

3. tjedan

Trigonometrija

ZPM - FER

srpanj 2015

Sadržaj

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Crtanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

1 Trig. funkcije

- Definicije i svojstva
- Osnovne formule
- Riješeni zadatci
- Svojstva parnosti i periodičnosti

2 Grafovi

- Crtanje grafova
- Grafičko rješavanje jednadžbi

3 Trig. jednadžbe

- Tipovi jednadžbi
- Riješeni zadatci

4 Trig. nejednadžbe

- Osnovne nejednadžbe
- Riješeni zadatci
- Kvadratne nejednadžbe
- Riješeni zadatci

Trigonometrijske funkcije

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Citanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

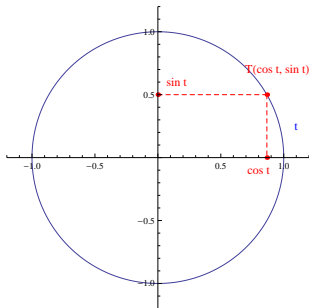
Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Brojeva kružnica = svakom realnom broju t je pridružena odgovarajuća točka na brojevnoj kružnici $T = E(t)$. Tada sinus i kosinus kuta t definiramo na sljedeći način:

$$T = (\cos t, \sin t)$$

$\cos t$ = apscisa točke T ; $\sin t$ = ordinata točke T



- $E(0) = (1, 0)$
- $E(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$
- $E(\pi) = (-1, 0)$

Svojstva trigonometrijskih funkcija

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Citanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Svojstva od $f(x) = \sin x$

- domena: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
- $|\sin(t)| \leq 1, t \in \mathbb{R}$
- nultočke: $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- max:
 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1, k \in \mathbb{Z}$
- min:
 $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1, k \in \mathbb{Z}$
- periodična: $T = 2\pi$

Svojstva od $f(x) = \cos x$

- domena: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
- $|\cos(t)| \leq 1, t \in \mathbb{R}$
- nultočke: $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- max: $\cos(2k\pi) = 1, k \in \mathbb{Z}$
- min:
 $\cos(\pi + 2k\pi) = -1, k \in \mathbb{Z}$
- periodična: $T = 2\pi$

Funkcija tangens

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Citanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

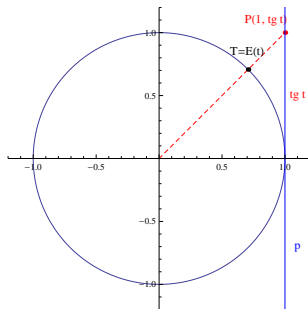
Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Svojstva od $f(x) = \operatorname{tg} x$

- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- domena: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$
- nultočke: $x_k = k\pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$
- asimptote:
 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- periodična: $T = \pi$



Funkcija kotangens

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Citanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

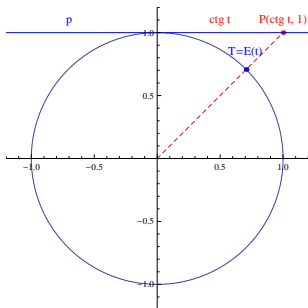
Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci



Svojstva od $f(x) = \operatorname{ctg} x$

- $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- domena: $x \neq k\pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$
- nultočke: $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$
- asimptote: $x = k\pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$
- periodična: $T = \pi$

Osnovne formule

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Crtanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Osnovni identitet

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Vrijednosti sinusa i kosinusa

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Formule redukcije

$$\sin(x + \pi) = -\sin x$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$



Adicijski teoremi

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y\end{aligned}$$

Dvostruki i polovični kut

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin^2 \frac{x}{2} &= \frac{1 - \cos x}{2} \\ \cos^2 \frac{x}{2} &= \frac{1 + \cos x}{2}\end{aligned}$$

Formule pretvorbe

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Citanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.

jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.

nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Riješeni zadatci

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Čitanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Zadatak 1.

Neka je $f(x) = \cos(\frac{\pi x}{3})$ i $g(x) = 2|x + 1|$. Koliko iznosi $(g \circ f)(1990)$?

Riješeni zadatci

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Čitanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Zadatak 1.

Neka je $f(x) = \cos(\frac{\pi x}{3})$ i $g(x) = 2|x + 1|$. Koliko iznosi $(g \circ f)(1990)$?

Rješenje.

Zbog $\cos(\frac{1990\pi}{3}) = \cos(662\pi + \frac{4\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ dobijemo

$$\begin{aligned}(g \circ f)(1990) &= g(f(1990)) = g(\cos(\frac{1990\pi}{3})) = \\ &= g(-\frac{1}{2}) = 2\left|-\frac{1}{2} + 1\right| = 1\end{aligned}$$

Zadatak 2.

Izračunajte $\sin x + \sin\left(x + \frac{14\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{8\pi}{3}\right)$.

