2. tjedan
Eksponencijalna i logaritamska funkcija, jednadžbe i nejednadžbe

ZPM - FER

7. rujna 2017.

Sadržaj

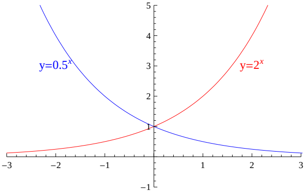
Eksponencijalna funkcija

Definicija

Eksponencijalna funkcija je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = a^x$$

gdje je $a \in \mathbb{R}, \ a > 0, \ a \neq 1$. Broj a zovemo baza eksponencijalne funkcije.



Slika: Graf eksponencijalne funkcije za $a < 1$ i $a > 1$.

Graf eksponencijalne funkcije

Iz grafa vidimo

- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$
- horizontalna asimptota: $y = 0$
- Graf siječe os y u točki $(0, 1)$! $(a^0 = 1, \forall a)$
- za $a > 1 \;\Rightarrow\; f$ strogo rastuća : $x < y \Rightarrow a^x < a^y$
- za $a < 1 \;\Rightarrow\; f$ strogo padajuća: $x < y \Rightarrow a^x > a^y$

Svojstva eksponencijalne funkcije

Svojstva

- $a^0 = 1,\ a^1 = a$
- $a^x a^y = a^{x+y}$ (množenje potencija)
- $(a^x)^y = a^{xy}$ (potenciranje potencija)
- $(a \cdot b)^x = a^x b^x$ (potencija umnoška)
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ (potencija kvocijenta)
- $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x,\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$ (negativni eksponenti)

Elementarna matematika

ZPM - FER

Eksponencijalna i logaritamska funkcija
Eksponencijalna funkcija
Logaritamska funkcija
Riješeni zadatci

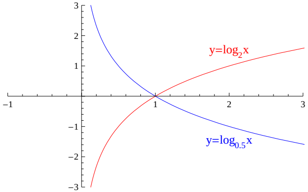
Eksponencijalne i logaritamske jednadžbe i nejednadžbe
Jednadžbe
Riješeni zadatci
Nejednadžbe
Riješeni zadatci

Definicija

Logaritamska funkcija je funkcija $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zadana s

$$g(x) = \log_a x$$

gdje je $a \in \mathbb{R},\ \ a > 0,\ \ a \neq 1$. Broj a zovemo baza logaritamske funkcije.



Slika: Graf logaritamske funkcije za $a < 1$ i $a > 1$.

Graf logaritamske funkcije

- Domena logaritamske funkcije su samo strogo pozitivni realni brojevi, odnosno

$$D_g = (0, +\infty).$$

- vertikalna asimptota: $x = 0$
- Graf prolazi točkom $(1, 0)$ tj. vrijedi $\log_a 1 = 0, \forall a$.
- za $a > 1 \;\Rightarrow\; g$ strogo rastuća: $x < y \Rightarrow \log_a(x) < \log_a(y)$
- za $a < 1 \;\Rightarrow\; g$ strogo padajuća:
  $x < y \Rightarrow \log_a(x) > \log_a(y)$
- Logaritamska funkcija $g(x) = \log_a x$ je inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$ te zato vrijedi

$$(f \circ g)(x) = x \text{ tj. } a^{\log_a x} = x,$$

$$(g \circ f)(x) = x \text{ tj. } log_a a^x = x$$

Svojstva logaritamske funkcije

Česte baze

- *dekadski* logaritam: $\log x := \log_{10} x$
- *prirodni* logaritam: $\ln x := \log_e x$

Svojstva logaritamske funkcije

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ (logaritam umnoška)
- $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$ (logaritam kvocijenta)
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$ (logaritam potencije)
- $\log_r a = \frac{\log_b a}{\log_b r}$ (promjena baze $b \to r$)

Ne vrijede sljedeće jednakosti:

- $\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$
- $\log_a(xy) \neq \log_a x \cdot \log_a y$
- $\log_a(\frac{x}{y}) \neq \frac{\log_a x}{\log_a y}$

Zadatak 1

Skicirajte graf funkcije $f(x) = 1 + 2\ln x$.

Riješeni zadatci

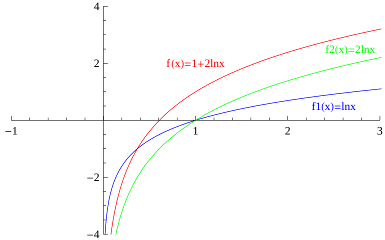
Zadatak 1

Skicirajte graf funkcije $f(x) = 1 + 2\ln x$.

