

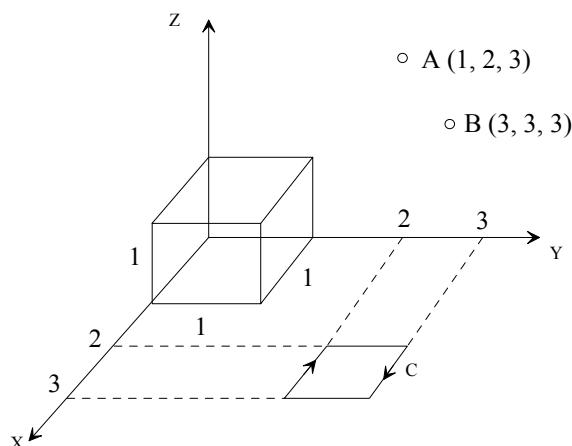
Ime i prezime _____

Matični broj _____

INAČICA A

Ispit se sastoji od pet cijelina, u kojima se točan odgovor na svako pitanje nezavisno boduje, te se sastoji od ukupno 20 pitanja. Ukoliko želite odgovoriti na neko pitanje, zacrnite odgovor na obrascu za test. Svaki točan odgovor donosi 1 bod, dok se neodgovorena pitanja i netočni odgovori ne boduju. Napišite ime na svim papirima s postupcima i predajte ih na kraju ispita zajedno s primjerkom testa u košuljici, dok se Obrazac za test posebno predaje.

- (I) Vektor jakosti električnog polja u prostoru ($\varepsilon = \varepsilon_0$) je $\vec{E} = \frac{A}{x^2 + 1} \vec{a}_x$.



1.) Volumna gustoća naboja u točki (1,2,3) je:

A) $\rho = -\frac{A}{2} \varepsilon_0$ B) $\rho = \frac{A}{2} \varepsilon_0$ C) $\rho = -\frac{A}{5} \varepsilon_0$ D) $\rho = \frac{A}{5} \varepsilon_0$ E) 0

2.) Ukupni naboј u kocki s koordinatama dijagonala (0,0,0) do (1,1,1) je:

A) 0 B) $\frac{A}{5} \varepsilon_0$ C) $-\frac{A}{5} \varepsilon_0$ D) $\frac{A}{2} \varepsilon_0$ E) $-\frac{A}{2} \varepsilon_0$

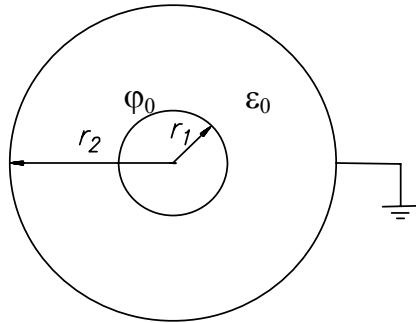
3.) Potencijal točke (3,3,3) ako je referentna točka nultog potencijala zadana u beskonačnosti jednak je:

A) 0,32A B) -0,32A C) A D) -A E) $\frac{A}{2}$

4.) Rad koji treba obaviti za pomicanje pozitivnog naboja Q po zatvorenoj krivulji c koja se nalazi u ravnini $x-y$, stranice $a=1$ jednak je:

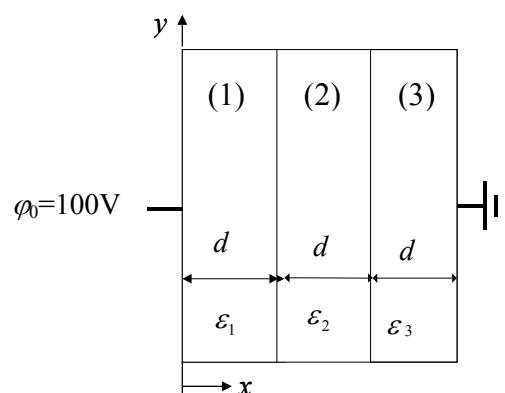
A) $1,5AQ$ B) $\frac{A}{3}Q$ C) $\frac{A}{2}Q$ D) AQ E) 0

(II) Zadan je kuglasti kondenzator s polumjerom unutrašnje elektrode $r_1=2$ cm, te unutrašnjim polumjerom vanjske elektrode $r_2=4$ cm. Unutrašnja elektroda nalazi se na potencijalu $\varphi_0=200$ V, dok je vanjska elektroda uzemljena. Dielektrična konstanta izolatora jednaka je dielektričnoj konstanti vakuuma.



- 5.) Odredite jakost električnog polja na udaljenosti $r=r_1$ od središta kugli
- A) 5kV/m B) 10 kV/m C) 20 kV/m D) 30 kV/m E) 35 kV/m
- 6.) Odredite silu koja djeluje na površinu unutrašnje elektrode F_1
- A) 1,60 μN B) 3,03 μN C) 5,25 μN D) 7,35 μN E) 8,9 μN
- 7.) Odredite kapacitet kondenzatora
- A) 2,7 pF B) 3,3 pF C) 3,7 pF D) 4,45 pF E) 5,3 pF
- 8.) Odredite energiju električnog polja u prostoru između kugli
- A) 100 nJ B) 89 nJ C) 78 nJ D) 66 nJ E) 54 nJ

(III) Zadan je troslojni pločasti kondenzator prema slici, relativnih dielektričnih konstanta izolacije jednakih $\epsilon_{r1}=1$, $\epsilon_{r2}=3$, $\epsilon_{r3}=1$. Površina elektroda jednaka je $S=0,03 \text{ m}^2$, a razmak $d=2 \text{ mm}$.

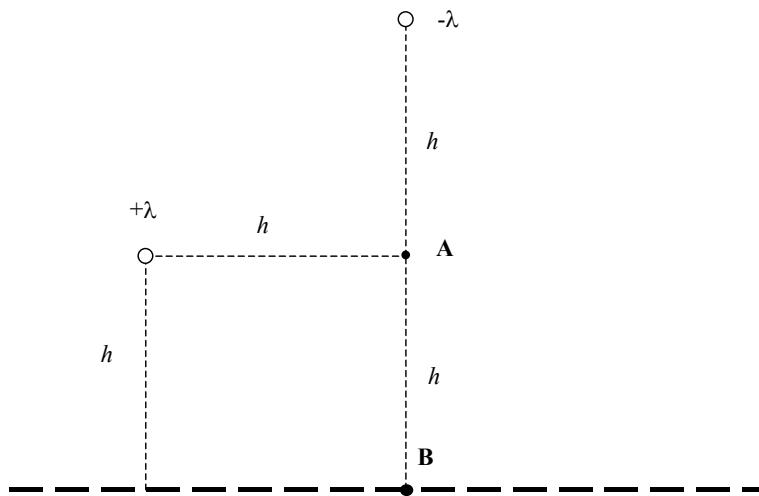


- 9.) Odredite električno polje E_2 u području 2
- A) 13,3 kV/m B) 9,7 kV/m C) 7,14 kV/m D) 5,7 kV/m E) 4,4 kV/m

- 10.) Odredite električno polje E_3 u području 3
 A) 5,5 kV/m B) 6,8 kV/m C) 7,14 kV/m D) 15 kV/m E) 21,43 kV/m

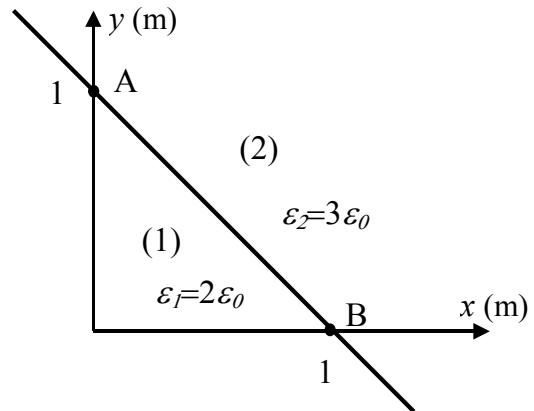
- 11.) Odredite potencijal $\varphi(d)$ plohe na granici sredstava 1 i 2
 A) 100 V B) 88 V C) 67 V D) 57 V E) 43 V
- 12.) Odredite potencijal $\varphi(2d)$ plohe na granici sredstava 2 i 3
 A) 100 V B) 88 V C) 67 V D) 57 V E) 43 V

(IV) Dva beskonačno dugačka vodiča jednolikom nabijenim linijskom gustoću $+λ$ i $-λ$ (prema slici) nalaze se iznad beskonačne vodljive ravnine nultog potencijala. Zadano je $|λ|=10 \text{ nC/m}$, $h=1\text{m}$.



- 13.) Odredite silu na naboj $q=+10 \text{ nC}$ u točki A.
 A) $2,2 \mu\text{N}$ B) $1,4 \mu\text{N}$ C) $1,5 \mu\text{N}$ D) $1,7 \mu\text{N}$ E) $0 \mu\text{N}$
- 14.) Odredite jakost električnog polja u točki A
 A) 0 B) 143 V/m C) 150 V/m D) 173 V/m E) 221 V/m
- 15.) Odredite jakost električnog polja u točki B
 A) 0 B) 143 V/m C) 150 V/m D) 173 V/m E) 221 V/m
- 16.) Odredite razliku potencijala U_{AB} između točaka A i B.
 A) 0 B) 77 V C) -77 V D) -53 V E) 53 V

(V) U području (1) vlada homogeno električno polje jakosti $\vec{E}_1 = 2\vec{a}_x - 5\vec{a}_y + \vec{a}_z$ (V/m).



17.) Odredite x -komponentu jakosti električnog polja u području (2):

- A) $\frac{5}{2}$ V/m B) $\frac{3}{2}$ V/m C) $\frac{1}{2}$ V/m D) $-\frac{1}{2}$ V/m E) $-\frac{3}{2}$ V/m

18.) Odredite y -komponentu jakosti električnog polja u području (2):

- A) $-\frac{13}{2}$ V/m B) $-\frac{11}{2}$ V/m C) $-\frac{9}{2}$ V/m D) $\frac{9}{2}$ V/m E) $\frac{11}{2}$ V/m

19.) Odredite z -komponentu jakosti električnog polja u području (2):

- A) 2 V/m B) 1 V/m C) 0 V/m D) -1 V/m E) -2 V/m

20.) Odredite napon U_{AB} između točaka A(0,1,0) i B(1,0,0) :

- A) 0 B) 7 V C) -7 V D) 2 V E) -5 V

Elektromagnetska polja

1. M.I. ak. god. 2006./2007.

- skenirani postupci rješavanja, version: 2.0
- navedena rješenja su potvrđena službenom obaviješću

by: Tywin



Napomena: sve navedene formule mogu se naći u materijalima. Korištene su:

Formule FER1 OE1

Formule za MI-te by IVAN

Electromagnetski poja

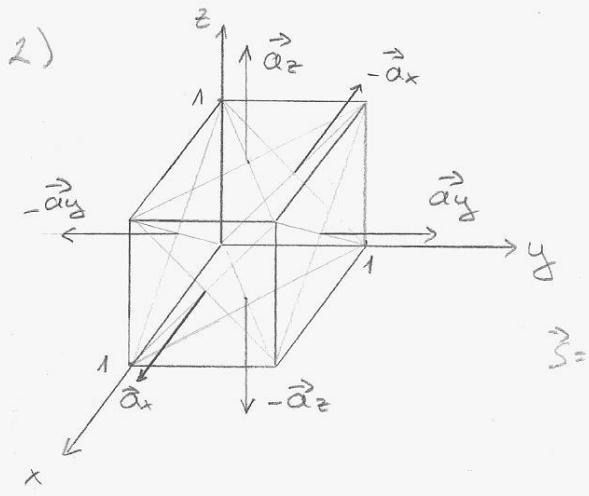
1. M.I. 2006./2007.

