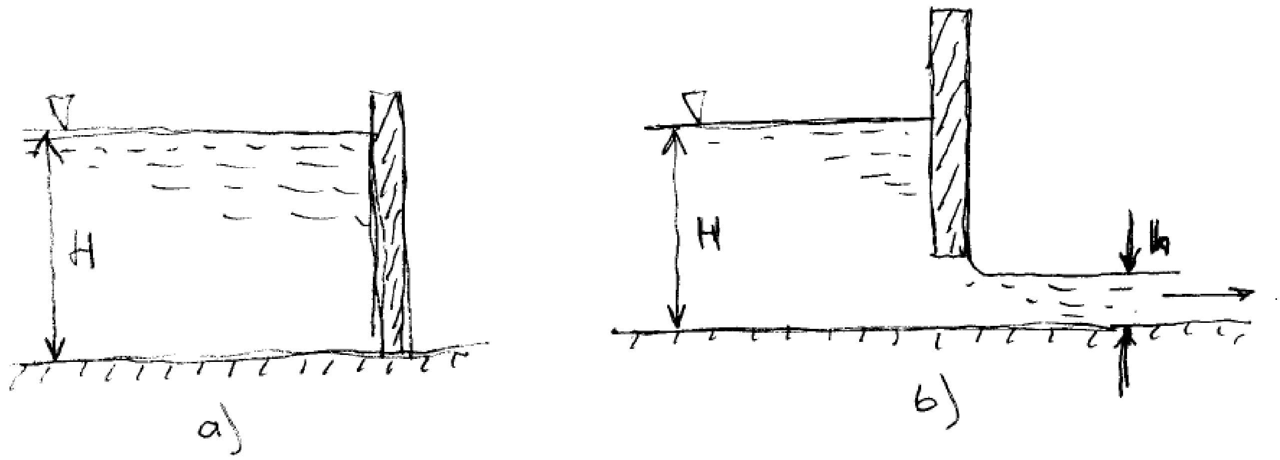
AV, siječanj

1. zad.

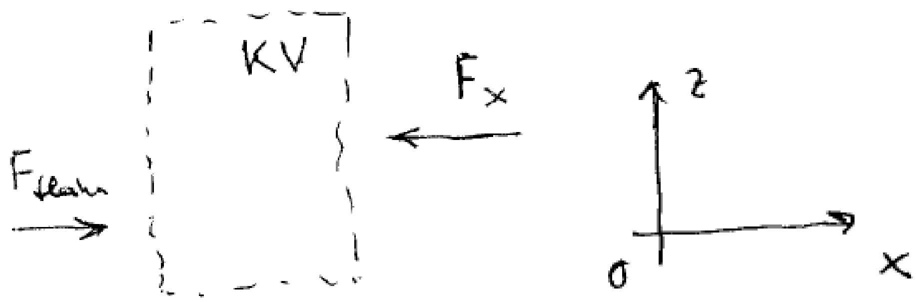
Protok vode u kanalu regulira se podiznom pregradom. U kojem je slučaju sila tlaka vode na pregradu veća, slika? Strujanje smatrajte stacionarnim i jednodimenzionalnim, no otpor strujanju uključite u razmatranje. Raspodjelu tlaka u fluidu smatrajte hidrostatskom.



Rj.

a)

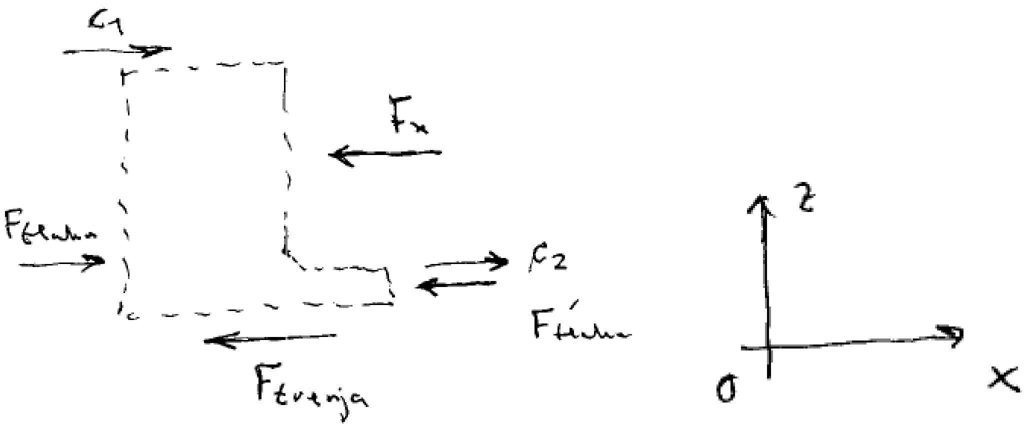
Voda miruje, protok i brzina strujanja jednaki su nuli:



$$\sum \vec{F}_i = \frac{d}{dt}\iiint_{KV} \vec{c}_r \rho dV + \oiint_{KP} \vec{c}_r \rho \vec{c}_r d\vec{A} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum F_{xi} = \frac{1}{2}\rho g H \cdot Hb - F_x = 0 \Rightarrow F_x = \frac{1}{2}\rho g H^2 b$$

b)



