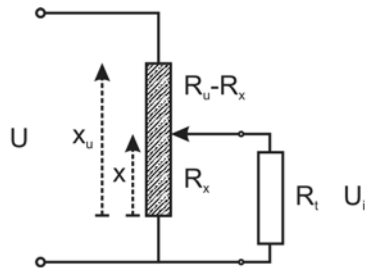
SVEUČILIŠTE U RIJECI - TEHNIČKI FAKULTET
SU STUDIJ ELEKTROTEHNIKE
ak.g. 2006/07.

Elementi automatizacije postrojenja

2. auditorne vježbe - mjerna osjetila

1. Odrediti statičku karakteristiku potenciometra ovisno o linearnom pomaku x ili kutu zakreta φ_x ako je potenciometar linearan ($R_x = xR_u/x_u$ odnosno $R_x = \varphi_x R_u/\varphi_u$).

Prema shemi potenciometarskog spoja, R_u je ukupni otpor potenciometra, a R_t otpor tereta na izlazu spoja. U ovom će se primjeru slučaj riješiti za potenciometar s kliznikom linearnog pomaka $\frac{x}{x_u} = \frac{R_x}{R_u}$, a za zakretni potenciometar $\frac{\varphi_x}{\varphi_u} = \frac{R_x}{R_u}$ rješenje je analogno prikazanom.



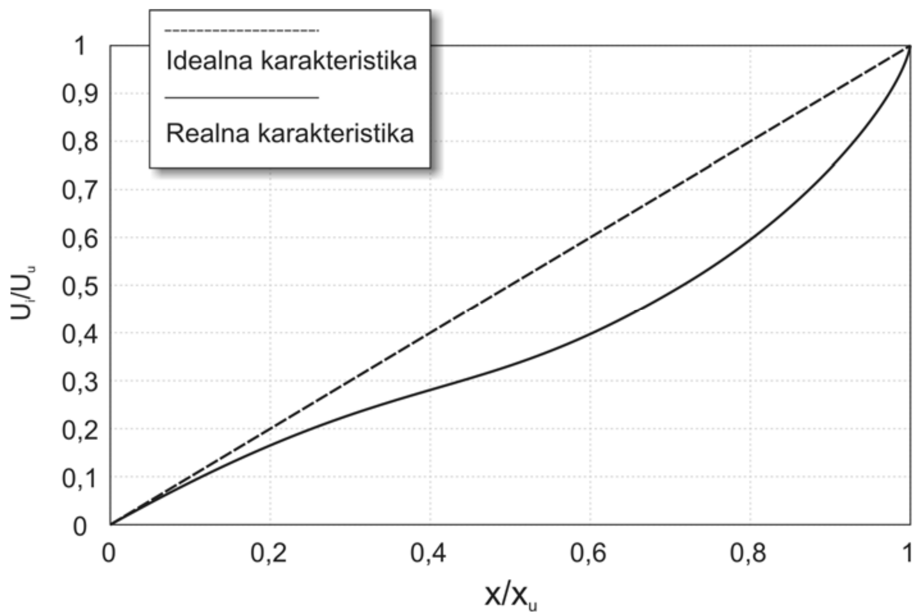
Kako se radi o naponskom djelilu, vrijedi:

$$U_i = \frac{R_x \| R_t}{R_u - R_x + R_x \| R_t} U_u = \frac{\frac{R_x R_t}{R_x + R_t}}{R_u - R_x + \frac{R_x R_t}{R_x + R_t}} U_u = \frac{R_x R_t}{R_u R_x - R_x^2 + R_u R_t} U_u$$

Kako za potenciometar linearnog odnosa vrijedi $\frac{x}{x_u} = \frac{R_x}{R_u}$, uvrštanjem i sređivanjem dobivamo:

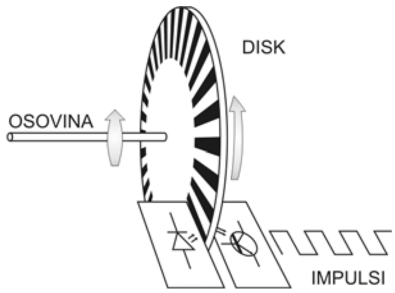
$$U_i = \frac{U_u}{1 + \frac{R_u}{R_t} \frac{x}{x_u} (1 - \frac{x}{x_u})} \cdot \frac{x}{x_u}$$

Promotrimo li ovaj izraz, vidimo da vrijedi za $U_i(x=0) = 0$ i $U_i(x = x_u) = U_u$. Također, ukoliko je $R_t \gg R_u$, slijedi $U_i \approx U_u \frac{x}{x_u}$. Grafički to izgleda kako je prikazano na slici.



