1. tjedan
Jednadžbe i nejednadžbe. Apsolutna vrijednost.

Zavod za primijenjenu matematiku (ZPM)

kolovoz, 2017

Sadržaj

Algebarske jednadžbe

Definicija

Algebarska jednadžba je izraz oblika

$$A = 0$$

gdje je A algebarski izraz u varijabli x. Rješenje jednadžbe su realni brojevi x za koje vrijedi jednakost. U slučaju da je zadano $A = B$, možemo pisati $A - B = 0$.

Algebarske jednadžbe

Definicija

Algebarska jednadžba je izraz oblika

$$A = 0$$

gdje je A algebarski izraz u varijabli x. Rješenje jednadžbe su realni brojevi x za koje vrijedi jednakost. U slučaju da je zadano $A = B$, možemo pisati $A - B = 0$.

Primjeri algebarskih jednadžbi

1. $x^2 - 3x + 2 = 0;$
2. $x^4 - 2x^2 = x + 1,$
3. $\frac{x+1}{x-2} = 2,$
4. $\frac{1}{x-5} = 1$

Rješavanje jednadžbe $A = 0$ faktorizacijom

Ako se izraz A može faktorizirati u obliku $A = BC$, tada se rješavanje jednadžbe $A = 0$ svodi na dva slučaja:

$$BC = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \text{ ili } C = 0.$$

Rješavanje jednadžbe $A = 0$ faktorizacijom

Ako se izraz A može faktorizirati u obliku $A = BC$, tada se rješavanje jednadžbe $A = 0$ svodi na dva slučaja:

$$BC = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \text{ ili } C = 0.$$

Primjeri

1. Faktorizacijom jednadžbe $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ dobijemo $(x-2)(x^2-1) = 0$. Slijedi da je $x - 2 = 0$ ili $x^2 - 1 = 0$, te su rješenja $x_1 = 2$, $x_{2,3} = \pm 1$.
2. Jednadžbu $x^2 - 5x = -6$, najprije je napišemo u obliku $x^2 - 5x + 6 = 0$ pa riješimo kvadratnu jednadžbu i dobijemo $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$.

Jednadžba oblika $\frac{A}{B} = 0$

Jednadžbu $\dfrac{A}{B} = 0$ rješavamo tako da riješimo jednadžbu $A = 0$ i gledamo samo ona rješenja za koja je $B \neq 0$. Opet je bitno naglasiti da na desnoj strani moramo imati 0. Dakle,

$$\frac{A}{B} = 0 \;\Rightarrow\; A = 0 \text{ uz uvjet } B \neq 0.$$

Uvjet $B \neq 0$ znači da je domena rješenja jednadžbe skup svih realnih brojeva za koje $B \neq 0$. Taj uvjet se mora odrediti kod svih jednadžbi s nazivnikom.

Primjeri

1. Rješenja jednadžbe $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} = 0$ su 1 i 2.
2. Rješenje jednadžbe $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)} = 0$ je broj $x = 1$, dok $x = 2$ nije rješenje jer je ujedno i nultočka nazivnika.

Zadatak 1

Riješite jednadžbu $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0.$

Zadatak 1

Riješite jednadžbu $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0$.

Rješenje

Jednadžbu trebamo faktorizirati odnosno izlučimo x:

$$x(x^3 + 2x^2 - x - 2) = 0$$

te sada tražimo nultočke polinoma 3. stupnja. Djeljitelji od -2 su ± 1 i ± 2. Dobijemo da su nultočke: 1, -1 i -2, odnosno faktorizacija jednadžbe glasi

$$x(x-1)(x+1)(x+2) = 0$$

pa su rješenja $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$, $x_4 = -2$.

Zadatak 2

Riješite jednadžbu:

$$\frac{4}{x} - \frac{5}{x - x^2} = \frac{9}{2x - 2}.$$

Zadatak 2

Riješite jednadžbu:

$$\frac{4}{x} - \frac{5}{x - x^2} = \frac{9}{2x - 2}.$$

Rješenje

Uvjeti zbog nazivnika: $x \neq 0$, $x \neq 1$.
Pomnožimo jednakost s zajedničkim nazivnikom $2x(x-1)$ i dobijemo

$$8(x-1) + 10 = 9x$$

iz čega slijedi da je rješenje $x = 2$. Primijetimo da ono zadovoljava početne uvjete.

