2. tjedan
Funkcije.

ZPM-FER

rujan, 2017

Sadržaj

Funkcije – definicije

Definicija funkcije

Funkcija f je preslikavanje koje svakom elementu x skupa A pridružuje (točno jedan) element y skupa B i pišemo $f : A \to B$ odnosno $y = f(x)$. Tada se skup A zove domena funkcije f, a skup B kodomena.

Realna funkcija jedne realne varijable je funkcija $f : A \to B$ gdje su $A, B \subset \mathbb{R}$.

Primjeri realnih funkcija:

1. $f(x) = x^2 + 3$
2. $g(x) = \sqrt{x-2}$
3. $h(x) = e^{2x-1}$

Domena funkcije

Definicija

Domena realne funkcije $\mathrm{D}(f)$ je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje zakon pridruživanja ima smisla odnosno za koje je funkcija dobro definirana.

Domena funkcije

Definicija

Domena realne funkcije $\mathrm{D}(f)$ je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje zakon pridruživanja ima smisla odnosno za koje je funkcija dobro definirana.

Određivanje domene

Određivanje domene funkcije znači određivanje najvećeg podskupa skupa $\mathbb{R}$ za koje je izraz definiran. Ponekad se rabi izraz prirodno područje funkcije ili prirodna domena. To znači da u nazivniku ne smije biti 0, da izraz ispod korijena mora biti pozitivan broj, da se računa logaritam samo od strogo pozitivnih brojeva i slično. Prilikom određivanja domene koristite znanje o domenama svih elementarnih funkcija.

Primjer 1.

Odredite domene funkcija:

1. $f(x) = x^2 + 3$

Primjer 1.

Odredite domene funkcija:

1. $f(x) = x^2 + 3$
   Rj. Ova funkcija je dobro definirana za svaki realan broj pa je $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$.

Primjer 1.

Odredite domene funkcija:

1. $f(x) = x^2 + 3$
   Rj. Ova funkcija je dobro definirana za svaki realan broj pa je $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = \sqrt{x-2}$

Primjer 1.

Odredite domene funkcija:

1. $f(x) = x^2 + 3$
   Rj. Ova funkcija je dobro definirana za svaki realan broj pa je $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = \sqrt{x-2}$
   Rj. Zbog drugog korijena imamo uvjet da je $x - 2 \geq 0$ tj. $x \geq 2$. Dakle, domena je $\mathrm{D}(g) = [2, \infty)$.

Primjer 1.

Odredite domene funkcija:

1. $f(x) = x^2 + 3$
   Rj. Ova funkcija je dobro definirana za svaki realan broj pa je $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = \sqrt{x-2}$
   Rj. Zbog drugog korijena imamo uvjet da je $x - 2 \geq 0$ tj. $x \geq 2$. Dakle, domena je $\mathrm{D}(g) = [2, \infty)$.
3. $h(x) = e^{2x-1}$.

Primjer 1.

Odredite domene funkcija:

1. $f(x) = x^2 + 3$
   Rj. Ova funkcija je dobro definirana za svaki realan broj pa je $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = \sqrt{x-2}$
   Rj. Zbog drugog korijena imamo uvjet da je $x - 2 \geq 0$ tj. $x \geq 2$. Dakle, domena je $\mathrm{D}(g) = [2, \infty)$.
3. $h(x) = e^{2x-1}$.
   Rj. Domena eksponencijalne funkcije je skup realnih brojeva pa je $\mathrm{D}(h) = \mathbb{R}$.

Primjer 2.

Odredite domenu funkcije $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-9}$.

Primjer 2.

Odredite domenu funkcije $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-9}$.