Zadatak 2.

Izračunajte $\sin x + \sin(x + \frac{14\pi}{3}) + \sin(x - \frac{8\pi}{3})$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}\sin x + \sin(x + \frac{14\pi}{3}) + \sin(x - \frac{8\pi}{3}) &= \sin x + 2 \sin \frac{2x+2\pi}{2} \cos \frac{22\pi}{6} = \\ &= \sin x + 2 \sin(x + \pi) \cos(\frac{5\pi}{3}) = \sin x - \sin x = 0.\end{aligned}$$

Zadatak 3.

Ako je $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$, koliko je

(a) $\sin x \cos x$

(b) $\sin^3 x + \cos^3 x$?

Zadatak 3.

Ako je $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$, koliko je

(a) $\sin x \cos x$

(b) $\sin^3 x + \cos^3 x$?

Rješenje.

(a) Kvadriranjem izraza $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$ dobijemo

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{16}{9}.$$

Pošto je $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, slijedi da je $2 \sin x \cos x + 1 = \frac{16}{9}$
odnosno $\sin x \cos x = \frac{7}{18}$.

(b) Raspisivanjem zbroja kubova dobijemo

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = \frac{22}{27}.$$

Zadatak 4.

Ako je $\cos 2x = \frac{1}{2}$, koliko je $\sin 4x$, uz uvjet $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$?

Zadatak 4.

Ako je $\cos 2x = \frac{1}{2}$, koliko je $\sin 4x$, uz uvjet $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$?

Rješenje.

Pošto je

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x,$$

trebamo naći $\sin 2x$. Vidimo da iz jednakosti $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$ slijedi da je

$$\sin 2x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 2x} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sada zbog uvjeta $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ slijedi da je $2x \in \langle \pi, 2\pi \rangle$ odnosno $\sin 2x < 0$ pa je dakle $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Sada smo dobili $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadatak 5.

Ako je $\operatorname{tg}(-x) = 2.4$, $-\frac{15\pi}{2} < x < -7\pi$, koliko je $\cos x$?

Zadatak 5.

Ako je $\operatorname{tg}(-x) = 2.4$, $-\frac{15\pi}{2} < x < -7\pi$, koliko je $\cos x$?

Rješenje.

Iz $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x = 2.4$ slijedi $\operatorname{tg} x = -2.4$, odnosno
 $\frac{\sin x}{\cos x} = -2.4$.

Kvadriranjem dobijemo $\sin^2 x = (2.4)^2 \cos^2 x$ te zamjenom
 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ i izlučivanjem $\cos^2 x$ dobijemo

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + 2.4^2}.$$

Zbog uvjeta da je x u 2. kvadrantu, dobijemo

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{1 + 2.4^2}} = -\frac{5}{13}.$$

Zadatak 6.

Neka je $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Ako je

$$S_1 = 1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \dots, \text{ i}$$

$$S_2 = 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \dots, \text{ koliko iznosi zbroj } S_1 + S_2?$$

Zadatak 6.

Neka je $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Ako je

$$S_1 = 1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \dots, \text{ i}$$

$$S_2 = 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \dots, \text{ koliko iznosi zbroj } S_1 + S_2?$$

Rješenje.

Primijetimo da su S_1 i S_2 sume geometrijskih redova s kvocijentima $q_1 = \sin^2 x$ i $q_2 = \cos^2 x$, te su

$$S_1 = \frac{1}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad S_2 = \frac{1}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Sada je zbroj

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x}.$$

Parnost i neparnost

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Citanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Definicija

f je **parna** funkcija ako je $f(x) = f(-x)$, za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$
 f je **neparna** funkcija ako je $f(-x) = -f(x)$, za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$

Primjeri.

- Sinus je neparna funkcija: $\sin(-x) = -\sin x$, za svaki $x \in \mathbb{R}$
- Kosinus je parna funkcija: $\cos(-x) = \cos x$, za svaki $x \in \mathbb{R}$
- Tangens je neparna funkcija: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}x$
- Kotangens je neparna funkcija: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg}x$

Zadatak 7.

Provjerite jesu li sljedeće funkcije parne ili neparne:

(a) $f(x) = \sin(5x)$

(b) $f(x) = \cos(2x) + \cos(5x)$

(c) $f(x) = \cos 2x - \sin x$

(d) $f(x) = \sin^2(3x) - \cos^2(3x)$

(e) $f(x) = \sin |x|$

(f) $f(x) = \sin^3(-2x)$.

Zadatak 7.

Provjerite jesu li sljedeće funkcije parne ili neparne:

(a) $f(x) = \sin(5x)$

(b) $f(x) = \cos(2x) + \cos(5x)$

(c) $f(x) = \cos 2x - \sin x$

(d) $f(x) = \sin^2(3x) - \cos^2(3x)$

(e) $f(x) = \sin |x|$

(f) $f(x) = \sin^3(-2x)$.

