

Modulacijski postupci

Osnovni pojmovi o modulaciji

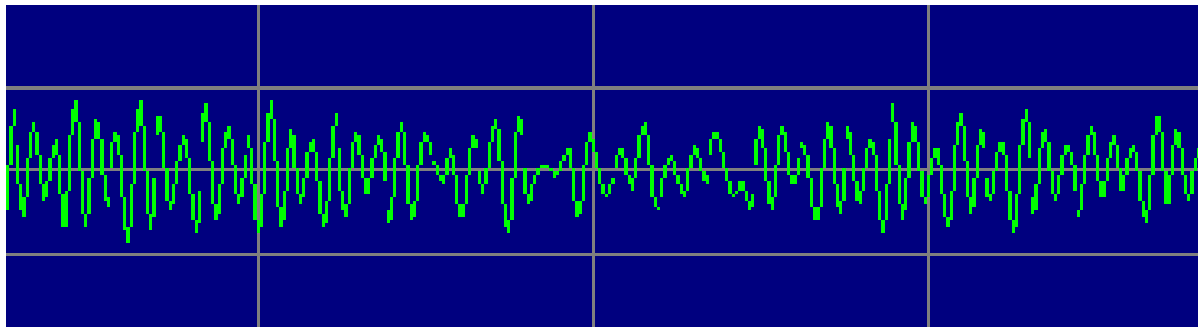
- *Modulacija* → postupak transformacije električnog signala, koji nosi informaciju, radi njegove prilagodbe za prijenos.
- *Demodulacija (detekcija)* → postupak povratne transformacije signala u izvorni oblik.
- *Modulacija u užem smislu* → mijenjanje jednog ili više parametara jednoga pomoćnog signala ovisno o signalu koji nosi informaciju.
- *Parazitna modulacija* → neželjene promjene parametara moduliranog signala koje nastaju uz korisnu modulaciju.

Osnovni pojmovi o modulaciji

- *Prijenosni signal* → pomoćni signal kojem se mijenjanju parametri.
- *Modulacijski signal* → signal koji nosi informaciju, signal koji upravlja promjenama parametara prijenosnog signala.
- *Modulirani signal* → signal kojem se mijenjaju parametri ovisno o razini modulacijskog signala.
- *Modulator* → elektronički sklop koji obavlja modulaciju.
- *Demodulator (detektor)* → elektronički sklop koji obavlja demodulaciju (detekciju).

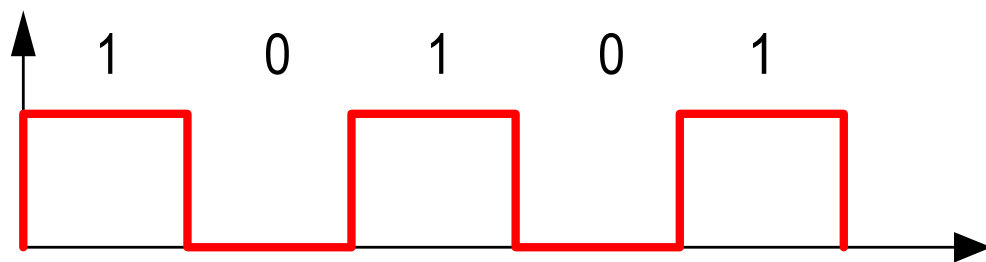
Sistematizacija modulacijskih postupaka

- Podjela prema vrsti prijenosnog signala:
 - *Modulacija sinusnog signala* → prijenosni signal je sinusnog oblika.
 - *Modulacija impulsnog signala* → prijenosni signal odgovara slijedu impulsa.
 - *Modulacija ostalih vrsta signala* → prijenosni signal odgovara nekoj drugoj vrsti signala.
- Podjela prema vrsti modulacijskog signala:
 - *Kontinuirani (analogni) modulacijski postupci* → modulaciju obavlja kontinuirani (analogni) informacijski signal — signali zvuka, slike ...



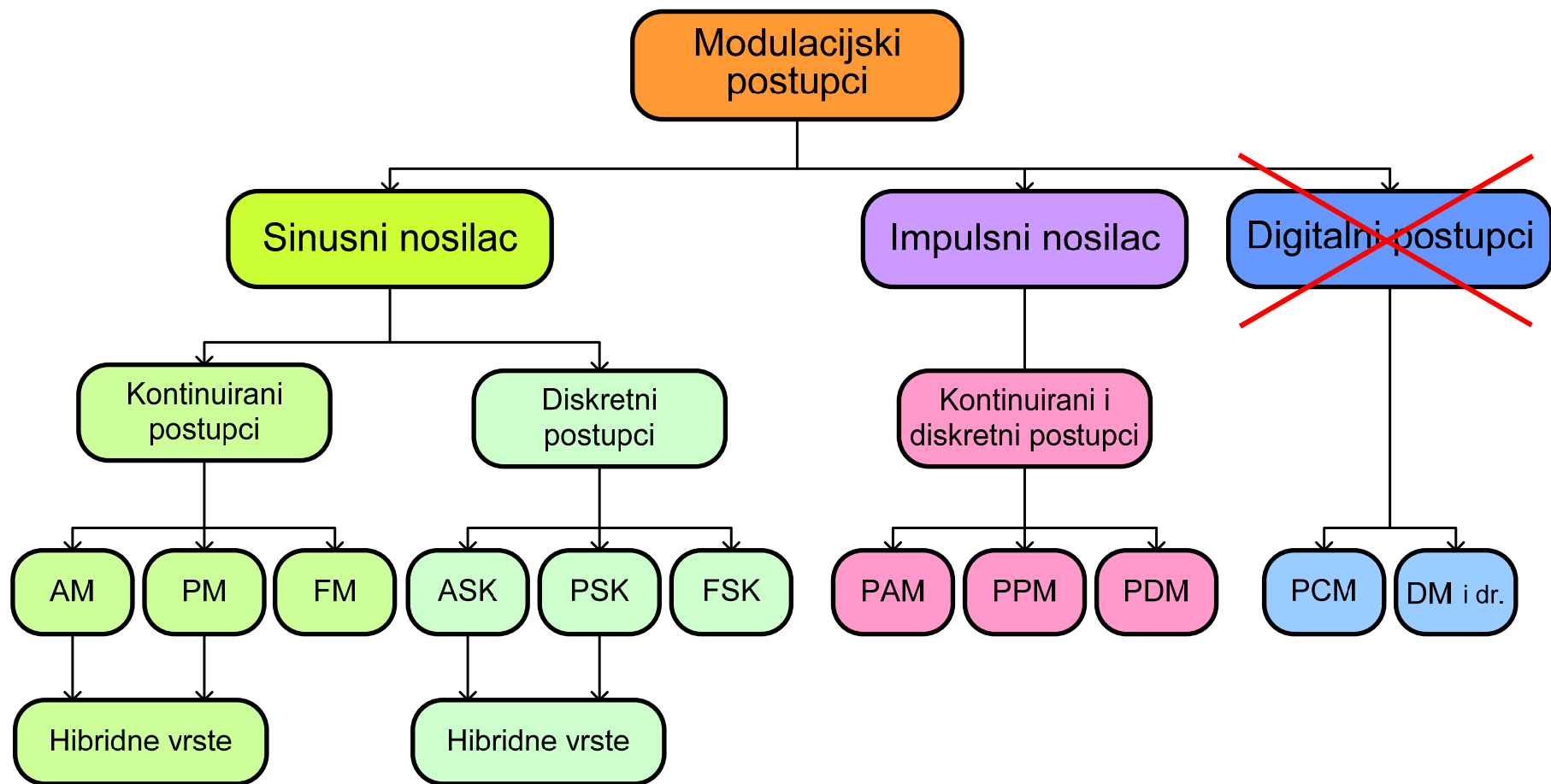
Sistematizacija modulacijskih postupaka

- Podjela prema vrsti modulacijskog signala (nastavak):
 - *Diskretni modulacijski postupci* → modulaciju obavlja diskretni informacijski signal — signali podataka.



- *Digitalni modulacijski postupci* → tim postupcima obavlja se digitalizacija signala,
 - ulazni odnosno modulacijski signal je analogne vrste,
 - izlazni odnosno modulirani signal je digitalne vrste (slijed brojeva),
 - ne može se govoriti o prijenosnom signalu u klasičnom smislu.

Sistematizacija modulacijskih postupaka



Primjena modulacije, demodulacija

- Modulacija se koristi:
 - u elektroničkim komunikacijskim tehnikama,
 - pri pohranjivanju i reprodukciji signala,
 - u mjernoj tehnici,
 - automatici, itd.
- Postupci demodulacije dijele se na:
 - nekoherentne postupke i,
 - koherentne (ili sinkrone) postupke.
- Digitalni komunikacijski sustav naziva se *koherentnim* ako je prijamnik sinkroniziran s odašiljačem po fazi prijenosnog signala. Ostali su sustavi nekoherentne vrste.
- Prednosti nekoherentnih sustava su u manjem stupnju kompleksnosti, ali oni su i lošijih radnih svojstava.

Kontinuirana modulacija sinusnog signala

Modulacijski postupci — osnovne vrste

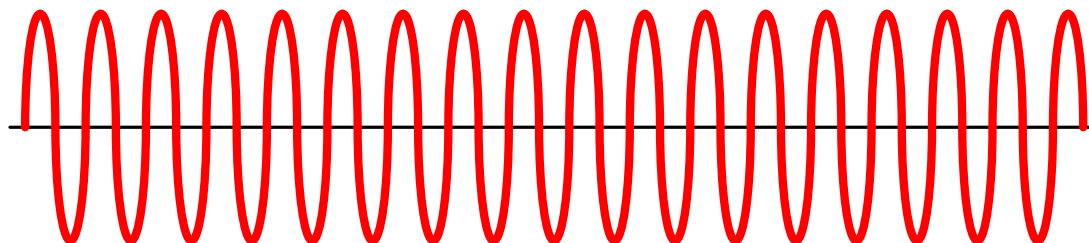
- Modulacijski je signal kontinuirane odnosno analogne vrste.
- Sinusni prijenosni signal $u_p(t)$ određen je sa dva parametra:
 - amplitudom U_{pm} i,
 - argumentom $\Phi(t)$ sinusne ili eksponencijalne funkcije,

$$u_p(t) = U_{pm} \cos \Phi(t), \quad u_p(t) = U_{pm} \Re \{e^{j\Phi(t)}\}.$$

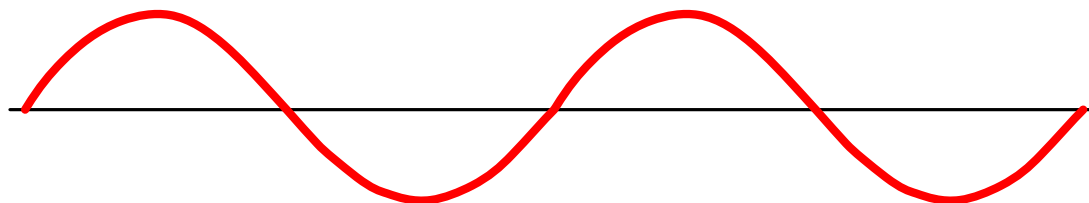
- Modulacija sinusnoga prijenosnog signala obavlja se mijenjajući amplitudu ili argument sinusne odnosno eksponencijalne funkcije, ili pak mijenjajući oba parametra zajedno.
- Modulacija amplitude (AM, *Amplitude Modulation*)

$$u_{AM}(t) = U_{pm}(t) \cos \Phi(t), \quad U_{pm}(t) = f[u_m(t)].$$

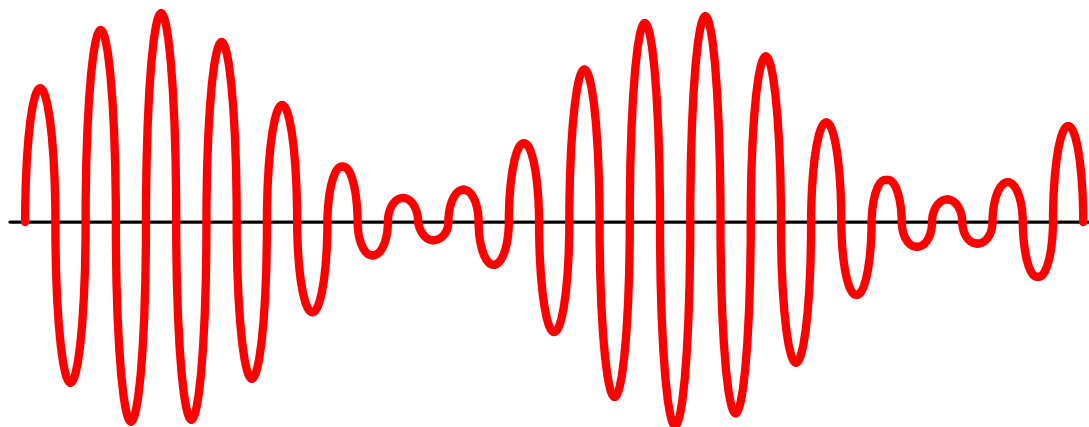
Prijenosni
signal



Modulacijski
signal



Amplitudnomodulirani
(AM) signal



Modulacijski postupci — osnovne vrste

- Argument $\Phi(t)$, koji se naziva i trenutnom fazom, linearna je funkcija vremena,

$$\Phi(t) = \omega_p t + \varphi.$$

- Modulacija argumenta može se realizirati:
 - mijenjanjem (moduliranjem) frekvencije ω_p ili,
 - mijenjanjem (moduliranjem) relativne faze φ .

