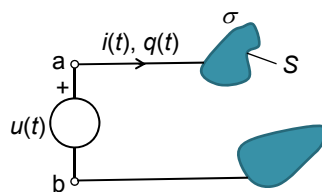


# Poopćenje elemenata električkih krugova

## Poopćeni kapacitet

## Poopćeni kapacitet

- Idealni električki sustav bez gubitaka čine dva vodljiva (ekvipotencijalna) tijela, između kojih nema vodljivih puteva, spojena na naponski izvor preko dvije priključnice:



Struja u krugu je:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

- Naboj na vodljivom tijelu površine  $S$  je:

$$q(t) = \int_S \sigma(t) \cdot dS$$

- $\sigma(t)$  je površinska gustoća naboja ( $C/m^2$ )
- Za skup vodljivih tijela uobičajeno je jedno tijelo uzeti kao referentno i pridijeliti mu potencijal nula, a potencijale svih ostalih tijela izraziti u odnosu na referentno tijelo.
- Naboj  $q$  ovisi o priključenom naponu, svojstvima materijala između nabijenih tijela i geometriji.

3

- Pretpostavimo da je geometrija sustava nepromjenjiva osim jednog pokretnog dijela čija se trenutna pozicija može opisati pomakom  $x$  u odnosu na referentni položaj. Naboj na tijelu je onda:

$$q = q(u, x)$$

- Struja koju daje izvor (iz priključnica) je:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\partial q}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

4

- Ako je sustav s električki linearnim materijalom, to je električki linearan sustav:

$$q = C(x) \cdot u$$

$$i(t) = C(x) \frac{du}{dt} + u \frac{dC(x)}{dx} \frac{dx}{dt}$$

- Ako je geometrija nepromjenjiva:

$$i(t) = C \frac{du}{dt}$$

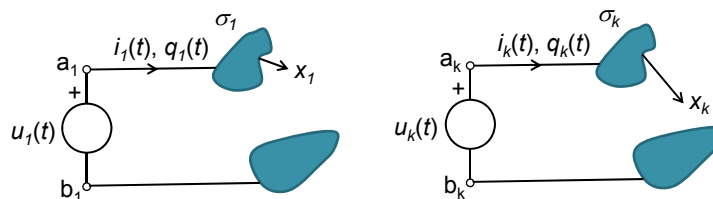
- Elektromehanički sustavi često imaju:
  - više od jednog para električkih priključnica
  - više od jednog mehaničkog pomaka

5

- Za električki sustav s  $N+1$  vodljivih tijela, odaberemo jedno tijelo s referentnim nultim potencijalom i priključimo  $N$  napona ( $u_1, u_2, \dots, u_N$ ) na  $N$  parova električkih priključnica. Naboj na  $k$ -tom tijelu je:

$$q_k(t) = \int_{S_k} \sigma_k(t) \cdot dS_k$$

- $S_k$  je površina  $k$ -tog tijela



6

- Ako je mogućih  $M$  mehaničkih pomaka  $(x_1, x_2, \dots, x_M)$ , naboj na  $k$ -tom tijelu je:

$$q_k = q_k(u_1, u_2, \dots, u_N; x_1, x_2, \dots, x_M) ; k = 1, 2, \dots, N$$

- Struja  $k$ -tog izvora (para priključnica) je:

$$i_k(t) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial q_k}{\partial u_j} \frac{du_j}{dt} + \sum_{j=1}^M \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} ; k = 1, 2, \dots, N$$

- Ako je sustav električki linearan (s električki linearnim materijalom):

$$q_k(t) = \sum_{i=1}^N b_{ki}(x_1, x_2, \dots, x_M) \cdot u_i ; k = 1, 2, \dots, N$$

- $b_{ki}$  je kapacitivni koeficijent između  $k$ -tog i  $i$ -tog tijela

7

- Kapacitivni koeficijenti između tijela su jednaki:

$$b_{ki} = b_{ik}$$

- Struja  $k$ -tog izvora (para priključnica) je:

$$i_k(t) = \sum_{j=1}^N b_{kj} \frac{du_j}{dt} + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N u_i \frac{\partial b_{ki}}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} ; k = 1, 2, \dots, N$$

- Varijable  $u_i$  i  $x_j$  su neovisne pa mogu zamijeniti mjesta:

$$i_k(t) = \sum_{j=1}^N b_{kj} \frac{du_j}{dt} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M u_i \frac{\partial b_{ki}}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} ; k = 1, 2, \dots, N$$

