MEĐUISPIT IZ EKSTREMALNE KOMBINATORIKE

02.12.2015.

1. (**8 bodova**)

a) Koji identitet dobijemo uspoređujući koeficijente uz x^k u binomnom razvoju od $(1+x)^{n+m}$ i od $(1+x)^n\,(1+x)^m$, gdje su $n,\,m,\,k\in\mathbb{N}$?

b) Metodom dvostrukog prebrojavanja dokažite Vandermondovu konvoluciju:

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i},\quad n,m,k\in\mathbb{N}.$$

2. (**10 bodova**)

Na koliko načina možemo u 3 kutije koje ne razlikujemo razmjestiti:

a) 10 raznobojnih lopti,

b) 10 lopti koje ne razlikujemo,

ako su prazne kutije dozvoljene?

U koliko od ovih razmještaja su neke kutije prazne?

U koliko od ovih razmještaja je točno jedna kutija prazna?

3. (**5 bodova**)

Na koliko načina možemo nk ljudi smjestiti za n okruglih stolova od kojih svaki ima k mjesta? Naputak: promatrajte nk-permutacije s n ciklusa jednake duljine.

4. (**6 bodova**)

Koristeći načelo uključivanja-isključivanja izračunajte koliko ima n-znamenkastih brojeva ($n\in\mathbb{N}$, $n\geq 5$) koji sadrže samo neparne znamenke $1,3,5,7,9$ i to tako da se svaka od ovih znamenki barem jednom pojavljuje.

5. (**10 bodova**)

a) Dokažite Mantelov teorem: ako graf G s $2n$ vrhova ima n^2+1 bridova, onda G sadrži trokut. Naputak: matematičkom indukcijom po n i koristite Dirichletovo načelo.

b) Primjerom pokažite da je rezultat Mantelovog teorema najbolji mogući (tvrdnja ne vrijedi ako se broj bridova iz uvjeta teorema smanji).

c) Pokažite da je Turanov teorem poopćenje Mantelovog teorema.

6. (6 bodova)

Neka je $S_1, S_2, \ldots, S_m$ niz skupova koji ima sustav izrazitih predstavnika. Ako za neki k, $1 \leq k < m$ unija $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$, prvih k skupova ima točno k elemenata, onda dokažite da ni jedan od preostalih skupova $S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_m$ ne može biti potpuno sadržan u uniji $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$.

7.* (dodatni zadatak)

Neka su n, $k \in \mathbb{N}$.

a) Pokažite da je broj svih nizova $(a_1, \ldots, a_k)$ takvih da je $a_i \geq 0$ za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$ i $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$ (broj slabih rasporeda od n) jednak

$$\binom{n+k-1}{n}.$$

b) Pokažite da je broj svih nizova $(a_1, \ldots, a_k)$ takvih da je $a_i > 0$ za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$ i $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$ (broj rasporeda od n) jednak

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Dozvoljena je upotreba "podsjetnika za međuispit" i kalkulatora. Ispit se piše 120 minuta.

RJEŠENJA MEĐUISPITA IZ EKSTREMALNE KOMBINATORIKE

02.12.2015.

1. a) Koeficijent uz x^k u binomnom razvoju od $(1+x)^{n+m}$ je $\binom{n+m}{k}$. Koeficijent uz x^k u umnošku binomnih razvoja od $(1+x)^n$ i $(1+x)^m$ je $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$. Dobiveni identitet je Vandermondova konvolucija.

b) Na lijevoj strani jednakosti prebrojavamo sve delegacije od k ljudi između n žena i m muškaraca. Na desnoj prebrojavamo te iste delegacije koje imaju i žena i $k-i$ muškaraca za $i = 1, 2, \dots, k$.

2. a) $\sum_{i=1}^{3} S(10, i) = 1 + 511 + 9330 = 9842$.
U $S(10,1) + S(10,2) = 512$ razmještaja ima praznih kutija, u $S(10,2) = 511$ razmještaja je točno jedna kutija prazna.

b) $\sum_{i=1}^{3} p_i(10) = 1 + 5 + 8 = 14$.
U $p_1(10) + p_2(10) = 6$ razmještaja ima praznih kutija, u $p_2(10) = 5$ razmještaja je točno jedna kutija prazna.

3. nk-permutacija tipa $(0, 0, \cdots 0, 0, a_k, 0, 0, \cdots, 0, 0)$ gdje je $a_k = n$ ima

$$\frac{(nk)!}{n! \cdot k^n}.$$

4. Neka A_i označava rasporede kada se u zapisu ne pojavljuje znamenka i, $i = 1, 3, 5, 7, 9$. Kako je $|A_i| = 4^n$, $|A_i \cap A_j| = 3^n$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 2^n$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 2^n$, primjenom načela uključivanja-isključivanja dobijemo rezultat

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7} \cap \overline{A_9}\right| = 5^n - 3 \cdot 4^n + 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^n + 5 \cdot 1^n.$$

5. a) skripta, dokaz Teorema 1.21.

b) Bipartitni graf $K_{n,n}$ ima n^2 bridova i nema trokuta.

c) Uvrstimo li $k = 2$ i paran n u tvrdnju Turanovog teorema dobijemo Mantelov teorem.

6. Za neki k, $1 \leq k < m$ unija $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$, prvih k skupova ima točno k elemenata. Ako bi neki od preostalih skupova $S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_m$, označimo ga sa X, bio potpuno sadržan u uniji $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$ onda bi imali $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k \cup X$ uniju od $k+1$ ovih skupova s točno k elemenata. Ovo je u kontradikciji s uvjetom da $S_1, S_2, \ldots, S_m$ ispunjavaju Hallov uvjet.

7. a) skripta, dokaz Teorema 1.11.

b) skripta, dokaz Korolara 1.2.