- Modulacija faze (PM, *Phase Modulation*)

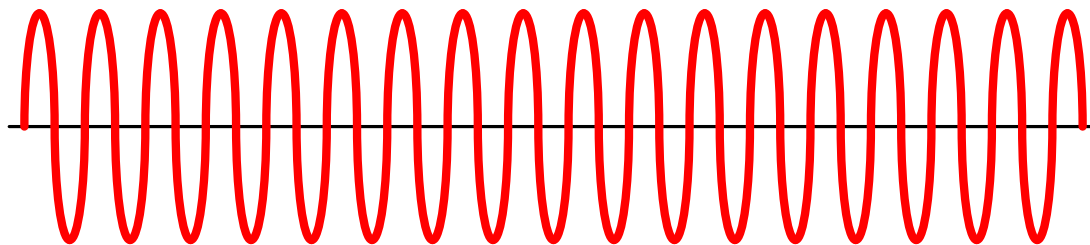
$$\Phi_{\text{PM}}(t) = \omega_p t + \varphi(t), \quad \varphi(t) = f_1[u_m(t)].$$

- Modulacija frekvencije (FM, *Frequency Modulation*)

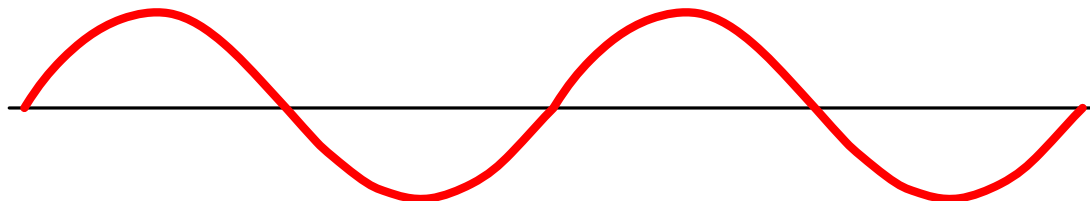
$$\frac{d\Phi_{\text{FM}}(t)}{dt} = \omega_p(t), \quad \omega_p(t) = f_2[u_m(t)].$$

- U praktičnim primjenama modulacije funkcije f , f_1 i f_2 moraju biti linearne.

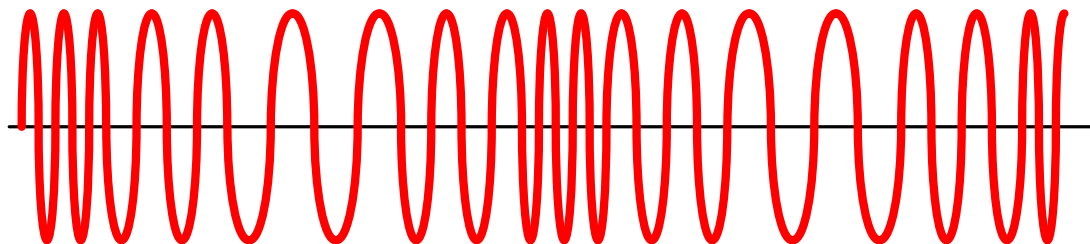
Prijenosni
signal



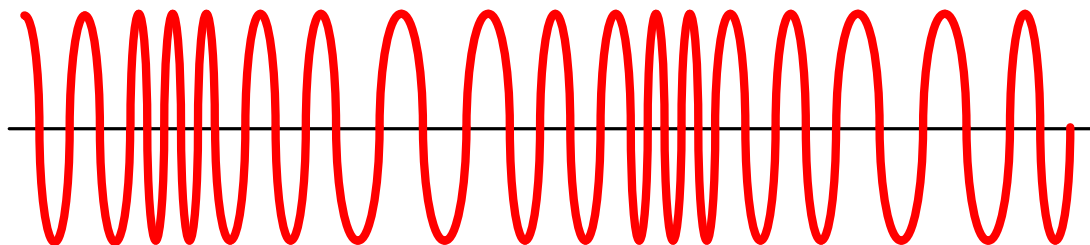
Modulacijski
signal



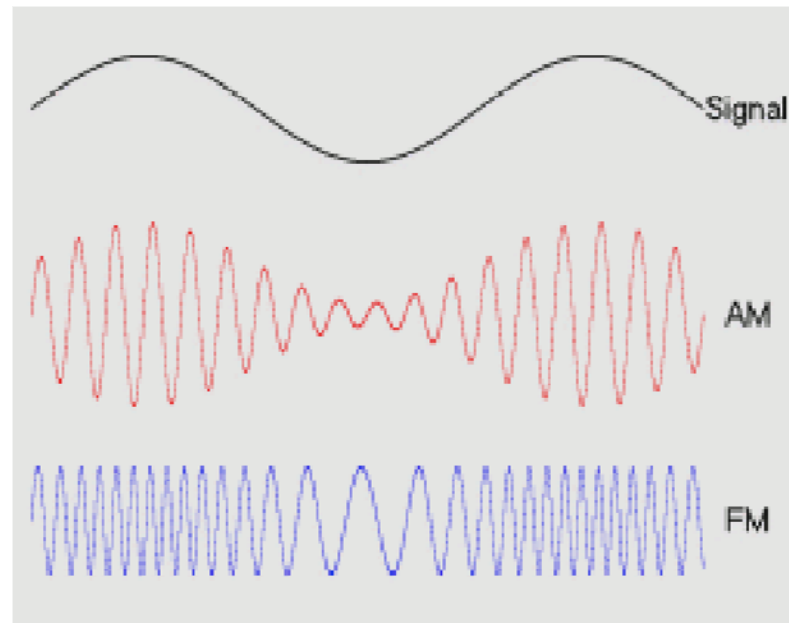
Faznomodulirani
(PM) signal



Frekvencijskimodulirani
(FM) signal



Modulacijski postupci — osnovne vrste



Modulacija amplitude

AM

Osnovni pojmovi

- Amplituda sinusnoga prijenosnog signala linearna je funkcija razine modulacijskog signala,

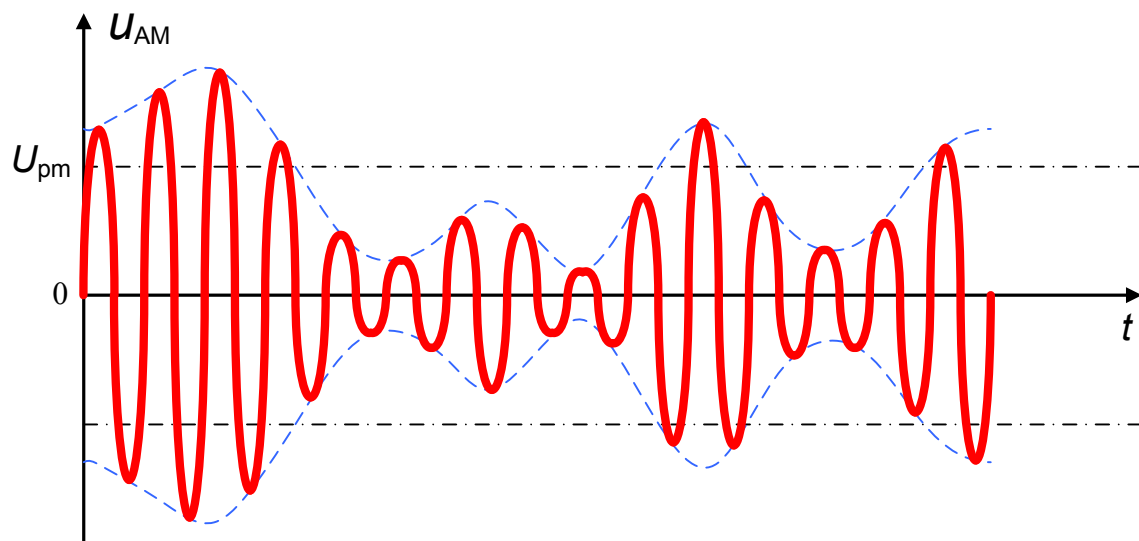
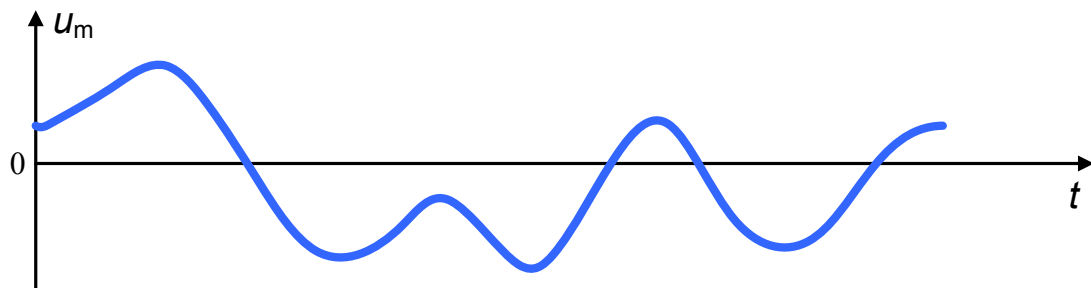
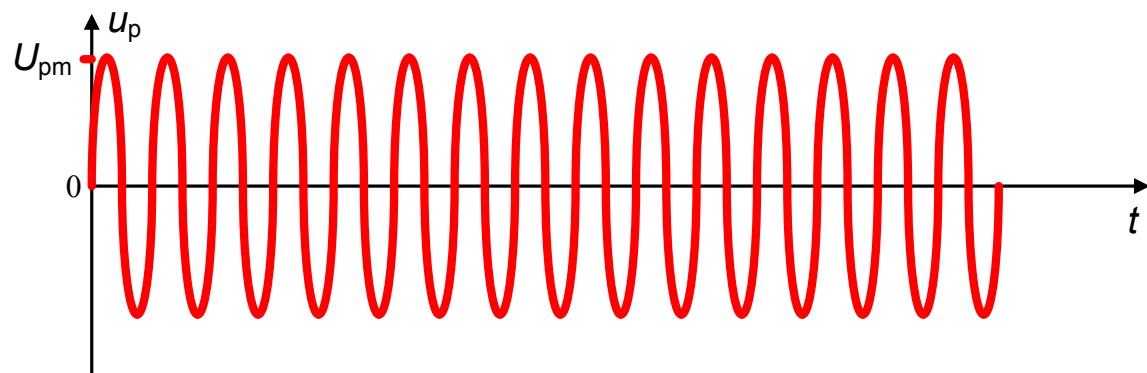
$$U_{\text{pm}}(t) = a + k_a u_m(t), \quad a = U_{\text{pm}},$$

k_a — osjetljivost modulatora amplitude.

- Amplitudnomodulirani signal može se onda opisati izrazom,

$$u_{\text{AM}}(t) = [U_{\text{pm}} + k_a u_m(t)] \cos(\omega_p t + \varphi).$$

- Relativna faza φ može se uzeti jednakom nuli ($\varphi = 0$).



Obilježja AM-signalala

- Kad je modulaćijski signal sinusnog oblika, tj. sastoji se samo od jedne frekvencijske komponente (modulacija «jednim tonom»),

$$u_m(t) = U_{mm} \cos \omega_m t ,$$

onda je AM-signal oblika,

$$u_{AM}(t) = \left[U_{pm} + k_a U_{mm} \cos \omega_m t \right] \cos \omega_p t ,$$

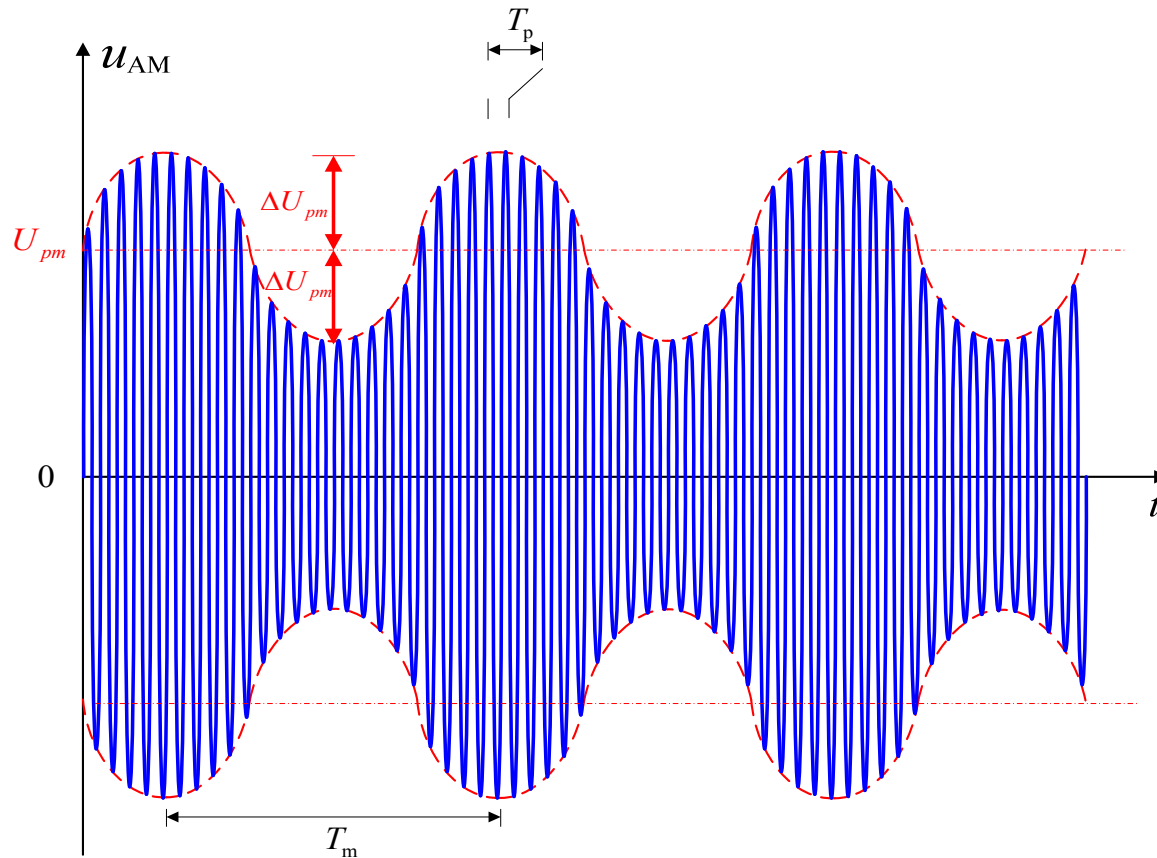
ili,

$$u_{AM}(t) = U_{pm} \left[1 + \frac{k_a U_{mm}}{U_{pm}} \cos \omega_m t \right] \cos \omega_p t .$$

- Gornja modulacijska točka* → trenutak nastupa najveće amplitude ($U_{pm} + k_a \cdot U_{mm}$).
- Donja modulacijska točka* → trenutak nastupa najmanje amplitude ($U_{pm} - k_a \cdot U_{mm}$).