2. Potrebno je odabrati tip inkrementalnog enkodera tako da možemo sa što većom rezolucijom mjeriti oscilacije u brzini vrtnje istosmjernog motora oko njegove nazivne brzine n=600okr/min. Na raspolaganju su nam enkoderi P i T tipa sa 1000 impulsa po okretaju. Enkoder P tipa ima vrijeme detekcije 0.5 sekundi, a enkoder T tipa ima frekvenciju impulsa s_2 f_c=1MHz.

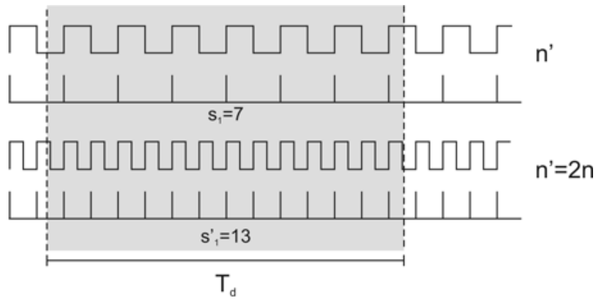
Inkrementalni enkoderi su digitalni mjerni detektori (rotacijske) brzine koji rade na principu mjerenja frekvencije odnosno broja impulsa dobivenih na fototranzistoru. Impulsi se generiraju tako da se vrtnjom diska detektora na čijem obodu se nalazi točno određeni broj prozirnih i neprozirnih područja – zareza, naizmjenično propušta i prekida svjetlosni tok od LE diode prema fototranzistoru. Taj broj označavamo sa P, a nazivamo broj impulsa po okretaju.



Princip rada enkodera **P** (*pulse*) tipa je mjerenje broja impulsa s_1 u zadanom vremenu detekcije T_d dok **T** (*time*) tip mjeri vrijeme koje je proteklo između dva impulsa s_1 uz pomoć broja impulsa s_2 koji su primljeni u tom intervalu. Razlika između ova dva principa dovodi i do razlike u kvaliteti njihova mjerenja pri različitim brzinama.

- **P-tip**

Na slici desno prikazan je princip mjerenja brzine uz pomoć P tipa. Brzinu dobijamo uz pomoć izraza:



$$n = \frac{60\left[\frac{\cancel{\text{sek}}}{\text{min}}\right]}{P\left[\frac{\cancel{\text{imp}}}{\text{okr}}\right]} \cdot f\left[\frac{\cancel{\text{imp}}}{\cancel{\text{sek}}}\right]$$

u kojem za P tip $f = \frac{s_1}{T_d}$ predstavlja frekvenciju izlaznih impulsa s_1, pa slijedi izraz za brzinu:

$$n = \frac{60}{P} \cdot \frac{s_1}{T_d} \left[\frac{\text{okr}}{\text{min}}\right]$$

Rezolucija je apsolutna promjena u rezultatu mjerenja za jedan korak diskretizacije. U ovom slučaju to je promjena očitanja brzine za promjenu očitanja od jednog impulsa, a iznosi:

$$Q_n = \frac{n}{s_1} = \frac{60}{PT_d} = \frac{60}{1000 \cdot 0.5} = 0.12 \text{ okr/min}$$

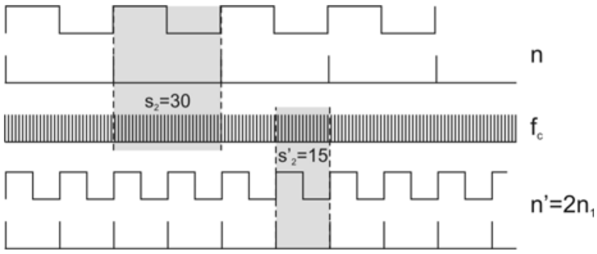
iz čega možemo zaključiti da rezolucija za P tip ne ovisi o trenutnoj brzini te za zadanu konstrukciju i vrijeme uzorkovanja ona je fiksna. Rezoluciju se može povećati povećanjem broja zareza na disku i povećanjem vremena detekcije, ali negativna strana smanjenja vremena T_d je smanjenje frekvencije uzorkovanja.

