# Struje i električno polje

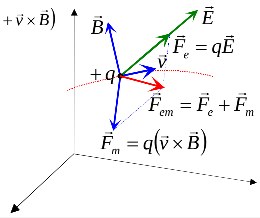
Osvježavanje znanja

## Temeljni postulati

- Postojanje električnog naboja
  - Pozitivni i negativni
  - Višekratnici naboja elektrona
- Očuvanje električnog naboja $e = 1.6021892 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$
  - U izoliranom sustavu je algebarska suma naboja konstantna.
- Lorentzova sila $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

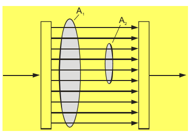
$$\vec{E} = \lim_{q \to 0}\left(\frac{\vec{F}}{q}\right) \quad ; \quad \vec{v} = 0$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \frac{\vec{F}}{q} - \vec{E}$$




## Struja

- Uređeno gibanje nositelja naboja
- Vodiči – slobodni elektroni

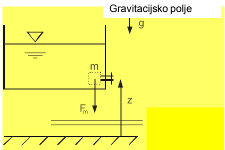


$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

$$q = \int_0^t i\,dt$$

- Jedinca: amper (A)
- Gustoća struje: $J = \frac{I}{A}$

# Zbog čega se naboji gibaju?




Rad koji treba obaviti da se masa m podigne na visinu z je:

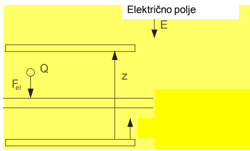
$$A_{12} = -F_m \cdot z = -m \cdot g \cdot z$$

Taj se rad pohrani kao potencijalna energija. Gravitacijski potencijal je potencijalna energija jedinične mase:

$$W_2 = W_1 - A_{12}$$

$$\text{za} \quad W_1 = 0 \quad \text{je} \quad W_2 = mgz$$

$$V_m = \frac{F_m}{m} \cdot z = g \cdot z$$




Rad koji treba obaviti da se naboj Q podigne na visinu z je:

$$A_{12} = -F_{el} \cdot z = -Q \cdot E \cdot z$$

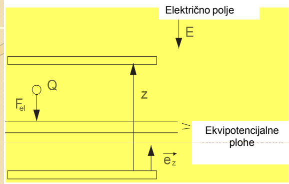
Taj se rad pohrani kao potencijalna energija. Električni potencijal je potencijalna energija jediničnog naboja:

$$W_2 = W_1 - A_{12}$$

$$\text{za} \quad W_1 = 0 \quad \text{je} \quad W_2 = QEz$$

$$V_m = \frac{F_{el}}{Q} \cdot z = E \cdot z$$

# Električni potencijal




Površine jednakog potencijala zovemo **ekvipotencijalne plohe**. Razliku potencijala između dviju točaka u električnom polju zovemo **napon**. Pozitivni naboji se gibaju od većeg ka manjem električnom potencijalu

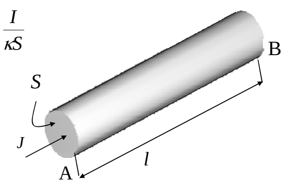
# Ohmov zakon i električna vodljivost

- Ponašanje velikog broja vodiča
  - Linearni odnos između gustoće struje J i jakosti električnog polja E

$$J = \kappa E = \frac{1}{\rho} E$$

  - Konstantu κ zovemo specifična vodljivost, a ρ specifični otpor
  - Ako vodič ima konstantni presjek *S* onda su J i E konstantni u vodiču pa je ukupna struja kroz vodič:

$$I = JS = \kappa ES \quad \Rightarrow \quad E = \frac{I}{\kappa S}$$



- Razlika potencijala između točaka A i B je:

$$U = U_{AB} = El = \frac{I}{\kappa S} l \quad \Rightarrow \quad U = IR \quad ; \quad R = \frac{l}{\kappa S} = \rho \frac{l}{S}$$

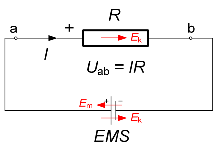
- Ohmov zakon
- Tok struje – disipacija energije (naboji se konstantno kreću prema točkama nižeg potencijala)
  - Nositelji naboja se stalno sudaraju sa strukturom materijala i gube kinetičku energiju
  - To se očitava kao zagrijavanje materijala
  - Pri prolasku kroz vodič naboj obavi rad:

$$W = QEl = Q\frac{I}{\kappa S} l \quad \Rightarrow \quad P = \frac{dW}{dt} = \frac{W}{t} = \frac{Q}{t} IR = I^2 R$$

  - Jouleov zakon
- Ponašanje vodiča se može nadomjestiti koncentriranim parametrom R.

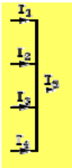
## Elektromotorna sila

- Stalni tok struje po vodiču → dotok energije
- Za održanje stalnog toka struje → izvori električnog polja
  - Elektromotorna sila



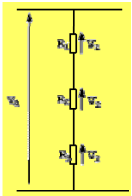

## Kirchhoffovi zakoni

- 1845, proširio Ohmov rad
- Analiza krugova formiranih od grana koje se spajaju u čvorovima
- Određivanje struja i napona
- Suma struja koje ulaze u čvor jednaka je sumi struja koje izlaze iz čvora.
- Suma elektromotornih sila u petlji jednaka je sumi padova napona na granama koje čine petlju

