih atoma (nenegiranih Booleovih varijabli* x_i*). Neka je* l *broj dugih kluzula u* F *i pretpostavimo da je*

$$l < \left(\frac{n+1}{m+1}\right)^k .$$

Dokažite da je tada moguće nekim $n-m$ *varijablama pridružiti vrijednost* 1 *tako da rezultirajući skup* F' *ne sadrži duge klauzule.*

Ideja: uzmimo varijablu x_i *koja se pojavljuje u najvećem broju dugih klauzula i pridijelimo joj vrijednost* 1*. Zatim uzmimo varijablu* x_{i_2} *koja se pojavljuje u najvećem broju preostalih dugih klauzula i pridijelimo joj vrijednost* 1*. Nastavimo na isti način dok ne preostane ni jedna duga klauzula. U računu koristite procjenu* $\sum_{i=1}^{n} i^{-1} \sim \ln n$*.*

Zadatak 2.10. *Neka je* F *Or-And-Or formula koja ima* k*-dno* $(k \leq r)$ *i koja izračunava funkciju u* $n = sr$ *varijabli*

$$f = \bigwedge_{i=1}^{s} \bigvee_{j=1}^{r} x_{ij}.$$

Pokažite da F *ima duljinu barem* $(r/k)^s$*.*

Rješenje: *Neka je* $F = F_1 \vee F_1 \vee \cdots \vee F_t$ *i duljina od* F *je barem* t*. Primijetimo da* F *ne prihvaća ni jedan vektor s manje od* s *jedinica i prihvaća* r^s *vektora s točno* s *jedinica. Prema lemi 2.5 mora biti:*

$$r^s < tk^s \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{r}{k}\right)^s < t.$$

Slijedi da F *ima duljinu barem* $(r/k)^s$*.*

2.2. Presijecajuće familije skupova

Osnovni međuodnos skupova određen je njihovim presjekom. Veličina ili neke druge karakteristike međusobnog presjeka skupova opisuju vrstu "zavisnosti" među njima. U ovom poglavlju promatrati ćemo skupove koji ne smiju biti disjunktni.

Za familiju skupova kažemo da je **presijecajuća familija** skupova ako vrijedi da bilo koja dva skupa iz te familije imaju neprazni presjek.

2.2.1. Erdős-Ko-Radov teorem

Prisjetimo se presijecajuće familije $\mathcal{F}$ *svih podskupova* skupa $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ iz primjera A iz uvoda. Ovakvu familiju sa 2^{n-1} članova možemo dobiti uzimanjem svih podskupova od X koji sadrže bilo koji fiksirani element iz X, primjerice 1. Za bilo koji podskup i njegov komplement vrijedi da ne mogu oba istovremeno biti u presijecajućoj familiji (jer presjek im je prazan skup) pa $\mathcal{F}$ ne može imati više od $2^n/2 = 2^{n-1}$ članova.

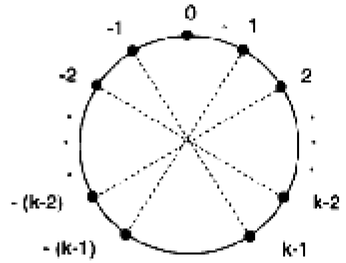
Neka je sada $\mathcal{F}$ presijecajuća familija k-*članih podskupova* skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Koliko najviše članova može imati ova familija? Pretpostavljamo da je $n \geq 2k$ da izbjegnemo trivijalan slučaj $n < 2k$ kada se svaka dva člana ove presijecajuće familije sijeku.

Presijecajuću familiju k-članih podskupova možemo dobiti (istom idejom iz primjera A) tako da uzmemo svih $\binom{n-1}{k-1}$ k-članih podskupova koji sadrže element 1. Postoji li veća presijecajuća familija od ove? Broj svih podskupova je $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ pa ovo pitanje nije trivijalno i ne možemo primijeniti argument s komplementom kao u prethodnom primjeru, jer komplement k-članog skupa općenito nije k-člani skup.

Sljedeći rezultat kojeg su dali Erdős, Ko i Rado 1938. godine (a objavili 23 godine kasnije) daje odgovor na ovo pitanje.

Teorem 2.2. ***(Erdős-Ko-Rado 1961.)*** *Ako je $n \geq 2k$ onda svaka presijecajuća familija $\mathcal{F}$ k-članih podskupova od n-članog skupa ima najviše $\binom{n-1}{k-1}$ članova.*

Dokaz. (G.O.H. Kantona 1972.) Neka je $X = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ n-člani skup čiji k-člani podskupovi su članovi presijecajuće familije. Prvo ćemo promatrati k-člane skupove uzastopnih elemenata $B_s = \{s, s+1, \ldots, s+k-1\}$ gdje je $s \in X$ i gdje se zbraja modulo n (kao na slici). Želimo znati koliko njih može pripadati presijecajućoj familiji.



Tvrdnja $(*)$: Najviše k skupova B_s može pripadati familiji $\mathcal{F}$.

Dokaz tvrdnje $(*)$: Možemo pretpostaviti $B_0 \in \mathcal{F}$. Točno $2k-2$ od ovih skupova sijeku B_0 i to su B_s za koje je $-(k-1) \leq s \leq k-1$, $s \neq 0$, gdje se indeksi računaju modulo n. Ovi skupovi se mogu podijeliti u $k-1$ parova disjunktnih skupova B_i, B_{i+k}, gdje je $-(k-1) \leq i \leq -1$.

Kako $\mathcal{F}$ može sadržavati najviše jedan skup iz svakog ovakvog para tvrdnja $(*)$ je dokazana.

Sada ćemo na dva načina prebrojiti L broj parova (f, s), gdje su f permutacija od X, a s element iz X takvi da skup

$$f(B_s) = \{f(s), f(s+1), f(s+2), \ldots, f(s+k-1)\}$$

pripada familiji $\mathcal{F}$. Prema tvrdnji $(*)$ za svaku pojedinu permutaciju f, familija $\mathcal{F}$ može sadržavati najviše k skupova $f(B_s)$. Zato je $L \leq kn!$. S druge strane, točno $nk!(n-k)!$ parova (f, s) vode do istog skupa $f(B_s)$, jer s možemo izabrati na n načina, a za određeni s postoji $k!(n-k)!$ načina za odabir permutacije f. Zato je $L = |\mathcal{F}| \cdot nk!(n-k)!$. Kombinirajući ovu jednakost s prethodnom nejednakosti za L dobivamo

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{kn!}{nk!(n-k)!} = \frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}.$$

■

2.2.2. Konačni ultrafilteri

Definicija 2.6. ***Ultrafilter*** *nad skupom X je familija $\mathcal{F}$ njegovih podskupova tako da vrijedi:*

(i) $\mathcal{F}$ je uzlazno zatvorena, tj. za svaki $A \in \mathcal{F}$ svi nadskupovi od A pripadaju $\mathcal{F}$;

(ii) za svaki podskup A od X, ili A ili njegov komplement $\overline{A} = X \setminus A$ pripada $\mathcal{F}$.

Propozicija 2.1. *Ako je $\mathcal{F}$ ultrafilter onda je i presijecajuća familija.*

Dokaz. Kada bi dva skupa familije $A, B \in \mathcal{F}$ bili disjunktni, onda bi vrijedilo $A \subseteq \overline{B}$ i zbog (i) bi imali $\overline{B} \in \mathcal{F}$, a ovo bi bila kontradikcija s (ii). ■

Sljedeće svojstvo je još zanimljivije.

Propozicija 2.2. *Svaka presijecajuća familija se može nadopuniti do ultrafiltera.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljnu presijecajuću familiju i nadopunimo je na sljedeći način. Dodajmo u familiju prvo sve skupove koji nisu u familiji, a čije dodavanje ne narušava svojstvo presijecanja. Nakon toga dodajmo sve nadskupove skupova koje imamo u familiji (nakon prvog dodavanja). Tvrdimo da je rezultirajuća familija $\mathcal{F}$ ultrafilter. Zaista, ako ne bi bila ultrafilter onda bi imali neki skup A takav da ni A ni $\overline{A}$ ne pripadaju familiji $\mathcal{F}$. Prema konstrukciji A mora biti disjunktan s barem jednim skupom B iz početne familije (inače bi A bio dodan u familiju još u prvoj fazi) i zato je $B \subseteq \overline{A}$. Kako je $B \in \mathcal{F}$ ovo je u kontradikciji s uzlaznom zatvorenošću familije $\mathcal{F}$. ■

2.2.3. Maksimalne presijecajuće familije

Definicija 2.7. *Neka je $\mathcal{F}$ k-uniformna familija podskupova nekog n-članog skupa. $\mathcal{F}$ je **maksimalna presijecajuća** ako vrijedi*

(i) $\mathcal{F}$ je presijecajuća;

(ii) dodavanjem bilo kojeg novog k-članog skupa familiji $\mathcal{F}$ ovo svojstvo bi se narušilo, tj. za svaki k-člani skup $E \notin \mathcal{F}$, familija $\mathcal{F} \cup \{E\}$ nije presijecajuća.

Slučaj $n \leq 2k-1$ nije interesantan, jer je tada jedina maksimalna presijecajuća familija familija svih k-članih podskupova n-članog skupa. Što ako je $n \geq 2k$? Intuitivno, bilo koja maksimalna presijecajuća familija mora biti dovoljno velika, jer za bilo koji k-člani skup koji nije u familiji $\mathcal{F}$ postoji skup iz $\mathcal{F}$ s njim disjunktan. Iz tog razloga je interesantno istražiti minimalni mogući broj $f(k)$ članova koji ova familija može imati.

Za određivanje gornje granice broja $f(k)$ promotrimo familiju pravaca projektivne ravnine reda $k-1$ (familija od $n = k^2-k+1$ k-članih podskupova koje zovemo **pravci**, tako da se svaka dva pravca sijeku u točno jednoj točki, a svaka točka leži na točno k pravaca). Lako se pokaže da je ova familija maksimalna presijecajuća (zadatak 2.15). Zato vrijedi $f(k) \leq k^2 - k + 1$ za sve vrijednosti k za koje projektivna ravnina reda $k-1$ postoji.

U slučaju projektivnih ravnina imamo k-uniformnu familiju s $k^2 - k + 1$ članova (za velike k to je približno k^2) i istim brojem točaka. Što bi bilo u slučaju da imamo bitno manje od k^2 točaka, bili i tada mogli imati k-uniformnu maksimalnu presijecajuću familiju s najviše k^2 članova? Metoda dvostrukog prebrojavanja u sljedećem teoremu daje negativan odgovor na ovo pitanje.

Teorem 2.3. ***(Füredi 1980.)*** *Neka je $\mathcal{F}$ maksimalna presijecajuća familija k-članih podskupova nekog n-članog skupa. Ako je*

$$n \leq \frac{k^2}{2\log k}$$

onda $\mathcal{F}$ mora imati barem k^2 članova.

Dokaz. *Da bi pojednostavnili račun, u dokazu ćemo pretpostaviti nešto "jaču" pretpostavku:

$$n \leq \frac{k^2}{1 + 2\log k}.$$

Ideja dokaza je prebrojati na dva različita načina N broj parova (F, E) gdje je $F \in \mathcal{F}$ i E k-člani podskup disjunktan s F (pa je $E \notin \mathcal{F}$). Kako za svaki E postoji barem jedan s njim disjunktan član familije $\mathcal{F}$ vrijedi

$$N \geq \binom{n}{k} - |\mathcal{F}|.$$

S druge strane, svaki član od $\mathcal{F}$ može biti disjunktan s najviše $\binom{n-k}{k}$ skupova E, zato je
$$N \leq |\mathcal{F}| \cdot \binom{n-k}{k}.$$
Ove dvije nejednakosti zajedno s ocjenom
$$\left(\frac{n-k-x}{n-x}\right)^x \leq \binom{n-x}{k}\binom{n}{k}^{-1} \leq \left(\frac{n-k}{n}\right)^x \leq e^{-(k/n)y}$$
koja vrijedi za $k \leq k+x < n$ i $y < k \leq n$, daju
$$|\mathcal{F}| \geq \frac{\binom{n}{k}}{1+\binom{n-k}{k}} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n-k}\right)^k > e^{k^2/n-1} \geq e^{2\log k} \geq k^2.$$
■

Prepostavimo sada da su $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_m$ presijecajuće i ne nužno uniformne familije podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Koliko skupova može imati njihova unija?

Uzimajući da su $\mathcal{F}_i$ familije svih podskupova koji sadrže element i i pretpostavku $m \leq n$, imamo $|\mathcal{F}_i| = 2^{n-1}$. Unija $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i$ sadrži skupove koji sadrže ili element 1 ili 2 ili ... ili m. Komplement njihove unije zato sadrži skupove koji ne sadrže elemente $1, 2, \ldots, m$, a takvih ima 2^{n-m}. Zato je $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i\right| = 2^n - 2^{n-m}$.

Kleitmanov rezultat tvrdi da je ova ograda i najbolja moguća. Za dokaz trebamo još sljedeću definiciju i dvije (također Kleitmanove) leme:

Definicija 2.8. *Familija $\mathcal{F}$ je monotono padajuća (monotono rastuća) ako vrijedi da $A \in \mathcal{F}$ i $B \subseteq A$ $(A \subseteq B)$ povlači $B \in \mathcal{F}$.*

Lema 2.6. *Za monotono padajuće familije $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$ podskupova n-članog skupa vrijedi*
$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{C}| \geq 2^{-n}\, |\mathcal{A}|\, |\mathcal{C}|\, .$$

Dokaz. *Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po n. Slučaj $n = 1$ je trivijalan. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n-1$. Neka je
$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= \{S : S \in \mathcal{A}, n \notin S\}\, ,\\
\mathcal{A}_1 &= \{S \setminus \{n\} : S \in \mathcal{A} : n \in S\}\, ,\\
\mathcal{C}_0 &= \{S : S \in \mathcal{C}, n \notin S\}\, ,\\
\mathcal{C}_1 &= \{S \setminus \{n\} : S \in \mathcal{C} : n \in S\}\, .
\end{aligned}$$
Tada je po pretpostavci indukcije
$$\begin{aligned}
|\mathcal{A} \cap \mathcal{C}| &= |\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{C}_0| + |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{C}_1|\\
&\geq 2^{-(n-1)}\, |\mathcal{A}_0|\, |\mathcal{C}_0| + 2^{-(n-1)}\, |\mathcal{A}_1|\, |\mathcal{C}_1|\\
&= 2^{-n}\left(|\mathcal{A}_0| + |\mathcal{A}_1|\right)\left(|\mathcal{C}_0| + |\mathcal{C}_1|\right) + 2^{-n}\left(|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|\right)\left(|\mathcal{C}_0| - |\mathcal{C}_1|\right).
\end{aligned}$$
Kako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$ monotono padajuće vrijedi $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_0$ i $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_0$ zbog čega je $\left(|\mathcal{A}_0| - |\mathcal{A}_1|\right)\left(|\mathcal{C}_0| - |\mathcal{C}_1|\right) \geq 0$. ■

Lema 2.7. *Za monotono padajuću familiju $\mathcal{A}$ i monotonu rastuću familiju $\mathcal{B}$ vrijedi*

$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \leq 2^{-n} |\mathcal{A}| |\mathcal{B}| .$$

Dokaz. *Primjenimo prethodnu lemu 2.6. na $\mathcal{A}$ i na familiju $\mathcal{C}$ koja sadrži sve podskupove n-članog skupa koji nisu u $\mathcal{B}$. Familija $\mathcal{C}$ je monotono padajuća, jer ako neki skup nije u familiji $\mathcal{B}$ onda ni svi njegovi podskupovi nisu u $\mathcal{B}$ (ako bi za neki $X \in \mathcal{C}$ postojao podskup $Y \subset X$ koji nije u $\mathcal{C}$ to bi značilo da je $Y \in \mathcal{B}$, a kako je $\mathcal{B}$ monotono rastuća i X bi morao biti iz $\mathcal{B}$ što je kontradikcija s početnom pretpostavkom $X \in \mathcal{C}$). Koristeći rezultat leme 2.6. imamo

$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{C}| \leq |\mathcal{A}| - 2^{-n} |\mathcal{A}| |\mathcal{C}| = 2^{-n} |\mathcal{A}| (2^n - |\mathcal{C}|) = 2^{-n} |\mathcal{A}| |\mathcal{B}| .$$

■

Teorem 2.4. ***(Kleitman 1966.)*** *Unija m presijecajućih familija podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ sadrži najviše $2^n - 2^{n-m}$ skupova.*

Dokaz. *Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po m. Slučaj $m = 1$ je trivijalan. Za korak indukcije trebamo lemu 2.7. Neka je $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i$, gdje su $\mathcal{F}_i$ presijecajuće familije. Kako nam je cilj ograničiti $|\mathcal{F}|$ odozgo, možemo pretpostaviti da je svaki $\mathcal{F}_i$ maksimalna presijecajuća familija, posebno $|\mathcal{F}_i| = 2^{n-1}$. Neka je $\mathcal{A}$ komplement od $\mathcal{F}_m$, tj. familija svih $|\mathcal{A}| = 2^{n-1}$ podskupova koji nisu u $\mathcal{F}_m$ i $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{F}_i$. $\mathcal{A}$ je monotono padajuća familija, a $\mathcal{B}$ monotono rastuća, jer su $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_m$ maksimalne presijecajuće familije. Prema pretpostavci indukcije je $|\mathcal{B}| \leq 2^n - 2^{n-m+1}$, a prema lemi 2.7

$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \leq 2^{-n} 2^{n-1} \left(2^n - 2^{n-m+1}\right) = 2^{n-1} - 2^{n-m}.$$

Zato je

$$|\mathcal{B} \cap \mathcal{F}_m| = |\mathcal{B}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \geq |\mathcal{B}| - 2^{n-1} + 2^{n-m}$$

i

$$|\mathcal{F}| = \left| \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i \right| = |\mathcal{B}| + |\mathcal{F}_m| - |\mathcal{B} \cap \mathcal{F}_m| \leq 2^n - 2^{n-m}.$$

■

2.2.4. Rezultat Hellyjevog tipa*

E. Helly je 1923. dokazao sljedeći rezultat: neka je $n \geq k + 1$, i ako za n konveksnih skupova u $\mathbb{R}^k$ vrijedi da bilo kojih $k+1$ od njih imaju neprazan presjek, onda postoji zajednička točka za svih n skupova.

Prirodno je postaviti pitanje vrijedi li tvrdnja Hellyjevog tipa i za druge objekte umjesto konveksnih skupova. Rezultat Hellyjevog tipa za proizvoljne familije skupova dan je u sljedećem teoremu.

Teorem 2.5. *Neka je $\mathcal{F}$ familija skupova, a k najmanji kardinalni broj njezinih članova. Ako bilo kojih $k+1$ članova ove familije ima neprazan presjek, tada i svi članovi ove familije imaju neprazan presjek.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, presjek svih članova ove familije je prazan. Neka je $A = \{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathcal{F}$. Za svaki $i = 1, \ldots, k$ mora postojati $B_i \in \mathcal{F}$ tako da $x_i \notin B_i$. Zato je $A \cap B_1 \cap \cdots \cap B_k = \emptyset$, kontradikcija! ■

Zadatak 2.11. *Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova n-članog skupa. Dokažite ako je $\mathcal{F}$ presijecajuća, onda je $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$. Je li ova ograda najbolja moguća? Ako jest, konstruirajte familiju za koju je $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$.*

Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova n-članog skupa. Ograda $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$ je najbolja moguća jer za bilo koji podskup i njegov komplement vrijedi da ne mogu oba istovremeno biti u presjecajućoj familiji (jer im je presjek prazan skup). Zato $\mathcal{F}$ ne može imati više od $2^n/2 = 2^{n-1}$ članova. Ovakvu familiju sa 2^{n-1} članova možemo dobiti uzimanjem svih podskupova od X koji sadrže bilo koji fiksirani element iz X, primjerice 1.

Zadatak 2.12. *Neka je $n \leq 2k$ i neka je $A_1, \ldots, A_m$ familija k-članih podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ takva da je $A_i \cup A_j \neq \{1, 2, \ldots, n\}$ za sve i, j. Dokažite da je*

$$m \leq \left(1 - \frac{k}{n}\right) \binom{n}{k}.$$

Rješenje: *Pogledajmo komplemente $\overline{A_i} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus A_i$, za njih vrijedi*

$$\overline{A_i} \cap \overline{A_j} = \overline{A_i \cup A_j} \neq \overline{\{1, 2, \ldots, n\}} = \emptyset$$

i svi su $(n-k)$-člani podskupovi. Provjerimo uvjete Erdős-Ko-Radovog teorema

$$n \geq 2\,(n-k) \;\;\Leftrightarrow\;\; n \leq 2k$$

i potom ga primijenimo

$$m \leq \binom{n-1}{n-k-1} = \binom{n-1}{k}.$$

Uspoređujući sa izrazom iz zadatka dobijemo

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} = \binom{n}{k} - \frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k}.$$

Zadatak 2.13. *Gornja granica $\binom{n-1}{k-1}$ u Erdős-Ko-Radovom teoremu se postiže za familije skupova koji sadrže fiksirani element. Pokažite da za $n = 2k$ postoje i druge familije koje postižu ovu ogradu.*

Rješenje: *U familiju k-članih podskupova $2k$-članog skupa uključimo po jedan skup iz svakog para kojeg čine k-člani podskup i njegov komplement. Za svaki zadani k-člani podskup A od $2k$-članog skupa, $\overline{A}$ je jedini od k-članih podskupova koji ga ne siječe. Ovakva familija sadrži*

$$\frac{1}{2}\binom{2k}{k} = \frac{k}{2k}\binom{2k}{k} = \binom{2k-1}{k-1}$$

što je gornja granica $\binom{n-1}{k-1}$ u Erdős-Ko-Radovom teoremu za $n = 2k$.

