Elementarna matematika

Zavod za primijenjenu matematiku (ZPM)

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci

Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma

Literatura

1. tjedan
Algebarski izrazi. Polinomi.

Zavod za primijenjenu matematiku (ZPM)

srpanj, 2017

Sadržaj

1 Algebarski izrazi
- Operacije i skraćivanje
- Dvojni razlomak
- Formule
- Racionalizacija nazivnika
- Riješeni zadatci

2 Polinomi
- Definicija i primjeri
- Dijeljenje polinoma
- Faktorizacija polinoma
- Traženje nultočaka polinoma

3 Literatura

Algebarski izrazi

Definicija

Algebarski izrazi su izrazi koji sadrže konstante i varijable na koje se primjenjuju operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Označavat ćemo ih velikim štampanim slovima A, B i C.

Algebarski izrazi

Definicija

Algebarski izrazi su izrazi koji sadrže konstante i varijable na koje se primjenjuju operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Označavat ćemo ih velikim štampanim slovima A, B i C.

Primjeri

$$A = x - 1, \quad B = \frac{x+1}{x^2-1} + x + 1, \quad C = \frac{\frac{\frac{x+1}{x^2+1}}{x}}{x-1} + \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} + 3$$

Operacije s algebarskim izrazima

- $\frac{A}{C} \pm \frac{B}{C} = \frac{A \pm B}{C}$
- $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$
- $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$

Operacije s algebarskim izrazima

- $\dfrac{A}{C} \pm \dfrac{B}{C} = \dfrac{A \pm B}{C}$
- $\dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{C}{D} = \dfrac{A \cdot C}{B \cdot D}$
- $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \dfrac{A}{B} : \dfrac{C}{D} = \dfrac{A \cdot D}{B \cdot C}$

Primjeri

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x},$$

$$\frac{x-4}{2} = \frac{x}{2} - 2$$

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x-2}{x+1} = \frac{x(x-2)}{2(x+1)}$$

Elementarna matematika
Zavod za primijenjenu matematiku (ZPM)
Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci
Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma
Literatura

Skraćivanje algebarskih izraza

U zadacima se često zahtijeva da se zadani izraz pojednostavi. To znači da neke dijelove kratimo. Dozvoljene su dvije vrste kraćenja:

$$A + B - B = A \quad \text{i} \quad \frac{AB}{CB} = \frac{A}{C}$$

gdje A, B, i C predstavljaju algebarske izraze.

Skraćivanje algebarskih izraza

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci
Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma
Literatura

U zadacima se često zahtijeva da se zadani izraz pojednostavi. To znači da neke dijelove kratimo. Dozvoljene su dvije vrste kraćenja:

$$A + B - B = A \quad \text{i} \quad \frac{AB}{CB} = \frac{A}{C}$$

gdje A, B, i C predstavljaju algebarske izraze.

Primjeri

$$1 + x - 1 = x$$

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x - 1$$

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci
Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma
Literatura

Pazi!

Spomenimo da sljedeća kraćenja nisu dozvoljena:

$$\frac{3+x}{4+x} \neq \frac{3}{4}, \qquad \frac{x^2+x+1}{x+1} \neq x^2, \qquad (x+1)(x^2+1)-x \neq x^2+1.$$

Pazi!

Spomenimo da sljedeća kraćenja nisu dozvoljena:

$$\frac{3+x}{4+x} \neq \frac{3}{4}, \quad \frac{x^2+x+1}{x+1} \neq x^2, \quad (x+1)(x^2+1)-x \neq x^2+1.$$

Pazi!

Spomenimo da sljedeća sređivanja algebarskih izraza nisu dozvoljena:

$$\frac{3}{4+x} \neq \frac{3}{4} + \frac{3}{x}, \quad \frac{x^2+1}{x+1} \neq \frac{x^2}{x} + \frac{1}{1}$$

Sređivanje dvojnog razlomka

Dvojni razlomak se sređuje formulom: $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$.