Kad je pregrada podignuta, sile što djeluju na kontrolni volumen (pregradu) pokazane su na slici b).

$$\frac{d}{dt}\iiint_{KV}\vec{c}_r\rho dV = 0;\quad \sum \vec{F}_i = \oiint_{KP}\vec{c}_r\rho\vec{c}_r d\vec{A} \neq 0$$

$$\sum F_{xi} = \frac{1}{2}\rho gH\cdot Hb - F_x - \frac{1}{2}\rho gh\cdot hb - F_{trenja} =$$

$$= \oiint_{KP} c_{rx}\rho\vec{c}_r d\vec{A} = c_{x1}\rho(-c_{x1})Hb + c_{x2}\rho c_{x2}hb = \rho c_{x2}{}^2 hb \Rightarrow$$

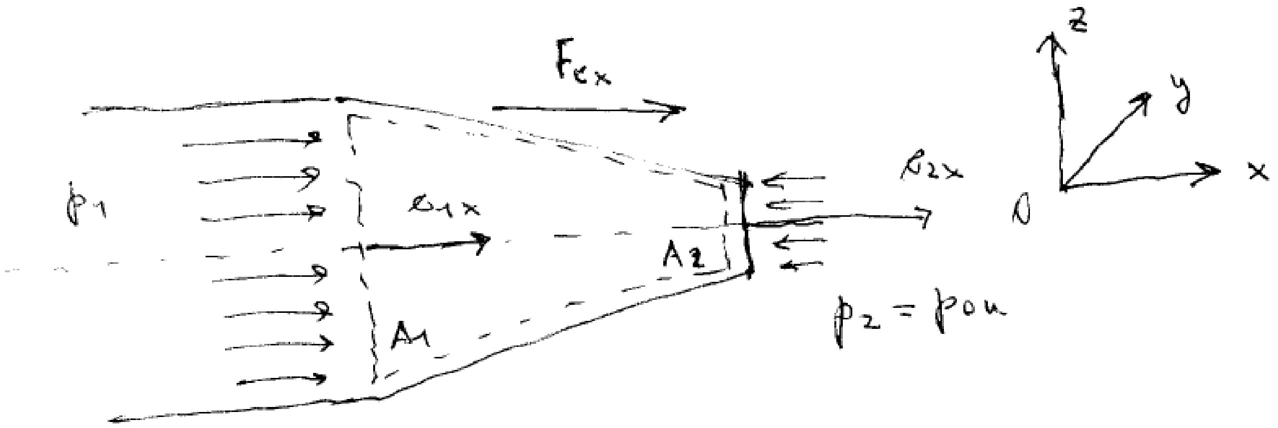
$$\left(c_{x1} \ll c_{x2} \Rightarrow c_{x1} = 0\right)$$

$$F_x = \frac{1}{2}\rho gH^2 b - \frac{1}{2}\rho gh^2 b - F_{trenja} - \rho c_{x2}^2 hb \Rightarrow$$

$\mathbf{F_{xa} > F_{xb}}$

2. zad.

Odredite veličinu i smjer horizontalne sile koja mora djelovati na sapnicu kako se sapnica ne bi micala. Strujanje vode kroz sapnicu, m kilograma u sekundi, smatrajte stacionarnim i jednodimenzionalnim. Tlak je okolice p_{ok}, promjer je ulaza u sapnicu d_1 mm, a promjer je izlaza iz sapnice d_2 mm.