$$\text{I. } \vec{E} = \frac{A}{x^2+1} \hat{a}_x$$

1) $E(1m, 2m, 3m) = ?$

$$S = \epsilon_0 \cdot \nabla \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{x^2+1} \right) = \epsilon_0 A \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$S|_{x=1} = -\frac{A}{2} \epsilon_0 \quad \boxed{A}$$



rastav površine S na 6 manjih sa ujednoim normalcama:

$$\begin{cases} x=0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \Rightarrow \vec{n} = -\vec{a}_x \\ x=1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \Rightarrow \vec{n} = \vec{a}_x \\ y=0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \Rightarrow \vec{n} = -\vec{a}_y \\ y=1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \Rightarrow \vec{n} = \vec{a}_y \\ z=0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow \vec{n} = -\vec{a}_z \\ z=1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow \vec{n} = \vec{a}_z \end{cases}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{A}{(x^2+1)} \Big|_{x=1} + \frac{-A}{x^2+1} \Big|_{x=0}$$

$$Q = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \epsilon_0 \iint_{\text{front}} \frac{A}{x^2+1} \Big|_{x=1} dy dz + \epsilon_0 \iint_{\text{top}} \frac{-A}{(x^2+1)} \Big|_{x=0} dy dz$$

$$= \epsilon_0 \frac{A}{2} y \Big|_0^1 z \Big|_0^1 - \epsilon_0 A y \Big|_0^1 z \Big|_0^1 = \epsilon_0 \frac{A}{2} - \epsilon_0 A$$

$$= -\epsilon_0 \frac{A}{2} \quad \boxed{E}$$

3) $\rho(3m, 3m, 3m) = ?$

$$\rho(\vec{r}) = - \int_{\text{rect}} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{e} = \left\{ \vec{E}(\vec{r}) = \frac{A}{x^2+1} \hat{a}_x; d\vec{e} = dx \hat{a}_x + dy \hat{a}_y + dz \hat{a}_z \right\} = - \int_{-\infty}^3 \frac{A}{x^2+1} dx = -A \arctan \Big|_{x=\infty}^3 = -A \left(1,249 - \frac{\pi}{2} \right) = 0,32 \quad \boxed{A}$$

4) radi se o zatvorenoj trivulji pa
je ukupni rad jednak nuli $w=0$ $\quad \boxed{E}$

$$\text{II} \quad r_1 = 2 \text{ cm}$$

$$r_2 = 4 \text{ cm}$$

$$\varphi_0 = 200 \text{ V}$$

$$5) E(r_1) = ?$$

$$\rho(2 \text{ cm}) = 200 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{0.02} - \frac{1}{0.04} \right) = \frac{250}{4\pi\epsilon_0}$$

$$q = 32\pi\epsilon_0$$

$$E(2 \text{ cm}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(0.02)^2} = 20 \text{ kV/m} \quad [\text{C}]$$

6) by: quartz, scripta: „Elektrostatika“ str. 70,

$$F = \frac{\epsilon \cdot E^2 S}{2} = \frac{1}{2} Q E = 8,896 \mu\text{F} \quad [\text{E}]$$

$$7) C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = 4,45 \mu\text{F} \quad [\text{D}]$$

$$8) W = \frac{C \cdot U^2}{2} = 89 \text{ uJ} \quad [\text{B}]$$

$$\text{III} \quad \begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \epsilon_{r1} = \epsilon_{r3} = 1 \quad \epsilon_{r2} = 3 \\ S = 0,03 \text{ m}^2 \\ d = 2 \text{ mm} \\ \varphi_0 = 100 \text{ V} \\ U = 100 \text{ V} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} C_1 = C_3 = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d} = 132,81 \mu\text{F} \\ C_2 = \epsilon_r \cdot C_1 = 398,43 \mu\text{F} \\ \frac{1}{C_{\text{tot}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \end{array} \end{aligned}$$

$$C_{\text{tot}} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} = 56,919 \mu\text{F}$$

$$Q = U \cdot C_{\text{tot}} = 5,692 \text{ nC}$$

$$U_1 = \frac{U}{C_1} = U_3 = 42,86 \text{ V}$$

$$U_2 = 14,28$$

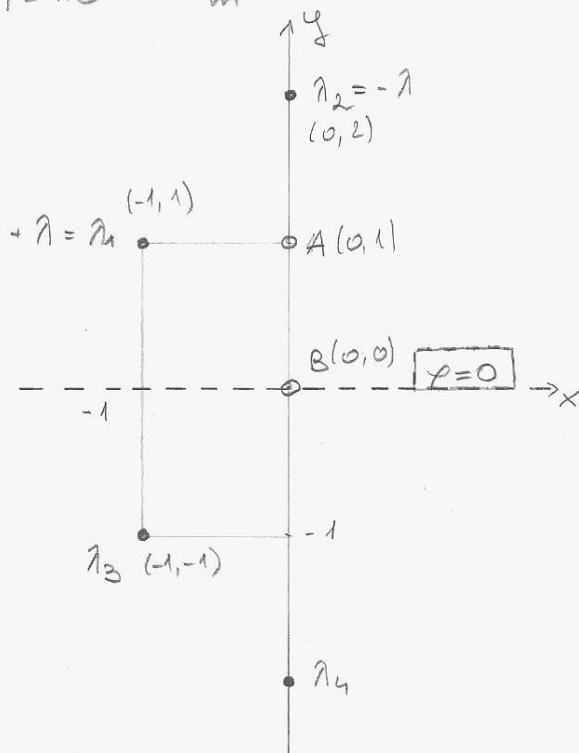
$$9) E_2 = \frac{U_2}{d} = 7,14 \text{ kV/m} \quad [\text{C}] \quad 10) E_3 = \frac{U_3}{d} = 21,43 \text{ kV/m} \quad [\text{E}]$$

$$11) \varphi(d) = U - U_1 = 57,14 \text{ V} \quad [\text{D}]$$

$$12) \varphi(d) = 57,14 - U_2 = 42,86 \text{ V} \quad [\text{E}]$$

IV

$$|\lambda| = 10^{-9} \text{ C/m}$$



→ metodom oddaljavanja
nastaju λ_3 i λ_4 takođe
da vrijedi

$$\lambda_3 = -\lambda_1 = -\lambda$$

$$\lambda_4 = -\lambda_2 = +\lambda$$

naboj λ iz točke $T(x_T, y_T)$
stvara električno polje
u točki $A(x_A, y_A)$ iznosa
i slijeda:

$$\vec{E}(A) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x_A - x_T)\vec{a}_x + (y_A - y_T)\vec{a}_y}{(x_A - x_T)^2 + (y_A - y_T)^2}$$

$$14.) \vec{E}(A) = \vec{E}_1(A) + \vec{E}_2(A) + \vec{E}_3(A) + \vec{E}_4(A)$$

$$\vec{E}_1(A) = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} = \vec{a}_x = 179,85 \vec{a}_x \text{ V/m}$$

$$\vec{E}_2(A) = \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \cdot \vec{a}_y = -179,85 \vec{a}_y \text{ V/m}$$

$$\vec{E}_3(A) = \frac{\lambda_3}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{a}_x + 2\vec{a}_y}{5} \right) = -179,85 \left(\frac{\vec{a}_x}{5} + \frac{2\vec{a}_y}{5} \right) = -35,97 \vec{a}_x - 71,94 \vec{a}_y \text{ V/m}$$

$$\vec{E}_4(A) = \frac{\lambda_4}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3\vec{a}_y}{9} = 59,95 \vec{a}_y \text{ V/m}$$

$$\vec{E}(A) = 143,88 \vec{a}_x + 167,86 \vec{a}_y \Rightarrow E(A) = 221 \text{ V/m} \quad \boxed{E}$$

$$13.) q = 10 \mu C$$

$$F(A) = q \cdot E(A) = 2,21 \mu N \quad \boxed{A}$$

$$\textcircled{15} \quad \vec{E}_1(B) = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{a}_x - \vec{a}_y}{2} = 89,93 \vec{a}_x - 89,93 \vec{a}_y$$

$$\vec{E}_2(B) = \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-2 \vec{a}_y}{4} = 89,93 \vec{a}_y$$

$$\vec{E}_3(B) = \frac{\lambda_3}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-\vec{a}_x - \vec{a}_y}{2} = -89,93 \vec{a}_x - 89,93 \vec{a}_y$$

$$\vec{E}_4(B) = \frac{\lambda_4}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2 \vec{a}_y}{4} = 89,93 \vec{a}_y$$

$$\vec{E}(B) = 0 \quad \boxed{A}$$

$$\textcircled{16} \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$U_{AB} = - \int_B^A \vec{E} d\vec{r} = \int_A^B E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln r \Big|_{r=4}^{r=B} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_B}{r_A}$$

$$r_B = \text{udaljenost točke A do točke B} = 1$$

$$r_A = \text{udaljenost točke A do uabojia } \lambda$$

$$U_{AB} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{1}{1} + \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{1} + \frac{\lambda_3}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\lambda_4}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln 1 - \ln 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{5}} + \ln \frac{1}{\sqrt{3}} \right] = -53 \text{ V} \quad \boxed{D}$$

$$\nabla: \vec{E}_1 = 2\vec{a}_x - 5\vec{a}_y + \vec{a}_z$$

$$1) E_{x2} = ?$$

$$\vec{E}_{x2} = \vec{E}_{x1} \cdot \frac{\vec{e}_1}{\vec{e}_2} = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\vec{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{a}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{a}_y$$

$$\vec{E}_2 = E_{2x} \vec{a}_x + E_{2y} \vec{a}_y + E_{2z} \vec{a}_z$$

$$ii) n \times [\vec{E}_2 - \vec{E}_1] = 0$$

$$iii) n \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$(1) \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{a}_x + \vec{a}_y) \times [(E_{2x}-2) \vec{a}_x + (E_{2y}+5) \vec{a}_y + (E_2-1) \vec{a}_z] = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ E_{2x} & E_{2y}+5 & E_2-1 \end{vmatrix} = \vec{a}_x \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(E_2-1)}_{\sim} - \vec{a}_y \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(E_2-1)}_{\sim} + \vec{a}_z \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(2y+5-E_x+2)}_{\sim} = 0$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{a}_x + \vec{a}_y) [\vec{a}_x (3E_x-4) + \vec{a}_y (3E_y+10) + \vec{a}_z (3E_z-2)] = 0$$

$$iz (1): E_2-1=0 \Rightarrow E_2=1 \quad \boxed{19. B}$$

$$E_y+5-E_x+2=0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{5}{2} \vec{a}_x - \frac{9}{2} \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

$$iz (2): \frac{1}{2} [3E_x-4+3E_y+10] = 0$$

$$\begin{array}{l} E_y-E_x=-7/3 \\ 3E_x+3E_y=-6 \end{array} \left| \begin{array}{l} + \\ \hline \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} 6E_y=-27 \\ E_y=-\frac{9}{2} \end{array} \right\} \quad \boxed{18. C}$$

$$E_x = E_y + 7 = \frac{5}{2} \quad \boxed{17. A}$$

$$20) U_{AB} = ?$$

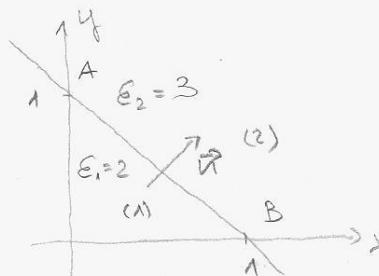
$$U_{AB} = \int_B^A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_T \cdot \overline{AB}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{2}$$

$$\vec{r}_{ab} = \vec{AB} = \frac{\vec{a}_x - \vec{a}_y}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{jediniční vektor od A směrem k B}$$

$$E_{T1} = |\vec{E}_1| \cdot \vec{r}_{ab} = \frac{7}{\sqrt{2}} \quad E_{T2} = \vec{E}_2 \cdot \vec{r}_{ab} = \frac{7}{\sqrt{2}} \quad E_T = E_{T1} = E_{T2}$$

$$U_{AB} = E_T \cdot \overline{AB} = 7 \quad \boxed{B}$$



1. Međuispit iz Elektromagnetskih polja

02.04.2008.