Rješenje. Imamo dva uvjeta na domenu:

1. uvjet zbog korijena: $x - 2 \geq 0$

2. uvjet zbog nazivnika: $x^2 - 9 \neq 0$ tj. $x \neq \pm 3$

Domena je presjek ova dva uvjeta te dobivamo

$$\mathrm{D}(f) = [2, \infty\rangle \setminus \{3\}.$$

Slika funkcije

Definicija

Slika funkcije je skup

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathrm{D}(f) \mathrm{t.d.} y = f(x)\}.$$

Slika funkcije

Definicija

Slika funkcije je skup

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathrm{D}(f) \mathrm{t.d.} y = f(x)\} .$$

Određivanje slike

Određivanje slike funkcije znači određivanje najvećeg podskupa kodomene za koje je postoji x u domeni takav da je $y = f(x)$. Prilikom određivanja slike koristite znanje o slikama svih elementarnih funkcija, npr. korijen i kvadrat su pozitivni brojevi, slika eksponencijalne funkcije su strogo pozitivni brojevi i slično.

Primjer 3.

Odredite slike funkcija:

1. $f(x) = x^2 + 3$,

Primjer 3.

Odredite slike funkcija:

1. $f(x) = x^2 + 3$,
   Rj. Zbog $x^2 \geq 0$ slijedi $x^2 + 3 \geq 3$ te je slika
   $\mathrm{Im}(f) = [3, \infty)$.

Primjer 3.

Odredite slike funkcija:

1. $f(x) = x^2 + 3$,
   Rj. Zbog $x^2 \geq 0$ slijedi $x^2 + 3 \geq 3$ te je slika $\mathrm{Im}(f) = [3, \infty)$.

2. $g(x) = \sqrt{x - 2}$,

Primjer 3.

Odredite slike funkcija:

1. $f(x) = x^2 + 3$,
   Rj. Zbog $x^2 \geq 0$ slijedi $x^2 + 3 \geq 3$ te je slika $\mathrm{Im}(f) = [3, \infty)$.

2. $g(x) = \sqrt{x-2}$,
   Rj. Korijen je uvijek pozitivan tj. $\mathrm{Im}(g) = [0, \infty)$.

Primjer 3.

Odredite slike funkcija:

1. $f(x) = x^2 + 3$,
   Rj. Zbog $x^2 \geq 0$ slijedi $x^2 + 3 \geq 3$ te je slika $\mathrm{Im}(f) = [3, \infty)$.
2. $g(x) = \sqrt{x-2}$,
   Rj. Korijen je uvijek pozitivan tj. $\mathrm{Im}(g) = [0, \infty)$.
3. $h(x) = e^{2x-1}$

Primjer 3.

Odredite slike funkcija:

1. $f(x) = x^2 + 3$,
   Rj. Zbog $x^2 \geq 0$ slijedi $x^2 + 3 \geq 3$ te je slika $\mathrm{Im}(f) = [3, \infty)$.

2. $g(x) = \sqrt{x-2}$,
   Rj. Korijen je uvijek pozitivan tj. $\mathrm{Im}(g) = [0, \infty)$.

3. $h(x) = e^{2x-1}$
   Rj. $\mathrm{Im}(h) = (0, \infty)$ jer je eksponencijalna funkcija uvijek pozitivna.

Nultočka funkcije

Nultočka funkcije je $x \in \mathrm{D}(f)$ takav da je $f(x) = 0$.

Nultočka funkcije

Nultočka funkcije je $x \in \mathrm{D}(f)$ takav da je $f(x) = 0$.

Primjer 4.

Odredite nultočke funkcija:

1. $f(x) = x^2 + 3$ nema nultočke jer jednadžba $x^2 + 3 = 0$ nema realnih rješenja;
2. $g(x) = \sqrt{x-2}$ ima nultočku jer je $x = 2$ rješenje jednadžbe $\sqrt{x-2} = 0$;
3. $h(x) = e^{2x-1}$ nema nultočke jer jednadžba $e^{2x-1} = 0$ nema realnih rješenja;
4. $k(x) = \ln(x^2 - 3)$ ima nultočke jer iz $\ln(x^2 - 3) = 0$ slijedi da je $x^2 - 3 = 1$ tj. $x^2 = 4$. Dakle, nultočke su $x_{1,2} = \pm 2$.

Definicija

Neka je $f : A \to B$.