Kvadratna jednadžba

Kvadratna jednadžba

Kvadratna jednadžba je jednadžba oblika

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Rješenja (korijeni, nultočke) kvadratne jednadžbe su dana formulom

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Faktorizacija kvadratne jednadžbe glasi:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Diskriminanta

Diskriminanta kvadratne jednadžbe je izraz pod korijenom

$$D = b^2 - 4ac$$

i ona nam govori o prirodi rješenja kvadratne jednadžbe:

- $D > 0$: jednadžba ima 2 različita realna rješenja;
- $D = 0$: jednadžba ima dvostruko realno rješenje;
- $D < 0$: jednadžba ima dva konjugirano kompleksna rješenja

Primjer 1.

Rješenja jednadžbe

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

su $x_1 = \dfrac{5 + \sqrt{5^2 - 16}}{4} = 2,\ x_2 = \dfrac{5 - \sqrt{5^2 - 16}}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Kada imamo nultočke, lako se napravi faktorizacija jer je

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Sada dobivamo

$$2x^2 - 5x + 2 = 2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-2)(2x-1).$$

Zadatak 3

Za koji realni broj a kvadratna jednadžba $ax(x+1)+2=2x(a+x)$ ima realna rješenja?

Zadatak 3

Za koji realni broj a kvadratna jednadžba $ax(x+1)+2=2x(a+x)$ ima realna rješenja?

Rješenje

Kvadratna jednadžba ima oblik $(a-2)x^2-ax+2=0$ pa je diskriminanta jednadžbe jednaka

$$D=a^2-8(a-2)=a^2-8a+16=(a-4)^2.$$

Vidimo da je $D\geq 0$ za sve $a\in\mathbb{R}$ jer je kvadrat uvijek pozitivan broj. Dakle za $a\in\mathbb{R}$ su sva rješenja realna. Primijetimo da za $a=4$ jednadžba ima jedno rješenje, a inače dva.

Vièteove formule

Vièteove formule povezuju rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ s koeficijentima a, b i c.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Zadatak 4

Za koji realni broj k je zbroj rješenja kvadratne jednadžbe $k(x^2 - 1) = x^2 - 4x$ jednak umnošku njezinih rješenja?

Zadatak 4

Za koji realni broj k je zbroj rješenja kvadratne jednadžbe $k(x^2-1)=x^2-4x$ jednak umnošku njezinih rješenja?

Rješenje

Kvadratna jednadžba ima oblik $(k-1)x^2+4x-k=0$. Iz zadanog uvjeta

$$x_1+x_2=x_1x_2$$

i Vièteoveovih formula slijedi da je $c=-b$ pa dobivamo $-4=-k$ odnosno $k=4$.

Zadatak 5

Za rješenja x_1 i x_2 jednadžbe $x^2 + 4x + p = 0$ vrijedi $x_1 = x_2 + 1$. Koliki je parametar p?

Zadatak 5

Za rješenja x_1 i x_2 jednadžbe $x^2 + 4x + p = 0$ vrijedi $x_1 = x_2 + 1$. Koliki je parametar p?

Rješenje

Prema Vièteovim formulama vrijedi $x_1 + x_2 = -4$ pa iz danog uvjeta $x_1 = x_2 + 1$ dobivamo $x_2 + 1 + x_2 = -4$ odnosno $x_2 = -\frac{5}{2}$ i $x_1 = -\frac{3}{2}$. Opet po Vièteovim formulama, $p = x_1 x_2 = \frac{15}{4}$.

Zadatak 6

Ako su x_1 i x_2 korijeni kvadratne jednadžbe $x^2 - 6x + 13 = 0$, izračunajte izraz $(x_1 - x_2)^2$.

Zadatak 6

Ako su x_1 i x_2 korijeni kvadratne jednadžbe $x^2 - 6x + 13 = 0$, izračunajte izraz $(x_1 - x_2)^2$.

Rješenje

Koristeći Vièteove formule možemo pisati
$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 6^2 - 4 \cdot 13 = -16.$
Drugi način je da izračunamo rješenja $x_1 = \dfrac{6 + \sqrt{-16}}{2} = 3 + 2i$, $x_2 = 3 - 2i$ pa je $x_1 - x_2 = 4i$ i dobijemo $(x_1 - x_2)^2 = -16.$

Svođenje na potpuni kvadrat

Izraz svodimo na potpun kvadrat koristeći formulu za kvadrat binoma

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Primjer 2.