Zadatak 2.14. *Presijecajuće svojstvo za skupove se može generalizirati zahtjevajući da je $|A \cap B| \geq t$ za sve različite skupove $A, B \in \mathcal{F}$. Ovakve familije se zovu **t-presijecajuće** familije. Prvi prirodni primjer za t-presijecajuće famlije je familija podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koji sadrže nekih t fiksiranih elemenata. Ova familija ima 2^{n-t} skupova. Postoje li veće t-presijecajuće famlije?*

Rješenje: *Neka je $n + t$ paran broj i uzmimo*

$$\mathcal{F} = \left\{ A : A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, |A| = \frac{n+t}{2} \right\}.$$

Nije teško vidjeti da svaka dva člana familije imaju u presjeku barem t elemenata. Osim toga treba vidjeti da vrijedi

$$2^{n-t} \leq \binom{n}{\frac{n+t}{2}}.$$

Korisreći simetriju binomnih koeficijenata i prvu nejednakost propozicije 1.2 vrijedi

$$\binom{n}{\frac{n+t}{2}} = \binom{n}{\frac{n-t}{2}} \geq \left(\frac{n}{\frac{n-t}{2}}\right)^{\frac{n-t}{2}}$$

pa je dovoljno da je

$$\sqrt{\frac{2n}{n-t}} \geq 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{2n}{n-t} \geq 4 \;\Leftrightarrow\; t \geq \frac{n}{2}$$

Sljedi, ukoliko je $n + t$ paran broj i $\frac{n}{2} \leq t < n$, $\mathcal{F}$ je veća od familije podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koji sadrže nekih t fiksiranih elemenata.

Zadatak 2.15. **Projektivna ravnina reda $k - 1$, odnosno preciznije, k-uniformna familija od $n = k^2 - k + 1$ pravaca u skupu točaka projektivne ravnine reda $k - 1$ je maksimalna presijecajuća familija, tj. svaki k-člani skup E, koji siječe sve pravce, mora biti pravac. Dokažite ovu tvrdnju za $k = 3$.*

Rješenje: *Pretpostavimo da E nije pravac, i neka je L pravac kroz neke dvije različite točke $x, y \in E$, a z treća točka na pravcu L, $z = L \setminus \{x, y\}$. Točka z leži na 3 različita pravaca (osim na L, na još 2 različita pravca), a svaki od njih siječe E u različitim točkama. Kako je $E \cap L = \{x, y\}$ dolazimo do kontradikcije, znači da E mora biti pravac.*

2.3. Parcijalno uređeni skupovi, lanci i antilanci

Parcijalno uređeni skupovi daju prirodan okvir za proučavanje raznih kombinatornih konfiguracija. Prisjetimo se:

skup realnih brojeva je **totalno uređen** (ili **linearno uređen** ili **lanac**), što znači da za bilo koja dva različita realna broja x i y je ili $x < y$ ili $y < x$. Skupovi u kojima dva različita elementa mogu, ali i ne moraju biti usporediva zovu se parcijalno uređeni skupovi. Ponovimo još jednom definiciju 1.17.

Parcijalni uređaj (ili **slabi uređaj**) na skupu P je binarna relacija $\preccurlyeq$ na P koja je:

-**refleksivna**, tj. $\forall x \in P$, $(x \preccurlyeq x)$,

-**tranzitivna**, tj. $\forall x, y, z \in P$, $(x \preccurlyeq y) \wedge (y \preccurlyeq z) \Rightarrow (x \preccurlyeq z)$,

-**antisimetrična**, tj. $\forall x, y \in P$, $(x \preccurlyeq y) \wedge (y \preccurlyeq x) \Rightarrow (x = y)$.

Kažemo da su elementi x i y **usporedivi** ako je $x \preccurlyeq y$ ili $y \preccurlyeq x$ (ili oboje). Pišemo $x \prec y$ ako je $x \preccurlyeq y$ ali $x \neq y$.

Parcijalno uređeni skup $P_{\preceq} = (P, \preccurlyeq)$ je skup P zajedno s parcijalnim uređajem $\preccurlyeq$ na skupu P. Često, kada nema opasnosti od zabune, umjesto $P_{\preccurlyeq}$ pišemo kraće P.

Lanac C je podskup od P čija svaka dva elementa su usporediva. Dualno, **antilanac** A je podskup od P čija nikoja dva različita elementa nisu usporediva. **Duljina** lanca (ili antilanca) je njegov kardinalni broj.

Primjetimo da je $|C \cap A| \leq 1$, odnosno lanac i antilanac mogu imati najviše jedan zajednički element, jer dva elementa ne mogu istovremeno biti usporediva i neusporediva.

Evo nekoliko primjera parcijalno uređenih skupova:

-familija skupova s inkluzijom kao parcijalnim uređajem;

-skup prirodnih brojeva s djeljivošću kao parcijalnim uređajem;

-skup svih particija zadanog skupa s profinjenjem kao parcijalnim uređajem. Particija p je profinjenje particije q ako su svi dijelovi particije p podskupovi djelova particije q;

-skup vektora u $\mathbb{R}^n$ s p.u. $(a_1, \ldots, a_n) \preccurlyeq (b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow a_i \leq b_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$;

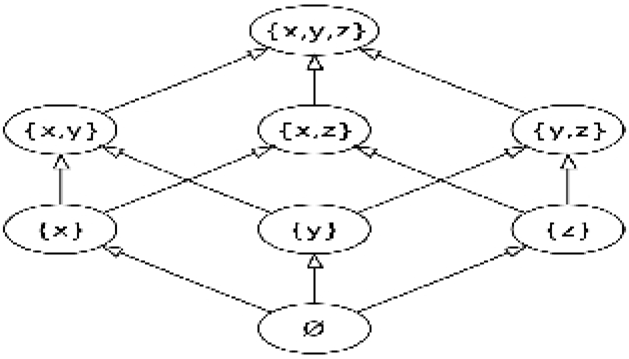
-skup realnih nizova s p.u. $(a_n) \preccurlyeq (b_n) \Leftrightarrow a_i \leq b_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$;

-skup realnih funkcija realne varijable s p.u. $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

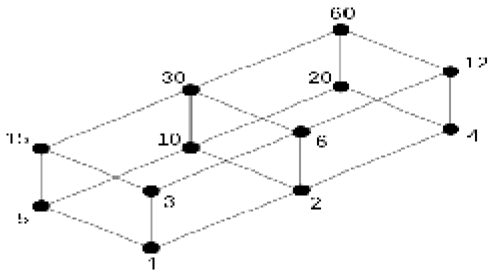
Konačni parcijalno uređeni skupovi se mogu vizualno predočiti pomoću tzv. **Hasseovih dijagrama**. Takav dijagram je ustvari graf čiji vrhovi predstavljaju elemente parcijalno uređenog skupa. Ako je $x \prec y$ onda je vrh koji odgovara elementu y iznad vrha koji odgovara elementu x. Elementi x i y su spojeni ako je $x \prec y$ i ne postoji element z takav da je $x \prec z$ i $z \prec y$ (kažemo da tada y **natkriva** x). Primjetimo, uvjet da su veći elementi iznad manjih omogućava da spojnice u ovom dijagramu ne moraju biti usmjerene.

Evo nekoliko primjera Hasseovih dijagrama:

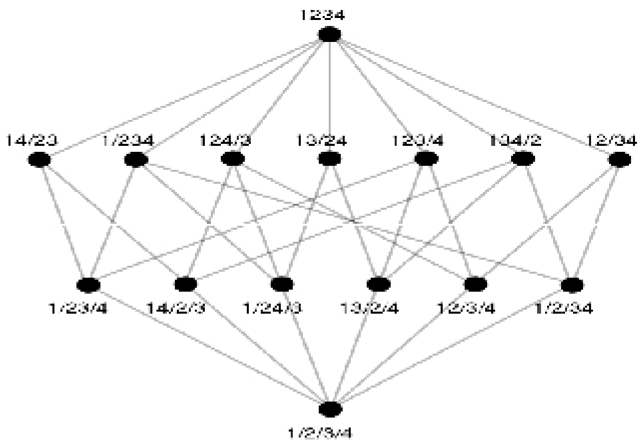
-Hasseov dijagram za podskupove skupa $\{x, y, z\}$ s inkluzijom kao parcijalnim uređajem:



-Hasseov dijagram za skup svih djelitelja broja 60 s djeljivošću kao parcijalnim uređajem:



-Hasseov dijagram za skup svih particija skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ s profinjenjem kao parcijalnim uređajem



Primijetimo da su elementi na istom nivou u Hasseovom dijagramu uvijek neusporedivi, pa čine antilanac.

2.3.1. Dekompozicija parcijalno uređenih skupova

Dekompozicija parcijalno uređenog skupa je njegova **particija** u međusobno disjunktne lance ili antilance. Cilj nam je dobiti dekompoziciju sa što je moguće manjim brojem lanaca ili antilanaca. Jedan smjer je jednostavan: ako parcijalno uređeni skup P ima lanac (odnosno antilanac) duljine r, onda ne može imati dekompoziciju u manje od r antilanaca (odnosno lanaca). Razlog za ovo je jednostavan: bilo koja dva elementa istog lanca moraju biti u različitim članovima particije u antilance.

Je li ovo optimalna situacija? Ako P nema lanac (odnosno antilanac) duljine veće od r, postoji li onda dekompozicija u r antilanaca (odnosno lanaca)? Potvrdan odgovor daje sljedeći teorem (za alternativni dokaz vidite zadatak 2.21).

Teorem 2.6. *Ako u parcijalno uređenom skupu P najdulji lanac ima duljinu r, onda P ima dekompoziciju u r antilanaca.*

Dokaz. Neka je A_i skup elemenata $x \in P$ takvih da najdulji lanac s najvećim elementom x ima i elemenata (uključujući i x). Prema pretpostavci teorema je $A_i = \emptyset$ za $i \geq r+1$, i zato je $P = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r$ particija skupa P u r međusobno disjunktnih skupova, od kojih su neki možda i prazni. Štoviše, svaki A_i je antilanac, jer ako bi za $x, y \in A_i$ vrijedilo $x \prec y$, tada bi se najdulji lanac $x_1 \prec \cdots \prec x_i = x$ koji završava u x mogao produljiti do duljeg lanca $x_1 \prec \cdots \prec x_i \prec y$, što bi značilo $y \notin A_i$. Ovo je kontradikcija, pa je A_i zaista antilanac. ■

Dualni rezultat prethodnog teorema poznat je kao Dilworthov teorem dekompozicije. Iako izgleda vrlo slično, njegov dokaz je nešto kompliciraniji. Od nekoliko elegantnih dokaza ovog teorema, ovdje iznosimo Galvinov.

Teorem 2.7. ***(Dilworthov teorem, 1950.)*** *Ako u parcijalno uređenom skupu P najdulji antilanac ima duljinu r, onda P ima dekompoziciju u r lanaca.*

Dokaz. (Galvin, 1994.) Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po kardinalnom broju skupa P. Neka je a maksimalni element iz P i neka je n duljina najduljeg antilanca u $P' = P \setminus \{a\}$. Tada je P' unija disjunktnih lanaca $C_1, \ldots, C_n$. Trebamo pokazati da ili P sadrži antilanac duljine $n+1$ ili je unija n lanaca. Svaki antilanac duljine n u P' se sastoji od po jednog elementa iz svakog C_i. Neka je a_i maksimalni element iz C_i koji pripada nekom antilancu duljine n iz P'. Nije teško vidjeti da je tada $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ antilanac. Ako je $A \cup \{a\}$ antilanac iz P onda je dokaz gotov. U suprotnom je $a \succ a_i$ za neki i. Tada je $K = \{a\} \cup \{x \in C_i : x \preceq a_i\}$ lanac iz P i u $P \setminus K$ nema antilanaca duljine n (jer je a_i bio maksimalni element iz C_i koji je iz antilanca duljine n iz P'). Zato je $P \setminus K$ unija $n-1$ lanaca. ■

*Da bi predočili snagu ovog teorema, pokazati ćemo da je Hallov teorem o ženidbi (teorem 1.24) njegov specijalan slučaj!

Pretpostavimo da skupovi $S_1, S_2, \ldots, S_m$ zadovoljavaju Hallov uvjet (1.10), tj. $\left|\bigcup_{i \in I} S_i\right| \geq |I|$ za sve $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$. Konstruirajmo parcijalno uređen skup na sljedeći način: elementi od P su elementi iz $X = S_1 \cup \cdots \cup S_m$ i $y_1, \ldots, y_m$ takvi da je $x \prec y_i$ ako je $x \in S_i$. Neka su svi drugi elementi osim ovih neusporedivi.

Očito je X antilanac u P. Tvrdimo da ne postoji dulji antilanac od X. Da bi to dokazali pretpostavimo da je A antilanac i stavimo $I = \{i : y_i \in A\}$. Tada A ne sadrži elemente iz $\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right|$, jer ako je $x \in S_i$, onda je usporediv s y_i, pa zbog toga A ne može sadržavati oba ova elementa. Hallov uvjet dakle povlaći

$$|A| \leq |I| + |X| - \left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| \leq |X|,$$

kao što smo i tvrdili.

Dilworthov teorem sada garantira da se P može rastaviti u $|X|$ lanaca. Kako je antilanac X maksimalan, svaki od lanaca u particiji mora sadržavati element iz X. Neka je lanac kroz y_i $\{x_i, y_i\}$. Tada je $(x_1, \ldots, x_m)$ sustav izrazitih predstavnika: jer je $x_i \in S_i$ (zbog $x_i \prec y_i$) i $x_i \neq x_j$ (jer su lanci disjunktni).

2.3.2. Simetrični lanci u partitivnim skupovima

Općenito, Dilworthov teorem ne govori ništa o lancima koji tvore particiju skupa P osim da su međusobno disjunktni. Ako promatramo neke specijalne parcijalno uređene skupove, onda ćemo moći dobiti i više informacija o samoj particiji. Primjerice, za parcijalno uređen skup 2^X čiji su elementi svi podskupovi n-članog skupa s inkluzijom kao parcijalnim uređajem, De Bruijn, Tengebergen, i Kruyswijk su 1952. pokazali da postoji particija od 2^X koja je također simetrična.

Definicija 2.9. *Neka je $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ lanac u 2^X, $|X| = n$, tj. $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k$. Ovaj lanac je* ***simetričan*** *ako je $|A_1| + |A_k| = n$ i $|A_{i+1}| = |A_i| + 1$ za sve $i = 1, \ldots, k-1$. Simetrični lanci s $k = n$ zovu se* ***maksimalni****.*

"Simetričan" se ovdje odnosi na simetriju brojeva $|A_1|, \ldots, |A_k|$ s obzirom na središnji nivo (njihovu aritmetičku sredinu) $n/2$. Maksimalni lanci su u bijektivnoj korespodenciji s permutacijama skupa X na sljedeći način: svaka permutacija $(x_1, \ldots, x_n)$ daje maksimalni lanac

$$\emptyset \subset \{x_1\} \subset \{x_1, x_2\} \subset \cdots \subset \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Zato ih i ima $n!$ (vidite zadatak 2.22).

Teorem 2.8. *Familija svih podskupova n-članog skupa s inkluzijom kao parcijalnim uređajem ima particiju u najviše $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ međusobno disjunktnih simetričnih lanaca.*

Dokaz. Neka je X n-člani skup. Ako pretpostavimo egzistenciju particije od 2^X u međusobno disjunktne simetrične lance, svaki ovaj lanac sadrži točno jedan skup iz središnjeg nivoa, pa ih može biti najviše $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Dokažimo sada egzistenciju: particija od 2^X u simetrične lanace je uvijek moguća. Koristimo matematičku indukciju po $n = |X|$. Tvrdnja očito vrijedi za jednočlani skup X. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve skupove sa manje od n elemenata.

Uzmimo $x \in X$ i stavimo $Y = X \setminus \{x\}$. Prema pretpostavci indukcije postoji particija od 2^Y u simetrične lance $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_r$. Svaki od ovih lanaca nad Y

$$\mathcal{C}_i \dots A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k$$

daje sljedeća dva lanca nad X

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_i' \dots A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{k-1} \subset A_k \subset A_k \cup \{x\} \\ \mathcal{C}_i'' \dots A_1 \cup \{x\} \subset A_2 \cup \{x\} \subset \cdots \subset A_{k-1} \cup \{x\}\,. \end{aligned}$$

Ovi su lanci simetrični jer je

$$|A_1| + |A_k \cup \{x\}| = (|A_1| + |A_k|) + 1 = (n-1) + 1 = n$$

i

$$|A_1 \cup \{x\}| + |A_{k-1} \cup \{x\}| = (|A_1| + |A_{k-1}|) + 2 = (n-2) + 2 = n.$$

Je li ovo particija? Da, jer ako je $A \subseteq Y$ onda samo $\mathcal{C}_i'$ sadrži A, pri čemu je $\mathcal{C}_i$ lanac u 2^Y koji sadrži A. Ako je $A = B \cup \{x\}$ gdje je $B \subseteq Y$, onda je $B \in \mathcal{C}_i$ za neki i. Ako je B maksimalni element od $\mathcal{C}_i$ onda je $\mathcal{C}_i'$ jedini lanac koji sadrži A, u suprotnom je A sadržan jedino u $\mathcal{C}_i''$. ■

2.3.3. Primjena za problem alokacije memorije

(engl. The memory allocation problem)

Kod pohrane i dohvata informacija javlja se sljedeći problem: pretpostavimo da imamo listu (niz) $L = (a_1, \dots, a_m)$ ne nužno različitih elemenata nekog skupa X. Kažemo da ova lista **sadrži** podskup A ako sadrži A kao podniz uzastopnih članova, tj. ako je

$$A = \left\{a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+|A|-1}\right\}$$

za neki i. Niz je **univerzalan** za X ako sadrži sve podskupove od X. Primjerice za $X = \{1,2,3,4,5\}$ je lista $L = (1,2,3,4,5,1,2,4,1,3,5,2,4)$ duljine $m = 13$ univerzalna za X.

Koja je duljina najkraćeg univerzalnog niza za n-člani skup? Kako bilo koja dva skupa istog kardinalnog broja moraju početi na različitim mjestima niza, trivijalna donja granica za duljinu univerzalnog niza je $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ što je prema Stirlingovoj formuli približno jednako $\sqrt{\frac{2}{\pi n}}2^n$. Trivijalna gornja granica za duljinu najkraćeg univerzalnog niza postiže se na zapisu svih podskupova u nizu jedan za drugim. Kako imamo 2^n podskupova, a prosječna duljina im je $n/2$, duljina rezultirajućeg univerzalnog skupa je $n2^{n-1}$. Koristeći Dilworthov teorem možemo dobiti univerzalni niz koji je oko n puta (točno $n\pi/4$ puta) kraći od ovog trivijalnog!

Teorem 2.9. ***(Lipski, 1978.)*** *Za $\{1,2,\dots,n\}$ postoji univerzalni skup duljine najviše $2^{n+1}/\pi$.*

Dokaz. *Razmatramo slučaj kada je n paran, recimo $n = 2k$ (slučaj za neparni n dobije se na sličan način). Neka je $S = \{1, 2, \ldots, k\}$ i $T = \{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$. Prema teoremu 2.8. i S i T imaju dekompoziciju svog parcijalno uređenog skupa svih podskupova u $m = \binom{k}{k/2}$ simetričnih lanaca:

$$2^S = \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_m, \quad 2^T = \mathcal{D}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_m.$$

Svakom odgovarajućem lancu

$$\mathcal{C}_i = \{x_1, \ldots, x_j\} \subset \{x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}\} \subset \cdots \subset \{x_1, \ldots, x_h\}, \quad j + h = k$$

pridružujemo niz $C_i = (x_1, \ldots, x_h)$. Tada se svaki podskup od S pojavljuje kao *početni* dio jednog od nizova $C_1, \ldots, C_m$. Slično, neka su $D_1, \ldots, D_m$ redom nizovi koji na ovaj način odgovaraju lancima $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_m$. Označimo li s $\overline{D_i}$ niz dobiven zapisom niza D_i u obratnom poretku, tada se svaki podskup od T pojavljuje kao *završni* dio jednog od nizova $\overline{D_1}, \ldots, \overline{D_m}$. Pogledajmo sada niz

$$L = \overline{D_1}C_1\overline{D_1}C_2 \ldots \overline{D_1}C_m \ldots \overline{D_m}C_1\overline{D_m}C_2 \ldots \overline{D_m}C_m.$$

Tvrdimo da je L univerzalni niz za skup $\{1, 2, \ldots, n\}$. Doista, svaki od njegovih podskupova A se može zapisati kao $A = E \cup F$ gdje je $E \subseteq S$ i $F \subseteq T$. F se pojavljuje kao završni dio nekog $\overline{D_f}$, a E kao početni dio nekog C_e; zato se čitav A pojavljuje u nizu L kao dio od $\overline{D_f}C_e$. Tako niz L sadrži svaki podskup od $\{1, 2, \ldots, n\}$. Duljina niza L je najviše

$$km^2 = k\binom{k}{k/2}^2.$$

Prema Stirlingovoj formuli imamo aproksimaciju

$$\binom{k}{k/2} \sim 2^k\sqrt{\frac{2}{k\pi}},$$

odnosno za duljinu niza L

$$km^2 \sim k\frac{2}{k\pi} \cdot 2^{2k} = \frac{2}{\pi}2^n = \frac{2^{n+1}}{\pi}.$$

■

2.3.4. Antilanci u partitivnim skupovima, Spernerov teorem

Definicija 2.10. *Familija skupova $\mathcal{F}$ je* ***antilanac*** *ili* ***Spernerov sustav*** *ako nijedan skup iz $\mathcal{F}$ ne sadrži neki drugi skup iz $\mathcal{F}$, tj. $A, B \in \mathcal{F}$, $A \neq B \Longrightarrow A \subsetneq B$.*

Ova definicija je samo specijalni slučaj za antilanac u parcijalno uređenom skupu familije skupova s inkluzijom kao parcijalnim uređajem.

