Rješenja zadataka iz dekanskog ispitnog roka iz Fizike 1
srijeda, 19. 09. 2012.

Zadaci

1. Top mase 125 kg napunjen je eksplozivom (zanemarive mase) i granatom mase 10 kg, te stavljen na tračnice bez trenja. Cijev topa čini kut 15° sa tlom. Nakon ispaljivanja granate, top se giba po tračnici brzinom v = 7 m/s. Kolikom brzinom je ispaljena granata?
(4 boda)

Rješenje:

Količina gibanja sustava u smjeru x-osi (tj. paralelno s tlom) je očuvana:

$$0 = p_{\mathrm{x,top}} + p_{\mathrm{x,granata}} \ .$$

Brzine topa i granate su u suprotnom smjeru, pa pišemo:

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{top}} v_{\mathrm{x,top}} &= m_{\mathrm{granata}} v_{\mathrm{x,granata}} \\ m_{\mathrm{top}} v_{\mathrm{x,top}} &= m_{\mathrm{granata}} v_{\mathrm{granata}} \cos(15^o) \end{aligned}$$

Brzina granate je:

$$v_{\mathrm{granata}} = \frac{m_{\mathrm{top}} v_{\mathrm{x,top}}}{m_{\mathrm{granata}} \cos(15^o)}$$

Za brojeve zadane u zadatku:

$$v_{\mathrm{granata}} = \frac{(125\,\mathrm{kg})(7\,\mathrm{m/s})}{(10\,\mathrm{kg})(\cos(15^o))} = 90.6\,\mathrm{m/s} \ .$$

2. Čovjek gura kutiju silom koja opada s udaljenošću na slijedeći način: $F(x) = A\,(D - x)^2$, gdje je x udaljenost od početnog položaja izražena u metrima, a D = 5 m i A = 100 N/m^2 . Koliki rad je obavio čovjek dok je gurao kutiju iz početnog položaja do $x = D$?
(6 bodova)

Rješenje:

Rad koji obavi sila na putu od x_1 do x_2:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \ .$$

Zadani su $x_1 = 0$ m i $x_2 = D$.

$$W = \int_0^D A(D-x)^2 dx \ .$$

Integral riješimo zamjenom varijabli $y = D - x$, $dy = -dx$, $y_1 = D - x_1 = D$, $y_2 = D - x_2 = 0$.

$$\begin{aligned} W &= -A \int_D^0 y^2 dy \\ &= -A\frac{y^3}{3}\Big|_D^0 \\ &= -\frac{A}{3}(0 - D^3) \\ &= \frac{A}{3}D^3 \end{aligned}$$

Za brojeve zadane u zadatku:

$$W = \left(\frac{1}{3}100\ \mathrm{N/m^2}\right)(5\ \mathrm{m})^3 = 4167\ \mathrm{J}\ .$$

3. Mase m_1 i m_2 smještene su na krajevima štapa duljine 1m i zanemarive mase. Štap rotira oko vertikalne osi koja je okomita na njega. Kroz koju točku na štapu mora prolaziti os rotacije da bi rad potreban da zarotiramo štap kutnom brzinom ω_0 bio minimalan? Pretpostavite da su dimenzije masa zanemarive u odnosu na duljinu štapa, te da vrijedi $m_2 / m_1 = 2$.
(8 bodova)

Rješenje:

Traženi rad jednak je kinetičkoj energiji:

$$W = E_k = \frac{1}{2} I \omega_0^2, \tag{1}$$

gdje je I ukupan moment tromosti sustava. Obzirom da je masa štapa zanemariva te da su dimenzije masa zanemarive, slijedi:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2, \tag{2}$$

gdje su r_1 i r_2 udaljenosti od osi rotacije do masa m_1 i m_2, respektivno. Uzimajući u obzir da je $m_2 = 2m_1$ i $r_2 = L - r_1$, dobijemo:

$$W = \frac{1}{2} \omega_0^2 m_1 (r_1^2 + 2(L - r_1)^2). \tag{3}$$

Rad je minimalan (ili maksimalan) tamo gdje derivacija iščezava:

$$0 = \frac{dW}{dr_1} = \omega_0^2 m_1 (r_1 - 4(L - r_1)), \tag{4}$$

odnosno

$$r_1 = \frac{2}{3} L = \frac{2}{3} m, \tag{5}$$

$$r_2 = \frac{1}{3} L = \frac{1}{3} m. \tag{6}$$

4. Svemirski brod vlastite duljine 216 m giba se prema opažaču konstantnom relativnom brzinom. Opažač izmjeri da vremenski interval između prolaska prednjeg kraja broda i prolaska zadnjeg kraja broda iznosi 3,52 μs. Kolika je relativna brzina između opažača i broda izražena preko c ?
(8 bodova)