Statička pogreška je relativna postotna pogreška u odnosu na mjerenu vrijednost za jedan korak diskretizacije, a iznosi

$$\varepsilon_s = \frac{Q_n}{n} \cdot 100 = \frac{100}{s_1} = \frac{60}{PT_d n} \cdot 100 = \frac{60}{1000 \cdot 0.5 \cdot 600} \cdot 100 = 0.02\,\%$$

iz čega je vidljivo da P tip enkodera ima proporcionalno manju statičku pogrešku što je brzina veća.

- **T-tip**



Na slici desno prikazan je princip mjerenja brzine uz pomoć P tipa. Brzinu dobijamo uz pomoć izraza:

$$n = \frac{60}{P} \cdot f = \frac{60}{P} \cdot \frac{f_c}{s_2} \left[\frac{\text{okr}}{\text{min}} \right]$$

u kojem za razliku od P tipa frekvenciju izlaznih impulsa f određuje frekvencija pomoćnih impulsa f_c i njihov broj s_2 za vrijeme trajanja jednog impulsa s_1.

Rezolucija za T tip se računa po izrazu:

$$Q_n = \frac{n}{s_2 - 1} = \frac{n}{\frac{60 f_c}{Pn} - 1} = \frac{600}{\frac{60 \cdot 10^6}{1000 \cdot 600} - 1} = 6.06 \,\text{okr/min}$$

U brojniku se nalazi izraz s_2-1 iz razloga što principijelno impulsima s_2 mjerimo intervale odnosno vrijeme koje protiče između samih impulsa, a tih intervala je točno s_2-1. Iz konačnog izraza možemo zaključiti da za T tip rezolucija se povećava smanjenjem brzine.

Statička pogreška za tip T iznosi:

$$\varepsilon_s = \frac{Q_n}{n} \cdot 100 = \frac{100}{s_2 - 1} = \frac{100}{\frac{60 f_c}{Pn} - 1} = \frac{100}{\frac{60 \cdot 10^6}{1000 \cdot 600} - 1} = 1.01\%$$

i za razliku od P tipa ona je proporcionalno manja što je brzina manja.

Iz dobijenih izraza vidimo da što se tiče rezolucije za danu nominalnu brzinu bi nam puno više odgovarao P tip enkodera, ali još jedan bitan čimbenik koji nije spomenut u zahtjevima je i frekvencija uzorkovanja. Dok je kod P tipa ona izravno vezana uz vrijeme detekcije (za T_d=$0.5s$ frekvencija uzimanja uzoraka brzine je $2Hz$) za T tip ona ovisi o brzini n, pa u našem slučaju iznosi $\frac{f_c}{s_2} = \frac{nP}{60} = \frac{600 \cdot 1000}{60} = 10\,\text{kHz}$ što nam omogućava praćenje puno većih frekvencija u oscilacijama iznosa brzine nego što u ovom slučaju to može P tip.

U suvremenim enkoderima koristi se kombinirani P/T postupak koji objedinjava dobre strane jednog i drugog tipa enkodera.