Obilježja AM-signala

Valni oblik AM-signala koji je moduliran «jednim tonom»



Indeks modulacije amplitude

- Najveća promjena amplitude AM-signala u odnosu na amplitudu prijenosnog signala U_{pm} iznosi,

$$\Delta U_{\text{pm}} = k_a U_{\text{mm}}, \text{ što onda daje,}$$

$$u_{\text{AM}}(t) = U_{\text{pm}} \left[1 + \frac{\Delta U_{\text{pm}}}{U_{\text{pm}}} \cos \omega_m t \right] \cos \omega_p t.$$

- Indeks modulacije amplitude* je onda jednak,

$$m_a = \frac{\Delta U_{\text{pm}}}{U_{\text{pm}}} = k_a \frac{U_{\text{mm}}}{U_{\text{pm}}}.$$

- Ako se uzme $k_a = 1$, onda je,

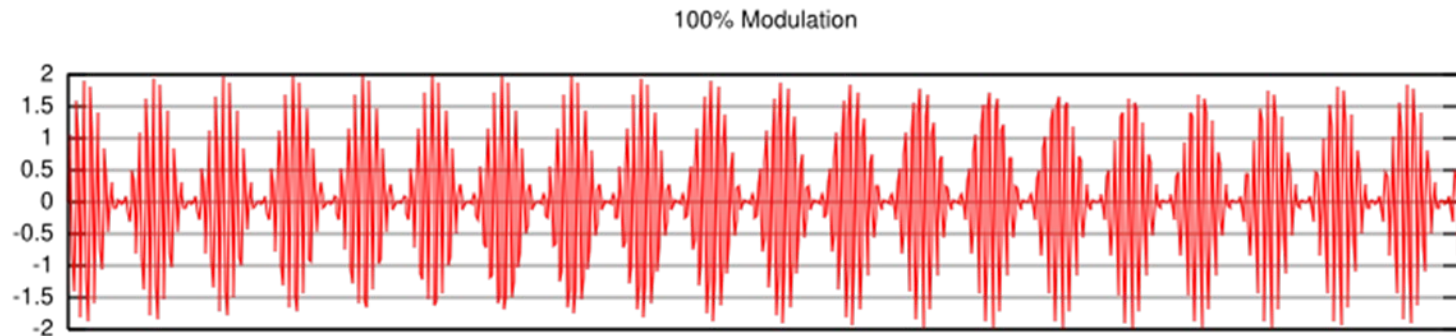
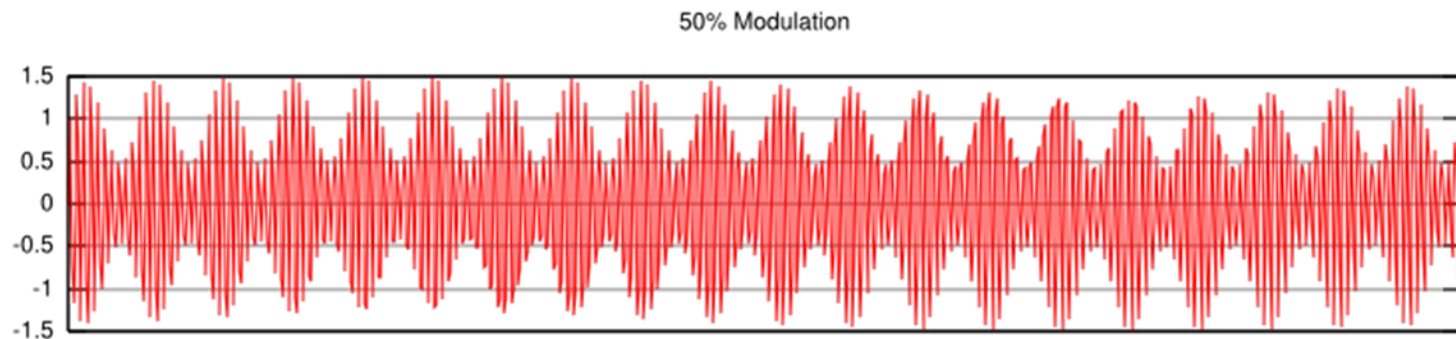
$$m_a = \frac{U_{\text{mm}}}{U_{\text{pm}}}.$$

Indeks modulacije amplitude

- AM-signal je tad,

$$u_{\text{AM}}(t) = U_{\text{pm}} (1 + m_a \cos \omega_m t) \cos \omega_p t .$$

- *Dubina modulacije* → indeks modulacije izražen u postocima.

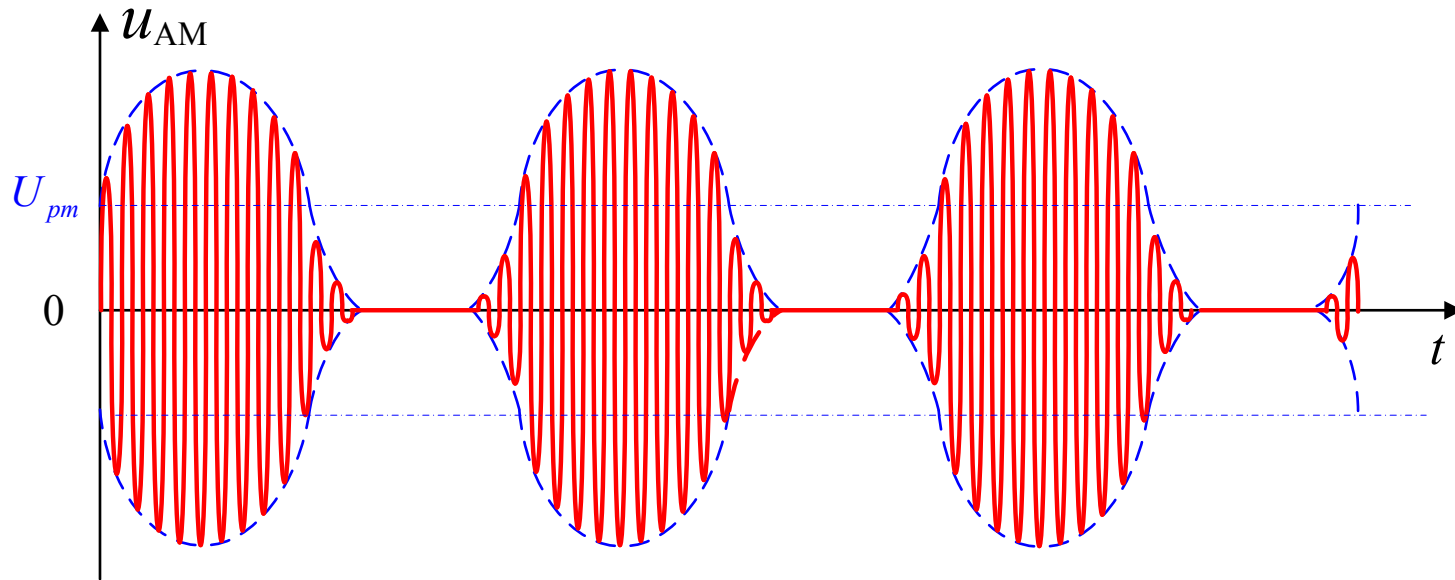


Indeks modulacije amplitude

- Kad je $m_a \leq 1$, ovojnica moduliranog signala točno prati valni oblik modulacijskog signala,

$$O(t) = U_{pm} (1 + m_a \cos \omega_m t) .$$

- Kad je $m_a > 1$, nastaje tzv. *premodulacija* (ovojnica je izobličena).

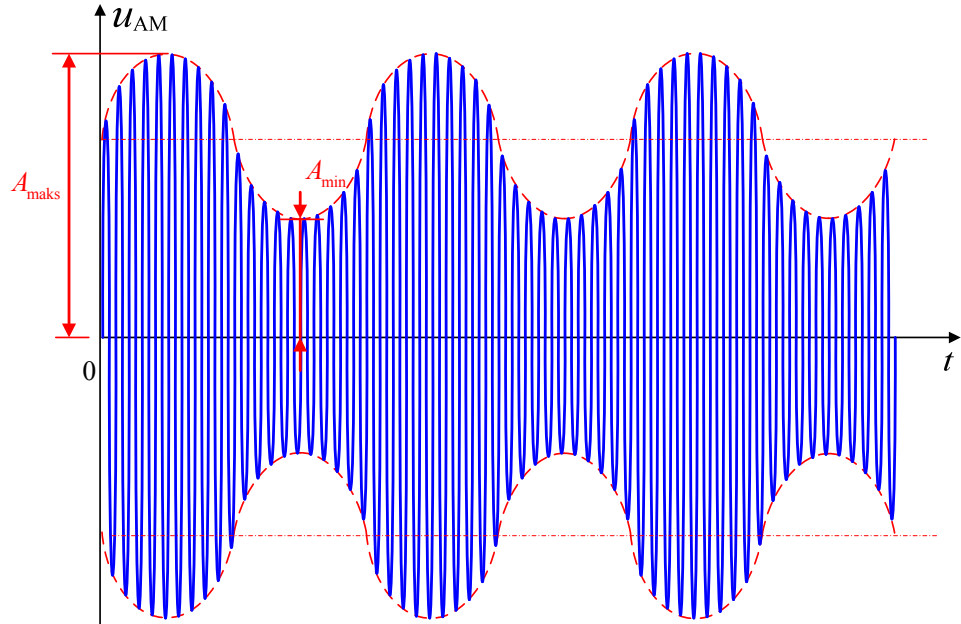


Indeks modulacije amplitude

- Indeks modulacije može se odrediti pomoću najveće amplitude A_{maks} i najmanje amplitude AM-signalu A_{min} .

$$A_{\text{maks}} = U_{\text{pm}}(1 + m_a), \quad A_{\text{min}} = U_{\text{pm}}(1 - m_a),$$

$$m_a = \frac{A_{\text{maks}} - A_{\text{min}}}{A_{\text{maks}} + A_{\text{min}}}.$$



- Primjenjuju se vrijednosti indeksa modulacije u intervalu $0 < m_a \leq 1$ (dubine modulacije od 0% do 100%).

Spektar AM-signalala

- Iz polaznog izraza za AM-signal koji je moduliran jednim tonom,

$$u_{\text{AM}}(t) = U_{\text{pm}} (1 + m_a \cos \omega_m t) \cos \omega_p t .$$

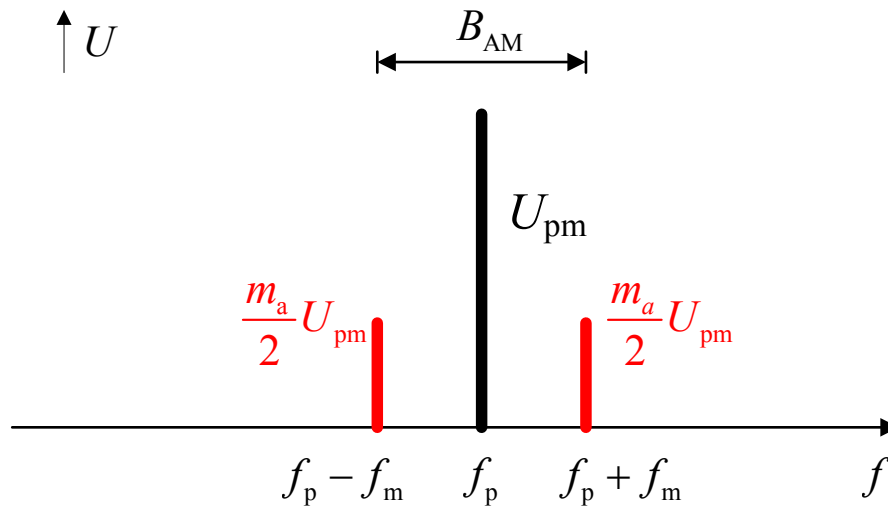
može se preuređenjem izraza dobiti,

$$u_{\text{AM}}(t) = U_{\text{pm}} \left[\cos \omega_p t + \frac{m_a}{2} \cos (\omega_p t + \omega_m t) + \frac{m_a}{2} \cos (\omega_p t - \omega_m t) \right] .$$

- AM-signal se, dakle, sastoji od tri sinusne komponente:
 - *komponente prijenosnog signala* frekvencije f_p , amplitude U_{pm} ,
 - *donje bočne komponente* frekvencije $f_p - f_m$, amplitude $U_{\text{pm}} \cdot m_a / 2$ i,
 - *gornje bočne komponente* frekvencije $f_p + f_m$, amplitude $U_{\text{pm}} \cdot m_a / 2$.
- Prikaz AM-signalala pomoću ove tri komponente u frekvencijskom području naziva se *spektrom AM-signalala*.

