FIZIKA 1 – ZI 2008./2009. – 1. dio

1. STATIKA FLUIDA

1.1. TLAK

Tlak se definira kao omjer sile i površine na koju ta sila djeluje okomito:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Ako sila nije jednaka u svim točkama površine S, tada gornja formula daje srednju vrijednost tlaka. U tom slučaju možemo definirati tlak u određenoj točki pomoću izraza:

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}.$$

Tlak je skalarna veličina, pa se gornja relacija može pisati i ovako:

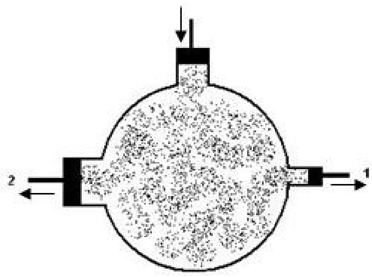
$$d\vec{F} = p d\vec{S},$$

gdje je $d\vec{S}$ vektor u smejru normale na element površine dS.

Jedinica za tlak je paskal [Pa]. Osim te jedinice u upotrebi je i jedinica bar (1 bar = 10^5 Pa).

Fluidi lako mijenjaju oblik i poprimaju oblik posude u kojoj se nalaze. Međutim, da bismo im promijenili volumen, potrebno je djelovati silom.

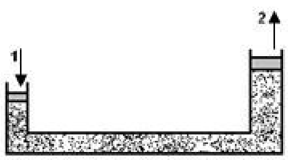
Djelujemo li na tekućinu u ravnoteži izvana nekom silom F, tada se taj vanjski tlak širi u tekućini na sve strane jednako. Npr., ako na posudu napunjenu vodom preko klipa površni S djelujemo vanjskom silom F, sila se fluidom prenosi u svim smjerovima tako da se tlak p koji stvara vanjska sila pojavljuje u svim točkama fluida. To je poznati Pascalov zakon.



$$\frac{F}{S} = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = p.$$

Na tom principu temelje se hidraulički uređaji: preša, kočnice, dizalice i sl.

Princip rada hidrauličke preše:



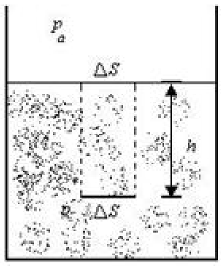
Budući da je S_2 veći od S_1, bit će veća i sila F_2. Rad koji izvrše te sile jednak je $dW = F_1 \Delta s_1 = F_2 \Delta s_2 = p\Delta V$. Tako se hidrauličkom prešom pomoću manjih sila dobivaju veće sile, te je preša primjer mehaničkog stroja kojim se korisni rad, koji bi se bez stroja morao izvršiti velikom silom, može izvršiti manjom silom.

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2},$$

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$$

1.2. HIDROSTATSKI TLAK

Na fluid djeluje i sila teža. To je volumna sila koja za razliku od površinskih sila djeluje na sve čestice fluida. Tlak uzrokovan težinom samog fluida nazivamo hidrostatskim tlakom.



Da bismo izračunali hidrostatski tlak, zamislimo tekućinu u posudi i izračunajmo koliki tlak djeluje na površinu ΔS na dubini *h*. Neka je ta površina baza zamišljenog valjka u unutar tekućine.
Na gornju bazu djeluje sila $F_1 = p_a \Delta S$, gdje je p_a atmosferski tlak, a na donju bazu djeluje sila $F_2 = p\Delta S$, gdje je p tlak na mjestu gdje se nalazi površina na dubini *h*, kao i težina supca tekućine nad tom površinom, $G = \Delta mg = \rho g \Delta V = \rho gh \Delta S$. Budući da je zamišljeni volumen u ravnoteži, te se sile poništavaju:

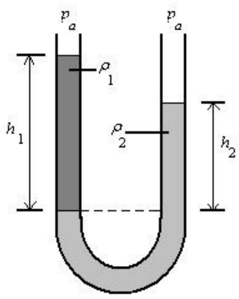
$$p\Delta S - p_a \Delta S - \rho gh \Delta S = 0$$

Odatle dobivamo ukupni tlak koji djeluje u svim točkama tekućine na dubini *h*:

$$p = p_a + \rho gh$$

U gornjoj relaciji dio ρgh uzrokuje težina tekućine i zove se **hidrostatski tlak**.