Najjednostavniji primjer antilanaca nad $\{1, 2, \ldots, n\}$ su skupovi s fiksiranim kardinalnim brojem, tj. k-člani podskupovi za svaki $k = 1, \ldots, n$. Svaki od ovih antilanaca ima $\binom{n}{k}$ članova. Kako za $k = \lfloor n/2 \rfloor$ dobijemo najveći od binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}$, antilanci duljine $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ sigurno postoje. Postoje li dulji antilanci od ovih?

Negativan odgovor na ovo pitanje dao je Emanuel Sperner 1928. u sljedećem teoremu.

Teorem 2.10. ***(Sperner 1928.)*** *Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova n-članog skupa. Ako je $\mathcal{F}$ antilanac, onda vrijedi*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Bolji rezultat od Spernerovog teorema, LYM nejednakost, dao je Lubell 1966. a isti rezultat su nezavisno otkrili Meshalkin 1963. i (u nešto drugačijoj varijanti) Yamamoto 1954.

Teorem 2.11. ***(LYM nejednakost)*** *Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova n-članog skupa X. Ako je $\mathcal{F}$ antilanac, onda vrijedi*

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1.$$

Primjetimo da Spernerov teorem slijedi iz LYM nejednakosti: kako je $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ odmah imamo

$$|\mathcal{F}| \cdot \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}^{-1} \leq \sum_{A \in \mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1.$$

Slijedi elegantan Lubellov dokaz LYM nejednakosti i potom još jedan pomoću permutacija.

Dokaz. *Prvi dokaz.* Za svaki podskup A točno $|A|!\,(n - |A|)!$ maksimalnih lanaca nad X sadrži A (vidite zadatak 2.23). Kako ni jedan od $n!$ maksimalnih lanaca nema s $\mathcal{F}$ više od jednog zajedničkog elementa vrijedi

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} |A|!\,(n - |A|)! \leq n!.$$

Podijelimo obje strane nejdnakosti s $n!$ i tvrdnja je dokazana.

*Drugi dokaz**. Ideja ovog dokaza je pridružiti svakom podskupu $A \subseteq X$ permutaciju skupa X i potom ih prebrojiti. Za a-člani skup A kažemo da permutacija $x_1, \dots, x_n$ skupa X *sadrži* A ako je $\{x_1, \dots, x_a\} = A$. Primjetimo A je sadržan u točno $a!\,(n - a)!$ permutacija. Ako je $\mathcal{F}$ antilanac, onda svaka od $n!$ permutacija sadrži najviše jedan $A \in \mathcal{F}$. Stoga je

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} a!\,(n - a)! \leq n!$$

i tvrdnja slijedi. ■

Kako smo već bili spomenuli u podpoglavlju 2.3.2 maksimalni lanci su u bijektivnoj korespodenciji s permutacijama skupa X na sljedeći način: svaka permutacija $x_1, \ldots, x_n$ daje maksimalni lanac

$$\{x_1\} \subset \{x_1, x_2\} \subset \cdots \subset \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Na ovaj način iz drugog dokaza slijedi prvi i obratno.

2.3.5. Bollobásov teorem*

Sljedeći teorem Béle Bollobása je jedan od kamena temeljaca u ekstremalnoj kombinatorici. Njegova važnost, između ostalog, se odražava u velikom broju objavljenih dokaza kao i broju različitih generalizacija. Spernerov teorem i LYM nejednakost njegovi su specijalni slučajevi.

Teorem 2.12. ***(Bollobásov teorem)*** *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a-člani skupovi i $B_1, B_2, \ldots, B_m$ b-člani skupovi takvi da je $A_i \cap B_j = \emptyset$ ako i samo ako je $i = j$. Tada vrijedi*

$$m \leq \binom{a+b}{a}.$$

Dokaz ne navodimo jer je Teorem 2.12 specijalan slučaj sljedećeg teorema za $a_i = a$, $b_i = b$, $i = 1, \ldots, m$.

Teorem 2.13. ***(Bollobás 1965.)*** *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_m$ i $B_1, B_2, \ldots, B_m$ dva niza skupova i neka je $A_i \cap B_j = \emptyset$ ako i samo ako je $i = j$. Tada vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \leq 1, \tag{2.3}$$

gdje je $a_i = |A_i|$ i $b_i = |B_i|$.

Dokaz. *Prvi dokaz.* Neka je X unija svih skupova $A_i \cup B_i$. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po $n = |X|$. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi, pa pretpostavimo da vrijedi za $n - 1$. Za svaki element $x \in X$ pogledajmo familiju parova

$$\mathcal{F}_x = \{(A_i, B_i \setminus \{x\}) : x \notin A_i\}.$$

Kako svaka od ovih familija $\mathcal{F}_x$ ima manje od n točaka, možemo primijeniti pretpostavku indukcije za svaku od njih i zbrojiti odgovarajuće nejednakosti (2.3). U zbroju tada imamo $n - a_i - b_i$ puta član $\binom{a_i+b_i}{a_i}^{-1}$ koji odgovara elementima $x \notin A_i \cup B_i$ i b_i puta član $\binom{a_i+b_i-1}{a_i}^{-1}$ koji odgovara elementima $x \in B_i$. Kako zbroj nije veći od n, dobivamo

$$\sum_{i=1}^{m} (n - a_i - b_i) \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} + b_i \binom{a_i + b_i - 1}{a_i}^{-1} \leq n.$$

Zbog

$$\binom{k-1}{l} = \frac{k-l}{k}\binom{k}{l}$$

i-ti član ovog zbroja jednak je

$$n \cdot \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1}.$$

Podijelimo obje strane nejdnakosti s n i tvrdnja je dokazana.

*Drugi dokaz**. U ovom dokazu koristimo Lubellovu metodu prebrojavanja permutacija. Neka je kao i u prvom dokazu X unija svih skupova $A_i \cup B_i$. Ako su A i B disjunktni podskupovi od X onda kažemo da permutacija $x_1, \ldots, x_n$ skupa X *razdvaja* par (A, B) ako ni jedan element od B ne prethodi neki element od A, tj. ako je $x_k \in A$ i $x_l \in B$ onda je $k < l$.

Svaka od $n!$ permutacija može razdvojiti najviše jedan od parova (A_i, B_i), $i = 1, \ldots, m$, jer ako pretpostavimo da permutacija $x_1, \ldots, x_n$ razdvaja dva para (A_i, B_i) i (A_j, B_j) za $i \neq j$ i prepostavimo da je

$$\max\{k : x_k \in A_i\} \leq \max\{k : x_k \in A_j\}$$

vrijedi

$$\min\{l : x_l \in B_j\} > \max\{k : x_k \in A_j\} \geq \max\{k : x_k \in A_i\}.$$

Odavde slijedi $A_i \cap B_j = \emptyset$ što je u kontradikciji s pretpostavkom.

Sada ćemo dati ocjenu za broj permutacija koje razdvajaju jedan fiksirani par. Ako je $|A| = a$, $|B| = b$ i A i B su disjunktni onda par (A, B) razdvaja točno

$$\binom{n}{a+b} a!b!\,(n-a-b)! = n!\binom{a+b}{a}^{-1}$$

permutacija. Ovdje je $\binom{n}{a+b}$ broj načina za odabir pozicije $A \cup B$ u permutaciji. Nadalje A može na $a!$ načina zauzeti prvih a mjesta u permutaciji, potom B može na $b!$ načina zauzeti sljedećih b mjesta u permutaciji, a preostale elemente možemo izabrati na $(n-a-b)!$ načina.

Kako ni jedna permutacija ne može razdvojiti dva različita para (A_i, B_i), zbrajajući po svim parovima (A_i, B_i), $i = 1, \ldots, m$, svaku permutaciju dobijemo najviše jednom i zato je

$$\sum_{i=1}^{m} n!\binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \leq n!$$

Tvrdnja slijedi nakon dijeljenja obje strane nejednakosti s $n!$. ■

Tuza je 1984. zapazio da Bollobásov teorem povlači i Spernerov teorem i LYM nejednakost: neka je $A_1, A_2, \ldots, A_m$ antilanac nad skupom X i neka je $B_i = X \setminus A_i$. Označimo $a_i = |A_i|$ i $b_i = |B_i|$ pa je $b_i = n - a_i$ i prema (2.3)

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{n}{|A_i|}^{-1} = \sum_{i=1}^{m} \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \leq 1.$$

Spomenuli smo da je Bollobásov rezultat važan i zbog toga što ima veliki broj različitih generalizacija. Ovdje za primjer iznosimo dvije.

Teorem 2.14. ***(Tuza 1985.)*** *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_m$ i $B_1, B_2, \ldots, B_m$ dva niza skupova i neka je $A_i \cap B_i = \emptyset$ i za $i \neq j$ je ili $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ ili $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ (ili oboje). Tada za svaki realan broj $p \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijedi nejednakost*

$$\sum_{i=1}^{m} p^{|A_i|} (1-p)^{|B_i|} \leq 1.$$

Teorem 2.15. ***(Frankl 1982.)*** *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_m$ i $B_1, B_2, \ldots, B_m$ dva niza konačnih skupova i neka je $A_i \cap B_i = \emptyset$ i $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ za $i < j$. Neka je i $|A_i| \leq a$ i $|B_i| \leq b$. Tada vrijedi*

$$m \leq \binom{a+b}{a}.$$

Teorem 2.14. dokazati ćemo vjerojatnosnom metodom, a teorem 2.15 metodom linearne algebre u narednim poglavljima.

Zadatak 2.16. *Napišite Hasseov dijagram za skup svih djelitelja broja* 40 *s djeljivošću kao parcijalnim uređajem.*

Rješenje: *Imamo* 5 *nivoa u Hasseovom dijagramu za skup svih djelitelja broja* 40 *i to su:* $1;\ 5, 2;\ 10, 4;\ 20, 8;\ 40$. *Spojeni parovi su:* $\{1,2\}$, $\{2,4\}$, $\{4,8\}$, $\{5,10\}$, $\{10,20\}$, $\{20,40\}$, $\{1,5\}$, $\{2,10\}$, $\{4,20\}$, $\{8,40\}$.

Zadatak 2.17. *Napišite Hasseov dijagram za skup binarnih vektora iz $\{0,1\}^3$ s parcijalnim uređajem $(a_1, a_2, a_3) \preccurlyeq (b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow a_i \leq b_i$, $\forall i \in \{1,2,3\}$.*

Rješenje: *Hasseov dijagram za skup binarnih vektora iz $\{0,1\}^3$ izgleda kao Hasseov dijagram za podskupove skupa $\{x, y, z\}$ s inkluzijom kao parcijalnim uređajem, jer imamo bijektivnu korespodenciju binarnih vektora iz $\{0,1\}^3$ i svih podskupova tročlanog skupa, koja čuva ove parcijalne uređaje. Primjerice elementu* 101 *odgovara podskup koji sadrži prvi i treći element, a drugi ne sadrži.*

Zadatak 2.18. *Napišite Hasseov dijagram za skup ternarnih vektora iz $\{0,1,2\}^2$ s parcijalnim uređajem $(a_1, a_2) \preccurlyeq (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_i \leq b_i$, $\forall i \in \{1,2\}$.*

Rješenje: *Imamo* 5 *nivoa u Hasseovom dijagramu za skup ternarnih vektora iz $\{0,1,2\}^2$ i to su:* $00;\ 01, 10;\ 02, 11, 20;\ 12, 21;\ 22$. *Spojeni parovi su:* $\{00,01\}$, $\{00,10\}$, $\{01,02\}$, $\{01,11\}$, $\{10,11\}$, $\{10,20\}$, $\{02,12\}$, $\{11,12\}$, $\{11,21\}$, $\{20,21\}$, $\{12,22\}$, $\{21,22\}$.

Zadatak 2.19. *U skupu svih podskupova skupa $\{1,2,3\}$ s inkluzijom kao parcijalnim uređajem odredite jedan najdulji lanac i najdulji antilanac. Potom odredite jednu particiju ovog parcijalno uređenog skupa u antilance i jednu particiju u lance.*

Rješenje: *Najdulji lanac je primjerice $\emptyset \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\}$,*
najdulji antilanac $\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}$,
particija u antilance $\{\emptyset\}\ \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}\ \{\{1,2\}\ \{1,3\}\ \{2,3\}\}\ \{\{1,2,3\}\}$,
particija u lance $\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}\ \{\{2\}, \{2,3\}\}\ \{\{3\}, \{1,3\}\}$.

Zadatak 2.20. *U skupu svih djelitelja broja* 60 *s djeljivošću kao parcijalnim uređajem odredite jedan najdulji lanac i najdulji antilanac. Potom odredite jednu particiju ovog parcijalno uređenog skupa u antilance i jednu particiju u lance.*

Rješenje: *Primjerice najdulji lanac je* $1, 2, 4, 12, 60$,
najdulji antilanac $4, 6, 10, 15$,
particija u antilance $\{1\}\,\{2,3,5\}\,\{4,6,10,15\}\,\{12,20,30\}\,\{60\}$,
particija u lance $\{1,5,15,30,60\}\,\{3,6,12\}\,\{2,10\}\,\{4,20\}$.

Zadatak 2.21. *Neka u parcijalno uređenom skupu* P *najdulji lanac ima duljinu* r*. Prema teoremu 2.6 tada* P *ima dekompoziciju u* r *antilanaca. Osim konstrukcije iz dokaza teorema 2.6, pokažite da se do ove dekompozicije može doći i na sljedeći način: neka je* A_1 *skup maksimalnih elemenata u* P*;* A_2 *skup maksimalnih elemenata u* $P \setminus A_1$*;* A_3 *skup maksimalnih elemenata u* $P \setminus (A_1 \cup A_2)$*; itd.*

Rješenje: *U skupu* A_1 *maksimalnih elemenata u* P *ili skupu* A_2 *maksimalnih elemenata u* $P \setminus A_1$ *ili skupu* A_3 *maksimalnih elemenata u* $P \setminus (A_1 \cup A_2)$*,.. nikoja dva elementa ne mogu biti usporediva, jer onda ne bi istovremeno oba mogla biti maksimalna. Zato su* A_i *antilanci. Kako* A_i *u presjeku s najduljim lancem imaju najviše jedan element, a u lancu je uvijek jedan element maksimalan, u svakom* A_i *će biti točno po jedan različiti element iz maksimalnog lanca, dakle* $i = 1, \dots, r$.

Zadatak 2.22. *Dokažite da svih lanaca duljine* n *u* 2^X, $|X| = n$, *ima* $n!$.

Rješenje: *U lancu* $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$ *duljine* n *vrijedi* $|A_1| = |A_2 \setminus A_1| = \cdots = |A_n \setminus A_{n-1}| = 1$*. Element u* A_1 *možemo izabrati na* n *načina, potom element u* $A_2 \setminus A_1$ *na* $n-1$ *načina, element u* $A_3 \setminus A_2$ *na* $n-2$ *načina,..., element u* $A_n \setminus A_{n-1}$ *na* 1 *način. Zato ovakvih lanaca ima* $n!$.

Zadatak 2.23. *Dokažite da svih lanaca duljine* n *u* 2^X, $|X| = n$ *koji sadrže neki zadani skup* A *ima* $|A|!\,(n - |A|)!$.

Rješenje: *U lancu* $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$ *koji sadrži neki zadani skup* A *podskupove od* A *možemo izabrati na* $|A|!$ *načina, a nadskupove od* A *na* $(n - |A|)!$ *načina. Zato ovakvih lanaca ima* $|A|!\,(n - |A|)!$.

Zadatak 2.24. *U skupu* 2^X, $|X| = 4$ *odredite jedan antilanac duljine* 3 *čiji elementi nisu svi istog kardinalnog broja i jedan antilanac za kojeg se postiže granica u nejednakosti Spernerovog teorema.*

Rješenje: *Antilanac duljine* 3 *čiji elementi nisu svi istog kardinalnog broja je* $\{1,2,3\}, \{1,2,4\}\,\{3,4\}$ *i antilanac za kojeg se postiže granica u nejednakosti Spernerovog teorema je* $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$.

Zadatak 2.25. *Neka je* $\mathcal{F}$ *Spernerov sustav (antilanac) u* 2^X, $|X| = n$ *koji se sastoji od skupova kardinalnog broja najviše* k, $k \le n/2$*. Dokažite da je* $|\mathcal{F}| \le \binom{n}{k}$.

Rješenje: *Za svaki* $A \in \mathcal{F}$ *je* $\binom{n}{|A|} \le \binom{n}{k}$*, pa iz LYM nejednakosti dobijemo*

$$|\mathcal{F}| \cdot \binom{n}{k}^{-1} \le \sum_{A \in \mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \le 1 \implies |\mathcal{F}| \le \binom{n}{k}.$$

Poglavlje 3.

Osnove Ramseyeve teorije

Ramseyeva teorija se bavi pitanjima tipa: "koliko elemenata neka struktura mora imati da bi imala neko određeno svojstvo?" i zato je dio ekstremalne kombinatorike. Preciznije, teoremi Ramseyevog tipa tvrde da svaka iregularna struktura ako je dovoljno velika sadrži regularnu podstrukturu. Primjerice, dovoljno dugi nizovi sadrže aritmetičke podnizove, dovoljno veliki grafovi sadrže potpune podgrafove i sl.

Frank Plumpton Ramsey je 1930. svojim radom *"On a problem in formal logic"* pokrenuo razvoj tada nove grane diskretne matematike, *Ramseyeve teorije.* Nekoliko godina kasnije, 1935. Erdős i Szekeres su radeći na jednom problemu iz geometrije napravili neočekivanu poveznicu konveksnih mnogokuta s bojanjem bridova u grafu, odnosno Ramseyevom terijom. Taj rezultat bio je prvi korak k popularizaciji Ramseyeve teorije. Također, B. L. van der Waerden je 1927. dokazao teorem: za zadane prirodne brojeve n i r, postoji najmanji broj $W(n,r)$ takav da ako je niz od $W(n,r)$ uzastopnih prirodnih brojeva obojan u r različitih boja, onda on sadrži aritmetički niz duljine n s jednobojnim elementima. Tek 1963. A. W. Hales i R. I. Jewett su u Van der Waerdenovom teoremu prepoznali kombinatornu srž i s nekoliko njihovih novih poopćenja ovog teorema započeo je najintezivniji razvoj Ramseyeve teorije. Osim u raznim matematičkim granama, ova teorija se primjenjuje i u računarstvu, primjerice u tzv. "multi-party communication complexity" (više o tome u [1]).

3.1. Bojanja i Ramseyevi brojevi

Ramseyeva teorija općenito se bavi bojanjem objekata. Dirichletovo načelo je najjednostavniji (jednodimenzionalni) rezultat koji pripada ovoj teoriji. U terminima bojanja ono glasi: ako $r+1$ predmeta obojimo s r boja, onda sigurno postoje dva predmeta iste boje. Nešto općenitiji je sljedeći rezultat.

Propozicija 3.1. *Neka je $n \geq rs - r + 1$ i neka je n objekata obojano u r različitih boja. Tada postoji s objekata iste boje. Štoviše, nejednakost je najbolja moguća.*

Dokaz. Pretpostavimo obratno, imamo najviše $s-1$ objekata u svakoj boji. Ukupno ih je zato najviše $r(s-1)$ što je kontradikcija s pretpostavkom propozicije $n \geq rs - r + 1$.

Dokažimo kontraprimjerom da je nejednakost $n \geq rs - r + 1$ najbolja moguća u smislu da se broj $rs - r + 1$ ne može smanjiti. Za $n = rs - r$ možemo obojati po točno $s - 1$ objekata u svakoj boji, pa uz pretpostavku $n \geq rs - r$ tvrdnja teorema više nebi vrijedila. ■

Prethodna propozicija je jednodimenionalan rezultat Ramseyevog tipa, u slučaju viših dimenzija umjesto objekata bojamo čitave podskupove objekata. U tom kontekstu Ramseyev teorem iz 1930. glasi: za svako bojanje k-članih podskupova dovoljno velikog skupa X postoji s-člani podskup od X čiji su svi k-članih podskupovi iste boje.

Slijedi definicija **Ramseyevih brojeva**.

Definicija 3.1. *Neka su $r, k, s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{N}$ i $s_1, \ldots, s_r \geq k$. Broj $R_r(k; s_1, \ldots, s_r)$ označava* ***najmanji*** *broj $n \in \mathbb{N}$ sa svojstvom: ako su k-člani podskupovi n-članog skupa obojani bojama $1, \ldots, r$, onda za neki $i \in \{1, \ldots, r\}$ postoji s_i-člani podskup čiji svi k-člani podskupovi su boje i.*

Ako je $s_1 = s_2 = \cdots = s_r = s$ onda se ovaj broj označava kraće s $R_r(k; s)$.

Dirichletovo načelo dakle tvrdi da je $R_r(1; 2) = r + 1$, a propozicija 3.1 da je $R_r(1; s) = rs - r + 1$. Kako je $k = 1$ ovo je jednodimenzionalni rezultat.

Za $k \geq 2$ nije apriori jasno da svi Ramseyevi brojevi postoje, odnosno da su konačni. U to ćemo se uvjeriti u poglavljima 3.2 i 3.3.

Zadatak 3.1. *Dokažite da je $R_2(1; s, t) = s + t - 1$.*

Ideja: suprotnom pretpostavkom, da imamo manje od s elemenata prve boje i manje od t elemenata druge boje, došli bi do kontradikcije za ukupan broj elemenata

$$s + t - 1 = R_2(1; s, t) < (s - 1) + (t - 1).$$

3.2. Ramseyevi teoremi za grafove

3.2.1. 2-bojanja bridova grafova

Na skupu vrhova bojati ćemo dvočlane podskupove: bridove, pa je ovo dvodimenzionalni slučaj $k = 2$. Dodatno, za $r = 2$ odnosno za bojanja s dvije boje (kraće 2-bojanja) umjesto $R_2(2; s, t)$ u ovom podpoglavlju koristiti ćemo kraću oznaku $R(s, t)$.