Spektar AM-signala

Spektar AM-signala koji je nastao modulacijom jednim tonom



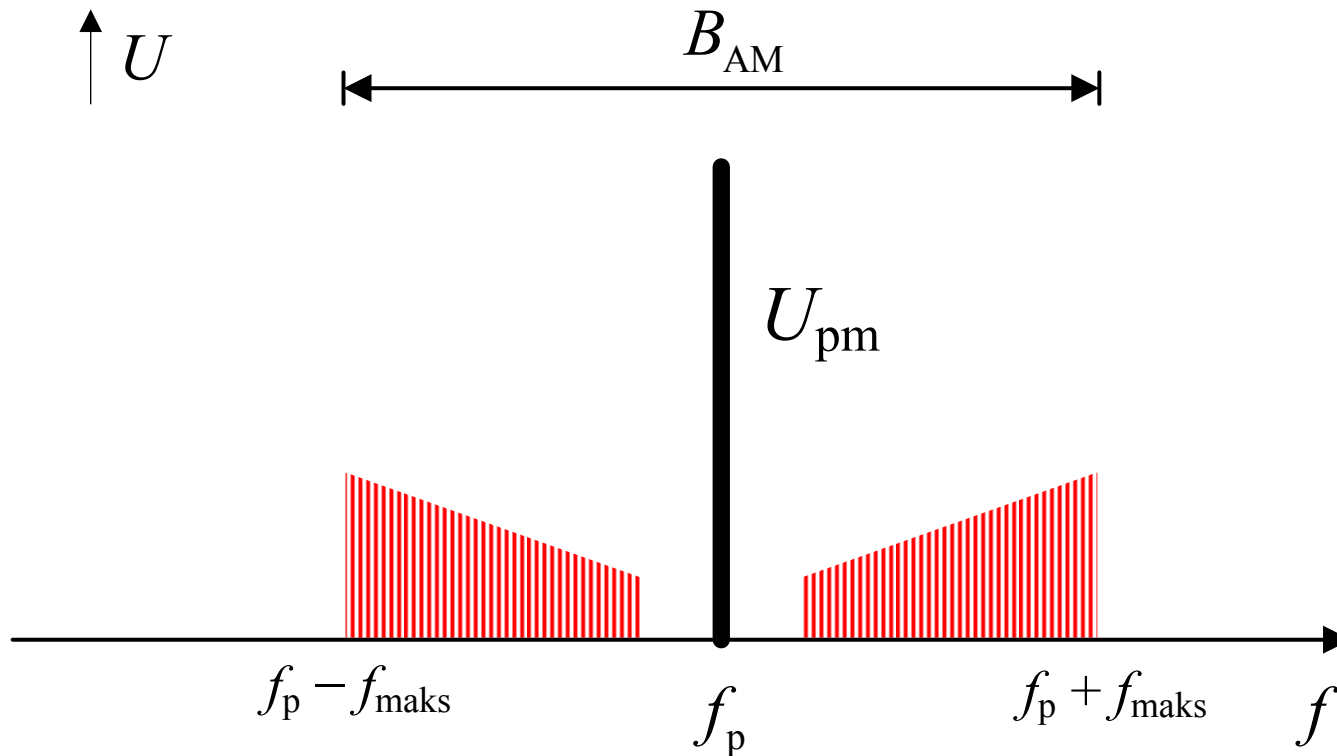
- Sinusno modulirani AM-signal zauzima pojas frekvencija širine,

$$B_{AM} = 2 f_m .$$

- Modulacija amplitude pripada skupini *linearnih modulacijskih postupaka* tj. linearnih preslikavanja iz područja modulacijskog signala u područje moduliranog signala → ispunjeni su matematički uvjeti za linearnost preslikavanja.

Spektar AM-signalala

Spektar AM-signalala koji je nastao modulacijom složenim signalom u pojasu od f_{\min} do f_{\max}



$$B_{AM} = 2 f_{maks} \cdot$$

Kompleksni prikaz AM-signalu

- Kad se krene od eksponencijalnog oblika prikaza prijenosnog signala,

$$u_p(t) = \Re\{U_{pm} e^{j\omega_p t}\} = \Re\{\dot{u}_p\},$$

izlazi,

$$u_{AM}(t) = U_{pm} \Re\{(1 + m_a \cos \omega_m t) e^{j\omega_p t}\} = \Re\{\dot{u}_{AM}\}.$$

Koristeći Eulerov izraz,

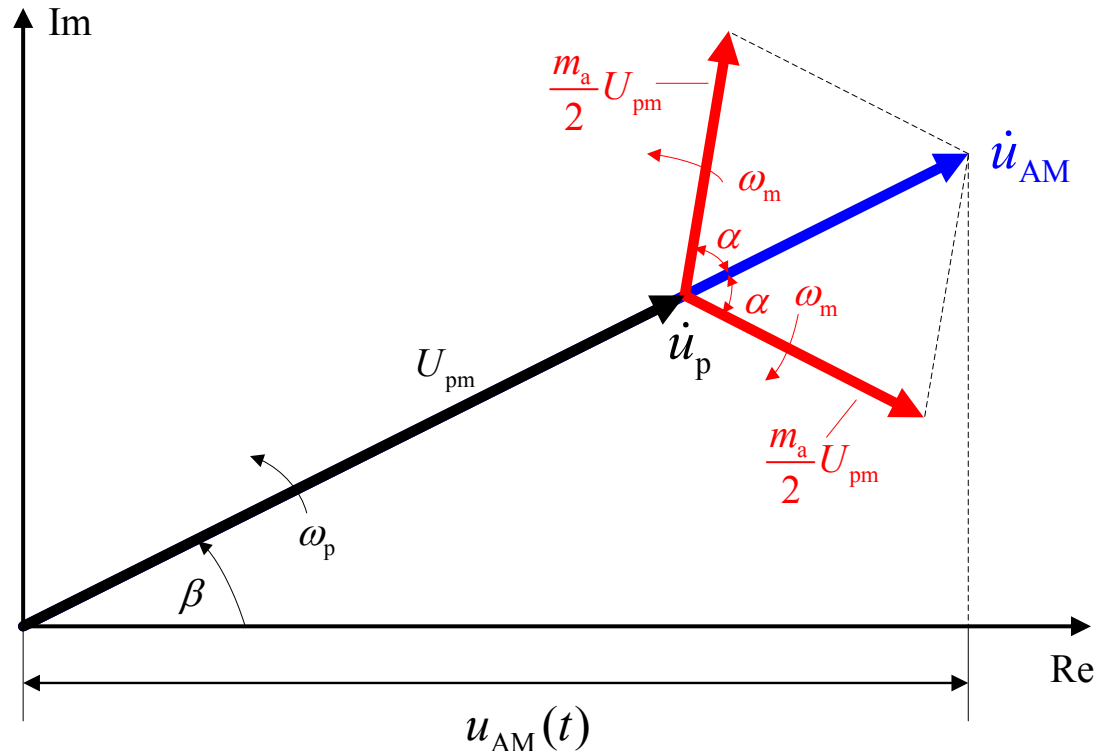
$$\cos \omega_m t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_m t} + e^{-j\omega_m t}),$$

dobiva se,

$$u_{AM}(t) = U_{pm} \Re\left\{e^{j\omega_p t} + \frac{m_a}{2} e^{j(\omega_p + \omega_m)t} + \frac{m_a}{2} e^{j(\omega_p - \omega_m)t}\right\} = \Re\{\dot{u}_{AM}\}.$$

- Svaka frekvencijska komponenta prikazana je kao realni dio nekoga kompleksnog broja, tj. ona odgovara projekciji jednog verzora u kompleksnoj ravnini.

Kompleksni prikaz AM-signalala

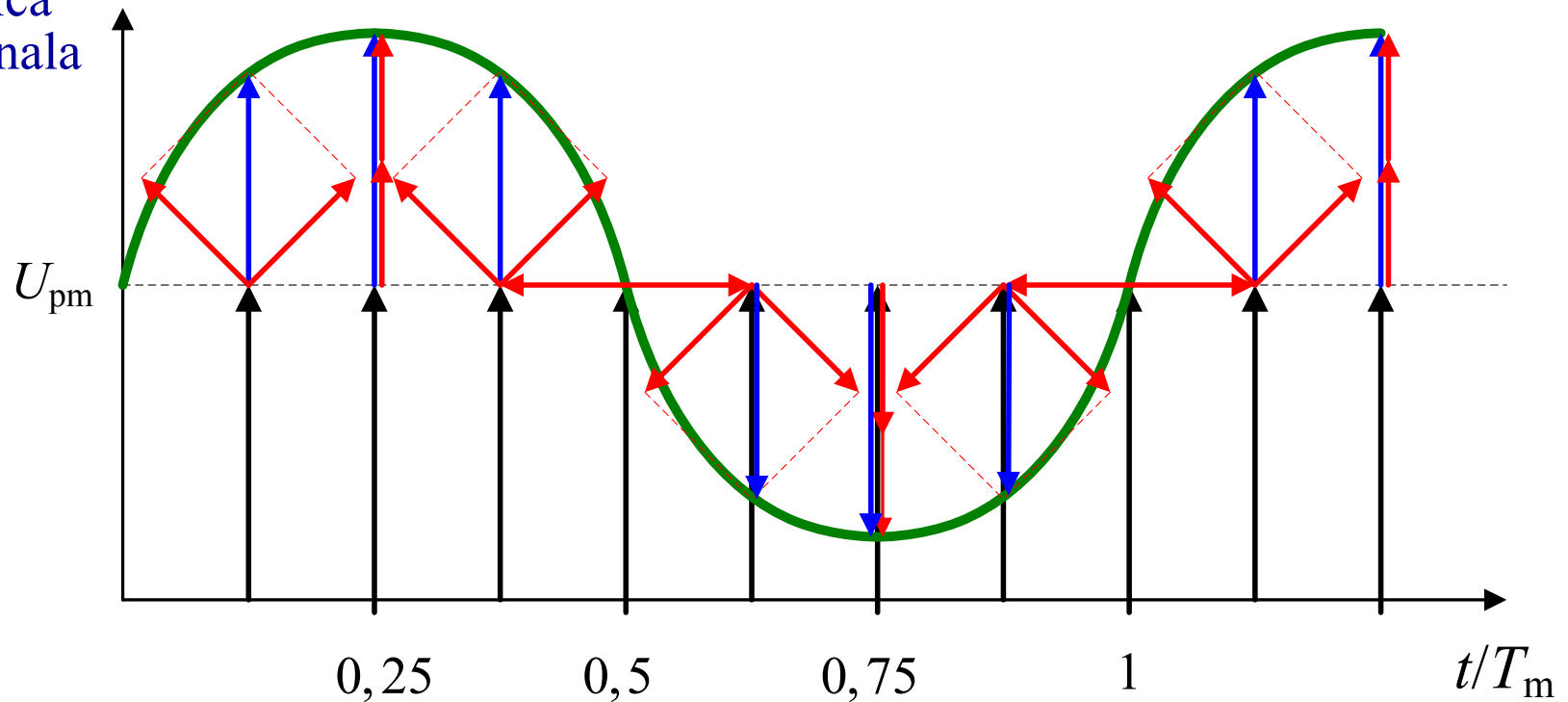


- Zbroj verzora triju komponenti daje verzor AM-signalala \dot{u}_{AM} .
- Modul verzora rezultante jednak je trenutnoj amplitudi moduliranog signalala, a njegova projekcija na realnu os odgovara trenutnoj razini AM-signalala.

Kompleksni prikaz AM-signalala

Razina ovojnice AM-signalala određena je modulom verzora rezultante

Ovojnica
AM-signalala



Snaga AM-signalala

- Srednja snaga AM-signalala na otporu R u toku jedne periode prijenosnog signalala T_p iznosi,

$$p(t) = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \frac{u_{AM}^2}{R} dt ,$$

$$p(t) = \frac{1}{R T_p} \int_0^{T_p} U_{pm}^2 (1 + m_a \cos \omega_m t)^2 \cos^2 \omega_p t dt .$$

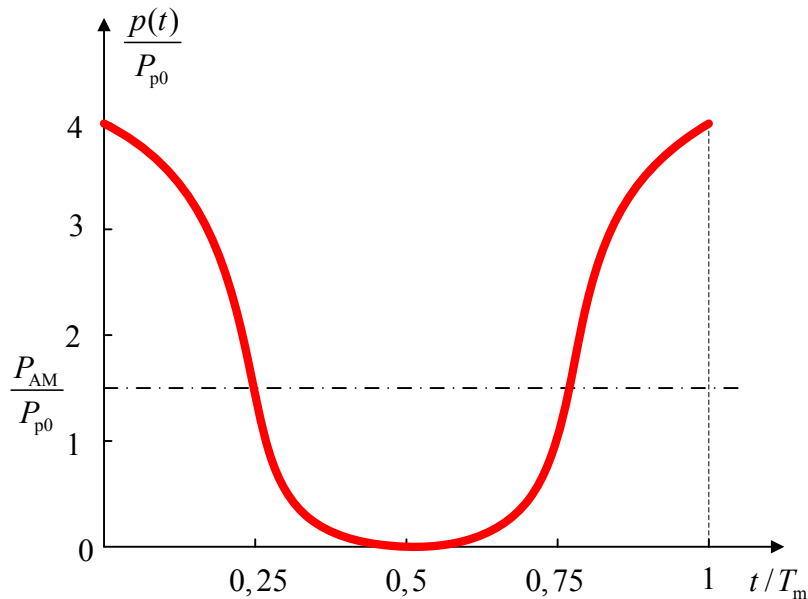
- Ako je $\omega_p \gg \omega_m$ onda se može smatrati da se amplituda moduliranog signalala ne mijenja unutar jedne periode prijenosnog signalala,

$$p(t) = \frac{U_{pm}^2}{R} (1 + m_a \cos \omega_m t)^2 \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \cos^2 \omega_p t dt ,$$

$$p(t) = P_{p0} (1 + m_a \cos \omega_m t)^2 ,$$

$P_{p0} \rightarrow$ snaga prijenosnog signalala (kad nema modulacije).

Snaga AM-signala



$$p(t) = P_{p0}(1 + m_a \cos \omega_m t)^2$$

- Srednja snaga AM-signala jednaka je srednjoj snazi u intervalu jedne periode modulacijskog signala T_m ,

$$P_{AM} = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} p(t) dt ,$$

$$P_{AM} = \frac{P_{p0}}{T_m} \int_0^{T_m} (1 + m_a \cos \omega_m t)^2 dt ,$$

$$P_{AM} = P_{p0} \left(1 + \frac{m_a^2}{2} \right) .$$

- Parsevalov zakon* → srednja snaga nekoga složenog signala jednaka je zbroju srednjih snaga njegovih spektralnih komponentata.