Rj.

$$\sum F_{xi} = \frac{d}{dt}\iiint_{KV} c_{xr}\rho dV + \oiint_{KP} c_{xr}\rho\vec{c}_r d\vec{A} = \oiint_{KP} c_{xr}\rho\vec{c}_r d\vec{A}$$

$$\dot{m}_1 = \rho c_1 A_1 = \dot{m}_2 = \rho c_2 A_2 = \dot{m}$$

$$\sum F_{xi} = p_1 A_1 - p_2 A_2 + F_{cx} = \oiint_{KP} c_{xr}\rho\vec{c}_r d\vec{A} = \dot{m}\left(c_{2x} - c_{1x}\right)$$

$$\left(c_1 \equiv c_{1x};\quad c_2 \equiv c_{2x};\quad p_1 = ?,\quad p_2 = p_{ok}\right)$$

$$F_{cx} = \dot{m}_1\left(c_2 - c_1\right) - p_1 A_1 + p_2 A_2$$

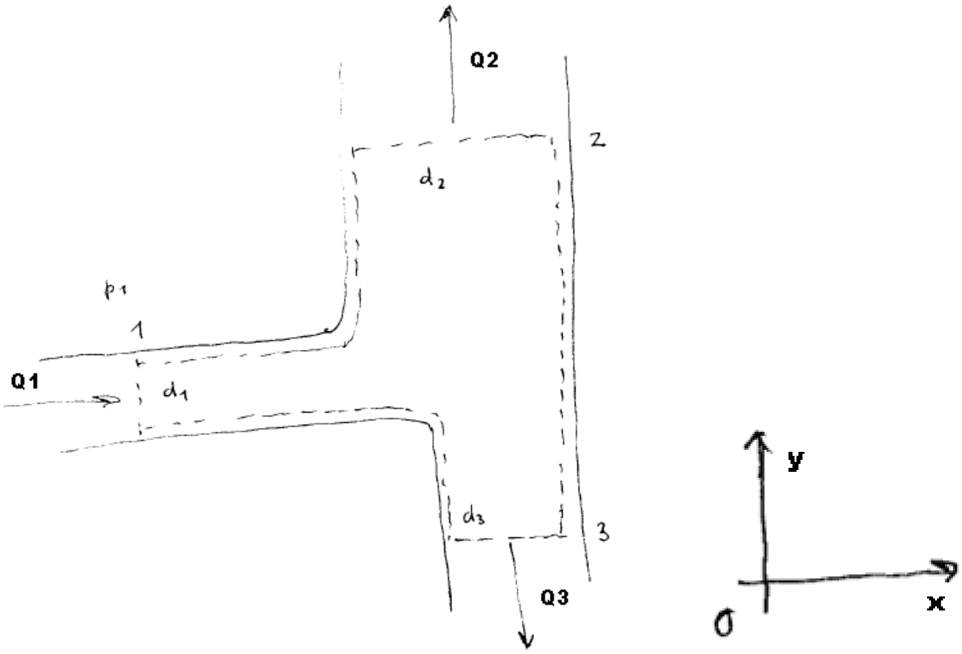
Ukupnu rezultantnu silu na cijev dobit ćemo uzmemo li u obzir i silu tlaka okolnog zraka

$$F_{cx} = \dot{m}\left(c_2 - c_1\right) - (p_1 - p_{ok})A_1 + (p_{ok} - p_{ok})A_2 = \dot{m}\left(c_2 - c_1\right) - (p_1 - p_{ok})A_1$$

$$A_1 = \frac{d_1^2\pi}{4}\left[m^2\right];\ \ A_2 = \frac{d_2^2\pi}{4}\left[m^2\right]$$
$$c_1 = \frac{Q}{A_1}\left[\frac{m}{s}\right];\ \ c_2 = \frac{Q}{A_2}\left[\frac{m}{s}\right]$$
$$\frac{c_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{c_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} \Rightarrow p_1 = p_{ok} + \frac{\rho}{2}\left(c_2^2 - c_1^2\right) \Rightarrow$$
$$F_{cx} = \dot{m}\left(c_2 - c_1\right) - (p_1 - p_{ok})A_1\left[N\right]$$

3. zad.

Odredite veličinu sile kojom voda, što stacionarno i jednodimenzionalno struji prema slici, djeluje na vodoravno položenu „t-cijev“. Gubitke energije i djelovanje sile teže zanemarite. Izmjereni je tlak u cijevi u presjeku 1 p_1 kN/m^2.



Rj.

$$A_1 = \frac{d_1^2\pi}{4}\left[m^2\right];\ \ A_2 = \frac{d_2^2\pi}{4}\left[m^2\right];\ \ A_3 = \frac{d_3^2\pi}{4}\left[m^2\right]$$
$$c_1 = \frac{Q_1}{A_1}\left[\frac{m}{s}\right];\ \ c_2 = \frac{Q_2}{A_2}\left[\frac{m}{s}\right]\ \ c_3 = \frac{Q_3}{A_2}\left[\frac{m}{s}\right]$$
$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{c_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{c_2^2}{2g} = \frac{p_3}{\rho g} + \frac{c_3^2}{2g} \Rightarrow$$
$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}\left(c_1^2 - c_2^2\right)\left[\frac{N}{m^2}\right]$$
$$p_3 = p_1 + \frac{\rho}{2}\left(c_1^2 - c_3^2\right)\left[\frac{N}{m^2}\right]$$