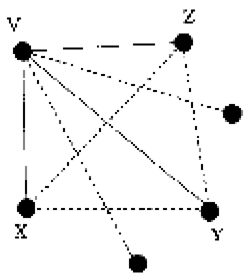
Promotrimo sljedeću igru: neka imamo 6 točaka u ravnini tako da nikoje 3 ne leže na istom pravcu. Dva igrača, jedan s plavom, drugi s crvenom olovkom, naizmjenice spajaju po dva vrha dužinom. Pobjednik je onaj koji uspije dobiti trokut u svojoj boji. Pokazati ćemo da ova igra nikad ne može završiti neriješeno. U terminima Ramseyevih brojeva imamo dvije boje $r = 2$, bridovi su dvočlani podskupovi skupa vrhova, tj. $k = 2$ i tražimo tročlani skup vrhova čiji su svi dvočlani podskupovi jednobojni. Da igra nikad ne završava neriješeno u terminima Ramseyevih brojeva glasi $R(3,3) \leq 6$.

S ovim u vezi je i problem 1. iz uvoda: koliko ljudi možemo pozvati na zabavu ako želimo da među bilo koje troje od njih postoje dvoje koji se poznaju i dvoje koji se ne poznaju?

Argumentom *Ramseyevog tipa* ćemo pokazati da najviše 5 ljudi može biti na ovakvoj zabavi. Odnosno, među 6 ljudi uvijek postoji troje koji se svi međusobno poznaju ili se međusobno ne poznaju. Zamislimo da osobe iz prethodnog primjera odgovaraju vrhovima grafa, brid između njih obojimo crveno ako se osobe poznaju, odnosno, u plavo ako se ne poznaju. Želimo pokazati da u ovakvom grafu sa 6 vrhova uvijek postoji jednobojni trokut, dok za 5 vrhova ne mora postojati. U terminima Ramseyevih brojeva to glasi $R(3,3) = 6$.

Propozicija 3.2. *Vrijedi* $R(3,3) = 6$.

Dokaz. Najprije dokažimo $R(3,3) \leq 6$. Uzmimo proizvoljan vrh V. Kako je svih $\binom{6}{2} = 15$ bridova u ovom grafu ili crvene ili plave boje, a stupanj vrha V je 5, prema Dirichletovom načelu najmanje 3 brida iste boje su incidentna vrhu V. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je ta boja crvena i da su to bridovi $\{V, X\}$, $\{V, Y\}$ i $\{V, Z\}$. (Na slici su crveni bridovi označeni punom linijom, a plavi iscrtkanom).



Ako bi neki od bridova $\{X, Y\}$, $\{Y, Z\}$, $\{X, Z\}$ bio crvene boje imali bi crveni trokut. Ako nijedan od bridova $\{X, Y\}$, $\{Y, Z\}$, $\{X, Z\}$ nije crvene boje, onda imamo plavi trokut X, Y, Z. S ovim je dokazano $R(3,3) \leq 6$.

Kontraprimjerom ćemo pokazati $R(3,3) > 5$, da rezultat ne vrijedi za graf s 5 vrhova: obojimo crvenom bojom sve stranice peterokuta, a plavom sve dijagonale. Među ovako obojanim bridovima očito nema istobojnog trokuta.

Kako je $R(3,3) \leq 6$ i $R(3,3) > 5$ slijedi $R(3,3) = 6$. ■

Zadatak 3.2. *Dokažite da je* $R(s,2) = s$ *i* $R(2,t) = t$ *za sve* $t, s \in \mathbb{N}$.

Rješenje: *Tvrdnja* $R(s,2) = s$ *znači da u grafu sa* s *vrhova čiji su bridovi obojani u dvije boje ili su svi bridovi prve boje, pa imamo* K_s *kliku u prvoj boji, ili je barem jedan brid druge boje. To očito vrijedi. Očito je i da ista tvrdnja ne vrijedi za graf sa* $s-1$ *vrhova: obojamo ih sve prvom bojom.*

Analogno se dokazuje $R(2,t) = t$.

Zadatak 3.3. *Dokažite da vrijedi simetrija $R(s,t) = R(t,s)$ za sve $t, s \in \mathbb{N}$.*

Rješenje: *tvrdnja slijedi zamjenom prve i druge boje.*

Zadatak 3.4. *Dokažite da u svakom grafu s 6 vrhova čiji svi bridovi su obojani u dvije boje postoje barem dva jednobojna trokuta.*

Ideja: jedan trokut već imamo po propoziciji 3.2. BSO pretpostavimo da je crveni. Ako preostale tri točke čine trokut onda smo gotovi. Ako ne, među njima postoji jedan plavi i jedan crveni brid. Koje boje mogu biti bridovi koji spajaju dvije točke plavog brida s točkama crvenog trokuta?

Za bridove proizvoljnog grafa možemo zamišljati da su crveni, a preostale "kojih nema", odnosno za bridove komplementarnog grafa da su plavi. Na ovaj način tvrdnja $R(3,3) = 6$ prethodne propozicije glasi: u svakom grafu s 6 vrhova postoji ili 3-klika ili nezavisan skup od 3 vrha. Prisjetimo se, **klika** je podskup skupa vrhova u kojem su svaka dva vrha susjedna, a podskup skupa vrhova u kojem nikoja dva vrha nisu susjedna je **nezavisan**. Prethodna propozicija samo je specijalni slučaj sljedećeg Ramseyevog teorema koji tvrdi da za sve prirodne brojeve s, t Ramseyev broj $R(s,t)$ postoji.

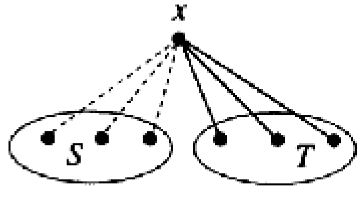
Teorem 3.1. ***(Ramseyev teorem za grafove)*** *Za svaki $s \in \mathbb{N}$ i $t \in \mathbb{N}$ postoji broj $n = R(s,t)$ takav da u bilo kojem grafu s n ili više vrhova uvijek postoji klika sa s vrhova ili nezavisan skup od t vrhova.*

Primjedba 3.1. *U teoremu (i u teoremima koji slijede) nije potrebno posebno naglašavati da se radi o najmanjem broju $n = R(s,t)$ jer je to ispunjeno po definiciji 3.1.*

Dokaz. Za egzistenciju broja $n = R(s,t)$ dovoljno je indukcijom po $s + t$ dokazati da je $R(s,t)$ odozgo ograničen. Za bazu indukcije imamo $R(s,1) = R(1,t) = 1$. Za $r > 1$ i $s > 1$ dokažimo da vrijedi

$$R(s,t) \leq R(s,t-1) + R(s-1,t). \tag{3.1}$$

Neka je $G = (V, E)$ graf s $n = R(s,t-1) + R(s-1,t)$ vrhova. Uzmimo proizvoljan vrh $x \in V$ i razdvojimo skup $V \setminus \{x\}$ na dva podskupa, T koji sadrži sve vrhove koji su susjedni sa x i S one koji nisu (na slici).



Kako je

$$n = R(s,t-1) + R(s-1,t) = |S| + |T| + 1,$$

vrijedi ili $|S| \geq R(s, t-1)$ ili $|T| \geq R(s-1, t)$. U protivnom bi imali kontradikciju:

$$n - 1 = |S| + |T| \leq (R(s, t-1) - 1) + (R(s-1, t) - 1) = n - 2.$$

U slučaju $|S| \geq R(s, t-1)$ pogledajmo inducirani podgraf $G[S]$ od G: to je graf sa skupom vrhova S u kojem su dva brida susjedna onda i samo onda ako su susjedna u G. Kako $G[S]$ ima bar $R(s, t-1)$ vrhova, prema pretpostavci indukcije on sadrži ili kliku sa s vrhova ili nezavisan skup od $t-1$ vrhova. Ali dodamo li vrh x skupu S, podgraf $G[S \cup \{x\}]$, pa zato i G sadrži ili kliku sa s vrhova ili nezavisan skup od t vrhova.

U slučaju $|T| \geq R(s-1, t)$ pogledajmo inducirani podgraf $G[T]$ od G: to je graf sa skupom vrhova T u kojem su dva brida susjedna onda i samo onda ako su susjedna u G. Kako $G[T]$ ima bar $R(s-1, t)$ vrhova, prema pretpostavci indukcije on sadrži ili kliku sa $s-1$ vrhova ili nezavisan skup od t vrhova. Dodamo li vrh x skupu T, podgraf $G[T \cup \{x\}]$, pa zato i G sadrži ili kliku sa s vrhova ili nezavisan skup od t vrhova. ■

Teorem 3.1 kao i drugi teoremi Ramseyevog tipa je nekonstruktivan. On samo garantira egzistenciju Ramseyevih brojeva $R(s, t)$, ali ništa ne govori o tome kako ih izračunati. Primijenimo li nejednakost (3.1) i zadatak 3.2 za $R(4, 3)$, imamo

$$R(4, 3) \leq R(4, 2) + R(3, 3) = 4 + 6 = 10.$$

U sljedećoj propoziciji izračunati ćemo stvarnu vrijednost za $R(4, 3)$ i vidjeti da ova ograda ne mora biti najbolja moguća čak ni za male s i t.

Propozicija 3.3. *Vrijedi* $R(4, 3) = 9$.

Dokaz. Zbog jednostavnosti, promatrajmo opet potpune grafove s obojanim bridovima u crvenoj ili plavoj boji. U dva koraka ćemo pokazati:

(i) $R(4, 3) \leq 9$, tj. svako 2-bojanje klike K_9 sadrži ili crvenu podkliku K_4 ili plavu K_3;

(ii) $R(4, 3) > 8$, tj. prethodna tvrdnja (i) ne vrijedi za K_8.

Dokaz (i): neka je K_9 obojan u dvije boje: crvenu i plavu. Tada postoji vrh V s barem 6 crvenih incidentnih bridova ili barem 4 plava incidentna brida. U suprotnom svih 9 vrhova bi imalo po točno 5 crvenih incidentnih bridova i 3 plava, pa zbroj stupnjeva svih vrhova u crvenom podgrafu $9 \cdot 5 = 45$ nebi bio paran broj.

U prvom slučaju, označimo sa A skup od 6 vrhova crvenih bridova incidentnih s V i različitih od V. Prema propoziciji 3.2 A sadrži ili plavi ili crveni trokut, pa uključimo li i vrh V, naš K_9 sadrži ili plavi trokut ili crvenu kliku K_4.

U drugom slučaju za 4 plava incidentna brida s V, označimo s B skup od njihova 4 vrha različita od V. Ako su svi bridovi od B crveni, onda imamo crvenu kliku K_4. Ako nisu, postoji plavi brid koji zajedno s vrhom V daje plavi trokut.

Dokaz (ii): da bi pokazali $R(4, 3) > 8$, uzmimo K_8 i označimo mu vrhove s brojevima $1, \ldots, 8$ u smjeru kazaljke na satu. Obojimo brid (i, j), $j > i$ plavom bojom ako je $j - i \in \{1, 4, 7\}$, a crvenom inače. Ovaj graf ne sadrži plavi trokut: ako bi i bio najmanji vrh tog trokuta preostala dva bi bila iz skupa $\{i+1, i+4, i+7\}$, međutim između bilo koja dva od ovih vrhova je crveni brid. Na sličan način se vidi da ovaj graf ne sadrži ni crvenu podkliku K_4: ako bi i bio najmanji njen vrh preostala tri bi bila iz skupa $\{i+2, i+3, i+5, i+6\}$, a bridovi $(i+2, i+3)$, $(i+5, i+6)$ i $(i+2, i+6)$ su plavi. ■

Ideje iz prethodne propozicije koristimo za još jedan korak dalje:

Propozicija 3.4. *Vrijedi* $R(4,4) = 18$.

Dokaz. Nejednakost (3.1) i zadatak 3.3 za $R(4,3)$ daje ogradu

$$R(4,4) \leq R(4,3) + R(3,4) = 9 + 9 = 18.$$

U ovom slučaju ograda je najbolja moguća: konstruirati ćemo kontraprimjer grafa sa 17 vrhova koji nema crvenu ni plavu podkliku K_4. Označimo vrhove K_{17} brojevima $1, \ldots, 17$ i obojimo crvenom bojom bridove tzv. *grafa kvadratnih ostataka*, tj. bridove (i,j), $j > i$ za koje je $j - i \in \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$ iz skupa svih mogućih ostataka pri dijeljenju kvadrata prirodnog broja sa 17. Ostale bridove obojimo plavom bojom. Ne teška, (ali dosadna-pa je ovdje ispuštamo) analiza svih slučajeva pokazuje da ovako 2-obojana klika K_{17} ne sadrži jednobojnu podkliku K_4.

■

Pokazali smo da je $R(2,2) = 2$, $R(3,3) = 6$ i $R(4,4) = 18$. Vrijednosti $R(k,k)$ za $k \geq 5$ do danas nisu poznate. Težinu ovog otvorenog problema dobro opisuje Erdősov citat: "Assume an evil spirit order us to compute $R(5,5)$, or else he will destroy all mankind. It may then be best if all mathematicians and computers start working on the answer. If, however, he orders us to compute $R(6,6)$, then we had better think about how to destroy him before he destroys us."

Kako nemamo točnih vrijednosti za simetrične Ramseyeve brojeve $R(k,k)$, $k \geq 5$, ograde su dobrodošle. Gornja ograda posljedica je nejednakosti (3.1).

Teorem 3.2. *Neka su* $k, l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. *Tada vrijedi*

$$R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po $k + l$. Za bazu indukcije imamo $R(2,l) \leq \binom{l}{1} = l$ i $R(k,2) \leq \binom{k}{k-1} = k$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $R(k, l-1)$ i $R(k-1, l)$. Koristeći (3.1) i pretpostavku indukcije dobijemo

$$R(k,l) \leq R(k,l-1) + R(k-1,l) \leq \binom{k+l-3}{k-1} + \binom{k+l-3}{k-2} = \binom{k+l-2}{k-1}$$

a to smo i željeli pokazati. ■

Korolar 3.1. *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. *Tada vrijedi* $R(k,k) \leq 4^{k-1}$.

Dokaz. Koristeći rezultat teorema 3.2 za $l = k$ i zadatak 1.4

$$R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq 4^{k-1}.$$

■

Donju ogradu $R(k,k) > 2^{k/2}$ za $k \geq 3$ dokazao je vjerojatnosnom metodom Erdős 1947. (o tome u poglavlju 4.1.1).

Zadatak 3.5. *Dokažite da svaki graf s* $\binom{k+l}{k}$ *vrhova sadrži ili kliku s* $k+1$ *vrhova ili nezavisan skup od* $l+1$ *vrhova.*

Rješenje: tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po broju vrhova $|V|$. *Za* $k = 1$ *i* $l = 1$ *tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo neka je* $k, l > 1$ *i* $x \in V$. *Ako s* $\overline{G}$ *označimo graf komplementaran grafu* G *(s istim skupom vrhova i* $(u,v) \in G \Leftrightarrow (u,v) \notin \overline{G}$*) onda za stupanj vrha* x *vrijedi*

$$d_G(x) + d_{\overline{G}}(x) = |V| - 1 = \binom{k+l}{k} - 1 = \binom{k+l-1}{k-1} + \binom{k+l-1}{k} - 1.$$

Zato mora biti ispunjeno

$$d_G(x) \geq \binom{k+l-1}{k-1} \quad \text{ili} \quad d_{\overline{G}}(x) \geq \binom{k+l-1}{k},$$

jer bi u protivnom imali kontradikciju

$$d_G(x) + d_{\overline{G}}(x) \leq \binom{k+l-1}{k-1} + \binom{k+l-1}{k} - 2.$$

U prvom slučaju, kada je $d_G(x) \geq \binom{k+l-1}{k-1}$ *označimo sa* W *skup vrhova incidentnih s* x. *Po pretpostavci indukcije graf induciran skupom vrhova* W*, sadrži ili kliku s* k *vrhova ili nezavisan skup od* $l+1$ *vrhova. Uključimo li ovdje i vrh* x *onda graf induciran skupom vrhova* $W \cup \{x\}$ *ima kliku s* $k+1$ *vrhova ili nezavisan skup od* $l+1$ *vrhova.*

U drugom slučaju, kada je $d_{\overline{G}}(x) \geq \binom{k+l-1}{k}$, *po pretpostavci indukcije graf induciran skupom vrhova* $V \setminus W \setminus \{x\}$, *sadrži ili kliku s* $k+1$ *vrhova ili nezavisan skup od* l *vrhova. Uključimo li ovdje i vrh* x *onda graf induciran skupom vrhova* $V \setminus W$ *ima kliku s* $k+1$ *vrhova ili nezavisan skup od* $l+1$ *vrhova.*

Drugo kraće rješenje: treba pokazati da je $R(k+1, l+1) \leq \binom{k+l}{k}$, *a ovo direktno slijedi iz prethodnog teorema.*

Zadatak 3.6. *U nogometnom razigravanju sudjeluje* 18 *timova. Dokažite da i nakon* 8 *kola igre, postoje tri tima među kojima nikoja dva nisu međusobno igrala.*

Rješenje: uzmimo bilo koji tim A. *Nakon* 8 *kola igre tim* A *nije igrao s* $18 - 1 - 8 = 9$ *timova. Ako bilo koja od ovih* 9 *timova nisu međusobno igrala, zajedno sa* A *imamo trojku među kojima nikoja dva nisu međusobno igrala. A ako pretpotavimo da su svih* 9 *timova međusobno igrali (u* $\binom{9}{2} = 36$ *utakmica) dobijemo kontradikciju: u jednom kolu među* 9 *timova mogu biti odigrane najviše* 4 *utakmice, u* 8 *kola* 32 *utakmice, pa bi trebalo biti* $32 \geq 36$.

Zadatak 3.7. *Pretpostavimo kao u prethodnom zadatku da imamo* 10 *timova. Nakon koliko najviše kola sigurno postoje tri tima među kojima nikoja dva nisu međusobno igrala?*

Ideja: ista kao u prethodnom zadatku, nakon najviše 4 *kola sigurno postoje tri tima među kojima nikoja dva nisu međusobno igrala. Nakon* 5 *odigranih kola ovakva tri tima ne moraju postojati.*

3.2.2. 3-bojanja bridova grafova

Pretpostavimo da se 17 ljudi dopisuje međusobno o 3 teme. Postoji li uvijek među njima troje koji se svi međusobno dopisuju o istoj temi? Odgovor je potvrdan, dokaz je dan u sljedećoj propoziciji. Ovaj problem generalizira problem 1. iz uvoda: koliko najmanje ljudi mora biti u grupi da među njima sigurno postoje troje koji se međusobno poznaju ili međusobno nepoznaju? Umjesto bojanja grafova s dvije boje sada imamo bojanja s tri boje, odnosno $r = 3$ i tražimo Ramseyeve brojeve $R_3(2; s_1, s_2, s_3)$. Interensantno je da je do danas poznata točna vrijednost samo jednog netrivijalnog, "višebojnog" ($r \geq 3$) Ramseyevog broja i to $R_3(2; 3, 3, 3)$.

Propozicija 3.5. ***(Greenwood-Gleason 1955.)*** *Vrijedi* $R_3(2; 3, 3, 3) = 17$.

Dokaz. Trebamo pokazati da kako god obojimo bridove klike K_{17} crvenom, plavom ili zelenom bojom, uvijek će postojati jednobojni trokut. Uzmimo bilo koji vrh V ovog grafa. Stupanj mu je 16, pa po Dirichletovom načelu najmanje 6 bridova incidentnih vrhu V ima istu boju. Bez smanjenja općenitosti prepostavimo da je to zelena boja. Označimo s A skup od barem 6 vrhova zelenih bridova incidentnih s V i različitih od V. Ako je neki brid koji spaja dva vrha iz A zeleni, imamo jednobojni trokut. Ako ne, svi bridovi s vrhovima u A su crveni ili plavi, pa zbog $R(3, 3) = 6$ tu postoji ili crveni ili plavi trokut. S ovim smo dokazali $R_3(2; 3, 3, 3) \leq 17$, pa preostaje kontraprimjerom pokazati da postoji bojanje grafa K_{16} koje nema jednobojni trokut. Ovdje samo bez daljnjeg dokaza navodimo da postoje dva takva 3-bojanja, a pogledamo li samo istobojne bridove, u bilo kojoj boji i u bilo kojem od ova dva bojanja, dobijemo tzv. Clebschev graf (više o tome na http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey's_theorem). ■

Primjedba 3.2. *Na istoj adresi možete vidjeti i tablicu s poznatim Ramseyevim brojevima. Ukoliko broj do sada nije poznat u tablici je dana njegova donja i gornja ograda.*

3.2.3. r-bojanja bridova grafova*

Teorem 3.1 za dvije boje može se poopćiti za r boja.

