4. tjedan
Analitička geometrija.

ZPM - FER

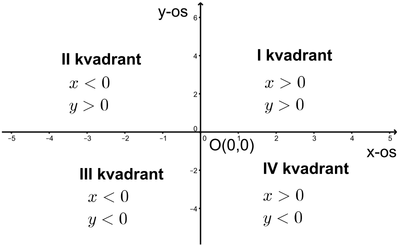
17. rujna 2016.

Sadržaj

Pravokutni ili Kartezijev koordinatni sustav u ravnini

Pravac x je os apscisa   Pravac y je os ordinata

$O(0,0)$ - ishodište pravokutnog koordinatnog sustava



Svaka točka u ravnini određena je pripadnim vrijednostima apscise i ordinate. Npr. Za točku $A(3,2)$ je $x_A = 3, y_A = 2$.

Primjer 1

Skicirajte skup točaka $T(x,y)$ ravnine za koje vrijedi:

$$y \leq -|x-1|$$

$$-3 \leq y \leq 1$$

Primjer 1

Skicirajte skup točaka $T(x,y)$ ravnine za koje vrijedi:

$$y \leq -|x-1|$$

$$-3 \leq y \leq 1$$

Rješenje.

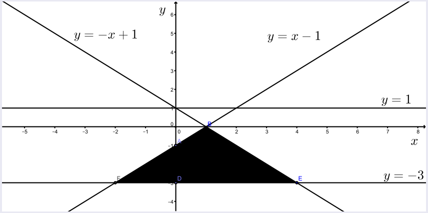
Prvo nacrtamo pravce:

$$y = \begin{cases} -x+1, & x \geq 1 \\ x-1, & x \leq 1 \end{cases}.$$

Sada je rješenje nejednakosti $y \leq -|x-1|$ područje ravnine ispod oba pravca.

Nastavak rješenja.

Rješenje nejednakosti $-3 \leq y \leq 1$ je dio ravnine između pravaca $y = 1$ i $y = -3$.
Presjek ta dva dijela ravnine je trokut na slici.



Udaljenost točaka u ravnini

Udaljenost dviju točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$

$$d(A,B) = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

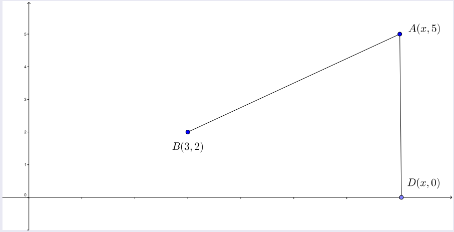
Udaljenost točaka u ravnini

Udaljenost dviju točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$

$$d(A,B) = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Primjer 2

Točka u prvom kvadrantu $A(x,5)$ jednako je udaljena od osi apscisa i od točke $B(3,2)$. Odredite x.



Rješenje.

$$d(A,B)=5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(5-2^2)}=5$$

Kvadriranjem imamo

$$x^2-6x+9+9=25$$

$$x^2-6x-7=0$$

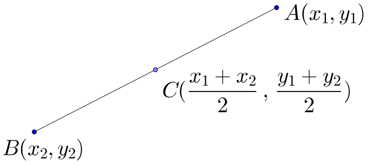
Odavde slijedi $x_1=-1$ i $x_2=7$.
Dakle, $A(7,5)$ je tražena točka u prvom kvadrantu.

Polovište dužine

Polovište dužine $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$

Koordinate točke C koja je polovište dužine $\overline{AB}$ glase:

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Primjer 3

Točka C simetrična je slika točke A s obzirom na točku B, a točka D simetrična je slika točke B s obzirom na C. Ako je $A(-1, 3)$, $C(3, -3)$, odredite točku D!