Svedite na potpuni kvadrat izraz $x^2 + 4x + 9$.
Rj. Prvo moramo izraz $x^2 + 4x$ nadopuniti na potpuni kvadrat binoma kojem je prvi član x, a drugi član iščitamo iz formule. Ako je $4x$ srednji član u gornjoj formuli, slijedi da je drugi član binoma 2. Dakle,
$x^2 + 4x = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4 - 4 = (x+2)^2 - 4$.
Sada je cijeli izraz jednak

$$x^2 + 4x + 9 = (x+2)^2 - 4 + 9 = (x+2)^2 + 5.$$

Primjer 3.

Svedite na potpuni kvadrat izraz $2x^2 + 2x + 7$.

Rj. Prvo pišemo $2x^2 + 2x + 7 = 2(x^2 + x) + 7$. Sada moramo izraz $x^2 + x$ nadopuniti na potpuni kvadrat binoma kojem je prvi član x, a drugi član iščitamo iz formule odnosno član x predstavlja srednji član u gornjoj formuli, te slijedi da je drugi član binoma $\frac{1}{2}$. Dakle,
$x^2 + x = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$. Sada to ubacimo u cijeli izraz i imamo
$2\left(x^2 + x\right) + 7 = 2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) + 7 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{2}$.

Iracionalne jednadžbe

Iracionalne jednadžbe su jednadžbe s korijenima. Kod njih je potrebno prvo odrediti domenu rješenja odnosno odrediti interval na kojem su svi izrazi pod korijenom pozitivni.

Domena rješenja

Domena rješenja jednadžbe $\sqrt{x-1}+2=\sqrt{2x+2}$ se dobije iz uvjeta $x-1\geq 0$ i $2x+2\geq 0$. Rješenje tog sustava nejednadžbi je presjek intervala $[-1,+\infty]$ i $[1,+\infty]$. Dakle, domena rješenja je interval $[1,+\infty]$.

Rješavanje iracionalne jednadžbe

Iracionalne jednadžbe se kvadriranjem mogu svesti na algebarske jednadžbe. No, moramo biti oprezni jer se kvadriranjem ne dobivaju nužno ekvivalentne jednadžbe (tj. jednadžbe sa istim skupom rješenja). Naime, kvadriranjem jednadžbe gubimo podatak o domeni jednadžbe i o predznaku izraza koje smo kvadrirali. Zato na kraju moramo provjeriti je li dobiveno rješenje ujedno i rješenje početne iracionalne jednadžbe.

Rješavanje iracionalne jednadžbe

Iracionalne jednadžbe se kvadriranjem mogu svesti na algebarske jednadžbe. No, moramo biti oprezni jer se kvadriranjem ne dobivaju nužno ekvivalentne jednadžbe (tj. jednadžbe sa istim skupom rješenja). Naime, kvadriranjem jednadžbe gubimo podatak o domeni jednadžbe i o predznaku izraza koje smo kvadrirali. Zato na kraju moramo provjeriti je li dobiveno rješenje ujedno i rješenje početne iracionalne jednadžbe.

Primjer

Jednadžba $\sqrt{x} = -1$ s domenom $[0, \infty\rangle$ kvadriranjem prelazi u $x = 1$. No, to nije rješenje početne jednadžbe. Naime, $\sqrt{x} = -1$ nema rješenja u skupu realnih brojeva jer je korijen uvijek pozitivan broj.

Zadatak 7

Riješite jednadžbu $\sqrt{x+4} - \sqrt{21-x} = -1$.

Riješeni zadatci

Zadatak 7

Riješite jednadžbu $\sqrt{x+4} - \sqrt{21-x} = -1$.

Rješenje

Zbog korijena domena rješenja je interval $[-4, 21]$.
Sada stavimo po jedan korijen na svaku stranu i kvadriramo.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} + 1 &= \sqrt{21-x} \\ x + 4 + 2\sqrt{x+4} + 1 &= 21 - x \end{aligned}$$

Sređivanjem dobijemo jednakost $\sqrt{x+4} = 8 - x$.
Prije sljedećeg kvadriranja primijetimo da zbog pozitivnog korijena na lijevoj strani, desna strana mora biti pozitivna odnosno $8 - x \geq 0$. Ovo je dodatni uvjet kojeg mora zadovoljavati rješenje.