Teorem 3.3. *Neka su* $s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{N}$, *$r$ fiksiran prirodni broj. Tada postoji prirodni broj* $N = R_r(2; s_1, \ldots, s_r)$ *takav da ako je* $n \geq N$ *i kako god obojimo bridove potpunog grafa* K_n *bojama* $1, 2, \ldots, r$, *uvijek imamo barem jedan potpun podgraf* K_{s_i} *čiji su svi bridovi boje* i.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po $s_1 + \cdots + s_r$. Tvrdnja za $s_1 = \cdots = s_r = 1$ je trivijalna. Pretpostavimo neka tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve $s_1, \ldots, s_r$ čiji je zbroj manji od m, želimo pokazati da tada tvrdnja vrijedi i za $s_1, \ldots, s_r$ čiji je zbroj jednak m. Prema pretpostavci indukcije brojevi $R_r(2; s_1 - 1, \ldots, s_r)$,...,$R_r(2; s_1, s_2 \ldots, s_r - 1)$ postoje. Uzmimo neka je

$$N = R_r(2; s_1 - 1, s_2, \ldots, s_r) + R_r(2; s_1, s_2 - 1 \ldots, s_r) + \cdots + R_r(2; s_1, s_2 \ldots, s_r - 1) - r + 2.$$

Uzmimo bilo koji vrh V ovog grafa. Po Dirichletovom načelu postoji $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ takav da K_N među incidentnim bridovima vrhu V ima barem $R_r(2; s_1, \ldots, s_i - 1, \ldots, s_r)$ obojanih u boju i (u suprotnom bi imali kontradikciju za ukupan broj $N-1$ bridova incidentnih vrhu V). BSO pretpostavimo da je $i = 1$. Označimo sa S skup svih vrhova ovih bridova, različitih od V i s K_S potpuni graf s skupom vrhova S. Kako imamo barem $R_r(2; s_1 - 1, \ldots, s_r)$ incidentnih bridova vrhu V koji su obojani bojom 1, po definiciji broja $R_r(2; s_1 - 1, \ldots, s_r)$ postoji boja $i \in \{2, \ldots, r\}$ i potpuni podgraf K_{s_i} čiji su svi bridovi boje i, ili K_{s_1-1} čiji su svi bridovi boje 1, pa zajedno s V imamo K_{s_1} čiji su svi bridovi boje 1. ∎

Zadatak 3.8. *Dokažite da vrijedi $R_{r+1}(2; s) \leq R_r(2; R_2(2; s))$.*

Rješenje: Neka je $N = R_r(2; R_2(2; s))$ i neka je dano proizvoljno bojanje u boje $0, 1, 2, \ldots, r$ bridova grafa G s N vrhova. Shvatimo ovo kao r-bojanje poistovješivši boje 0 i 1. Prema izboru broja N ili postoji jednobojni potpuni potgraf s $R_2(2; s)$ vrhova čiji bridovi imaju jednu od boja $2, 3, \ldots, r$ (u tom slučaju je dokaz gotov, jer onda postoji i njegov potpun podgraf s s vrhova i istim svojstvom), ili postoji potpuni potgraf s $R_2(2; s)$ vrhova čiji svi bridovi imaju boju 0 ili 1. Kako je njegov broj vrhova upravo $R_2(2; s)$, on ima jednobojni potpuni podgraf s s vrhova u jednoj od boja 0 ili 1.

3.3. Ramseyevi teoremi za skupove*

Ovo je "višedimenzionalni" slučaj i na skupu vrhova bojati ćemo k-člane podskupove. U slučaju $k = 2$ rezultati se svode na rezultate iz prethodnog poglavlja.

Prisjetimo se, $R_r(k; s)$ označava najmanji broj $n \in \mathbb{N}$ sa svojstvom: ako su k-člani podskupovi n-članog skupa obojani s r boja, onda postoji s-člani podskup čiji svi k-člani podskupovi su iste boje. Ramseyev teorem tvrdi da je $R_r(k; s)$ dobro definiran za sve vrijednosti r, k i $s \geq k$.

3.3.1. 2-bojanja skupova

Pogledajmo prvo slučaj kada imamo samo dvije boje.

Teorem 3.4. *Neka su k, s i t prirodni brojevi i $s, t \geq k$. Tada postoji broj n sa sljedećim svojstvom: kako god obojimo s dvije boje k-člane podskupove n-članog skupa, uvijek postoji l-člani podskup $l \in \{s, t\}$ čiji su svi k-člani podskupovi iste boje.*

Dokaz. U terminima Ramseyevih brojeva ovaj teorem glasi: $R(k; s, t)$ postoji za sve k, s i t prirodne brojeve takve da je $s, t \geq k$.

Mi ćemo ovdje dokazati i jaču tvrdnju: $R(k; s, t) \leq n$, gdje je

$$n = R(k-1; R(k; s-1, t), R(k; s, t-1)) + 1. \tag{3.2}$$

Ovu rekurziju dokazujemo matematičkom indukcijom po k i po s, t. Prema Dirichletovom načelu (zadatak 3.1) vrijedi $R(1; s, t) = s + t - 1$, za sve $s, t \in \mathbb{N}$, a osim toga je i $R(k; l, k) = R(k; k, l) = l$ za sve $k, l \in \mathbb{N}$, $l \geq k$. Po pretpostavci indukcije brojevi $R(k; s-1, t)$ i $R(k; s, t-1)$ postoje. Uzmimo proizvoljan n-člani skup X gdje je n određen s (3.2) i označimo s χ neko bojenje k-članih podskupova od X bojama 0 i 1. Fiksirajmo točku $x \in X$ i neka je $X' = X \setminus \{x\}$, a χ' novo bojanje $(k-1)$-članih podskupova od X' tako da je

$$\chi'(A) = \chi(A \cup \{x\}).$$

Zbog (3.2) i simetrije, možemo pretpostaviti da smo našli podskup $Y \subseteq X'$ takav da je $|Y| = R(k; s-1, t)$ i

$$\chi'(A) = 0 \text{ za sve } (k-1)\text{-člane podskupove } A \text{ od } Y.$$

Pogledajmo sada kako početno bojanje χ djeluje na k-člane podskupove od Y. Zbog $|Y| = R(k; s-1, t)$, Y mora sadržavati t-člani podskup čiji su svi k-člani podskupovi boje 1 (u tom slučaju je dokaz gotov) ili $(s-1)$-člani podskup Z čiji su svi k-člani podskupovi boje 0. Pogledajmo s-člani podskup $Z \cup \{x\}$ i njegov proizvoljni k-člani podskup B. Ako $x \notin B$, onda je B k-člani podskup od Z i zato $\chi(B) = 0$. Ako je $x \in B$ onda je $A = B \setminus \{x\}$ $(k-1)$-člani podskup od Y i zato je opet $\chi(B) = \chi(A \cup \{x\}) = \chi'(A) = 0$. ■

3.3.2. r-bojanja skupova

Teorem 3.5. ***(Ramsey 1930.)*** *Neka su r, k i s prirodni brojevi i $s \geq k$. Tada postoji broj $n = R_r(k; s)$ sa svojstvom: kako god obojimo k-člane podskupove n-članog skupa bojama $1, 2, \ldots, r$, uvijek postoji s-člani podskup čiji svi k-člani podskupovi su iste boje.*

Dokaz. Pokazati ćemo da se dokaz ovog teorema svodi na slučaj za dvije boje $r = 2$, tj. prethodni teorem 3.4, jer vrijedi $R_{r+1}(k; s) \leq R_r(k; R_2(k; s))$.

Neka je $N = R_r(k; R_2(k; s))$ i neka je dano proizvoljno bojanje k-članih podskupova N-članog skupa X bojama $0, 1, 2, \ldots, r$. Shvatimo ovo kao r-bojanje poistovješivši boje 0 i 1 (engl. "mixing color trick"). Prema izboru broja N ili postoji $R_2(k; s)$-člani podskup čiji svi k-podskupovi imaju jednu od boja $2, 3, \ldots, r$ (u tom slučaju je dokaz gotov), ili postoji $R_2(k; s)$-člani podskup Y čiji svi k-podskupovi imaju boju 0 ili 1. Zbog $|Y| = R_2(k; s)$ svi k-podskupovi nekog njegovog s-članog podskupa moraju biti jednobojni. ■

Najopćenitiji oblik Ramseyevog teorema za skupove ovdje samo navodimo; u dokazu se koriste iste tehnike kao i u prethodnim teoremima, samo uz složenije oznake.

Teorem 3.6. *Neka su $s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{N}$, r fiksiran prirodni broj. Tada postoji prirodni broj $N = R_r(k; s_1, \ldots, s_r)$ takav da ako je $n \geq N$ i kako god obojimo k-člane podskupove n-članog skupa bojama $1, 2, \ldots, r$, uvijek postoji barem jedan s_i-člani podskup čiji su svi k-člani podskupovi boje i.*

Zadatak 3.9. *Dokažite poopćenje zadatka 3.2 za 2-bojanja k-članih podskupova: $R(k; l, k) = R(k; k, l) = l$ za sve $k, l \in \mathbb{N}$, $l \geq k$.*

Zadatak 3.10. *Dokažite da za svaki $r \geq 2$ postoji $c(r)$ takav da ako je n dovoljno velik, onda za svako r-bojanje brojeva $1, 2, \ldots, n$ barem $c(r) \cdot n^2$ parova točaka $\{i, j\}$ ima istu boju.*

Ideja: po Dirichletovom načelu svaki $(r+1)$-člani podskup točaka doprinosi barem jednom jednobojnom paru $\{i, j\}$, a svaki par je sadržan u $\binom{n-2}{r-1}$ takvih podskupova.

Zadatak 3.11. *Obojimo sve neprazne podskupove skupa $\{1, \ldots, n\}$ u r boja. Dokažite, ako je n dovoljno velik, onda postoje dva disjunktna neprazna podskupa A i B takvi da A, B i $A \cup B$ imaju istu boju.*

Ideja: uzmimo $n = R_r(2; 3)$ i neka su svi neprazni podskupovi skupa $\{1, \ldots, n\}$ obojani u r boja. Obojimo svaki par $\{i, j\}$, $1 \leq i < j \leq n$ bojom intervala $\{i, i+1, \ldots, j-1\}$. Prema teoremu 3.5 postoji jednobojni trokut $x < y < z$. Uzmimo neka je $A = \{x, x+1, \ldots, y-1\}$ i $B = \{y, y+1, \ldots, z-1\}$.

3.4. Schurov teorem

Sljedeći rezultat koji je 1916. dokazao I. Schur može se smatrati najranijim rezultatom iz područja Ramseyeve teorije. Dokazujući da za svaki r kongruencija

$$x^r + y^r = z^r \pmod{p}, \quad x, y, z, r \in \mathbb{N}$$

ima rješenja za dovoljno velike proste brojeve p, kao međurezultat dobio je ovaj teorem. U originalnom dokazu Schur je dokazao gornju ogradu $S(r) \leq er!$. Ovdje iznosimo jednostavniji dokaz koji je primjena Ramseyevog teorema..

Teorem 3.7. ***(Schur 1916.)*** *Za svaki $r \in \mathbb{N}$ postoji najmanji prirodni broj $n = S(r)$ takav da svaka particija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u r blokova ima jedan blok koji sadrži dva broja x, y i njihov zbroj $x + y$.*

Dokaz. Izaberimo $n = R_r(2; 3)$, tj. broj n za kojeg vrijedi da ako su dvočlani podskupovi n-članog skupa obojani s r boja, onda postoji tročlani podskup čiji svi dvočlani podskupovi su iste boje. Neka je $\chi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, r\}$ neko fiksirano bojanje. Definirajmo bojanje parova χ' s

$$\chi'(\{x, y\}) = \chi(|x - y|).$$

Zbog izbora n postoji χ'-jednobojni trokut s vrhovima $x < y < z$. Vrijedi $\chi(y - x) = \chi(z - y) = \chi(z - x)$ i $(y - x) + (z - y) = z - x$. ■

Zadatak 3.12. *Izračunajte $S(2)$.*

Rješenje: *dokazati ćemo $S(2) = 5$. Pokušajmo obojati skup $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ crvenom i plavom bojom tako da ne dobijemo jednobojnu trojku a, b, c takvu da je $a + b = c$. BSO neka je 1 crvena, onda je 2 plava (zbog $1 + 1 = 2$), 4 je crvena (zbog $2 + 2 = 4$). Tada 3 mora biti plava (zbog $1 + 3 = 4$), pa 5 ne može biti ni plava ni crvena (zbog $5 = 1 + 4 = 2 + 3$). Slijedi da je $S(2) \leq 5$. S druge strane, upravo smo vidjeli da je bojanje skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ redom u boje $\{C, P, P, C\}$ bez jednobojne trojke iz uvjeta zadatka. Slijedi da je $S(2) = 5$.*

Zadatak 3.13. *Dokažite poopćenje Schurovog teorema: za svaki $r \in \mathbb{N}$ i $l \geq 2$ postoji prirodni broj n takav da svaka particija $A_1, A_2, \ldots, A_r$ skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u r blokova ima jedan blok koji sadrži (ne nužno različite) brojeve $x_1, \ldots, x_l$ takve da je $x_1 + \cdots + x_{l-1} = x_l$.*

Ideja: uzmite $n = R_r(2; l)$ i svakom paru $\{x, y\}$ pridružimo boju i ako je $|x - y| \in A_i$.

3.5. Primjene u geometriji

3.5.1. Erdős-Szekeresov teorem za konveksne poligone*

Jednu od najranijih primjena Ramseyevog teorema napravili su Erdős i Szekeres, neočekivano, za konveksne poligone. I upravo ovaj rezultat bio je prvi veliki korak k popularizaciji Ramseyeve teorije.

Prisjetimo se: za skup S u ravnini kažemo da je **konveksan**, ako vrijedi

$$A, B \in S \implies \overline{AB} \subset S.$$

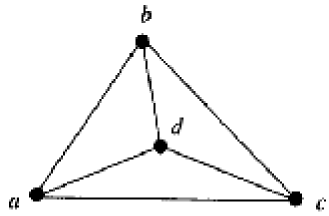
Ovdje iznosimo dokaz kojeg je dao Johnson 1986.

Teorem 3.8. ***(Erdős i Szekeres 1935.)*** *Neka je $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da bilo koji skup od n točaka u Euklidskoj ravnini, od kojih nikoje tri nisu kolinearne, sadrži m točaka koje su vrhovi konveksnog m-terokuta.*

Dokaz. Uzmimo $n = R_2(3; m)$, tj. broj n za kojeg vrijedi da ako su tročlani podskupovi n-članog skupa obojani s dvije boje, onda postoji m-člani podskup čiji svi tročlani podskupovi su iste boje. Neka je A skup od n točaka u Euklidskoj ravnini, od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu (nisu kolinearne). Za $a, b, c \in A$ neka $|abc|$ označava broj točaka iz A koje pripadaju unutrašnjosti trokuta s vrhovima a, b, c. Definirajmo 2-bojanje χ trojki točaka iz A s

$$\chi(\{a, b, c\}) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } |abc| \text{ paran broj} \\ 1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Prema načinu izbora broja n postoji m-člani podskup $B \subseteq A$ takav da su svi njegovi tročlani podskupovi iste boje. Točke skupa B čine traženi m-terokut! U suprotnom bi postojale četiri točke $a, b, c, d \in B$ takve da d pripada unutrašnjosti trokuta abc (kao na slici).



Kako nikoje tri točke iz B nisu kolinearne vrijedi

$$|abc| = |abd| + |acd| + |bcd| + 1,$$

što je u kontradikciji s tim da je bojanje χ konstantno na svim trojkama iz B. ∎

3.5.2. Neke primjene u kombinatornoj geometriji

Sljedeća tri jednostavna primjera drugačija su od ostalih do sada napravljenih i predstavljaju probleme iz *kombinatorne geometrije*. Do sada smo bojali isključivo konačne skupove, a u sljedećim primjerima bojamo točke u ravnini, dakle neprebrojivo beskonačne skupove.

Propozicija 3.6. *Pretpostavimo da su sve točke ravnine obojane crvenom ili plavom bojom. Tada postoji jedinična dužina s istobojnim rubnim točkama.*

Dokaz. Neka je T jednakostraničan trokut stranice duljine 1. Po Dirichletovom principu T mora imati dva jednobojna vrha. Oni su rubne točke tražene dužine. ∎

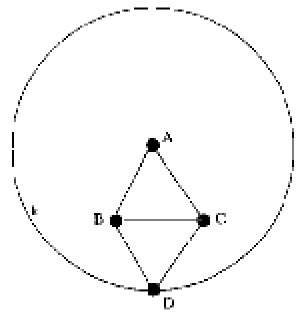
Propozicija 3.7. *Pretpostavimo da su sve točke ravnine obojane crvenom, plavom ili zelenom bojom. Tada postoji jedinična dužina s istobojnim rubnim točkama.*

Dokaz. Neka je opet T jednakostraničan trokut stranice duljine 1 i vrhovima A, B, C. Ako sve tri točke A, B, C nisu različitih boja, imamo traženu dužinu. U protivnom dodajmo drugi jednakostraničan trokut T' stranice duljine 1 na jednu od stranica trokuta T, recimo BC (kao na slici).

Ako vrh D trokuta T' nije iste boje kao i A, imamo traženu dužinu. Ako ne A i D su iste boje i duljina dužine $\overline{AD}$ je $\sqrt{3}$. Primjetimo da za trokut T u dokazu nismo koristili nikakvo drugo svojstvo osim da je jednakostraničan i stranice duljine 1. Pa sve ovo možemo ponoviti (neprebrojivo beskonačno puta!) za bilo koji jednakostraničan trokut stranice duljine 1. Na taj način dokazali smo da sve dužine duljine $\sqrt{3}$ imaju jednobojne rubne točke, inače postoji jedinična dužina s tim svojstvom.

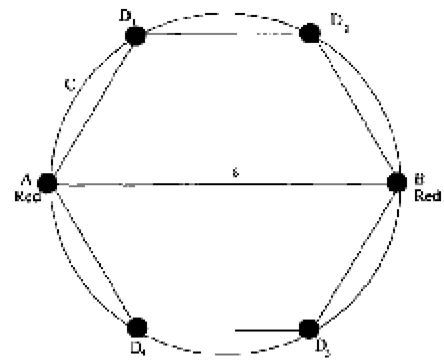
Konačno uzmimo jednu dužinu duljine $\sqrt{3}$ i oko jednog njenog ruba opišimo kružnicu k radijusa $\sqrt{3}$. Sve točke te kružnice također moraju biti jednobojne, a kako na k sigurno postoji tetiva jedinične duljine imamo traženu jediničnu dužinu.

∎



Propozicija 3.8. *Pretpostavimo da su sve točke ravnine obojane crvenom ili plavom bojom. Tada postoji trokut s jednobojnim vrhovima čiji kutevi su jednaki* 30°*,* 60° *i* 90°*, a hipotenuza duljine* 1*.*

Dokaz. Po propoziciji 3.6 postoji jedinična dužina s istobojnim rubnim točkama. Označimo ju sa s, a njezine rubne točke A i B. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su A i B crvene. Neka su nadalje točke D_1, D_2, D_3, D_4 takve da je $AD_1D_2BD_3D_4$ pravilan šesterokut.



Ako je bilo koja od točaka D_1, D_2, D_3, D_4 crvena, ona zajedno s A i B daje vrhove traženog trokuta. Ako su sve D_1, D_2, D_3, D_4 plave imamo čak četiri trokuta sa traženim svojstvom. ■

Zadatak 3.14. *Neka je svaka točka prostora obojana crvenom ili plavom bojom. Dokažite da tada postoji jedinični kvadrat čiji su svi vrhovi plavi, ili jedinični kvadrat čija su barem tri vrha crvena.*

Rješenje: *prvo pretpostavimo da ne postoji dužina duljine* $\sqrt{2}$ *s crvenim rubnim točkama. Tada su sve točke sfere* S *sa središtem u crvenoj točki i radijusa* $\sqrt{2}$ *plave. Bilo koji jedinični kvadrat na* S *je s plavim vrhovima.*

Pretpostavimo sada da postoji dužina $\overline{AB}$ *duljine* $\sqrt{2}$ *s crvenim rubnim točkama. Ako je bilo koja točka kružnice* k *sa središtem u polovištu dužine* $\overline{AB}$*, u ravnini okomitoj na* $\overline{AB}$ *i s radijusom* $\sqrt{2}/2$ *crvena imamo jedinični kvadrat čija su barem* *tri vrha crvena. Ako ne sve točke kružnice k su plave, a ona sadrži beskonačno mnogo jediničnih kvadrata.*

Zadatak 3.15. *Neka je ABC jednakostraničan trokut i neka je E skup svih točaka dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Dokažite da bez obzira kako obojimo svaku točku iz E crvenom ili plavom bojom uvijek postoji pravokutni trokut s jednobojnim vrhovima iz skupa E.*

Rješenje: *označimo s C_1 i C_2 točke koje dijele dužinu $\overline{AB}$ na tri jednaka dijela. Analogno označimo i A_1, A_2 na $\overline{BC}$, B_1, B_2 na $\overline{CA}$. Barem dvije od točaka A_1, B_1, C_1 su iste boje. BSO pretpostavimo neka su A_1 i B_1 crvene boje. Ako je bilo koja od C ili B_2 crvena onda smo gotovi. Ako ne, točke C i B_2 plave. Nadalje ako je C_2 plava pravokutan trokut CB_2C_2 je jednobojan, a ako je C_2 crvena pravokutan trokut $A_1B_1C_2$ je jednobojan.*

Zadatak 3.16. *Dokažite generalizaciju propozicije 3.7 za tri dimenzije: pretpostavimo da su sve točke prostora obojane crvenom, plavom, zelenom ili žutom bojom. Tada postoji jedinična dužina s istobojnim rubnim točkama.*

Rješenje: *pretpostavimo da takva dužina ne postoji i neka je $ABCD$ pravilan tetraedar sa stranicama duljine 1. On mora imati vrhove u različitim bojama. BSO pretpostavimo da je vrh A crvene boje i dopišimo s vanjske strane tetraedra $ABCD$ tetraedar $BCDE$. Vrh E mora biti crvene boje. Kao u propziciji 3.7 zaključujemo da sve točke udaljene za $2h = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ moraju biti iste boje. Posebno, sve točke sfere sa središtem u točki A moraju biti crvene, a kako na sferi uvijek postoje dvije točke udaljene za 1 tvrdnja je dokazana.*

Zadatak 3.17. *Primjerom pokažite da postoji bojanje svih točaka ravnine crvenom ili plavom bojom tako da ne postoji jednakostraničan trokut sa stranicama duljine 1 i jednobojnim vrhovima.*

Rješenje: *neka je $d = \sqrt{3}/2$ duljina visine takvog trokuta. Obojimo svaku točku (x, y) crvenom bojom ako je $\lfloor y/d \rfloor$ paran, odnosno s plavom ako je $\lfloor y/d \rfloor$ neparan. Na ovaj način dobili smo crvene i plave horizontalne pruge, tako da jednakostraničan trokut sa stranicama duljine 1 nije dovoljno malen da bude unutar jedne pruge, niti je dovoljno velik da mu vrhovi budu unutar dvije pruge iste boje.*

Zadatak 3.18. *Pretpostavimo da su sve točke prostora obojane crvenom ili plavom bojom. Dokažite da tada postoji jednakostraničan trokut sa stranicama duljine 1 i jednobojnim vrhovima.*

Rješenje: *pretpostavimo da takav trokut ne postoji. Neka je $\overline{AB}$ dužina duljine 1 s jednobojnim rubnim točkama. BSO možemo pretpostaviti da su A i B crvene boje. Rotirajmo trokut ABC oko stranice $\overline{AB}$. Točka C opisuje kružnicu k radijusa $\sqrt{3}/2$ čije su točke plave boje. Na njoj sigurno postoje dvije točke D i E udaljene za 1. Sada rotirajmo jednakostraničan trokut DEF oko stranice $\overline{DE}$. Točka F opisuje kružnicu l radijusa $\sqrt{3}/2$ čije su točke crvene boje. Ponavljajući ovo za sve moguće izbore točaka D i E na kružnici k, dobijemo torus čije su sve točke crvene boje, a na njemu postoje tri točke koje su vrhovi jednakostraničanog trokuta sa stranicama duljine 1.*

Poglavlje 4.