Rezultanta je svih vanjskih sila što djeluju na fluid u kontrolnom volumenu (cijevi) jednaka

$$\vec{F}_{rez} = \sum \vec{F}_i = \oint\!\!\oint_{KP} \vec{\sigma}\, dA + \iiint_{KV} \rho \vec{R}_r\, dV = \frac{d}{dt}\iiint_{KV} \rho \vec{c}_r\, dV + \oint\!\!\oint_{KP} \rho \vec{c}_r\left(\vec{c}_r d\vec{A}\right)\left[N\right]$$

Zbog stacionarnog strujanja i konstantnog obujma kontrolnog volumena vrijedi:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{KV} \rho \vec{c}_r dV = 0,$$

pa je rezultantna sila što djeluje na kontrolni volumen jednaka:

$$\vec{F}_{rez} = \sum \vec{F}_i = \oiint_{KP} \vec{\sigma} dA + \iiint_{KV} \rho \vec{R}_r dV = \oiint_{KP} \rho \vec{c}_r \left(\vec{c}_r d\vec{A}\right) [N]$$

U promatranom slučaju imamo $\left(\vec{c}_r = \vec{c}\right)$:

$$\vec{F}_{rez} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{F}_s = \oiint_{KP} \rho \vec{c}_r \left(\vec{c}_r d\vec{A}\right) = \iint_{A_1} \rho c_1 \left(c_1 dA_1\right) + \iint_{A_2} \rho c_2 \left(c_2 dA_2\right) +$$
$$+ \iint_{A_3} \rho c_3 \left(c_3 dA_3\right) + \iint_{A_4} \rho c_4 \left(c_4 dA_4\right)$$

Pritom su sile $\vec{P}_1,\ \vec{P}_2\ \ i\ \ \vec{P}_3$ sile tlaka na dijelove kontrolne površine preko kojih fluid struji u ili iz kontrolnog volumena, a $\vec{F}_s$ je sila kojom granična ploha (zidovi stijenke), kroz koju ne struji fluid, djeluje na fluid. Silom istog intenziteta, no suprotnog smjera, djeluje fluid na graničnu plohu preko koje ne struji. Kako je, slika,

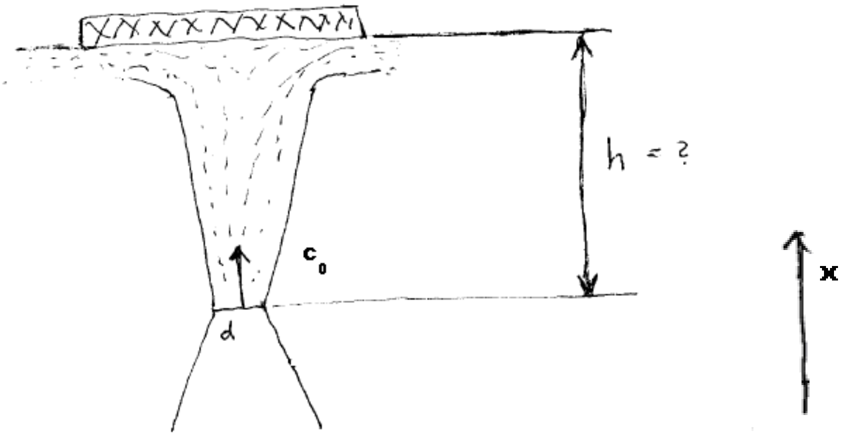
$$\left(\vec{c}dA\right)_4 = 0;\ \left(\vec{c}dA\right)_1 = -dQ_1;\ \left(\vec{c}dA\right)_2 = dQ_2;\ \left(\vec{c}dA\right)_3 = dQ_3\ \ i\ \ \vec{F}_s = -\vec{F}_{fl},$$

dobivamo traženu silu kojom fluid djeluje na cijev:

$$\vec{F}_{rez} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 - \vec{F}_{fl} \Rightarrow \vec{F}_{fl} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 - \vec{F}_{rez} =$$
$$= \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 - \oiint_{KP} \rho \vec{c}_r \left(\vec{c}_r d\vec{A}\right) = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \rho \vec{c}_1 Q_1 - \rho \vec{c}_2 Q_2 - \rho \vec{c}_3 Q_3$$
$$\left(\oiint_{KP} \rho \vec{c}_r \left(\vec{c}_r d\vec{A}\right) = -\rho \vec{c}_1 Q_1 + \rho \vec{c}_2 Q_2 + \rho \vec{c}_3 Q_3\right)$$
$$F_{flx} = p_1 A_1 + \rho c_{1x} Q_1 [N]$$
$$F_{fly} = -p_2 A_2 + p_3 A_3 - \rho c_{2y} Q_2 + \rho c_{3y} Q_3 [N] \Rightarrow$$
$$F_{fl} = \sqrt{F_{flx}^2 + F_{fly}^2}\ [N]$$

4. zad.

