PRVI ISPITNI ROK IZ EKSTREMALNE KOMBINATORIKE

24.02.2016.

1. (**12 bodova**)
Neka su $n, k, q \in \mathbb{N}$ takvi da je $n \geq k \geq q$. Metodom dvostrukog prebrojavanja dokažite identitete:

$$\textbf{a)}\quad \binom{n}{k}\binom{k}{q} = \binom{n}{q}\binom{n-q}{k-q}, \quad \textbf{b)}\quad \sum_{k=q}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{q} = 2^{n-q}\binom{n}{q}.$$

2. (**12 bodova**)
Dokažite da za Stirlingove brojeve druge vrste vrijedi:

a) $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$, za $n \geq 2$,

b) $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$, za $n \geq 2$,

c) $S(n, 3) = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1) - 2^{n-1}$, za $n \geq 3$.

3. (**10 bodova**)

a) Neka je $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ konačan niz od n različitih realnih brojeva. Pridružimo svakom članu a_i niza A uređeni par prirodnih brojeva (x_i, y_i) gdje je x_i broj članova najduljeg rastućeg podniza od A koji završavaju članom a_i, a y_i broj članova najduljeg padajućeg podniza od A koji započinju članom a_i. Dokažite da je $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$ kad god je $i \neq j$:

b) Dokažite Erdős-Szekeresov teorem: ako je $n \geq sr + 1$ tada A ima rastući podniz duljine $s + 1$ ili padajući podniz duljine $r + 1$ (ili oboje).

c) Dokažite ako je $n > srp$ onda bilo koji niz od n realnih brojeva ima ili rastući podniz duljine barem $s + 1$ ili padajući podniz duljine barem $r + 1$ ili konstantan podniz duljine barem $p + 1$.

4. (**12 bodova**)

a) Neka je R latinski pravokutnik $r \times n$ i $r < n$. Za $j = 1, \ldots, n$ neka je S_j skup brojeva $1, 2, \ldots, n$ koji ne pripadaju j-tom stupcu od R. Dokažite da skupovi $S_1, S_2, \ldots, S_n$ imaju sustav izrazitih predstavnika.

b) Koristeći ovaj rezultat dokažite Ryserov teorem: ako je $r < n$, onda se bilo koji latinski pravokutnik $r \times n$ može nadopuniti do latinskog pravokutnika $(r + 1) \times n$.

5. (**8 bodova**)

Navedite primjer jednog suncokreta. Koliko najmanje i koliko najviše elemenata može imati unija skupova $S_1, S_2, \ldots, S_k$ suncokreta s k latica u s-uniformnoj familiji?

6. (**12 bodova**)

a) Navedite primjer i Hasseov dijagram jednog (konačnog) parcijalno uređenog skupa.

b) Koliko najviše zajedničkih elemenata mogu imati jedan lanac i jedan antilanac u parcijalno uređenom skupu? Obrazložite odgovor.

c) Neka je $\mathcal{F}$ antilanac u 2^X, $|X| = n$ koji se sastoji od skupova kardinalnog broja najviše k, gdje je $k \leq n/2$. Koristeći LYM nejednakost dokažite da je $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k}$.

7. (**12 bodova**)

a) Neka su bridovi klike K_9 obojani u dvije boje: crvenu i plavu. Metodom suprotnog dokažite da tada postoji vrh V s barem 6 crvenih incidentnih bridova ili barem 4 plava incidentna brida.

b) Koristeći $R(3,3) = 6$ i prethodni rezultat dokažite da svako 2-bojanje bridova klike K_9 u crvenu i plavu boju sadrži ili crvenu podkliku K_4 ili plavu K_3, tj. da je $R(4,3) \leq 9$.

8. (**12 bodova**)

Brijeg n-permutacije $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ je svaki p_i za kojeg je $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ i za kojeg vrijedi

$$p_{i-1} < p_i > p_{i+1}.$$

Vjerojatnosnom metodom (Dirichletovim svojstvom za očekivanje) dokažite da postoji n-permutacija s najmanje $\frac{n-2}{3}$ brijegova.

Dozvoljena je upotreba podsjetnika za ispit (sa web stranice predmeta) i kalkulatora. Ispit se piše 150 minuta.

RJEŠENJA 1. ISPITNOG ROKA IZ EKSTREMALNE KOMBINATORIKE

24.02.2016.

1. a) Prebrojavanjem na dva načina svih parova (L, K) podskupova od $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, takvih da vrijedi $L \subseteq K$, $|L| = q$, $|K| = k$.

b) Prebrojavanjem na dva načina svih parova (L, K) podskupova od $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, takvih da vrijedi $L \subseteq K \subseteq \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $|L| = q$ (bez uvjeta na kardinalnost podskupa K).

2. a) Broj particija skupa $\{1, \dots, n\}$ na $n-1$ dijelova (blokova) jednak je $\binom{n}{2}$ jer od $n-1$ blokova svi su jednočlani, osim jednog dvočlanog.

b) Svaki podskup A od $\{1, \dots, n\}$ osim praznog skupa i cijelog $\{1, \dots, n\}$ određuje jednu particiju tog skupa u dva bloka A i $\overline{A}$. Takvih podskupova A ima $2^n - 2$. Ali kako A i $\overline{A}$ na ovaj način određuju istu particiju $2^n - 2$ treba još podijeliti s 2.

c) $3! \cdot S(n, 3)$ je broj surjekcija iz n-članog u 3-člani skup. Svih funkcija iz n-članog u 3-člani skup ima 3^n, od toga ih 3 imaju jednočlanu sliku, a dvočlanu sliku ih ima $3(2^n - 2)$. Slijedi da je $3! \cdot S(n, 3) = 3^n - 3(2^n - 2) - 3$, odnosno $S(n, 3) = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1) - 2^{n-1}$.