Osnove vjerojatnosne metode

Vjerojatnosna metoda je vrlo učinkovit alat za dokazivanje egzistencije kombinatornih objekata s određenim svojstvima. Iako se temelji na teoriji vjerojatnosti, koristi se i u područjima koje nemaju doticaja s vjerojatnošću. Jedna od prvih primjena vjerojatnosne metode bila je Turánov dokaz iz 1934. u teoriji brojeva (jednostavniji dokaz rezultata Hardy-Ramanujana iz 1920. da je za velike n broj prostih brojeva koji dijele broj n "jako blizu" broju $\ln \ln n$). U kombinatorici prvi teorem dokazan ovom metodom dao je T. Szele 1943. (teorem o egzistenciji turnira s velikim brojem Hamiltonovih putova). Ali za većinu dokaza i razvoj vjerojatnosne metode zaslužan je P. Erdős. Prvi u nizu njegovih teorema bio je teorem za donju ogradu Ramseyevih brojeva $R(k, k)$.

Vjerojatnosna metoda se osim u kombinatorici primjenjuje u teoriji brojeva, linearnoj algebri, realnoj analizi, kombinatornoj geometriji, a u zadnje vrijeme i u računarskoj znanosti.

Kod mnogih važnih problema ova metoda je dala jedine poznate dokaze. Također, kod nekih drugih gdje su konstruktivni dokazi izuzetno teški, dala je puno jednostavnije dokaze.

U ovom poglavlju opisati ćemo samo najjednostavnije od elementarnih alata vjerojatnosne metode: korištnje nejednakosti za vjerojatnost zbroja događaja (engl. Counting Sieve), Dirichletovo svojstvo za očekivanje i metodu drugog momenta.

4.1. Nejednakost za vjerojatnost zbroja događaja

Ovom najjednostavnijom vjerojatnosnom metodom dokazujemo egzistenciju kombinatornih objekata s određenim svojstvima tako da definiramo prikladan vjerojatnosni prostor i pokažemo da je vjerojatnost slučajno odabranog objekta iz tog prostora koji ima to određeno svojstvo strogo pozitivna. U mnogim važnim problemima ova metoda dala je jedino poznato rješenje, a i u mnogim problemima gdje su konstruktivni dokazi iznimno teški dala je jednostavnije dokaze.

U metodi se koristiti poznato svojstvo da vjerojatnost konačnog zbroja događaja nije veća od zbroja vjerojatnosti tih događaja, tj.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{4.1}$$

Želimo li pokazati da su neki "dobri" događaji mogući, uzmemo da su A_i njima suprotni "loši" događaji i dokažemo da je $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) < 1$, onda slijedi

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) > 1 - 1 = 0,$$

odnosno vjerojatnost je strogo pozitivna da se nijedan od ovih "loših" događaja neostvari (da se ostvare svi "dobri" događaji).

4.1.1. Donja ograda za Ramseyeve brojeve $R(k,k)$

U poglavlju 3.2.1 smo izveli gornju ogradu za Ramseyeve brojeve, a ovdje ćemo pokazati i Erdosőv rezultat za donju ogradu dokazan vjerojatnosnom metodom. U tu svrhu trebamo sljedeću definiciju **slučajnog grafa**.

Definicija 4.1. *Vjerojatnosni prostor slučajnog grafa $G(n,p)$ je konačan vjerojatnosni prostor čiji elementarni događaji su svi grafovi na fiksnom skupu od n vrhova i gdje je vjerojatnost nekog grafa H s m bridova*

$$p(H) = p^m (1-p)^{\binom{n}{2}-m}.$$

Ovaj vjerojatnosni prostor odgovara generiranju slučajnog grafa tako da uključujemo svaki mogući brid nezavisno, s vjerojatnošću p. Za $p = 1/2$ možemo zamišljati da za svaki par vrhova bacamo ispravan novčić, a vrhove povezujemo dobijemo li pismo, dobijemo li glavu vrhovi ostaju nepovezani.

Na sličan način definiramo pojmove poput slučajne permutacije, slučajnog 2-bojanja, slučajne orjentacije turnira i drugih koje ćemo koristiti u sljedećim teoremima.

Teorem 4.1. ***(Erdős 1947.)*** *Ako je $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, onda je $R(k,k) > n$. Posebno, za svaki $k \geq 3$ je*

$$R(k,k) > 2^{k/2-1}.$$

Dokaz. Pogledajmo slučajni graf $G(n,1/2)$ s n vrhova, gdje je vjerojatnost da su bilo koja dva vrha povezana bridom jednaka $1/2$ i nezavisna o drugim bridovima. Za bilo koji skup od k fiksnih vrhova, vjerojatnost da formiraju kliku jednaka je

$$p = 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Ova vjerojatnost je jednaka i za skup od k nezavisnih vrhova. U grafu s n vrhova ima $\binom{n}{k}$ skupova od k vrhova, pa primijenimo li nejednakost (4.1) dobijemo da je

$$P(G(n,1/2) \text{ sadrži } K_k \text{ ili } N_k) \leq 2\binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}}.$$

Ovdje smo sa N_k označili skup od k nezavisnih vrhova. Preostaje izračunati uvjete za n tako da je $2\binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}} < 1$. Uz taj uvjet vjerojatnost događaja "$G(n,1/2)$ ne sadrži ni K_k ni N_k" će biti strogo pozitivna. Koristeći najjednostavniju ocjenu za binomne koeficijente

$$\binom{n}{k} \leq n^k,$$

dobije se

$$2n^k < 2^{k(k-1)/2}$$

što je sigurno ispunjeno ako je

$$n \leq 2^{k/2-1}.$$

Zato postoje grafovi s $\lfloor 2^{k/2-1} \rfloor$ vrhova koji ne sadrže niti K_k niti N_k, pa vrijedi $R(k,k) > 2^{k/2-1}$. ■

Erdős je u originalnom teoremu koristeći nešto bolju aproksimaciju

$$\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{2^{1+k/2}}{2^{k^2/2}} < 1, \quad \text{za} \;\; n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$$

dokazao bolju, dvostruko veću, donju ogradu $R(k,k) > 2^{k/2}$ za $k \geq 3$.

4.1.2. Van der Waerdenov teorem

Na početku 3. poglavlja spomenuli smo van der Waerdenov teorem: za zadane prirodne brojeve r i k, postoji najmanji broj $n = W(r,k)$ takav da za bilo koje bojanje niza $\{1, 2, \ldots, n\}$ u r različitih boja, postoji aritmetički niz duljine k s jednobojnim elementima, tj. postoje $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je niz

$$a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots, a+(k-1)b$$

jednobojan.

Vjerojatnosnom metodom ovdje ćemo dokazati da brojevi $W(r,k)$ rastu eksponencijalno čak i u slučaju 2-bojanja, tj. za $r = 2$.

Teorem 4.2. *Vrijedi $W(2,k) > 2^{k/2}$. Drugim riječima, skup $\{1, 2, \ldots, n\}$ se može obojati u dvije boje tako da ni jedan aritmetički podniz od $2\log_2 n$ članova nije jednobojan.*

Dokaz. Promotrimo slučajno 2-bojanje skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Možemo zamisliti da bacamo novčić n puta za odabir boje svake od n točaka. Za proizvoljan aritmetički podniz S duljine k neka je A_S događaj "S je jednobojan". Tada je

$$P(A_S) = 2 \cdot 2^{-|S|} = 2^{-k+1}.$$

Svaki aritmetički podniz S duljine k jednoznačno je određen s prva dva člana, pa ih ima najviše $\binom{n}{2}$. Kako događaja A_S ima koliko i podnizova S imamo

$$P\left(\bigcup A_S\right) \leq \sum P(A_S) \leq \binom{n}{2}2^{-k+1}$$

pa vrijedi

$$\binom{n}{2}2^{-k+1} < 1 \implies P\left(\bigcap \overline{A_S}\right) > 0.$$

Nejednakost $\binom{n}{2}2^{-k+1} < 1$ je ekvivalentna s $n(n-1) < 2^k$, što je ispunjeno za n za koji je $n^2 \leq 2^k$, odnosno $n \leq 2^{k/2}$. Dakle, ako je $n \leq 2^{k/2}$ onda postoji 2-bojanje skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ tako da ni jedan aritmetički podniz od k članova nije jednobojan. Tvrdnja teorema slijedi. ■

4.1.3. Turniri

Definicija 4.2. ***Turnir*** *(engl. tournament) je potpuni, orjentirani graf* $T = (V, E)$ *bez petlji. Za turnir kažemo da ima svojstvo* P_k *ako za svaki* k*-člani podskup vrhova* $S \subseteq V$, $|S| = k$ *postoji* $y \in V \setminus S$ *takav da je* $(y, x) \in E$ *za svaki* $x \in S$.

Kako za turnir vrijedi $(x, x) \notin E$ za sve $x \in V$, i za svaka dva vrha x i y, $x \neq y$ točno jedan od (x, y) i (y, x) pripada E, naziv mu je prirodan: vrhove možemo zamisliti kao igrače od kojih svaka dva igraju po jedan meč i $(x, y) \in E$ ako i samo ako je x pobijedio y.

Svojstvo P_k u ovom kontekstu znači da za svakih k igrača postoji jedan od preostalih $n - k$ igrača koji ih je sve pobijedio.

Teorem 4.3. ***(Erdős 1963.)*** *Ako je* $\binom{n}{k}\left(1 - 2^{-k}\right)^{n-k} < 1$, *tada postoji turnir s* n *vrhova koji ima svojstvo* P_k.

Dokaz. Promotrimo slučajni turnir s n igrača, tj. rezultat svake igre određujemo bacanjem novčića. Za skup S od k igrača neka A_S označava događaj "ni jedan igrač $y \notin S$ nije pobjedio sve igrače iz S". Svaki $y \notin S$ će s vjerojatnošću 2^{-k} pobjediti sve igrače iz S, a y možemo izabrati na $(n - k)$ načina. Zbog nezavisnosti imamo

$$P(A_S) = \left(1 - 2^{-k}\right)^{n-k},$$

događaja A_S ima koliko i skupova S, dakle $\binom{n}{k}$. Ako je

$$P\left(\bigcup A_S\right) \leq \sum P(A_S) = \binom{n}{k}\left(1 - 2^{-k}\right)^{n-k} < 1$$

vjerojatnost da se nijedan od događaja A_S neostvari je strogo pozitivna. Zato postoji elementaran događaj za koji se svaki $\overline{A_S}$ ostvaruje, odnosno turnir s n vrhova koji ima svojstvo P_k. ■

Koristeći nejednakost $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$ iz propozicije 1.2 i nejednakosti $1 - x < e^{-x}$ za $x = 2^{-k}$, tj. $\left(1 - 2^{-k}\right)^{n-k} < e^{-(n-k)/2^k}$ može se pokazati da je uvjet prethodnog teorema zadovoljen za n za koji je $n \geq k^2 \cdot 2^{k+1}$.

4.1.4. 2-bojanja bridova bipartitnih grafova

Prisjetimo se: **bipartitni graf** ima skup vrhova razdvojen u dva disjunktna skupa tako da svaki brid ovog grafa spaja neki vrh iz prvog skupa s nekim vrhom iz drugog skupa.

Teorem 4.4. *Neka su $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i $m \geq 2\log_2 n$. Tada postoji 2-bojanje bridova potpunog bipartitnog grafa $K_{n,n}$ tako da nemamo podgraf $K_{m,m}$ s jednobojnim bridovima.*

Dokaz. Ukupan broj 2-bojanja bridova potpunog bipartitnog grafa $K_{m,m}$ je 2^{m^2}, a samo dva od tih bojanja su s jednobojnim bridovima. Zato je vjerojatnost da je neki $K_{m,m}$ s jednobojnim bridovima jednaka 2^{1-m^2}. U grafu $K_{n,n}$ ima $\binom{n}{m}^2$ različitih podgrafova $K_{m,m}$. Koristeći nejednakost za vjerojatnost zbroja događaja (4.1) dobijemo da vjerojatnost da u $K_{n,n}$ postoji barem jedan podgraf $K_{m,m}$ s jednobojnim bridovima nije veća od $\binom{n}{m}^2 2^{1-m^2}$. Želimo da vrijedi

$$\binom{n}{m}^2 2^{1-m^2} < 1,$$

odnosno

$$2\binom{n}{m}^2 < 2^{m^2}.$$

Kako je prema uvjetu iz zadatka $n \leq 2^{m/2}$ imamo

$$2\binom{n}{m}^2 < 2\left(\frac{n^m}{m!}\right)^2 < n^{2m} \leq \left(2^{m/2}\right)^{2m} = 2^{m^2}.$$

■

Primjedba 4.1. *Prethodni teorem možemo formulirati na sljedeći način: za $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i $m \geq 2\log_2 n$ postoji matrica iz $\mathcal{M}_n(\{0,1\})$, tj. $n \times n$ matrica s elementima 0 ili 1, koja nema ni jednu $m \times m$ minoru koja se sastoji samo od 0 ili samo od 1.*

Do danas nije poznato kako konstruirati ovakvu matricu, odnosno kako obojati bridove potpunog bipartitnog grafa $K_{n,n}$ tako da su ispunjeni zahtjevi teorema. Najbolja konstrukcija matrice iz $\mathcal{M}_n(\{0,1\})$ koja nema ni jednu $m \times m$ minoru koja se sastoji samo od 0 ili samo od 1 i koja je danas poznata je za $m = c\sqrt{n}$, gdje je c konstanta.

Ovaj primjer pokazuje da je često razlika između onog što zaista možemo i onog što samo znamo da je moguće prilično velika.

4.1.5. 2-bojanja hipergrafova

Hipergraf je poopćenje pojma grafa: u hipergrafu brid (kojeg zovemo hiperbrid) može spajati proizvoljan broj vrhova. Kod uniformnog hipergrafa taj broj je fiksiran.

Definicija 4.3. ***k-uniformni hipergraf*** *je uređeni par (X, S) gdje je X skup vrhova, a S skup k-članih podskupova od X koje zovemo hiperbridovi.*

Definicija 4.4. *Za hipergraf kažemo da je r-obojiv, ako se njegovi vrhovi mogu obojati s r boja tako da ni jedan hiperbrid nije jednobojan (tj. u svakom bridu se pojavljuju najmanje dvije boje).*

Grafovi su 2-uniformni hipergrafovi, a uvjet r-obojivosti se svodi na to da se vrhovi grafa mogu obojati s r boja tako da susjedni vrhovi nisu iste boje.

Sljedeći teorem govori o najmanjem mogućem broju bridova u k-uniformnom hipergrafu koji nije 2-obojiv.

Definicija 4.5. *$m(k)$ je najmanji mogući broj hiperbridova u k-uniformnom hipergrafu koji nije 2-obojiv.*

To znači da za svaki k-uniformni hipergraf s manje od $m(k)$ hiperbridova postoji 2-bojanje takvo da nijedan hiperbrid nije jednobojan. Za grafove je $m(2) = 3$ jer se lako vidi da je "najmanji" 2-neobojivi graf trokut K_3. Još je poznato $m(3) = 7$ a sve ostale vrijednosti za $k > 3$ su do danas nepoznate.

Donju ogradu za $m(k)$ dokazujemo vjerojatnosnom metodom.

Teorem 4.5. *Za svaki $k \geq 2$ je $m(k) \geq 2^{k-1}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{H}$ k-uniformni hipergraf s manje od 2^{k-1} hiperbridova. Dokažimo da je 2-obojiv. Svaki vrh obojimo u crveno ili plavo s vjerojatnošću $1/2$. Vjerojatnost da su svi vrhovi danog hiperbrida jednobojni je $p = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Uz pretpostavku da $\mathcal{H}$ ima manje od 2^{k-1} hiperbridova, vjerojatnost da postoji jednobojni hiperbrid nije veća od broja bridova pomnoženog s p, a taj umnožak je strogo manji od $2^{k-1}p = 1$. Zato je vjerojatnost da ni jedan brid nije jednobojan strogo pozitivna, pa je $\mathcal{H}$ 2-obojiv. ■

Za $k = 3$ ova nejednakost daje $m(3) \geq 4$. Već smo spomenuli da je $m(3) = 7$. Najmanji poznati 3-uniformni hipergraf koji nije 2-obojiv je (opet!) projektivna ravnina reda 2 s 7 bridova (pravaca).

4.1.6. Erdős-Ko-Radov teorem*

Erdős-Ko-Radov teorema iz poglavlja 2.2.1 glasi:

"ako je $n \geq 2k$ onda svaka presijecajuća familija $\mathcal{F}$ k-članih podskupova od n-članog skupa ima najviše $\binom{n-1}{k-1}$ članova".

Ovdje ćemo ga dokazati vjerojatnosnom metodom. U tu svrhu prisjetimo se i tvrdnje $(*)$ iz ovog teorema:

"neka je $X = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ i uz zbrajanje modulo n definirajmo

$$A_s = \{s, s+1, \ldots, s+k-1\} \subseteq X, \ s = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Tada za $n \geq 2k$ bilo koja presijecajuća k-uniformna familija $\mathcal{F}$ sadrži najviše k skupova A_s, $s = 0, 1, \ldots, n-1$".

Dokaz. (Erdős-Ko-Radovog teorema) Neka je $\mathcal{F}$ presijecajuća k-uniformna familija. Za permutaciju $\sigma : X \to X$ definiramo

$$\sigma(A_s) = \{\sigma(s), \sigma(s+1), \sigma(s+2), \ldots, \sigma(s+k-1)\}, \quad s = 0, \ldots, n-1$$

gdje se zbraja modulo n. Prema tvrdnji $(*)$ najviše k od ovih n skupova pripadaju familiji $\mathcal{F}$. Izaberemo li nezavisno i na sreću s iz vjerojatnosnog prostora $\{1, 2, \ldots, n\}$ i σ na sreću iz S_n, imamo

$$P(\sigma(A_s) \in \mathcal{F}) \leq \frac{k}{n}.$$

Ovaj odabir $\sigma(A_s)$ ekvivalentan je slučajnom odabiru k-članog podskupa od X pa je

$$P(\sigma(A_s) \in \mathcal{F}) = \frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{k}}$$

i zato je

$$|\mathcal{F}| = \binom{n}{k} P(\sigma(A_s) \in \mathcal{F}) \leq \binom{n}{k}\frac{k}{n} = \binom{n-1}{k-1}.$$

■

Zadatak 4.1. *Dokažite donju granicu za van der Waerdenove brojeve $W(r,k)$.*

Rješenje: dokazati ćemo da vrijedi $W(r,k) > \sqrt{2r^{k-1}}$. Promotrimo slučajno r-bojanje skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Za proizvoljan aritmetički podniz S duljine k neka je A_S događaj "S je jednobojan". Tada je

$$P(A_S) = r \cdot (1/r)^{|S|} = r^{-k+1}.$$

Svaki aritmetički podniz S duljine k jednoznačno je određen s prva dva člana, pa ih ima najviše $\binom{n}{2}$. Kako događaja A_S ima koliko i podnizova S imamo

$$P\left(\bigcup A_S\right) \leq \sum P(A_S) \leq \binom{n}{2} r^{-k+1}$$

pa vrijedi

$$\binom{n}{2} r^{-k+1} < 1 \implies P\left(\bigcap \overline{A_S}\right) > 0.$$

Dakle, skup $\{1, 2, \ldots, n\}$ se može obojati u r boja tako da ni jedan aritmetički podniz od k članova nije jednobojan ako je $\binom{n}{2} r^{-k+1} < 1$ što je ispunjeno za n za koji je $n^2 \leq 2r^{k-1}$.

Zadatak 4.2. *Promotrimo familiju svih parova (A, B) disjunktnih k-članih podskupova skupa $\{1, \ldots, n\}$. Kažemo da skup Y* ***razdvaja*** *par (A, B) ako je $A \subseteq Y$ i $B \cap Y = \emptyset$. Dokažite da postoji $l = 2k4^k \ln n$ skupova takvih da je svaki par (A, B) zadane familije razdvojen s barem jednim od ovih skupova.*

Ideja: neka su $Y_1, \ldots, Y_l$ nezavisno i slučajno izabrani podskupovi skupa $\{1, \ldots, n\}$, vjerojatnost za svaki je $(1/2)^n$. Potom dokažite da je vjerojatnost da ni jedan od ovih skupova ne razdvaja zadani par (A, B) manja ili jednaka $\left(1 - 2^{-2k}\right)^l$ i primijenite nejednakost (4.1).

Zadatak 4.3. *Dokažite da ako je $p \in \langle 0, 1\rangle$ i*

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}} < 1,$$

onda za Ramseyev broj vrijedi $R(k,l) > n$.

Rješenje: pogledajmo slučajni graf $G(n,p)$ s n vrhova, gdje je vjerojatnost da su bilo koja dva vrha povezana bridom jednaka p i nezavisna o drugim bridovima. Za bilo koji skup od k fiksnih vrhova, vjerojatnost da formiraju kliku K_k jednaka je

$$p_1 = p^{\binom{k}{2}}.$$

Slično, vjerojatnost za N_l-skup od l nezavisnih vrhova je

$$p_2 = (1-p)^{\binom{l}{2}}.$$

U grafu s n vrhova ima $\binom{n}{k}$ skupova od k vrhova i $\binom{n}{l}$ skupova od l vrhova, pa primijenimo li nejednakost (4.1) dobijemo da je

$$P\left(G(n,p) \text{ sadrži } K_k \text{ ili } N_l\right) \leq \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}}.$$

Dakle, uz uvjet

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}} < 1$$

vjerojatnost događaja "$G(n,p)$ ne sadrži ni K_k ni N_l" je strogo pozitivna, odnosno vrijedi $R(k,l) > n$.