Primjer 3

Točka C simetrična je slika točke A s obzirom na točku B, a točka D simetrična je slika točke B s obzirom na C. Ako je $A(-1,3)$, $C(3,-3)$, odredite točku D! **Rješenje.**
Točka B je polovište dužine $\overline{AC}$, pa lagano slijedi

$$x_B = \frac{-1+3}{2} = 1 \quad y_B = \frac{3+(-3)}{2} = 0$$

Dakle, dobivamo $B(1,0)$. Točka D je simetrična slika od B s obzirom na C, dakle imamo

$$3 = \frac{x_D+1}{2} \quad -3 = \frac{y_D+0}{2}$$

Odavde dobivamo točku $D(5,-6)$.

Jednadžbe pravca

- Implicitni oblik jednadžbe pravca

$$Ax + By + C = 0$$

gdje je $A^2 + B^2 \neq 0,\ A, B, C \in \mathbb{R}$

Jednadžbe pravca

- Implicitni oblik jednadžbe pravca

$$Ax + By + C = 0$$

gdje je $A^2 + B^2 \neq 0,\ A, B, C \in \mathbb{R}$

- Eksplicitni oblik jednadžbe pravca

$$y = kx + l$$

pri čemu je k koeficijent smjera pravca, a l odsječak pravca na osi ordinata. Vrijedi $k = \operatorname{tg}\varphi$ gdje je φ kut koji pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa.

- Segmentni oblik jednadžbe pravca

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$$

gdje je $A(m,0)$ točka presjeka pravca s osi apscisa $B(0,n)$ je točka presjeka pravca s osi ordinata.

- Segmentni oblik jednadžbe pravca

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$$

gdje je $A(m,0)$ točka presjeka pravca s osi apscisa $B(0,n)$ je točka presjeka pravca s osi ordinata.

Napomena

Pravci oblika $y=l$, $l\in\mathbb{R}$ su paralelni s osi x.
Pravci oblika $x=c$, $c\in\mathbb{R}$ su paralelni s osi y.

Primjer 4

Odredi segmentni oblik jednadžbe pravca $2x+5y+7=0$.

Primjer 4

Odredi segmentni oblik jednadžbe pravca $2x+5y+7=0$.

Rješenje.

$$2x+5y=-7 \,|\cdot -\frac{1}{7}$$

$$\left(-\frac{2}{7}\right)x+\left(-\frac{5}{7}\right)y=1$$

$$\frac{x}{-\frac{7}{2}}+\frac{y}{-\frac{7}{5}}=1$$

Točke $A(-\frac{7}{2},0)$ i $B(0,-\frac{7}{5})$ su točke presjeka s x i y osi.

Primjer 5

Odredite površinu trokuta kojeg pravac $2x - 3y + 6 = 0$ zatvara s koordinatnim osima.

Primjer 5

Odredite površinu trokuta kojeg pravac $2x-3y+6=0$ zatvara s koordinatnim osima.

Rješenje. Prvo trebamo naći segmentni oblik pravca kako bi našli točke u kojima pravac siječe obje osi. Iz

$$2x-3y=-6 \mid \cdot -\frac{1}{6}$$

slijedi segmentni oblik pravca

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1.$$

Točka sjecišta s osi x je $A(-3,0)$, a s osi y je $B(0,2)$. Traženi trokut je pravokutan s katetama 2 i 3 te je površina jednaka $P=\frac{3\cdot 2}{2}=3$.

Pravac kroz jednu točku

Jednadžba pravca kroz točku (x_1, y_1) s koeficijentom smjera k

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Pravac kroz jednu točku

Jednadžba pravca kroz točku (x_1, y_1) s koeficijentom smjera k

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Primjer 6

Odredi jednadžbu pravca koji s pozitivnim dijelom osi apscisa zatvara kut od $\frac{\pi}{4}$ i prolazi točkom $A(3, 2)$.