U međusobno spojenim posudama razina tekućine u svim posudama nalazi se na istoj visini, bez obzira na oblik posuda. To izlazi iz činjenice da je hodrostatski tlak jednak u svim točkama na jednakoj dubini. Ako se u spojenim posudama nalaze dvije različite tekućine, gustoća ρ_1 i ρ_2, tada je razina tekućine različita.



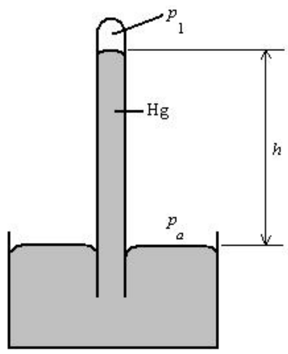
$$p_a + \rho_1 gh_1 = p_a + \rho_2 gh_2$$

1.3. ATMOSFERSKI TLAK

Atmosferski tlak nastaje zbog vlastite težine zračnog stupca iznad Zemljine površine.

Otto von Guericke: Prvi je pokazao silu pritiska zraka. Kad je iz dvije spojene šuplje polukugle izvučen zrak, pritisna sila okolne atmosfere na vanjsku površinu polukugle bila je tako velika da je za odvajanje jedne polukugle od druge bilo potrebno osam konja sa svake strane.

Torricelli: Staklenu cijev duljine 1 m zatvorenu na jednom kraju ispunimo živom, vrh joj zatvorimo prstom, preokrenemo i uronimo u posudu sa živom. Živa će se u cijevi spustit do određene visine *h* ovisne o vanjskom tlaku. Iznad žive u gornjem dijelu cijevi nema zraka već samo nešto živinih para pa je tu tlak $p_1 \approx 0$. Na vanjsku površinu žive u posudi djeluje atmosferski tlak p_a. Napišemo li izraz za hidrostatski tlak točke u horizontalnoj ravnini koja prolazi površinom žive u posudi, dobivamo:



$$p_a = \rho g h + p_1 = \rho g h$$

gdje je $\rho = 13.595 \cdot 10^3$ kg/m^3 gustoća žive, a h = 0.76 m visina stupca žive u posudi.
Uvrstimo li u gornju formulu ove vrijednosti, dobivamo da atmosferski tlak iznosi $p_a = 101325$ Pa.

Atmosferski tlak se mijenja s nadmorskom visinom i pada po tzv. **barometarskoj formuli**. Neka je na visini h atmosferski tlak jednak p, a na visini h + dh tlak p + dp. Ako je dh pozitivan, tada je dp negativan jer tlak pada s visinom. Razlika u tlaku između ta dva sloja anstaje zbog težine stupca zraka presjeka 1 m^2 i visine dh, a iznosi:

$$dp = -\rho g dh$$

gdje je ρ gustoća zraka na toj visini. Da bismo iz te jednadžbe odredili p kao funkciju od h, moramo znati promjenu gustoće zraka s tlakom. Gustoća zraka funkcija je tlaka i temperature. Pretpostavimo li da je atmosfera izotermna (T = konst.), tada iz Boyle – Mariotteova zakona slijedi:

$$pV = p_0 V_0 \Leftrightarrow \frac{pm}{\rho} = \frac{p_0 m}{\rho_0} \Leftrightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \Leftrightarrow \rho p_0 = \rho_0 p$$

$$\rho(h) = \frac{\rho_0}{p_0} p(h)$$

gdje su p_0 i ρ_0 tlak i gustoća zraka na nadmorskoj visini h = 0.

$$dh = -\frac{dp}{\rho g} = -\frac{dp}{\frac{\rho_0}{p_0} p g} = -\frac{p_0 dp}{\rho_0 p g} = -\frac{p_0}{\rho_0 g}\frac{dp}{p}$$

Integracijom gornjeg izraza slijedi:

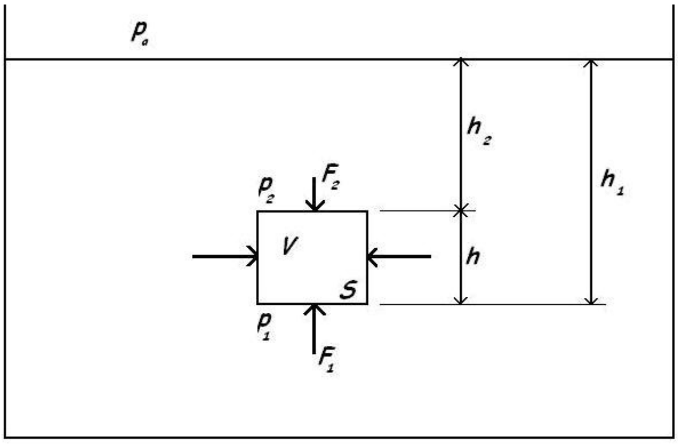
$$\int_0^h dh = -\frac{p_0}{\rho_0 g}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p}$$

$$h = -\frac{p_0}{\rho_0 g}\left(\ln p - \ln p_0\right) = -\frac{p_0}{\rho_0 g}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\rho_0 g h}{p_0} \Leftrightarrow \frac{p}{p_0} = e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}} \Leftrightarrow p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}$$