Primjer 1

(a) $\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x^2-2x}{x^2-4}} = \frac{x(x^2-4)}{x(x+2)(x-2)} = 1$

(b) $\frac{x}{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{\frac{x}{1}}{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{x(x+1)}{x-2}$

(c) $\frac{2x}{\frac{x}{x^2+1}} = \frac{2x(x^2+1)}{x} = 2(x^2+1)$

(d) $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x^2+2x}} = \frac{x^2+2x}{x(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$

Napomena. Algebarski izraz je dobro definiran ako mu nazivnik nije jednak nuli. Kod skraćivanja izraza se taj uvjet može promijeniti. To nam je posebno važno u situacijama kada su algebarski izrazi funkcije u varijabli x.

Primjer 2

Promotrimo funkciju $f(x) = \frac{(x^3+x^2+x)(x+1)}{x^7-x}$.

Skraćivanjem gornjeg razlomka dobijemo izraz

$$\frac{1}{(x^2-x+1)(x-1)}.$$

Primijetimo da je domena funkcije f jednaka $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$, a domena izraza dobivenog skraćivanjem je $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. To će nam biti važno kod rješavanja jednadžbi.

Potencije i korijeni

1. $a^0 = 1$
2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
3. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
4. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
5. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
6. $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$
7. $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
8. $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$
9. $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{n}{m}}$

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci
Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma
Literatura

Faktorizacija

1. $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n$
   1. $n = 2,\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   2. $n = 2,\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   3. $n = 3,\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
   4. $n = 3,\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
2. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
3. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
4. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
5. $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = (a^2 + b^2)(a-b)(a+b)$

Racionalizacija nazivnika

Racionalizacija nazivnika je postupak kojim se rješavamo korijena u nazivniku na način da brojnik i nazivnik množimo odgovarajućim izrazom.

Racionalizacija nazivnika

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci
Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma
Literatura

Racionalizacija nazivnika je postupak kojim se rješavamo korijena u nazivniku na način da brojnik i nazivnik množimo odgovarajućim izrazom.

Primjer 3

(a) Primijenimo formulu za razliku kvadrata :

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

(b) Primijenimo formulu za zbroj kubova:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1} = \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}$$

Riješeni zadatci

Elementarna matematika

Zavod za primijenjenu matematiku (ZPM)

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci

Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma

Literatura

Zadatak 1

Izračunati $3+\dfrac{2}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}$.

Riješeni zadatci

Zadatak 1

Izračunati $3+\dfrac{2}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}$.

Rješenje

$$3+\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}}=3+\sqrt{2}-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}}=$$

$$=3+\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\,\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}=3+\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}=$$

$$=1+(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}.$$

Zadatak 2

Pojednostavi izraz $\dfrac{a-2b}{a^3+b^3} - \dfrac{a-b}{a^2b-ab^2+b^3} - \dfrac{1}{ab+b^2}$.

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci
Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma
Literatura

Zadatak 2

Pojednostavi izraz $\dfrac{a-2b}{a^3+b^3} - \dfrac{a-b}{a^2b-ab^2+b^3} - \dfrac{1}{ab+b^2}$.

Rješenje

$$\frac{a-2b}{a^3+b^3} - \frac{a-b}{a^2b-ab^2+b^3} - \frac{1}{ab+b^2} =$$

$$= \frac{(a-2b)b}{(a+b)(a^2-ab+b^2)b} - \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)b} -$$

$$\frac{a^2-ab+b^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)b} =$$

$$= \frac{ab-2b^2-a^2+b^2-a^2+ab-b^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)b} = \frac{-2a^2+2ab-2b^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)b} =$$

$$-\frac{2}{(a+b)b}.$$

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci
Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma
Literatura

Zadatak 3

Izračunati $\left[\dfrac{(3/2)^{-3}+(2/3)^{-2}}{(3/2)^{-2}+(2/3)^{-3}}\right]^{-1}\cdot\left[\dfrac{(4/3)^{-4}+(3/4)^{-3}}{(4/3)^{-3}+(3/4)^{-4}}\right]^{-1}.$

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci
Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma
Literatura

Zadatak 3

Izračunati $\left[\dfrac{(3/2)^{-3}+(2/3)^{-2}}{(3/2)^{-2}+(2/3)^{-3}}\right]^{-1}\cdot\left[\dfrac{(4/3)^{-4}+(3/4)^{-3}}{(4/3)^{-3}+(3/4)^{-4}}\right]^{-1}$.