Ime i prezime _____ Matični broj _____

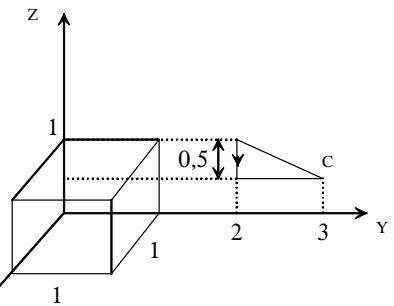
INAČICA A

Ispit se sastoji od pet cijelina, u kojima se točan odgovor na svako pitanje nezavisno bude, te se sastoji od ukupno 20 pitanja. Ukoliko želite odgovoriti na neko pitanje, zacrnite odgovor na obrascu za test. Svaki točan odgovor donosi 1 bod, dok se neodgovorenata pitanja ne budu. Netočan odgovor donosi -0.2 boda. Napišite ime na svim papirima s postupcima i predajte ih na kraju ispita zajedno s primjerkom testa u košljici, dok se Obrazac za test posebno predaje.

I. Potencijal statičkog električnog polja u slobodnom prostoru ($\epsilon = \epsilon_0$) zadan je jednadžbom:

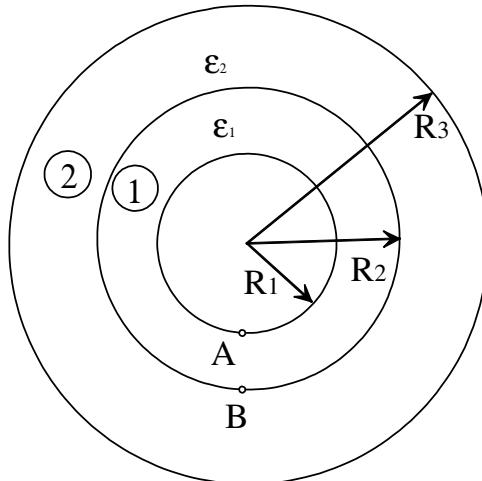
$$\varphi = \frac{A}{y^3 + a}.$$

Ako su konstante $A=1$ i $a=1$ odredite:



1. Apsolutnu vrijednost vektora jakosti električnog polja u točki (1m,1m,1m).
A) 0,19 B) 0,33 C) 0,67 D) 0,75 E) 1,5 F) 2,25
2. Gustoću naboja u točki (2m,2m,2m).
A)-0,168 ϵ_0 B) -0,49 ϵ_0 C)-0,74 ϵ_0 D)-0,34 ϵ_0 E)-0,117 ϵ_0 F)-0,247 ϵ_0
3. Ukupan naboј unutar kocke s koordinatama prostorne dijagonale (0,0,0) i (1m,1m,1m).
A) 0,33 ϵ_0 B) 1,5 ϵ_0 C) 0,75 ϵ_0 D) 0,19 ϵ_0 E) 0,67 ϵ_0 F) 2,25 ϵ_0
4. Rad po zatvorenoj krivulji c prema slici.
A) 0 B) 1J C) 2J D) 3J E) 4J F) 5J

II. Zadan je dvoslojni cilindrični kondenzator s dva sloja izolacije prema slici. Najveća jakost električnog polja u sloju 2 iznosi 100 V/m. Zadano je: $\epsilon_{r1} = 3$, $\epsilon_{r2} = 5$, $R_1 = 1\text{cm}$, $R_2 = 3\text{cm}$, $R_3 = 5\text{cm}$.

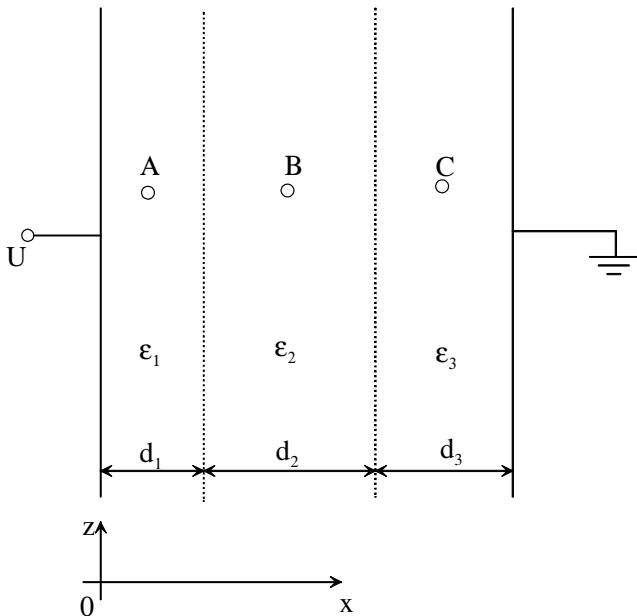


Odredite:

5. Najveću absolutnu vrijednost vektora jakosti električnog polja u sloju 1.
A) 180V/m B) 600 V/m C) 240 V/m D) 500 V/m E) 750 V/m F) 900 V/m
6. Naboј na unutrašnjem cilindru po jedinici duljine.
A) 500,6pC/m B) 1,7nC/m C) 834,5pC/m D) 2nC/m E) 667,6pC/m F) 3nC/m
7. Razliku potencijala U_{AB} .
A) 1,98V B) 2,64V C) 5,49V D) 6,6V E) 8,24V F) 9,88V
8. Kapacitet kondenzatora po jedinici duljine.
A) 85,4pF/m B) 118,8 pF/m C) 142,6pF/m D) 160,1pF/m E) 175,4 pF/m F) 205,4pF/m

III. Zadan je troslojni pločasti kondenzator prema slici s parametrima: $d_1 = 1\text{cm}$, $d_2 = 2\text{cm}$, $d_3 = 3\text{cm}$, $\epsilon_{r1} = 2$, $\epsilon_{r2} = 3$, $\epsilon_{r3} = 5$ i površinom ploča $S = 0,05 \text{ m}^2$. Odredite uz $U=100\text{V}$:

9. Jakost električnog polja u točki B u [V/m].
A) 1886,8 B) 2197,8 C) 2941,2 D) 4651,2 E) 7258 F) 11824,3
10. Potencijal na granici sredstva 1 i sredstva 2 ($x = d_1$).
A) 176,7V B) 111,8V C) 275,8V D) 449V E) 83,52V F) 71,7V
11. Vektor gustoće toka \vec{D} u točki C u [nC/m^2].
A) 192,8 B) 123,5 C) 58,4 D) 50,1 E) 78,1 F) 314
12. Kapacitet kondenzatora
A) 37,1 pF B) 51,4 pF C) 25,1pF D) 29,2pF E) 19,5 pF F) 44pF



IV. Kratki vodič duljine $L=1\text{m}$, nabijen nabojem linijske gustoće $\lambda = 10^{-9}\text{ C/m}$, kružnog poprečnog presjeka polumjera $r_0 = 1\text{cm}$ nalazi se u zraku ($\epsilon = \epsilon_0$) na visini $h = 1\text{m}$ iznad zemlje prema slici.

13. Odredite jakost električnog polja u točki A u smjeru \vec{a}_y .

- A) -5,91V/m B)-8,71V/m C)-11,8V/m D)-16,1V/m E)-21,8V/m F)-64,3V/m

14. Odredite potencijal u točki A.

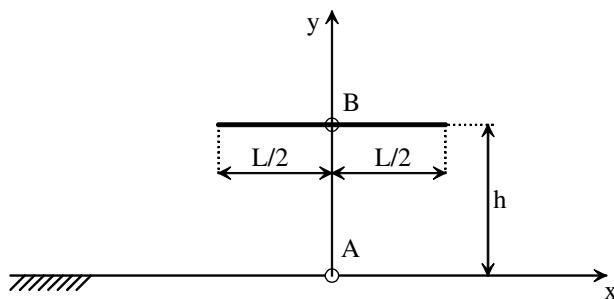
- A) 0 B)2,17V C)3,21V D)4,36V E)5,17V F)6,93V

15. Odredite potencijal u točki B na polumjeru vodiča r_0 .

- A) 78,33V B)161,08V C)243,85V D)313,34V E) 402,7V F)487,7V

16. Odredite ukupni influencirani naboј na površini zemlje.

- A) -3nC B)-6nC C)-2nC D)-1nC E)-4nC F)-5nC



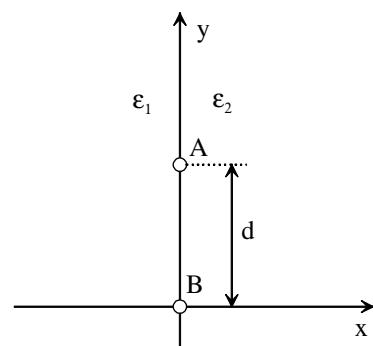
V. Ravnina dijeli dva sredstva relativnih dielektričnosti $\epsilon_{r1} = 2$ i $\epsilon_{r2} = 3$. Ako je jakost električnog polja u sredstvu 1:

$$\vec{E}_1 = 3\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 3\vec{a}_z \text{ [V/m]},$$

odredite:

17. Jakost električnog polja u sredstvu 2.

- A) $2\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 3\vec{a}_z \text{ V/m}$
 B) $5,33\vec{a}_x + 3\vec{a}_y + 4\vec{a}_z \text{ V/m}$
 C) $13,33\vec{a}_x + 7\vec{a}_y + 7\vec{a}_z \text{ V/m}$
 D) $9,33\vec{a}_x + 6\vec{a}_y + 5\vec{a}_z \text{ V/m}$
 E) $8,33\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + 2\vec{a}_z \text{ V/m}$
 F) $12\vec{a}_x + 5\vec{a}_y + 4\vec{a}_z \text{ V/m}$



18. Vektor polarizacije \vec{P}_1 u sredstvu 1

- A) $106,2\vec{a}_x + 79,7\vec{a}_y + 106,2\vec{a}_z \text{ pC/m}^2$
- B) $185,9\vec{a}_x + 159,4\vec{a}_y + 132,8\vec{a}_z \text{ pC/m}^2$
- C) $283,3\vec{a}_x + 247,9\vec{a}_y + 247,9\vec{a}_z \text{ pC/m}^2$
- D) $265,6\vec{a}_x + 221,4\vec{a}_y + 177,1\vec{a}_z \text{ pC/m}^2$
- E) $26,6\vec{a}_x + 17,7\vec{a}_y + 26,6\vec{a}_z \text{ pC/m}^2$
- F) $177,1\vec{a}_x + 141,7\vec{a}_y + 70,8\vec{a}_z \text{ pC/m}^2$

19. Vektor polarizacije \vec{P}_2 u sredstvu 2

- A) $165,3\vec{a}_x + 106,2\vec{a}_y + 88,5\vec{a}_z \text{ pC/m}^2$
- B) $94,4\vec{a}_x + 53,1\vec{a}_y + 70,8\vec{a}_z \text{ pC/m}^2$
- C) $35,4\vec{a}_x + 35,4\vec{a}_y + 53,1\vec{a}_z \text{ pC/m}^2$
- D) $212,5\vec{a}_x + 88,5\vec{a}_y + 70,8\vec{a}_z \text{ pC/m}^2$
- E) $236,1\vec{a}_x + 123,9\vec{a}_y + 123,9\vec{a}_z \text{ pC/m}^2$
- F) $147,6\vec{a}_x + 70,8\vec{a}_y + 35,4\vec{a}_z \text{ pC/m}^2$

20. Napon između točaka A i B, U_{AB} ($d = 1\text{m}$).

- A) -3V
- B) -2V
- C) -4V
- D) -7V
- E) -5V
- F) -6V

Elektromagnetska polja

1. M.I. ak. god. 2007./2008.

- skenirani postupci rješavanja, version: 2.0
- navedena rješenja su potvrđena službenom obaviješću

by: Tywin



Napomena: sve navedene formule mogu se naći u materijalima. Korištene su:

Formule FER1 OE1

Formule za MI-te by I V A N

Elektromagnetska polja

1. M.I. 2007./2008.

$$I \quad \rho = \frac{A}{y^{3+a}}$$

$$A=1, \quad a=1$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{y^{3+1}} \right) \vec{a}_y$$

$$= \frac{3Ay^2}{(y^{3+a})^2} \vec{a}_y$$

$$1) |E(1m, 1m, 1m)| = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ V/m} \quad \boxed{D}$$

$$S = \epsilon_0 \cdot \nabla \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{3Ay^2}{(y^{3+a})^2} \right] = \epsilon_0 \cdot \frac{6Ay(y^{3+a})^2 - 18Ay^4(y^{3+a})}{(y^{3+a})^4}$$

$$= \epsilon_0 \cdot \frac{6Ay(y^{3+a}) - 18Ay^4}{(y^{3+a})^4}$$

$$2) g(2m, 2m, 2m) = -0,247 \epsilon_0 \quad \boxed{F}$$

- normale porrišine: $\vec{a}_x; -\vec{a}_x; \vec{a}_y; -\vec{a}_y; \vec{a}_z; -\vec{a}_y$

$$Q = \epsilon \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS$$

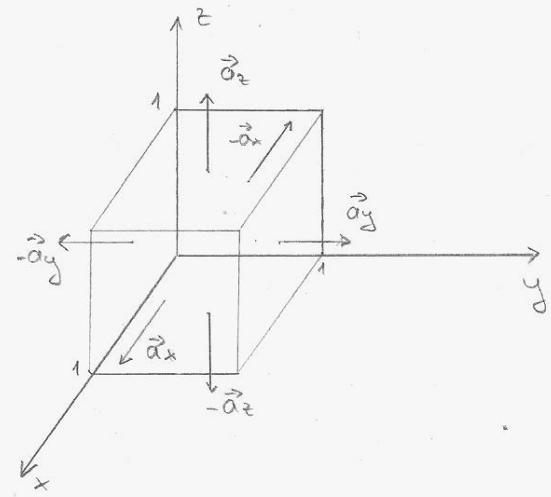
$$\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{3Ay^2}{(y^{3+a})^2} \Big|_{y=1} - \frac{3Ay^2}{(y^{3+a})^2} \Big|_{y=0}$$

$$Q = \epsilon \iint_{x+z} \frac{3Ay^2}{(y^{3+a})^2} \Big|_{y=1} dx dz + \epsilon \iint_{x+z} \frac{-3Ay^2}{(y^{3+a})^2} \Big|_{y=0} dx dz$$

$$= \epsilon \iint_{x+z} \frac{3A}{(a+1)^2} dy = \epsilon \frac{3A}{(a+1)^2} \times \left[y \right]_0^1 = \epsilon \frac{3A}{(a+1)^2} = 0,75 \epsilon_0 \quad \boxed{C}$$

4) Rad po zatvorenoj krivulji u električnom polju nije je jednak nuli

$$W=0 \quad \boxed{A}$$



$$\text{II} \quad E_{2M} = 100 \text{ V}$$

$$\left. \begin{array}{l} R_1 = 1 \text{ cm} \\ R_2 = 3 \text{ cm} \\ R_3 = 5 \text{ cm} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \epsilon_{r1} = 3 \\ \epsilon_{r2} = 5 \end{array} \right\}$$

→ cieciudnični, tj. važnosti koncentracií

$$E_{2M} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} R_2}$$

$$5) E_{1M} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} R_1} = E_{2M} \cdot \frac{\epsilon_{r2} R_2}{\epsilon_{r1} R_1} = 500 \text{ V}_m \quad [0]$$

$$6) \lambda = E_{2M} \cdot 2 \pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} R_2 = 834,05 \text{ F/m} \quad [c]$$

$$7) U_{ab} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_{r1}} \ln \frac{R_2}{R_1} = 5,493 \text{ V}$$

$$8) C = 2 \pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\ell}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad [C]$$

$$C_1' = \frac{C_1}{e} = 2 \pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} \cdot \frac{1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = 151,836 \text{ F/m}$$

$$C_2' = \frac{C_2}{e} = 2 \pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} \cdot \frac{1}{\ln \frac{R_3}{R_2}} = 544,248 \text{ F/m}$$

$$C_{ub} = \frac{C_1' \cdot C_2'}{C_1' + C_2'} = 118,416 \text{ F/m} \quad [B]$$

III

$$d_1 = 1 \text{ cm} \quad \epsilon_{r1} = 2 \Rightarrow C_1 = 88,54 \text{ pF}$$

$$d_2 = 2 \text{ cm} \quad \epsilon_{r2} = 3 \Rightarrow C_2 = 66,405 \text{ pF}$$

$$d_3 = 3 \text{ cm} \quad \epsilon_{r3} = 5 \Rightarrow C_3 = 73,78 \text{ pF}$$

$$s = 0,05 \text{ m}^2$$

$$U = 100 \text{ V}$$

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{s}{d}$$

$$(2) \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \Rightarrow C = 25,05 \text{ pF} \quad [c]$$

$$Q = C \cdot U = 2,505 \text{ nC}$$

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = 28,3 \text{ V}$$

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = 37,72 \text{ V}$$

$$U_3 = \frac{Q}{C_3} = 33,95 \text{ V}$$

$$3) E_B = \frac{U_2}{d_2} = 1886 \text{ V/m} \quad [A]$$

$$10) \varphi(x=d_1) = U - U_1 = 71,7 \text{ V} \quad [F]$$

$$11) D_c = \epsilon_0 \epsilon_r E_3 = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \frac{U_3}{d_3} = 50,099 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2} \quad [D]$$

$$\text{IV} \quad L = 1 \text{ m}$$

$$\lambda = 10^{-9} \text{ C/m}$$

$$r_0 = 1 \text{ cm}$$

$$h = 1 \text{ m}$$

$$\vec{r} = \vec{0}$$

$$\vec{r}_1 = x \hat{a}_x + \hat{a}_y$$

$$\vec{r}_2 = x \hat{a}_x - \hat{a}_y$$

$$\vec{R}_1 = \vec{r} - \vec{r}_1 = -x \hat{a}_x - \hat{a}_y$$

$$\vec{R}_2 = \vec{r} - \vec{r}_2 = -x \hat{a}_x + \hat{a}_y$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{R}_1}{R_1^3} dx + \frac{\lambda'}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{R}_2}{R_2^3} dx$$

13)

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} dx \right]$$

$$= \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Big|_{x=-0,5}^{0,5} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{1,25}} = -16,09 \text{ V/m} \quad \boxed{D}$$

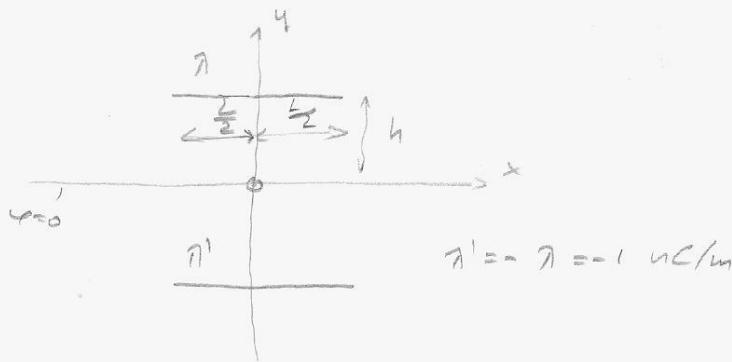
14) $\varphi(A) = 0 \vee \boxed{A}$

↳ tako je zadano zadatkom!

15.) ne znam! ali vježbu je: 78,33 $\vee \boxed{A}$

16) $\lambda' = -10^{-9} \text{ C/m}$

$\alpha = -1 \text{ nC}$ \boxed{D}



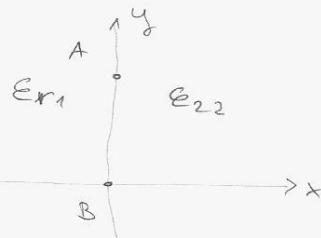
$$\lambda' = \lambda = -1 \text{ nC/m}$$

$$\nabla \quad \epsilon_{r1} = 2$$

$$\epsilon_{r2} = 3$$

$$\vec{E}_1 = 3 \vec{a}_x + 2 \vec{a}_y + 3 \vec{a}_z$$

$$\vec{n} = \vec{a}_x$$



$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ E_x - 3 & E_y - 2 & E_z - 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\vec{a}_y (E_z - 3) + \vec{a}_z (E_y - 2) = \vec{0}$$

uvjet na granici

$$E_z = 3 \quad E_y = 2$$

$$\vec{n} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ = \epsilon_{r2} E_x - \epsilon_{r1} 3 \Rightarrow E_x = 2$$

$$17) \vec{E}_2 = 2 \vec{a}_x + 2 \vec{a}_y + 3 \vec{a}_z \quad \boxed{A}$$

$$\vec{B} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}; \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 E (\epsilon_r - 1)$$

$$18) \vec{P}_1 = 26,6 \vec{a}_x + 17,7 \vec{a}_y + 26,6 \vec{a}_z \quad \boxed{E}$$

$$19) \vec{P}_2 = 35,4 \vec{a}_x + 35,4 \vec{a}_y + 53,1 \vec{a}_z \quad \boxed{C}$$

$$20) \vec{E}_{AB} = -\vec{a}_y$$

$$E_{1T} = \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_{AB} = -2$$

$$E_{2T} = \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_{AB} = -2$$

$$\overline{AB} = 1 \text{ m}$$

$$U_{AB} = E_{1T} \cdot \overline{AB} = -2 \quad V$$

Ime i prezime _____ Matični broj _____

INAČICA D

Ispit se sastoji od pet cijelina, u kojima se točan odgovor na svako pitanje nezavisno boduje, te se sastoji od ukupno 20 pitanja. Ukoliko želite odgovoriti na neko pitanje, zacrnite odgovor na obrascu za test. Svaki točan odgovor donosi 1 bod, dok se neodgovorena pitanja ne boduju. Netočan odgovor donosi -0.2 boda. Napišite ime na svim papirima s postupcima i predajte ih na kraju ispita zajedno s primjerkom testa u košuljici, dok se Obrazac za test posebno predaje.

I .Statički električni naboј je raspoređen po sfernoj ljusci unutrašnjeg radiusa $R_1 = 2$ i vanjskog radiusa $R_2 = 3$. Gustoća naboja u prostoru određena je jednadžbom:

$$\rho = a + b \cdot r \quad R_1 \leq r \leq R_2 .$$

Odredite ukoliko su a i b konstante:

1. Jakost električnog polja u prostoru $r < R_1$.

A) $E = 0$ B) $E = \frac{a}{r^2}$ C) $E = \frac{a+br}{r^2}$ D) $E = \frac{b}{r}$ E) $E = a+br$ F) $E = 2a$

2. Jakost električnog polja u prostoru $R_1 < r < R_2$.

A) $E = \frac{1}{\epsilon_0 r} \left[\frac{a}{3} (r^3 - 1) + \frac{b}{4} (r^4 - 1) \right]$ B) $E = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{a}{3} (r^3 - 1) + \frac{b}{4} (r^4 - 1) \right]$

C) $E = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{a}{3} (r^3 - 8) + \frac{b}{4} (r^4 - 16) \right]$ D) $E = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{a}{3} (r^3 - 3) + \frac{b}{4} (r^4 - 6) \right]$

E) $E = \frac{1}{\epsilon_0 r^3} \left[\frac{a}{3} (r^3 - 1) + \frac{b}{4} (r^4 - 1) \right]$ F) $E = \frac{1}{\epsilon_0 r^3} \left[\frac{a}{3} (r^3 - 8) + \frac{b}{4} (r^4 - 16) \right]$

3. Jakost električnog polja u prostoru $r > R_2$.

A) $E = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{5a}{3} + \frac{15b}{4} \right]$ B) $E = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{19a}{3} + \frac{65b}{4} \right]$

C) $E = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[-\frac{5a}{3} + \frac{15b}{4} \right]$ D) $E = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{11a}{3} + \frac{29b}{4} \right]$

E) $E = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[-\frac{a}{3} - \frac{15b}{4} \right]$ F) $E = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{7a}{3} + \frac{15b}{4} \right]$