- Funkcija f je injekcija ako iz $x_1 \neq x_2$ slijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$ za sve elemente x_1 i x_2 iz domene A.
- Funkcija f je surjekcija ako za svaki element y skupa B postoji element x skupa A takav da je $f(x) = y$ tj. ako je $B = \mathrm{Im}(f)$.
- Funkcija f je bijekcija ako je injekcija i surjekcija.

Definicija

Neka je $f : A \to B$.

- Funkcija f je injekcija ako iz $x_1 \neq x_2$ slijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$ za sve elemente x_1 i x_2 iz domene A.
- Funkcija f je surjekcija ako za svaki element y skupa B postoji element x skupa A takav da je $f(x) = y$ tj. ako je $B = \mathrm{Im}(f)$.
- Funkcija f je bijekcija ako je injekcija i surjekcija.

Napomena. Primijetimo da definicija injekcije nije praktična za računanje jer sadrži u sebi znak $\neq$. Zato kod dokazivanja koristimo alternativnu definiciju:
f je injekcija ako iz jednakosti $f(x_1) = f(x_2)$ slijedi da je $x_1 = x_2$.

Primjer 5.

Pokažite da je funkcija $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ injekcija.

Primjer 5.

Pokažite da je funkcija $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ injekcija.

Rješenje. Dakle, dokazivanje injekcije započinjemo s jednakosti $f(x_1) = f(x_2)$ odnosno

$$\frac{x_1 + 2}{x_1 - 1} = \frac{x_2 + 2}{x_2 - 1}$$

te pomnožimo s nazivnicima i dobijemo

$$x_1x_2 + 2x_2 - x_1 - 2 = x_1x_2 - x_2 + 2x_1 - 2.$$

Sada slijedi

$$3x_1 = 3x_2$$

odnosno $x_1 = x_2$ čime smo dokazali da je f injekcija.

Ostala svojstva funkcije

- Funkcija f je neparna ako vrijedi $f(-x) = -f(x)$ za svaki $x \in \mathrm{D}(f)$.
- Funkcija f je parna ako vrijedi $f(-x) = f(x)$ za svaki $x \in \mathrm{D}(f)$.
- Funkcija f je periodična ako postoji $T > 0$ takav da vrijedi $f(x + T) = f(x)$ za svaki $x \in \mathrm{D}(f)$.

Primjer 6.

Ispitajte parnost funkcija:

(a) $f(x) = \cos(2x)$; (b) $f(x) = \frac{2^x+3^x}{2^x-3^x}$

Rješenje.

(a) f je parna jer je cos parna funkcija tj.

$$f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x)$$

(b)

$$f(-x) = \frac{2^{-x}+3^{-x}}{2^{-x}-3^{-x}} = \frac{\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}}{\frac{1}{2^x}-\frac{1}{3^x}} = -\frac{2^x+3^x}{2^x-3^x} = -f(x)$$

pa slijedi da je f neparna funkcija

Graf funkcije

Graf funkcije f je podskup točaka (x, y) oblika

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x),\ x \in D_f\}.$$

Domena funkcije D_f je smještena na osi x dok je slika funkcije smještena na osi y.

Graf funkcije

Graf funkcije f je podskup točaka (x, y) oblika

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x),\ x \in D_f\}.$$

Domena funkcije D_f je smještena na osi x dok je slika funkcije smještena na osi y.

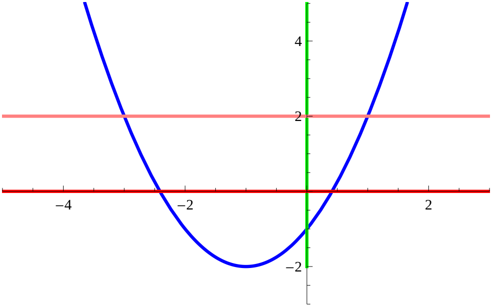
Napomena. Važno grafa funkcije leži u činjenici da iz samog grafa možemo saznati domenu, sliku i sva svojstva funkcije.