Snaga AM-signala

- Primjena Parsevalova zakona na AM-signal daje,

$$P_{AM} = \frac{1}{2R} \left[U_{pm}^2 + \left(U_{pm} \frac{m_a}{2} \right)^2 + \left(U_{pm} \frac{m_a}{2} \right)^2 \right].$$

- Uz 100%-tnu modulaciju amplitude ($m_a = 1$) snaga bočnih komponenata iznosi jednu trećinu ukupne snage AM-signala koja je,

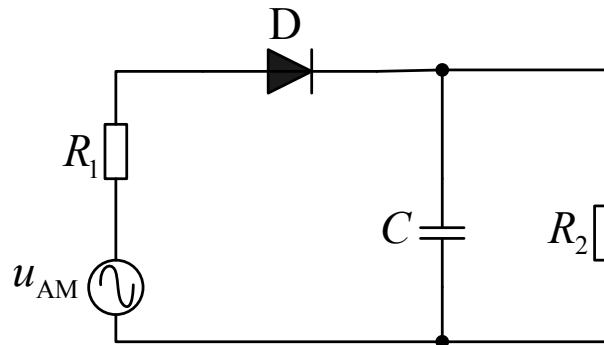
$$P_{AM} = 1,5 P_{p0}, \quad \text{kad je } m_a = 1.$$

- Srednja vrijednost indeksa modulacije pri radiofonijskom prijenosu iznosi $m_a = 0,3$. Srednja snaga odgovarajućeg AM-signala tad je,

$$P_{AM} = P_{p0} \left(1 + \frac{0,09}{2} \right) = 1,045 P_{p0}.$$

Demodulacija AM-signalala

- Za demodulaciju AM-signalala uglavnom se koristi **nekoherentni postupak** → *detekcija ovojnice* (vršno ispravljanje).
- Postupak detekcije ovojnice može se primijeniti ako su ispunjena dva uvjeta:
 - AM-signal je uskopojasne vrste (frekvencija prijenosnog signalala je puno veća od najviše modulacijske frekvencije) i,
 - indeks modulacije je manji od 1, odnosno dubina modulacije je manja od 100%.
- Kondenzator C nabija se na trenutnu vršnu vrijednost (trenutnu amplitudu) AM-signalala tijekom svake pozitivne poluperiode. On se izbijia preko otpora R_2 (u R_2 je uključeno i trošilo) do sljedećeg trenutka nabijanja.
- Idealizirana karakteristika diode — otpor diode u propusnom području r_d , a beskonačan u zapornom području.



Demodulacija AM-signalala

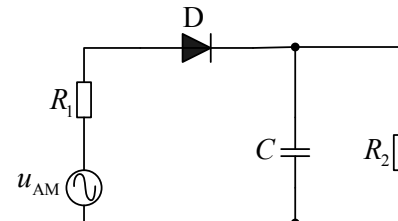
- Vremenska konstanta nabijanja kondenzatora mora biti mala u odnosu na periodu prijenosnog signala T_p ,

$$(r_d + R_1)C \ll \frac{1}{f_p},$$

kako bi se kondenzator nabio gotovo na trenutni vršni napon odnosno trenutnu amplitudu AM-signalala.

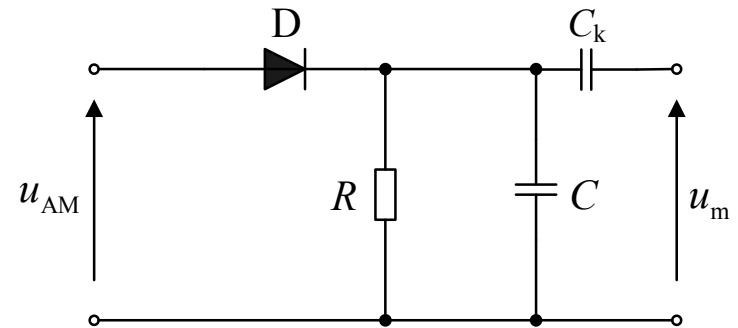
- Kondenzator se mora polako izbijati preko otpora R_2 do nailaska sljedećeg vrha moduliranog signala.
- Kondenzator se u vremenu T_p mora dovoljno izbiti kako bi napon na C mogao pratiti promjene razine modulacijskog signala.
- Vremenska konstanta izbijanja je onda određena uvjetima,

$$\frac{1}{f_p} \ll R_2 C \ll \frac{1}{f_{\text{maks}}}.$$

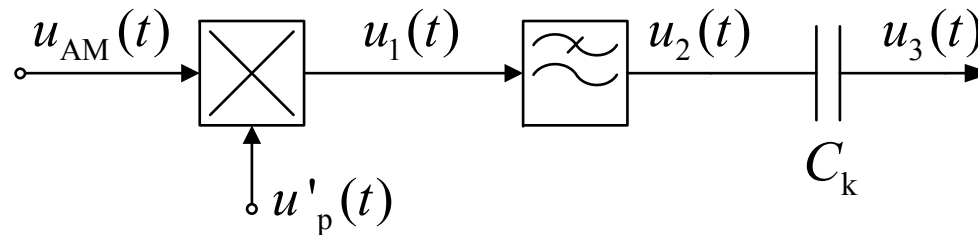


Demodulacija AM-signala

- Demodulirani signal slijedi valni oblik ovojnice. Zato on sadrži istosmjernu komponentu koja odgovara amplitudi prijenosnog signala.
- Istosmjerna se komponenta u demoduliranom signalu uklanja pomoću serijskog kondenzatora.
- Kad frekvencija prijenosnog signala nije puno viša od najviše modulacijske frekvencije (barem dva reda veličine) nužno je koristiti sinkroni postupak demodulacije.
- **Koherentni** (sinkroni) **postupak** demodulacije osniva se na množenju AM-signala s jednim pomoćnim signalom, koji mora biti što sličniji (idealno jednak) prijenosnom signalu u modulatoru.



Demodulacija AM-signala



$$u_{AM}(t) = [U_{pm} + k_a u_m(t)] \cos(\omega_p t + \varphi),$$

$$u'_p(t) = U'_{pm} \cos(\omega'_p t + \psi).$$

Ako se pretpostavi jednakost frekvencija, tj. $\omega_p = \omega'_p$, onda množenjem nastaje,

$$\begin{aligned} u_1(t) &= k_{AM} [U_{pm} + k_a u_m(t)] \cos(\omega_p t + \varphi) \cdot \cos(\omega_p t + \psi), \\ &= \frac{1}{2} k_{AM} [U_{pm} + k_a u_m(t)] [\cos(2\omega_p t + \varphi + \psi) + \cos(\varphi - \psi)], \end{aligned}$$

k_{AM} — osjetljivost demodulatora.

Demodulacija AM-signalu

- Niskopropusnim filtrom uklanja se komponenta frekvencije $2\omega_p$,

$$u_2(t) = \frac{1}{2}k_{\text{AM}} [U_{\text{pm}} + k_a u_m(t)] \cos(\varphi - \psi),$$

dok vezni kondenzator uklanja istosmjernu komponentu pa je konačno,

$$u_3(t) = k_1 u_m(t) \cos(\varphi - \psi), \quad \text{pri čemu je,} \quad k_1 = \frac{1}{2}k_{\text{AM}} k_a.$$

- Važno je donekle ispravno regenerirati i fazu lokalnog signala za sinkronu odnosno koherentnu demodulaciju.

Utjecaj smetnji i šuma na AM-signal

- Razne vrste smetnji djeluju na AM-signale. Ovdje se analiziraju samo dvije vrste smetnji:
 - smetnje u obliku sinusnih titraja i,
 - smetnje u obliku bijelog šuma.
- Sinusni signal smetnje \dot{u}_{ps} superponira se na nemodulirani korisni signal \dot{u}_{pk} ,

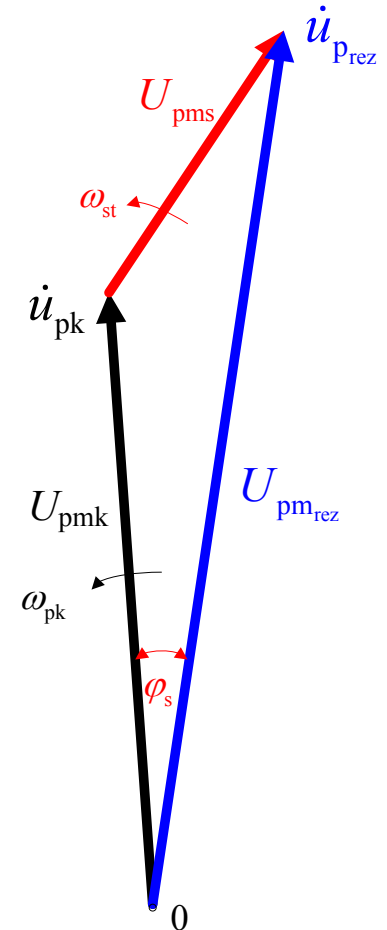
$$\dot{u}_{ps} = U_{pms} e^{j\omega_{ps}t}, \quad \dot{u}_{pk} = U_{pmk} e^{j\omega_{pk}t},$$

i daje rezultirajući signal,

$$\dot{u}_{prez} = \dot{u}_{pk} + \dot{u}_{ps}.$$

- Odnos smetnja/signal u području visokih frekvencija (područje frekvencija prijenosnog odnosno moduliranog signala) je,

$$a_s = \frac{U_{pms}}{U_{pmk}}.$$



Utjecaj smetnji na AM-signal

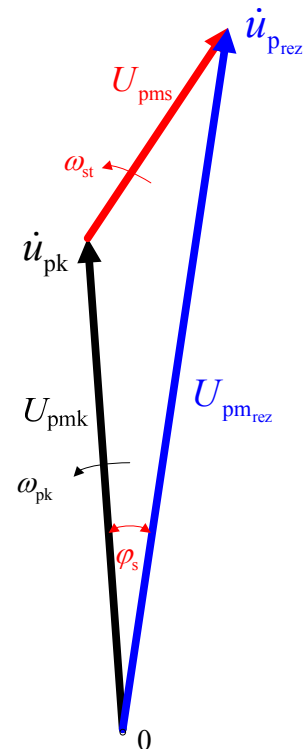
- Ako se sa ω_{st} označi razlika,

$$\omega_{st} = \omega_{ps} - \omega_{pk} ,$$

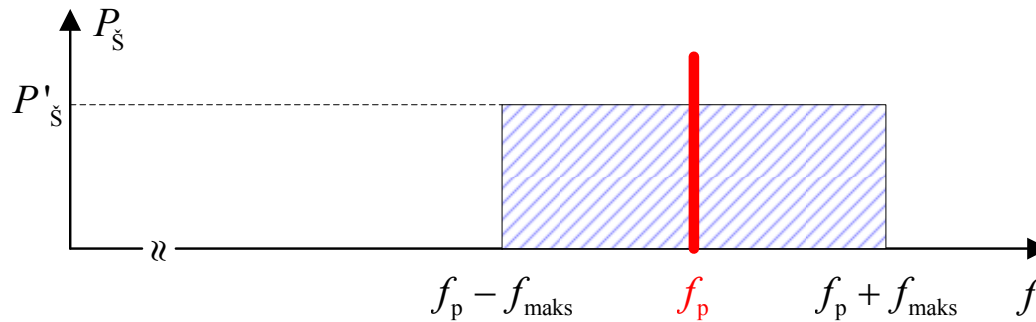
onda je,

$$\dot{u}_{prez} = U_{pmk} \left(1 + a_s e^{j\omega_{st}t} \right) e^{j\omega_{pk}t} .$$

- Zbrajanjem dvaju sinusnih signala bliskih frekvencija nastaje rezultirajući signal kojemu se mijenja i amplituda i faza (amplifazno modulirani signal).
- Ako je razina smetnje puno manja od razine korisnog signala mogu se promjene amplitude uzimati približno sinusnima.
- Signal smetnje stvara komponentu ovojnice koja je frekvencije ω_{st} . Ta se komponenta onda javlja i u demoduliranom signalu.



Utjecaj šuma na AM-signal



- Signal šuma može se u diferencijalno uskom pojasu frekvencija nadomjestiti sinusnim signalom amplitude,

$$U_{\text{šm}} = \sqrt{2 P'_\text{š} R}, \quad \text{V} / \sqrt{\text{Hz}}.$$

- Ukupna se amplituda šuma dobiva zbrajanjem amplituda šuma svakoga diferencijalnog pojasa uzduž cijelog pojasa AM-signala. Kako je bijeli šum konstantne gustoće snage $P'_\text{š}$, izlazi,

$$U_{\text{šrez}} = \sqrt{2 P'_\text{š} R 2 f_{\text{maks}}} = 2 \sqrt{P'_\text{š} R f_{\text{maks}}}.$$

- Zbog nazočnosti šuma u ovojnici AM-signala šum se javlja i u demoduliranom signalu.

Primjena modulacije amplitude

- Analogna radiodifuzija zvuka u području dugoga, srednjeg i kratkog vala:
 - Primjer: srednji val,
 - frekvencijsko područje rada: 526,5 – 1 606,5 kHz,
 - širina pojasa emisije (moduliranog signala): 9 kHz,
 - granice audiofrekvencijskog pojasa: 60 – 4 500 Hz,
 - snage odašiljača: 1 – 2000 kW.
- Radijski uređaji u tzv. građanskom pojasu frekvencija (CB, *Citizen Band*):
 - Frekvencijsko područje rada: 26,96 – 27,41 MHz,
 - širina pojasa emisije (moduliranog signala): 6 kHz,
 - snaga odašiljača (efektivna izračena snaga): ≤ 1 W.