Nastavak rješenja

Kvadriranjem i sređivanjem dobijemo

$$x + 4 = (8 - x)^2 = 64 - 16x + x^2,$$

$$x^2 - 17x + 60 = (x - 12)(x - 5) = 0.$$

Rješenja su $x_1 = 5$ i $x_2 = 12$. Oba leže u početnoj domeni rješenja, ali uvrštavanjem u početnu jednadžbu vidimo da 12 nije rješenje pa dobivamo samo $x = 5$. Primijetimo da $x = 12$ nije rješenje početne jednadžbe jer ne zadovoljava dodatni uvjet $8 - x \geq 0$ koji smo dobili pri rješavanju.

Zadatak 8

Koliki je zbroj kvadrata $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ bikvadratne jednadžbe $x^4 + x^2 - 2 = 0$?

Zadatak 8

Koliki je zbroj kvadrata $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ bikvadratne jednadžbe $x^4 + x^2 - 2 = 0$?

Rješenje

Uvrstimo li supstituciju $y = x^2$, dobivamo kvadratnu jednadžbu $y^2 + y - 2 = (y+2)(y-1) = 0$ čija rješenja su $y_1 = -2$ i $y_2 = 1$. To nam daje $x_1^2 = x_2^2 = -2$ i $x_3^2 = x_4^2 = 1$ pa je traženi zbroj jednak

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -2.$$

Nejednadžbe

Nejednadžba je izraz koji se dobiva kada se u jednadžbi znak jednakosti zamijeni sa znakom nejednakosti. Rješenje nejednadžbe je interval ili unija intervala.

Osnovno pravilo množenja nejednakosti brojem

$$2x > 2 \,|: 2 \quad \Rightarrow \quad x > 1$$

$$-2x > 2 \,|: (-2) \quad \Rightarrow \quad x < -1$$

Napomena. Zbog tog pravila nejednakost ne smijemo množiti ili dijeliti s izrazom nepoznatog predznaka.

Primjer 4.

Pogledajmo nejednadžbu

$$\frac{x+3}{x-1} > 2.$$

Nećemo množiti s nazivnikom $x - 1$ jer mu ne znamo predznak. Umjesto toga, prebacujemo 2 da lijevu stranu i svedemo na zajednički nazivnik pa dobivamo

$$\frac{x+3}{x-1} - 2 = \frac{5-x}{x-1} > 0.$$

Dobivenu nejednadžbu možemo riješiti na 2 načina:

1. način: pomoću tablice po intervalima $<-\infty, 1>$, $<1, 5>$ i $<5, \infty>$ vidimo da je nejednakost zadovoljena na intervalu $<1, 5>$.

	$<-\infty, 1>$	$<1, 5>$	$<5, \infty>$
$5-x$	$+$	$+$	$-$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$\frac{5-x}{x-1}$	$-$	$+$	$-$

2. način: Promotrimo dva slučaja:

1. $5-x>0,\ x-1>0 \Rightarrow x \in (1, 5)$
2. $5-x<0,\ x-1<0 \Rightarrow x \in \emptyset$

Kvadratna nejednadžba

Definicija

Kvadratna nejednadžba je nejednadžba oblika

$$ax^2 + bx + c \geq (\leq) 0.$$

Kvadratna nejednadžba

Definicija

Kvadratna nejednadžba je nejednadžba oblika

$$ax^2 + bx + c \geq (\leq) 0.$$

Prilikom određivanja intervala rješenja kod rješavanja kvadratne nejednadžbe, bitnu ulogu ima izgled grafa pripadne kvadratne funkcije koji ovisi o predznaku vodećeg koeficijenta a i diskriminante D odnosno broju nultočaka.

Primjer 5.

Riješimo nejednadžbu $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$.

