4. tjedan
Kompleksni brojevi

ZPM - FER

rujan, 2015

Sadržaj

Definicije

Definicija

Kompleksni broj je broj oblika

$$z = x + yi$$

gdje su x i y realni brojevi, a i je imaginarna jedinica za koju vrijedi $i^2 = -1$.

Broj x nazivamo **realni** dio, a y **imaginarni** dio kompleksnog broja z i pišemo

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y.$$

Skup kompleksnih brojeva označavamo sa $\mathbb{C}$ i vrijedi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- Prikaz u obliku $z = x + iy$ se naziva **standardni** ili **algebarski** prikaz kompleksnog broja.
- Za svaki kompleksni broj $z = x + iy$ definiramo njegov **konjugirano kompleksni broj** kao $\overline{z} = x - yi$.

- Prikaz u obliku $z = x + iy$ se naziva **standardni** ili **algebarski** prikaz kompleksnog broja.
- Za svaki kompleksni broj $z = x + iy$ definiramo njegov **konjugirano kompleksni broj** kao $\bar{z} = x - yi$.

Jednakost kompleksnih brojeva

Dva kompleksna broja z_1 i z_2 su **jednaka** ako su im jednaki realni i imaginarni dijelovi, tj. ako vrijedi $\mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2$ i $\mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2$.

Operacije s kompleksnim brojevima

- **Zbrajanje** i **oduzimanje** kompleksnih brojeva se definira na prirodan način kao zbrajanje i oduzimanje po komponentama:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2) i.$$

- **Množenje** kompleksnih brojeva definiramo kao umnožak binoma:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i.$$

- za zbrajanje i množenje vrijede uobičajena svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti

- **Dijeljenje** kompleksnih brojeva se vrši tako da proširimo brojnik i nazivnik s konjugirano kompleksnim brojem nazivnika:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$$

Zadatak 1.

Neka je $z = \dfrac{1-i}{2+i} - \dfrac{3-i}{4+i}$. Odredite $\operatorname{Im} z$.

Zadatak 1.

Neka je $z = \dfrac{1-i}{2+i} - \dfrac{3-i}{4+i}$. Odredite $\operatorname{Im} z$.

Rješenje.

$$z = \frac{1-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} - \frac{3-i}{4+i} \cdot \frac{4-i}{4-i} = \frac{1-3i}{5} - \frac{11-7i}{17}$$

$$\Rightarrow \quad z = -\frac{38}{85} - \frac{16}{85} i \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} z = -\frac{16}{85}.$$

Zadatak 2.

Riješite jednadžbu u skupu $\mathbb{C}$: $z^2 + 1 = \bar{z}$.

Zadatak 2.

Riješite jednadžbu u skupu $\mathbb{C}$: $z^2 + 1 = \bar{z}$.

Rješenje.

Iz $(x + yi)^2 + 1 = x - yi$ slijedi

$$x^2 + \underline{2xyi} - y^2 + 1 = x\underline{-yi}.$$

Iz jednakosti kompleksnih brojeva slijedi: $2xy = -y$ i $x^2 - y^2 + 1 = x$. Rješavanjem prve jednadžbe dobivamo: $2xy = -y \quad \Rightarrow \quad y(2x + 1) = 0$ odnosno $y = 0$ ili $x = \frac{1}{2}$. Sada u oba slučaja riješimo i drugu jednadžbu.

(1) $\quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 1 = x \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} \notin \mathbb{R}$

(2) $\quad x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} - y^2 + 1 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

Konačna rješenja: $\quad z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$

Potencije imaginarne jedinice

$$
\begin{aligned}
i^{4k} &= 1 \\
i^{4k+1} &= i \\
i^{4k+2} &= -1 \\
i^{4k+3} &= -i
\end{aligned}
$$

Potencije imaginarne jedinice

$$\begin{aligned} i^{4k} &= 1 \\ i^{4k+1} &= i \\ i^{4k+2} &= -1 \\ i^{4k+3} &= -i \end{aligned}$$

Primjer.

$$1 + i + i^2 + i^3 + \ \dots \ + i^{96} + i^{97} + i^{98} + i^{99} =$$

$$= 1 + i - 1 - i + \ \dots \ + i^{4\cdot 24} + i^{4\cdot 24+1} + i^{4\cdot 24+2} + i^{4\cdot 24+3} =$$

$$= 0 + 0 + \cdots + 1 + i - 1 + i = 0.$$

Kompleksna ravnina

Svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ odgovara točno jedna točka (x, y) u **kompleksnoj (Gaussovoj) ravnini**.