4. Potencijal u središtu sferne ljuske.

A) $\varphi = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{5a}{3} + \frac{b}{4} \right]$ B) $\varphi = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{5a}{3} - \frac{b}{4} \right]$ C) $\varphi = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{a}{3} + \frac{b}{4} \right]$

D) $\varphi = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{5a}{3} + \frac{b}{4} \right]$ E) $\varphi = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{3a}{2} + \frac{7b}{3} \right]$ F) $\varphi = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{5a}{2} + \frac{19b}{3} \right]$

II. Kuglasti je kondenzator unutrašnjeg radiusa R_1 , a vanjskog radiusa R_2 ispunjen s dva dielektrika, tako da jednu polovicu ispunjava dielektrik dielektričnosti $\epsilon_1 = 1$, a drugu dielektrik dielektričnosti $\epsilon_2 = 3$ prema slici. Ako je na unutrašnjoj elektrodi raspoređen ukupni naboј $+Q$, a vanjska je elektroda uzemljena odredite:

5. Vektor gustoće električnog tijeka u prostoru dielektričnosti ϵ_1 .

A) $D = \frac{Q}{2\pi r^2}$ B) $D = \frac{Q}{4\pi r^2}$ C) $D = \frac{Q}{6\pi r^2}$ D) $D = \frac{Q}{8\pi r^2}$ E) $D = \frac{Q}{10\pi r^2}$ F) $D = \frac{Q}{12\pi r^2}$

6. Vektor gustoće električnog tijeka u prostoru dielektričnosti ϵ_2 .

$$A) D = \frac{Q}{2\pi r^2} \quad B) D = \frac{Q}{3\pi r^2} \quad C) D = \frac{5Q}{6\pi r^2} \quad D) D = \frac{Q}{8\pi r^2} \quad E) D = \frac{3Q}{8\pi r^2} \quad F) D = \frac{7Q}{12\pi r^2}$$

7. Napon na kondenzatoru

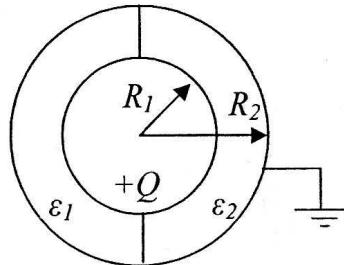
$$A) U = \frac{Q}{6\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \quad B) U = \frac{Q}{8\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \quad C) U = \frac{Q}{12\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

$$D) U = \frac{Q}{18\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \quad E) U = \frac{5Q}{6\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \quad F) U = \frac{3Q}{8\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

8. Kapacitet kondenzatora

$$A) C = 12\pi \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \quad B) C = 8\pi \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \quad C) C = \pi \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

$$D) C = 6\pi \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \quad E) C = 3\pi \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \quad F) C = 15\pi \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$



III. Beskonačno dugi metalni cilindar radijusa $R = 0,02\text{m}$ nabijen nabojem površinske gustoće $\sigma = 5 \mu\text{C} / \text{m}^2$ smješten je na visinu $h = 2\text{m}$ iznad uzemljene vodljive plohe prema slici.

9. Odredite jakost električnog polja u točki A.

$$A) E_A = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{\epsilon_0} \quad B) E_A = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{\epsilon_0} \quad C) E_A = \frac{1 \cdot 10^{-7}}{\epsilon_0} \quad D) E_A = \frac{1 \cdot 10^{-8}}{\epsilon_0} \quad E) E_A = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{\epsilon_0} \quad F) E_A = \frac{4 \cdot 10^{-8}}{\epsilon_0}$$

10. Odredite jakost električnog polja u točki B.

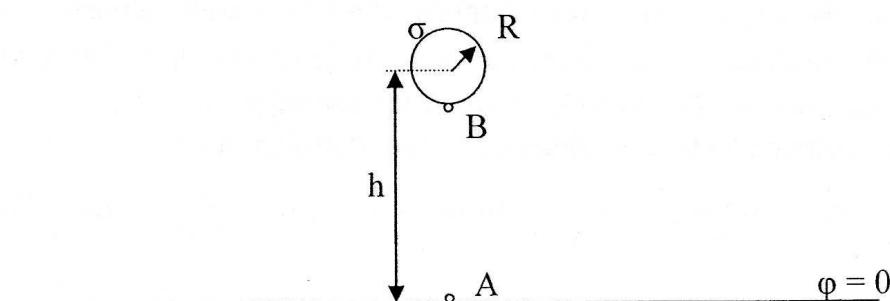
$$A) E_B = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{\epsilon_0} \quad B) E_B = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\epsilon_0} \quad C) E_B = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{\epsilon_0} \quad D) E_B = \frac{1 \cdot 10^{-5}}{\epsilon_0} \quad E) E_B = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{\epsilon_0} \quad F) E_B = \frac{4 \cdot 10^{-5}}{\epsilon_0}$$

11. Odredite potencijal cilindra.

$$A) \varphi = \frac{727 \cdot 10^{-9}}{\epsilon_0} \quad B) \varphi = \frac{615 \cdot 10^{-9}}{\epsilon_0} \quad C) \varphi = \frac{529 \cdot 10^{-9}}{\epsilon_0} \quad D) \varphi = \frac{217 \cdot 10^{-9}}{\epsilon_0} \quad E) \varphi = \frac{92 \cdot 10^{-9}}{\epsilon_0} \quad F) \varphi = \frac{11 \cdot 10^{-9}}{\epsilon_0}$$

12. Odredite kapacitet sustava cilindra i plohe po jedinici duljine.

$$A) C' = 0,57\epsilon_0 \quad B) C' = 0,97\epsilon_0 \quad C) C' = 1,05\epsilon_0 \quad D) C' = 1,19\epsilon_0 \quad E) C' = 1,37\epsilon_0 \quad F) C' = 2,17\epsilon_0$$



IV. Električno je polje u prostoru 1 zadano jednadžbom $\vec{E}_1 = 3\vec{a}_x - 4\vec{a}_y + 5\vec{a}_z$ V/m.

13. Odredite komponentu vektora gustoće električnog tijeka u prostoru 2 u smjeru osi x D_{2x} .

- A) $D_{2x} = 2\epsilon_0$ B) $D_{2x} = 3\epsilon_0$ C) $D_{2x} = 4\epsilon_0$ D) $D_{2x} = 5\epsilon_0$ E) $D_{2x} = 10\epsilon_0$ F) $D_{2x} = 15\epsilon_0$

14. Odredite apsolutnu vrijednost vektora gustoće električnog tijeka u prostoru 2 $|\vec{D}_2|$.

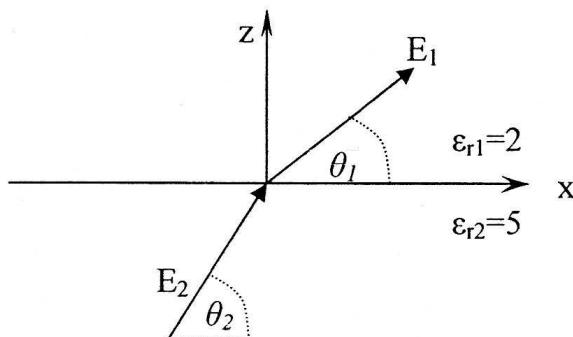
- A) $|\vec{D}_2| = 2\sqrt{11}\epsilon_0$ B) $|\vec{D}_2| = 5\sqrt{29}\epsilon_0$ C) $|\vec{D}_2| = 5\sqrt{17}\epsilon_0$ D) $|\vec{D}_2| = 4\sqrt{17}\epsilon_0$ E) $|\vec{D}_2| = 3\sqrt{29}\epsilon_0$ F) $|\vec{D}_2| = \sqrt{11}\epsilon_0$

15. Odredite kut θ_1 koji vektor \vec{E}_1 zatvara s ravninom x-y.

- A) $\theta_1 = 67,1^\circ$ B) $\theta_1 = 54,2^\circ$ C) $\theta_1 = 50,1^\circ$ D) $\theta_1 = 45^\circ$ E) $\theta_1 = 29^\circ$ F) $\theta_1 = 21,8^\circ$

16. Odredite kut θ_2 koji vektor \vec{E}_2 zatvara s ravninom x-y.

- A) $\theta_2 = 67,1^\circ$ B) $\theta_2 = 54,2^\circ$ C) $\theta_2 = 50,1^\circ$ D) $\theta_2 = 45^\circ$ E) $\theta_2 = 29^\circ$ F) $\theta_2 = 21,8^\circ$



V. Vektor gustoće električnog tijeka u statičkom električnom polju u prostoru je zadan jednadžbom:

$$\vec{D} = \vec{a}_y \left(\frac{A}{x+1} + \frac{15}{(y+2)^3} \right)$$

Odredi:

17. Odredite konstantu A

- A) $A = -2$ B) $A = -1$ C) $A = 0$ D) $A = 1$ E) $A = 2$ F) $A = 3$

18. Odredite izraz za naboj u prostoru

$$A) \rho = \frac{-5}{(y+2)^4} \quad B) \rho = \frac{-10}{(y+2)^4} \quad C) \rho = \frac{-15}{(y+2)^4} \quad D) \rho = \frac{-25}{(y+2)^4} \quad E) \rho = \frac{-30}{(y+2)^4} \quad F) \rho = \frac{-45}{(y+2)^4}$$

19. Odredite električni tok vektora \vec{D} kroz kvadrat $(0,0,0), (1m,0,0), (1m,0,1m), (0,0,1m)$

$$A) \varphi = \frac{3}{8} \quad B) \varphi = \frac{15}{8} \quad C) \varphi = \frac{7}{8} \quad D) \varphi = \frac{13}{8} \quad E) \varphi = \frac{1}{8} \quad F) \varphi = \frac{15}{4}$$

20. Odredite jakost električnog polja u ishodištu.

$$A) E = \frac{3}{8\epsilon_0} \quad B) E = \frac{15}{8\epsilon_0} \quad C) E = \frac{7}{8\epsilon_0} \quad D) E = \frac{13}{8\epsilon_0} \quad E) E = \frac{1}{8\epsilon_0} \quad F) E = \frac{15}{4\epsilon_0}$$

I Zbog centralne simetrije polje je radijalno: $\vec{E} = E(r)\vec{a}_r$ $\vec{n} = \vec{a}_r$ $d\vec{l} = \vec{a}_r dr$ $\vec{E}\vec{a}_r = E(r) = E$

1.) primjenjuje se gaussov zakon na prostor unutar ljeske, gdje nema naboja:

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV = 0 \Rightarrow E = 0$$

2.) primjenjuje se gaussov zakon na prostor $R_1 < r < R_2$

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad dV = 4\pi r^2 dr \quad \rho = a + br$$

$$E \iint_S dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^r (a + br) 4\pi r^2 dr \quad E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi \left(a \int_{R_1}^r r^2 dr + b \int_{R_1}^r r^3 dr \right)$$

$$E = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{a}{3} (r^3 - 8) + \frac{b}{4} (r^4 - 16) \right]$$

3.) primjenjuje se gaussov zakon na prostor $r > R_2$

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad dV = 4\pi r^2 dr \quad \rho = a + br$$

$$E \iint_S dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} (a + br) 4\pi r^2 dr \quad E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi \left(a \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr + b \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \right)$$

$$E = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{19a}{3} + \frac{65b}{4} \right]$$

4.) Potencijal unutar sferne ljeske je konstantan jer je polje nula. $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ $\vec{E} = 0$ $\varphi = \text{konst.}$

$$\varphi_{R_2} - \varphi_{R_{ref}} = - \int_{R_{ref}}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \varphi_{R_2} - 0 = - \int_{\infty}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^{R_2} \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{19a}{3} + \frac{65b}{4} \right] dr = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{19a}{3} + \frac{65b}{4} \right] \frac{1}{R_2}$$

$$\varphi_{R_2} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{19a}{9} + \frac{65b}{12} \right]$$

$$\varphi_{R_1} - \varphi_{R_2} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{a}{3} (r^3 - 8) + \frac{b}{4} (r^4 - 16) \right] dr$$

$$\varphi_0 = \varphi_{R_1} = \varphi_{R_2} + \frac{1}{\epsilon_0} \int_2^3 \left(\frac{a}{3} r - \frac{8a}{3r^2} + \frac{b}{4} r^2 - \frac{16b}{4r^2} \right) dr = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{19a}{9} + \frac{65b}{12} \right] + \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{7a}{18} + \frac{11b}{12} \right] = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{5a}{2} + \frac{19b}{3} \right]$$

