ZAVRŠNI ISPIT IZ EKSTREMALNE KOMBINATORIKE

01.02.2017.

1. (5 bodova)

Neka je $S_1, S_2, \ldots, S_m$ niz skupova koji ima sustav izrazitih predstavnika. Ako za neki k, $1 \leq k < m-1$ unija $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$, prvih k skupova ima točno $k+1$ elemenata, onda dokažite da nikoja dva od preostalih skupova $S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_m$ ne mogu biti potpuno sadržani u uniji $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$.

2. (9 bodova)

a) Pokažite da je $\{0, 1, 3, 9\}$ diferencijski skup.

b) Nekad davno trebalo je 13 telefona povezati pomoću sklopki, od kojih se na svaku moglo spojiti najviše 4 telefona. Koristeći projektivnu ravninu reda 4 i diferencijski skup $\{0, 1, 3, 9\}$ pokažite da se telefoni mogu spojiti pomoću 13 sklopki tako da su svaka dva telefona direktno spojena na istu sklopku točno jednom. Zašto za to nije dovoljno 12 sklopki?

c) Je li ova struktura suncokret? A je li 4-uniformni slabi Δ-sustav? Jesu li svi njeni elementi diferencijski skupovi? Odgovore obrazložite.

3. (8 bodova)

a) Navedite primjer i Hasseov dijagram jednog (konačnog) parcijalno uređenog skupa.

b) Neka su $I_1, I_2, \ldots, I_{mn+1}$ zatvoreni intervali u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$

$$I_j = [a_j, b_j], \quad j = 1, \ldots, mn+1.$$

Koristeći parcijalni uređaj definiran s

$$I_r \prec I_s \Leftrightarrow b_r < a_s$$

pokažite da je među njima $m+1$ međusobno disjunktnih intervala ili $n+1$ intervala s nepraznim presjekom.

4. (9 bodova)

a) Dokažite $R(3,3) = 6$.

b) Neka su bridovi klike K_9 obojani u dvije boje: crvenu i plavu. Metodom suprotnog dokažite da tada postoji vrh V s barem 6 crvenih incidentnih bridova ili barem 4 plava incidentna brida.

c) Koristeći prethodne rezultate dokažite da svako 2-bojanje bridova klike K_9 sadrži ili crvenu podkliku K_4 ili plavu K_3, tj. da je $R(4,3) \leq 9$.

5. (**6 bodova**)
Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_m$ k-člani podskupovi od Ω. Dokažite da ako je $m < 2^{k-1}$ onda postoji bojanje elemenata od Ω u dvije boje tako da ni jedan od k- članih skupova $A_1, A_2, \ldots, A_m$ nije jednobojan.

6. (**8 bodova**)
Dokažite:

a) Svaki turnir $T = (V, E)$ ima bar jedan Hamiltonov put.

b) Postoji turnir T s n vrhova i najmanje $n!/2^{n-1}$ Hamiltonovih putova.

7. (dodatni zadatak)
U nogometnom razigravanju sudjeluje 10 timova. Nakon koliko najviše kola sigurno postoje tri tima među kojima nikoja dva nisu međusobno igrala?

Dozvoljena je upotreba "podsjetnika za ZI" i kalkulatora.

Ispit se piše 120 minuta.

RJEŠENJA ZAVRŠNOG ISPITA IZ EKSTREMALNE KOMBINATORIKE

01.02.2017.

1. Za neki k, $1 \leq k < m$ unija $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$, prvih k skupova ima točno $k+1$ elemenata. Ako bi neka dva od preostalih skupova $S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_m$, označimo ih sa X i Y, bili potpuno sadržan u uniji $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$ onda bi imali $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k \cup X \cup Y$ uniju od $k+2$ ovih skupova s točno $k+1$ elemenata. Ovo je u kontradikciji s uvjetom da $S_1, S_2, \ldots, S_m$ ispunjavaju Hallov uvjet.

