ZAVRŠNI ISPIT IZ EKSTREMALNE KOMBINATORIKE

10.02.2016.

1. (**7 bodova**)

a) Treba ocijeniti 7 vrsti vina, svaka dva moraju biti uspoređena i to jednaki broj puta, svaki degustator može probati najviše 3 vina. Koristeći projektivnu ravninu reda 2 i diferencijski skup $\{0, 1, 3\}$ pokažite da ovaj posao može obaviti 7 degustatora na način da svaka dva vina budu uspoređena točno jednom. Zašto 6 degustatora to ne može obaviti?

b) Je li ova struktura suncokret? A je li 3-uniformni slabi Δ-sustav?

c) Koliko elemenata mora imati neka familija tročlanih skupova da bi sadržavala suncokret s k latica? Sadrži li projektivna ravnina reda 2 suncokret? Odgovore obrazložite.

2. (**8 bodova**)

a) Neka je $\mathcal{F}$ presijecajuća familija k-članih podskupova n-članog skupa. Pokažite da je u slučaju $n < 2k$ svaka familija $\mathcal{F}$ presijecajuća. Koliko najviše elemenata ona može imati u slučaju $n \geq 2k$? Navedite najbolju gornju ogradu i konstruirajte familiju za koju se ona postiže.

b) Neka je $n \leq 2k$ i neka je $A_1, \dots, A_m$ familija k-članih podskupova skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ takva da je $A_i \cup A_j \neq \{1, 2, \dots, n\}$ za sve i, j. Odredite najbolju gornju ogradu za m.

3. (**6 bodova**)

Napišite Hasseov dijagram za skup ternarnih vektora iz $\{0, 1, 2\}^2$ s parcijalnim uređajem $(a_1, a_2) \preccurlyeq (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq b_1$ i $a_2 \leq b_2$. Potom odredite jednu particiju ovog parcijalno uređenog skupa u antilance.

4. (**8 bodova**)

a) Dokažite da za Ramseyeve brojeve (za 2-bojanja bridova grafova) vrijedi $R(3, 3) = 6$.

b) Dokažite da u svakom grafu s 6 vrhova čiji svi bridovi su obojani u dvije boje postoje barem dva jednobojna trokuta.

5. (**8 bodova**)

a) Dokažite da ako je $p \in \langle 0, 1\rangle$, $k, l, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}} < 1,$$

onda za Ramseyev broj vrijedi $R(k, l) > n$.

b) Iz prethodnog rezultata pokažite da za simetrične Ramseyeve brojeve vrijedi

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1 \quad \Rightarrow \quad R(k, k) > n.$$

c) Koristeći najjednostavniju ocjenu za binomne koeficijente $\binom{n}{k} \leq n^k$, izvedite donju ogradu za simetrične Ramseyeve brojeve

$$R(k, k) > 2^{k/2-1}, \quad k \geq 3.$$

6. (**8 bodova**)

Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova od $\{1, 2, \ldots, n\}$ takva da nijedan skup iz $\mathcal{F}$ ne sadrži neki drugi skup iz $\mathcal{F}$, tj. $A, B \in \mathcal{F}$, $A \neq B \Longrightarrow A \subsetneq B$, $B \subsetneq A$. Neka je σ proizvoljna n-permutacija i neka je X_σ slučajna varijabla definirana s

$$X_\sigma = |\{i : \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)\} \in \mathcal{F}\}|.$$

Je li X_σ indikatorska slučajna varijabla i zašto? Koristeći očekivanje $\mathbf{E}\left(\sum_\sigma X_\sigma\right)$ dokažite da vrijedi

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

7.*

a) Pretpostavimo da su sve točke prostora obojane crvenom, plavom ili zelenom bojom. Dokažite da tada postoji jedinična dužina s istobojnim rubnim točkama.

b) Pretpostavimo da su sve točke prostora obojane crvenom, plavom, zelenom ili žutom bojom. Dokažite da tada postoji jedinična dužina s istobojnim rubnim točkama.

Dozvoljena je upotreba "podsjetnika za ZI" i kalkulatora.

Ispit se piše 120 minuta.

RJEŠENJA ZAVRŠNOG ISPITA IZ EKSTREMALNE KOMBINATORIKE

10.02.2016.