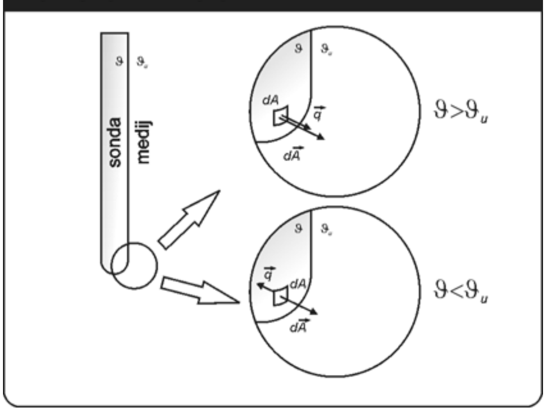
3. Za otporni termometar koji mjeri temperaturu fluidnog medija ϑ_u, a izveden je <u>bez</u> oklopa, izvesti prijenosnu funkciju i prijelaznu karakteristiku primjenom jednadžbe energetske ravnoteže. Prokomentirati o čemu ovisi vremenska konstanta osjetila!

Fourierov empirijski zakon toplinskog vođenja glasi $\vec{q} = -\lambda \cdot grad\,\vartheta$ (toplina prelazi u smjeru suprotnom od gradijenta temperature odn. proporcionalno apsolutnom iznosu razlike temperature). λ je pri tome koeficijent toplinske vodljivosti.

Podsjetimo se da je gradijent polja vektor čiji smjer je smjer porasta vrijednosti polja, a vrijednost je derivacija odnosno brzina prirasta vrijednosti polja u tom smjeru.

Toplinski tok (količinu topline predanu iz jednog medija drugom u jedinici vremena) geometrijski možemo, s obzirom na gore napisano odrediti kao skalarni produkt vektora: $\Phi = \vec{q}d\vec{A}$ gdje je $d\vec{A}$ diferencijal površine krutog tijela.

Zakon održanja energije se u ovom slučaju može odrediti kao jednakost između promjene količine topline u promatranom tijelu i toplinskog toka kroz njegovu površinu (jer promatrano tijelo ne proizvodi toplinu, pa mu se ona može promijeniti samo vanjskim utjecajem).



Pojašnjenje značenja predznaka kod osnovne formule:

Dakle slijedi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho c \vartheta(t) dV = -\int_A \vec{q} d\vec{A}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho c \vartheta(t) dV = \int_A \lambda \cdot grad\,\vartheta \cdot d\vec{A}$$

U slučaju prijelaza topline iz fluida na kruto tijelo ili obratno, opći izraz se pojednostavljuje jer je vektor gradijenta temperature uvijek linearno ovisan (paralelan) s *vektorom normale* površine krutog tijela (mjernog osjetila). Fizikalno govoreći - kako fluid prianja uz površinu krutine, prijelaz topline je uvijek *okomit* na površinu krutine odnosno maksimalan).

Stoga slijedi:

$$\vec{q}_N = -\lambda_N grad\,\vartheta = -\vec{\alpha} \cdot \Delta\vartheta$$

gdje $\vec{\alpha}$ predstavlja pozitivan vektor koji gleda u smjeru povećanja temperature (smjer vektora gradijenta) - okomito na dodirnu površinu sonde i medija, tako da možemo pojednostavniti i skalarno pisati:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho c \vartheta(t) dV = \int_A \alpha(\vartheta_u - \vartheta) \cdot dA$$

gdje je ϑ temperatura tijela koje promatramo, a ϑ_u je temperatura medija u kojem se to tijelo nalazi. Primjetimo da je u zadnjem izrazu za naš slučaj poredak temperatura (sonde i medija) pri računanju razlike $\vartheta_u - \vartheta$ preuzeo ulogu skalarnog produkta vektora odnosno ulogu određivanja predznaka.

Pretpostavimo li da je sonda homogena (specifični toplinski kapacitet c i specifična masa ρ su iste u cijelom volumenu sonde) - što možemo, jer su nehomogenosti dovoljno male, da je termički uravnotežena (temperatura sonde je ista u svakoj čestici tijela) - što možemo ako je prošlo dovoljno vremena prije nego je sonda uronjena u medij, pa slijedi:

$$\rho c V \frac{d\vartheta}{dt} = \alpha A(\vartheta_u - \vartheta) = -\alpha A(\vartheta - \vartheta_u)$$

Gdje je ϑ_u temperatura medija, a ϑ temperatura sonde. Kako je početna temperatura sonde različita od 0, ovaj početni uvjet ne smijemo zanemariti pri Laplace-ovoj transformaciji: $\vartheta(t=0) = \vartheta_0$, iako bi kvalitativno dobili točan rezultat i uz njegovo zanemarenje.