II Zbog sferne simetrije polje je radijalno pa je zato i tangencijalno na granicu između dielektrika. Kako su tangencijalne komponente električnog polja jednake u oba dielektrika, a samo one i postoje (polje je tangencijalno na granicu => normalne komponente su nula) polje je jednak u oba dielektrika (napon i razmak između elektroda je isti u oba dielektrika). Gustoća naboja nije ista u oba dielektrika, naboju se raspodjeli proporcionalno dielektričnim konstantama. Vektor gustoće električnog toka je različit.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \frac{1}{\epsilon} \rho dV = \iint_S \frac{1}{\epsilon} \sigma dS = \sum_i \frac{Q_i}{\epsilon_i} \quad \sigma = \frac{dQ}{dS} \quad \sigma = \frac{Q}{S}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad S_1 = S_2 \quad D = \epsilon E$$

$$5.) \quad \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \frac{1}{\epsilon} \sigma dS \quad E 4\pi r^2 = \frac{\sigma_1 S_1}{\epsilon_1} + \frac{\sigma_2 S_2}{\epsilon_2} = \frac{Q_1}{\epsilon_1} + \frac{Q_2}{\epsilon_2} \quad Q = Q_1 + Q_2 \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

$$Q_1 = \frac{1}{4}Q \quad Q_2 = \frac{3}{4}Q \quad E 4\pi r^2 = \frac{1}{4} \frac{Q}{\epsilon_1} + \frac{3}{4} \frac{Q}{\epsilon_2} \Rightarrow E = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^2} \quad D = \epsilon E \quad D_1 = \frac{Q}{8\pi r^2}$$

ili

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V dQ = Q \rightarrow D_1 S_1 + D_2 S_2 = Q \quad \epsilon_1 E_1 S_1 + \epsilon_2 E_2 S_2 = Q \quad S_1 = S_2 = S \quad E_1 = E_2 = E$$

$$ES = \frac{Q}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \quad E 2\pi r^2 = \frac{Q}{4\epsilon_0} \quad E = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^2} \quad D = \epsilon E$$

$S_1, S_2 \rightarrow$ polovica sfere

$$6.) \quad D_2 = \epsilon_2 E_2 = \epsilon_2 E = 3\epsilon_0 \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{3Q}{8\pi r^2}$$

$$7.) \quad U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{r} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

$$8.) \quad C = \frac{Q}{U} = 8\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

* napomena → u službenim rješenjima 7. i 8. fali ϵ_0

III Beskonačno dugi metalni cilindar nabijen nabojem površinske gustoće σ modelira se linijskim nabojem λ smještenim u sredini cilindra. Koristi se metoda odslikavanja, pa se račun provodi sa nabojem $+\lambda$ koji se nalazi 2m iznad zemlje i nabojem $-\lambda$ koji se nalazi 2m ispod zemlje. Polje i potencijal linijskog naboja su:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \quad \varphi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{ref}}{r} \quad \sigma = \frac{dQ}{dS} \quad \lambda = \frac{dQ}{dl} \quad dS = 2\pi R dl \quad \lambda = \sigma 2\pi R$$

$$\mathbf{9.)} \quad E_A = E_{+\lambda} + E_{-\lambda} = 2E = 2 \frac{\sigma 2\pi R}{2\pi\epsilon 2} = \frac{1 \cdot 10^{-7}}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{10.)} \quad E_B = E_{+\lambda} + E_{-\lambda} = \frac{\sigma 2\pi R}{2\pi\epsilon R} + \frac{\sigma 2\pi R}{2\pi\epsilon 3,98} = \frac{5,025 \cdot 10^{-6}}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{11.)} \quad \varphi = \varphi_{+\lambda} + \varphi_{-\lambda} = \frac{\sigma 2\pi R}{2\pi\epsilon} \ln \frac{h}{R} + \frac{-\sigma 2\pi R}{2\pi\epsilon} \ln \frac{h}{3,98} = \frac{529,33 \cdot 10^{-9}}{\epsilon_0}$$

r_{ref} = udaljenost referentne točke potencijala $\varphi=0$ (zemlje) do naboja koji stvara potencijal
 r = udaljenost točke promatranja do naboja koji stvara potencijal

$$\mathbf{12.)} \quad \frac{C}{l} = \frac{Q}{Ul} = \frac{\lambda l}{Ul} = \frac{\lambda}{\varphi} = \frac{\sigma 2\pi R \epsilon_0}{529,33 \cdot 10^{-9}} = 1,18775 \epsilon_0$$

IV $\vec{n}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_s \quad \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \Rightarrow$ tangencijalne komponente električnog polja su jednake, normalne komponente toka su jednake ($D=\epsilon E$)

$$\vec{n} = \vec{a}_z \quad \sigma_s = 0$$

$$\vec{E}_{1T} = 3\vec{a}_x - 4\vec{a}_y = \vec{E}_{2T} \quad \epsilon_1 \vec{E}_{1N} = 2\epsilon_0 \cdot 5\vec{a}_z = \epsilon_2 \vec{E}_{2N} \Rightarrow \vec{E}_{2N} = \frac{2 \cdot 5\vec{a}_z}{5} = 2\vec{a}_z$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2T} + \vec{E}_{2N} = 3\vec{a}_x - 4\vec{a}_y + 2\vec{a}_z \quad \vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2$$

ili:

$$\vec{a}_z (\epsilon_2 E_{2x} \vec{a}_x + \epsilon_2 E_{2y} \vec{a}_y + \epsilon_2 E_{2z} \vec{a}_z - \epsilon_1 E_{1x} \vec{a}_x - \epsilon_1 E_{1y} \vec{a}_y - \epsilon_1 E_{1z} \vec{a}_z) = 0$$

$$\epsilon_2 E_{2z} = \epsilon_1 E_{1z} \quad E_{2z} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{1z} = \frac{2}{5} 5 = 2$$

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ E_{2x} - 3 & E_{2y} + 4 & E_{2z} - 5 \end{vmatrix} = \vec{a}_x(-1)(E_{2y} + 4) - \vec{a}_y(-1)(E_{2x} - 3) + \vec{a}_z \cdot 0 = 0$$

$$E_{2y} = -4 \quad E_{2x} = 3 \quad \vec{E}_2 = 3\vec{a}_x - 4\vec{a}_y + 2\vec{a}_z \quad \vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2 = \epsilon_0 (15\vec{a}_x - 20\vec{a}_y + 10\vec{a}_z)$$

$$\mathbf{13.)} \quad D_{2x} = 15\epsilon_0$$

$$\mathbf{14.)} \quad |\vec{D}_2| = \epsilon_0 \sqrt{15^2 + 20^2 + 10^2} = 5\sqrt{29}\epsilon_0$$

$$\mathbf{15.)} \quad \theta_1 = \sin^{-1} \frac{E_{1z}}{|\vec{E}_1|} = 45^\circ$$

$$\mathbf{16.)} \quad \theta_2 = \sin^{-1} \frac{E_{2z}}{|\vec{E}_2|} = 21,8^\circ \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad \theta_{1,2} = 90^\circ - \alpha_{1,2}$$

V U statičkom električnom polju vrijedi zakon o konzervativnosti električnog polja:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = \text{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

17.) $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \text{rot} \vec{E} = \vec{0}$

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{a}_x \cdot (-1) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A}{x+1} + \frac{15}{(y+2)^3} \right) - \vec{a}_y \cdot 0 + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{x+1} + \frac{15}{(y+2)^3} \right) = 0$$

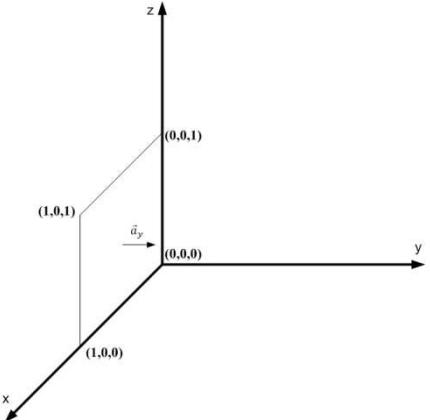
$$\vec{a}_x \cdot 0 + \vec{a}_z \cdot \left(\frac{-A}{(x+1)^3} \right) = 0 \Rightarrow A = 0$$

18.) $\varepsilon \nabla \vec{E} = \rho \quad \nabla \vec{D} = \rho$

$$\left(\vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\vec{a}_y \frac{15}{(y+2)^3} \right) = \frac{-45}{(y+2)^4} = \rho$$

19.) $\vec{n} = \vec{a}_y \quad S = 1 \text{ m}^2 \quad \vec{D} \cdot \vec{n} = \frac{15}{(y+2)^3}$

$$\varphi = \iint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \frac{15}{(y+2)^3} dx dz = \frac{15}{(0+2)^3} \int_0^1 dx \int_0^1 dz = \frac{15}{8} S = \frac{15}{8}$$



20.)

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{D}(x, y, z)}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{a}_y \left(\frac{15}{(y+2)^3} \right) \quad E(x, y, z) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{15}{(y+2)^3} \right) \quad E(0,0,0) = \frac{15}{8\varepsilon_0}$$

1. Međuispit iz Elektromagnetskih polja

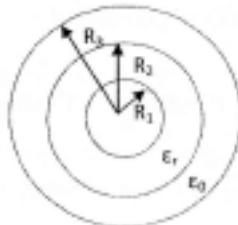
01.04.2010.

Ime i prezime _____ Matični broj _____

INAČICA B

Ispit se sastoji od pet cijelina, u kojima se točan odgovor na svako pitanje nezavisno budi, te se sastoji od ukupno 20 pitanja. Ukoliko želite odgovoriti na neko pitanje, zacrnite odgovor na obrascu za test. Svaki točan odgovor donosi 1 bod, dok se neodgovorena pitanja ne budu. Netočan odgovor donosi -0.2 boda. Napišite ime na svim papirima s postupcima i predajte ih na kraju ispita zajedno s primjerkom testa u košuljici, dok se Obrazac za test posebno predaje.

- I. Dvoslojni kuglasti kondenzator radijusa unutrašnje elektrode $R_1 = 8\text{cm}$ i radijusa vanjske elektrode $R_2 = 24\text{cm}$, prikazan je slikom. Unutrašnja elektroda nabijena je nabojem $+Q$, a vanjska nabojem $-Q$. U prostoru između elektroda za $8\text{cm} \leq r \leq 16\text{ cm}$, nalazi se dielektrik relativne dielektričnosti $\epsilon_r = 4$, a u prostoru $16\text{cm} \leq r \leq 24\text{ cm}$ nalazi se zrak. Zadano je $Q=15\text{ nC}$.



1. Odredi jakost električnog polja na udaljenosti 14 cm od ishodišta.

A $1248 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ B $936 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ C $1720 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ D $2959 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ E $3821 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ F $2054 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

2. Odredi jakost električnog polja na udaljenosti 18 cm od ishodišta.

A $11885 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ B $4161 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ C $3668 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ D $3110 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ E $7775 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ F $2696 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

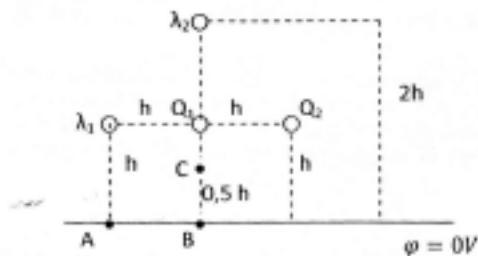
3. Odredi vektor polarizacije \vec{P} na vanjskoj površini dielektrika.