Modulacija argumenta

Modulacija faze — PM

Modulacija frekvencije — FM

Modulacija argumenta i modulacija faze

- Modulacija argumenta → *modulacija kuta (Angle Modulation)* kad se radi o argumentu sinusne funkcije prijenosnog signala.
- Modulacija argumenta → *modulacija eksponenta (EM, Exponential Modulation)* kad se radi o argumentu eksponencijalne funkcije prijenosnog signala.

- **Modulacija faze** → mijenja se relativna faza φ prijenosnog signala,

$$\varphi(t)_{\text{PM}} = \varphi_0 + k_p u_m(t) = \varphi_0 + \Delta\varphi(t),$$

k_p — osjetljivost modulatora faze. Uzima se $\varphi_0 = 0$, jer to nema nikakvog utjecaja na daljnju analizu.

- Trenutna je faza fazno moduliranog signala,

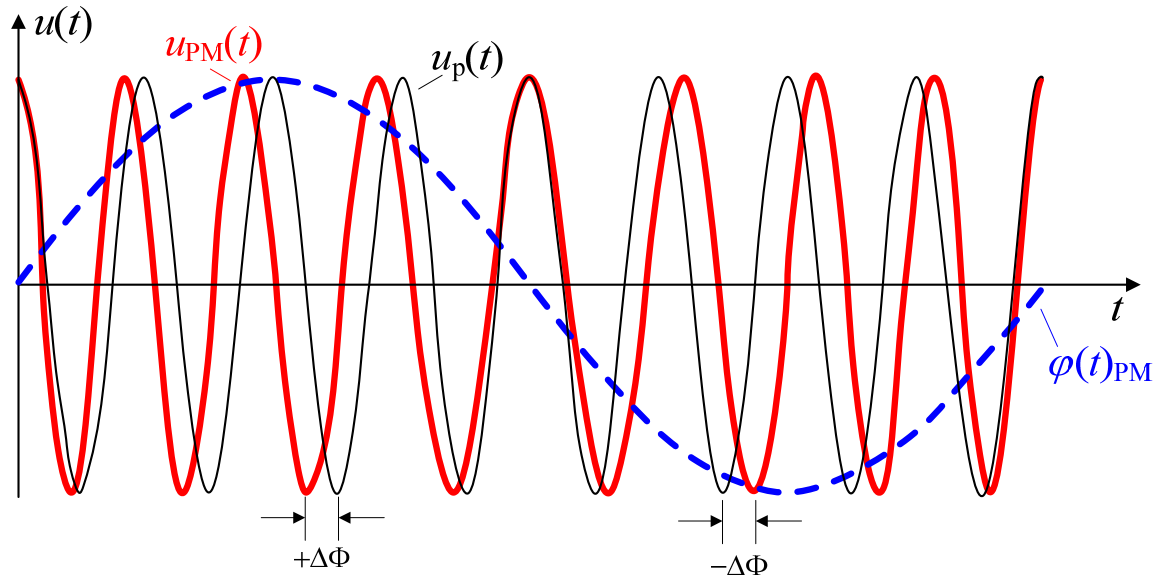
$$\Phi(t)_{\text{PM}} = \omega_p t + k_p u_m(t),$$

što daje fazno modulirani signal,

$$u_{\text{PM}}(t) = U_{\text{pm}} \cos[\omega_p t + k_p u_m(t)].$$

Modulacija faze

Valni oblik sinusno moduliranog PM-signalala



- U kompleksnom obliku je PM-signal opisan izrazom,

$$u_{\text{PM}}(t) = U_{\text{pm}} \Re \left\{ e^{j[\omega_p t + k_p u_m(t)]} \right\} = \Re \{ \dot{u}_{\text{PM}} \}.$$

Modulacija faze

- Kad je modulacijski signal sinusnog oblika, tj. sastoji se samo od jedne frekvencijske komponente (modulacija «jednim tonom»),

$$u_m(t) = U_{mm} \sin \omega_m t,$$

$$\Phi(t)_{PM} = \omega_p t + k_p U_{mm} \sin \omega_m t.$$

- Devijacija faze* $\Delta\Phi \rightarrow$ najveće odstupanje faze moduliranog signala od faze prijenosnog signala.

$$\Phi(t)_{PM} = \omega_p t + \Delta\Phi_{PM} \sin \omega_m t.$$

- Indeks modulacije faze* $m_p \rightarrow$ najveća promjena faze PM-signal.

$$m_p = \Delta\Phi_{PM} = k_p U_{mm},$$

- Indeks modulacije faze m_p može biti veći od jedan ili pak manji od jedan.

$$u_{PM}(t) = U_{pm} \cos[\omega_p t + m_p \sin \omega_m t].$$

Modulacija faze

- Promjene faze uzrokom su promjena trenutne frekvencije PM-signalu,

$$\omega(t)_{\text{PM}} = \frac{d\Phi(t)_{\text{PM}}}{dt} = \omega_p + m_p \omega_m \cos \omega_m t .$$

- Pri sinusnoj promjeni faze nastaje kosinusna promjena frekvencije.*
- Devijacija frekvencije $\Delta\omega \rightarrow$ najveće odstupanje frekvencije moduliranog signala od frekvencije prijenosnog signala.*

$$\Delta\omega_{\text{PM}} = m_p \omega_m = \Delta\Phi_{\text{PM}} \omega_m = k_p U_{\text{mm}} \omega_m .$$

Modulacija frekvencije

- **Modulacija frekvencije** → mijenja se trenutna frekvencija prijenosnog signala,

$$\omega(t)_{\text{FM}} = \omega_p + k_f u_m(t),$$

k_f — osjetljivost modulatora frekvencije.

- Trenutna je faza frekvencijski moduliranog signala,

$$\Phi(t)_{\text{FM}} = \int_0^t \omega(t)_{\text{FM}} dt = \omega_p t + k_f \int_0^t u_m(t) dt,$$

što daje frekvencijski modulirani signal,

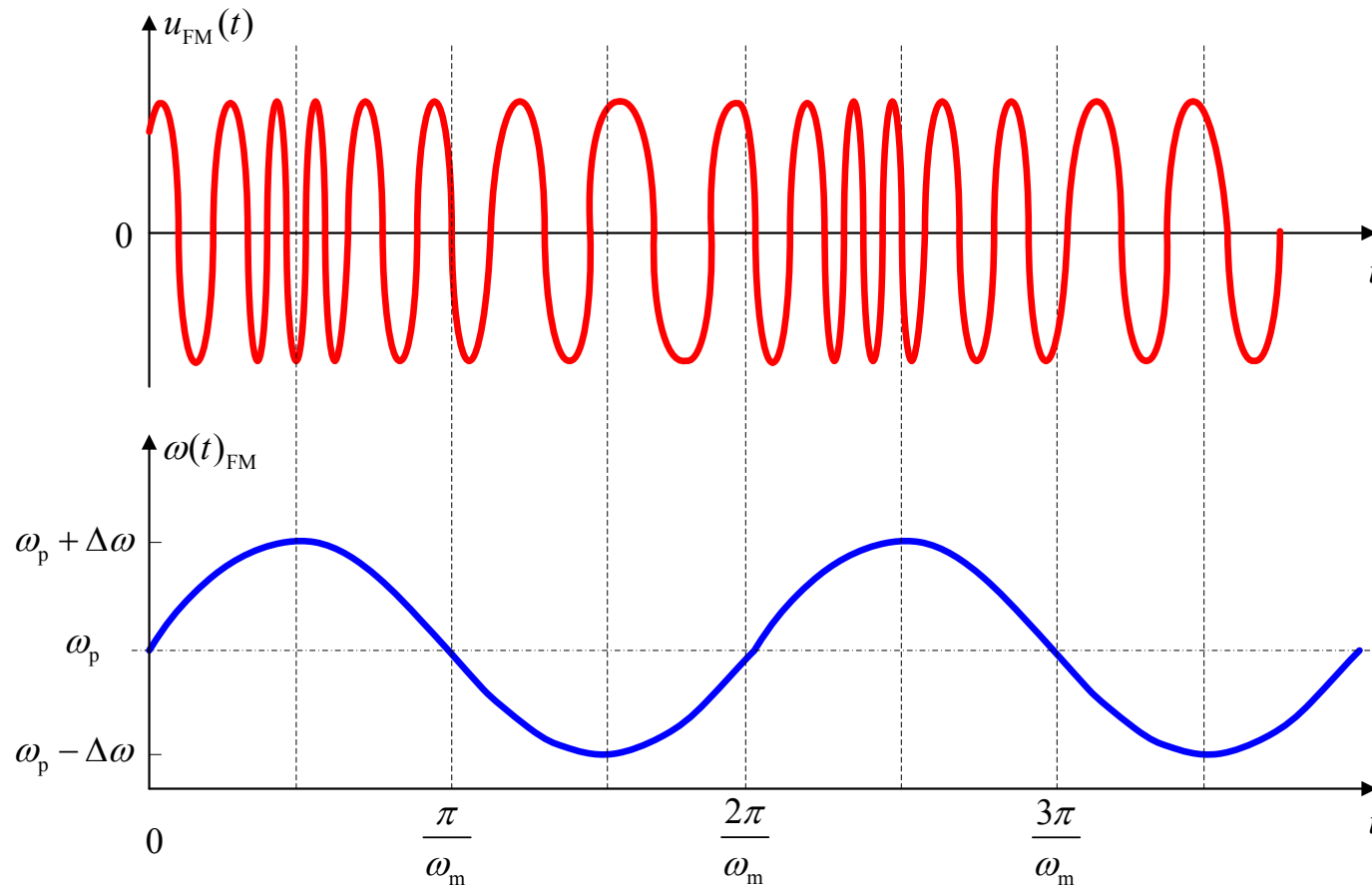
$$u_{\text{FM}}(t) = U_{\text{pm}} \cos \left[\omega_p t + k_f \int_0^t u_m(t) dt \right],$$

ili,

$$u_{\text{FM}}(t) = U_{\text{pm}} \Re \left\{ e^{j \left[\omega_p t + k_f \int_0^t u_m(t) dt \right]} \right\} = \Re \{ \dot{u}_{\text{FM}} \}.$$

Modulacija frekvencije

Valni oblik sinusno moduliranog FM-signal



Modulacija frekvencije

- Kad je modulacijski signal kosinusnog oblika, tj. sastoji se samo od jedne frekvencijske komponente (modulacija «jednim tonom»),

$$u_m(t) = U_{mm} \cos \omega_m t ,$$

$$\omega(t)_{FM} = \omega_p + k_f U_{mm} \cos \omega_m t .$$

- Devijacija frekvencije FM-signalu jednaka je,

$$\Delta\omega_{FM} = k_f U_{mm} ,$$

pa slijedi,

$$\omega(t)_{FM} = \omega_p + \Delta\omega_{FM} \cos \omega_m t .$$

- Trenutna je faza frekvencijski moduliranog signala,

$$\Phi(t)_{FM} = \int_0^t [\omega_p + \Delta\omega_{FM} \cos \omega_m t] dt ,$$

$$\Phi(t)_{FM} = \omega_p t + \frac{\Delta\omega_{FM}}{\omega_m} \sin \omega_m t .$$

Modulacija frekvencije

- Valni je oblik FM-signalu onda,

$$u_{\text{FM}}(t) = U_{\text{pm}} \cos \left[\omega_{\text{p}} t + \frac{\Delta \omega_{\text{FM}}}{\omega_{\text{m}}} \sin \omega_{\text{m}} t \right].$$

- Pri kosinusnoj promjeni frekvencije nastaje sinusna promjena faze.*
- Devijacija faze FM-signalu jednaka je,

$$\Delta \Phi_{\text{FM}} = \frac{\Delta \omega_{\text{FM}}}{\omega_{\text{m}}}.$$

- Indeks modulacije frekvencije m_{f} → devijacija faze FM-signalu.*

$$m_{\text{f}} = \Delta \Phi_{\text{FM}} = \frac{\Delta \omega_{\text{FM}}}{\omega_{\text{m}}} = \frac{k_{\text{f}} U_{\text{mm}}}{\omega_{\text{m}}}.$$

- Indeks modulacije frekvencije m_{f} može biti veći ili pak manji od jedan.

$$u_{\text{FM}}(t) = U_{\text{pm}} \cos [\omega_{\text{p}} t + m_{\text{f}} \sin \omega_{\text{m}} t].$$

Spektar PM- i FM-signala

- Izborom kosinusne modulacije frekvencije i sinusne modulacije faze nastaju jednaki oblici moduliranog signala. Frekvencijski je spektar takvih FM- i PM-signala također jednak. Izraz,

$$u_{\text{EM}}(t) = U_{\text{pm}} \cos[\omega_p t + m \sin \omega_m t],$$

u sebi uključuje i modulaciju frekvencije i modulaciju faze. On se može rastaviti u oblik,

$$u_{\text{EM}}(t) = U_{\text{pm}} \cos \omega_p t \cdot \cos(m \sin \omega_m t) - \\ - U_{\text{pm}} \sin \omega_p t \cdot \sin(m \sin \omega_m t).$$