Primijenimo li sada na gornju diferencijalnu jednadžbu Laplace-ovu transformaciju, slijedi:

$$c\rho V\left[s\vartheta(s) - \vartheta_0\right] = -\alpha A\left[\vartheta(s) - \vartheta_u(s)\right]$$

$$\vartheta(s)(\alpha A+\rho c V s)=\rho c V \vartheta_0+\alpha A \vartheta_u(s)\Big|_{:\alpha A}$$

$$\vartheta(s)=\frac{1}{1+Ts}\vartheta_u(s)+\frac{T\vartheta_0}{1+Ts}$$

$$\text{gdje je } T=\frac{\rho c V}{\alpha A}=\frac{\text{ukupni toplinski kapacitet sonde}}{\text{ukupni koeficijent prijenosa topline}}\left[\frac{\frac{J}{K}}{\frac{J}{s\cdot K}}=s\right]$$

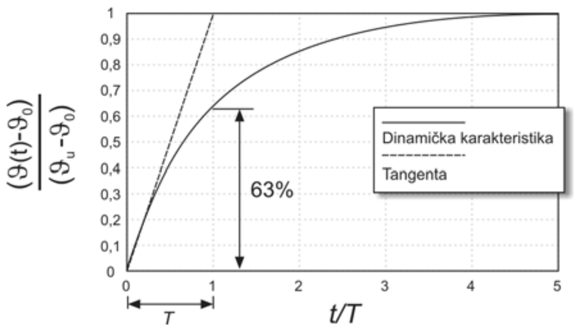
Pri tome *ukupni toplinski kapacitet* predstavlja količinu toplinske energije potrebnu da bi se temperatura tijela povisila za 1 K, a *ukupni koeficijent prijenosa topline* predstavlja brzinu kojom tijelo može razmijeniti određenu količinu topline s okolinom. Njihov koeficijent je vremenska konstanta kao što će se dalje pokazati.

Već iz oblika gornje jednadžbe vidimo da se radi o aperiodskom članu prvog reda (PT_1). Uz izostavljanje dijela ovisnog o početnoj temperaturi sonde, možemo napisati prijenosnu funkciju:

$$\boxed{G(s)=\frac{\vartheta(s)}{\vartheta_u(s)}\Big|_{\vartheta_0=0}=\frac{1}{1+Ts}}$$

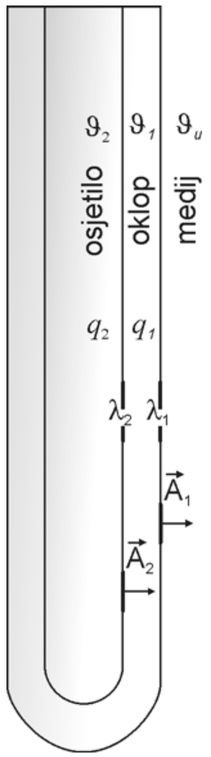
Uvrštavanjem skokovite promjene temperature medija (uranjanje u medij) $\vartheta_u(t)=\vartheta_u S(t)$ ili $\vartheta_u(s)=\vartheta_u/s$ u početni izraz dobijamo prijelaznu karakteristiku:

$$\boxed{\begin{aligned}\vartheta(s)&=\frac{\vartheta_u+sT\vartheta_0}{s(1+Ts)}\Rightarrow\\ \vartheta(t)&=(\vartheta_u-\vartheta_0)(1-e^{-\frac{t}{T}})+\vartheta_0\end{aligned}}$$



Promotrimo li izraz za određivanje vremenske konstante, možemo uočiti da povećanje mase i/ili specifičnog toplinskog kapaciteta osjetila rezultira većom tromošću (većom vremenskom konstantom), dok povećanje koeficijenta prijenosa topline ubrzava reakciju osjetila. U praksi se velika brzina odziva u pravilu postiže smanjenjem mase (ali uglavnom smanjenjem volumena i povećanjem površine, rjeđe korištenjem lakših materijala).