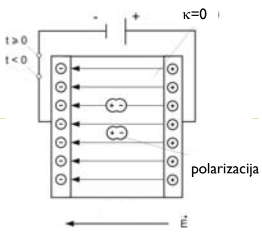



$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = I_5$$

$$V_1 + V_2 + V_3 = V_4$$



## Izolatori i kapacitet




- Idealni, (κ=0)
- Ako između dvije ploče povezane na izvor stavimo izolator i u trenutku t=0 zatvorimo sklopku kroz krug će teći struja i(t)
- Ona je posljedica polarizacije čestica u izolatoru i kad se sve čestice polariziraju struja nestane
- Omjer naboja i napona između ploča zovemo kapacitet C

$$C = \frac{Q}{U}$$

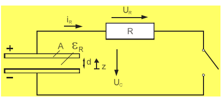
- Jedinica: 1 farad (F)

## Veza između napona i struje na kapacitetu

$$q = Cu$$

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow i = \frac{d(Cu)}{dt} \Rightarrow i = C \cdot \frac{du}{dt} \Rightarrow u = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i \cdot dt$$

- Jednostavni RC krug – izbijanje kondenzatora



$$i_R = C \cdot \frac{du_c}{dt} \Rightarrow \frac{u_R}{R} = C \cdot \frac{du_c}{dt}$$

$$u_C + u_R = 0 \Rightarrow -\frac{u_C}{R} = C \cdot \frac{du_c}{dt}$$

- Separacija varijabli i integracija

$$-\int_0^t \frac{dt}{R\cdot C}=\int_{u_0}^{u_c}\frac{du_c}{u_C}$$

$$\frac{-t}{R\cdot C}=\ln(\frac{u_c}{U_o})$$

$$\Rightarrow \quad u_C=U_0\cdot e^{\frac{-t}{R\cdot C}}$$

- Energija koja se pretvori u toplinu na otporu

$$u_R=-u_C$$

$$i_R=i_C$$

$$i_R=\frac{u_R}{R}=-\frac{u_C}{R}$$

$$W_R=\int u_R\cdot i_R\cdot dt$$

$$\Rightarrow \quad W_R=\int u_C\frac{u_C}{R}dt=\frac{U_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2\cdot t}{R\cdot C}}dt$$

$$=-\frac{U_0^2}{R}\frac{R\cdot C}{2}\left(e^{-\frac{2\cdot t}{R\cdot C}}\right)_0^\infty=C\cdot\frac{U_0^2}{2}$$

- To je energija koja je bila pohranjena u kapacitetu

## Krugovi prvog reda

- Krugovi koji sadrže jedan element za pohranu energije (C)
- Odziv kruga sastoji se od tri dijela
  - Stacionarno stanje prije prijelazne pojave
  - Prijelazna pojava
  - Stacionarno stanje nakon prijelazne pojave
  - Za kapacitet C vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} i_c(t)=0$$

$$u_c(0^+)=u_c(0^-)$$

## Određivanje odziva kruga prvog reda

1. Naći stacionarno rješenje kruga prije početka ($t=0^-$) i nakon završetka ($t\to\infty$) prijelazne pojave
2. Odrediti početne uvjete u krugu za ($t=0^+$) koristeći uvjet kontinuiranosti napona na kapacitetu
3. Napisati diferencijalnu jednadžbu kruga za ($t=0^+$)
4. Odrediti vremensku konstantu
5. Napisati rješenje u obliku

$$x(t)=x(t\to\infty)+\left[x(0)-x(t\to\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Ponašanje bilo kojeg kruga s jednim elementom za pohranu energije može se opisati jednadžbom oblika

$$a_1 \frac{d\,x(t)}{dt} + a_0 x(t) = b_0 f(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_0}\frac{d\,x(t)}{dt} + x(t) = \frac{b_0}{a_0} f(t) \quad \Rightarrow$$
$$\tau \frac{d\,x(t)}{dt} + x(t) = K_S f(t)$$

- Ako se istosmjerna pobuda uključuje u t=0 rješavamo jednadžbu

$$\tau \frac{d\,x(t)}{dt} + x(t) = K_S F \quad ; \quad t \geq 0$$

- Rješenje ove jednadžbe ima dva dijela
  - Prirodni odziv (homogeno rješenje, F=0)

$$\tau \frac{d\,x_N(t)}{dt} + x_N(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,x_N(t)}{x_N(t)} = -\frac{dt}{\tau} \quad \Rightarrow \quad x_N(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

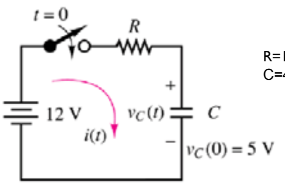
  - Prisilno rješenje (partikularno rješenje) za istosmjernu pobudu

$$\tau \frac{d\,x_F(t)}{dt} + x_F(t) = K_S F \quad \Rightarrow \quad x_F(t) = K_S F = x(t \to \infty)$$

- Ukupno rješenje je zbroj ova dva

$$x(t) = x_N(t) + x_F(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + x(t \to \infty)$$
$$x(0) = A + x(t \to \infty) \quad \Rightarrow \quad A = x(0) - x(t \to \infty)$$
$$x(t) = [x(0) - x(t \to \infty)]Ae^{-\frac{t}{\tau}} + x(t \to \infty)$$

## Primjer




R=1 kΩ
C=470 μF

$$u_c(0^+) = 5\,\mathrm{V}$$

$$u_c(t \to \infty) = 12\,\mathrm{V}$$

$$E - R \cdot i_C(t) - u_C(t) = E - RC\frac{du_C(t)}{dt} - u_C(t) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E$$

$$x(t) = u_C(t) \quad ; \quad \tau = RC \quad ; \quad K_S = 1$$

$$u_C(t) = 12 + (5-12)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u_C(t) = 12(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) + 5e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u_{CF}(t) = 12(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$u_{CN}(t) = 5e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u_C(t) = u_{CN}(t) + u_{CF}(t)$$