Mlaz vode napušta sapnicu promjera d mm brzinom od c_0 m/s podržavajući ploču mase M kg prema slici. Kolika je vertikalna udaljenost h? Strujanje je vode stacionarno i jednodimenzionalno. Gubitke energije zanemarite.



Rj.
Odredimo brzinu fluida potrebnu za podržavanje ploče.

$$\vec{F}_{rez} = \sum \vec{F}_i = \oint\!\!\oint_{KP} \vec{\sigma} dA + \iiint_{KV} \rho \vec{R}_r dV = \frac{d}{dt}\iiint_{KV} \rho \vec{c}_r dV + \oint\!\!\oint_{KP} \rho \vec{c}_r \left(\vec{c}_r d\vec{A}\right)[N]$$

$$\sum F_{xi} = -G = \oint\!\!\oint_{KP} c_{xr} \rho \vec{c}_r d\vec{A} = \dot{m}\left(c_2 - c_1\right) = -\rho Q c_1 \quad \left(c_2 = 0\right)$$

$$c_{xr} = c; \quad \dot{m} = \rho c_1 A_1 = \rho Q$$

$$Q = c_0 A_1 \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

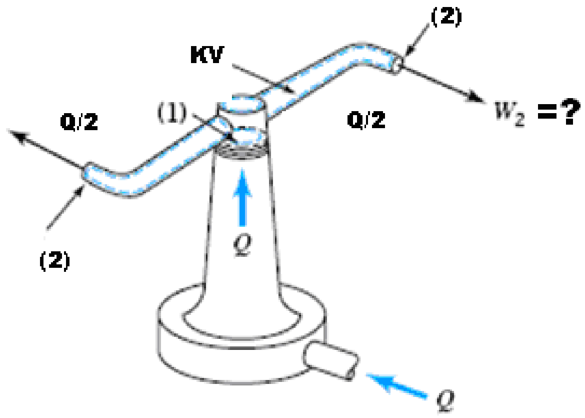
$$G = Mkg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}[N] = \rho Q c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{G}{\rho Q}\left[\frac{m}{s}\right]$$

Traženu udaljenost naći ćemo iz jednadžbe energije

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{c_0^2}{2g} + z_1 = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{c_1^2}{2g} + z_2 \Rightarrow z_2 - z_1 = h = \frac{c_0^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g}[m]$$

$$\left(p_1 = p_2 = p_{ok}\right)$$

5. zad.
Voda ulazi u polijevalo trave konstantnim protokom od 0,001 m^3/s, slika. Ploštine su izlaznih površina sapnica 30 mm^2. Kolika je relativna izlazna brzina mlaza vode (relativna prema sapnici) ako je rotor polijevala a) nepomičan, b) rotira s konstantnom kutnom brzinom od 600 okretaja u minuti, c) ubrzava se od nula do 600 okretaja u minuti? Strujanje vode kroz polijevalo trave smatrajte jednodimenzionalnim i stacionarnim, a trenje zanemarite.



Rj.

Pomoću jednadžbe kontinuiteta (stacionarno strujanje, ili, kontrolni je volumen ispunjen nestlačivim fluidom)

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{KV}\rho dV\left(=0;\quad \rho=konst.\right)+\oiint\limits_{KP}\rho\vec{c}_r d\vec{A}=\dot{m}_i-\dot{m}_u=0\Rightarrow \dot{m}_i=\dot{m}_u$$

Sasvim općenito $\vec{c}_r$ nas upozorava da moramo odlučiti hoćemo li zbivanja u KV promatrati iz inercijskog koordinatnog sustava ili iz KV (koji može biti ili inercijski ili neinercijski.)

