

4. tjedan

Nizovi

ZPM - FER

rujan, 2015

Sadržaj

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Uvod i
definicije

Aritmetički niz
Riješeni zadaci

Geometrijski
niz
Riješeni zadaci

Geometrijski
red
Riješeni zadaci

- 1 Uvod i definicije
- 2 Aritmetički niz
 - Riješeni zadaci
- 3 Geometrijski niz
 - Riješeni zadaci
- 4 Geometrijski red
 - Riješeni zadaci

Uvod i definicije

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Uvod i
definicije

Aritmetički niz
Riješeni zadaci

Geometrijski
niz
Riješeni zadaci

Geometrijski
red
Riješeni zadaci

Definicija

Niz u skupu S je funkcija $a : \mathbb{N} \rightarrow S$ koja prirodnom broju n pridružuje element a_n skupa S . Ako je $S \subset \mathbb{R}$, govorimo o **nizu realnih brojeva**.

Element a_n nazivamo **općim** ili **n -tim članom niza**, a sam niz označavamo simbolom (a_n) . Niz ima beskonačno mnogo članova:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Svojstva nizova

- Niz (a_n) je **rastući** ako za svaki n vrijedi $a_n \leq a_{n+1}$.
- Niz je **padajući** ako za svaki n vrijedi $a_n \geq a_{n+1}$.
- Niz je **monoton** ako je rastući ili padajući.
- Niz (a_n) je **ograničen** ako postoje realni brojevi m i M takvi da vrijedi $m \leq a_n \leq M$ za svaki n . Broj m se naziva **donja**, a M **gornja** međa niza.

Primjeri

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Uvod i
definicije

Aritmetički niz
Riješeni zadaci

Geometrijski
niz

Riješeni zadaci

Geometrijski
red

Riješeni zadaci

Primjer 1. $a_n = n^2$

Prvih par članova niza: 1, 4, 9, 16, ...

Niz je monotono rastući, ograničen je odozdo s 1, a nije ograničen odozgo.

Primjeri

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Uvod i
definicije

Aritmetički niz
Riješeni zadaci

Geometrijski
niz

Riješeni zadaci

Geometrijski
red

Riješeni zadaci

Primjer 1. $a_n = n^2$

Prvih par članova niza: 1, 4, 9, 16, ...

Niz je monotono rastući, ograničen je odozdo s 1, a nije ograničen odozgo.

Primjer 2. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Prvih par članova niza: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

Niz nije monoton, ali je ograničen s -1 i $\frac{1}{2}$.

Primjeri

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Uvod i
definicije

Aritmetički niz
Riješeni zadaci

Geometrijski
niz

Riješeni zadaci

Geometrijski
red

Riješeni zadaci

Primjer 1. $a_n = n^2$

Prvih par članova niza: 1, 4, 9, 16, ...

Niz je monotono rastući, ograničen je odozdo s 1, a nije ograničen odozgo.

Primjer 2. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Prvih par članova niza: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

Niz nije monoton, ali je ograničen s -1 i $\frac{1}{2}$.

Primjer 3. $a_n = \frac{n-1}{n}$

Prvih par članova niza: $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

Niz je rastući i ograničen s 0 i 1.

Aritmetički niz

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Uvod i
definicije

Aritmetički niz

Riješeni zadaci

Geometrijski
niz

Riješeni zadaci

Geometrijski
red

Riješeni zadaci

Definicija

Niz je **aritmetički** ako je razlika susjednih članova stalna i iznosi d :

$$d = a_n - a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Broj d se naziva **razlika** ili **diferencija** aritmetičkog niza, a prvih par članova glasi:

$$a_1, \quad a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, \quad \dots$$

Stoga je opći član niza:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Aritmetički niz

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Uvod i
definicije

Aritmetički niz

Riješeni zadaci

Geometrijski
niz

Riješeni zadaci

Geometrijski
red

Riješeni zadaci

Definicija

Niz je **aritmetički** ako je razlika susjednih članova stalna i iznosi d :

$$d = a_n - a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Broj d se naziva **razlika** ili **diferencija** aritmetičkog niza, a prvih par članova glasi:

$$a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, \dots$$

Stoga je opći član niza:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$



Zadatak 1.

Odredi zbroj svih prirodnih brojeva manjih od 1000 koji pri
djeljenju s 5 daju ostatak 3.

Zadatak 1.

Odredi zbroj svih prirodnih brojeva manjih od 1000 koji pri djeljenju s 5 daju ostatak 3.

Rješenje.

$$a_1 = 3, a_2 = 8, a_3 = 13, \dots \Rightarrow d = 5$$

$$a_n < 1000 \Rightarrow a_1 + (n-1)d < 1000 \Rightarrow n = 200$$

$$S_{200} = \frac{200}{2}(3 + 998) = 100100.$$

Zadatak 2.

Koliko brojeva treba umetnuti između -22 i 18 da bi se dobio aritmetički niz čiji je zbroj -42 ?

Zadatak 2.

Koliko brojeva treba umetnuti između -22 i 18 da bi se dobio aritmetički niz čiji je zbroj -42?

Rješenje.

$$a_1 = -22, a_n = 18, S_n = -42$$

$$S_n = \frac{n}{2}(-22 + 18) = -42 \Rightarrow n = 21$$

Treba umetnuti **19** brojeva.

Zadatak 3.

Ako je zbroj prvih 15 članova aritmetičkog niza 0, a prvi član je 21, koliko iznosi deseti član?

Zadatak 3.

Ako je zbroj prvih 15 članova aritmetičkog niza 0, a prvi član je 21, koliko iznosi deseti član?