Modul kompleksnog broja $z = x + yi$ je udaljenost točke (x, y) od ishodišta koordinatnog sustava:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Svojstva modula:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad |z^n| = |z|^n$$

Primijeti:

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Zadatak 3.

Odredi modul kompleksnog broja $\dfrac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)(\sqrt{5}+2i)}{\sqrt{13}+i\sqrt{3}}$.

Zadatak 3.

Odredi modul kompleksnog broja $\dfrac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)(\sqrt{5}+2i)}{\sqrt{13}+i\sqrt{3}}$.

Rješenje.

$$\left|\frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)(\sqrt{5}+2i)}{\sqrt{13}+i\sqrt{3}}\right| = \frac{|1+i\sqrt{3}||\sqrt{3}+i||\sqrt{5}+2i|}{|\sqrt{13}+i\sqrt{3}|}$$

$$= \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = 3.$$

Zadatak 4.

Izračunajte apsolutnu vrijednost kompleksnog broja $|z|$ ako je

$$z = \left(\frac{1+3i}{1-i}\right)^3 + \frac{1-3i}{1+i}.$$

Zadatak 4.

Izračunajte apsolutnu vrijednost kompleksnog broja $|z|$ ako je
$$z = \left(\frac{1+3i}{1-i}\right)^3 + \frac{1-3i}{1+i}.$$

Rješenje.

$$z = \left(\frac{1+3i}{1-i}\right)^3 + \frac{1-3i}{1+i} = \left(\frac{1+3i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right)^3 + \frac{1-3i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} =$$
$$= \frac{1}{8}(-2+4i)^3 + \frac{1}{2}(-2-4i) = (-1+2i)^3 + (-1-2i) =$$
$$= -1+6i+12-8i-1-2i = 10-4i$$
$$|z| = |10-4i| = 2|5-2i| = 2\sqrt{29}$$

Zadatak 5.

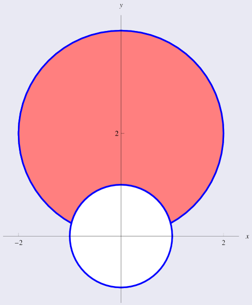
Skicirajte dio ravnine određen s $|z| \geq 1$, $|z - 2i| \leq 2$.

Zadatak 5.

Skicirajte dio ravnine određen s $|z| \geq 1$, $|z - 2i| \leq 2$.

Rješenje.

Jednadžbu $|z - z_0| = r$ možemo zapisati na način $|x + iy - (x_0 + iy_0)| = |(x - x_0) + i(y - y_0)| = r$, odnosno, slijedi: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Time smo dobili jednadžbu kružnice polumjera r sa središtem u točki (x_0, y_0) te je stoga rješenje zadatka prikazano na slici desno.



Zadatak 6.

Odredite kompleksan broj z ako je $Re\left(\frac{z}{1+i}\right) = -2$; $Im((3+2i)z) = 1$.

Zadatak 6.

Odredite kompleksan broj z ako je $Re\left(\frac{z}{1+i}\right) = -2$; $Im((3+2i)z) = 1$.

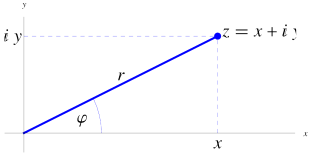
Rješenje.

Stavimo $z = a + bi$. Tada je $\frac{z}{1+i} = \frac{z}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{a+bi-ai+b}{2} = \frac{a+b}{2} + i\frac{b-a}{2}$. Sada smo dobili da je $Re(\frac{z}{1+i}) = \frac{a+b}{2} = -2$ odnosno $a + b = -4$. Lako se vidi da iz drugog uvjeta $Im((3+2i)(a+bi)) = 1$ dobivamo jednadžbu $2a + 3b = 1$. Rješenje dobivenog sustava je $a = -13$ i $b = 9$ pa je $z = -13 + 9i$.

Trigonometrijski prikaz

Prelazak iz kartezijevih u polarne koordinate:

$$x = r\cos\varphi, \;\; y = r\sin\varphi$$



Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ je modul kompleksnog broja, a φ nazivamo argumentom kompleksnog broja i vrijedi

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Zadatak 5.

Prikaži u trigonometrijskom obliku:

$$\text{a) } z = -\sqrt{3} + 3i \qquad \text{b) } z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

Zadatak 5.