Pravac kroz jednu točku

Jednadžba pravca kroz točku (x_1, y_1) s koeficijentom smjera k

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Primjer 6

Odredi jednadžbu pravca koji s pozitivnim dijelom osi apscisa zatvara kut od $\frac{\pi}{4}$ i prolazi točkom $A(3,2)$. **Rješenje.** Koeficijent smjera ovoga pravca je $k = \text{tg}\varphi = \text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Dakle, jednadžba pravca je

$$y - 2 = 1 \cdot (x - 3) \quad \text{odnosno} \quad y = x - 1.$$

Pravac kroz dvije točke

Jednadžba pravca kroz dvije točke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Primijetimo da je koeficijent smjera u ovom slučaju jednak

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Primjer 7

Odredite nepoznate koordinate točaka $E(x,-3)$ i $F(-1,y)$, ako one pripadaju pravcu AB, gdje je $A(-3,4)$ i $B(5,0)$.

Primjer 7

Odredite nepoznate koordinate točaka $E(x,-3)$ i $F(-1,y)$, ako one pripadaju pravcu AB, gdje je $A(-3,4)$ i $B(5,0)$.

Rješenje.

$$\mathrm{tg}\varphi = k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-4}{5+3}$$

Jednadžba pravca AB je

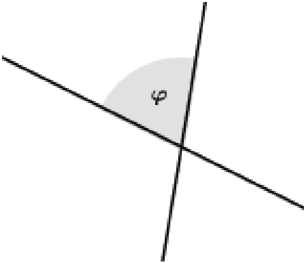
$$y-4=-\frac{1}{2}(x+3) \text{ odnosno } y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}.$$

Uvrštavanjem ordinate točke E u jednadžbu pravca AB dobivamo apscisu točke E, $x_E = 11$. Slično, uvrštavanjem apscise točke F u jednadžbu pravca AB dobivamo ordinatu točke F, $y_F = 3$.

Kut između pravaca

Kut između 2 pravca
$y = k_1 x + l_1$ i $y = k_2 x + l_2$
definira se kao manji kut kojeg zatvaraju dani pravci, tj. $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Računamo ga iz izraza

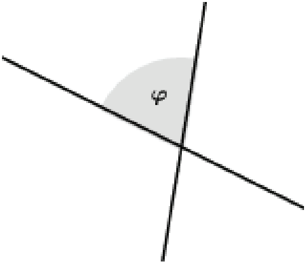
$$\mathrm{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$



Kut između pravaca

Kut između 2 pravca
$y = k_1 x + l_1$ i $y = k_2 x + l_2$
definira se kao manji kut kojeg zatvaraju dani pravci, tj.
$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Računamo ga iz izraza

$$\mathrm{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$



Paralelni i okomiti pravci

Pravci su paralelni $\Leftrightarrow \varphi = 0$ odnosno $k_1 = k_2$
Pravci su okomiti $\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ odnosno $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Primjer 8

Točkom $T(2,-1)$ položite pravac koji s pravcem $2x+3y+6=0$ zatvara kut od 45°

Primjer 8

Točkom $T(2,-1)$ položite pravac koji s pravcem $2x+3y+6=0$ zatvara kut od 45° **Rješenje.**
Jednadžba danog pravca u eksplicitnom obliku je $y=-\frac{2}{3}x-3$. Tražimo koeficijent smjera pravca koji prolazi točkom $T(2,-1)$. Pravci zatvaraju kut od 45° dakle vrijedi

$$\mathrm{tg}\varphi = 1 = \left|\frac{-\frac{2}{3}-k_1}{1-\frac{2}{3}k_1}\right|$$

Odavde dobivamo dva rješenja $k_{11}=-5, \quad k_{12}=\frac{1}{5}$. Traženi pravci su

$$p_1 \ldots y+1=-5(x-2) \qquad p_2 \ldots y+1=\frac{1}{5}(x-2)$$

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost točke (x_0, y_0) od pravca $Ax + By + C = 0$ računamo po formuli

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost točke (x_0, y_0) od pravca $Ax + By + C = 0$ računamo po formuli

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Primjer 9

Kolika je udaljenost pravca $y = -\frac{4}{3}x + 6$ od tjemena parabole $y = x^2 - 4x + 14$.