3. a) Postoje dvije mogućnosti $a_i < a_j$ ili $a_i > a_j$.

-ako je $a_i < a_j$, najdulji rastući podniz koji završava članom a_i se može produljiti dodavanjem posljednjeg člana a_j (pa je $x_i < x_j$),

-ako je $a_i > a_j$, najdulji padajući podniz koji započinje članom a_j može produljiti dodavanjem prvog člana a_i (pa je $y_i > y_j$).

b) Napravimo sada mrežu od n^2 kvadratića. Smjestimo svaki član a_i u kvadratić s koordinatama (x_i, y_i), gdje je $1 \leq x_i, y_i \leq n$ za sve $i = 1, \dots, n$. U svakom kvadratiću je najviše jedan član niza A, pa kako je $|A| = n \geq sr + 1$ prema Dirichletovom načelu jedan će član niza a_i biti izvan osjenčene $s \times r$ podmreže. Zato je $x_i \geq s + 1$ ili $y_i \geq r + 1$ pa tvrdnja slijedi.

c) Prema Dirichletovom načelu ako nemamo više od sr različitih vrijednosti ovog niza, onda se neka od tih vrijednosti pojavljuje više od p puta u nizu. Ako imamo više od sr različitih vrijednosti primijenimo Erdős-Szekeresov teorem.

4. a) Kako svaki skup S_j ima točno $n-r$ elemenata, a svaki element je u točno r stupaca, pa pripada istom broju $n-r$ skupova $S_1, S_2, \ldots, S_n$, prema korolaru 0.1 (iz podsjetnika) skupovi $S_1, S_2, \ldots, S_n$ imaju sustav izrazitih predstavnika.

b) Elementi $(r+1)$. retka su upravo elementi sustava izrazitih predstavnika skupova $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Na taj način se i dalje svaki od brojeva $1, 2, \ldots, n$ pojavljuje točno jednom u svakom retku i najviše jednom u svakom stupcu.

5. Unija skupova $S_1, S_2, \ldots, S_k$ suncokreta s k latica u s-uniformnoj familiji najmanje može imati $s-1+k$ elemenata (kada je $s-1$ elemenata u jezgri), a najviše sk (kada je jezgra prazna).

6. b) Lanac i antilanac u parcijalno uređenom skupu mogu imati najviše jedan zajednički element, jer dva elementa ne mogu istovremeno biti usporediva i neusporediva

c) Zbog $\binom{n}{|A|} \leq \binom{n}{k}$ za svaki $A \in \mathcal{F}$ i gdje je $k \leq n/2$ imamo

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \geq |\mathcal{F}| \cdot \binom{n}{k}^{-1}$$

pa nejednakost $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k}$ direktno slijedi iz LYM nejednakosti

$$|\mathcal{F}| \cdot \binom{n}{k}^{-1} \leq \sum_{A \in \mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1.$$

7. a) U suprotnom svih 9 vrhova bi imalo po točno 5 crvenih incidentnih bridova i 3 plava, pa zbroj stupnjeva svih vrhova u crvenom podgrafu $9 \cdot 5 = 45$ nebi bio paran broj.

b) U prvom slučaju, označimo sa A skup od 6 vrhova crvenih bridova incidentnih s V i različitih od V. Zbog $R(3,3) = 6$ znamo da A sadrži ili plavi ili crveni trokut, pa uključimo li i vrh V, graf K_9 sadrži ili plavi trokut ili crvenu kliku K_4.

U drugom slučaju za 4 plava incidentna brida s V, označimo s B skup od njihova 4 vrha različita od V. Ako su svi bridovi od B crveni, onda imamo crvenu kliku K_4. Ako nisu, postoji plavi brid koji zajedno s vrhom V daje plavi trokut.

8. Neka su $Y_2, Y_3, \ldots, Y_{n-1}$ indikatorske slučajne varijable definirane na skupu svih n-permutacija p

$$Y_i(p) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i \text{ brijeg,} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za $2 \leq i \leq n-1$, vjerojatnost da je p_i najveći u skupu $\{p_{i-1}, p_i, p_{i+1}\}$ jednaka je $1/3$ za svaki p_i. Zato je

$$\mathbf{E}(Y_i) = \frac{1}{3}, \ \ i = 2, \ldots, n-1.$$

Definiramo li $Y = Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_{n-1}$ onda je $Y(p)$ broj brijegova permutacije p i očekivani broj "brijegova" permutacije p je

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{i=2}^{n-1} \mathbf{E}(Y_i) = \frac{n-2}{3}.$$

Zato prema Dirichletovom svojstvu za očekivanje postoji permutacija za koju je $Y(p) \geq \mathbf{E}(Y)$ odnosno koja ima najmanje $\frac{n-2}{3}$ brijegova.