Rješenje

$$\left[\frac{(3/2)^{-3}+(2/3)^{-2}}{(3/2)^{-2}+(2/3)^{-3}}\right]^{-1}\cdot\left[\frac{(4/3)^{-4}+(3/4)^{-3}}{(4/3)^{-3}+(3/4)^{-4}}\right]^{-1}=$$

$$=\frac{4/9+27/8}{8/27+9/4}\cdot\frac{27/64+256/81}{81/256+64/27}=$$

$$=\frac{\dfrac{2^5+3^5}{2^3 3^2}}{\dfrac{2^5+3^5}{2^2 3^3}}\cdot\frac{\dfrac{2^{14}+3^{14}}{2^6 3^4}}{\dfrac{2^{14}+3^{14}}{2^8 3^3}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2^2}{3}=2.$$

Zadatak 4

Pojednostavite izraz

$$\left(a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{1}{2}}+1\right)-\left(a-a^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}-1\right)$$

Zadatak 4

Pojednostavite izraz

$$\left(a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{1}{2}}+1\right)-\left(a-a^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}-1\right)$$

Rješenje

Uočimo da možemo koristiti formulu za razliku kvadrata:

$$a^3-\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^2-\left(a^2-\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^2\right)=a^3-a^2=a^2(a-1).$$

Polinomi

Definicija

Polinom (u jednoj nepoznanici, x) je izraz oblika

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0).$$

- polinome označavamo velikim štampanim slovima P, Q
- n je **stupanj** polinoma (pišemo $\mathrm{st}(P) = n$),
- realni brojevi $a_n, \ldots, a_1, a_0$ se zovu **koeficijenti** polinoma,
- izrazi $a_n x^n, \ldots, a_1 x, a_0$ su članovi polinoma
- članove pišemo u padajućem poretku potencija

Elementarna matematika

Zavod za primijenjenu matematiku (ZPM)

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci

Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma

Literatura

Primjeri polinoma

1. $P(x) = 4x^6 - 2x^4 + 5x - 7$ je polinom stupnja 6 s koeficijentima: $a_6 = 4$, $a_5 = a_3 = a_2 = 0$, $a_4 = -2$, $a_1 = 5$ i $a_0 = -7$.
2. $Q(x) = 2x^7 + x^3$ je polinom stupnja 7 s koeficijentima: $a_7 = 2$, $a_3 = 1$, ostali koeficijenti su jednaki 0

Nultočke polinoma

Nultočka polinoma je $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$P(x) = 0.$$

Nultočke polinoma

Nultočka polinoma je $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$P(x) = 0.$$

Primjer 4.

Nultočke polinoma $P(x) = x^2 - 3x + 2$ su rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 3x + 2 = 0$. Dakle, 1 i 2 su nultočke polinoma P jer je $P(1) = 0$ i $P(2) = 0$.

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci

Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma

Literatura

Jednakost polinoma

Dva polinoma su **jednaka** ako imaju isti stupanj i jednake koeficijente uz odgovarajuće potencije.

Jednakost polinoma

Dva polinoma su **jednaka** ako imaju isti stupanj i jednake koeficijente uz odgovarajuće potencije.

Primjer 5.

Odredite a i b tako da su polinomi $P(x) = 2x^3 + x - 1$ i $Q(x) = ax^3 + (b-2)x - 1$ jednaki.

Jednakost polinoma

Dva polinoma su **jednaka** ako imaju isti stupanj i jednake koeficijente uz odgovarajuće potencije.

Primjer 5.