1.4. UZGON

Kada je tijelo uronjeno u fluid, javlja se rezultantna sila prema gore kao posljedica hidrostatskog tlaka. Tu silu nazivamo uzgon.
Zamislimo tijelo volumena V uronjeno u fluid gustoće ρ_f .



Radi jednostavnosti pretpostavimo da je tijelo u obliku kocke ili valjka. (Svako tijelo, bilo kakva oblika, možemo razdijeliti na valjke ili kocke s dovoljno malim bazama, tako da će dobiveni rezultat vrijediti općenito.)
Sile pritiska koje djeluju na bočne strane kocke poništavaju se jer su na istoj horizontalnoj ravnini jednake po iznosu, a suprotnog smjera. Na mjestu gdje je gornja baza, tlak je jednak:

$$p_2 = p_a + \rho_f g h_2 ,$$

a na drugoj bazi tlak je

$$p_1 = p_a + \rho_f g h_1 .$$

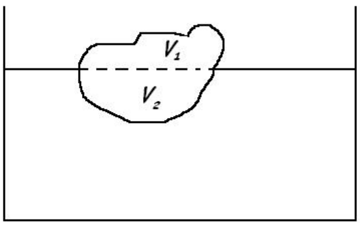
Zbog toga je sila na donju bazu $F_1 = p_1 S$, dok je sila na gornju bazu $F_2 = p_2 S$, gdje je S površina baze. Sila $\vec{F}_1$ ima smjer prema gore, a sila $\vec{F}_2$ usmjerena je prema dolje. Budući da je hidrostatski tlak na razini $h_1 = h_2 + h$ veći nego na razini h_2, sila $\vec{F}_1$ bit će veća nego $\vec{F}_2$, i kao rezultat pojavit će se sila prema gore – uzgon:

$$F_u = F_1 - F_2 = p_1 S - p_2 S = S(p_a + \rho_f g h_1 - p_a - \rho_f g h_2) = \rho_f g S(h_1 - h_2) = \rho_f g S h = \rho_f g V$$

$$F_u = m_f g$$

Uzgon je sila koja djeluje prema gore i po iznosu je jednak težini istisnutog fluida – Arhimedov princip.

Tijelo lebdi u fluidu ako je težina tijela uravnotežena uzgonom. Ako je uzgon veći od težine, tijelo se ubrzano diže, pa će tijelo uronjeno u tekućinu djelomično izroniti iz tekućine i plivati. Tijelo koje pliva bit će toliko uronjeno da će uzgon na uronjeni dio (V_1) biti jednak ukupnoj težini tijela:



$$G = \rho_f g V_1 ,$$

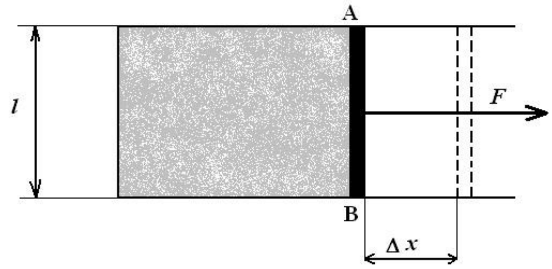
ili za homogena tijela:

$$\rho_{tijela} V g = \rho_f g V_1 \Leftrightarrow V_1 = \frac{\rho_{tijela}}{\rho_f} V .$$

1.5. NAPETOST POVRŠINE

U unutrašnjosti tekućina (*a*) na česticu djeluju sile okolnih čestica koje se po 3. Newtonovom zakonu poništavaju. Međutim, na površini tekućine (*b*) na česticu djeluju sile samo s donje strane, pa je ukupna sila $F_{uk} \neq 0$ i javlja se površinska napetost.