Analiza funkcije pomoću grafa

- Domena je ortogonalna projekcija grafa na os x, a slika je ortogonalna projekcija grafa na os y.
- Funkcija f je injekcija ako njezin graf siječe svaki pravac paralelan s osi x u najviše jednoj točki.
- Funkcija f je surjekcija ako se projekcija grafa na y os podudara s kodomenom funkcije.
- Graf parne funkcije je osno simetričan s obzirom na os y.
- Graf neparne funkcije je centralno simetričan s obzirom na ishodište.

Analiza funkcije pomoću grafa

Graf funkcije $y = x^2 + 2x - 1$

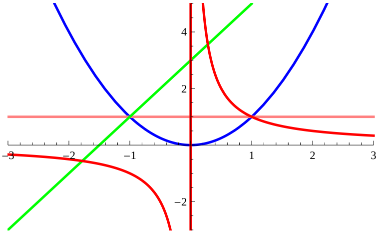


- domena funkcije $D_f = \mathbb{R}$ = projekcija grafa na os x
- slika funkcije $Im(f) = [-2, \infty)$ = projekcija grafa na os y
- funkcija nije injekcija = graf siječe pravac paralelan s osi x u dvije točke
- nema simetrije te funkcija nije niti parna niti neparna

Primjeri

Nacrtajte grafove funkcija :

1. $f(x) = 1$ (konstantna funkcija),
2. $h(x) = 2x + 3$ (linearna funkcija),
3. $y(x) = x^2$ (kvadratna funkcija),
4. $g(x) = \frac{1}{x}$.



Analiza grafova iz prethodnog primjera

1. $f(x) = 1$: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = 1$, f parna, nije injekcija
2. $h(x) = 2x + 3$: $\mathrm{D}(h) = \mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}$, h bijekcija, niti parna niti neparna
3. $y(x) = x^2$: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty\rangle$, f nije injekcija, parna
4. $g(x) = \frac{1}{x}$: $\mathrm{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, g bijekcija, g neparna

Kompozicija funkcija

Neka su definirane funkcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Tada definiramo kompoziciju $g \circ f : A \to C$ sa

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Inverzna funkcija

Ako je funkcija $f : A \to B$ bijekcija, tada postoji inverzna funkcija $f^{-1} : B \to A$. takva da vrijedi

$$(f \circ f^{-1})(y) = y$$

i

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

Primjer 6.

Neka je $f(x) = x^2$ i $g(x) = x + 1$. Odredite kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$, te pronađite inverze f^{-1} i g^{-1}, ukoliko postoje.

Rješenje.
Kompozicije su $(f \circ g)(x) = (x+1)^2$ i $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$.
Primijetimo da ne vrijedi $f \circ g = g \circ f$.
Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nije bijekcija, ali je zato $f : A \to A$ bijekcija ako stavimo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Tako definirana funkcija f ima inverz $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
Linearna funkcija g je bijekcija i vrijedi da je $g^{-1}(x) = x - 1$.

Primjer - pisanje funkcija u obliku kompozicije

(a) Funkcija $f(x) = x^3 + 7$ može biti napisana kao kompozicija funkcija $g(x) = x^3$ i $h(x) = x + 7$ odnosno $f(x) = (h \circ g)(x)$ (uočite da je $(g \circ h)(x) = (x + 7)^3$).

(b) Funkcija $f(x) = (x + 3)^2 + 3$ može biti napisana kao kompozicija $f(x) = (g \circ h \circ g)(x)$ gdje je $g(x) = x + 3$ i $h(x) = x^2$. Taj zapis će nam biti bitan prilikom deriviranja složenih funkcija.

Računanje inverzne funkcije

Postupak traženja inverzne funkcije

Krećemo od jednadžbe $y = f(x)$ i želimo izraziti varijablu x pomoću varijable y, tj. dobiti $x = g(y)$. Iz tradicionalnih razloga, umjesto $x = f^{-1}(y)$ pišemo $y = f^{-1}(x)$.

Računanje inverzne funkcije

Postupak traženja inverzne funkcije

Krećemo od jednadžbe $y = f(x)$ i želimo izraziti varijablu x pomoću varijable y, tj. dobiti $x = g(y)$. Iz tradicionalnih razloga, umjesto $x = f^{-1}(y)$ pišemo $y = f^{-1}(x)$.