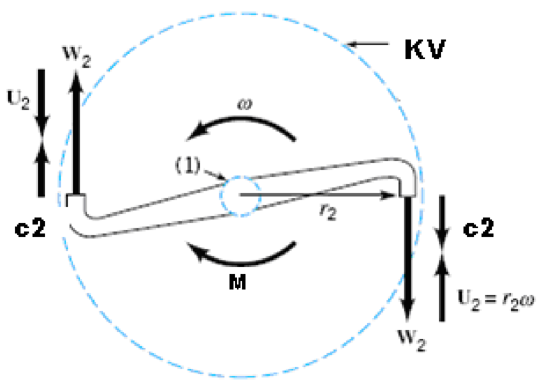
Dobivamo da je brzina kojom voda izlazi iz sapnice polijevala trave jednaka (u odnosu na sapnicu)

$$\dot{m}_u=\dot{m}_i=2\rho A_2 c_{2r};\quad \dot{m}_u=\rho Q\Rightarrow c_{2r}=w_2=\frac{Q}{2A_2}=\frac{0,001\frac{m^3}{s}}{2\cdot 30mm^2\cdot\frac{10^{-6}m^2}{mm^2}}=\frac{0,001\frac{m^3}{s}\cdot 10^6}{2\cdot 30m^2}=16,7\frac{m}{s}$$

Ta brzina ne ovisi o tome rotira li rotor polijevala ili ne. Drugim riječima, u slučajevima a), b) i c) ostaje ista i jednaka 16,7 m/s.
Međutim, apsolutna će brzina s kojom mlaz vode napušta rotor polijevala ovisiti o brzini s kojom rotor rotira, slika:

$$c_{2a}\equiv c_2\equiv c_{2t}=w_2-u_2=w_2-r_2\omega\quad\left(c_{2a}<w_2\right)$$

(U proračunima snage moramo uvijek računati s tangencijalnom komponentom brzine fluida.)



$$\vec{c}_2=\vec{w}_2+\vec{u}_2$$

gdje je r_2 polumjer rotora polijevala, a ω njegova kutna brzina.
Valja uočiti, maseni protok kroz polijevalo ne ovisi o tome rotira li ili ne rotor polijevala.

6. zad.

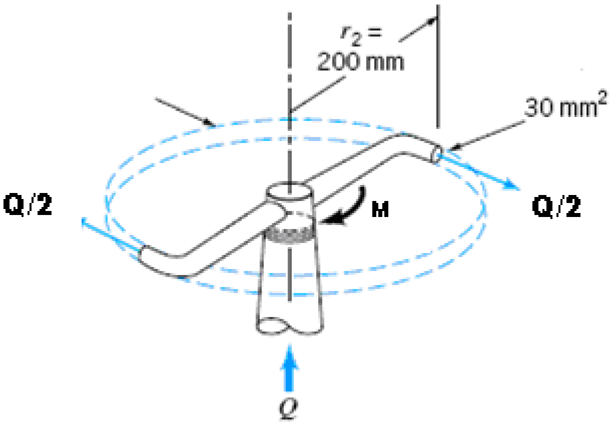
Voda ulazi u polijevalo trave konstantnim protokom od 0,001 m^3/s, slika. Ploštine su izlaznih površina sapnica 30 mm^2, a mlaz vode napušta sapnice u tangencijalnom smjeru. Promjer je rotora polijevala 200 mm. Odredite

a) moment na rotor zbog kojeg će rotor mirovati;

b) moment otpora rotira li rotor polijevala konstantnom kutnom brzinom od 500 okretaja u minuti i

c) brzinu rotora ne postoji li moment otpora.

Strujanje vode kroz polijevalo trave smatrajte jednodimenzionalnim i stacionarnim, a silu teže i trenje zanemarite.



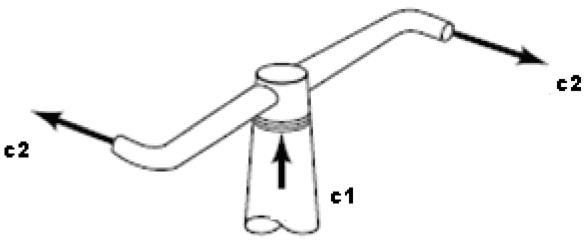
Rj.

Zbivanja ćemo promatrati iz inercijskog koordinatnog sustava.

a)

Moment koji razmatramo je moment ***M*** koji se protivi okretanju rotora polijevala.

Kad se rotor polijevala ne okreće, zahtjev a), vrijede odnosi, slika,



Brzina je kojom fluid napušta mirujući kontrolni volumen jednaka 16,7 m/s (prethodni zadatak).

$$c_{R-R} = c_2 = c_{2a} = c_{2\text{tangencijalna}} \equiv c_{2t} \Rightarrow$$

$$M = \oiint_{KP} r_2 c_{R-R}\left(\rho\vec{c}d\vec{A}\right) + \frac{d}{dt}\iiint_{KV} r_2 c_{R-R}\rho dV = \oiint_{KP} r_2 c_{R-R}\left(\rho\vec{c}d\vec{A}\right) =$$

$$= -r_2 c_{2t}\cdot\dot{m} = -200mm\cdot\frac{m}{1000mm}\cdot 16,7\frac{m}{s}\cdot 1l\cdot\frac{10^{-3}m^3}{1l}\cdot 1000\frac{kg}{m_3} = -3,34Nm$$

Moment koji sprečava okretanje rotora polijevala smjera je smjera kretanja kazaljke na satu.