Rješenje

Ako je zbroj prvih 15 članova aritmetičkog niza 0, tada je

$$S_{15} = \frac{15}{2}(21 + a_{15}) = 0$$

iz čega slijedi da je $a_{15} = -21$.

Sada koristimo izraz za opći član niza $a_{15} = a_1 + 14d$ pa dobivamo $d = -3$.

Konačno

$$a_{10} = a_1 + 9d = -6.$$

Geometrijski niz

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Uvod i
definicije

Aritmetički niz
Riješeni zadaci

Geometrijski
niz

Riješeni zadaci

Geometrijski
red

Riješeni zadaci

Definicija

Niz je **geometrijski** ako je kvocijent susjednih članova stalan i iznosi q :

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Broj q se naziva **količnik** ili **kvocijent** geometrijskog niza, a prvih par članova glasi: $a_1, a_2 = a_1q, a_3 = a_2q = a_1q^2, \dots$
Opći član niza:

$$a_n = a_1q^{n-1}.$$

Geometrijski niz

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Uvod i
definicije

Aritmetički niz
Riješeni zadaci

Geometrijski
niz

Riješeni zadaci

Geometrijski
red

Riješeni zadaci

Definicija

Niz je **geometrijski** ako je kvocijent susjednih članova stalan i iznosi q :

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Broj q se naziva **količnik** ili **kvocijent** geometrijskog niza, a prvih par članova glasi: $a_1, a_2 = a_1q, a_3 = a_2q = a_1q^2, \dots$
Opći član niza:

$$a_n = a_1q^{n-1}.$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Zadatak 4.

Umnožak prva tri člana rastućeg geometrijskog niza iznosi 1728 a njihov zbroj 63. Koliki je treći član tog niza?

Zadatak 4.

Umnožak prva tri člana rastućeg geometrijskog niza iznosi 1728 a njihov zbroj 63. Koliki je treći član tog niza?

Rješenje.

$$a_1 a_2 a_3 = a_1^3 q^3 = 1728 \Rightarrow a_1 q = 12 \Rightarrow a_1 = \frac{12}{q}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1(1 + q + q^2) = \frac{12}{q}(1 + q + q^2) = 63$$

$$\Rightarrow 12q^2 - 51q + 12 = 0 \Rightarrow q_1 = 4, q_2 = \frac{1}{4}$$

Niz je rastući pa slijedi $q = 4$, a članovi niza su redom 3, 12, 48.

Zadatak 5.

U geometrijskom nizu od 20 članova zbroj prvih 10 članova niza 10 puta je manji od zbroja posljednjih 10 članova. Odredite kvocijent tog geometrijskog niza.

Zadatak 5.

U geometrijskom nizu od 20 članova zbroj prvih 10 članova niza 10 puta je manji od zbroja posljednjih 10 članova. Odredite kvocijent tog geometrijskog niza.

Rješenje

Uvjet zadatka nam daje

$$10(a_1 + \dots + a_{10}) = a_{11} + \dots + a_{20}.$$

Sada uvrstimo $a_{11} = a_1 \cdot q^{10}, \dots, a_{20} = a_{10} \cdot q^{10}$ i dobivamo

$$10(a_1 + \dots + a_{10}) = (a_1 + \dots + a_{10}) \cdot q^{10}$$

odnosno $q = \pm \sqrt[10]{10}$.

Geometrijski red

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Uvod i
definicije

Aritmetički niz
Riješeni zadaci

Geometrijski
niz

Riješeni zadaci

Geometrijski
red

Riješeni zadaci

Definicija geometrijskog reda

Izraz oblika

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$

nazivamo **redom** i kraće označavamo $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Geometrijski red

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Uvod i
definicije

Aritmetički niz
Riješeni zadaci

Geometrijski
niz

Riješeni zadaci

Geometrijski
red

Riješeni zadaci

Definicija geometrijskog reda

Izraz oblika

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$

nazivamo **redom** i kraće označavamo $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Geometrijski red dobivamo zbrajanjem članova geometrijskog niza. Vrijedi sljedeća formula za sumu geometrijskog reda:

$$S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1 - q},$$

uz uvjet da je $|q| < 1$.

Zadatak 6.

Izračunajte sumu

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \dots$$

Zadatak 6.

Izračunajte sumu

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \dots$$

Rješenje.

Budući se radi o geometrijskom redu s kvocijentom $q = -\frac{1}{5}$ za koji vrijedi $|q| < 1$, slijedi da je suma jednaka:

$$S = 1 + \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^3 + \dots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{5}{6}.$$

Zadatak 7.

Izračunajte $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[24]{2} \cdot \dots$

Zadatak 7.

Izračunajte $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[24]{2} \cdot \dots$

Rješenje.

Dobivamo

$$2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{12}} \cdot \dots = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots} = 2^{\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

gdje smo iskoristili formulu za sumu geometrijskog reda s $a_1 = \frac{1}{3}$ i $q = \frac{1}{2}$ odnosno

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Literatura I

Elementarna
matematika

ZPM - FER

Uvod i
definicije

Aritmetički niz
Riješeni zadaci

Geometrijski
niz
Riješeni zadaci

Geometrijski
red
Riješeni zadaci



Branimir Dakić, Neven Elezović,
Matematika u 24 lekcije,
Element, Zagreb, 2010.



Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zavod za
primijenjenu matematiku,
Repetitorij elementarne matematike,
Element, Zagreb, 2014.

Materijale pripremio: doc.dr.sc. Tomislav Burić