Primjer 7.

Pronađite inverz funkcije $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$.

Rješenje. Počinjemo s $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$ i dobivamo $2x - 1 = xy + 3y$ odnosno $x(2-y) = 3y + 1$. To nam daje $x = \dfrac{3y+1}{2-y}$ pa je $f^{-1}(y) = \dfrac{3y+1}{2-y}$ ili $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{2-x}$.

Zadatak 1

Odredite domenu funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \log(1 - x)$.

Zadatak 1

Odredite domenu funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \log(1 - x)$.

Rješenje

(1) Zbog korijena imamo uvjet $x^2 - 4 \geq 0$ čije rješenje je interval $x \in \langle -\infty, -2] \cup [2, \infty\rangle$.
(2) Zbog logaritma imamo uvjet $1 - x > 0$ te je $x \in \langle -\infty, 1\rangle$.
Presjek tih dvaju skupova je interval

$$\mathrm{D}(f) = \langle -\infty, -2] .$$

Zadatak 2

Odredite domenu funkcije $f(x) = \sqrt{1-x} + \frac{1}{\ln(x^2)}$.

Zadatak 2

Odredite domenu funkcije $f(x) = \sqrt{1-x} + \frac{1}{\ln(x^2)}$.

Rješenje

(1) Zbog korijena imamo uvjet $1 - x \geq 0$ čije rješenje je interval $x \in \langle -\infty, 1]$.
(2) Zbog logaritma imamo uvjet $x^2 > 0$ te je $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(3) Zbog nazivnika imamo uvjet $\ln(x^2) \neq 0$ tj. $x^2 \neq 1$ iz čega slijedi da $x \neq \pm 1$.
Presjek ovih triju uvjeta je

$$\mathrm{D}(f) = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle .$$

Zadatak 3

Odredite jesu li sljedeće funkcije parne ili neparne:

(a) $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$;

(b) $f(x) = x^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$;

(c) $f(x) = |5x - 1|$.

Zadatak 3

Odredite jesu li sljedeće funkcije parne ili neparne:

(a) $f(x) = x^{2n},\ n \in \mathbb{N}$;

(b) $f(x) = x^{2n-1},\ n \in \mathbb{N}$;

(c) $f(x) = |5x - 1|$.

Rješenje

(a) $f(-x) = (-x)^{2n} = (-1)^{2n}x^{2n} = x^{2n} = f(x) \Rightarrow f$ je parna;

(b) $f(-x) = (-x)^{2n-1} = (-1)^{2n-1}x^{2n-1} = -x^{2n-1} = -f(x)$ $\Rightarrow f$ je neparna;

(c) $f(-x) = |-5x - 1| = |5x + 1| \Rightarrow f$ nije niti parna niti neparna.

Zadatak 4

Da li je funkcija $f(x) = \log(\sqrt{x+2} - 1)$ injekcija?

Zadatak 4

Da li je funkcija $f(x) = \log(\sqrt{x+2} - 1)$ injekcija?

Rješenje

Moramo provjeriti da li iz jednakosti $f(x_1) = f(x_2)$ slijedi $x_1 = x_2$. Sada slijedi

$$\begin{aligned}
\log(\sqrt{x_1+2} - 1) &= \log(\sqrt{x_2+2} - 1) \\
\sqrt{x_1+2} - 1 &= \sqrt{x_2+2} - 1 \\
\sqrt{x_1+2} &= \sqrt{x_2+2} \\
x_1 + 2 &= x_2 + 2 \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}$$

Dakle, f je injekcija.

Zadatak 5

Ako je $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{2x+3}{3x-2}$, koliko je $f^{-1}(x)$?

Zadatak 5

Ako je $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{2x+3}{3x-2}$, koliko je $f^{-1}(x)$?