8

- Naboj između  $k$ -tog i  $i$ -tog tijela možemo izraziti preko napona  $u_{ki}$  i parcijalnog kapaciteta  $C_{ki}$  među njima:

$$q_{ki} = C_{ki} u_{ki} = C_{ki} (\varphi_k - \varphi_i)$$

- Ukupni naboj na  $k$ -tom tijelu je:

$$q_k = \sum_{i=1}^N q_{ki} = \sum_{i=1}^N C_{ki} (\varphi_k - \varphi_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N C_{ki} (\varphi_k - \varphi_i) + C_{kk} \cdot \varphi_k$$

- Naboj iskazan preko kapacitivnih koeficijenta:

$$q_k = \sum_{i=1}^N b_{ki} \cdot u_i = \sum_{i=1}^N b_{ki} \cdot \varphi_i$$

- $u_i$  napon  $i$ -tog tijela prema tijelu nultog potencijala

9

- Možemo ga pisati i kao:

$$q_k = \sum_{i=1}^N b_{ki} \cdot \varphi_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N b_{ki} (\varphi_i - \varphi_k) + \sum_{i=1}^N b_{ki} \cdot \varphi_k$$

- Izjednačenjem izraza za naboj:

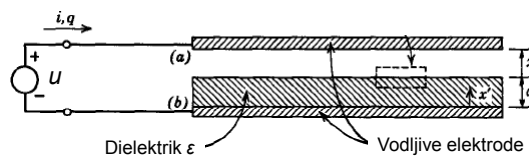
$$q_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N b_{ki} (\varphi_i - \varphi_k) + \sum_{i=1}^N b_{ki} \cdot \varphi_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N C_{ki} (\varphi_k - \varphi_i) + C_{kk} \cdot \varphi_k$$

slijede parcijalni kapaciteti:

$$C_{kk} = \sum_{i=1}^N b_{ki} \quad ; \quad C_{ki} = C_{ik} = -b_{ki}$$

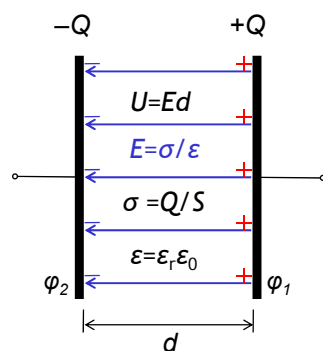
10

- Primjer I: Pločasti kondenzator ispunjen je izolatorom dielektrične konstante  $\epsilon$ , debljine  $d$  i zrakom debljine sloja  $x$ . Površina ploča je  $S$ . Gornja ploča se može pomicati. Odrediti struju izvora, ako je kondenzator priključen na vremenski promjenjiv napon  $u(t)$ .



11

- Osvježavanje znanja iz OE



Pločasti kondenzator:

- Električno polje usmjereno od “+” k “-” naboju
- Električno polje usmjereno od višeg k nižem potencijalu
- Ekvipotencijale: ravnine paralelne pločama

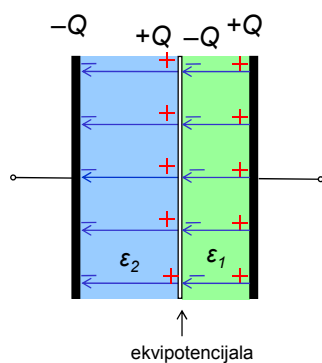
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon \cdot S} \Rightarrow Q = \epsilon ES$$

$$U = \phi_1 - \phi_2$$

$$U = E \cdot d = \frac{Qd}{\epsilon \cdot S} \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \epsilon \frac{S}{d}$$

12

- Dvoslojni pločasti kondenzator



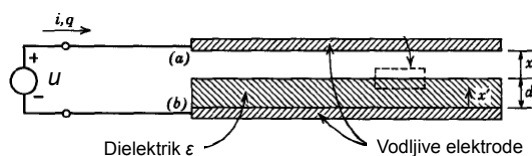
- ubacimo tanku metalnu foliju između slojeva (u ekvipotencijalu)
- polje se ne mijenja
- influencija naboja na foliji
- dva serijski spojena kondenzatora



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

13

- U primjeru je:



$$E_d = \frac{q}{\varepsilon \cdot S} \quad , \quad u_d = E_d \cdot d = \frac{qd}{\varepsilon \cdot S}$$

$$E_z = \frac{q}{\varepsilon_0 \cdot S} \quad , \quad u_z = E_z \cdot x = \frac{qx}{\varepsilon_0 \cdot S}$$

- Napon izvora je:

$$u = u_d + u_z = \frac{qd}{\varepsilon \cdot S} + \frac{qx}{\varepsilon_0 \cdot S} = q \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot S} \left( \frac{d}{\varepsilon_r} + x \right)$$

