

ZADACI ZA VJEŽBU

Trigonometrijske funkcije

1. U kojem se kvadrantu nalazi točka T na trigonometrijskoj kružnici određena kutom $\frac{487\pi}{3}$ radijana?
2. Ako je $\sin t + \cos t = \frac{2}{3}$, izračunajte $\sin^3 t + \cos^3 t$.
3. Ako je $\sin \alpha = -\frac{21}{29}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, koliko je tada $\operatorname{tg} \alpha$?
4. Zadane su funkcije $f(x) = \log_3(x^2)$ i $g(x) = \operatorname{tg}(3x)$. Odredi zbroj svih rješenja jednadžbe $(f \circ g)(x) = 1$ na $[0, \pi]$.
5. Ako je $x - y = \frac{2\pi}{3}$, te $\sin x + \sin y = 1$, za $x, y \in [0, 2\pi]$, odredite $x + y$.
6. Za koje realne brojeve a postoji realan broj x takav da je $\sin x = \frac{2a+1}{a-2}$?
7. Riješite jednadžbu $\sin(3x) = 2$.
8. Riješite jednadžbu $2 \sin^2 \frac{x}{3} + 2 \cos^2 \frac{x}{3} = 2$.
9. Bez upotrebe kalkulatora izračunajte:
 - (a) $\sin \frac{77\pi}{6} \operatorname{ctg} \frac{-53\pi}{3}$
 - (b) $\cos(-\frac{100\pi}{3}) \operatorname{tg}(\frac{35\pi}{6})$

Rješenja

- | | |
|--------------------|--|
| 1. u I.kvadrantu | 6. $a \in [-3, \frac{1}{3}]$ |
| 2. $\frac{23}{27}$ | 7. nema rješenja |
| 3. $\frac{21}{20}$ | 8. $x \in \mathbb{R}$ |
| 4. 3π | 9. (a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ |
| 5. π | |

Grafovi trigonometrijskih funkcija

1. Nacrtajte grafove sljedećih funkcija:

- (a) $f(x) = -\frac{1}{2}\sin(x - \frac{\pi}{3})$ (b) $f(x) = \operatorname{tg}[2(x - \frac{\pi}{2})]$
(c) $f(x) = \cos(\pi x + \frac{3\pi}{2})$

2. Nacrtajte grafove sljedećih funkcija:

- (a) $f(x) = \frac{3}{2}\sin\frac{1}{2}(x - \pi)$ (b) $f(x) = \sin|x|$
(c) $f(x) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}(2x - \pi)$ (d) $f(x) = |\cos^2 x - \sin^2 x|$

3. Zadana je funkcija $f(x) = (\sin(2x) + \cos(2x))^2$.

- (a) Je li f parna ili neparna?
(b) Je li f periodična? Ako je, odredite temeljni period.
(c) Odredite nultočke.
(d) Odredite sliku funkcije f .
(e) Skicirajte graf funkcije f .

4. Zadana je funkcija $f(x) = \sin^2(\frac{x}{2}) - \cos^2(\frac{x}{2})$.

- (a) Je li f parna ili neparna?
(b) Je li f periodična? Ako je, odredite temeljni period.
(c) Odredite nultočke.
(d) Odredite sliku funkcije f .
(e) Skicirajte graf funkcije f .

5. Koliko rješenja u intervalu $[-\pi, \pi]$ ima jednačina $\sin(2x) = \cos(3x)$?

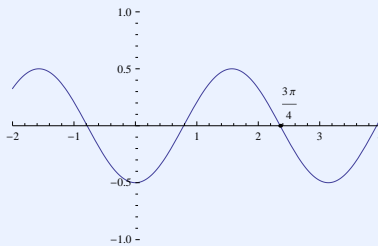
6. Nađite broj realnih rješenja jednačine: (a) $\sin x = \log x$, (b) $\sin x = 2^x$.

7. Odredite udaljenost dvije susjedne nultočke funkcije $f(x) = 2\cos 3(\frac{\pi}{3} - 2x)$.

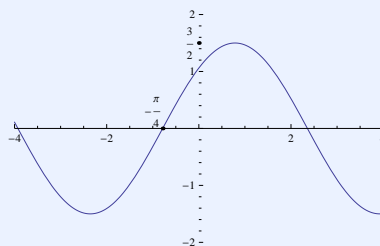
8. Odredite najmanju pozitivnu nultočku funkcije $f(x) = -\frac{1}{2}\sin 2(3x + \frac{\pi}{4})$.