Rj. Skup rješenja ove nejednadžbe su x-evi za koje je parabola $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ iznad x osi. Prvo nađemo nultočke ove kvadratne funkcije $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$, te zbog $a = 2 > 0$ vrijedi da je parabola okrenuta prema gore. Sada iz grafa parabole zaključujemo da je funkcija pozitivna na intervalima

$$\left\langle -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [2, \infty > .$$

Zadatak 9

Riješite nejednadžbu $\dfrac{2x^2 - 1}{x^2} \leq 1.$

Elementarna matematika

Zavod za primijenjenu matematiku (ZPM)

Jednadžbe
Algebarske jednadžbe
Kvadratne jednadžbe
Iracionalne jednadžbe

Nejednadžbe
Riješeni zadatci

Apsolutna vrijednost
Definicija i primjeri
Jednadžbe i nejednadžbe
Riješeni zadatci

Literatura

Zadatak 9

Riješite nejednadžbu $\dfrac{2x^2 - 1}{x^2} \leq 1$.

Rješenje

Uvjet zbog nazivnika: $x \neq 0$.
Jednadžbu množimo s x^2 jer je x^2 uvijek pozitivan. Dobivamo $2x^2 - 1 \leq x^2$ odnosno $x^2 \leq 1$. Dakle, rješenje nejednakosti $x^2 - 1 \leq 0$ je interval $[-1, 1]$. No moramo uzeti u obzir i uvjet $x \neq 0$ pa je krajnje rješenje interval $[-1, 0 > \cup < 0, 1]$.

Zadatak 10

Riješite nejednadžbu $(x+2)^3 > x+2$.

Zadatak 10

Riješite nejednadžbu $(x+2)^3 > x+2$.

Rješenje

Prebacimo $x+2$ na lijevu stranu i nakon toga to izlučimo. Dobivamo

$$(x+2)(x^2+4x+3) = (x+2)(x+3)(x+1) > 0$$

pa je rješenje

$$< -3, -2 > \cup < -1, \infty >$$

što se lako pročita iz tablice po intervalima u koju ubacimo predznake zagrada i gledamo kada je umnožak pozitivan.

Zadatak 11

Riješite sustav nejednadžbi $0 < \dfrac{x+1}{x-1} < 2.$

Zadatak 11

Riješite sustav nejednadžbi $0 < \dfrac{x+1}{x-1} < 2.$

Rješenje

1. Nejednakost $\frac{x+1}{x-1} > 0$: razlomak je pozitivan ako su $x+1$ i $x-1$ istog predznaka tj. ili oba pozitivni ili oba negativni. To je zadovoljeno na skupu $< -\infty, -1 > \cup < 1, \infty >$.

2. Iz nejednakosti $\dfrac{x+1}{x-1} < 2$ slijedi $\dfrac{3-x}{x-1} < 0.$
Rješenje je $< -\infty, 1 > \cup < 3, \infty >$.
Presjek tih dvaju skupova je skup

$$< -\infty, -1 > \cup < 3, \infty > .$$

Zadatak 12

Riješite nejednadžbu

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} > x.$$

Zadatak 12

Riješite nejednadžbu

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} > x.$$

Rješenje

Prvo određujemo domenu rješenja. Zbog korijena mora vrijediti $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ te je domena rješenja skup $< -\infty, -3] \cup [1, \infty >$.

Prilikom rješavanja imamo dva slučaja:

U slučaju $x < 0$ vidimo da je nejednakost uvijek zadovoljena s obzirom da je korijen uvijek pozitivan.

Nastavak rješenja

U slučaju $x \geq 0$ su obje strane pozitivne te se nejednadžba rješava kvadriranjem. Dobivamo $2x - 3 > 0$ te je rješenje $x \in \left\langle \frac{3}{2}, \infty \right\rangle$.

Dakle, tražimo presjek domene rješenja s dobivenom unijom

$$x \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup \left\langle \frac{3}{2}, \infty \right\rangle .$$

Na kraju dobivamo krajnje rješenje

$$x \in \langle -\infty, -3] \cup \left\langle \frac{3}{2}, \infty \right\rangle .$$

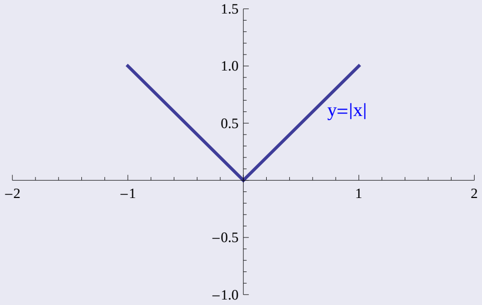
Apsolutna vrijednost – definicija i primjeri