Rješenje.

(a) $\sin(-5x) = -\sin(5x)$, f je neparna

(b) $\cos(-2x) + \cos(-5x) = \cos(2x) + \cos(5x)$, f je parna

(c) $\cos(-2x) - \sin(-x) = \cos(2x) + \sin(x)$, f nije ni parna ni neparna

(d) $\sin^2(-3x) - \cos^2(-3x) = \sin^2(3x) - \cos^2(3x)$, f je parna

(e) $\sin |-x| = \sin |x|$, f je parna

(f) $\sin^3(-(-2x)) = -\sin^3(-2x)$, f je neparna

Periodičnost

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Čitanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Definicija

Funkcija f je **periodična funkcija** ako vrijedi $f(x + T) = f(x)$, za neki $T > 0$. Najmanji takav T , ako postoji, zovemo **temeljni period** funkcije f .

- Sinus je periodična funkcija s $T = 2\pi$:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Kosinus je periodična funkcija s $T = 2\pi$:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Tangens i kotangens su periodične funkcije s $T = \pi$:

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$$

Funkcija $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ je periodična funkcija za svaki φ i $\omega > 0$ s temeljnim periodom $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Isto vrijedi i za funkciju $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$. Funkcije $f(x) = \operatorname{tg}(\omega t + \varphi)$ i $g(x) = \operatorname{ctg}(\omega t + \varphi)$ su periodične s periodom $T = \frac{\pi}{\omega}$.

Primjer

Odredite temeljni period funkcije $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{2})$.

Rješenje.

Vidimo da je $\omega = 3$ te slijedi da je temeljni period

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}.$$

Zadatak 8.

Odredite temeljni period sljedećih funkcija:

$$(a) f(x) = \sin x \cos x \qquad (b) f(x) = |\cos(2x)|$$

$$(c) f(x) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1.$$

Zadatak 8.

Odredite temeljni period sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \sin x \cos x$ (b) $f(x) = |\cos(2x)|$

(c) $f(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1$.

Rješenje.

(a) $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$, $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

(b) Funkcija $g(x) = \cos(2x)$ ima period $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, ali
 $f(x) = |\cos(2x)|$ ima period $T = \frac{\pi}{2}$, što se vidi iz grafa
funkcije.

(c) $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

Grafovi

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Citanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

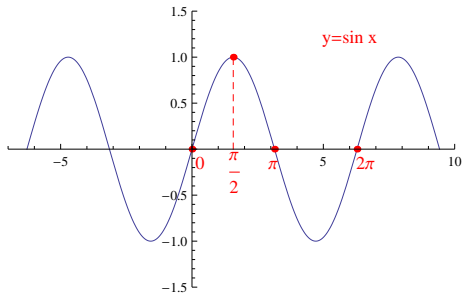
Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Sinusoida je graf funkcije $f(x) = \sin x$.

- $|\sin(t)| \leq 1, t \in \mathbb{R}$
- nultočke: $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- max: $\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1, k \in \mathbb{Z}$
- min: $\sin(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1, k \in \mathbb{Z}$
- periodična: $T = 2\pi$



Općenita sinusoida je graf funkcije $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$.

- $|A|$ = **amplituda** sinusoide tj. vrijedi

$$-|A| \leq f(x) \leq |A|.$$

- **Temeljni period** je

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

- **Pomak sinusoide** u smjeru osi x je

$$x_0 = -\frac{\varphi}{\omega},$$

jer je

$$A \sin(\omega x + \varphi) = A \sin \omega(x + \frac{\varphi}{\omega}) = A \sin \omega(x - x_0).$$

- Sinusoida može biti zadana i u obliku $f(x) = A \sin \omega(x - x_0)$.

Zadatak 9.

Nacrtajte sinusoidu $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$.

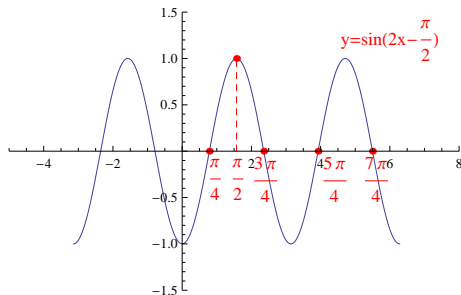
Zadatak 9.

Nacrtajte sinusoidu $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$.

Rješenje.