Rješenje

Stavimo li $\dfrac{1}{x} = z \quad \left(x = \dfrac{1}{z}\right)$ dobivamo

$f(z) = \dfrac{2\frac{1}{x}+3}{3\frac{1}{x}-2} = \dfrac{2+3z}{3-2z}$. Sada to izjednačimo s y i slijedi

$\dfrac{2+3z}{3-2z} = y$ odnosno $2+3z = 3y-2zy$ pa je

$z = f^{-1}(y) = \dfrac{3y-2}{2y+3}$ ili $f^{-1}(x) = \dfrac{3x-2}{2x+3}$.

Zadatak 6

Ako je $f(x+1) = \dfrac{x+2}{x-3}$, koliko je $f(x-1)$?

Zadatak 6

Ako je $f(x+1) = \dfrac{x+2}{x-3}$, koliko je $f(x-1)$?

Rješenje

Stavimo li $x+1 = z$ $(x = z-1)$ dobivamo $f(z) = \dfrac{z+1}{z-4}$.

Stavimo li $z = x-1$ dobivamo $f(x-1) = \dfrac{x}{x-5}$.

Mogli smo odmah staviti $y-1 = x+1$ $(x = y-2)$ i dobiti $f(y-1) = \dfrac{y}{y-5}$.

Zadatak 7

Ako je $f(x) = \dfrac{3x-5}{x+3}$, koliko je $f^{-1}(1)$?

Zadatak 7

Ako je $f(x) = \dfrac{3x-5}{x+3}$, koliko je $f^{-1}(1)$?

Rješenje

Jedan način rješavanja je naći inverznu funkciju i uvrstiti 1. Primijetimo da ustvari ne moramo tražiti inverznu funkciju. Naime ako vrijedi $x = f^{-1}(1)$, tada je $f(x) = 1$. Znači tražimo x takav da je $f(x) = 1$ odnosno rješavamo jednadžbu $\dfrac{3x-5}{x+3} = 1$ i dobijemo $x = 4$.

Zadatak 8

Ako je $f(1+x) = (1-x)^2$, koliko je $f(1-x)$?

Zadatak 8

Ako je $f(1+x) = (1-x)^2$, koliko je $f(1-x)$?

Rješenje

Trebamo najprije odrediti $f(x)$. Stavimo li $y = 1 + x$ dobivamo $x = y - 1$ odnosno $f(y) = (1 - y + 1)^2 = (2 - y)^2$. Sada je $f(1-x) = (2 - 1 + x)^2 = (x+1)^2$.

Zadatak 9

Riješite nejednadžbu $f(x-3) > 3$ ako je $f(x+1) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Zadatak 9

Riješite nejednadžbu $f(x-3) > 3$ ako je $f(x+1) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Rješenje

Najprije moramo odrediti funkciju $f(x)$. Stavimo li $y = x+1$ (i $x = y-1$), dobivamo $f(y) = \dfrac{y}{y-2}$. Sada zadana nejednadžba $f(x-3) > 3$ prelazi u $\dfrac{x-3}{x-5} > 3$. Prebacivanjem broja 3 na lijevu stranu dobivamo

$$\frac{2(6-x)}{x-5} > 0.$$

Podjelom na slučajeve, vidimo da su izrazi $6-x$ i $x-5$ istog predznaka samo na intervalu $< 5, 6 >$ što je rješenje.

Linearna fukcija – definicije, primjer

Definicija

Linerna funkcija jedne varijable je funkcija oblika $f(x) = ax + b$. Graf linearne funkcije je pravac s koeficijentom smjera a i odsječkom b na y osi.

Linearna fukcija – definicije, primjer

Definicija

Linerna funkcija jedne varijable je funkcija oblika $f(x) = ax + b$. Graf linearne funkcije je pravac s koeficijentom smjera a i odsječkom b na y osi.

Primjer

Graf funkcije $f(x) = 2x + 3$ je pravac koji prolazi točkom $(0, 3)$ i koji ima nagib 2. Više o pravcima u poglavlju *Analitička geometrija*.

Kvadratna funkcija – definicije

Kvadratna funkcija

Kvadratna funkcija je funkcija oblika

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0).$$

Graf kvadratne funkcije je parabola okrenuta prema gore ako je $a > 0$, a prema dolje ako je $a < 0$.