Da bismo izmjerili napetost površine zamislimo pokus s pravokutnim okvirom od žice na kojemu je opna od sapunice. Jedna je stranica pravokutnika pomična, i opna će je u svom nastojanju da se skupi nastojati povući i tako smanjiti površinu. Kažemo da na stranicu AB jeluje sila napetosti površine. Tu silu možemo uravnotežiti vanjskom silom F koja je po iznosu jednaka sili napetosti površine. Da bismo povećali površinu opne, pomični dio AB polako djelovanjem vanjske sile F pomaknemo za Δx. Pri tome se izvrši rad $\Delta W = F\Delta x$. Budući da se opna sastoji od dvije površine između kojih je tanak sloj tekućine, povećanje površine je $\Delta S = 2l\Delta x$.



Koeficijent površinske napetosti σ definira se izrazom:

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{F\Delta x}{2l\Delta x} = \frac{F}{2l}.$$

Tlak ispod zakrivljene površine tekućine. U mjehuriću sapunice (ili mjehuriću zraka u vodi i sl.) tlak je veći od vanjskog tlaka ua neki dodatni „nadtlak“ Δp. Površinska napetost u mjehuriću nastoji stegnuti mjehurić sve dok se ne uspostavi ravnoteža zbog tlaka unutar mjehurića. Da bi se povećao mjehurić polumjera r na polumjer r + dr, mora se izvršiti rad:

$$dW = 2\sigma \, dS$$

Uzima se faktor 2 jer mjehurić ima dvije površine.

$$S = 4r^2\pi$$

$$dS = 8r\pi \, dr$$

Kad to uvrstimo u formulu za rad, dobijemo:

$$dW = 2\sigma \cdot 8r\pi \, dr \quad (1)$$

Unutar mjehurića je nadtlak Δp i sila koja zbog toga djeluje na unutrašnju površinu mjehura jest ΔpS. Pri povećanju mjehurića rad je te sile:

$$dW = \Delta pS \, dr = \Delta p \cdot 4r^2\pi \, dr \quad (2)$$

Izjednačimo izraze (1) i (2):

$$2\sigma \cdot 8r\pi \, dr = \Delta p \cdot 4r^2\pi \, dr$$

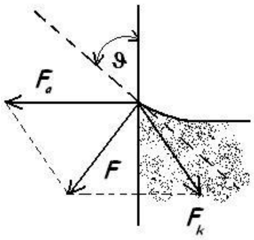
$$\Delta p = \frac{4\sigma}{r}.$$

Gornja formula izvedena je za mjehurić s dvije površine. U slučaju mjehurića zraka ili kapljice tekućine dodatni je tlak unutar takve jednostruke sferne površine:

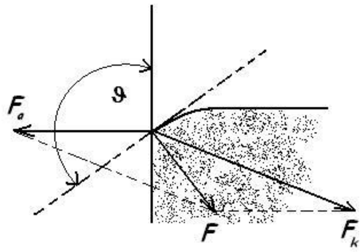
$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}.$$

1.6. KAPILARNOST

Ako su adhezione sile veće od kohezionih (npr. na granici voda – staklo), površina tekućine poprima konkavni oblik (1), i kažemo da tekućina kvasi stijenku posude, a ako su kohezione sile veće (npr. živa – staklo), onda poprima konveksni oblik (ne kvasi stijenku posude). Kut što ga zatvara stijenka posude i tangenta na površinu tekućine zove se **okrajni kut** (ϑ).

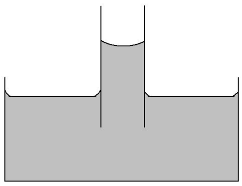


(1)

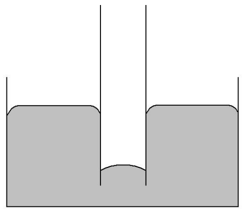


(2)

Ako usku cjevčicu (kapilaru) uronimo u posudu s vodom, opazit ćemo da će se voda u njoj podići do neke visine h (koja ovisi o polumjeru kapilare) i da će meniskus vode u kapilari biti konkavan. Slično vrijedi i za ostale tekućine koje kvase stijenku kapilare – **kapilarna elevacija** (1). Naprotiv, razina žive je u staklenoj kapilari niža od razine u širokoj posudi i meniskus žive je konveksan – **kapilarna depresija** (2).