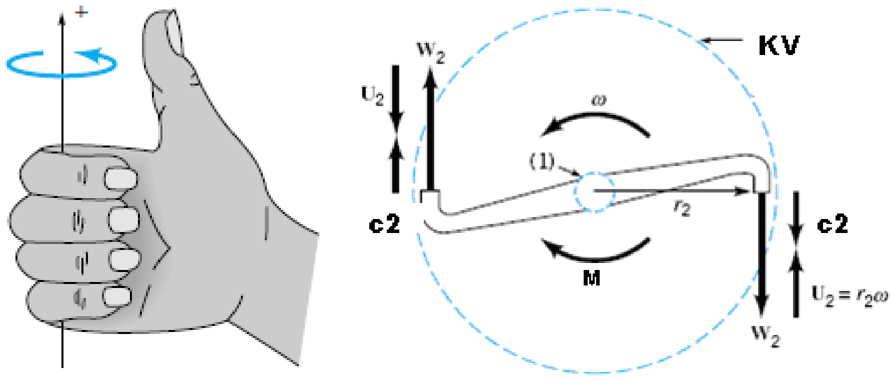
Zašto je $\oiint_{KP} r_2 c_{R-R}\left(\rho\vec{c}d\vec{A}\right) = -r_2 c_{2t}\cdot\dot{m}$ **?**

Radi li se o stacionarnom strujanju, rezultantni je moment što djeluje na promatrani kontrolni volumen na slici jednak

$\vec{M} = \oiint_{KP} (\vec{r} \times \vec{c})(\rho \vec{c} d\vec{A})$ (zbivanja promatramo iz inercijskog koordinatnog sustava)

Vektorski i skalarni produkt u izrazu $\oiint_{KP} (\vec{r} \times \vec{c}) \rho \vec{c} d\vec{A}$ mogu biti i pozitivne i negativne vrijednosti.

Za ulazni tijek fluida u kontrolni volumen, $\vec{c} d\vec{A}$ je negativan; za izlazni tijek iz kontrolnog volumena $\vec{c} d\vec{A}$ je pozitivan.
Algebarski pak predznak koji dodjeljujemo aksijalnoj (osnoj), dakle skalarnoj komponenti vektora $\vec{r} \times \vec{c}$ određujemo koristeći se pravilom desne ruke, slika.



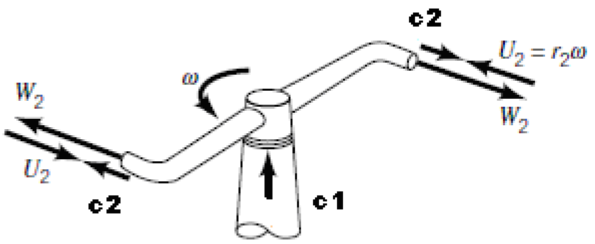
Zbog toga za promatrano polijevalo trave vrijedi

$$M = \left[\oiint_{KP} (\vec{r} \times \vec{c}) \rho \vec{c} d\vec{A} \right]_{O-O} = (-r_2 c_{2t})(+\dot{m})$$

Naime, smjer je vektorskog produkta $\vec{r} \times \vec{c}$, tj. momenta $\vec{M}$, suprotan smjeru osi z.

Predznak koji dodjeljujemo aksijalnoj komponenti vektorskog produkta $\vec{r} \times \vec{c}$ možemo zapamtiti i ovako: ukoliko su vektori $\vec{c}_{2t}$ i $\vec{u}$ istog smjera predznak je +; u protivnom (tj. ukoliko su vektori $\vec{c}_{2t}$ i $\vec{u}$ suprotnog smjera) predznak je –.
(r_2 je udaljenost izlaza iz sapnice od osi vrtnje prema slici, a c_{2t} je tangencijalna komponenta brzine kako se vidi iz inercijskog koordinatnog sustava; drugim riječima to je apsolutna brzina.

b)
Kad rotor polijevala rotira konstantnom kutnom brzinom od 500 okretaja u minuti, slika je brzina ova