Rješenje

Crtamo redom:

1. $f_1(x) = \ln x$
2. $f_2(x) = 2\ln x$ (1. $\Rightarrow$ 2. *skaliranje grafa s* 2)
3. $f_3(x) = 1 + 2\ln x$ (2. $\Rightarrow$ 3. *translacija grafa za* 1 *prema gore*)



Primijetimo:

- $f(1) = 1$;
- prirodna domena $D_f = \{x > 0\}$;
- vertikalna asimptota: $x = 0$
- nultočka: $1 + 2\ln x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Zadatak 2

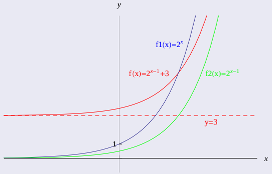
Odredite sliku funkcije $f(x) = 2^{x-1} + 3$.

Zadatak 2

Odredite sliku funkcije $f(x) = 2^{x-1} + 3$.

Rješenje

Zadatak možemo riješiti grafički i računski. Računski: Znamo da je $2^{x-1} > 0$ za svaki x pa slijedi da je $f(x) = 2^{x-1} + 3 > 3$ tj. $\mathrm{Im}(f) = (3, +\infty)$. Grafički: Redom skiciramo funkcije $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{x-1}$, $f_3(x) = 2^{x-1} + 3$, te iz grafa slijedi da je $\mathrm{Im}(f) = (3, +\infty)$.



Zadatak 3

(a) Izračunajte $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\log_{\sqrt{3}} 12 + 3\log_9 4}$.

(b) Ako je $a = \log 8$, koliko je $\log \sqrt[9]{5}$?

Zadatak 3

(a) Izračunajte $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\log_{\sqrt{3}} 12 + 3\log_9 4}$.

(b) Ako je $a = \log 8$, koliko je $\log \sqrt[9]{5}$?

Rješenje

(a) Koristimo svojstva potencija i dobivamo:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\log_{\sqrt{3}} 12 + 3\log_9 4} = 3^{\frac{\log_3 12}{\log_3 \sqrt{3}}} \cdot 3^{-3\frac{\log_3 4}{\log_3 9}} =$$

$$= 3^{2\log_3 12} \cdot 3^{-\frac{3}{2}\log_3 4} = 12^2 \cdot 4^{-3/2} = 18.$$

(b) Iz $\log 8 = \log 2^3 = a$ slijedi $\log 2 = \frac{a}{3}$.

$$\log \sqrt[9]{5} = \frac{1}{9}\log 5 = \frac{1}{9}\log\frac{10}{2} = \frac{1}{9}\log 10 - \frac{1}{9}\log 2 = \frac{1}{9} - \frac{a}{27}.$$

Eksponencijalne i logaritamske jednadžbe

Osnovni oblici jednadžbi

1. $a^x = b \mid \log_a()$
   $\Rightarrow \quad x = \log_a b$

2. $\log_a x = b \;\Big|\; a^{()}$
   $\Rightarrow \quad x = a^b$

Cilj kod rješavanja eksponencijalnih i logaritamskih jednadžbi je svođenje na osnovne oblike 1. i 2.!

Temeljni primjeri jednadžbi.

Primjeri eksponencijalnih jedn.

Pr 1.
$$2^x = 8$$
$$2^x = 2^3$$
$$x = 3$$

Pr 2.
$$2^x = 1$$
$$2^x = 2^0$$
$$x = 0$$

Pr 3.
$$2^x = 5 \quad |\log_2()$$
$$x = \log_2 5$$

Pr 4.
$$2^x = -4$$
Nema rješenja

jer je $2^x > 0$!

Primjeri logaritamskih jedn.

Primjer 1.
$$\begin{aligned} \ln x &= 8 \\ x &= e^8, \end{aligned}$$

Primjer 2.
$$\begin{aligned} \ln x &= -2 \\ x &= e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \end{aligned}$$

Primjer 3.
$$\begin{aligned} \ln x &= 0 \\ x &= e^0 = 1. \end{aligned}$$

Riješeni zadatci

Zadatak 4

Riješite jednadžbe:

(a) $2^{3x-1} = 32$

(b) $27^{2-x}\sqrt[3]{9^{2x+1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$

Riješeni zadatci

Zadatak 4

Riješite jednadžbe:

(a) $2^{3x-1} = 32$ (b) $27^{2-x}\sqrt[3]{9^{2x+1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$

Rješenje.

(a) $2^{3x-1} = 2^5 \Rightarrow 3x - 1 = 5 \Rightarrow x = 2$

(b) Lijevu i desnu stranu jedn. svodimo na istu bazu.

$$3^{3(2-x)}\ 3^{2(2x+1)\frac{1}{3}} = 3^{-x+4}$$

$$3^{6-3x+\frac{2}{3}(2x+1)} = 3^{4-x}$$

$$6 - 3x + \frac{2}{3}(2x+1) = 4 - x$$

$$x = 4$$

Zadatak 5

Riješite jednadžbu: $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$.

Zadatak 5

Riješite jednadžbu: $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$.