A $31.6 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ B $28.3 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ C $106 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ D $35 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ E $25.7 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ F $51.8 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$

4. Odredi ukupni polarizirani naboј na vanjskoj površini dielektrika.

A 16.7 nC B 5.7 nC C 11.3 nC D 9.3 nC E 13.3 nC F 8 nC

- II Točkasti i linijski naboji nalaze se iznad beskonačno velike metalne plohe na potencijalu $\varphi = 0V$ prema slici. Zadano je $h = 3m$, $Q_1 = 20nC$, $Q_2 = -40nC$, $\lambda_1 = 45\text{ nC/m}$ i $\lambda_2 = -10\text{ nC/m}$.



5. Odredite jakost električnog polja u točki A.

A $443 \frac{V}{m}$ B $171 \frac{V}{m}$ C $260 \frac{V}{m}$ D $573 \frac{V}{m}$ E $317 \frac{V}{m}$ F $498 \frac{V}{m}$

6. Odredite jakost električnog polja u točki B.

A $221 \frac{V}{m}$ B $129 \frac{V}{m}$ C $155 \frac{V}{m}$ D $58 \frac{V}{m}$ E $251 \frac{V}{m}$ F $36 \frac{V}{m}$

7. Odredite potencijal točke C koja se nalazi na polovini udaljenosti od točke B do naboja Q_1 .

A 63.4 V B 164 V C 334 V D 53.6 V E 268 V F 195 V

8. Odredite rad koji je potrebno napraviti za pomicanje točkastog naboja $Q=15\text{ pC}$ od točke A do točke C.

A 0.32 nJ B 7.8 nJ C 1.34 nJ D 0.82 nJ E 5 nJ F 2.14 nJ

- III U prostoru je u kartezijevom koordinatnom sustavu zadana jakost električnog polja jednadžbom $\vec{E} = A \cos(k \cdot x) \cos(k \cdot y) \vec{a}_x + \sin(k \cdot x) \sin(k \cdot y) \vec{a}_y$. Konstanta $k = 2\text{ rad/m}$.

9. Odredite jakost električnog polja u točki (1,2,3).

A $845 \frac{mV}{m}$ B $990 \frac{mV}{m}$ C $925 \frac{mV}{m}$ D $654 \frac{mV}{m}$ E $146 \frac{mV}{m}$ F $740 \frac{mV}{m}$

10. Odredite gustoću slobodnog naboja u točki (1,2,4).

A $30.9 \frac{pC}{m^3}$ B $17.5 \frac{pC}{m^3}$ C $11.2 \frac{pC}{m^3}$ D $-25.7 \frac{pC}{m^3}$ E $-13.4 \frac{pC}{m^3}$ F $-21.0 \frac{pC}{m^3}$

11. Tok vektora električne indukcije \vec{D} kroz kocku određenu koordinatama prostorne dijagonale (1,1,1) i (3,3,3).

- A $10.7 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ B $29.0 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ C $-42.6 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ D $-22.2 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ E $-34.8 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ F $18.4 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$

12. Odredite $\nabla \times \vec{E}$ u točki (2,1,2).

- A $2 \frac{\text{V}}{\text{m}^2}$ B $1.1 \frac{\text{V}}{\text{m}^2}$ C $1.7 \frac{\text{V}}{\text{m}^2}$ D 0 E $2.4 \frac{\text{V}}{\text{m}^2}$ F $0.7 \frac{\text{V}}{\text{m}^2}$

IV Granica dva dielektrika relativne dielektričnosti $\epsilon_{r1} = 3$ i $\epsilon_{r2} = 2$ zadana je jednadžbom

$2x + 4y + z = 17$. Dio prostora koji sadrži ishodište je relativne dielektričnosti ϵ_{r1} . Jakost električnog polja u prostoru 1 je $\vec{E}_1 = -2\vec{a}_x - 1\vec{a}_y + 2\vec{a}_z$ [V/m].

13. Odredite vektor električne indukcije u sredstvu 2 u smjeru x, D_x .

- A $-33.3 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ B $46.4 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ C $11.4 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ D $-133 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ E $109 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ F $-40.5 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$

14. Odredite vektor električne indukcije u sredstvu 2 u smjeru y, D_y .

- A $-27.8 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ B $39.6 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ C $111 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ D $-93.2 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ E $67 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ F $-18.6 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$

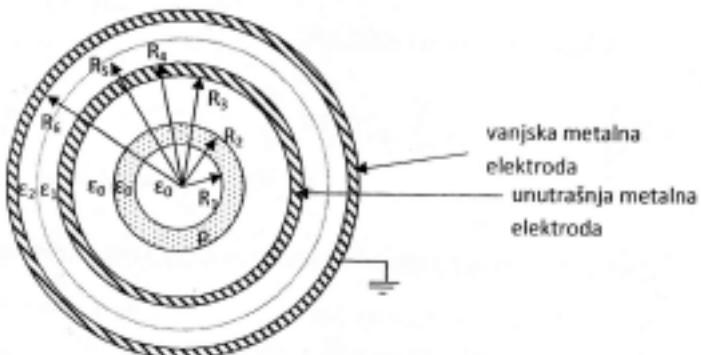
15. Odredite vektor električne indukcije u sredstvu 2 u smjeru z, D_z .

- A $-60.7 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ B $32.9 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ C $1.26 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ D $103 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ E $75.0 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ F $49.8 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$

16. Odredite napon U_{AB} između točke A (0,0,0) i točke B (1,0,0).

- A 4 V B 2 V C -1 V D -4 V E -2 V F 1 V

V Cilindrični kondenzator s dva sloja dielektrika prikazan je slikom. U prostoru $r < R_3$ se gustoća naboja miješanja prema izrazu $\rho = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{1}{r^4 + R_1^4} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases} \left[\frac{C}{m^3} \right]$. Vanjska je metalna elektroda uzemljena. Zadano je $\epsilon_{r1} = 4$, $\epsilon_{r2} = 2$, $R_1 = 1\text{ cm}$, $R_2 = 3\text{ cm}$, $R_3 = 4.5\text{ cm}$, $R_4 = 5\text{ cm}$, $R_5 = 10\text{ cm}$, $R_6 = 20\text{ cm}$.



17. Odredite jakost električnog polja u prostoru dielektričnosti ϵ_{r1} na udaljenosti 9cm od osi kondenzatora.

- A $930 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ B $465 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ C $380 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ D $775 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ E $1550 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ F $1046 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$

18. Odredite vektor polarizacije u prostoru dielektričnosti ϵ_{r2} na udaljenosti 12cm od osi kondenzatora.

- A $26.5 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ B $8.8 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ C $20.6 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ D $10.3 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ E $9.9 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ F $12.3 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$

19. Odredite energiju po jedinici duljine kondenzatora određenog s unutrašnjom i vanjskom metalnom elektrodom, te slojevima dielektrika ϵ_1 i ϵ_2 .

- A $0.41 \frac{\text{J}}{\text{m}}$ B $2.05 \frac{\text{J}}{\text{m}}$ C $0.57 \frac{\text{J}}{\text{m}}$ D $0.33 \frac{\text{J}}{\text{m}}$ E $0.51 \frac{\text{J}}{\text{m}}$ F $4.50 \frac{\text{J}}{\text{m}}$

20. Odredite kapacitet po jedinici duljine kondenzatora određenog s unutrašnjom i vanjskom metalnom elektrodom, te slojevima dielektrika ϵ_1 i ϵ_2 .

- A $203 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ B $133 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ C $165 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ D $107 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ E $118 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ F $235 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$

Elektromagnetska polja

Međuispit - 26.4.2013.

Zadatak 1. Granica dva dielektrika je ravnina $z = 0$. U poluprostoru $z > 0$ nalazi se dielektrik relativne dielektričnosti $\varepsilon_{r1} = 5$, a u poluprostoru $z < 0$ nalazi se dielektrik relativne dielektričnosti $\varepsilon_{r2} = 3$. U poluprostoru $z > 0$ zadano je električno polje jakosti $\vec{E}_1 = 2\vec{a}_x + 5\vec{a}_y - 4\vec{a}_z$ kV/m.

- (a) Odredite jakost električnog polja u kV/m u smjeru osi x u prostoru $z < 0$.
- (b) Odredite jakost električnog polja u kV/m u smjeru osi y u prostoru $z < 0$.
- (c) Odredite jakost električnog polja u kV/m u smjeru osi z u prostoru $z < 0$.

Najprije odredimo normalu:

$$\vec{n}_{12} = -\vec{a}_z$$

Sada odredimo normalnu komponentu vektora \vec{E}_1 :

$$\vec{E}_{1n} = (\vec{E}_1 \vec{n}_{12}) \vec{n}_{12} = -4\vec{a}_z \text{ kV/m}$$

Nakon toga odredimo tangencijalnu komponentu vektora \vec{E}_1 :

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_1 - \vec{E}_{1n} = 2\vec{a}_x + 5\vec{a}_y \text{ kV/m}$$

S obzirom na to da su tangencijalne komponente vektora električnog polja jednake u oba sredstva, slijedi:

$$\vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t} = 2\vec{a}_x + 5\vec{a}_y \text{ kV/m}$$

S obzirom na to da su normalne komponente vektora električne indukcije jednake u oba sredstva, slijedi:

$$\vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n} \rightarrow \vec{E}_{2n} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \vec{E}_{1n} = -\frac{20}{3} \vec{a}_z \text{ kV/m}$$

Konačno je:

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2t} + \vec{E}_{2n} = 2\vec{a}_x + 5\vec{a}_y - \frac{20}{3}\vec{a}_z \text{ kV/m}$$

odnosno:

$$E_{2x} = 2 \text{ kV/m} \quad E_{2y} = 5 \text{ kV/m} \quad E_{2z} = -\frac{20}{3} \text{ kV/m} = -6,67 \text{ kV/m}$$

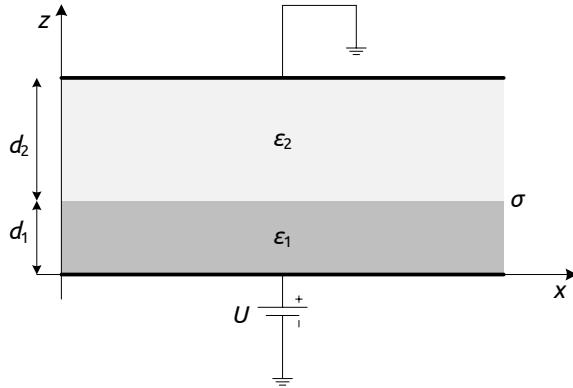
- (d) Odredite energiju u pJ pohranjenu u kocki stranice 1 m koja ima središte u točci (3; 2; 2).

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \iiint_V |\vec{E}_1|^2 dV = \frac{1}{2} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot [2^2 + 5^2 + (-4)^2] \cdot 1^3 = 996 \text{ pJ}$$

Elektromagnetska polja

Međuispit - 26.4.2013.

Zadatak 2. Unutar ploča pločastog kondenzatora nalaze se dva sloja dielektrika prema slici. Na granici dva dielektrika nalazi se naboј plošne gustoće $\sigma = 2 \text{ nC/m}^2$. Zadano je $U = 200 \text{ V}$, $\epsilon_1 = 9\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 4\epsilon_0$, $d_1 = 6 \text{ cm}$ i $d_2 = 10 \text{ cm}$.



(a) Odredite iznos jakosti električnog polja u V/m u dielektriku dielektričnosti ϵ_2 .