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost točke (x_0, y_0) od pravca $Ax + By + C = 0$ računamo po formuli

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Primjer 9

Kolika je udaljenost pravca $y = -\frac{4}{3}x + 6$ od tjemena parabole $y = x^2 - 4x + 14$. **Rješenje.**
Parabolu možemo zapisati u obliku $y - 10 = (x - 2)^2$ te je tjeme $T(2, 10)$. Udaljenost točke $T(2, 10)$ od pravca $4x + 3y - 18 = 0$ je

$$d = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 10 - 18|}{\sqrt{16 + 9}} = 4.$$

Zadatak

Zadatak 1

Zadan je trokut s vrhovima $A(-1,3)$, $B(3,1)$, i $C(0,3)$. Odredite jednadžbu pravca na kojem leži težišnica iz vrha C.

Zadatak

Zadatak 1

Zadan je trokut s vrhovima $A(-1,3)$, $B(3,1)$, i $C(0,3)$. Odredite jednadžbu pravca na kojem leži težišnica iz vrha C.

Rješenje.

Prisjetimo se da težišnica spaja vrh trokuta i polovište suprotne stranice tome vrhu. Dakle, tražena težišnica spaja vrh C i polovište dužine $\overline{AB}$. Označimo sa D polovište dužine $\overline{AB}$. Iz formule za polovište dužine lako dobivamo:

$$D(1,2).$$

Jednadžba pravca kroz $C(0,3)$ i $D(1,2)$ je

$$x+y=0.$$

Zadatak 2

Odredite površinu trokuta sa vrhovima $A(1,1)$, $B(4,2)$ i $C(3,4)$.

Zadatak 2

Odredite površinu trokuta sa vrhovima $A(1,1)$, $B(4,2)$ i $C(3,4)$.

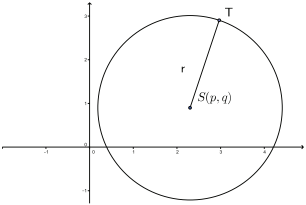
Rješenje

Zadatak se može riješiti na više načina. Npr. može se skicirati trokut u Kartezijevom sustavu, gledati pravokutnik koji sadrži dani trokut i pomalo oduzimati male pravokutne trokute. Postoji i formula za površinu trokuta zadanog s tri vrha.

No, možemo gledati duljinu dužine $\overline{AB}$ koja je jednaka $\sqrt{10}$ i pravac kroz A i B koji ima jednadžbu $x-3y+2=0$. Tada je visina na stranicu $\overline{AB}$ ustvari jednaka udaljenosti točke C od tog pravca odnosno $v_c = \frac{|x_c - 3y_c + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$. Tražena površina je $P = \frac{|\overline{AB}| \cdot v_c}{2} = \frac{7}{2}$.

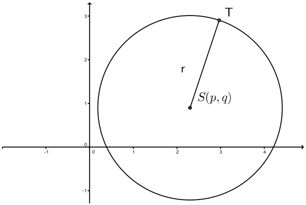
Jednadžba kružnice

Kružnica je zadana svojim središtem $S(p,q)$ i polumjerom r. Pri tome je $r = d(S,T)$, gdje je T proizvoljna točka na kružnici, a $d = 2r$ je dijametar kružnice.



Jednadžba kružnice

Kružnica je zadana svojim središtem $S(p,q)$ i polumjerom r. Pri tome je $r = d(S,T)$, gdje je T proizvoljna točka na kružnici, a $d = 2r$ je dijametar kružnice.

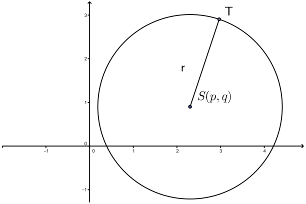


Jednadžba kružnice sa središtem $S(p,q)$ i radijusom r

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

Jednadžba kružnice

Kružnica je zadana svojim središtem $S(p,q)$ i polumjerom r. Pri tome je $r = d(S,T)$, gdje je T proizvoljna točka na kružnici, a $d = 2r$ je dijametar kružnice.