Zadatak 4.4. *Neka je $k \geq 2$ i neka je $\mathcal{H}$ k-uniformni hipergraf s manje od 4^{k-1} hiperbridova. Dokažite da je 4-obojiv (tj. da postoji bojanje vrhova od $\mathcal{H}$ s četri boje tako da ni jedan hiperbrid nije jednobojan).*

Rješenje: slično kao u dokazu teorema 4.5.

Zadatak 4.5. *Neka je $k \geq 4$ i neka je $\mathcal{H}$ k-uniformni hipergraf s manje od $4^{k-1}/3^k$ hiperbridova. Dokažite da postoji bojanje vrhova od $\mathcal{H}$ s četri boje tako da su u svim hiperbridovima zastupljene sve boje.*

Rješenje: svaki vrh obojimo u neku od četiri boje s vjerojatnošću $1/4$. Vjerojatnost da u danom bridu u ovakvom slučajnom bojanju nisu zasupljene sve boje manja je ili jednaka od $p = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k$. Uz pretpostavku da $\mathcal{H}$ ima manje od $4^{k-1}/3^k$ hiperbridova, vjerojatnost da postoji hiperbrid u kojem nisu zastupljene sve četiri boje nije veća od broja bridova pomnoženog s p, a taj umnožak je strogo manji od $\left(4^{k-1}/3^k\right) \cdot p = 1$. Zato je vjerojatnost da su u svim hiperbridovima od $\mathcal{H}$ zastupljene sve boje strogo pozitivna.

4.2. Dirichletovo svojstvo za očekivanje

Dokazivanje tvrdnji u ovom poglavlju temelji se na svojstvu linearnosti očekivanja koje je dokazano u predmetu preddiplomskog studija "Vjerojatnost i statistika".

Lema 4.1. *Očekivanje je linearni operator: za slučajne varijable X, Y i za konstante α, $\beta \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

$$\mathbf{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbf{E}(X) + \beta \mathbf{E}(Y).$$

Posljedično je

$$\mathbf{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2) + \cdots + \mathbf{E}(X_n).$$

Iako elementarno, svojstvo linearnosti je jako korisno, jer vrijedi za sve slučajne varijable bez obzira na njihovu zavisnost. Koristeći očekivanje možemo procjeniti najmanju i najveću vrijednost slučajne varijable X, jer uvijek postoji elementarni događaj $\omega \in \Omega$ za kojeg je $X(\omega) \geq \mathbf{E}(X)$ i elementarni događaj $\omega \in \Omega$ za kojeg je $X(\omega) \leq \mathbf{E}(X)$. Drugim riječima, slučajna varijabla X ne može imati sve vrijednosti manje od $\mathbf{E}(X)$ ili sve vrijednosti veće od $\mathbf{E}(X)$, slično kao što ni kod raspodjele n kuglica u k kutija ne mogu sve kutije imati manje od n/k kuglica ili sve više od n/k kuglica. Otuda i naziv: *Dirichletovo svojstvo za očekivanje* (engl. pigeonhole property of the expetation).

Definicija 4.6. *Za događaj A definiramo* ***indikatorsku slučajnu varijablu*** *I_A: za $\omega \in \Omega$ je*

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{za } \omega \in A, \\ 0, & \text{za } \omega \notin A. \end{cases}$$

Lema 4.2. *Za svaki događaj A vrijedi $\mathbf{E}(I_A) = P(A)$.*

Dokaz. Općenito pomoću Lebesguevog integrala za očekivanje vrijedi

$$\mathbf{E}(I_A) = \int_\Omega I_A(\omega)\, dP = \int_A dP = P(A). \tag{4.2}$$

■

U specijalnom slučaju kada je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ konačan vjerojatnosni prostor (kao u ovom poglavlju), a $p : \Omega \to [0,1]$ vjerojatnost na elementarnim događajima, (4.2) se svodi na

$$\mathbf{E}(I_A) = \sum_{\omega\in\Omega} I_A(\omega)\, p(\omega) = \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ I_A(\omega)=1}} 1 \cdot p(\omega) + \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ I_A(\omega)=0}} 0 \cdot p(\omega) = \sum_{\omega\in A} p(\omega) = P(A).$$

Primjer 4.1. *Izračunajmo očekivani broj fiksnih točaka slučajne permutacije* σ *skupa* $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Neka je slučajna varijabla* X *broj fiksnih točaka permutacije* σ:

$$X(\sigma) = |\{i : \sigma(i) = i\}|.$$

Možemo je prikazati kao sumu indikatorskih varijabli

$$X(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\sigma)$$

gdje je

$$X_i(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \sigma(i) = i, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada vrijedi

$$\mathbf{E}(X_i) = P(\sigma(i) = i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \quad \mathbf{E}(X) = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = 1$$

pa slučajna permutacija u prosjeku ima 1 *fiksnu točku.*

Primjer 4.2. *Izračunajmo očekivani broj "dolina" slučajne permutacije* p *skupa* $\{1, 2, \ldots, n\}$, *uz pretpostavku* $n \geq 3$. ***Dolina*** n-*permutacije* $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ *je svaki* p_i *za kojeg vrijedi*

$$p_{i-1} > p_i < p_{i+1}.$$

Primjerice, permutacija $p = 2364517$ *ima dvije doline "u"* 4 *i* 1.

Bez korištenja linearnosti očekivanja, ovo bi bio težak zadatak. Trebali bi izračunati broj $v(j)$ n-*permutacija s* j *dolina, za svaki* j, *a potom još i izračunati*

$$\sum_j j \cdot \frac{v(j)}{n!}.$$

Korištenjem linearnosti očekivanja dokaz je kratak i elegantan:

neka su $Y_2, Y_3, \ldots, Y_{n-1}$ *indikatorske slučajne varijable definirane na skupu svih* n-*permutacija* p

$$Y_i(p) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i \text{ dolina,} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za $2 \leq i \leq n-1$, *vjerojatnost da je* p_i *najmanji u skupu* $\{p_{i-1}, p_i, p_{i+1}\}$ *jednaka je* $1/3$ *za svaki* p_i. *Zato je*

$$\mathbf{E}(Y_i) = \frac{1}{3}, \;\; i = 2, \ldots, n-1.$$

Definiramo li $Y = Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_{n-1}$ *onda je* $Y(p)$ *broj dolina permutacije* p *i očekivani broj "dolina" permutacije* p *je*

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{i=2}^{n-1} \mathbf{E}(Y_i) = \frac{n-2}{3}.$$

4.2.1. Hamiltonovi putovi

Prisjetimo se: vrhove **turnira**, potpunog, orjentiranog grafa $T = (V, E)$ bez petlji možemo zamisliti kao igrače od kojih svaka dva igraju po jedan meč i $(x, y) \in E$ ako i samo ako je x pobjedio y. Interesantno je da je za svaki turnir moguće poredati u niz igrače tako da neposredno iza bilo kojeg igrača nikad nije igrač koji ga je pobijedio.

Definicija 4.7. ***Hamiltonov put*** *u turniru je usmjereni put koji sadrži sve vrhove.*

Egzistencija niza igrača na način da neposredno iza bilo kojeg igrača nikad nije igrač koji ga je pobijedio ekvivalentna je egzistenciji Hamiltonovog puta u turniru. Drugim riječima svaki turnir ima bar jedan Hamiltonov put (zadatak 4.6). Sljedeći teorem T. Szelea iz 1943. koji govori o egzistenciji turnira s velikim brojem Hamiltonovih putova bio je prva primjena vjerojatnosne metode u kombinatorici.

Teorem 4.6. ***(Szele 1943.)*** *Postoji turnir T s n vrhova i najmanje $n!/2^{n-1}$ Hamiltonovih putova.*

Dokaz. Izračunajmo očekivanje broja Hamiltonovih putova u slučajno odabranom turniru $T = (V, E)$ (svaki brid ima slučajnu orjentaciju, odabranu nezavisno s vjerojatnošću $1/2$). Za danu permutaciju skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ pogledajmo niz $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ i označimo s X_σ indikatorsku slučajnu varijablu događaja "bridovi u T pojavljuju se s orjentacijom $(\sigma(i), \sigma(i+1))$ za svaki $i = 1, \ldots, n-1$. Kako je orjentacija svakog brida odabrana nezavisno imamo

$$\mathbf{E}(X_\sigma) = P\Big((\sigma(i), \sigma(i+1)) \in E \quad \text{za } i = 1, \ldots, n-1\Big) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ukupan broj X Hamiltonovih putova u turniru T jednak je zbroju indikatorskih slučajnih varijabli po svim mogućim Hamiltonovim putovima, odnosno po svim permutacijama skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, pa je

$$\mathbf{E}(X) = \sum_\sigma \mathbf{E}(X_\sigma) = \frac{n!}{2^{n-1}}.$$

Prema Dirichletovom svojstvu za očekivanje slijedi da postoji elementarni događaj za kojeg je $X(\omega) \geq \mathbf{E}(X)$, odnosno postoji turnir s barem $n!/2^{n-1}$ Hamiltonovih putova. ■

Zadatak 4.6. *Dokažite da svaki turnir $T = (V, E)$ ima bar jedan Hamiltonov put.*

Rješenje: dokažimo da se svaki put kojem nedostaje neki vrh može produžiti uključujući taj vrh u put. Pretpostavimo da imamo put $v_1, v_2, \ldots, v_k$ gdje je $k < n$ i da mu vrh v ne pripada. Ako je $(v, v_1) \in E$ onda vrh v možemo uključiti na "početak" i dobivamo put $v, v_1, \ldots, v_k$. Ako ne, onda je $(v_1, v) \in E$. U tom slučaju ako je $(v, v_2) \in E$ opet možemo v uključiti kao po redu drugi vrh i dobiti put $v_1, v, v_2, \ldots, v_k$. Ako ne, onda je $(v_2, v) \in E$. Na ovaj način nastavljamo do kraja: ukoliko su svi

$$(v_1, v), (v_2, v), \ldots, (v_n, v) \in E$$

zbog $(v_n, v) \in E$ vrh v možemo uključiti na "kraju" i dobiti put $v_1, \ldots, v_k, v$.

Na ovaj način induktivno u put uključimo sve vrhove koji mu nedostaju i na kraju dobijemo Hamiltonov put.

4.2.2. Cijepanja grafova

Problem MAXCUT je važan algoritamski problem: za dani graf $G = (V, E)$ treba podijeliti skup vrhova na dva disjunktna skupa A i $B = V \setminus A$ tako da je broj bridova koji spajaju vrhove iz A s vrhovima iz B maksimalan. Ovaj problem je računarski težak problem (NP-complete). Rezultat sljedećeg teorema garantira da je uvijek moguće imati barem pola od ukupnog broja bridova između skupova A i B.

Teorem 4.7. *Svaki graf s m bridova sadrži bipartitini podgraf s barem $m/2$ bridova.*

Dokaz. Neka je $G = (V, E)$ i odaberimo slučajni podskup $T \subseteq V$ dodavajući svaki vrh u T nezavisno, s vjerojatnošću $1/2$. Za dani brid $e = \{u, v\}$ neka je X_e indikatorska slučajna varijabla događaja "točno jedan vrh brida e je u T". Tada je

$$\mathbf{E}(X_e) = P((u \in T, v \notin T) \text{ ili } (u \notin T, v \in T)) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ako je X broj bridova koji imaju točno jedan vrh u T onda je $X = \sum_{e \in E} X_e$ i

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{e \in E} \mathbf{E}(X_e) = \frac{m}{2}.$$

Prema Dirichletovom svojstvu za očekivanje za neki $T \subseteq V$ postoji barem $m/2$ bridova kojima je jedan vrh u T, a drugi u $V \setminus T$, i koji formiraju traženi bipartitni podgraf. ■

4.2.3. Sum-free skupovi*

Problem 6. iz uvoda je glasio: koliko elemenata može imati podskup unaprijed zadanog skupa cijelih brojeva različitih od nule, uz uvjet da suma bilo koja dva elementa iz tog podskupa nije u podskupu? Sada ćemo i dokazati da neovisno o početnom skupu, uvijek možemo pronaći ovakav podskup s barem trećinom elemenata početnog skupa. Ovaj rezultat pripada *kombinatornoj teoriji brojeva.*

Teorem 4.8. ***(Erdős 1965.)*** *Neka je $A \subseteq \mathbb{Z}$ i $|A| = N$. Tada postoji podskup $B \subseteq A$ za kojeg vrijedi*

(i) *$x + y \notin B$, za sve $x, y \in B$ (B je tzv.* ***sum-free*** *podskup u $\mathbb{Z}$),*

(ii) *$|B| > N/3$.*

Dokaz. Neka je $p = 3k + 2$ prost broj takav da je

$$p > 2 \max_{a \in A} |a| \quad \text{i} \quad S = \{k+1, k+2, \ldots, 2k+1\}.$$

Skup S je sum-free podskup grupe $\mathbb{Z}_p$, jer zbog izbora broja p zbroj modulo p bilo koja dva elementa iz S ne pripada S.

Neka je m na sreću izabran broj iz skupa $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \{1, 2, \ldots, p-1\}$, a $X_{a,j}$ indikatorska slučajna varijabla događaja "$a \cdot m \equiv j \pmod{p}$". Promotrimo zbroj

$$X = \sum_{a \in A} \sum_{j \in S} X_{a,j}.$$

Za svaki fiksirani $a \in A$, $a \cdot m$ poprima sve vrijednosti iz $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ i zato je

$$\mathbf{E}(X_{a,j}) = P(X_{a,j} = 1) = \frac{1}{p-1},$$

za sve $a \in A$ i $j \in S$. Zbog linearnosti očekivanja je

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{a \in A} \sum_{j \in S} \mathbf{E}(X_{a,j}) = \frac{N|S|}{p-1} > \frac{N}{3},$$

jer je $|S| > (p-1)/3$. Prema Dirichletovom svojstvu za očekivanje postoji $m \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ za koji je $X > N/3$. Definirajmo

$$B = \{a \in A : a \cdot m \equiv j \pmod{p} \quad \text{za neki } j \in S\}.$$

Skup B ima više od $N/3$ elemenata, osim toga je i sum-free u $\mathbb{Z}$ (čak štoviše, sum-free u $\mathbb{Z}_p$, tj. s zbrajanjem modulo p), jer je takav i skup S. ■

Još uvijek se ne zna koja je najveća konstanta koja može u ovom teoremu zamijeniti $1/3$. Do danas je poznato (Alon, Kleitman 1990.) samo da mora biti manja od $12/29$.

4.2.4. Silvesterova formula*

Dokažimo vjerojatnosnom metodom i Silvesterovu formulu za vjerojatnost unije n događaja koja je u "Vjerojatnosti i statistici" dokazana matematičkom indukcijom po n.

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ događaji, a X_i, $i = 1, \ldots, n$ indikatorske slučajne varijable za događaje A_i, tj.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ako se događaj } A_i \text{ ostvario,} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Nije teško provjeriti da vrijedi

$$1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - X_i) = \begin{cases} 1, & \text{ako se događaj } \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \text{ ostvario,} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Zato je i

$$\mathbf{E}\left(1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - X_i)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right). \tag{4.3}$$

Kako je

$$1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i<j} X_i X_j + \sum_{i<j<k} X_i X_j X_k - \cdots + (-1)^{n+1} X_1 X_2 \cdots X_n$$

koristeći linearnost očekivanja i

$$X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_k}=\begin{cases}1, & \text{ako se događaj } A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k} \text{ ostvario,}\\ 0, & \text{inače,}\end{cases}$$

zbog čega je

$$\mathbf{E}\left(X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_k}\right)=P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right),$$

iz (4.3) dobivamo Silvesterovu formulu

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)&=\sum_{i=1}^{n}P\left(A_i\right)-\sum_{i<j}P\left(A_iA_j\right)\\&+\sum_{i<j<k}P\left(A_iA_jA_k\right)-\cdots+(-1)^{n+1}P\left(A_1A_2\cdots A_n\right).\end{aligned}$$

Zadatak 4.7. *Izračunajte očekivani broj klika K_k u slučajnom grafu $G(n,1/2)$.*

Rješenje: neka je slučajna varijabla X broj klika K_k u grafu $G(n,1/2)$, a za bilo koji skup S od k vrhova neka je X_S indikatorska slučajna varijabla za događaj "S je klika". Vjerojatnost ovog događaja jednaka je $2^{-\binom{k}{2}}$, pa imamo

$$\mathbf{E}\left(X_S\right)=2^{-\binom{k}{2}}.$$

Primjenjujući linearnost očekivanja dobijemo

$$\mathbf{E}(X)=\mathbf{E}\left(\sum_{|S|=k}X_S\right)=\sum_{|S|=k}\mathbf{E}\left(X_S\right)=\binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}}.$$

Ovo očekivanje je manje što je k veći. Primjetimo, očekivanje je jednako jedan kada je k približno $2\log_2 n$ (to je tipičan broj vrhova najveće klike u slučajnom grafu $G(n,1/2)$).

Zadatak 4.8. *U prizemlju neke zgrade od n katova k ljudi je ušlo u lift. Lift kreće prema gore i svatko od njih će izaći na slučajno odabranom katu. Koliki je očekivani broj zaustavljanja lifta?*

Rješenje: neka je slučajna varijabla X broj zaustavljanja lifta, a X_i indikatorska slučajna varijabla za događaj $A_i\equiv$"barem jedan čovjek izlazi na i-tom katu". Vjerojatnost suprotnog događaja "nijedan čovjek neizlazi na i-tom katu" jednaka je $P\left(\overline{A_i}\right)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^k$ i zato je

$$\mathbf{E}\left(X_i\right)=P\left(A_i\right)=1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k,\quad i=1,\ldots,n.$$

Primjenjujući linearnost očekivanja dobijemo

$$\mathbf{E}(X)=\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left(X_i\right)=n\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right).$$

Zadatak 4.9. *Neka je σ n-permutacija. Indeks i zovemo* ***prekoračenjem*** *ako je $\sigma(i) > i$. Izračunajte očekivani broj prekoračenja slučajne n-permutacije.*

Rješenje: neka je $X_i(\sigma)$ (kraće X_i) indikatorska slučajna varijabla za događaj $A_i \equiv$ "i je prekoračenje za slučajnu permutaciju σ". Tada je $\sigma(i) \in \{i+1, i+2, \ldots, n\}$ odnosno

$$\mathbf{E}(X_i) = P(A_i) = \frac{n-i}{n}.$$

Neka je slučajna varijabla X broj prekoračenja n-permutacije σ, pa je

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n} = \frac{n(n-1)}{2n} = \frac{n-1}{2}.$$

Zadatak 4.10. *Izračunajte očekivani broj fiksnih točaka slučajne permutacije σ skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ iza kojih neposredno nije nova fiksna točka, tj. za koje (osim $\sigma(i) = i$) vrijedi i*

$$\sigma(i+1) \neq i+1, \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

Rješenje: neka je slučajna varijabla X broj fiksnih točaka permutacije σ iza kojih neposredno nije nova fiksna točka:

$$X(\sigma) = |\{i : \sigma(i) = i \;\&\; \sigma(i+1) \neq i+1\}|, \quad i = 1, \ldots, n-1 \ .$$

Možemo je prikazati kao sumu indikatorskih varijabli

$$X(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\sigma)$$

gdje je

$$X_i(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \sigma(i) = i \;\&\; \sigma(i+1) \neq i+1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada vrijedi

$$\mathbf{E}(X_i) = P(\sigma(i) = i \;\&\; \sigma(i+1) \neq i+1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1},$$
$$\mathbf{E}(X) = \frac{n-2}{n}.$$

Zadatak 4.11. ***Silazak*** *u n-permutaciji $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ je indeks $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ za koji je $p_i > p_{i+1}$. Izračunajte očekivani broj silazaka slučajne n-permutacije p.*

Rješenje: neka je $X_i(p)$ (kraće X_i) indikatorska slučajna varijabla za događaj "i je silazak za slučajnu permutaciju p", $i = 1, \ldots, n-1$, a slučajna varijabla X broj silazaka slučajne n-permutacije p, pa je $\mathbf{E}(X_i) = P(p_i > p_{i+1}) = 1/2$ i

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}.$$

Zadatak 4.12. *Neka je $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, a Y broj k-ciklusa slučajne n-permutacije. Odredite $\mathbf{E}(Y)$.*

Rješenje: prema primjeru 1.7. (iz poglavlja 1.1.6) vjerojatnost događaja "ciklus koji sadrži 1 *je duljine k" jednaka je $1/n$. Isto vrijedi i za bilo koji drugi element* **i** *umjesto* 1. *Zato za indikatorsku slučajnu varijablu Y_i događaja "ciklus koji sadrži* **i** *je duljine k" vrijedi $\mathbf{E}(Y_i) = 1/n$. Kako je u ciklusu duljine k točno k elemenata vrijedi*

$$Y = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(Y_i) = \frac{1}{k}.$$

Zadatak 4.13. *Neka je dan konačan niz $L = (L_1, L_2, \ldots, L_k)$ uređenih trojki $L_i = (a_i, b_i, c_i)$ takvih da su a_i, b_i, c_i različiti elementi skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, pri čemu simboli s različitim indeksima (npr. a_1 i a_2) mogu označavati isti broj. Neka je σ n-permutacija. Kažemo da σ* ***zadovoljava*** *L_i ako je b_i između a_i i c_i u permutaciji σ, bez obzira jesu li oni u poretku a_i, b_i, c_i ili c_i, b_i, a_i.*

Dokažite da postoji permutacija σ koja zadovoljava barem jednu trećinu od svih L_i iz proizvoljnog konačnog niza L.