14

- Naboj i kapacitet su:

$$q = \frac{\varepsilon_0 S u}{\frac{d}{\varepsilon_r} + x}, \quad C(x) = \frac{q}{u} = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d}{\varepsilon_r} + x}$$

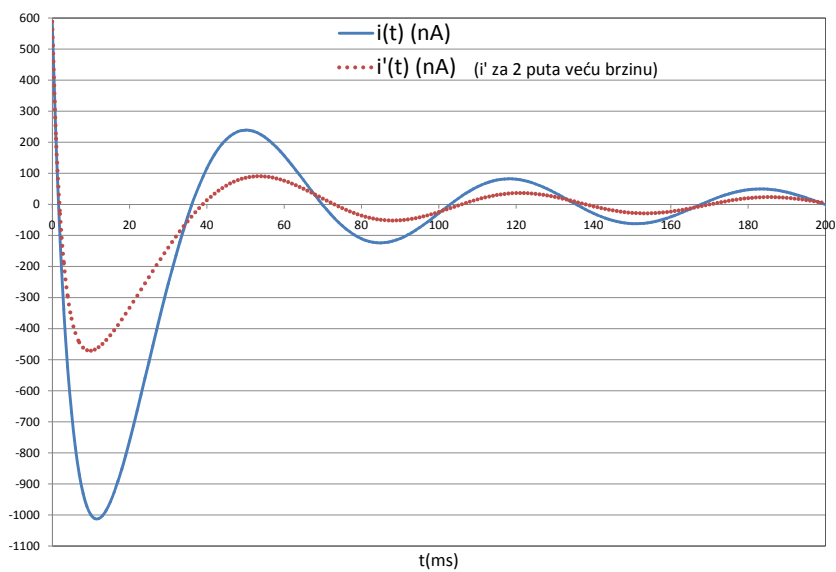
- Struja je:

$$i(t) = C(x) \frac{du}{dt} + u \frac{dC(x)}{dx} \frac{dx}{dt}$$

$$i(t) = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d}{\varepsilon_r} + x} \frac{du(t)}{dt} - u(t) \frac{\varepsilon_0 S}{\left(\frac{d}{\varepsilon_r} + x\right)^2} \frac{dx}{dt}$$

- Drugi član pokazuje kako se može dobiti vremenski promjenjiva struja mehaničkim pomakom

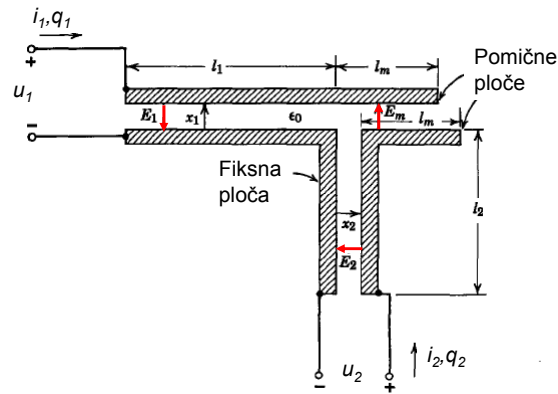
15



16



- Primjer 2: Električni sustav u zraku čine 3 ploče koje formiraju 3 pločasta kondenzatora. Dimenzija ploča okomito na papir je  $l_a$ . Gornja i desna ploča se mogu pomicati. Odrediti struje izvora, ako je sustav priključen na vremenski promjenjive napone  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$ .



17

- Jakosti električnih polja naznačenih smjerova su:

$$E_1 = \frac{u_1}{x_1}, \quad E_2 = \frac{u_2}{x_2}, \quad E_m = \frac{u_2 - u_1}{x_1}$$

- Naboji na pločama su: ( $Q = \epsilon ES$ )

$$q_1 = l_1 l_a \epsilon_0 E_1 - (l_m - x_2) l_a \epsilon_0 E_m$$

$$q_2 = l_2 l_a \epsilon_0 E_2 + (l_m - x_2) l_a \epsilon_0 E_m$$

- odnosno:

$$q_1 = u_1 \frac{\epsilon_0 l_a (l_1 + l_m - x_2)}{x_1} - u_2 \frac{\epsilon_0 l_a (l_m - x_2)}{x_1}$$

$$q_2 = -u_1 \frac{\epsilon_0 l_a (l_m - x_2)}{x_1} + u_2 \epsilon_0 l_a \left( \frac{l_2}{x_2} + \frac{l_m - x_2}{x_1} \right)$$