- Kad su indeksi modulacije mali ($m < 0,4$), tj. male su devijacije faze, približno je,

$$\cos(m \sin \omega_m t) \approx 1,$$

$$\sin(m \sin \omega_m t) \approx m \sin \omega_m t.$$

Spektar PM- i FM-signala

- Modulirani je signal onda približno,

$$u_{\text{EM}}(t) = U_{\text{pm}} \left[\cos \omega_p t - m \sin \omega_p t \cdot \sin \omega_m t \right],$$

ili,

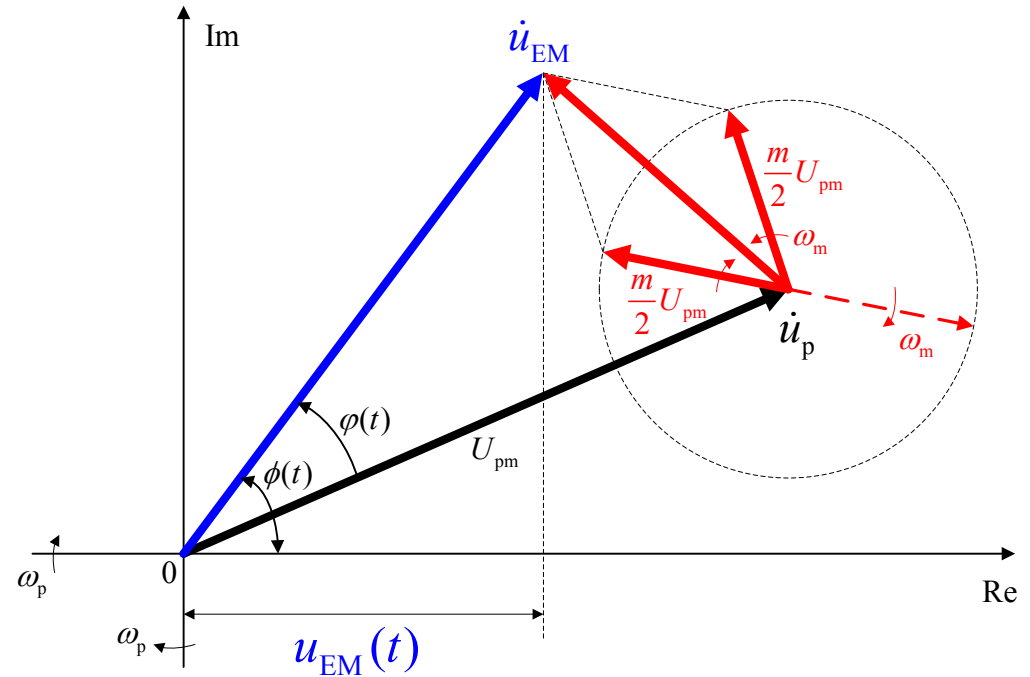
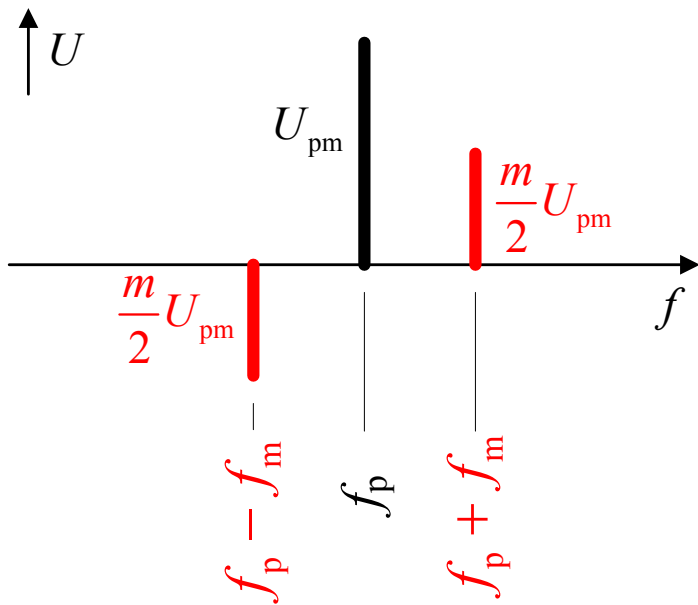
$$u_{\text{EM}}(t) = U_{\text{pm}} \left[\cos \omega_p t - \frac{m}{2} \cos (\omega_p - \omega_m) t + \frac{m}{2} \cos (\omega_p + \omega_m) t \right],$$

odnosno u kompleksnom obliku,

$$\dot{u}_{\text{EM}} = U_{\text{pm}} \left[e^{j\omega_p t} - \frac{m}{2} e^{j(\omega_p - \omega_m) t} + \frac{m}{2} e^{j(\omega_p + \omega_m) t} \right].$$

- Modulirani signal malog indeksa modulacije sastoji se, dakle, od tri harmonijske komponente,
 - *komponente prijenosnog signala* frekvencije f_p , amplitude U_{pm} ,
 - *donje bočne komponente* frekvencije $f_p - f_m$, amplitude $U_{\text{pm}} \cdot m/2$ i,
 - *gornje bočne komponente* frekvencije $f_p + f_m$, amplitude $U_{\text{pm}} \cdot m/2$.

Spektar PM- i FM-signala



- Treba uočiti da je donja bočna komponenta fazno zakrenuta za 180° (predznak "-").
- Verzor donje bočne komponente zato je protivne orijentacije.

Spektar PM- i FM-signala

- Pri većim indeksima modulacije ne vrijede ranije korištene aproksimacije. Vrijednosti $\cos(m \sin \omega_m t)$ i $\sin(m \sin \omega_m t)$ izračunavaju se pomoću Jacobijevih redova,

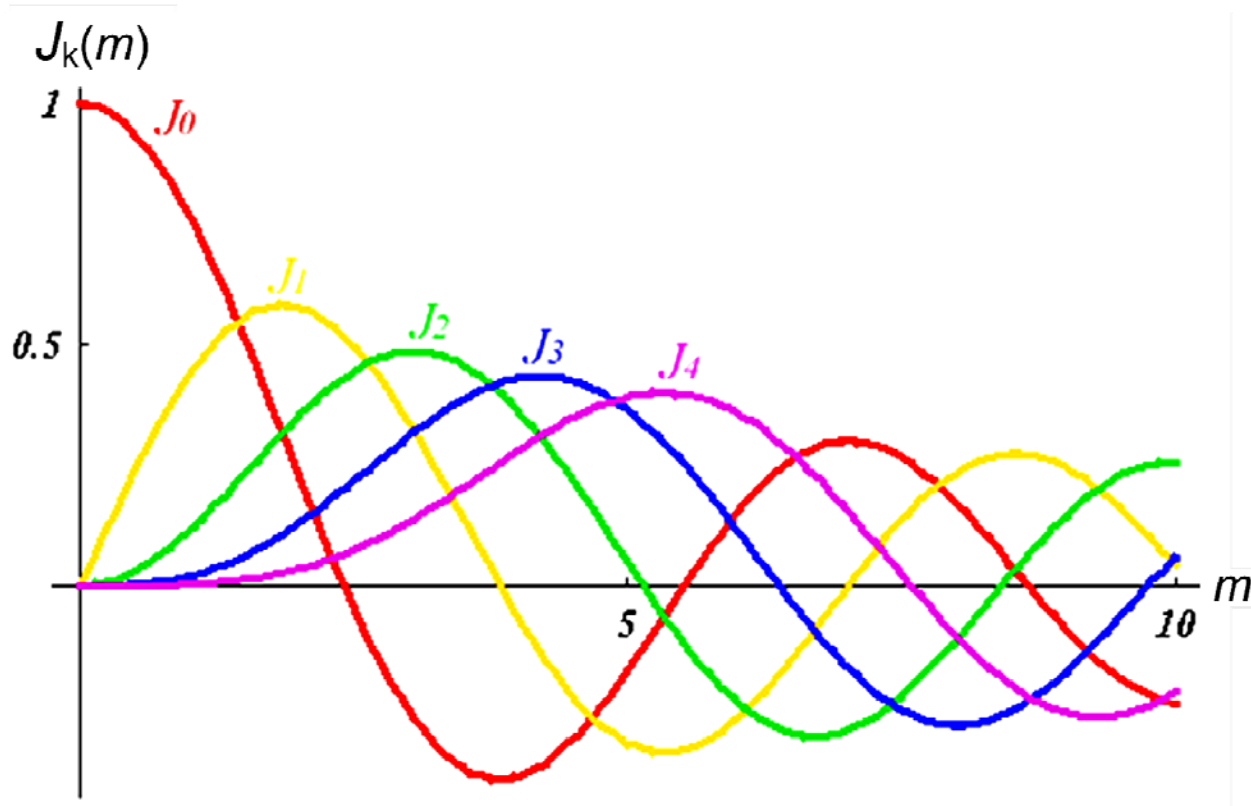
$$\cos(m \sin \omega_m t) = J_0(m) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(m) \cos(2k \omega_m t),$$

$$\sin(m \sin \omega_m t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(m) \sin[(2k+1) \omega_m t],$$

$J_k(m)$ je Besselova funkcija prve vrste k -tog reda i argumenta m .

Spektar PM- i FM-signala

Dijagram Besselovih funkcija prve vrste



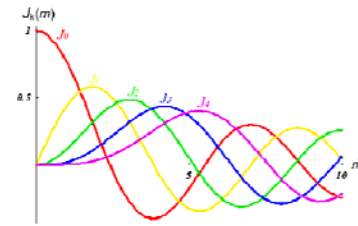
Spektar PM- i FM-signala

- Modulirani je signal tad,

$$u_{FM}(t) = U_{pm} \cos \omega_p t [J_0(m) + 2J_2(m) \cos 2\omega_m t + 2J_4(m) \cos 4\omega_m t + \dots] - U_{pm} \sin \omega_p t [2J_1(m) \sin \omega_m t + 2J_3(m) \cos 3\omega_m t + \dots],$$

pa se nakon uređenja izraza dobiva,

$$\begin{aligned} u_{FM}(t) = & J_0(m) U_{pm} \cdot \cos \omega_p t + \\ & + J_1(m) U_{pm} \cdot \cos(\omega_p + \omega_m)t - \\ & - J_1(m) U_{pm} \cdot \cos(\omega_p - \omega_m)t + \\ & + J_2(m) U_{pm} \cdot \cos(\omega_p + 2\omega_m)t + \\ & + J_2(m) U_{pm} \cdot \cos(\omega_p - 2\omega_m)t + \\ & + J_3(m) U_{pm} \cdot \cos(\omega_p + 3\omega_m)t - \\ & - J_3(m) U_{pm} \cdot \cos(\omega_p - 3\omega_m)t + \\ & \dots\dots\dots \\ & + J_k(m) U_{pm} \cdot \cos(\omega_p + k\omega_m)t + \\ & + (-1)^k J_k(m) U_{pm} \cdot \cos(\omega_p - k\omega_m)t + \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

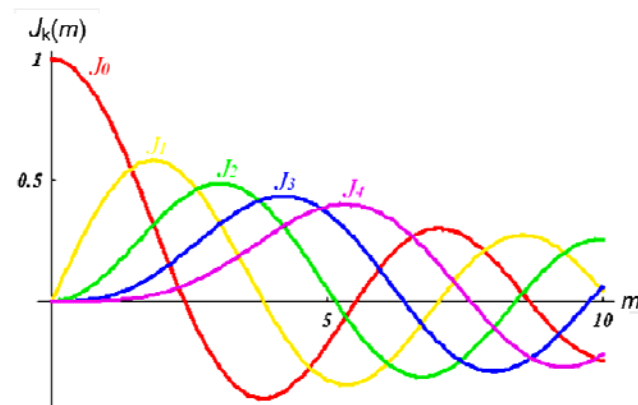
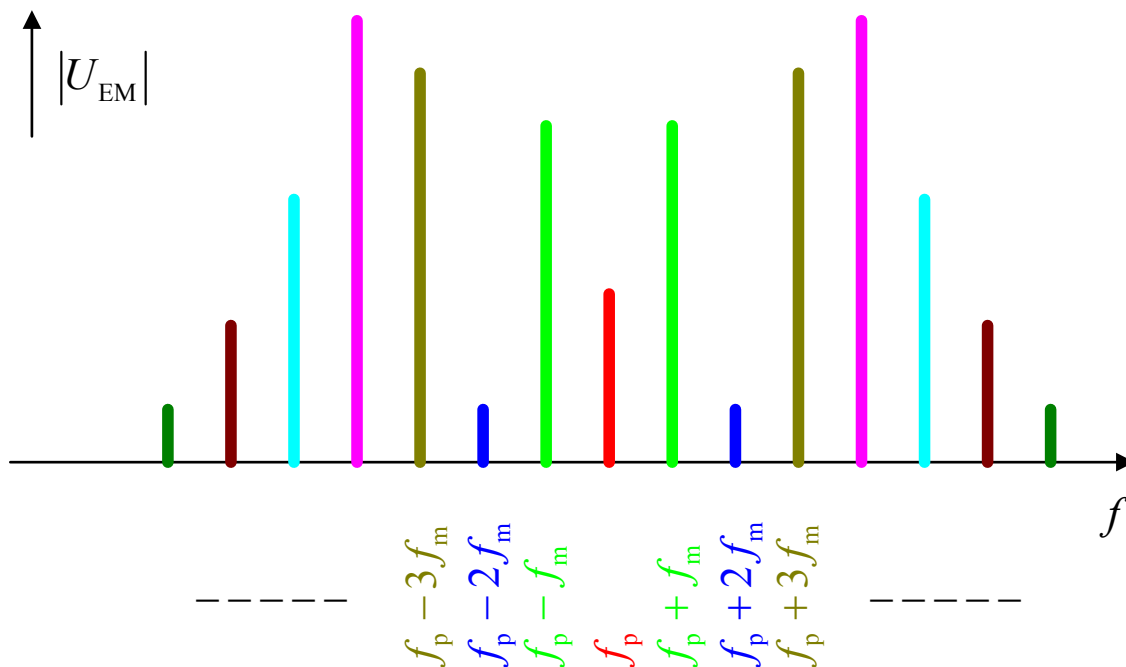


komponenta prijenosnog signala,
prva gornja bočna komponenta,
prva donja bočna komponenta,
druga gornja bočna komponenta,
druga donja bočna komponenta,
treća gornja bočna komponenta,
treća donja bočna komponenta,

k -ta gornja bočna komponenta,
 k -ta donja bočna komponenta.

Spektar PM- i FM-signala

Primjer spektra amplitude sinusno moduliranog FM-signala s indeksom modulacije $m_f = 5,0$.