Rješenje:

U sustavu opažača:

$$v = \frac{L}{\Delta t}$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

$$v = \frac{L_0}{\gamma \Delta t} = \frac{L_0}{\Delta t} \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$$

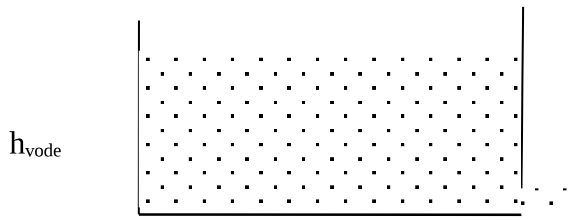
Rješavanjem po v dobijemo:

$$v = \frac{L_0 c}{\sqrt{(c \Delta t)^2 + L_0^2}}$$

$$v = 0{,}201\, c$$

5. Otvorena posuda je do pola napunjena vodom koja istječe kroz malu rupicu (površina rupice je jako mala u odnosu na površinu posude) na stijenki, tik pri dnu. Ako drugu polovicu posude napunimo uljem brzina istjecanja vode se poveća za 10%. Kolika je gustoća ulja?
(6 bodova)

Rješenje:



Primijenimo Bernoulievu jednadžbu.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

U opisanoj situaciji je

$$v_1 \approx 0$$
$$p_1 = p_{atm}$$
$$h_1 = h_{vode}$$
$$p_2 = p_{atm}$$
$$h_2 = 0$$

Iz toga slijedi $v_2 = \sqrt{2gh_{vode}}$.

Kada dodamo ulje

$$p_{atm} + \rho_u g h_{vode} + \rho_{vode} g h_{vode} = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho_{vode}\tilde{v}_2^2$$

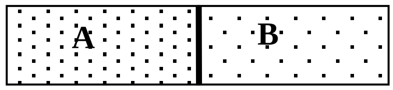
Kako je

$$\tilde{v}_2 = 1{,}1 v_2$$

$$\boxed{\Rightarrow \rho_u = \rho_{vode}\left[(1{,}1)^2 - 1\right] = 0{,}21\rho_{vode} = 210 kg/m^3}$$

6. Cilindar je podijeljen klipom u 2 dijela: A i B. U početnom stanju u oba dijela se nalazi idealni dvoatomni plin temperature T_0=300K. Početno stanje plina u dijelu A je: $(p_A)_0$=2 bar, $(V_A)_0$=1l. U dijelu B početno stanje plina je: $(p_B)_0$=1 bar, $(V_B)_0$=1l. Nakon što se klip otkoči, on se adijabatski giba do ravnotežnog položaja. Odredite stanje plina, tj. p,V i T u A i B dijelu za klip u ravnotežnom položaju.
(8 bodova)

Rješenje:



$$(p_A)_0 = 2bar \quad (V_A)_0 = 1l$$
$$(p_B)_0 = 1bar \quad (V_B)_0 = 1l$$

Ravnoteža nastupa kada je p_A=p_B.
Vrijedi i: V_A+V_B=2l.

$$\text{Plin je dvoatomni} \Rightarrow i = 5 \Rightarrow \gamma = 1 + \frac{2}{i} = \frac{7}{5}$$
$$p_A V_A^\gamma = (p_A)_0 (V_A)_0{}^\gamma$$
$$p_B V_B^\gamma = (p_B)_0 (V_B)_0{}^\gamma$$
$$p_A = p_B \Rightarrow \frac{(p_A)_0 (V_A)_0^\gamma}{V_A^\gamma} = \frac{(p_B)_0 (V_B)_0^\gamma}{V_B^\gamma}$$

Iz prethodne jednadžbe se dobije

$$\boxed{V_B = \frac{2l}{1+2^{1/\gamma}} = 0,757l \Rightarrow V_A = 1,243l}$$

$$\boxed{p_A = 2bar\left(\frac{1l}{1,243l}\right)^\gamma = 1,475bar = p_B}$$

Kako je za adijabatski proces $TV^{\gamma-1} = konst.$

$$\boxed{\begin{aligned} T_A &= T_0\left(\frac{(V_A)_0}{V_A}\right)^{\gamma-1} = 300K\left(\frac{1l}{1,243l}\right)^{\gamma-1} = 275K \\ T_B &= T_0\left(\frac{(V_B)_0}{V_A}\right)^{\gamma-1} = 300K\left(\frac{1l}{0,757l}\right)^{\gamma-1} = 335K \end{aligned}}$$