Najprije nađemo vektore električnih polja i normale:

$$\vec{E}_1 = E_1 \vec{a}_z$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \vec{a}_z$$

$$\vec{n}_{12} = \vec{a}_z$$

Uvrstimo u uvjet na granici:

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma \rightarrow \epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1 = \sigma$$

Također, na granici je neki iznos potencijala $\varphi_{granica}$ pa možemo dobiti vezu za napone i električna polja:

$$E_1 = \frac{U - \varphi_{granica}}{d_1} \rightarrow \varphi_{granica} = U - E_1 d_1$$

$$E_2 = \frac{\varphi_{granica} - 0}{d_2} \rightarrow \varphi_{granica} = E_2 d_2$$

$$U - E_1 d_1 = E_2 d_2 \rightarrow E_2 = \frac{U - E_1 d_1}{d_2}$$

Uvrštavanjem izraza za E_2 u izraz za uvjet na granici slijede iznosi za E_1 i E_2 :

$$\epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1 = \sigma \rightarrow \epsilon_2 \frac{U - E_1 d_1}{d_2} - \epsilon_1 E_1 = \sigma \rightarrow E_1 = \frac{\frac{\epsilon_2}{d_2} U - \sigma}{\epsilon_1 + \frac{d_1}{d_2} \epsilon_2}$$

$$E_1 = \frac{\frac{4\epsilon_0}{0,1} \cdot 200 - 2 \cdot 10^{-9}}{9\epsilon_0 + \frac{0,06}{0,1} \cdot 4\epsilon_0} = 681,94 \text{ V/m}$$

$$E_2 = \frac{U - E_1 d_1}{d_2} = \frac{200 - 681,94 \cdot 0,06}{0,1} = 1590,84 \text{ V/m}$$

(b) Odredite iznos vektora polarizacije u dielektriku dielektričnosti ε_1 u nC/m^2 .

$$\vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \varepsilon_0 \vec{E}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1 - \varepsilon_0 \vec{E}_1 = 9\varepsilon_0 \vec{E}_1 - \varepsilon_0 \vec{E}_1 = 8\varepsilon_0 \vec{E}_1$$

$$P_1 = 8 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 681,94 = 48,3 \text{nC/m}^2$$

(c) Odredite potencijal u V u dielektriku dielektričnosti ε_2 za $z = d_1 + \frac{d_2}{2}$.

$$\Delta\varphi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\varphi(z) = C_1 z + C_2$$

Rubni uvjeti:

$$\varphi(z = d_1) = \varphi_{\text{granica}} = E_2 d_2 = 1590,84 \cdot 0,1 = 159,084 \text{V}$$

$$\varphi(z = d_1 + d_2) = 0 \text{V}$$

Uvrštavanjem u izraz za potencijal slijedi:

$$\varphi(z = d_1) = C_1 d_1 + C_2 = 159,084$$

$$\varphi(z = d_1 + d_2) = C_1 (d_1 + d_2) + C_2 = 0$$

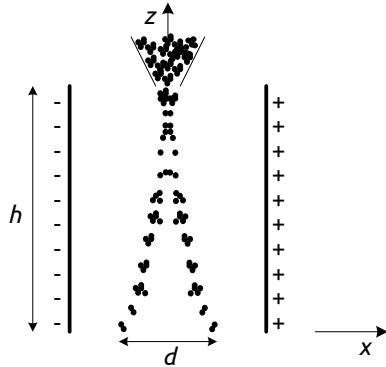
Iz toga se dobiju konstante $C_1 = -1590,84 \text{ m}^{-1}$ i $C_2 = 254,5344 \text{ V}$. Konačno slijedi:

$$\varphi\left(z = d_1 + \frac{d_2}{2}\right) = -1590,84 \left(0,06 + \frac{0,1}{2}\right) + 254,5344 = 79,54 \text{V}$$

Elektromagnetska polja

Međuispit - 26.4.2013.

Zadatak 3. Smjesa pozitivnih i negativnih čestica, koje su jednake mase $m = 10^{-8}$ kg i naboja $Q = \pm 8$ pC, ulazi u elektrostatski separator čestica visine $h = 1,4$ m. Rubni uvjeti i Coulombova sila između čestica se mogu zanemariti. Sve čestice izlaze iz spremnika u točki $(0, 0, 0)$ s početnom brzinom $v_0 = 0$. Ubrzanje slobodnog pada iznosi $g = 9,81$ m/s².



(a) Odredite iznos jakosti homogenog električnog polja E u V/m između ploča potreban da se pozitivno i negativno nabijene čestice na izlazu iz separatora razmaknu na $d = 60$ cm.

Odaberimo naboј Q i neka je on pozitivan. Vrijedi:

$$m \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2} \vec{a}_x + \frac{d^2y(t)}{dt^2} \vec{a}_y + \frac{d^2z(t)}{dt^2} \vec{a}_z \right) = -QE\vec{a}_x - mg\vec{a}_z$$

Za x komponentu slijedi:

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -QE$$

Nakon dvostrukih integracija i uvrštavanja početnih uvjeta $v_x(0) = 0$ i $x(0) = 0$ slijedi:

$$v_x(t) = -\frac{QE}{m}t \quad x(t) = -\frac{QE}{2m}t^2$$

Za y komponentu slijedi:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = 0$$

Nakon dvostrukih integracija i uvrštavanja početnih uvjeta $v_y(0) = 0$ i $y(0) = 0$ slijedi:

$$v_y(t) = 0 \quad y(t) = 0$$

Za z komponentu slijedi:

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = 0$$

Nakon dvostrukih integracija i uvrštavanja početnih uvjeta $v_z(0) = 0$ i $z(0) = 0$ slijedi:

$$v_z(t) = -gt \quad z(t) = -\frac{gt^2}{2}$$

Vrijedi:

$$z(t_{izlaz}) = -h = -\frac{gt_{izlaz}^2}{2} \rightarrow t_{izlaz}^2 = \frac{2h}{g} \rightarrow t_{izlaz} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$x(t_{izlaz}) = -\frac{d}{2} = -\frac{QE}{2m}t_{izlaz}^2 \rightarrow E = \frac{md}{Qt_{izlaz}^2} = E = \frac{gmd}{2Qh}$$

Sada je:

$$E = \frac{9,81 \cdot 10^{-8} \cdot 0,6}{2 \cdot 8 \cdot 10^{-12} \cdot 1,4} = 2628 \text{ V/m}$$

(b) Odredite iznos brzine čestica u m/s na izlazu iz separatora.

Brzina u x smjeru:

$$v_x(t_{izlaz}) = -\frac{QE}{m}t_{izlaz} = -\frac{gd}{2h}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Brzina u z smjeru:

$$v_z(t_{izlaz}) = -gt_{izlaz} = -g\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

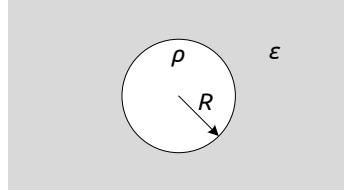
Brzina na izlazu:

$$v(t_{izlaz}) = \sqrt{v_x^2(t_{izlaz}) + v_z^2(t_{izlaz})} = \sqrt{\frac{g(d^2 + 4h^2)}{2h}} = 5,36 \text{ m/s}$$

Elektromagnetska polja

Međuispit - 26.4.2013.

Zadatak 4. Metalna kugla radijusa $R = 3 \text{ cm}$ nabijena nabojem 7 nC nalazi se u dielektriku čija dielektričnost u prostoru oko kugle varira o udaljenosti r od središta kugle prema jednadžbi $\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{R}{r}\right)^2$.



(a) Odredite kapacitet C metalne kugle u pF.

Ovaj zadatak možemo riješiti pomoću silocijevi. Prepostavimo da imamo kuglasti kondenzator čija je jedna elektroda sfera polumjera R , dok se druga nalazi u beskonačnosti. Najprije računamo otpor (kako ne bi bilo zabune s oznakom za polumjer sfere, za otpor koristimo R'):

$$dR' = \frac{1}{\epsilon} \frac{dl}{S} = \frac{1}{\epsilon_0 \left(1 + \frac{R}{r}\right)^2} \frac{dr}{4r^2 \pi} = \frac{dr}{4\pi\epsilon_0 (r+R)^2}$$

Sada gornji izraz integriramo od R do ∞ :

$$R' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{(r+R)^2} = \dots = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Kapacitet kugle je jednak:

$$C = \frac{1}{R'} = 8\pi\epsilon_0 R = 8\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 0,03 = 6,7 \text{ pF}$$

(b) Odredite energiju W u elektrostatoskom polju u prostoru oko kugle u μJ .

(c) Odredite potencijal φ kugle u V.

Odredimo najprije potencijal kugle. Vrijedi:

$$U = \frac{Q}{C} \rightarrow \varphi - \varphi(\infty) = \frac{Q}{C} \rightarrow \varphi = \frac{Q}{C}$$

jer je $\varphi(\infty) = 0$. Sada je:

$$\varphi = \frac{7 \cdot 10^{-9}}{6,7 \cdot 10^{-12}} = 1049 \text{ V}$$

(U kalkulator se za kapacitet uvrštava $6,6757587 \text{ pF}$, a to je pravi rezultat iz prethodnog zadatka, dok je odgovor $6,7 \text{ pF}$ zaokružen na jednu decimalu.)

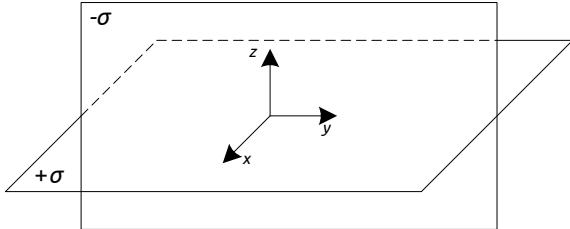
Sada je jednostavno dobiti i energiju:

$$W = \frac{U^2 C}{2} = \frac{\varphi^2 C}{2} = 3,7 \mu\text{J}$$

Elektromagnetska polja

Međuispit - 26.4.2013.

Zadatak 5. naboje plošne gustoće $+σ$ leži u xy ravnini, a naboje plošne gustoće $-σ$ leži u xz ravnini Kartezijevog koordinatnog sustava. Zadano je $|σ| = 15 \text{ nC/m}^2$ i $ε = ε_0$.



(a) Odredite iznos jakosti električnog polja u V/m u točci $A(2; 0, 5; 3)$.

Električno polje za ravninu xy :

$$\vec{E}_{xy} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_z, & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_z, & z < 0 \end{cases}$$

Električno polje za ravninu xz :

$$\vec{E}_{xz} = \begin{cases} \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_x, & x > 0 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_x, & x < 0 \end{cases}$$

Za točku A je $x > 0$ i $z > 0$ pa je:

$$\vec{E}_{uk} = \vec{E}_{xy} + \vec{E}_{xz} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_x + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_z$$

Iznos jakosti električnog polja je:

$$E_{uk} = \sqrt{\left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)^2} = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0} \sqrt{2} = 1198 \text{ V/m}$$

(b) Odredite iznos napona U_{BC} u V između točaka $B(-1; -2; -3)$ i $C(-3; -6; -9)$.

Vrijedi:

$$U_{BC} = \varphi(B) - \varphi(C) = - \int_C^B \vec{E}_{uk} d\vec{l}$$

I za točku B i za točku C je $x < 0$ i $z < 0$ pa je:

$$\vec{E}_{uk} = \vec{E}_{xy} + \vec{E}_{xz} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_x - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_z$$

Uz $d\vec{l} = dx \vec{a}_x + dy \vec{a}_y + dz \vec{a}_z$ dobije se:

$$\vec{E}_{uk} d\vec{l} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (dx - dz)$$

Gornji integral ne ovisi po putu pa od dočke B do točke C možemo ići po pravcu koji ih spaja:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t$$

$$\frac{x + 1}{-2} = \frac{y + 2}{-4} = \frac{z + 3}{-6} = t$$

Sada je:

$$x = -2t - 1 \rightarrow dx = -2dt$$

$$y = -4t - 2 \rightarrow dy = -4dt$$

$$z = -6t - 3 \rightarrow dz = -6dt$$

i parametar t je jednak 0 za točku B , odnosno 1 za točku C . Konačno slijedi:

$$U_{BC} = - \int_C^B \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (dx - dz) = - \int_1^0 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (-2dt + 6dt) = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0} = 3388 \text{V}$$