Rješenje

Supstitucijom $3^x = t$ dobijemo kvadratnu jednadžbu

$$3t^2 - 4t + 1 = 0.$$

Rješenja su $t_1 = 1$ i $t_2 = \frac{1}{3}$. Sada dobijemo jednadžbe

1. $3^x = 1 \Rightarrow x = 0$
2. $3^x = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow x = -1$

Zadatak 6

Riješite jednadžbu $4^x - 5 \cdot 6^x + 4 \cdot 9^x = 0$.

Zadatak 6

Riješite jednadžbu $4^x - 5 \cdot 6^x + 4 \cdot 9^x = 0$.

Rješenje.

Jednadžbu treba svesti na eksponencijalnu sa samo jednom bazom.

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{2x} = 0 \,\Big|: 3^{2x}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 4 = 0$$

Sada supstitucija $t = (\frac{2}{3})^x$ svodi jednadžbu na kvadratnu!

$$\Rightarrow \quad t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe su $t_1 = 4, \; t_2 = 1$.

Nastavak.

Sada vratimo supstituciju!
Rješenja polazne jednadžbe:
1. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 4 \Rightarrow x_1 = \log_{2/3} 4$
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow x_2 = 0$

Zadatak 7

Riješite jednadžbu $\log_8(\sqrt[3]{16}) = x$.

Nastavak.

Sada vratimo supstituciju!

Rješenja polazne jednadžbe:

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 4 \Rightarrow x_1 = \log_{2/3} 4$
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow x_2 = 0$

Zadatak 7

Riješite jednadžbu $\log_8(\sqrt[3]{16}) = x$.

Rješenje.

$$\log_8(\sqrt[3]{16}) = x \Rightarrow \sqrt[3]{16} = 8^x \Rightarrow 2^{\frac{4}{3}} = 2^{3x} \Rightarrow 3x = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{9}$$

Zadatak 8

Riješite jednadžbu $\log_2 x - \log_2(x+1) = 1 - \log_2 3$.

Zadatak 8

Riješite jednadžbu $\log_2 x - \log_2(x+1) = 1 - \log_2 3$.

Rješenje.

uvjeti: $x > 0$, $x + 1 > 0$

$$\begin{aligned}
\log_2 x - \log_2(x+1) &= 1 - \log_2 3 \\
\log_2\left(\frac{x}{x+1}\right) &= \log_2 \frac{2}{3} \\
\frac{x}{x+1} &= \frac{2}{3} \\
3x &= 2x + 2 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Početni uvjeti su zadovoljeni.

Zadatak 9

Odredite umnožak rješenja jednadžbe $3\log_2 x - 2\log_x 2 = 1$.

Zadatak 9

Odredite umnožak rješenja jednadžbe $3\log_2 x - 2\log_x 2 = 1$.

Rješenje

Bitno je uočiti da je $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$ (to se lako može dobiti koristeći formulu za promjenu baze). Stavimo li $y = \log_2 x$, dobivamo $3y - 2\frac{1}{y} = 1$ odnosno $3y^2 - y - 2 = 0$. Rješenja ove jednadžbe su $y_1 = 1$ i $y_2 = -\frac{2}{3}$ pa su rješenja zadane jednažbe $x_1 = 2$ i $x_2 = 2^{-\frac{2}{3}}$. Sada je umnožak rješenja

$$x_1 \cdot x_2 = 2^{1-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}.$$

Rješavanje nejednadžbi

- Ako na nejednakost djelujemo s rastućom funkcijom ($\nearrow$), tada znak nejednakosti ostaje isti.
- Ako na nejednakost djelujemo s padajućom funkcijom ($\searrow$), tada se znak nejednakosti mijenja.

Osnovni primjeri

Primjer 1. $\log_2 x > 3 \,\Big|\, 2^{()} \quad \nearrow$

$$\Rightarrow \quad x > 2^3$$

Primjer 2. $\ln x > -7 \,\Big|\, e^{()}$

$$\Rightarrow \quad x > e^{-7}$$

Primjer 3. $\log_{1/2} x > 2 \,\Big|\, (1/2)^{()} \searrow$

$$\Rightarrow \; x < 1/4$$

Primjer 4. $e^x > -1$

$$\Rightarrow \; \forall x$$

Primjer 5. $2^x < 8 \,|\log_2() \nearrow$

$$\Rightarrow x < \log_2 2^3$$
$$x < 3$$

Primjer 6. $(1/2)^x > 4 \,\Big|\log_{1/2}() \searrow$

$$\Rightarrow x < \log_{1/2}(1/2)^{-2}$$
$$x < -2$$

Zadatak 10

Riješite nejednadžbu: $0.4^x - 2.5^{x+1} > 1.5$.