Definicija

Apsolutna vrijednost $|x|$ realnog broja x je definirana izrazom

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Graf funkcije $y = |x|$



Graf funkcije $y = |x|$ je unija dva polupravca $y = x$ za $x \geq 0$ i $y = -x$ za $x < 0$ koji se sijeku u točki s $x = 0$.
U sljedećem primjeru ćete vidjeti da se svi grafovi funkcija sa jednom apsolutnom vrijednosti sastoje od dva polupravca.

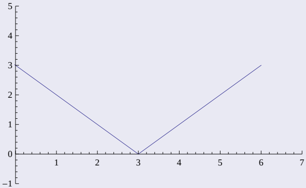
Primjer 6.

Nacrtajte grafove funkcija:

(a) $g(x) = |x - 3|$,   (b) $h(x) = 2 - |x + 1|$.

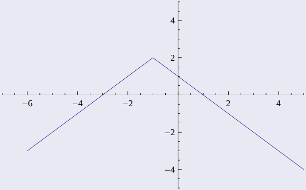
(a)

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & x \geq 3, \\ 3 - x, & x < 3. \end{cases}$$



(b)

$$2 - |x + 1| = \begin{cases} 1 - x, & x \geq -1, \\ x + 3, & x < -1. \end{cases}$$



Jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima

U jednadžbama i nejednadžbama s apsolutnim vrijednostima, apsolutne vrijednosti rješavamo podjelom na intervale.

Imamo dva slučaja:

1. izraz unutar aps.vrij. je pozitivan $\Rightarrow$ predznak izraza ostaje isti
2. izraz unutar aps.vrij. je negativan $\Rightarrow$ predznak izraza se mijenja

Primjer jednadžbe

Primjer 7.

Riješite jednadžbu

$$|x-1|+|x-3|=x.$$

Rješenje. Imamo tri slučaja:
(1) iz uvjeta $x-1>0$, $x-3>0$ dobijemo interval $[3,\infty]$.
Imamo jednadžbu $2x-4=x$ tj. $x=4$ i leži u intervalu.
(2) za $x-1>0$ i $x-3<0$ je $[1,3]$.
Dobijemo $x=2$, te vidimo da je u intervalu.
(3) za $x-1<0$, $x-3<0$ je $<-\infty,1]$.
Dobijemo $-2x+4=x$ odnosno $x=\frac{4}{3}$, ali ne leži u intervalu.
Dakle, provjerom da li su dobivena rješenja u zadanim intervalima dobijemo 2 i 4. Riješite zadatak i grafički.

Rješavanje nejednadžbi

$$|x-a|<2 \;\Leftrightarrow\; -2<x-a<2$$

$$|x-a|>2 \;\Leftrightarrow\; -2>x-a \text{ ili } x-a>2$$

Primjer 8.

Riješite nejednadžbe (a) $|x|<2$ (b) $|x|>3$.

(a) $|x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$ tj. rješenje je interval $<-2,2>$.
(b) $|x|>3 \Leftrightarrow x<-3$ ili $x>3$, tj. rješenje je skup $<-\infty,-3>\cup<3,\infty>$.

Primjer nejednadžbe

Primjer 9.

Riješite nejednadžbu

$$1 < |2x - 3| < 3.$$

Rj. Nejednadžba $|2x - 3| < 3$ nam daje $-3 < 2x - 3 < 3$ odnosno $x \in < 0, 3 >$. Nejednadžba $1 < |2x - 3|$ nam daje $1 < 2x - 3$ ili $2x - 3 < -1$ odnosno $x \in < -\infty, 1 > \cup < 2, \infty >$.
Presjek tih dvaju skupova je skup $< 0, 1 > \cup < 2, 3 >$.

Zadatak 13

Odredite površinu lika kojeg omeđuje krivulja $y = 4 - |2x + 1| - |2x - 1|$ i pravac $y = 0$.

Zadatak 13

Odredite površinu lika kojeg omeđuje krivulja $y = 4 - |2x+1| - |2x-1|$ i pravac $y = 0$.