Tjeme parabole ima koordinate (x_0, y_0) gdje je $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

Nultočke su rješenja pripadne kvadratne jednadžbe $f(x) = 0$, tj. $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Crtanje grafa kvadratne funkcije

Prilikom crtanja parabole, kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$ svođenjem na potpuni kvadrat zapisujemo u obliku

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Iz ovoga zapisa lako isčitamo tjeme parabole tj. točku $T(x_0, y_0)$. Sada još nađemo nultočke ili neke druge dvije točke parabole i možemo ju skicirati.

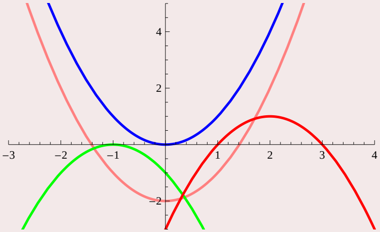
- Graf kvadratne funkcije oblika $f(x) = ax^2 + c$ je parabola s tjemenom na osi y i simetrična je s obzirom na os y.
- Graf funkcije $f(x) = ax^2$ je parabola s tjemenom u ishodištu.

Primjeri

Primjeri

Pogledajmo grafove sljedećih kvadratnih funkcija:

1. $f(x) = x^2$, $T(0,0)$
2. $g(x) = x^2 - 2$, $T(0,-2)$
3. $h(x) = -(x+1)^2$, $T(-1,0)$
4. $k(x) = -(x-2)^2 + 1$, $T(2,1)$.



Riješeni zadatci

Zadatak 10

Odredite tjeme sljedećih parabola:

(a) $y = x^2 + 6x + 8$, (b) $y = 2x^2 - 4x + 1$,

(c) $y = -x^2 + 4x + 2$

Rješenje.

Provodimo postupak svođenja na potpuni kvadrat.

(a) $y = x^2 + 6x + 8 = x^2 + 6x + 9 - 1 = (x + 3)^2 - 1$

Tjeme je $T(-3, -1)$.

(b)

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 4x + 1 = 2(x^2 - 2x) + 1 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 1 = 2(x - 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

Tjeme je $T(1, -1)$.

(c)

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2 + 4x + 2 = -(x^2 - 4x) + 2 = \\
&= -(x^2 - 4x + 4 - 4) + 2 = \\
&= -(x-2)^2 + 4 + 2 = -(x-2)^2 + 6
\end{aligned}
$$

Tjeme je $T(2, 6)$.

(c)

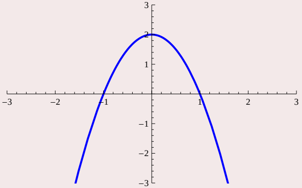
$$
\begin{aligned}
y = -x^2 + 4x + 2 &= -(x^2 - 4x) + 2 = \\
&= -(x^2 - 4x + 4 - 4) + 2 = \\
&= -(x-2)^2 + 4 + 2 = -(x-2)^2 + 6
\end{aligned}
$$

Tjeme je $T(2, 6)$.

Napomena. Naravno da tjeme možemo pronaći i korištenjem gotovih formula za koordinate tjemena, ako ih znamo.

Zadatak 11

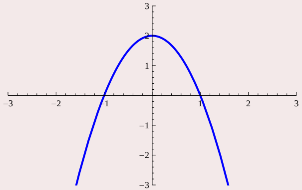
Želimo pronaći jednadžbu kvadratne funkcije čiji graf je zadan slikom:



Kako pronaći jednadžbu parabole zadane grafom?

Zadatak 11

Želimo pronaći jednadžbu kvadratne funkcije čiji graf je zadan slikom:

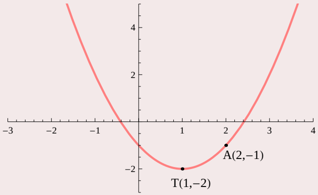


Rješenje.