Jednadžba kružnice sa središtem $S(p,q)$ i radijusom r

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

Jednadžba kružnice sa središtem u ishodištu glasi

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Opći oblik jednadžbe kružnice

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Primjer 10

Odredite središte i radijus kružnice s općim oblikom $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Opći oblik jednadžbe kružnice

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Primjer 10

Odredite središte i radijus kružnice s općim oblikom $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

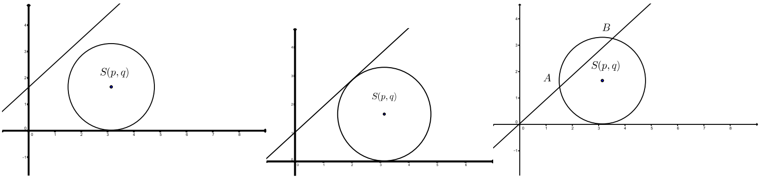
Rješenje. Koristimo svođenje na potpuni kvadrat po x i y:
$x^2 - 4x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4$ i $y^2 + 6y + 9 - 9 = (y+3)^2 - 9$.
Ubacimo dobiveno u jednadžbu i dobijemo

$$x^2 - 4x + y^3 + 6y - 3 = (x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 - 3 = 0$$

odnosno $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$. Dakle, središte je $S(2, -3)$ i $r = 4$.

Odnos pravca i kružnice

- Pravac i kružnica se ne sijeku.
- Presjek pravca i kružnice je jedna točka tj. pravac je tangenta kružnice.
- Presjek pravca i kružnice su dvije točke tj. pravac je sekanta kružnice.



Presjek pravca i kružnice

Presjek pravca i kružnice su točke koje dobijemo kao rješenja sustava

$$
\begin{aligned}
&(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\\
&y=kx+l.
\end{aligned}
$$

Sustav rješavamo supstitucijom odnosno tako da $y = kx + l$ uvrstimo u jednadžbu kružnice i dobijemo kvadratnu jednadžbu. Tada obzirom na diskriminantu jednadžbe imamo 3 slučaja:

- $D = 0 \Rightarrow$ 1 točka presjeka
- $D > 0 \Rightarrow$ 2 točke presjeka
- $D < 0 \Rightarrow$ nema presjeka

Kružnica i pravac -primjer

Primjer 11

Zadana je kružnica $(x-1)^2+(y-2)^2=(m-1)^2$, $m \neq 1$ te pravac $x-y+m+2=0$. Za koje vrijednosti parametra m pravac ne siječe kružnicu, za koje vrijednosti ju siječe u jednoj točki, a za koje u dvije točke?

Kružnica i pravac -primjer

Primjer 11

Zadana je kružnica $(x-1)^2+(y-2)^2=(m-1)^2$, $m \neq 1$ te pravac $x-y+m+2=0$. Za koje vrijednosti parametra m pravac ne siječe kružnicu, za koje vrijednosti ju siječe u jednoj točki, a za koje u dvije točke?

Rješenje.

Supstituciju $y=x+m+2$ uvrstimo u jednadžbu kružnice.
Sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2+(m-1)x+m=0.$$

Diskriminanta ove kvadratne jednadžbe je

$$D=(m-1)^2-4m=m^2-6m+1.$$

Nastavak rješenja.

- Kvadratna jednadžba ima jedno rješenje u slučaju da je $D=0$ tj. $m^2-6m+1=0$. Odavde slijedi da su tada $m_1=3-2\sqrt{2}$ i $m_2=3+2\sqrt{2}$. U tom slučaju pravac je tangenta na danu kružnicu.
- Za $m\in\langle-\infty,m_1\rangle\cup\langle m_2,\infty\rangle$ je $D>0$ te jednadžba ima 2 rješenja i pravac je sekanta kružnice.
- Za $m\in\langle m_1,m_2\rangle, m\neq 1$ je $D<0$ te pravac ne siječe i ne dira kružnicu.