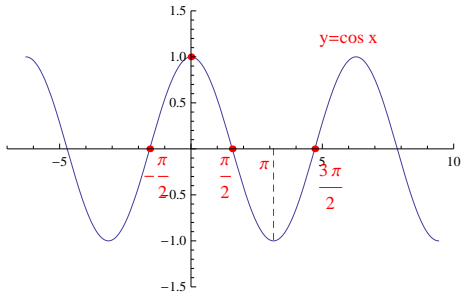
$$A = 1, \omega = 2,$$

$$\text{period } T = \frac{2\pi}{2} = \pi, x_0 = -\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{4}$$



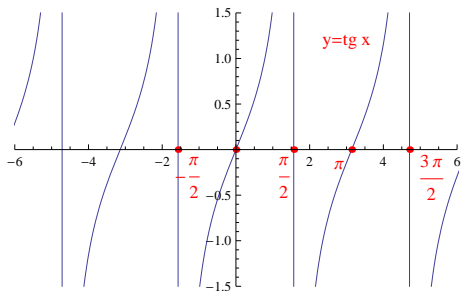
Graf funkcije $f(x) = \cos x$

Zbog $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, vidimo da je graf funkcije $f(x) = \cos x$ ustvari sinusoida $f(x) = \sin x$ pomaknuta ulijevo za $x_0 = \frac{\pi}{2}$.



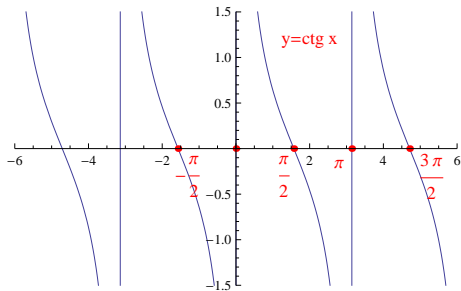
Graf funkcije $f(x) = \operatorname{tg} x$

- domena: $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- asimptote: $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- period: $T = \pi$
- rastuća funkcija



Graf funkcije $f(x) = \operatorname{ctg} x$

- domena: $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- asimptote: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- period: $T = \pi$
- padajuća funkcija



Zadatak 10.

Nacrtajte graf funkcije $f(x) = -2 \sin(x - \frac{2\pi}{3})$.

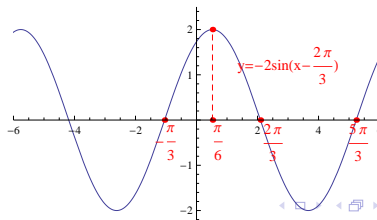
Zadatak 10.

Nacrtajte graf funkcije $f(x) = -2 \sin(x - \frac{2\pi}{3})$.

Rješenje.

$A = 2$, $\omega = 1$, period $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$, $x_0 = \frac{2\pi}{3}$

Prvo pomaknemo graf sinus funkcije udesno za x_0 , onda amplitudu pomnožimo s 2. Zatim promijenimo predznak odnosno graf funkcije $f(x) = -2 \sin(x - \frac{2\pi}{3})$ je simetričan s obzirom na os x s grafom $f(x) = 2 \sin(x - \frac{2\pi}{3})$.



Zadatak 11.

Nacrtajte graf funkcije $f(x) = 2 \cos(3x - \frac{3\pi}{4}) - 1$.

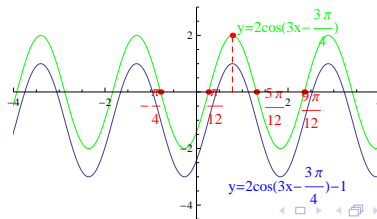
Zadatak 11.

Nacrtajte graf funkcije $f(x) = 2 \cos(3x - \frac{3\pi}{4}) - 1$.

Rješenje.

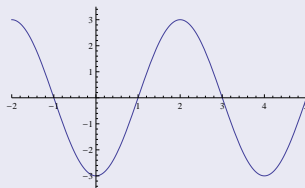
$$A = 2, \omega = 3, \text{ period } T = \frac{2\pi}{3}, x_0 = \frac{\pi}{4}$$

Prvo pomaknemo graf funkcije $f_1(x) = \cos(3x)$ udesno za x_0 , onda joj amplitudu pomnožimo s 2. Zatim cijeli graf funkcije $f(x) = 2 \cos(3x - \frac{3\pi}{4}) - 1$ translahiramo za jedan prema dolje u smjeru osi y .



Zadatak 12.