Iz grafa vidimo da je tjeme u točki $T(0,2)$ na osi y pa je jednadžba oblika $f(x) = ax^2 + 2$. Uvrštavanjem nultočke $(1,0)$ dobijemo $a = -2$ te je $f(x) = -2x^2 + 2$.

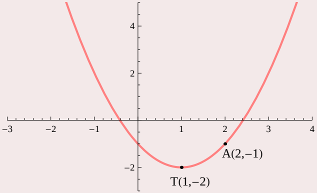
Zadatak 12

Pronađite jednadžbu kvadratne funkcije čiji graf je zadan slikom:



Zadatak 12

Pronađite jednadžbu kvadratne funkcije čiji graf je zadan slikom:



Rješenje.

Iz grafa vidimo da je tjeme u točki $T(1,-2)$ pa je jednadžba oblika $f(x) = a(x-1)^2 - 2$. Uvrštavanjem točke $A(2,-1)$ dobijemo $a = 1$ te je $f(x) = (x-1)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1$.

Zadatak 13

Pokažite da je funkcija $f(x) = 2 - x^2$ parna i da nije injekcija. Zadatak riješite grafički i računski. Razmislite da li postoji parna funkcija koja je injekcija.

Zadatak 13

Pokažite da je funkcija $f(x) = 2 - x^2$ parna i da nije injekcija. Zadatak riješite grafički i računski. Razmislite da li postoji parna funkcija koja je injekcija.

Rješenje

Grafički: ovo je kvadratna funkcija čiji graf je parabola simetrična s obzirom na os y s tjemenom u $T(0,2) \Rightarrow f$ nije injekcija i f je parna funkcija.
Računski: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2 - x_1^2 = 2 - x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow$ $x_1 = \pm x_2$ Sada zaključujemo da f nije injekcija jer postoje dva različita x-eva s istom vrijednosti funkcije. Vidimo da je $f(-x) = 2 - x^2 = f(x)$ te je f parna.

Zadatak 14

Odredite sliku funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Zadatak 14

Odredite sliku funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Rješenje

Budući da je graf kvadratne funkcije $g(x) = x^2 + 1$ parabola s tjemenom u $T(0, 1)$ okrenuta prema gore, jasno je da je slika ove kvadratne funkcije $\mathrm{Im}(g) = [1, +\infty\rangle$. Sada zbog $\frac{1}{\infty} = 0$ slijedi

$$g(x) \geq 1 \;\Rightarrow \frac{1}{g(x)} \leq 1;$$

$$g(x) < \infty \;\Rightarrow \; \frac{1}{g(x)} > 0.$$

Dakle, slika od $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ je $\mathrm{Im}(f) = \langle 0, 1]$.

Zadatak 15

Odredite skup vrijednosti tj. sliku funkcije $f(x) = \frac{2}{x^2-2x+3} + 1$.

Zadatak 15

Odredite skup vrijednosti tj. sliku funkcije $f(x) = \frac{2}{x^2-2x+3} + 1$.

Rješenje

Graf kvadratne funkcije $g(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ je parabola s tjemenom u $T(1,2)$ okrenuta prema gore te je jasno da je slika ove funkcije $\mathrm{Im}(g) = [2, \infty\rangle$. Sada iz $\infty > g(x) \geq 2$ ($\frac{2}{\infty} = 0$) slijedi da je

$$0 < \frac{2}{g(x)} \leq 1.$$

Primijetimo $f(x) = \frac{2}{g(x)} + 1$ te dodavanjem 1 cijeloj nejednakosti dobijemo $1 < f(x) = \frac{2}{g(x)} + 1 \leq 2$ odnosno slika od f je $\mathrm{Im}(f) = \langle 1, 2]$.

Literatura I

- Branimir Dakić, Neven Elezović,
  Matematika u 24 lekcije,
  Element, Zagreb, 2010.
- Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zavod za primijenjenu matematiku,
  Repetitorij elementarne matematike,
  Element, Zagreb, 2014.

Materijale pripremili:
doc.dr.sc. Domagoj Kovačević
doc.dr.sc. Lana Horvat Dmitrović