18

$$q_k(t, x_1, x_2) = \sum_{i=1}^2 b_{ki}(x_1, x_2) \cdot u_i(t) ; \quad k = 1, 2$$

- Kapacitivni koeficijenti  $b_{ki}$  su:

$$b_{11} = \frac{\varepsilon_0 l_a (l_1 + l_m - x_2)}{x_1} ; \quad b_{12} = b_{21} = -\frac{\varepsilon_0 l_a (l_m - x_2)}{x_1}$$

$$b_{22} = \varepsilon_0 l_a \left( \frac{l_2}{x_2} + \frac{l_m - x_2}{x_1} \right)$$

- Struje izvora su:

$$i_k(t) = \sum_{j=1}^2 b_{kj} \frac{du_j}{dt} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 u_i \frac{\partial b_{ki}}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} ; \quad k = 1, 2$$

19

$$\begin{aligned} i_1(t) = & b_{11} \frac{du_1(t)}{dt} + b_{12} \frac{du_2(t)}{dt} + \\ & + u_1 \frac{\partial b_{11}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + u_1 \frac{\partial b_{11}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \\ & + u_2 \frac{\partial b_{12}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + u_2 \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2(t) = & b_{12} \frac{du_1(t)}{dt} + b_{22} \frac{du_2(t)}{dt} + \\ & + u_1 \frac{\partial b_{12}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + u_1 \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \\ & + u_2 \frac{\partial b_{22}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + u_2 \frac{\partial b_{22}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \end{aligned}$$

20

- Parcijalne derivacije kapacitivnih koeficijenata su:

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial x_1} = -\frac{\varepsilon_0 l_a (l_1 + l_m - x_2)}{x_1^2}$$

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial x_2} = -\frac{\varepsilon_0 l_a}{x_1}$$

$$\frac{\partial b_{12}}{\partial x_1} = \frac{\varepsilon_0 l_a (l_m - x_2)}{x_1^2}$$

$$\frac{\partial b_{12}}{\partial x_2} = \frac{\varepsilon_0 l_a}{x_1}$$

$$\frac{\partial b_{22}}{\partial x_1} = -\frac{\varepsilon_0 l_a (l_m - x_2)}{x_1^2}$$

$$\frac{\partial b_{22}}{\partial x_2} = -\frac{\varepsilon_0 l_a l_2}{x_2^2} - \frac{\varepsilon_0 l_a}{x_1}$$

21

- Parcijalni kapaciteti su:

$$C_{ii} = \sum_{k=1}^N b_{ik} \quad ; \quad C_{ik} = C_{ki} = -b_{ik}$$

$$C_{11} = \sum_{k=1}^2 b_{1k} = b_{11} + b_{12} = \varepsilon_0 \frac{l_a l_1}{x_1}$$

$$C_{22} = \sum_{k=1}^2 b_{2k} = b_{21} + b_{22} = \varepsilon_0 \frac{l_a l_2}{x_2}$$

$$C_{12} = C_{21} = -b_{12} = \varepsilon_0 \frac{l_a (l_m - x_2)}{x_1}$$

22

- Numerički primjer

- Istosmjerni naponi:  $U_1 = 18\text{ V}$ ,  $U_2 = 24\text{ V}$
- $l_d = l_1 = l_2 = l_m = 10\text{ cm}$
- Početne pozicije ploča su:  $x_{10} = x_{20} = 1\text{ cm}$
- Ploča 1 se odmiče stalnom brzinom  $v_1 = 1\text{ cm/s}$
- Ploča 2 se primiče stalnom brzinom  $v_2 = 0,05\text{ cm/s}$
- Promjena naboja na pločama i vremenski promjenjive struje izvora nastaju samo zbog pomaka ploča

23

$$i_1(t) = U_1 \left( \frac{\partial b_{11}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial b_{11}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \right) + U_2 \left( \frac{\partial b_{12}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \right)$$

$$i_1(t) = U_1 \left( \frac{\partial b_{11}}{\partial x_1} v_1 - \frac{\partial b_{11}}{\partial x_2} v_2 \right) + U_2 \left( \frac{\partial b_{12}}{\partial x_1} v_1 - \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2} v_2 \right)$$

$$i_2(t) = U_1 \left( \frac{\partial b_{12}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \right) + U_2 \left( \frac{\partial b_{22}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial b_{22}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \right)$$

$$i_2(t) = U_1 \left( \frac{\partial b_{12}}{\partial x_1} v_1 - \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2} v_2 \right) + U_2 \left( \frac{\partial b_{22}}{\partial x_1} v_1 - \frac{\partial b_{22}}{\partial x_2} v_2 \right)$$

24