1. a) $\{0,1,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{3,4,6\}$, $\{4,5,0\}$, $\{5,6,1\}$, $\{6,0,2\}$. 6 degustatora nije dovoljeno jer je $6 \cdot \binom{3}{2} < \binom{7}{2}$.

b) Nije suncokret, je 3-uniformni slabi Δ-sustav.

c) Više od $6\,(k-1)^3$ elemenata, gdje je k broj latica. Dakle, familija s tročlanim podskupovima $\{0,1,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{3,4,6\}$, $\{4,5,0\}$, $\{5,6,1\}$, $\{6,0,2\}$ prema suncokretovoj lemi sigurno sadrži suncokret s $k=2$ latica. Očito je da sadrži i suncokret s 3 latice npr. $\{0,1,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{5,6,1\}$.

2. a) Ako je $n < 2k$ onda za svaka dva k-člana podskupa A i B vrijedi da im je presjek neprazan:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \geq |A| + |B| - n = 2k - n > 0.$$

Ako je $n \geq 2k$ onda prema Erdős-Ko-Radovom teoremu svaka presijecajuća familija $\mathcal{F}$ k-članih podskupova od n-članog skupa ima najviše $\binom{n-1}{k-1}$ članova. Presijecajuću familiju k-članih podskupova sa $\binom{n-1}{k-1}$ članova možemo dobiti uzimanjem svih $\binom{n-1}{k-1}$ k-članih podskupova koji sadrže element 1.

b) Pogledajmo komplemente $\overline{A_i} = \{1,2,\ldots,n\} \setminus A_i$, za njih vrijedi

$$\overline{A_i} \cap \overline{A_j} = \overline{A_i \cup A_j} \neq \overline{\{1,2,\ldots,n\}} = \emptyset$$

i svi su $(n-k)$-člani podskupovi. Provjerimo uvjete Erdős-Ko-Radovog teorema

$$n \geq 2\,(n-k) \;\;\Leftrightarrow\;\; n \leq 2k$$

i potom ga primijenimo

$$m \leq \binom{n-1}{n-k-1} = \binom{n-1}{k}.$$

3. Imamo 5 nivoa u Hasseovom dijagramu, to su (od najnižeg):
00;
$01, 10$;
$02, 11, 20$;
$12, 21$;
22.
Spojeni parovi su: $\{00, 01\}$, $\{00, 10\}$, $\{01, 02\}$, $\{01, 11\}$, $\{10, 11\}$, $\{10, 20\}$, $\{02, 12\}$, $\{11, 12\}$, $\{11, 21\}$, $\{20, 21\}$, $\{12, 22\}$, $\{21, 22\}$.
Particija u antilance $\{00\}, \{01, 10\}, \{02, 11, 20\}, \{12, 21\}, \{22\}$.

4. a) Najprije dokažimo $R(3,3) \leq 6$. Uzmimo proizvoljan vrh V. Kako je u K_6 stupanj svakog vrha, pa i vrha V jednak 5, prema Dirichletovom načelu najmanje 3 brida iste boje su incidentna vrhu V. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je ta boja crvena i da su to bridovi $\{V, X\}$, $\{V, Y\}$ i $\{V, Z\}$.Ako bi neki od bridova $\{X, Y\}$, $\{Y, Z\}$, $\{X, Z\}$ bio crvene boje imali bi crveni trokut. Ako nijedan od bridova $\{X, Y\}$, $\{Y, Z\}$, $\{X, Z\}$ nije crvene boje, onda imamo plavi trokut X, Y, Z. S ovim je dokazano $R(3,3) \leq 6$.

Kontraprimjerom ćemo pokazati $R(3,3) > 5$, da rezultat ne vrijedi za graf s 5 vrhova: obojimo crvenom bojom sve stranice peterokuta, a plavom sve dijagonale. Među ovako obojanim bridovima očito nema istobojnog trokuta.