Zadatak 10

Riješite nejednadžbu: $0.4^x - 2.5^{x+1} > 1.5$.

Rješenje

Nejednadžba se rješava svođenjem na kvadratnu nejednadžbu.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x - \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^x > \frac{3}{2}$$

Supstitucijom $t = (2/5)^x$ dobijemo

$$t - \frac{5}{2t} > \frac{3}{2}$$

$$\frac{2t^2 - 3t - 5}{2t} > 0$$

Nastavak.

Zato jer je nazivnik uvijek pozitivan tj. $t = (2/5)^x > 0$ ova nejednakost se svodi na kvadratnu nejednadžbu

$$2t^2 - 3t - 5 > 0.$$

Rješenje ove kvadratne nejednadžbe je $t < -1$ ili $t > 5/2$. Sada vratimo supstituciju. Prva nejednakost ne vrijedi niti za jedan x (zašto?), a iz druge dobivamo $(2/5)^x > 5/2 \Rightarrow (2/5)^x > (2/5)^{-1} \Rightarrow$ zbog $a < 1$ je $x < -1$ tj. $x \in (-\infty, -1)$.

Zadatak 11

Riješite nejednadžbu $6^{2x+3} < 2^{x+7} \cdot 3^{3x-1}$.

Zadatak 11

Riješite nejednadžbu $6^{2x+3} < 2^{x+7} \cdot 3^{3x-1}$.

Rješenje

Lijevu stranu zapišemo kao $6^{2x+3} = 2^{2x+3}3^{2x+3}$ te dobivamo

$$2^{2x+3} \cdot 3^{2x+3} < 2^{x+7} \cdot 3^{3x-1.}$$

Sada podijelimo nejednadžbu s lijevom stranom te dobivamo $1 < \left(\frac{3}{2}\right)^{x-4}$ odnosno $\left(\frac{3}{2}\right)^{0} < \left(\frac{3}{2}\right)^{x-4}$. Zbog $\frac{3}{2} > 1$ slijedi da je rješenje $x - 4 > 0$ odnosno $x \in \langle 4, +\infty\rangle$.

Zadatak 12

Riješite nejednadžbu $\log_{1/2}\sqrt{x-4} > \log_{1/2} 3$.

Zadatak 12

Riješite nejednadžbu $\log_{1/2}\sqrt{x-4} > \log_{1/2} 3$.

Rješenje

Uvjeti domene $x \in (4, +\infty)$

$$\log_{1/2}\sqrt{x-4} > \log_{1/2} 3 \quad \Big| (1/2)^{()}$$

$$\sqrt{x-4} < 3 \,\Big|\, ()^2$$

(smijemo kvadrirati jer obje strane pozitivne!)

$$x - 4 < 9$$

$$x < 13.$$

Presjek s domenom nam daje rješenje: $x \in (4, 13)$.

Grafičko rješavanje jednadžbi

Primijenjuje se kod jednadžbi koje ne znamo eksplicitno riješiti niti pojednostavniti! Grafičko rješavanje jednadžbi znači crtanje grafova funkcija koje se nalaze u jednadžbi te traženje presjeka na slici.

Zadatak 13

Odredite broj rješenja jednadžbe $2^x = 8 - x$, te interval $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, u kojem leže rješenja!

Grafičko rješavanje jednadžbi

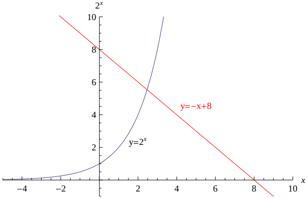
Primijenjuje se kod jednadžbi koje ne znamo eksplicitno riješiti niti pojednostavniti! Grafičko rješavanje jednadžbi znači crtanje grafova funkcija koje se nalaze u jednadžbi te traženje presjeka na slici.

Zadatak 13

Odredite broj rješenja jednadžbe $2^x = 8 - x$, te interval $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, u kojem leže rješenja!

Rješenje

Crtamo grafove funkcija $f(x) = 2^x$ i $g(x) = -x + 8$, te procjenjujemo gdje leže točke presjeka!



Procjena točke presjeka:

Iz slike slijedi da postoji točno jedna točka presjeka x^* koju ne znamo eksplicitno izračunati, ali možemo ocijeniti. Uvrštavamo redom $x = 1, 2, 3, \ldots$:

$$f(1) = 2 < g(1) = 7, \;\; f(2) = 4 < g(2) = 6,$$

$$f(3) = 8 > g(3) = 5$$

pa slijedi da je $x^* \in (2, 3)$.

Literatura I

- Branimir Dakić, Neven Elezović,
  Matematika u 24 lekcije,
  Element, Zagreb, 2010.
- Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zavod za primijenjenu matematiku,
  Repetitorij elementarne matematike,
  Element, Zagreb, 2014.

Materijale pripremila: dr.sc. Maja Resman