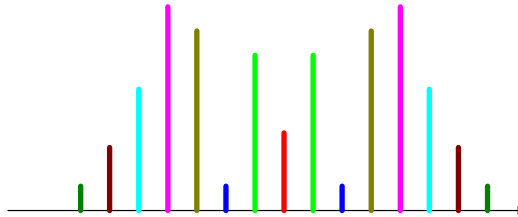


- Spektar fazno moduliranog ili frekvencijski moduliranog signala sastoji se od komponente nosioca i beskonačnog broja bočnih komponentata.

Spektar PM- i FM-signala

- Modulacija argumenta (modulacija faze odnosno frekvencije) je *nelinearni modulacijski postupak* → modulacijom nastaju nove frekvencijske komponente. Modulirani signal teorijski zauzima beskonačno široki pojas frekvencija.
- Bočne komponente visokog reda (komponente jako udaljene od prijenosne frekvencije na frekvencijskoj osi) jako su malih razina → mogu se zanemariti.
- *Carsonovo pravilo* je empirička formula, koja daje približnu širinu pojasa moduliranog signala,

$$B_{EM} = 2f_m(m + 1).$$



Ovaj pojas obuhvaća sve komponente spektra amplituda kojih je veća od 10% amplitude moduliranog signala [$J_n(m) \geq 0,1$] odnosno sve komponente snaga kojih je veća od 1% ukupne snage moduliranog signala.

Spektar PM- i FM-signalala

- Odgovarajući izrazi za širinu pojasa fazno odnosno frekvencijski moduliranog signala su,

$$B_{\text{PM}} = 2f_m(\Delta\Phi_{\text{PM}} + 1),$$

$$B_{\text{FM}} = 2(\Delta f_{\text{FM}} + f_m).$$

- Za male indekse modulacije (uskopojasna modulacija) približno je,

$$B_{\text{EM}} \approx 2f_m,$$

a za jako velike indekse modulacije (širokopojasna modulacija) približno je,

$$B_{\text{EM}} \approx 2f_m \cdot m,$$

ili pak za svaku modulaciju posebno izlazi,

$$B_{\text{PM}} \approx 2f_m \Delta\Phi_{\text{PM}}, \quad B_{\text{FM}} \approx 2\Delta f_{\text{FM}}.$$

- Kad modulacijski signal zauzima pojas od f_{min} do f_{maks} , onda se širina pojasa moduliranog signala dobiva stavljanjem f_{maks} na mjesto f_m u odgovarajuće izraze.

Snaga PM- i FM-signalala

- Snaga moduliranog signala najlakše se izračunava uz pomoć Parsevalova teorema,

$$P_{\text{EM}} = \frac{U_{\text{pm}}^2}{2R} \left[J_0^2(m) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(m) \right].$$

- Za Besselove funkcije vrijedi teorem,

$$J_0^2(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(x) = 1,$$

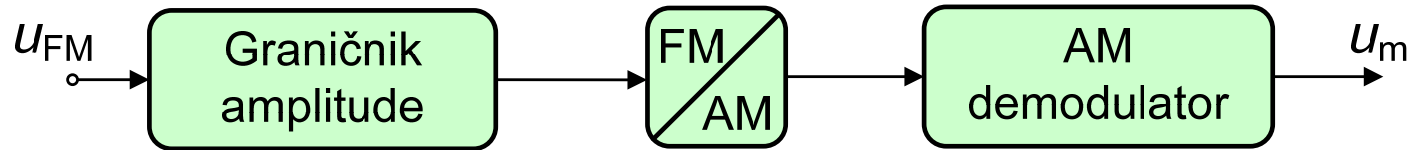
što onda daje,

$$P_{\text{EM}} = \frac{U_{\text{pm}}^2}{2R} = P_{\text{p}}.$$

- Snaga fazno ili frekvencijski moduliranog signala jednaka je snazi prijenosnog signala kad nema modulacije.* Modulacijom se samo preraspodjeljuje snaga u spektru signala.
- Snaga prijenosnog signala raspodjeljuje se na jedan pojas frekvencija koji zaposjedaju bočne komponente moduliranog signala.

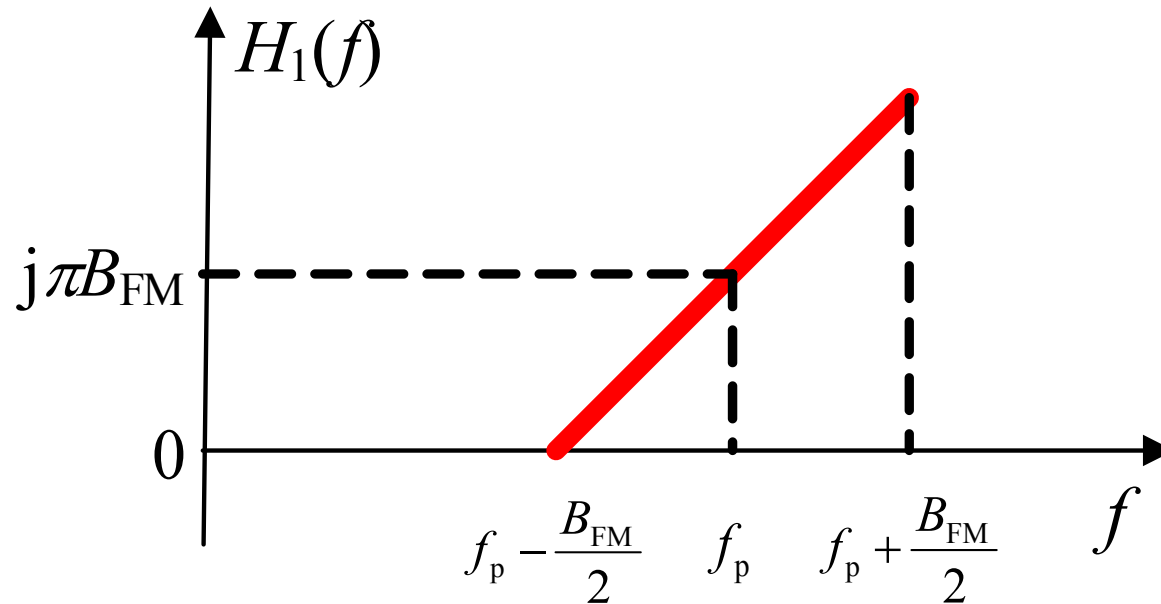
Demodulacija FM-signala

- FM-signal se obično demodulira na posredni način,
 - u prvom se koraku on pretvori u AM-signal,
 - a u drugom se koraku demodulira taj AM-signal nekoherentnim postupkom detekcije ovojnice.
- Radi uklanjanja eventualnih smetnji u amplitudi FM-signala koristi se graničnik amplitude.



- Taj postupak demodulacije FM-signala ima obilježja nekoherentnog postupka.

Demodulacija FM-signala



- Pretvorba modulacije frekvencije u modulaciju amplitude obavlja se uz pomoć četveropola koji pokazuje frekvencijsku ovisnost prijenosne funkcije u pojasu frekvencija FM-signala (na slici je idealizirana prijenosna karakteristika).

Demodulacija FM-signala

- Iz Laplaceove odnosno Fourierove analize je poznato da linearno rastuću frekvencijsku karakteristiku ima sklop koji obavlja funkciju deriviranja jer,

$$j 2\pi f \Leftrightarrow \frac{d}{dt}.$$

- Derivirajmo sad funkciju FM-signala,

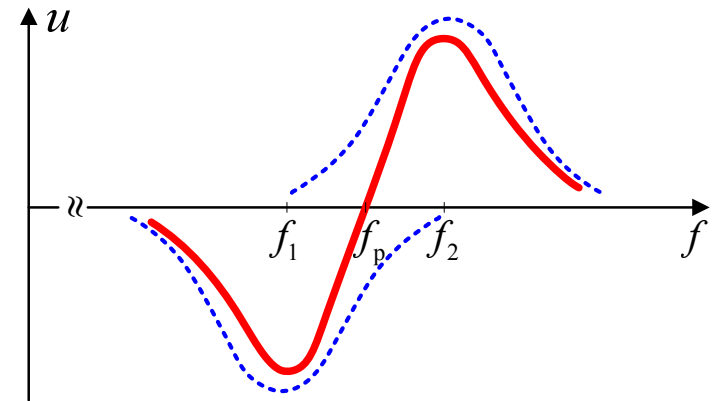
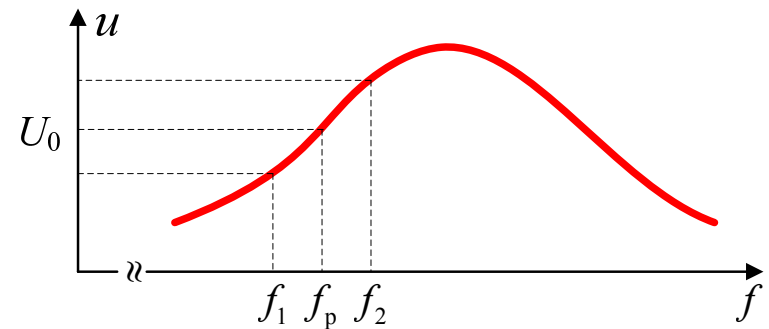
$$u_{\text{FM}}(t) = U_{\text{pm}} \cos \left[\omega_p t + k_f \int_0^t u_m(t) dt \right],$$

$$\frac{du_{\text{FM}}(t)}{dt} = -U_{\text{pm}} \left[\omega_p + k_f u_m(t) \right] \sin \left[\omega_p t + k_f \int_0^t u_m(t) dt \right].$$

- Dobiveni je signal amplitudno moduliran, a istodobno je ostao frekvencijski moduliran.
- U sljedećem koraku se provodi detekcija ovojnice što u konačnici daje polazni modulacijski signal $u_m(t)$.

Demodulacija FM-signala

- Demodulacija u oba ova koraka obavlja se u demodulatoru koji se naziva *frekvencijskim diskriminatorom*.
- Protutaktnim spojem dvaju diskriminatora proširuje se približno linearno područje ovisnosti amplitude o frekvenciji.
- Frekvencija se može izravno demodulirati uz pomoć sustava koji se naziva fazom sinkronizirana zamka (PLL, *Phase-Locked Loop*) što je danas najčešće korištena metoda demodulacije.



Utjecaj smetnji na PM- i na FM-signal

- Kod modulacije amplitude je pokazano da superponiranjem dvaju sinusnih signala bliskih frekvencija nastaje rezultirajući signal kojemu se mijenja i amplituda i faza,

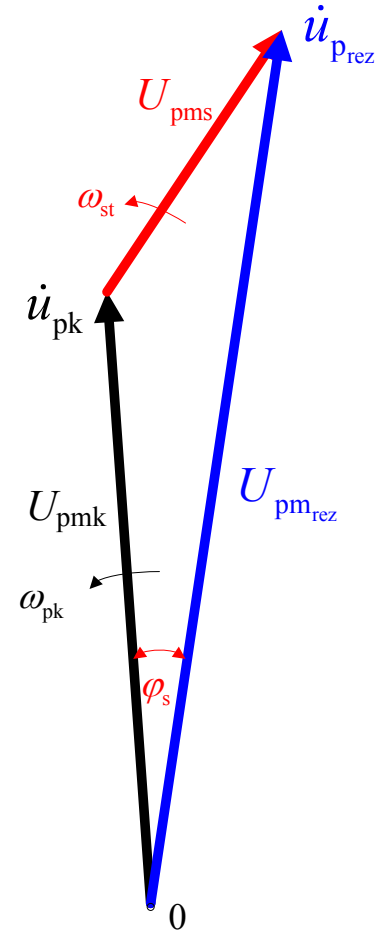
$$\dot{u}_{\text{prez}} = U_{\text{pmk}} \left(1 + a_s e^{j\omega_{\text{st}}t} \right) e^{j\omega_{\text{pk}}t}.$$

gdje su,

$$a_s = \frac{U_{\text{pms}}}{U_{\text{pmk}}}, \quad \text{ i } \quad \omega_{\text{st}} = \omega_{\text{ps}} - \omega_{\text{pk}}.$$

- Pri malim amplitudama smetnje ($a_s \ll 1$) promjene faze rezultirajućeg signala približno su sinusnog oblika s devijacijom faze,

$$\Delta\Phi_s \approx a_s.$$



Utjecaj smetnji na PM- i na FM-signal

- Zbog sinusnih promjena faze mijenja se trenutna frekvencija rezultirajućeg signala po kosinusnom zakonu. Odgovarajuća devijacija frekvencije, nastala zbog djelovanja signala smetnje, iznosi,

$$\Delta\omega_s = \omega_{st} \cdot \Delta\Phi_s = \omega_{st} \cdot a_s .$$

- Nakon demodulacije pojavljuje se signal smetnje frekvencije ω_{st} .
- Smetnja se dodaje korisnome demoduliranom signalu kad je korisni VF-signal fazno ili frekvencijski moduliran.

Primjena modulacije frekvencije

- Analogna radiodifuzija zvuka u VHF području:
 - Frekvencijsko područje rada: 87,5 – 108,0 MHz,
 - širina pojasa emisije (moduliranog signala): 180 kHz (za mono),
250 kHz (za stereo),
 - granice audiofrekvencijskog pojasa: 40 – 15000 Hz,
 - najveća devijacija frekvencije: ± 75 kHz,
 - snage odašiljača: 0,1 – 20 kW.

Primjena modulacije frekvencije

- Privatne radijske mreže (analogne):
 - Frekvencijsko područje rada: 68 – 87,5 MHz (4-metarski pojas),
146 – 174 MHz (2-metarski pojas),
430 – 470 MHz (0,7-metarski pojas),
 - širina pojasa emisije (moduliranog signala): 16 kHz,
 - granice audiofrekvencijskog pojasa: do 3000 Hz,
 - najveća devijacija frekvencije: ± 5 kHz,
 - snage odašiljača: 0,5 – 5 W, (10; 20 i 50W).
- Modulacija faze se ne koristi za prijenos informacija.
 - PM se koristi samo u neizravnom postupku dobivanja FM-signal.