Prikaži u trigonometrijskom obliku:

$$\text{a) } z = -\sqrt{3} + 3i \qquad \text{b) } z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

Rješenje.

a) $r = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$
$\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$ (II. kvadrant)

$$z = 2\sqrt{3}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$$

b) $r = \sqrt{2+2} = 2;$ $\quad \operatorname{tg}\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ (III. kvadrant)

$$z = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$$

Neka je $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Množenje i dijeljenje

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Operacije u trigonometrijskom obliku

Neka je $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Množenje i dijeljenje

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

De Moivreova formula za potenciranje kompleksnog broja

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Korjenovanje kompleksnog broja

- n-ti korijen kompleksnog broja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ima točno n različitih vrijednosti
- $$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$
- sve vrijednosti leže na kružnici sa središtem u ishodištu i polumjera $\sqrt[n]{r}$ te tvore pravilni n-terokut

Zadatak 6.

Izračunaj i prikaži u algebarskom obliku: $\dfrac{(2+2i)^{10}}{1-\frac{i}{\sqrt{3}}}$

Zadatak 6.

Izračunaj i prikaži u algebarskom obliku: $\dfrac{(2+2i)^{10}}{1-\frac{i}{\sqrt{3}}}$

Rješenje.

$$\frac{(2+2i)^{10}}{1-\frac{i}{\sqrt{3}}} = \frac{(\sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}))^{10}}{\sqrt{\frac{4}{3}}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})} = \frac{2^{15}(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2})}{\frac{2}{\sqrt{3}}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})} =$$

$$= 2^{14}\sqrt{3}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = 2^{14}\sqrt{3}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i).$$

Zadatak 7.

Odredi sve vrijednosti korijena $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$ i prikaži ih u kompleksnoj ravnini.

Zadatak 7.

Odredi sve vrijednosti korijena $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$ i prikaži ih u kompleksnoj ravnini.

Rješenje.

$$r = 2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{4\pi}{3} \text{ (III. kvadrant)}$$

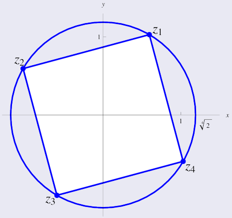
$$z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$k = 0: \quad z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$k = 1: \quad z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$k = 2: \quad z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$k = 3: \quad z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$



Zadatak 8.

Riješi jednadžbu: $(z + \frac{3}{4}i)^3 + i = 0.$

Zadatak 8.

Riješi jednadžbu: $(z + \frac{3}{4}i)^3 + i = 0.$

Rješenje.

Ovu jednadžbu rješavamo tako da prebacimo i na desnu stranu pa korjenujemo.

$$(z + \tfrac{3}{4}i)^3 = -i \quad \Rightarrow \quad z + \tfrac{3}{4}i = \sqrt[3]{-i}$$

$$z_k = \cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} - \frac{3}{4}i, \quad k = 0, 1, 2$$

$$k = 0: \quad z_0 = \cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{3}{4}i = \tfrac{1}{4}i$$

$$k = 1: \quad z_1 = \cos\tfrac{7\pi}{6} + i\sin\tfrac{7\pi}{6} - \tfrac{3}{4}i = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{5}{4}i$$

$$k = 2: \quad z_2 = \cos\tfrac{11\pi}{6} + i\sin\tfrac{11\pi}{6} - \tfrac{3}{4}i = \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{5}{4}i$$

Zadatak 9.

Riješi jednadžbu: $z^3 = (1+i)^6$.

Zadatak 9.

Riješi jednadžbu: $z^3 = (1+i)^6$.

Rješenje.

Kod rješavanja kompleksnih jednadžbi nikada ne kratimo potencije jer se gube rješenja! Prvo ćemo kompleksni broj na desnoj strani prebaciti u trigonometrijski oblik i potencirati. Dakle,

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

te je

$$(1+i)^6 = \sqrt{2}^6(\cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4}) = 8(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}).$$

Nastavak rješenja.

Sada je

$$z^3 = 8(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

odnosno

$$z = 2(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}), \ \ k = 0, 1, 2$$

$$k = 0: \quad z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2$$

$$k = 1: \quad z_1 = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$$

$$k = 2: \quad z_2 = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})$$

Literatura I

- Branimir Dakić, Neven Elezović,
  Matematika u 24 lekcije,
  Element, Zagreb, 2010.
- Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zavod za primijenjenu matematiku,
  Repetitorij elementarne matematike,
  Element, Zagreb, 2014.

Materijale pripremio: doc.dr.sc. Tomislav Burić