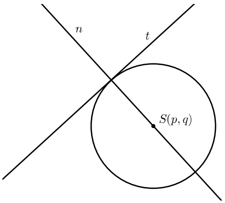
Tangenta i normala na kružnicu

Tangenta u točki $T(x_1, y_1)$ je pravac koji dodiruje kružnicu u toj točki.

Tangenta i normala na kružnicu

Tangenta u točki $T(x_1, y_1)$ je pravac koji dodiruje kružnicu u toj točki.

Normala u $T(x_1, y_1)$ je pravac okomit na tangentu u toj točki koji prolazi kroz središte $S(p, q)$.



Jednadžbe

Jednadžba normale na kružnicu u točki $T(x_1, y_1)$

$$n \ldots y - q = \frac{y_1 - q}{x_1 - p}(x - p)$$

Jednadžbe

Jednadžba normale na kružnicu u točki $T(x_1, y_1)$

$$n \ldots y - q = \frac{y_1 - q}{x_1 - p}(x - p)$$

Jednadžba tangente na kružnicu u točki $T(x_1, y_1)$

$$t \ldots y - y_1 = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}(x - x_1)$$

Primjer 12

Odredi jednadžbe onih tangenata kružnice $x^2 + y^2 = 9$ koje su usporedne s pravcem $3x - 4y + 8 = 0$. Odredi i normale u dobivenim točkama.

Primjer 12

Odredi jednadžbe onih tangenata kružnice $x^2+y^2=9$ koje su usporedne s pravcem $3x-4y+8=0$. Odredi i normale u dobivenim točkama.

Rješenje.

Označimo sa $T(x_1,y_1)$ točku na kružnici kroz koju prolaze tražene tangente. Koeficijent smjera zadanog pravca je $\frac{3}{4}$ pa je to i koeficijent tangente. Dakle, tangenta je oblika

$$y=\frac{3}{4}x+l,$$

gdje još trebamo naći koeficijent l.

Nastavak rješenja.

Točka $T_1(x_1, y_1)$ je na kružnici i zadovoljava njenu jednadžbu. Sada ubacimo supstituciju $y_1 = \frac{3}{4}x_1 + l$ u jednadžbu kružnice te dobijemo

$$\frac{25}{16}x_1^2 + \frac{3}{2}x_1 l + l^2 - 9 = 0.$$

Ova jednadžba treba imati jedinstveno rješenje jer tangenta dira kružnicu u jednoj točki. Iz uvjeta $D = 0$ slijedi

$$l = \pm\frac{15}{4}.$$

Tražene tangente su $3x - 4y + 15 = 0$ i $3x - 4y - 15 = 0$. Normala je $y = -\frac{4}{3}x$.

Primjer 13

Kolika je površina dijela ravnine koje je određeno sustavom nejednadžbi

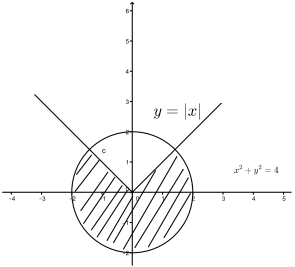
$$x^2 + y^2 \leq 4; \ \ |x| - y \geq 0?$$

Primjer 13

Kolika je površina dijela ravnine koje je određeno sustavom nejednadžbi

$$x^2 + y^2 \leq 4; \ \ |x| - y \geq 0?$$

Rješenje.

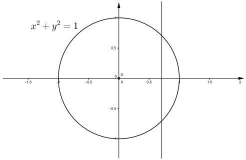


Rješenje prve nejednakosti je unutrašnjost kruga, a rješenje druge je ispod grafa funkcije $y = |x|$. Tražena površina je

$$P = \frac{3}{4} r^2 \pi = 3\pi.$$

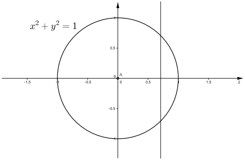
Kružnica nije funkcija

Npr. pogledajmo kružnicu $x^2 + y^2 = 1$.