9. Brojevi $\frac{\pi}{3}$ i $\frac{7\pi}{3}$ su susjedne nultočke sinusoide $y = a\sin(bx)$. Koliko je b ?

10. Na slici je graf funkcije $f(x) = a\cos(bx)$. Odredite a i b .

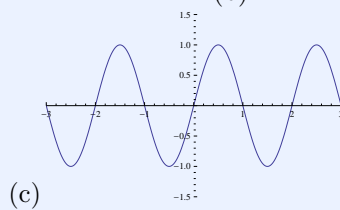
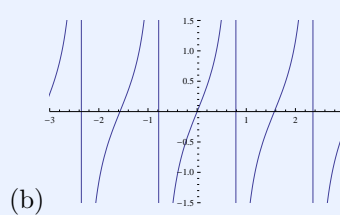
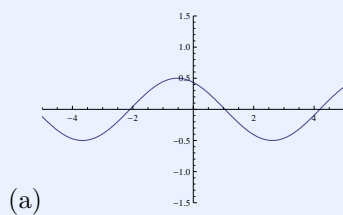


11. Na slici je graf sinusoide $f(x) = a \sin(x - c)$. Odredite a i c .

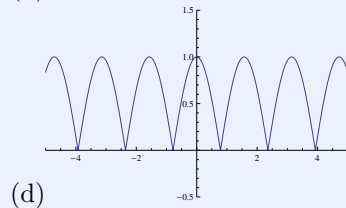
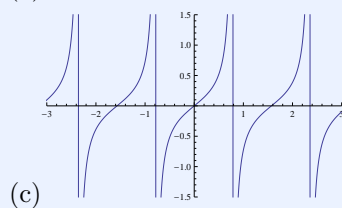
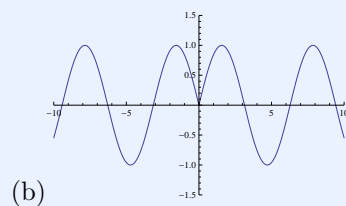
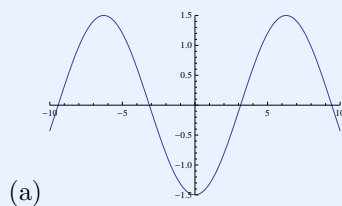


Rješenja

1.

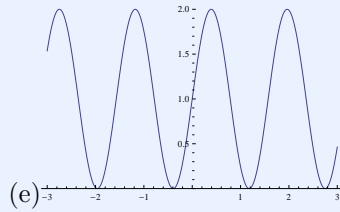


2.



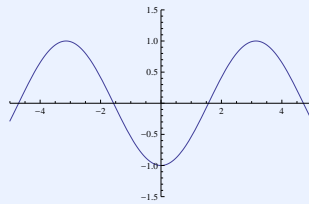
3.

- (a) niti parna niti neparna
- (b) da, $T = \frac{\pi}{2}$
- (c) $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- (d) $Im(f) = [0, 2]$



4.

- (a) f je parna funkcija
- (b) f je periodična, $T = 2\pi$
- (c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (d) $Im(f) = [-1, 1]$
- (e)



5. 6 rješenja

6. (a) 3 rješenja (b) beskonačno rješenja

7. $\frac{\pi}{6}$

8. $x = \frac{\pi}{12}$

9. $b = 1/2$

10. $a = -\frac{1}{2}, b = 2$

11. $a = \frac{3}{2}, c = -\frac{\pi}{4}$

Trigonometrijske jednačbe i nejednačbe

1. Riješite jednačbe :

- (a) $10 \sin(3x) + 5 = 0$ (b) $2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0$
(c) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$ (d) $4 \cos^2(2x) - 3 = 0$

2. Riješite jednačbe:

- (a) $\cos(10x) = \frac{1}{2}$ (b) $\sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

3. Riješite jednačbe:

- (a) $\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$ (b) $8 \cos^4 x - 2 \cos^2 x - 3 = 0$.

4. Koliko rješenja u intervalu $[-\pi, \pi]$ ima jednačba $\sin(x) = \cos(2x)$?

5. Riješite nejednačbe na $[0, 2\pi]$:

- (a) $2 \cos(3x) - \sqrt{2} \geq 0$ (b) $\sin(2x) \geq \cos(x)$
(c) $2 \cos^2 x + \cos x - 1 < 0$ (d) $\sin x < \cos x$
(e) $\cos x \sin(2x) \geq \cos^2 x$ (f) $\sin(2x) \geq \cos(4x)$

Rješenja.

1.

- (a) $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
(b) $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
(c) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
(d) $x_1 = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi, x_2 = \pm \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.

- (a) $x = \pm \frac{\pi}{30} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$
(b) $x_1 = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3. (a) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- (c) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

4. 3

5.

- (a) $\left[0, \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{17\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{23\pi}{12}, 2\pi\right]$
(b) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$
(c) $\left\langle \frac{\pi}{3}, \pi \right\rangle \cup \left\langle \pi, \frac{5\pi}{3} \right\rangle$
(d) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left\langle \frac{5\pi}{4}, 2\pi \right\rangle$
(e) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$
(f) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right] \cup \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$