Rješenje: neka je $X_i(\sigma)$ indikatorska slučajna varijabla za događaj "slučajna permutacija σ zadovoljava L_i", $i = 1, \ldots, k$. Tada je $\mathbf{E}(X_i(\sigma)) = 1/3$, jer svaki od brojeva a_i, b_i, c_i ima jednaku šansu da bude srednji po veličini. Ako stavimo $X(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} X_i(\sigma)$ onda je $X(\sigma)$ broj svih L_i iz L koje zadovoljava σ. Konačno je

$$\mathbf{E}(X(\sigma)) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}(X_i(\sigma)) = \frac{k}{3}$$

pa postoji permutacija σ za koju je $X(\sigma) \geq \mathbf{E}(X(\sigma)) = k/3$.

Zadatak 4.14. *Dokažite da postoji* 2*-bojanje bridova od K_n s najviše*

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

jednobojnih podklika K_k.

Ideja: pogledajmo slučajno 2*-bojanje bridova od K_n. Neka je slučajna varijabla X broj jednobojnih podklika K_k. Izračunajte $\mathbf{E}(X)$ i zaključite da postoji bojanje za koje je $X \leq \mathbf{E}(X)$.*

Zadatak 4.15. *Dokažite da postoji* 2*-bojanje bridova potpunog bipartitnog grafa $K_{m,n}$ s najviše*

$$\binom{m}{l}\binom{n}{k} 2^{1-lk}$$

jednobojnih potpunih bipartitnih podgrafova $K_{l,k}$.

Ideja: pogledajmo slučajno 2-bojanje bridova potpunog bipartitnog grafa $K_{m,n}$. Neka je slučajna varijabla X broj jednobojnih bipartitnih podgrafova $K_{l,k}$. Izračunajte $\mathbf{E}(X)$ i zaključite da postoji bojanje za koje je $X \leq \mathbf{E}(X)$.

Zadatak 4.16. *Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova od $\{1, 2, \ldots, n\}$ takva da nijedan skup iz $\mathcal{F}$ ne sadrži neki drugi skup iz $\mathcal{F}$, tj. $A, B \in \mathcal{F}$, $A \neq B \Longrightarrow A \subsetneq B$, $B \subsetneq A$. Neka je σ proizvoljna n-permutacija i neka je X_σ slučajna varijabla definirana s*

$$X_\sigma = \left|\{i : \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)\} \in \mathcal{F}\}\right|.$$

Koristeći očekivanje dokažite da vrijedi

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

4.3. Metoda drugog momenta*

U prethodnom poglavlju koristili smo *Dirichletovo svojstvo za očekivanje*: slučajna varijabla X ne može imati sve vrijednosti manje od $\mathbf{E}(X)$ ili sve vrijednosti veće od $\mathbf{E}(X)$.

Osim očekivanja $\mathbf{E}(X)$ jedno od osnovnih karakteristika slučajne varijable X je njena disperzija, nenegativna veličina koja opisuje koliko se vrijednosti od X rasipaju oko očekivanja $\mathbf{E}(X)$.

Disperzija slučajne varijable X je definirana s

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2$$

(prva jednakost je definicija, a druga slijedi računom iz prve).

Disperzija nije linearni operator kao očekivanje, za nju vrijedi

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov }(X_i, X_j)$$

gdje je

$$\text{Cov }(X_i, X_j) = \mathbf{E}\left[(X_i - \mathbf{E}(X_i))(X_j - \mathbf{E}(X_j))\right] = \mathbf{E}(X_i X_j) - \mathbf{E}(X_i)\,\mathbf{E}(X_j)$$

kovarijanca slučajnih varijabli X_i i X_j. Prisjetimo se, ukoliko su X_i i X_j nezavisne slučajne varijable onda je $\text{Cov }(X_i, X_j) = 0$, dok obrat ne vrijedi.

Za slučajnu varijablu X i realan broj $t > 0$ vrijedi **Čebiševljeva nejednakost**:

$$P\left(|X - \mathbf{E}(X)| \geq t\right) \leq \frac{\mathbf{D}(X)}{t^2}. \tag{4.4}$$

Sve ove tvrdnje dokazane su na predmetu "Vjerojatnost i statistika" pa im ovdje ne navodimo dokaze.

Korištenje Čebiševljeve nejednakosti u vjerojatnosnoj metodi se zove *metoda drugog momenta*. Jedna od prvih njenih primjena bila je u teoriji brojeva: Hardy i Ramanujan su 1920. dokazali teorem koji tvrdi da je $\omega(n)$-broj prostih brojeva koji dijele broj n, za velike n "jako blizu" broju $\ln\ln n$. Turán je 1934. metodom drugog momenta ponovo dao puno jednostavniji dokaz istog teorema (vidite [8]) i tako potaknuo intezivniju primjenu ove metode u teoriji brojeva.

Metodu ćemo ovdje primijeniti na procjeni središnjeg binomnog koeficijenta.

4.3.1. Procjena središnjeg binomnog koeficijenta

Među binomnim koeficijentima $\binom{2m}{k}$, $k = 1, \ldots, 2m$, središnji koeficijent $\binom{2m}{m}$ osim što je najveći, najčešće se pojavljuje u raznim kombinatornim formulama (primjerice kod Catalanovih brojeva i prebrojavanja binarnih stabala). Korištenje disperzije i Čebiševljeve nejednakosti u ovoj metodi pokazujemo na primjeru računanja donje ograde za središnji binomni koeficijent $\binom{2m}{m}$.

Teorem 4.9. *Za sve $m \geq 1$ vrijedi*

$$\binom{2m}{m} \geq \frac{2^{2m}}{4\sqrt{m}+2}.$$

Dokaz. Neka je slučajna varijabla $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{2m}$ gdje su X_i nezavisne diskretne slučajne varijable $X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Vrijedi $\mathbf{E}(X) = m$ i $\mathbf{D}(X) = m/2$. Čebiševljeva nejednakost za $t = \sqrt{m}$ daje

$$P\left(|X - m| \geq \sqrt{m}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Vjerojatnost da će X poprimiti vrijednost $m + k$ gdje je $|k| < \sqrt{m}$ jednaka je

$$\binom{2m}{m+k} 2^{-2m} \leq \binom{2m}{m} 2^{-2m}$$

pa je zbog toga

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{|k|<\sqrt{m}} P(X = m + k) \leq \left(2\sqrt{m}+1\right)\binom{2m}{m} 2^{-2m}$$

odakle slijedi tvrdnja teorema. ■

4.3.2. Funkcije praga za klike

Metoda drugog momenta korisna je i kod određivanja funkcije praga za klike. Ovdje želimo odrediti vrijednost za p "iznad" koje slučajni graf $G(n,p)$ vrlo vjerojatno sadrži 3-kliku (trokut), odnosno, vrijednost za p "ispod" koje slučajni graf $G(n,p)$ vrlo vjerojatno ne sadrži 3-kliku. Interesantno je da su ove vrijednosti jednake.

Prisjetimo se, za dvije realne funkcije f i g oznaka $f = o(g)$ ili $f \ll g$ znači da vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0,$$

a $f = O(g)$ znači da postoje $M \in \mathbb{R}^+$ i $t_o \in \mathbb{R}$ tako da za sve $t > t_0$ vrijedi

$$|f(t)| \leq M\,|g(t)|\,.$$

Teorem 4.10. *Prag za p da bi slučajni graf $G(n,p)$ sadržavao 3-kliku je $p = n^{-1}$.*

Dokaz. Neka je (diskretna) slučajna varijabla X broj trokuta u slučajnom grafu $G(n,p)$. Vrijedi

$$X = \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} X_i$$

gdje su X_i indikatorske slučajne varijable za sve moguće 3-klike u $G(n,p)$. Vjerojatnost da proizvoljne 3 točke formiraju trokut u grafu $G(n,p)$ je p^3, pa zbog $\mathbf{E}(X_i) = p^3$ i linearnosti očekivanja imamo

$$\mathbf{E}(X) = \binom{n}{3} p^3.$$

Očito kada je $p \ll 1/n$ ovo očekivanje teži k 0 za velike n. Kako X poprima nenegativne vrijednosti nejednakost Markova

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0$$

za $\varepsilon = 1$ glasi $P(X \geq 1) \leq \mathbf{E}(X)$. Stoga i

$$P(X \geq 1) \to 0 \quad \text{za } p \ll 1/n$$

odnosno vjerojatnost da $G(n,p)$ sadrži trokut teži nuli za $p(n) \ll 1/n$.

S druge strane, pretpostavimo da je $p(n) \gg 1/n$. Još želimo dokazati da vjerojatnost da $G(n,p)$ sadrži trokut teži jedinici za $p(n) \gg 1/n$. Primjetimo, iako očekivani broj trokuta teži k ∞ kada $n \to \infty$, ne mora značiti da slučajni graf $G(n,p)$ vrlo vjerojatno sadrži trokut (jer slučajne varijable mogu imati isto očekivanje iako imaju bitno različito rasipanje oko te očekivane vrijednosti). Za disperziju vrijedi

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{D}\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \mathbf{D}(X_i) + \sum_{i\neq j} \mathrm{Cov}\ (X_i, X_j)\,,$$

a za svaki trokut je

$$\mathbf{D}(X_i) = \mathbf{E}\left(X_i^2\right) - \mathbf{E}(X_i)^2 \leq \mathbf{E}\left(X_i^2\right) = p^3.$$

Ukoliko dva trokuta nemaju zajednički brid X_i i X_j su nezavisne pa je

$$Cov\,(X_{i,}X_j) = 0,$$

a za dva trokuta koji imaju zajednički brid (dakle zajedno imaju 5 bridova) je

$$\mathrm{Cov}\ (X_{i,}X_j) = \mathbf{E}(X_{i,}X_j) - \mathbf{E}(X_i)\,\mathbf{E}(X_j) \leq \mathbf{E}(X_{i,}X_j) = p^5.$$

Broj različitih parova trokuta koji imaju jedan zajednički brid jednak je $6\binom{n}{4}$, jer njihova 4 vrha možemo odabrati na $\binom{n}{4}$ načina, a zatim zajednički brid na $\binom{4}{2} = 6$ načina. Zato je broj različitih uređenih parova trokuta koji imaju jedan zajednički brid jednak $12\binom{n}{4}$. Konačno imamo

$$\mathbf{D}(X) \leq \binom{n}{3}p^3 + 12\binom{n}{4}p^5 \leq n^3p^3 + n^4p^5$$

i

$$\frac{\mathbf{D}(X)}{(\mathbf{E}(X))^2} \leq \frac{n^3p^3 + n^4p^5}{\left(\binom{n}{3}p^3\right)^2} = O\left(\frac{1}{n^3p^3} + \frac{1}{n^2p}\right)$$

pa koristeći Čebiševljevu nejednakost (za $t = \mathbf{E}(X)$)

$$P\left(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \mathbf{E}(X)\right) \leq \frac{\mathbf{D}(X)}{(\mathbf{E}(X))^2}$$

dobijemo

$$P\left(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \mathbf{E}(X)\right) \leq O\left(\frac{1}{n^3p^3} + \frac{1}{n^2p}\right).$$

Kako je $P(X \leq 0) \leq P(X \leq 0) + P(X \geq 2\mathbf{E}(X)) = P(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \mathbf{E}(X))$ slijedi

$$P(X = 0) = P(X \leq 0) \to 0 \ \text{ kada je } p(n) \gg 1/n,$$

odnosno

$$P(X > 0) \to 1 \ \text{ kada je } p(n) \gg 1/n$$

pa smo dokazali da vjerojatnost da $G(n,p)$ sadrži trokut teži jedinici za $p(n) \gg 1/n$.

■

Za 4-klike ove vrijednosti su opet jednake, tj prag za p da bi slučajni graf $G(n,p)$ sadržavao 4-kliku je $p = n^{-2/3}$ (vidite [1]).

Poglavlje 5.

Osnove metode linearne algebre*

Osnovna ideja metode linearne algebre u kombinatorici zasniva se na sljedećem teoremu iz linearne algebre: u vektorskom prostoru dimenzije n može biti najviše n linearno nezavisnih vektora. Želimo li dobiti gornju ogradu za kardinalni broj familije skupova $\mathcal{F}$ koji ispunjavaju neke zadane uvjete, skupovima iz $\mathcal{F}$ pridružimo elemente nekog vektorskog prostora V i pokažemo da su ovi elementi linearno nezavisni u V. Kardinalni broj od $\mathcal{F}$ tada nije veći od dimenzije vektorskog prostora V.

5.1. Prostori vektora incidencije

Pretpostavimo da želimo odrediti najveći mogući broj članova familije skupova $\mathcal{F}$ koji ispunjavaju neke zadane uvjete ili dobiti gornju ogradu za taj broj. Tada ovim skupovima pridružimo njihove vektore incidencije, a zatim pokažemo da su ti vektori linearno nezavisni. Gornja ograda je dimenzija vektorskog prostora vektora incidencije.

5.1.1. Fisherova nejednakost

Pretpostavimo da svaka dva skupa neke familije skupova $\mathcal{F}$ imaju u presjeku isti broj elemenata. Odgovor na pitanje koliko najviše elemenata ova familija može imati daje Fisherova nejednakost-osnovni rezultat teorije dizajna.

Teorem 5.1. ***(Fisherova nejednakost)*** *Neka su $A_1, \ldots, A_m$ različiti podskupovi od $\{1, \ldots, n\}$takvi da je $|A_i \cap A_j| = k$ za neki fiksirani $k \in \{1, \ldots, n\}$ i za svaki i, j, $i \neq j$. Tada vrijedi $m \leq n$.*

Dokaz. Neka su $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \{0,1\}^n$ vektori incidencije skupova $A_1, \ldots, A_m$, odnosno

$$(\mathbf{v}_i)_j = \begin{cases} 1, & j \in A_i, \\ 0, & j \notin A_i. \end{cases} \quad i \in \{1, \ldots, m\}\,,\ j \in \{1, \ldots, n\}$$

Želimo pokazati da su ovi vektori linearno nezavisni. Pretpostavimo suprotno, da nisu linearno nezavisni, tj. postoji netrivijalni prikaz nul-vektora kao linearne kombinacije vektora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Očito je

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \begin{cases} |A_i|, & \text{ako je } i = j, \\ k, & \text{ako je } i \neq j. \end{cases}$$

pa imamo

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{v}_i\right) \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle + \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \lambda_i \lambda_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 |A_i| + \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \lambda_i \lambda_j k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 (|A_i| - k) + k \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)^2. \end{aligned}$$

Zbog uvjeta da je kardinalni broj presjeka bilo koja dva skupa jednak k za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ mora vrijediti $|A_i| \geq k$ i kako su ovi skupovi različiti pri tome najviše za jedan može biti $|A_i| = k$. Slijedi

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 (|A_i| - k) + k \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)^2 > 0$$

što je kontradikcija. Dakle, polazna pretpostavka da vektori incidencije skupova $A_1, \ldots, A_m$ nisu linearno nezavisni nije istinita. Linearno nezavisni su pa ih ne može biti više od dimenzije prostora $\{0, 1\}^n$, odnosno vrijedi $m \leq n$. ■

Ovaj teorem je prvi put dokazao R. A. Fisher 1940. za slučaj $k = 1$ i kada su svi skupovi A_i jednakog kardinalnog broja (takve konfiguracije se zovu **balansirajući nepotpuni blok dizajni**). De Brujin i Erdös su 1948. su istu nejednakost dokazali i za familiju skupova koja ne mora biti uniformna. Rezultat je nadalje generalizirao R. C. Bose 1949. i to je bila prva primjena metode linearne algebre u rješavanju kombinatornih problema. U općenitom slučaju, kao u prethodnom teoremu, nejednakost je dokazao Majumdar 1953.

5.2. Prostori polinoma

Želimo li odrediti gornju ogradu broju članova familije skupova $\mathcal{F}$ koji ispunjavaju neke zadane uvjete ponekad, umjesto vektora incidencije, skupovima možemo pridružiti polinome u n varijabli $f(x_1, \ldots, x_n)$. Dokažemo li da su ti polinomi linearno nezavisni u odgovarajućem vektorskom prostoru funkcija V, opet imamo zaključak $|\mathcal{F}| \leq \dim V$. Ovaj način bazira se na sljedećoj jednostavnoj lemi.

Lema 5.1. *Za $i = 1, \ldots, m$ neka su $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ funkcije i $v_i \in \Omega$ tako da vrijedi*

(i) $f_i(v_i) \neq 0$ *za sve* $1 \leq i \leq m$;

(ii) $f_i(v_j) = 0$ *za sve* $1 \leq j < i \leq m$.

Tada su $f_1, \ldots, f_m$ linearno nezavisne u $\mathbb{R}^\Omega$vektorskom prostoru funkcija iz Ω u $\mathbb{R}$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka postoji netrivijalni prikaz nul-funkcije kao linearne kombinacije $f_1, \ldots, f_m$ tj.

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Kako je prikaz netrivijalan postoji skalar $\lambda_i \neq 0$. Neka je k najmanji za kojeg vrijedi $\lambda_k \neq 0$. Tada u sumi s lijeve strane jednakosti

$$\lambda_1 f_1(v_k) + \lambda_2 f_2(v_k) + \ldots + \lambda_m f_m(v_k) = 0$$

svi pribrojnici iščezavaju osim $\lambda_k f_k(v_k)$ pa iz $\lambda_k f_k(v_k) = 0$, zbog $\lambda_k \neq 0$ slijedi $f_k(v_k) = 0$ što je kontradikcija s **(i)**. Polazna pretpostavka da su $f_1, \ldots, f_m$ nije istinita i tvrdnja je dokazana. ■

5.2.1. Skupovi točaka s dvije različite međusobne udaljenosti

Neka su $a_1, \ldots, a_m$ točke u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$. Ako su međusobne udaljenosti svih ovih točaka jednake onda je $m \leq n + 1$.

Ukoliko međusobne udaljenosti svih ovih točaka poprimaju samo dvije vrijednosti, takvi skupovi se zovu "two-distance sets". Sljedeći teorem daje gornju granicu za broj točaka "two-distance" skupa u $\mathbb{R}^n$.

Teorem 5.2. ***(Larman-rogers-Seidel 1977.)*** *Ako međusobne udaljenosti točaka nekog skupa iz $\mathbb{R}^n$ poprimaju samo dvije vrijednosti, taj skup sadrži najviše $\binom{n}{2} + 3n + 2$ točaka.*

Dokaz. Neka su $a_1, \ldots, a_m$ različite točke tog skupa. Za Euklidsku normu točke $x = (x_1, \ldots, x_n)$ iz $\mathbb{R}^n$ koristimo oznaku

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Udaljenost dviju točaka $x, y \in \mathbb{R}^n$ je $\|x - y\|$. Za točke $a_1, \ldots, a_m$ ova udaljenost poprima samo dvije vrijednosti d_1 i d_2 koje su različite od nule, jer su prema pretpostavci i točke $a_1, \ldots, a_m$ različite. Za svaki $i = 1, \ldots, m$ definiramo polinom u varijabli $x \in \mathbb{R}^n$

$$f_i(x) = \left(\|x - a_i\|^2 - d_1^2 \right) \cdot \left(\|x - a_i\|^2 - d_2^2 \right).$$

Vrijedi $f_i(a_i) = (d_1 d_2)^2 \neq 0$ i $f_i(a_j) = 0$ za svaki $j \neq i$. Prema prethodnoj lemi ovi polinomi su linearno nezavisni (u vektorskom prostoru svih funkcija iz $\mathbb{R}^n$

u $\mathbb{R}$). Nije teško vidjeti da se svaki od polinoma f_i, $i = 1, \dots, m$ može prikazati kao linearna kombinacija polinoma

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 x_j, \; x_i x_j, \; x_i, \; 1 \quad \text{za } i, j = 1, \dots, n$$

kojih ima ukupno $1+n+\left(\binom{n}{2}+n\right)+n+1 = \binom{n}{2}+3n+2$. Dakle polinomi $f_1, \dots, f_m$ pripadaju vektorskom potprostoru dimenzije ne veće od $\binom{n}{2} + 3n + 2$. Kako su linearno nezavisni ne može ih biti više od dimenzije potprostora, tj. $m \leq \binom{n}{2}+3n+2$.

■

Za gornju ogradu iz prethodnog teorema vrijedi

$$\binom{n}{2} + 3n + 2 = \binom{n+2}{2} + n + 1.$$

Blokhuis je 1981. poboljšao ovaj rezultat dokazavši da su polinomi $f_1, \dots, f_m$ zajedno s $x_1, \dots, x_n, 1$ linearno nezavisni, pa odatle slijedi $m + n + 1 \leq \binom{n+2}{2} + n + 1$, odnosno $m \leq \binom{n+2}{2}$.

Bibliografija

[1] S. Jukna, *"Extremal Combinatorics With Applications in Computer Science"*, Springer, 2001.

[2] M. Bóna, *"A Walk Through Combinatorics",* Second edition, World Scientific, 2006.

[3] J. H. van Lint, R. M. Wilson, *"A course in combinatorics",* Cambridge University Press, 1992.

[4] L. Lovász, *"Combinatorial Problems and exercises"*, AMS Chelsea Publishing, 2007.

[5] B. Bollobás, *"Combinatorics: Set Systems, Hypergraphs, Families of Vectors, and Combinatorial Probability"*, Cambridge University Press, 1986.

[6] B. Stechin, V. Baranov, *"Extremal Combinatorial Problems and Their Applications"*, Kluwer Academic Publishers,1995.

[7] R. Graham, B. Rothschild, J. Spencer, *"Ramsey Theory"*, Wiley, 1990.

[8] N. Alon, J. Spencer, *" The Probabilistic Method"* Third Edition, Wiley, 2008.

[9] P. Erdos, J. Spencer, *"Probabilistic Method in Combinatorics"*, Akademiai Kiado, 1974.

[10] L. Babai, P. Frankl, *"Linear Algebra Methods in Combinatorics"*, Dept. of Comp. Sci., University of Chicago, 1992.