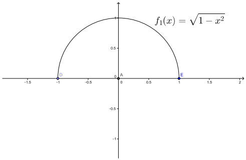
Kružnica nije funkcija

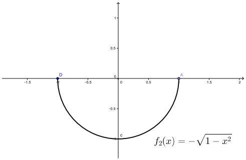
Npr. pogledajmo kružnicu $x^2 + y^2 = 1$.



Jednadžbom ove kružnice implicitno su zadane dvije funkcije i to

- $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ (lijeva slika)
- $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ (desna slika)





Za općenitu kružnicu danu jednadžbom

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

je:

- gornja polukružnica: $f_1(c)=q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}$
- donja polukružnica: $f_2(x)=q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}$

Primjer 14

Zadana je kružnica $(x+1)^2+(y-2)^2=1$. Odredite jednadžbu donje polukružnice.

Primjer 14

Zadana je kružnica $(x+1)^2+(y-2)^2=1$. Odredite jednadžbu donje polukružnice.

Rješenje.

$$(x+1)^2+(y-2)^2=1.$$

$$(y-2)^2=1-(x+1)^2$$

$$y-2=\pm\sqrt{1-(x+1)^2}$$

Donja polukružnica ima negativni predznak tj. $y-2=-\sqrt{1-(x+1)^2}$ te slijedi

$$y=2-\sqrt{1-(x+1)^2}.$$

Primjer 15

Skiciraj graf sjedeće funkcije $y = -2 + \sqrt{4 - x^2}$.

Primjer 15

Skiciraj graf sjedeće funkcije $y = -2 + \sqrt{4 - x^2}$.

Rješenje.

$$y = -2 + \sqrt{4 - x^2}$$

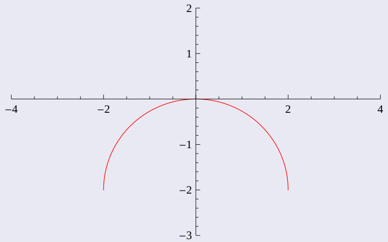
$$y + 2 = \sqrt{4 - x^2}$$

Prije kvadriranja primijetimo da je desna strana jednakosti pozitivna, pa slijedi da je $y + 2 \geq 0$. Sada kvadriranjem dobijemo $(y + 2)^2 = 4 - x^2$ odnosno kružnicu

$$x^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

Nastavak rješenja.

Dakle, zbog uvjeta $y \geq -2$, vidimo da je $y = -2 + \sqrt{4 - x^2}$ ustvari graf gornje polukružnice od $x^2 + (y+2)^2 = 4$.



Primjer 16

Koliko rješenja ima jednadžba $2x+1-\sqrt{4-x^2}=0$ u skupu realnih brojeva?

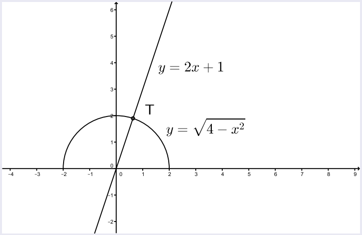
Primjer 16

Koliko rješenja ima jednadžba $2x+1-\sqrt{4-x^2}=0$ u skupu realnih brojeva?

Rješenje.

Jednadžbu ćemo riješiti grafički. Zapišimo je kao

$$2x+1=\sqrt{4-x^2}.$$



Lijeva strana je pravac $y = 2x+1$, a desna strana je gornja polukružnica kružnice $x^2+y^2=4$. Jasno je da je rješenje ove jednadžbe presjek pravca i dane polukružnice, a to je jedna točka.

Elipsa

Jednadžba elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- a, b = poluosi elipse
- fokusi elipse : $F(\pm e, 0)$, $e^2 = a^2 - b^2$.