Odredite jednadžbu sinusoide na slici:



Rješenje.

$$y = A \sin(\omega(x - x_0))$$

$$A = 3, \text{ period } T = 5 - 1 = 4, x_0 = 1, \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

$$y = 3 \sin \frac{\pi}{2}(x - 1) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Grafičko rješavanje jednažbi

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Citanje grafova

Grafičko rješavanje
jednažbi

Trig.
jednažbe

Tipovi jednažbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednažbe

Osnovne
nejednažbe

Riješeni zadatci

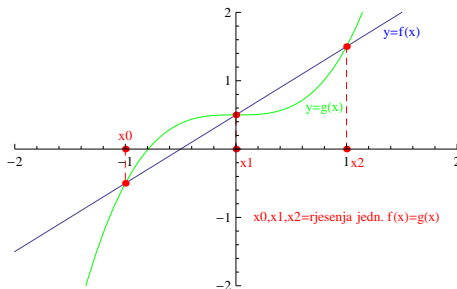
Kvadratne
nejednažbe

Riješeni zadatci

Jednažbu

$$f(x) = g(x)$$

rješavamo grafički tako da nacrtamo grafove funkcija $y = f(x)$ i $y = g(x)$ i tražimo točke presjecanja $T(x_t, y_t)$ gdje su x_t rješenja početne jednažbe. Grafičko rješavanje jednažbi je korisno kada trebamo odrediti samo broj rješenja ili kada trebamo približno odrediti gdje se rješenja nalaze.



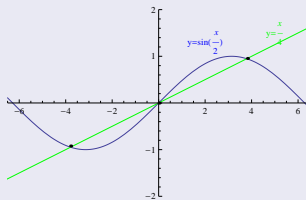
Zadatak 13.

Koliko rješenja ima jednačina $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{4}x$?

Zadatak 13.

Koliko rješenja ima jednadžba $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{4}x$?

Rješenje.



Na slici vidimo da se grafovi funkcija $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ i $g(x) = \frac{1}{4}x$ sijeku u 3 točke, pa zaključujemo da jednadžba ima 3 rješenja.

Zadatak 14.

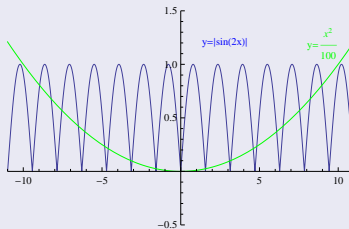
Koliko rješenja ima jednadžba $|\sin(2x)| = \frac{1}{100}x^2$?

Zadatak 14.

Koliko rješenja ima jednadžba $|\sin(2x)| = \frac{1}{100}x^2$?

Rješenje.

Prvo skiciramo grafove funkcija $f(x) = |\sin(2x)|$ i $g(x) = \frac{1}{100}x^2$.



Nastavak rješenja.

Vidimo da su obje funkcije parne funkcije pa je broj rješenja simetričan s obzirom na os y . Moramo pronaći broj presjeka ova dva grafa. Zato tražimo onaj pozitivan x takav da je vrijednost od $y = \frac{1}{100}x^2$ veća od 1 zato jer nakon toga više nema presjeka (\sin je uvijek manji od 1). Zatim ćemo prebrojati sve presjeke od 0 do tog x . Taj x je $x = 10$ i znamo da je $10 \in \langle 3\pi, 13\pi/4 \rangle$. Iz toga slijedi da imamo 11 presjeka za $x > 0$, 11 presjeka za $x < 0$ i 1 presjek za $x = 0$, što je zajedno 23 presjeka.

Trigonometrijske jednačbe

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Citanje grafova

Grafičko rješavanje
jednačbi

Trig.
jednačbe

Tipovi jednačbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednačbe

Osnovne
nejednačbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednačbe

Riješeni zadatci

1. Osnovne trigonometrijske jednačbe

■ $\sin x = a \Rightarrow$

$x = \alpha + 2k\pi, x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ gdje je
 $\alpha = \arcsin(a)$

■ $\cos x = a \Rightarrow$

$x = \alpha + 2k\pi, x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ gdje je $\alpha = \arccos(a)$

■ $\operatorname{tg} x = a \Rightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ gdje je $\alpha = \operatorname{arctg}(a)$

■ $\operatorname{ctg} x = a \Rightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ gdje je $\alpha = \operatorname{arcctg}(a)$

■ Jednačbe oblika $\sin(ax + b) = c, \cos(ax + b) = c,$
 $\operatorname{tg}(ax + b) = c$ se svode na osnovne.

■ Jednačbe oblika $a \sin(bx) + c \cos(dx) = e$ se svode na
osnovne upotrebom adicijskih teorema, formula
pretvorbe, formula za dvostruki i polovični kut, itd.

2. kvadratne trigonometrijske jednadžbe

Supstitucijom se svode na obične kvadratne jednadžbe:

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0, \text{ supstitucija : } t = \sin x$$

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0, \text{ supstitucija : } t = \cos x$$

3. homogena trigonometrijska jednadžba

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

Dijeljenjem s $\cos^2 x$, za $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ dobijemo

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$$

koja se supstitucijom $t = \operatorname{tg} x$ svodi na kvadratnu jednadžbu.

Riješeni zadatci

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Citanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Zadatak 15.

Riješite jednadžbu $2 \sin x = 1$.

Riješeni zadatci

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Citanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Zadatak 15.

Riješite jednadžbu $2 \sin x = 1$.