2. a) Skup $\{0,1,3,9\}$ je diferencijski skup jer se među $4 \cdot 3 = 12$ mogućih razlika njegovih elemenata pojavljuju svi brojevi od 1 do 12. Pri tome se računa modulo 13.

b) Svakom sklopkom spojimo sledeće četvorke telefona: $\{0,1,3,9\}$, $\{1,2,4,10\}$, $\{2,3,5,11\}$, $\{3,4,6,12\}$, $\{4,5,7,0\}$, $\{5,6,8,1\}$, $\{6,7,9,2\}$, $\{7,8,10,3\}$, $\{8,9,11,4\}$, $\{9,10,12,5\}$, $\{10,11,0,6\}$, $\{11,12,1,7\}$, $\{12,0,2,8\}$.

12 sklopki nije dovoljeno jer je $12 \cdot \binom{4}{2} < \binom{13}{2}$.

c) Nije suncokret (nema zajedničkog presjeka). Jest 4-uniformni slabi Δ-sustav (presjeci su jednočlani skupovi). Svi elementi (četveročlani skupovi) su diferencijski skupovi jer se razlika ne mijenja ako umanjeniku i umanjitelju dodamo 1 (ili neki drugi broj).

3. a) Bilo koji primjer parcijalno uređenog skupa.

b) Ako u ovom parcijalno uređenom skupu postoji lanac duljine barem $m+1$ onda smo gotovi jer tada imamo $m+1$ međusobno disjunktnih intervala. U suprotnom ni jedan lanac nije dulji od m. Zato je za particiju u lance potrebno barem $\left\lceil \frac{mn+1}{m} \right\rceil = n+1$ lanaca. Prema Dilworthovom teoremu onda postoji antilanac duljine $n+1$. Bilo koja dva njegova elementa su intervali koji se sijeku pa se zato svi sijeku i imamo $n+1$ intervala s nepraznim presjekom

4. a) Najprije dokažimo $R(3,3) \leq 6$. Uzmimo proizvoljan vrh V. Kako je u K_6 stupanj svakog vrha, pa i vrha V jednak 5, prema Dirichletovom načelu najmanje 3 brida iste boje su incidentna vrhu V. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je ta boja crvena i da su to bridovi $\{V,X\}$, $\{V,Y\}$ i $\{V,Z\}$.Ako bi neki od bridova $\{X,Y\}$, $\{Y,Z\}$, $\{X,Z\}$ bio crvene boje imali bi crveni trokut. Ako nijedan od bridova $\{X,Y\}$, $\{Y,Z\}$, $\{X,Z\}$

nije crvene boje, onda imamo plavi trokut X, Y, Z. S ovim je dokazano $R(3,3) \leq 6$.

Kontraprimjerom ćemo pokazati $R(3,3) > 5$, da rezultat ne vrijedi za graf s 5 vrhova: obojimo crvenom bojom sve stranice peterokuta, a plavom sve dijagonale. Među ovako obojanim bridovima očito nema istobojnog trokuta.

Kako je $R(3,3) \leq 6$ i $R(3,3) > 5$ slijedi $R(3,3) = 6$.

b) U suprotnom svih 9 vrhova bi imalo po točno 5 crvenih incidentnih bridova i 3 plava, pa zbroj stupnjeva svih vrhova u crvenom podgrafu $9 \cdot 5 = 45$ nebi bio paran broj.

c) U prvom slučaju, označimo sa A skup od 6 vrhova crvenih bridova incidentnih s V i različitih od V. Zbog $R(3,3) = 6$ znamo da A sadrži ili plavi ili crveni trokut, pa uključimo li i vrh V, graf K_9 sadrži ili plavi trokut ili crvenu kliku K_4.

U drugom slučaju za 4 plava incidentna brida s V, označimo s B skup od njihova 4 vrha različita od V. Ako su svi bridovi od B crveni, onda imamo crvenu kliku K_4. Ako nisu, postoji plavi brid koji zajedno s vrhom V daje plavi trokut.

