Elementarna matematika - 4. tjedan

ZADACI ZA VJEŽBU

Kompleksni brojevi

1. Izračunaj $\left(1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}\right)^3$.
2. Izračunaj $(1+i\sqrt{3})^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$.
3. Odredi Rez ako je $z=\frac{1-i}{2+i}-\frac{3-i}{4+i}$.
4. Ako je $z_1=3-i$, $z_2=1-3i$, koliko je $z_1^2\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2^2$?
5. Ako je $\frac{x+2}{3+2i}-\frac{y+3}{3-2i}=1$, $x,y\in\mathbb{R}$, koliko je $5x-y$?
6. Odredi kompleksni broj z za koji vrijedi $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{1+i}\right)=-2$, te $\mathrm{Im}((3+2i)z)=1$.
7. Izračunaj apsolutnu vrijednost broja $z=\left(\frac{1+3i}{1-i}\right)^3+\frac{1-3i}{1+i}$?
8. Koliki je modul kompleksnog broja $z=\frac{3-4i}{17-11i}\cdot\frac{17+11i}{2-i}$?
9. Ako za kompleksni broj z vrijedi $\frac{z}{1-2i}-\frac{2\overline{z}}{1+2i}=5i$, koliki je $|z|$?
10. Nađi sve kompleksne brojeve za koje vrijedi $|z+i|=1$, $|z-i|=3$.
11. Koliki je modul kompleksnog broja $z=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}-i\sin\frac{7\pi}{6}\right)^2$?
12. Odredi argument kompleksnog broja $z=\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}\right)^2$.
13. Neka je $\arg z=\frac{2\pi}{3}$ i $|z|=2\sqrt{3}$. Prikaži $z-4i$ u trigonometrijskom obliku.
14. Izračunaj:
    (a) $(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{17}\cdot(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12})$
    (b) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^7}{16\cos\frac{\pi}{12}+16i\sin\frac{\pi}{12}}$
15. Riješi jednadžbe u skupu $\mathbb{C}$:
    (a) $z^4=(1-\sqrt{3}i)^8$
    (b) $z^6=(\sqrt{3}i-1)^5\cdot(\sqrt{3}+i)^{13}$

Rješenja - kompleksni brojevi

1. i
2. $-8i$
3. $-\frac{38}{85}$
4. $8-8i$
5. 6
6. -13+9i
7. $2\sqrt{29}$
8. $\sqrt{5}$
9. $\frac{5\sqrt{5}}{3}$
10. -2i
11. 2
12. $\frac{4\pi}{3}$
13. $2\text{cis}\frac{7\pi}{6}$
14. **(a)** $\text{cis}\frac{21\pi}{12}$ **(b)** $8\text{cis}\frac{3\pi}{4}$
15. **(a)** $4\text{cis}(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}),\ k=0,1,2,3$ **(b)** $8\text{cis}(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}),\ k=0,1,2,3,4,5$