Odredite a i b tako da su polinomi $P(x) = 2x^3 + x - 1$ i $Q(x) = ax^3 + (b-2)x - 1$ jednaki.

Rješenje.

Dakle, iz jednakosti polinoma slijedi da koeficijenti uz iste potencije moraju biti jednaki te dobivamo $a = 2$ i $b - 2 = 1$ odnosno $b = 3$.

Elementarna matematika

Zavod za primijenjenu matematiku (ZPM)

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci

Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma

Literatura

Zadatak 5

Odredite zbroj koeficijenata polinoma

$$P(x) = (x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 4x + 3)^2 (x^2 + 3x - 3).$$

Zadatak 5

Odredite zbroj koeficijenata polinoma

$$P(x) = (x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 4x + 3)^2 (x^2 + 3x - 3).$$

Rješenje

Zadatak se može riješiti "uporabom grube sile" odnosno kvadriranjem i množenjem polinoma, no postoji i elegantniji način. Zbroj koeficijenata polinoma $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ je jednak vrijednosti polinoma za $x = 1$ odnosno $P(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$. Dobivamo

$$P(1) = 15^2 \cdot 1 = 225.$$

Nevjernim čitateljima preporučujemo prvi način.

Dijeljenje polinoma

Elementarna matematika

Zavod za primijenjenu matematiku (ZPM)

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci

Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma

Literatura

Dijeljenje polinoma A polinomom B

Neka su $A(x)$ i $B(x)$ polinomi takvi da je stupanj polinoma $\mathrm{st}(A) \geq \mathrm{st}(B)$. Dijeljenje polinoma prikazujemo pomoću formule

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}, \quad \mathrm{st} R < \mathrm{st} B.$$

Polinom Q je rezultat dijeljenja polinoma A i B, a polinom R je ostatak dijeljenja. Ako je $R(x) = 0$, tada je polinom A djeljiv s polinomom B odnosno postoji Q tako da je

$$A(x) = B(x)Q(x).$$

Primjer 6.

Podijelite polinom $A(x) = 3x^5 - 5x^4 - 3x + 1$ s polinomom $B(x) = x^2 - x - 1$.

Primjer 6.

Podijelite polinom $A(x) = 3x^5 - 5x^4 - 3x + 1$ s polinomom $B(x) = x^2 - x - 1$.

Rješenje.

Prvo dijelimo vodeće članove polinoma tj. $3x^5 : x^2 = 3x^3$, te rezultat $3x^3$ pomnožimo sa cijelim polinomom B i potpišemo ispod polinoma A tako da su članovi s istim potencijama jedan ispod drugog. Sada ih oduzmemo od polinoma A i na rezultatu ponovimo postupak odnosno podijelimo vodeće članove tj. $-2x^4 : x^2 = -2x^2$. Postupak ponavljamo sve dok ne dobijemo ostatak stupnja manjeg od $\mathrm{st}(B) = 2$. Ilustracija postupka je na sljedećem slajdu.

Nastavak.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(3x^5 & -5x^4 & & & -3x & +1) : (x^2 - x - 1) = {\color{red}3x^3} {\color{blue}-2x^2} {\color{green}+x} - 1 \\
{\color{red}\pm 3x^5} & {\color{red}\mp 3x^4} & {\color{red}\mp 3x^3} & & & \\
\hline
 & -2x^4 & +3x^3 & & -3x & \\
 & {\color{blue}\mp 2x^4} & {\color{blue}\pm 2x^3} & {\color{blue}\pm 2x^2} & & \\
\hline
 & & x^3 & -2x^2 & -3x & +1 \\
 & & {\color{green}\pm x^3} & {\color{green}\mp x^2} & {\color{green}\mp x} & \\
\hline
 & & & -x^2 & -2x & +1 \\
 & & & \mp x^2 & \pm x & \pm 1 \\
\hline
 & & & & -3x & (\mathit{ostatak})
\end{array}
$$

Dakle, dijeljenjem $A(x) = 3x^5 - 5x^4 - 3x + 1$ i $B(x) = x^2 - x - 1$ kao rezultat dobijemo polinom $Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$, a kao ostatak polinom $R(x) = -3x$ odnosno pišemo

$$\frac{3x^5 - 5x^4 - 3x + 1}{x^2 - x - 1} = 3x^3 - 2x^2 + x - 1 + \frac{-3x}{x^2 - x - 1}.$$

Primjer 7.

