MEĐUISPIT IZ EKSTREMALNE KOMBINATORIKE

01.12.2016.

1. (**8 bodova**)

a) Metodom dvostrukog prebrojavanja dokažite

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{2n}{k}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

b) Navedite identitet koji je poopćenje ovog identiteta.

2. (**8 bodova**)

a) Na koliko načina možemo u 4 kutije koje ne razlikujemo razmjestiti 6 raznobojnih lopti, ako ni jedna kutija ne smije ostati prazna?

b) Dokažite da za Stirlingove brojeve druge vrste vrijedi rekurzivna relacija

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k), \quad n \geq k.$$

3. (**6 bodova**)

Neka je $n, k \in \mathbb{N}$ i $k \geq 2n$.

a) Koristeći slabe rasporede izračunaj na koliko načina možemo k bombona (koje ne razlikujemo) podijeliti između n djece, ako svako dijete mora dobiti barem dva bombona.

b) Koristeći rasporede izračunaj na koliko načina možemo k bombona (koje ne razlikujemo) podijeliti između n djece, ako svako dijete mora dobiti barem dva bombona.

4. (**7 bodova**)

Navedite primjer 9-permutacije s 3 ciklusa duljine 3. Odredite joj kanonski ciklički zapis i inverznu permutaciju. Koliko ima nk-permutacija s k ciklusa duljine n?

5. (**7 bodova**)

Neka je X skup svih permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$ i A_i skup svih permutacija koje fiksiraju element i. Izračunajte $|A_i|$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Izračunajte i $\left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$ za svaki $I \subset \{1, \ldots, n\}$. Zatim primijenite načelo uključivanja-isključivanja i izračunajte $\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right|$, drugim riječima, izvedite formulu za broj svih deranžmana skupa $\{1, \ldots, n\}$.

6. (9 bodova)

a) Kompletni k-partitni graf $K_{n/k,n/k,\dots,n/k}$ je graf u kojem je broj vrhova n višekratnik od k i u kojem je skup vrhova razdvojen u k jednakobrojnih dijelova (podskupova), a međusobno spojeni bridom su svi vrhovi iz različitih dijelova (unutar bilo kojeg dijela nisu). Primjerom ovog grafa pokažite da je rezultat Turánovog teorema najbolji mogući (tvrdnja teorema ne vrijedi ako se gornja granica za broj bridova smanji).

b) Iskažite Turánov teorem u specijalnom slučaju za $k = 2$ i kada je broj vrhova paran.

c) Dokažite iskazani teorem (naputak: matematičkom indukcijom po n i korištenjem Dirichletovog načela).

7.* (dodatni zadatak)

Kombinatorno dokažite identitet (ne koristeći binomni teorem)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Dozvoljena je upotreba "podsjetnika za međuispit" i kalkulatora. Ispit se piše 120 minuta.

RJEŠENJA MEĐUISPITA IZ EKSTREMALNE KOMBINATORIKE

01.12.2016.

1. a) Na lijevoj strani jednakosti prebrojavamo sve delegacije od k ljudi između n žena i n muškaraca. Na desnoj prebrojavamo te iste delegacije koje imaju i žena i $k-i$ muškaraca za $i = 1, 2, \dots, k$.

b) Vandermondova konvolucija.

2. a) $S(6,4) = S(5,3) + 4 \cdot S(5,4) = 25 + 4 \cdot 10 = 65$.

b) Na lijevoj strani je broj svih particija skupa od n elemenata na k blokova. Na desnoj strani prebrojavamo iste particije, ali s obzirom na maksimalni element n. Ako on čini jednočlani blok, onda preostalih $n-1$ elemenata na $S(n-1, k-1)$ načina može dovršiti particiju. Ako n nije u jednočlanom bloku, preostalih $n-1$ elemenata možemo rasporediti u k blokova na $S(n-1,k)$ načina, a zatim n možemo smjestiti u bilo koji od ovih k blokova (na k načina) i time smo dovršili particiju.

3. a) Koristeći slabe rasporede: najprije svakom djetetu podjelimo po dva bombona, a zatim preostalih $k-2n$ bombona podijelimo između n djece bez ikakvih uvjeta na $\binom{k-2n+n-1}{n-1} = \binom{k-n-1}{n-1}$ načina.

b) Koristeći rasporede: najprije svakom djetetu podjelimo po jedan bombon, a zatim preostalih $k-n$ bombona podijelimo između n djece s uvijetom da svako dijete mora dobiti još barem jedan bombon na $\binom{k-n-1}{n-1}$ načina.