5. Pogledajmo slučajno 2-bojanje nakog k-članog podskupa od Ω. Za bilo koji podskup A_j, vjerojatnost da je A_j monokromatski jednaka je

$$p_j = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k .$$

Zato je vjerojatnost da je barem jedan od podskupova $A_1, A_2, \ldots, A_m$ monokromatski manja od 1 ($m < 2^{k-1}$ pa je $m \cdot 2^{1-k} < 1$). Slijedi da je vjerojatnost suprotnog događaja strogo pozitivna, odnosno postoji bojanje elemenata od Ω u dvije boje tako da ni jedan od k- članih skupova $A_1, A_2, \ldots, A_m$ nije jednobojan.

6. a) Dokažimo da se svaki put kojem nedostaje neki vrh može produžiti uključujući taj vrh u put. Pretpostavimo da imamo put $v_1, v_2, \ldots, v_k$ gdje je $k < n$ i da mu vrh v ne pripada. Ako je $(v, v_1) \in E$ onda vrh v možemo uključiti na "početak" i dobivamo put $v, v_1, \ldots, v_k$. Ako ne, onda je $(v_1, v) \in E$. U tom slučaju ako je $(v, v_2) \in E$ opet možemo v uključiti kao po redu drugi vrh i dobiti put $v_1, v, v_2, \ldots, v_k$. Ako ne, onda je $(v_2, v) \in E$. Na ovaj način nastavljamo do kraja: ukoliko su svi

$$(v_1, v), (v_2, v), \ldots, (v_n, v) \in E$$

zbog $(v_n, v) \in E$ vrh v možemo uključiti na kraju i dobiti put $v_1, \ldots, v_k, v$. Na ovaj način induktivno u put uključimo sve vrhove koji mu nedostaju i na kraju dobijemo Hamiltonov put.

b) Izračunajmo očekivanje broja Hamiltonovih putova u slučajno odabranom turniru $T = (V, E)$ (svaki brid ima slučajnu orjentaciju, odabranu nezavisno s vjerojatnošću $1/2$). Za danu permutaciju skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ pogledajmo niz $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ i označimo s X_σ indikatorsku slučajnu varijablu događaja "bridovi u T pojavljuju se s orjentacijom $(\sigma(i), \sigma(i+1))$ za svaki $i = 1, \ldots, n-1$. Kako je orjentacija svakog brida odabrana nezavisno imamo

$$\mathbf{E}(X_\sigma) = P\Big((\sigma(i), \sigma(i+1)) \in E \quad \text{za } i = 1, \ldots, n-1\Big) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ukupan broj X Hamiltonovih putova u turniru T jednak je zbroju indikatorskih slučajnih varijabli po svim mogućim Hamiltonovim putovima, odnosno po svim permutacijama skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, pa je

$$\mathbf{E}(X) = \sum_\sigma \mathbf{E}(X_\sigma) = \frac{n!}{2^{n-1}}.$$

Prema Dirichletovom svojstvu za očekivanje slijedi da postoji elementarni događaj za kojeg je $X(\omega) \geq \mathbf{E}(X)$, odnosno postoji turnir s barem $n!/2^{n-1}$ Hamiltonovih putova.

7. Označimo s n broj odigranih kola. U svakom kolu igra se 5 utakmica i nakon n kola neki tim A nije igrao sa $9-n$ timova. Ako bilo koja od ovih $9-n$ timova nisu međusobno igrala, zajedno sa A imamo trojku među kojima nikoja dva nisu međusobno igrala. U jednom kolu ovih $9-n$ timova može međusobno odigrati najviše $\left\lfloor \frac{9-n}{2} \right\rfloor$ utakmica. Zato tražimo najveći n za kojeg vrijedi

$$n \cdot \left\lfloor \frac{9-n}{2} \right\rfloor > \binom{9-n}{2}.$$

To je $n = 4$.