4. Dok se otporna osjetila temperature bez oklopa, kakvo je razmatrano u prethodnom zadatku, mogu koristiti gotovo isključivo u laboratorijskim uvjetima, u industrijskoj praksi nužno je radi mehaničke zaštite sondu obložiti metalnim, keramičkim ili porculanskim oklopom (ovisno o radnim uvjetima). Potrebno je izvesti prijenosnu funkciju i prijelaznu karakteristiku jedne ovakve sonde.



S obzirom da se sada radi o dva kruta tijela različitih svojstava pri čemu toplina s fluidnog medija prelazi (u slučaju da je sonda uronjena u medij topliji od nje) na oklop, a zatim s oklopa na osjetilo, potrebno je postaviti dvije diferencijalne jednadžbe prijelaza topline. U praksi se ovakva osjetila ili već proizvode s oklopom, pri čemu je tehnologija izrade takva da se postiže takvo prianjanje površina unutar oklopa kao da se radi o kontaku krutine i fluida, ili se pak pri umetanju osjetila u oklop termički prijelaz pospješuje pomoću specijalnih masti (čije prisustvo, opet, predstavlja treći sloj čija je, međutim, dinamika neusporedivo brža od preostale dvije pa se slobodno može zanemariti). Vrijedi, dakle:

$$q_2 \frac{d\vartheta_2(t)}{dt} = -\lambda_2\left[\vartheta_2(t) - \vartheta_1(t)\right]$$

promjena količine topline u osjetilu uslijed prijelaza topline s oklopa

$$q_1 \frac{d\vartheta_1(t)}{dt} = -\lambda_1\left[\vartheta_1(t) - \vartheta_u(t)\right] - \lambda_2\left[\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t)\right]$$

promjena količine topline u oklopu uslijed prijelaza topline iz medija, <u>ali i na osjetilo</u>

Pri čemu su $\lambda_1=\alpha_1 A_1$ i $\lambda_2=\alpha_2 A_2$ koeficijenti prijelaza topline između medija i oklopa, odnosno oklopa i sonde, respektivno, a $q_1=\rho_1 c_1 V_1$ i $q_2=\rho_2 c_2 V_2$ toplinski kapaciteti oklopa, odnosno osjetila, respektivno.

Kao i u prošlom slučaju, temperatura sonde i njen oklopa neposredno prije uranjanja u medij nije jednaka nuli pa ovo treba uzeti kao početne uvjete. Ako je prije uranjanja u medij osjetilo dovoljno dugo mirovalo, možemo pretpostaviti da su se temperature i oklopa, i sonde izjednačile pa vrijedi $\vartheta_1(t=0)=\vartheta_2(t=0)=\vartheta_0$. Stoga Laplace-ova transformacija daje:

$$q_2\left[s\vartheta_2(s) - \vartheta_0\right] = -\lambda_2\left[\vartheta_2(s) - \vartheta_1(s)\right] \quad \Rightarrow \quad \vartheta_1(s) = \left(1 + \frac{q_2}{\lambda_2}s\right)\vartheta_2(s) - \frac{q_2}{\lambda_2}\vartheta_0 \qquad (1)$$

$$q_1\left[s\vartheta_2(s) - \vartheta_0\right] = -\lambda_1\left[\vartheta_1(s) - \vartheta_u(s)\right] - \lambda_2\left[\vartheta_1(s) - \vartheta_2(s)\right] \qquad (2)$$

Uvrštavanjem *(1)* u *(2)* i sređivanjem dobijamo:

$$q_1 s\left(1 + \frac{q_2}{\lambda_2}s\right)\vartheta_2(s) - \left(\frac{q_1 q_2}{\lambda_2}s + q_1\right)\vartheta_0 = -\lambda_1\left(1 + \frac{q_2}{\lambda_2}s\right)\vartheta_2(s) + \frac{\lambda_1 q_2}{\lambda_2}\vartheta_0 + \lambda_1\vartheta_u(s) - \lambda_2\left(1 + \frac{q_2}{\lambda_2}s\right)\vartheta_2(s) + q_2\vartheta_0 + \lambda_2\vartheta_2(s)$$