Odredimo ostatak prilikom dijeljenja polinoma $A(x) = x^{100} - x + 2$ sa polinomom $B(x) = x^2 - 1$.

Primjer 7.

Odredimo ostatak prilikom dijeljenja polinoma $A(x) = x^{100} - x + 2$ sa polinomom $B(x) = x^2 - 1$.

Rješenje.

Najprije napišemo $x^{100} - x + 2 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$ jer je stupanj od $R(x)$ jednak $1 < 2 = \mathrm{st}(B)$. Sada u jednadžbu uvrštavamo nultočke polinoma $x^2 - 1$. Tako uvrštavanjem $x = 1$ dobijemo $a + b = 2$, a uvrstimo li $x = -1$ dobivamo $-a + b = 4$. To nam daje $a = -1$ i $b = 3$ pa je $R(x) = -x + 3$. Uvrstili smo nultočke od $x^2 - 1$ jer tada $Q(x)$, koji ne znamo, množimo s 0 pa bez obzira na oblik od $Q(x)$ množenjem s 0 dobivamo 0.

Faktorizacija polinoma

Ako je x_0 nultočka polinoma P, tada je on djeljiv s polinomom $x - x_0$ odnosno možemo ga zapisati u obliku

$$P(x) = (x - x_0)Q_1(x)$$

gdje je $\mathrm{st}(Q_1) = \mathrm{st}(P) - 1$. Primijetimo da su nultočke od Q_1 ujedno i nultočke od P. Nultočka x_0 ima kratnost k ako vrijedi

$$P(x) = (x - x_0)^k Q(x).$$

Ovu proceduru možemo nastaviti i dobivamo

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)Q_k(x).$$

Zadatak 6

Ako je polinom $p(x) = x^2 + ax + 3$ djeljiv s $q(x) = x - 1$, koliko je a?

Zadatak 6

Ako je polinom $p(x) = x^2 + ax + 3$ djeljiv s $q(x) = x - 1$, koliko je a?

Rješenje

Možemo pisati $x^2 + ax + 3 = (x-1)Q(x)$ za neki polinom $Q(x)$ koji je stupnja 1 (npr. $Q(x) = bx + c$). Sada uvrstimo $x = 1$ i dobivamo $a + 4 = 0$ pa je $a = -4$.

Traženje nultočaka polinoma

Elementarna matematika

Zavod za primijenjenu matematiku (ZPM)

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci

Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma

Literatura

Ako je x cjelobrojna nultočka polinoma s cjelobrojnim koeficijentima $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, tada je x djeljitelj slobodnog člana a_0.

Traženje nultočaka polinoma

Elementarna matematika

Zavod za primijenjenu matematiku (ZPM)

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci

Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma

Literatura

Ako je x cjelobrojna nultočka polinoma s cjelobrojnim koeficijentima $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, tada je x djeljitelj slobodnog člana a_0.

Metoda za traženje nultočki polinoma

- pronaći djeljitelje slobodnog člana a_0
- naći koji je od njih nultočka polinoma i označimo ga s x_1
- zadani polinom podijeliti s izrazom $x - x_1$ te mu tako smanjiti stupanj
- ponoviti postupak na polinomu nižeg stupnja

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci
Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma
Literatura

Primjer 8.

Odredite nultočke polinoma $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$.

Primjer 8.

Odredite nultočke polinoma $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$.

Rješenje.