4. Npr. $p = (321)(654)(987)$, $p^{-1} = (312)(645)(978)$

nk-permutacija tipa $(0, 0, \cdots 0, 0, a_n, 0, 0, \cdots, 0, 0)$ gdje je $a_n = k$ ima

$$\frac{(nk)!}{k! \cdot n^k}.$$

5. Vrijedi $|A_i| = (n-1)!$ i $\left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = (n - |I|)!$. Permutacija je deranžman ako i samo ako ne pripada ni jednom A_i, pa prema načelu uključivanja-isključivanja vrijedi

$$\sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = \sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|} (n - |I|)!$$

Stavimo li $i = |I|$ slijedi broj deranžmana

$$\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} (n-|I|)! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$

6. a) U kompletnom k-partitnom grafu $K_{n/k,n/k,\ldots,n/k}$ između k jednakobrojnih podskupova vrhova na $\binom{k}{2}$ načina možemo odabrati dva podskupa. Vrhovi iz različitih podskupova od $\frac{n}{k}$ vrhova su svi međusobno spojeni pa među vrhovima dva podskupa od $\frac{n}{k}$ vrhova je $\left(\frac{n}{k}\right)^2$ bridova. Ukupno u cijelom grafu je to

$$\binom{k}{2}\left(\frac{n}{k}\right)^2 = \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{n^2}{2}.$$

Ovo je upravo gornja granica za broj bridova u Turánovom teoremu, a ovaj graf ima n vrhova i ne sadrži $(k+1)$-kliku, jer za bilo kojih $k+1$ vrhova barem dva vrha bi morala biti unutar nekog od k podskupova međusobno nespojenih vrhova.

b) Ako graf s $2n$ vrhova ne sadrži trokut onda ima najviše n^2 bridova.

c) Ekvivalentna tvrdnja (dokaz po kontrapoziciji) glasi: ako graf G s $2n$ vrhova ima n^2+1 bridova, onda G sadrži trokut.

Dokaz matematičkom indukcijom po n:

za $n=1$ G ne može imati 2 brida pa je tvdnja istinita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n \in \mathbb{N}$ i pogledajmo graf s $2(n+1)$ vrhova i $(n+1)^2+1$ bridova. Neka su x i y dva susjedna vrha i H inducirani podgraf od preostalih $2n$ vrhova (skup bridova od H je podskup bridova od G čija su oba kraja u H). Ako H ima barem n^2+1 bridova, onda H pa stoga i G sadrži trokut. Ako H ima najviše n^2 bridova, onda barem $2n+1$ bridova od G spajaju x i y s vrhovima iz H. Kako H ima $2n$ vrhova, prema Dirichletovom načelu postoji vrh z iz H koji je susjedan i sa x i sa y, pa imamo trokut $\{x,y,z\}$.

7. Dokazati ćemo da svaki n-člani skup ima jednaki broj podskupova s parnim i s neparnim brojem elemenata (kraće: parnih i neparnih podskupova).

1. način

(i) Ako je n neparan, komplement svakog parnog podskupa je neparan podskup i obratno. Dakle ima ih jednako.

(ii) Ako je n paran pogledajmo posebno podskupove koji ne sadrže najveći element i podskupove koji ga sadrže. Prema (i) parnih i neparnih podskupova koji ne sadrže najveći element ima jednako. Sve podskupove koji sadrže najveći element dobijemo tako da svim podskupovima koji ga ne sadrže dodamo taj najveći element. Pa opet prema (i) i među njima ima jednako parnih i neparnih.

2. način

Dokažimo da parnih podskupova ima 2^{n-1}. Imamo 2 mogućnosti za prvi element: on je u podskupu ili nije u podskupu. Nadalje, imamo 2 mogućnosti za drugi element: on je u podskupu ili nije u podskupu. I tako do pretposljednjeg elementa. Za njega također imamo te dvije mogućnosti. Ali za posljednjeg imamo samo jednu: ako je broj prethodnih elemenata u podskupu paran on nije u podskupu, ako je neparan on je u podskupu. Dakle ukupno 2^{n-1} različitih mogućnosti za odabir elemenata parnog podskupa. Tvrdnja se analogno dokazuje i za neparne podskupove.

3. način

Definirajmo funkciju na skupu svih poskupova n-članog skupa $\{1, \ldots, n\}$

$$f(S) = \begin{cases} S \cup \{1\}, & \text{ako } 1 \notin S, \\ S \setminus \{1\}, & \text{ako } 1 \in S. \end{cases}$$

Ova funkcija je bijekcija koja parne podskupove preslikava u neparne i obratno.