Kako je $R(3,3) \leq 6$ i $R(3,3) > 5$ slijedi $R(3,3) = 6$.

b) Jedan trokut već imamo prema **a)** dijelu zadatka. BSO pretpostavimo da je crveni i njegovi vrhovi su A, B, C. Ako preostale tri točke čine trokut onda smo gotovi. Ako ne, među njima postoji jedan plavi i jedan crveni brid. Neka je EF plavi brid. Ako iz vrha A prema E i F izlaze dva plava brida imamo plavi trokut. Isto vrijedi i za vrhove B i C. Ako ne, iz svakog od vrhova A, B, C izlazi barem po jedan crveni brid prema vrhovima E i F. Prema Dirichletovom načelu od ta tri brida barem dva crvena brida moraju ići u isti vrh. I imamo još jedan crveni trokut.

5. a) Pogledajmo slučajni graf $G(n, p)$ s n vrhova, gdje je vjerojatnost da su bilo koja dva vrha povezana bridom jednaka p i nezavisna o drugim bridovima. Za bilo koji skup od k fiksnih vrhova, vjerojatnost da formiraju kliku K_k jednaka je

$$p_1 = p^{\binom{k}{2}}.$$

Slično, vjerojatnost za N_l-skup od l nezavisnih vrhova je

$$p_2 = (1-p)^{\binom{l}{2}}.$$

U grafu s n vrhova ima $\binom{n}{k}$ skupova od k vrhova i $\binom{n}{l}$ skupova od l vrhova, pa primijenimo li nejednakost za vjerojatnost zbroja događaja dobijemo da je

$$P\left(G\left(n,p\right) \text{ sadrži } K_k \text{ ili } N_l\right) \leq \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l}\left(1-p\right)^{\binom{l}{2}}.$$

Dakle, uz uvjet

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l}\left(1-p\right)^{\binom{l}{2}} < 1$$

vjerojatnost događaja "$G\left(n,p\right)$ ne sadrži ni K_k ni N_l" je strogo pozitivna, odnosno vrijedi $R\left(k,l\right) > n$.

b) Tvrdnja slijedi direktno uzmemo li $k = l$ i $p = \frac{1}{2}$.

c) Koristeći najjednostavniju ocjenu za binomne koeficijente $\binom{n}{k} \leq n^k$, dobije se

$$2n^k < 2^{k(k-1)/2}$$

što je sigurno ispunjeno ako je

$$n \leq 2^{k/2-1}.$$

pa je

$$R\left(k,k\right) > n \geq 2^{k/2-1}, \text{ za } k \geq 3.$$

6. X_σ je indikatorska slučajna varijabla, jer ni jedan skup iz familije $\mathcal{F}$ ne sadrži neki drugi skup iz $\mathcal{F}$ (niti je sadržan u drugom skupu familije) pa može poprimiti samo vrijednosti 0 i 1. Za zadani $A \in \mathcal{F}$ imamo $|A|!\left(n-|A|\right)!$ permutacija za koje X_σ poprima vrijednost 1. Također, zbog disjunktnosti događaja "$A = \{\sigma\left(1\right), \sigma\left(2\right), \ldots, \sigma\left(i\right)\}$" i "$B = \{\sigma\left(1\right), \sigma\left(2\right), \ldots, \sigma\left(j\right)\}$" za $A, B \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbf{E}\left(\sum_{\sigma} X_\sigma\right) = \sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{|A|!\left(n-|A|\right)!}{n!} = \sum_{A\in\mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1$$

odakle zbog $\binom{n}{|A|} \leq \binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ imamo

$$|\mathcal{F}| \cdot \binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}^{-1} \leq \sum_{A\in\mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1.$$

7. a) Neka je T tetraedar stranice duljine 1. Po Dirichletovom principu T mora imati dva jednobojna vrha. Oni su rubne točke tražene dužine.

b) Pretpostavimo da takva dužina ne postoji i neka je $ABCD$ pravilan tetraedar sa stranicama duljine 1. On mora imati vrhove u različitim bojama. BSO pretpostavimo da je vrh A crvene boje i dopišimo s vanjske strane tetraedra $ABCD$ tetraedar $BCDE$. Vrh E mora biti crvene boje. Kao u propziciji 3.7 zaključujemo da sve točke udaljene za $2h = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ od točke A moraju biti iste boje. Posebno, sve točke sfere sa središtem u točki A radijusa $2h$ moraju biti crvene, a kako na sferi radijusa većeg od $1/2$ uvijek postoje dvije točke udaljene za 1 tvrdnja je dokazana.