Rješenje.

Jednadžba $\sin x = 0.5$ ima dva rješenja: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$,
 $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

Riješeni zadatci

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Citanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Zadatak 15.

Riješite jednadžbu $2 \sin x = 1$.

Rješenje.

Jednadžba $\sin x = 0.5$ ima dva rješenja: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$,
 $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 16.

Riješite jednadžbu $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Riješeni zadatci

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Citanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Zadatak 15.

Riješite jednadžbu $2 \sin x = 1$.

Rješenje.

Jednadžba $\sin x = 0.5$ ima dva rješenja: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$,
 $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 16.

Riješite jednadžbu $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rješenje.

Jednadžba ima 4 rješenja:

- $x/2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $x/2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x_{3,4} = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Zadatak 17.

Riješite jednadžbu $2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$.

Zadatak 17.

Riješite jednadžbu $2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$.

Rješenje.

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -0.5$$

$$\begin{aligned} 1. \text{ rj: } & \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x_{1,2} = \frac{\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2. \text{ rj: } & \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x_{3,4} = -\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Zadatak 18.

Riješite jednadžbu $\sqrt{3}\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6}) = 1$.

Zadatak 18.

Riješite jednadžbu $\sqrt{3}\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6}) = 1$.

Rješenje.

$$\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Zadatak 19.

Riješite jednadžbu $\sin x = \sin(2x)$.

Zadatak 19.

Riješite jednadžbu $\sin x = \sin(2x)$.

Rješenje.

$$\sin x = \sin(2x) \Rightarrow \sin x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow$$

$$\sin x(2 \cos x - 1) = 0$$

$$1. \text{ rj: } \sin x = 0 \Rightarrow x_1 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$2. \text{ rj: } \cos x = 0.5 \Rightarrow x_{2,3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Zadatak 20.

Nađite zbroj svih rješenja jednadžbe $\sqrt{3}\sin(2x) = 2\cos^2 x$ koja se nalaze u $[0, 2\pi]$.

Zadatak 20.

Nađite zbroj svih rješenja jednadžbe $\sqrt{3} \sin(2x) = 2 \cos^2 x$ koja se nalaze u $[0, 2\pi]$.

Rješenje.

$$\sqrt{3} \sin 2x = 2 \cos^2(x) \Rightarrow 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 2 \cos^2 x \Rightarrow$$

$$2 \cos x (\sqrt{3} \sin x - \cos x) = 0$$

$$1. \text{ rj: } \cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2. \text{ rj: } \sqrt{3} \sin x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Zbroj rješenja na intervalu $[0, 2\pi]$ iznosi:

$$S = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{10\pi}{3}.$$

Zadatak 21.

Riješite jednadžbu $2 \cos^2 x - \sin x = 1$.

Zadatak 21.

Riješite jednadžbu $2 \cos^2 x - \sin x = 1$.

Rješenje.

Zamjenom $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ dobijemo
 $2(1 - \sin^2 x) - \sin x = 1 \Rightarrow$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Supst. $t = \sin x \Rightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0.5, t_2 = -1$

1. rj: $\sin x = 0.5 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. rj: $\sin x = -1 \Rightarrow x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Zadatak 22.

Odredite broj rješenja jednadžbe $\sin^2(2x) = 1$ koja se nalaze u intervalu $[0, 2\pi]$.

Zadatak 22.

Odredite broj rješenja jednadžbe $\sin^2(2x) = 1$ koja se nalaze u intervalu $[0, 2\pi]$.

Rješenje.

$$\sin 2x = \pm 1$$

1. rj: $\sin 2x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. rj: $\sin 2x = -1 \Rightarrow x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Imamo 4 rješenja u intervalu $[0, 2\pi]$: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

Zadatak 23.

Riješite jednadžbu $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.

Zadatak 23.

Riješite jednadžbu $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.

Rješenje.

Jednadžbu podijelimo s $\cos^2 x$, uz uvjet da $\cos x \neq 0$ te dobijemo

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2 \frac{\sin x}{\cos x} - 3 = 0.$$

Supstitucijom $t = \operatorname{tg} x$ dobijemo $t^2 - 2t - 3 = 0$ čija su rješenja $t_1 = -1$ i $t_2 = 3$.

1. rj: $\operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. rj: $\operatorname{tg} x = 3 \Rightarrow x_2 = \arctg(3) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Zadatak 24.

Nadite najveći parametar $a \in \mathbb{R}$ za koji jednadžba $2 \sin x - \cos^2 x + a + 1 = 0$ ima barem jedno realno rješenje.

Zadatak 24.

Nađite najveći parametar $a \in \mathbb{R}$ za koji jednadžba $2 \sin x - \cos^2 x + a + 1 = 0$ ima barem jedno realno rješenje.

Rješenje.