Apsolutna je brzina kojom fluid napušta kontrolni volumen jednaka $c_2 = w_2 - u_2 = w_2 - r_2\omega$, gdje je w_2 = 16,7 m/s (prethodni zadatak), a $u_2 = r_2\omega$.
Dobivamo

$$c_2 = c_{2t} = (w_2 - u_2) = (w_2 - r_2\omega) = 16,7\frac{m}{s} - r_2\omega =$$

$$= 16,7\frac{m}{s} - 200mm\cdot\frac{10^{-3}m}{1mm}\cdot 500\frac{okretaja}{\min uta}\cdot\frac{2\pi rad}{okretaj}\cdot\frac{1\min uta}{60s} = 6,23\frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$M = -r_2 c_{2t}\dot{m} = -200mm\cdot\frac{m}{1000mm}\cdot 6,23\frac{m}{s}\cdot 1l\cdot\frac{10^{-3}m^3}{1l}\cdot 1000\frac{kg}{m_3} = -1,25Nm$$

Uočimo, moment koji se protivi okretanju rotora polijevala (mnogo) je manji od momenta koji sprečava okretanje rotora polijevala.

c)
Ne postoji li moment otpora koji bi djelovao na rotor polijevala, $M = 0$, vrijedi

$$M = -r_2 c_{2t}\dot{m} = -r_2(w_2 - u_2)\dot{m} = -r_2(w_2 - r_2\omega)\dot{m} = 0 \Rightarrow w_2 - r_2\omega = 0$$

$$\omega = \frac{w_2}{r_2} = \frac{16,7\frac{m}{s}}{200mm\cdot\frac{1m}{1000mm}} = 83,5\frac{rad}{s} =$$

$$= 83,5\frac{rad}{s}\cdot\frac{1okret}{2\pi rad}\cdot\frac{60s}{1\min uta} = 797,37\frac{okretaja}{\min uta}$$

w_2 relativna je brzina s kojom fluid napušta rotor polijevala trave; ta brzina ne ovisi o okretanju rotora.

U promatranom slučaju ($M=0$) moment je količine gibanja vode i na ulazu u i na izlazu iz kontrolnog volumena jednak nuli.
Zaključno, naglasimo uočeno:

- prvo, moment je otpora, povezan s rotacijom, manji od momenta potrebnog da bi se rotor zadržao u stanju mirovanja,
- i drugo, i kad je moment otpora jednak nuli, maksimalna je brzina rotora konačna.

7. zad.
Na električnom štednjaku 1 kg vode počinje upravo ključati u otvorenoj posudi (izloženoj tlaku okolice). Ukoliko je snaga štednjaka 500 W, u kojem će vremenu sva voda ispariti?
Pretpostavite stupanj djelovanja štednjaka jednakim jedan. Tlak je okolice 1 bar, a latentna toplina isparivanja vode 2.257,9313 (≈2.258) kJ/kg. Zanemarite prijelaz toplinske energije u okolicu.

Rj.

$$dq = dh - vdp = dh \Rightarrow dH = \left(h'' - h'\right)dm \Rightarrow$$

$$\frac{dH}{dt} = \left(h'' - h'\right)\frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{\dot{H}\left(\equiv\dot{Q}\right)}{h'' - h'} = \frac{500W}{2258\frac{kJ}{kg}} = 0,22\frac{g}{s}$$

0,22 grama vode isparuje u 1 sekundi =>

$$0,22g : 1s = 1000g : x[s] \Rightarrow x = \frac{1000g}{0,22g}[s] = 4.545,45s = 1,26h;\ \left(0,22g : 1000g = 1s : x[s]\right)$$

Zad. 8.

Idealni plin (zrak: κ = 1,41, R = 287 J/kgK) na tlaku 1 bar i temperaturi 20 ^{0}C komprimiran je izentropno do (apsolutnog) tlaka jednakog 48 bara. Na koju će se temperaturu zagrijati plin?

$$pv^{\kappa} = konst. \Rightarrow \frac{p}{\rho^{k}} = konst. \Rightarrow \frac{p_p}{\rho_p^{\kappa}} = \frac{p_k}{\rho_k^{\kappa}} \Rightarrow$$

$$\rho_k = \left(\frac{p_k}{p_p}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \rho_p; \quad \rho_p = \frac{p_p}{RT_p} = \frac{100k\,\frac{N}{m^2}}{0,287\,\frac{kNm}{kgK}\,293,15K} = 1,19\,\frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_k = \left(\frac{p_k}{p_p}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \rho_p = \left[\frac{48bar}{1bar}\right]^{\frac{1}{1,41}} \cdot 1,19\,\frac{kg}{m^3} = 18,53\,\frac{kg}{m^3} \Rightarrow$$

$$T_k = \frac{p_k}{\rho_k R} = \frac{4.800k\,\frac{N}{m^2}}{18,53\,\frac{kg}{m^3} \cdot 0,287\,\frac{kNm}{kgK}} = 902,58K \Rightarrow 629,43^0 C$$