Elipsa

Jednadžba elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- a, b = poluosi elipse
- fokusi elipse : $F(\pm e, 0)$, $e^2 = a^2 - b^2$.

Pomaknuta elipsa sa središtem u $S(p,q)$

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

Primjer 17

Odredite malu i veliku poluos elipse $x^2 - 4x + 4y^2 + 16y + 16 = 0$.

Primjer 17

Odredite malu i veliku poluos elipse $x^2 - 4x + 4y^2 + 16y + 16 = 0$.

Rješenje.

Ovaj problem se rješava slično kao kod jednadžbe kružnice odnosno svođenjem na potpuni kvadrat. Dakle, imamo $(x^2 - 4x + 4) + (4y^2 + 16y + 16) - 4 - 16 + 16 = 0$ odnosno $(x-2)^2 + 4(y+2)^2 = 4$. Sada dijelimo s 4 i dobivamo

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$$

te je $a = 2$ i $b = 1$.

Hiperbola

Jednadžba hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

- a, b = poluosi hiperbole
- fokusi hiperbole = $F(\pm e, 0)$, $e^2 = a^2 + b^2$
- asimptote hiperbole su pravci $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$

Hiperbola

Jednadžba hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

- a, b = poluosi hiperbole
- fokusi hiperbole = $F(\pm e, 0)$, $e^2 = a^2 + b^2$
- asimptote hiperbole su pravci $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$

Pomaknuta hiperbola sa središtem u $S(p,q)$

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

Primjer 18

Odredite kut pod kojim se sijeku asimptote hiperbole $x^2 - 3y^2 = 9$.

Primjer 18

Odredite kut pod kojim se sijeku asimptote hiperbole $x^2 - 3y^2 = 9$.

Rješenje.

Hiperbola glasi $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ te su $a = 3$ i $b = \sqrt{3}$. Dakle, asimptote su pravci $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$. Koristeći formulu za kut između dva pravca dobivamo

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{3}$$

te je $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Parabola

Jednadžba parabole

$$y^2 = 2px.$$

Točka $F(\frac{p}{2}, 0)$ naziva se fokus parabole.

Jednadžba pomaknute parabole s tjemenom u $T(a,b)$

$$(y-b)^2 = 2p(x-a).$$

Analogno kao kod kružnice funkcija $y = b + \sqrt{2p(x-a)}$ predstavlja gornji dio parabole, a funkcija $y = b - \sqrt{2p(x-a)}$ donji dio parabole.

Primjer 19

Odredite jednadžbu tangente na parabolu $y^2 = 9x$ koja je paralelna s pravcem $3x + 2y - 4 = 0$.

Primjer 19

Odredite jednadžbu tangente na parabolu $y^2 = 9x$ koja je paralelna s pravcem $3x + 2y - 4 = 0$.

Rješenje.

Eksplicitni oblik jednadžbe ovog pravca je $y = -\frac{3}{2}x + 2$. Tangenta je paralelna s pravcem pa je njezin koeficijent smjera $k_t = -\frac{3}{2}$. Dakle, tangenta je oblika $y = -\frac{3}{2}x + l$. Tangenta siječe parabolu u jednoj točki pa moramo naći l tako da jednadžba

$$\left(-\frac{3}{2}x + l\right)^2 = 9x$$

Nastavak rješenja.

odnosno jednadžba

$$9x^2 - 12x(l+3) + 4l^2 = 0$$

ima samo jedno rješenje x. To je u slučaju kada je diskriminanta ove kvadratne jednadžbe jednaka 0. Dakle

$$D = (-12(l+3))^2 - 16 \cdot 9l^2 = 0$$

odnosno $l = -\frac{3}{2}$. Tražena tangenta je $3x + 2y + 3 = 0$.

Literatura

- Branimir Dakić, Neven Elezović: Matematika u 24 lekcije, Element 2010.
- Matko Ferić (ZPM), Repetitorij elementarne matematike, Element 2014.

Materijale pripremila: doc.dr.sc. Ana Žgaljić Keko