Zamjenom $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ dobijemo

$$\sin^2 x + 2 \sin x + a = 0.$$

Supst. $t = \sin x \Rightarrow t^2 + 2t + a = 0 \Rightarrow t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a}$

Kvadratna jedn. ima realno rješenje ako vrijedi $1 - a \geq 0$ tj.

$$a \leq 1$$

Vidimo da za $a = 1$ je rješenje $t = 1$ te dobijemo jedn.

$\sin x = -1$ koja ima realno rješenje. Dakle, najveći parametar za koji jednadžba ima rješenje je $a = 1$.

Zadatak 25.

Za koje vrijednosti parametra a jednadžba
 $\sin^4(x) + \cos^4(x) = a$ ima realna rješenja?

Zadatak 25.

Za koje vrijednosti parametra a jednadžba
 $\sin^4(x) + \cos^4(x) = a$ ima realna rješenja?

Rješenje.

$\sin^4(x) + \cos^4(x) = a \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = a$
Korištenjem identiteta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dobijemo

$$\sin^2(2x) = 2(1 - a).$$

Zato jer je $\sin(2x) \in [-1, 1]$ odnosno $\sin^2(2x) \in [0, 1]$, ova
jednadžba ima rješenje ako vrijedi $1 \geq 2(1 - a) \geq 0$.

Rješavanjem ovog sustava nejednakosti dobijemo $a \in [0.5, 1]$.

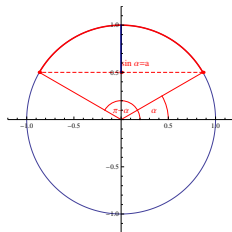
Trigonometrijske nejednadžbe

1. Osnovne nejednadžbe

$$\sin x > a \Rightarrow$$

$$x \in$$

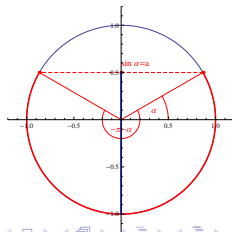
$$\langle \alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi \rangle$$



$$\sin x < a \Rightarrow$$

$$x \in$$

$$\langle -\alpha - \pi + 2k\pi, \alpha + 2k\pi \rangle$$



Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Čitanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

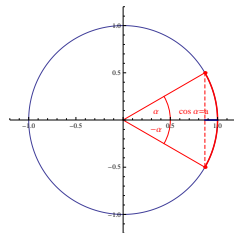
Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

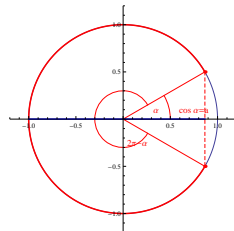
$$\cos x > a \Rightarrow$$

$$x \in \langle -\alpha + 2k\pi, \alpha + 2k\pi \rangle$$



$$\cos x < a \Rightarrow$$

$$x \in \langle \alpha + 2k\pi, 2\pi - \alpha + 2k\pi \rangle$$



Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Citanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

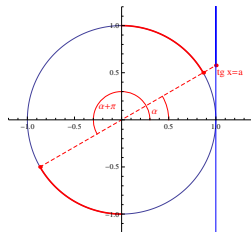
Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

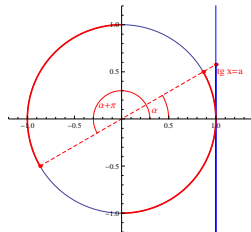
Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

$$\operatorname{tg} x > a \Rightarrow x \in \left\langle \alpha + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle$$



$$\operatorname{tg} x < a \Rightarrow x \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi, \alpha + k\pi \right\rangle$$



Napomena. Trigonometrijske nejednadžbe možemo riješiti i pomoću grafova trigonometrijskih funkcija.

Riješeni zadatci

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Čitanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Zadatak 26.

Riješite nejednadžbu $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) > 1$.

Riješeni zadatci

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Čitanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Zadatak 26.

Riješite nejednadžbu $2 \sin(x + \frac{\pi}{2}) > 1$.

Rješenje.

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) > 0.5$$

$$x + \frac{\pi}{2} \in \langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Rješenje: $x \in \langle -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$

Zadatak 27.

Riješite nejednadžbu $2 \cos(3x) + \sqrt{3} \geq 0$.

Zadatak 27.

Riješite nejednadžbu $2 \cos(3x) + \sqrt{3} \geq 0$.

Rješenje.

$$\cos(3x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3x \in \left\langle -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Rješenje: $x \in \left\langle -\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \right\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$

Zadatak 28.

Riješite nejednadžbu $\sqrt{3} \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2}) - 1 \geq 0$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

Zadatak 28.