Slobodni član je $a_0 = 1$ pa su cjelobrojni kandidati ± 1. Vidimo da je $x_1 = 1$ nultočka pa polinom podijelimo s $x - 1$ i dobivamo $x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x - 1)(x^2 - 2x - 1)$. Preostale dvije nultočke dobivamo rješavanjem kvadratne jednadžbe $x^2 - 2x - 1 = 0$ i dobivamo $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$. Također, početni polinom se može pisati u obliku
$P(x) = (x - 1)(x - (1 + \sqrt{2})(x - (1 - \sqrt{2}))$.

Algebarski izrazi
Operacije i skraćivanje
Dvojni razlomak
Formule
Racionalizacija nazivnika
Riješeni zadatci
Polinomi
Definicija i primjeri
Dijeljenje polinoma
Faktorizacija polinoma
Traženje nultočaka polinoma
Literatura

Zadatak 7

Odredite nultočke polinoma $P(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x + 10$.

Zadatak 7

Odredite nultočke polinoma $P(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x + 10$.

Rješenje.

Slobodni koeficijent je $a_0 = 10$ pa su njegovi djeljitelji ± 1, ± 2, ± 5 i ± 10. Broj 1 nije nultočka, ali -1 jest. Možemo nastaviti s uvrštavanjem, ali možemo i podijeliti polinom $P(x)$ sa polinomom $(x - (-1)) = x + 1$ (znamo da je ostatak 0) i tako spustiti stupanj polinoma. Nakon dijeljenja dobijemo

$$P(x) : (x + 1) = Q_1(x) = x^3 - 4x^2 - x + 10.$$

Sada trebamo faktorizirati polinom $Q_1(x)$. Slobodni član dobivenog polinoma je isti kao od $P(x)$ pa isprobavamo iste brojeve.

Nastavak rješenja.

Sada dobivamo da je 2 nultočka od Q_1 pa $Q_1(x)$ dijelimo sa $x-2$. Dobivamo $Q_1(x)=(x-2)(x^2-2x-5)$. Polinom $Q_2(x)=x^2-2x-5$ nema cjelobrojne nultočke ($\pm1, \pm5$ nisu nultočke), ali je polinom drugog stupnja, pa nultočke nalazimo kvadratnom formulom. Dakle,
$P(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x-5)$ i njegove nultočke su -1, 2 i $1\pm\sqrt{6}$. Lako se vidi da vrijedi i faktorizacija

$$P(x)=(x+1)(x-2)(x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6}).$$

Zadatak 8

Polinom $P(x) = 2x^3 + ax^2 + b$ ima nultočke $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$. Koliko iznosi suma svih nultočki tog polinoma?

Zadatak 8

Polinom $P(x) = 2x^3 + ax^2 + b$ ima nultočke $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$. Koliko iznosi suma svih nultočki tog polinoma?

Rješenje.

Prvo nađemo koeficijente a i b iz činjenice da su dane dvije nultočke polinoma odnosno $P(-1) = 0$ i $P(2) = 0$. Dobijemo sustav $-2 + a + b = 0$ i $16 + 4a + b = 0$ koji lako riješimo i dobijemo $a = -6$ i $b = 8$.
Sada znamo da se polinom $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8$ može faktorizirati u obliku

$$P(x) = 2(x+1)(x-2)(x-x_0)$$

gdje je x_0 treća nultočka polinoma koju još trebamo naći.

Nastavak rješenja.

Iz faktorizacije vidimo da nultočku x_3 možemo naći dijeljenjem polinoma $P(x)$ s izrazom $2(x+1)(x-2) = 2x^2 - 2x - 4$. Rezultat dijeljenja je izraz $x - 2$ odnosno $x_3 = 2$ je tražena nultočka polinoma.

Suma svih nultočki je sada

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1 + 2 + 2 = 3.$$

Literatura I

- Branimir Dakić, Neven Elezović,
  Matematika u 24 lekcije,
  Element, Zagreb, 2010.

- Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zavod za primijenjenu matematiku,
  Repetitorij elementarne matematike,
  Element, Zagreb, 2014.

Materijale pripremio: doc.dr.sc. Domagoj Kovačević