

ZADACI ZA PONAVLJANJE

Eksponencijalna i logaritamska funkcija

1. Ako je $\log_a c = 1/2$, $\log_b c = 1/3$, koliko je $\log_c \frac{a\sqrt{b}}{c^2}$?
2. Ako je $f(x) = \log_4 x + 3\log_2(8x)$, koliko je $f(x) + f(1/x)$?
3. Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ takve da je funkcija $f(x) = \log(x^2 - ax + 1)$ definirana za svaki $x \in \mathbb{R}$.
4. Odredite prirodno područje definicije funkcije:

$$(a) f(x) = \sqrt{\log(3 + x - x^2)} \quad (b) f(x) = \log_2(-x^2 + 3x + 10)$$

5. Ako je $\log x + \log y = 3$, $\log^2 x - \log^2 y = 6$, koliko je $x^2 + y^2$?
6. Ako je $a = \log 2$, $b = \log 3$, koliko je $\log \sqrt[3]{12}$?
7. Ako je $\log_2 x = a$, koliko je $\log_8(x^2)$?
8. Ako je $\log x + \log y = 3$, $2\log x - \log y = 0$, koliko je $x + y$?
9. Ako je $f(x) = \log x - 1$, $g(x) = \frac{1}{6} \frac{2^{-x} - 3^{-x}}{3^x - 2^x}$, odredite $(f \circ g)(-1)$.
10. Pojednostavnite izraze:

$$(a) \frac{2^x + 4^x}{2^{-x} + 4^{-x}} \quad (b) \log_a \frac{1}{x} - \log_{\frac{1}{a}} x, \quad x > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

11. Izračunajte:

$$(a) 25^{\frac{1}{4} \log_5 49} \quad (b) 36^{\log_6 5} + 10^{1 - \log 2} - 3^{\log_9 36}$$

12. Odredite rješenje jednadžbe $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, za $f(x) = 10^{x-1}$, $g(x) = \log(2x)$.
13. Pronađite inverzne funkcije sljedećih funkcija:

$$(a) f(x) = \log_2 \sqrt{\frac{8}{x+1}} \quad (b) f(x) = \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{2}$$

14. Odredite koje tvrdnje su istinite, a koje nisu:

$$\begin{array}{lll} (a) \ln(x+2) = \ln x + \ln 2 & (b) e^{2x} = e^x \cdot e^2 & (c) (e^x)^2 = e^{x^2} \\ (d) (e^x)^2 = e^{2x} & (e) \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x & (f) e^{2 \ln x} = 2 \end{array}$$

15. Odredite broj rješenja sljedećih jednadžbi:

$$(a) \log_2(x^2) = 1 - x^2 \quad (b) 2^{x-1} = \sqrt{x+3} \quad (c) 2^{-|x|} = |x^2 - 2|$$

Rješenja.

1. $3/2$
2. 18
3. $a \in (-2, 2)$
4. (a) $[-1, 2]$ (b) $(-2, 5)$
5. 100010
6. $\frac{2a+b}{3}$
7. $\frac{2a}{3}$
8. 110
9. -1
10. (a) 8^x (b) 0
11. (a) 7 (b) 24
12. $-\frac{5}{4}(\log 2 - 1)$
13. (a) $f^{-1}(y) = 8 \cdot 4^{-y} - 1$ (b) $f^{-1}(y) = 2^{y-1}$
14. (a) netočno (b) netočno (c) netočno (d) točno (e) točno (f) netočno
15. (a) 2; (b) 2; (c) 4

Eksponencijalne i logaritamske jednadžbe i nejednadžbe

1. Riješite jednadžbe:

$$(a) 5\sqrt{x} + 4\sqrt{25} = \sqrt{125}, x \neq 1 \quad (b) 27^{x^2+x-6} - 9^{3x} = 0$$

2. Riješite jednadžbe:

$$(a) 3\log_2 x - 2\log_x 2 = 1, \quad (b) \log_{1/2}(3 - 2^{-x}) = x - 1, \quad (c) \log_4(4^x + 2) + \log_4(4^{x+1} + 8) = 3, \\ (d) \log_2 \log_3(x - \frac{6}{x}) = -1, \quad (e) \log^4 x - 5\log^2 x + 4 = 0, \quad (f) \log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1), \\ (g) \ln^2 x - \ln(x^2) = 8.$$

3. Riješite jednadžbe:

$$(a) 5^{x+1} + 3^{x-1} = 5^{x-1} + 3^{x+1}, \quad (b) 4^{x-1} + 4^x - 16 \cdot 5^{x-2} = 0, \quad (c) 5^{2x+1} + 4^{x+\frac{1}{2}} = 7 \cdot 10^x.$$

4. Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} x^{-1/2} + y^{-1/2} = \sqrt{2}, \\ \log_4 x + \log_4 y = 1. \end{cases}$$

5. Riješite nejednadžbe:

$$(a) 0.8^{2x-3} \geq \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{x+1}, \quad (b) 6^{2x+3} < 2^{x+7} \cdot 3^{3x}, \quad (c) \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}.$$

6. Riješite nejednadžbu:

$$(a) -2 \leq \log_2(2x+1) < 4, \quad (b) \log \frac{x+3}{x} > 1, \quad (c) \log_2(x-2) < -2, \\ (d) \log_2(x-1)^3 \leq -6, \quad (e) \log(x^2) + \log^2 x < 3, \quad (f) \frac{\log(x-1)^2}{x^2-2x+3} \leq 0.$$

7. Riješite nejednadžbe:

$$(a) e^{\ln x} + e^{-\ln x} = 2 \quad (b) 2 \ln x - 1 \geq 0 \quad (c) \log_2^2 x \geq 9$$

Rješenja- jednadžbe i nejednadžbe.

1. (a) Nema rješenja. (b) $x_1 = -2, x_2 = 3$

2.(a) $x_1 = 2^{-2/3}, x_2 = 2$ (b) $x = 0$ (c) $x = 1/2$ (d) $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 2\sqrt{3}$

(e) $x_1 = 0.01, x_2 = 0.1, x_3 = 10, x_4 = 100$ (f) $x_1 = 1, x_2 = 2$ (g) $x_1 = e^{-2}, x_2 = e^4$

3.(a) $x = \log_{3/5} \frac{9}{5}$ (b) $x = 3$ (c) $x_1 = -1, x_2 = 0$

4. $(x, y) = (2, 2)$

5. (a) $x \in [1, +\infty)$ (b) $x > 4 + \log_{2/3} 3$ (c) $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$

6. (a) $x \in [-3/8, 15/2)$ (b) $x \in (0, 1/3)$ (c) $x \in (2, 9/4)$

(d) $x \in (1, 5/4]$ (e) $x \in (0.001, 10)$ (f) $x \in [0, 1] \cup \langle 1, 2]$

7. (a) $x = 1$ (b) $x \in [\sqrt{e}, \infty)$ (c) $x \in \langle 0, \frac{1}{8}] \cup [8, \infty)$