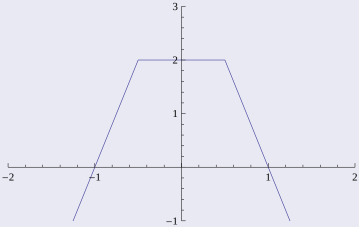
Rješenje

Zadanu krivulju crtamo tako da se podijelom na intervale riješimo apsolutnih vrijednosti, tj.

$$y = \begin{cases} 4 + 2x + 1 + 2x - 1, & x \leq -\frac{1}{2}, \\ 4 - 2x - 1 + 2x - 1, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 4 - 2x - 1 - 2x + 1, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases} = \begin{cases} 4(x+1) \\ 2 \\ 4(1-x) \end{cases}$$

Primijetimo da je na svakom od intervala graf funkcije ustvari pravac. Vidi sliku na sljedećem slajdu.

Nastavak zadatka



Sada tražimo površinu trapeza sa vrhovima u točkama $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C\left(\frac{1}{2},2\right)$ i $D\left(-\frac{1}{2},2\right)$.
Formula za površinu je

$$P = \frac{a+c}{2}v = \frac{2+1}{2}2 = 3.$$

Zadatak 14

Izračunajte umnožak rješenja jednadžbe $\left|\dfrac{x^2+x-3}{x^2-x-5}\right| = 1.$

Zadatak 14

Izračunajte umnožak rješenja jednadžbe $\left|\dfrac{x^2+x-3}{x^2-x-5}\right| = 1.$

Rješenje

Uvjet na nazivnik: $x^2 - x - 5 \neq 0.$
Micanjem znaka apsolutne vrijednosti dobivamo dvije jednadžbe,

$$\frac{x^2+x-3}{x^2-x-5} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{x^2+x-3}{x^2-x-5} = -1.$$

Svaku od jednadžbi rješavamo množenjem s nazivnikom.
1. jednadžba: Dobivamo

$$x^2 + x - 3 = x^2 - x - 5.$$

Nastavak rješenja

iz čega slijedi da je $2x + 2 = 0$ pa jednadžba ima jedno rješenje $x = -1$ (zadovoljava uvjet nazivnika).
2. jednadžba nam daje

$$x^2 + x - 3 = -(x^2 - x - 5)$$

iz čega slijedi

$$2x^2 - 8 = 0$$

pa dobivamo još dva rješenja, $x = 2$ i $x = -2$ koja zadovoljavaju uvjet nazivnika.
Umnožak svih rješenja je $-1 \cdot 2 \cdot (-2) = 4$.

Zadatak 15

Kolika je najveća vrijednost funkcije $y = |x^2 - 2x - 3|$ na intervalu $[-2, 3]$?

Zadatak 15

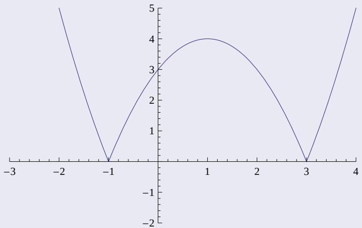
Kolika je najveća vrijednost funkcije $y = |x^2 - 2x - 3|$ na intervalu $[-2, 3]$?

Rješenje

Nultočke funkcije $y = x^2 - 2x - 3$ su $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$, a graf je parabola okrenuta prema gore. Graf zadane funkcije crtamo pomoću zapisa

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & x \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty), \\ -x^2 + 2x + 3, & x \in [-1, 3] \end{cases}$$

Nastavak rješenja



Iz grafa vidimo da su kandidati za postizanje najveće vrijednosti funkcije na intervalu $[-2, 3]$ točka u lijevom rubu $x = -2$ i točka $x = 1$ u kojoj parabola $y = x^2 - 2x - 3$ ima tjeme. Pošto je $f(-2) = 5$, a $f(1) = 4$, zaključujemo da je najveća vrijednost funkcije jednaka 5.

Literatura I

- Branimir Dakić, Neven Elezović,
  Matematika u 24 lekcije,
  Element, Zagreb, 2010.

- Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zavod za primijenjenu matematiku,
  Repetitorij elementarne matematike,
  Element, Zagreb, 2014.

Materijale pripremili:
doc.dr.sc. Domagoj Kovačević, doc.dr.sc. Lana Horvat Dmitrović