Riješite nejednadžbu $\sqrt{3} \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2}) - 1 \geq 0$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

Rješenje.

$$\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2}) \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x - \frac{\pi}{2} \in [\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$x \in [\frac{2\pi}{3} + k\pi, \pi + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

u intervalu $[0, 2\pi]$ rješenja su intervali: $[\frac{2\pi}{3}, \pi) \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$

Zadatak 29.

Riješite nejednadžbu $\sin(2x) \leq \sin x$ na $[0, 2\pi]$.

Zadatak 29.

Riješite nejednadžbu $\sin(2x) \leq \sin x$ na $[0, 2\pi]$.

Rješenje.

$$2 \sin x \cos x \leq \sin x \Rightarrow \sin x(2 \cos x - 1) \leq 0$$

$$\boxed{1} \quad \sin x \leq 0, \cos x \geq 0.5 \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{2} \quad \sin x \geq 0, \cos x \leq 0.5 \Rightarrow \\ x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

Rješenje na $[0, 2\pi]$ je interval: $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

2. Kvadratne nejednadžbe

$$a \sin^2 x + b \sin x + c \geq 0$$

- supstitucijom $t = \sin x$ dobijemo kvadratnu nejednadžbu:

$$at^2 + bt + c \geq 0$$

- $t \in [t_1, t_2] \Rightarrow t_2 \geq \sin x \geq t_1$
- $t \in \langle -\infty, t_1] \cup [t_2, \infty \rangle \Rightarrow t_1 \geq \sin x$ i $\sin x \geq t_2$
- Analogno za kvadratne nejednadžbe sa kosinusom, tangensom ili kotangensom.

Riješeni zadatci

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Čitanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Zadatak 30.

Riješite nejednadžbu $4 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq 3$.

Riješeni zadatci

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Citanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Zadatak 30.

Riješite nejednadžbu $4 \sin^2(\frac{x}{2}) \geq 3$.

Rješenje.

supst. $t = \sin(\frac{x}{2})$

$$4t^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow t \in \left\langle -\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty \right)$$

Slučajevi:

1 $\sin(x/2) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x/2 \in [\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \in [\frac{8\pi}{3} + 4k\pi, \frac{10\pi}{3} + 4k\pi], k \in \mathbb{Z}$

2 $\sin(x/2) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x/2 \in [\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \in [\frac{2\pi}{3} + 4k\pi, \frac{4\pi}{3} + 4k\pi], k \in \mathbb{Z}$

Zadatak 31.

Riješite nejednadžbu $2 \cos^2 x + \cos x \geq 1$.

Zadatak 31.

Riješite nejednadžbu $2 \cos^2 x + \cos x \geq 1$.

Rješenje.

supst. $t = \cos x$

$$2t^2 + t - 1 \geq 0 \Rightarrow t \in \langle -\infty, -1] \cup [1/2, +\infty)$$

Slučajevi:

$$1 \quad \cos x \leq -1 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \quad \cos x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

Rješenje: $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \{\pi + 2k\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z}$

Zadatak 32.

Riješite nejednadžbu $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x - 3 > 0$.

Zadatak 32.

Riješite nejednadžbu $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x - 3 > 0$.

Rješenje.

supst. $t = \sin x$

$$2t^2 + \sqrt{3}t - 3 > 0 \Rightarrow t \in \langle -\infty, -\sqrt{3} \rangle \cup \langle \sqrt{3}/2, +\infty \rangle$$

Slučajevi:

1 $\sin x < -\sqrt{3} \Rightarrow$ nema rješenja

2 $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x \in \langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$

Zadatak 33.

Riješite nejednadžbu $\operatorname{tg}^2 x - 3 \geq 0$.

Zadatak 33.

Riješite nejednadžbu $\operatorname{tg}^2 x - 3 \geq 0$.

Rješenje.

supst. $t = \operatorname{tg} x$

$$t^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow t \in \langle -\infty, -\sqrt{3} \rangle \cup [\sqrt{3}, +\infty)$$

Slučajevi:

$$1 \quad \operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3} \Rightarrow x \in \langle \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \quad \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3} \Rightarrow x \in [\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Rješenje: } x \in [\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \cup \langle \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Literatura I

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Trig. funkcije

Definicije i svojstva

Osnovne formule

Riješeni zadatci

Svojstva parnosti i
periodičnosti

Grafovi

Citanje grafova

Grafičko rješavanje
jednadžbi

Trig.
jednadžbe

Tipovi jednadžbi

Riješeni zadatci

Trig.
nejednadžbe

Osnovne
nejednadžbe

Riješeni zadatci

Kvadratne
nejednadžbe

Riješeni zadatci



Branimir Dakić, Neven Elezović,
Matematika u 24 lekcije,
Element, Zagreb, 2010.



Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zavod za
primijenjenu matematiku,
Repetitorij elementarne matematike,
Element, Zagreb, 2014.

Materijale pripremila:
doc.dr.sc. Lana Horvat Dmitrović