$$\vartheta_2(s)\left(q_1 s + \frac{q_1 q_2}{\lambda_2}s^2 + \lambda_1 + \frac{\lambda_1 q_2}{\lambda_2}s + q_2 s\right) = \lambda_1\vartheta_u(s) + \left(q_1\lambda_2 + q_2\lambda_2 + q_2\lambda_1 + q_1 q_2 s\right)\frac{\vartheta_0}{\lambda_2}\Bigg| \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}$$

$$\vartheta_2(s)\left(1 + \underbrace{\frac{q_1\lambda_2 + q_2\lambda_1 + q_2\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}}_{T_1}s + \underbrace{\frac{q_1 q_2}{\lambda_1\lambda_2}}_{T_2^2}s^2\right) = \vartheta_u(s) + \left(\underbrace{\frac{q_1\lambda_2 + q_2\lambda_1 + q_2\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}}_{T_1} + \underbrace{\frac{q_1 q_2}{\lambda_1\lambda_2}}_{T_2^2}s\right)\vartheta_0 \qquad (3)$$

$$\vartheta_2(s) = \frac{1}{1 + sT_1 + s^2T_2^2}\vartheta_u(s) + \frac{T_1 + sT_2^2}{1 + sT_1 + s^2T_2^2}\vartheta_0$$

$$G(s) = \frac{\vartheta_2(s)}{\vartheta_u(s)}\Bigg|_{\vartheta_0=0} = \frac{1}{1 + sT_1 + s^2T_2^2}$$

Iako to matematički nije lako pokazati, fizikalno je jasno da je gore prepoznati proporcionalni član drugog reda uvijek aperiodski, jer medij zagrijava oklop koji opet zagrijava sondu, sve dok se sve tri temperature ne izjednače. Kako se radi o pasivnim elementima, ne može doći do situacije da sonda u bilo kojem trenutku postane toplija i od oklopa, a kamoli medija.

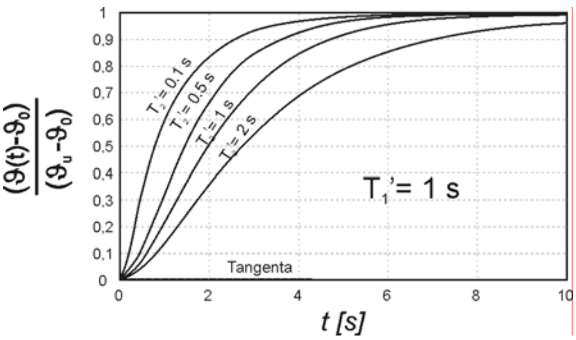
Dakle, prijelazna karakteristika je aperiodska drugog reda, odnosno, uz početne uvjete:

$$\vartheta_2(t) = (\vartheta_u - \vartheta_0)\left(1 - \frac{T_1'}{T_1' - T_2'} e^{-\frac{t}{T_1'}} + \frac{T_2'}{T_1' - T_2'} e^{-\frac{t}{T_2'}}\right) + \vartheta_0$$

gdje su

$$T_1' + T_2' = T_1$$

$$T_1' \cdot T_2' = T_2$$



Ako malo detaljnije razmotrimo što predstavljaju vremenske konstante T_1' i T_2' možemo uočiti da uz zanemarenje utjecaja člana $\frac{q_2\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{q_2}{\lambda_1}$ u izrazu za T_1 u (3) (zanemariv <u>izravni</u> utjecaj koeficijenta prijelaza između oklopa i medija - λ_1 na promjenu temperature osjetila) dobijamo za vremenske konstante:

$$T_1' = \frac{q_1}{\lambda_1} \text{ i } T_2' = \frac{q_2}{\lambda_2}$$

iz čega zaključujemo da fizikalna svojstva oklopa odnosno osjetila definiraju vremenske konstante T_1' i T_2'.

U praksi također nije neuobičajeno da osjetilo ima i dva oklopa jedan u drugom, s međuslojevima termički vodljive masti ili gela. Ovo, naravno, analogno pokazanom načelu, i nadalje utromljuje osjetilo i povećava red kašnjenja, ali je često neizbježno radi eksploatacijskih okolnosti.