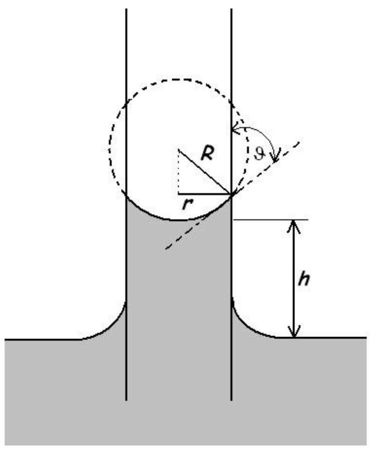
(1)

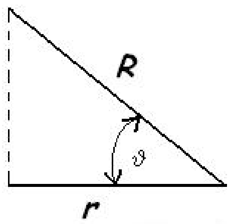


(2)

Izračunat ćemo visinu tekućine u kapilari u slučaju kapilarne elevacije (slična razmatranja za kapilarnu depresiju dovela bi do istog rezultata). Zbog konkavnog meniskusa tekućine u kapilari, tlak ispod meniskusa manji je nego (atmosferski) tlak iznad i tekućina se podiže sve dok se ta razlika tlaka Δp ne izjednači s hidrostatskim tlakom uzrokovanim težinom stupca tekućine u kapilari:

$$\Delta p = \rho g h \; (1)$$





$$\cos\vartheta = \frac{r}{R} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{\cos\vartheta}{r}$$

Budući da je:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma\cos\vartheta}{r} \; (2),$$

onda izjednačavanjem (1) i (2) dobivamo visinu tekućine u kapilari: $h = \dfrac{2\sigma\cos\vartheta}{\rho g r}$.

2. DINAMIKA FLUIDA

2.1. IDEALNI FLUID

Idealni fluid je nestlačiv, konstantne temperature, njegov tok je jednolik i laminaran (slojevit). Između lamina fluida nema trenja.

2.2. JEDNADŽBA KONTINUITETA

Promatrajmo strujanje fluida kroz strujnu cijev različitog presjeka. Kada imamo idealni fluid, brzina je u svim točkama odeređenog presjeka jednaka. Za vrijeme dt kroz promatrani presjek S prođe volumen fluida $\Delta V = S\ v\ \Delta t$. Omjer volumena tvari koja protekne za vrijeme dt i tog vremena je volumni protok:

$$q_v = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{Sv\Delta t}{\Delta t} = Sv\,.$$

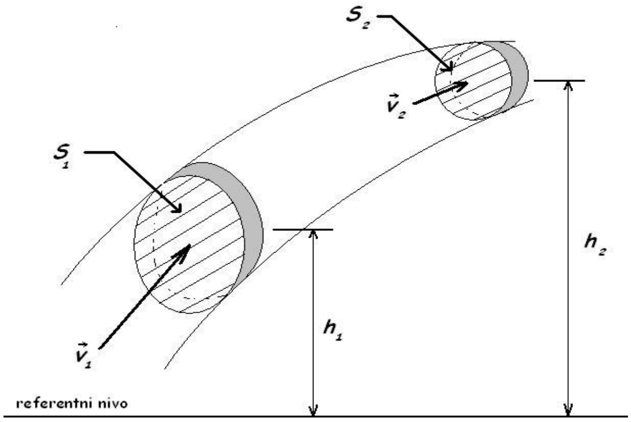
Ako je gustoća fluida svuda konstantna (nestlačivi fluid), i ako unutar cijevi nema izvora ni ponora, masa fluida, koja u vremenu dt protekne kroz bilo koji presjek, je konstantna:

$$m_1 = m_2 \Leftrightarrow \rho\Delta V_1 = \rho\Delta V_2 \Leftrightarrow \rho S_1\Delta s_1 = \rho S_2\Delta s_2 \Leftrightarrow \rho S_1 v_1\Delta t = \rho S_2 v_2\Delta t = \text{konst.},$$

te je konstantan i protok

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{konst.}$$

2.3. BERNOULLIJEVA JEDNADŽBA



Promatrajmo stacionarno strujanje idealnog fluida kroz strujnu cijev promjenljivog presjeka. Na određenom mjestu u cijevi čestice uvijek imaju istu brzinu. Uočimo u cijevi presjek S_1 gdje je brzina v_1 i tlak p_1 i presjek S_2 gdje je brzina v_2 i tlak p_2. Neka za vrijeme Δt kroz presjek S_1 protekne masa fluida $\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t$. Jednaka masa (volumen) mora u tom vremenu proći i kroz presjek S_2, te će volumeni na slici biti jednaki:

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = \frac{\Delta m}{\rho}.$$

Dok fluid mase Δm prolazi koz presjek S_1, rad tlačne sile je:

$$\Delta W_1 = F_1 \Delta s_1 = p_1 S_1 \Delta s_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t = p_1 \frac{\Delta m}{\rho}$$

Rad koji izvrši fluid mase Δm pri izlasku kroz presjek S_2 iz promatranog dijela strujne cijevi jest:

$$\Delta W_2 = -F_2 \Delta s_2 = -p_2 S_2 \Delta s_2 = -p_2 S_2 v_2 \Delta t = -p_2 \frac{\Delta m}{\rho}$$

Predznakom minus uzeli smo u obzir da su smjerovi sile i pomaka suprotni. Na presjeku S_1 rad ΔW_1 izvršen je nad sustavom, a na presjeku S_2 sustav vrši rad protiv sila vanjskog tlaka p_2. Zato je ukupni rad izvršen and sistemom:

$$\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2 = (p_1 - p_2)\frac{\Delta m}{\rho}.$$

Kako smo pretpostavili da nema trenja, taj rad vanjskih sila pritiska jednak je promjeni energije čitavog razmatranog volumena fluida, ograničenog stijenkama strujne cijevi i presjecima S_1 i S_2. Međutim, promjena energije čitavog tog volumena jednaka je razlici kinetičke i potencijalne energije malih volumena $\Delta V_1 = S_1 \Delta s_1$ i $\Delta V_2 = S_2 \Delta s_2$:

$$\Delta E = E_{k2} - E_{k1} + E_{p2} - E_{p2} = \frac{\Delta m v_2^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^1}{2} + \Delta m g h_1 - \Delta m g h_2$$

Kada izjednačimo rad ΔW i promjenu energije ΔE, dobivamo:

$$(p_1 - p_2)\frac{\Delta m}{\rho} = \frac{\Delta m v_2^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^1}{2} + \Delta m g h_1 - \Delta m g h_2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^1}{2} + \rho g h_2 - \rho g h_1$$

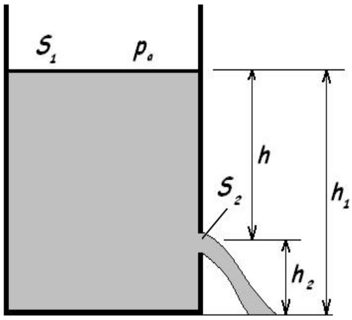
$$p_1 + \frac{\rho v_1^1}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 = \text{konst.}.$$

To je Bernoullijeva jednadžba za stacionarno strujanje nestlačivog idealnog fluida.
Ako je cijev horizontalna, ili ako je gustoća fluida malena (kao kod plinova), te je tlak $\rho g(h_2 - h_1)$ zanemariv, Bernoullijeva jednadžba poprima oblik:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^1}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = \text{konst.}$$

2.4. PRIMJENE BERNOULLIJEVE JEDNADŽBE

1. Torricellijev zakon istjecanja:



Neka se na stijenci otvorene široke posude nalazi malo otvor na dubini *h* tekućine. Kolika je i brzina i protok tekućine kroz taj otvor? Primijenimo Bernoullijevu jednadžbu za dva presjeka:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

Brzina v_1 je zanemarivo malena pa dobivamo:

$$p_a + \rho g h_1 = p_a + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

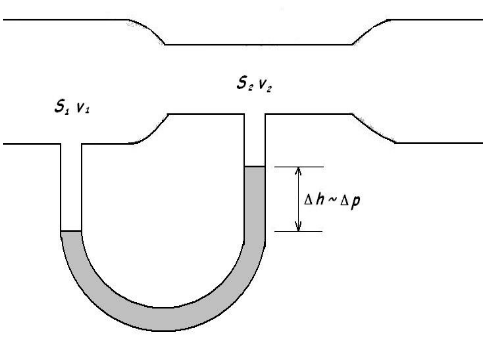
Odatle je:

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2gh}\,.$$

Pri istjecanju tekućina javlja se i kontrakcija mlaza: efektivni presjek mlaza obično je manji od presjeka otvora. Koeficijent kontrakcije *k*, koji ovisi o tekućini i obliku otvora, obično iznosi od 0.6 do 0.9. Protok je u tom slučaju:

$$q_v = kSv = kS\sqrt{2gh}\,.$$

2. Venturijeva cijev:



Ta cijev, sa suženjem u sredini, služi za mjerenje brzine i protoka fluida. Primjenom Bernoullijeve jednažbe i jednadžbe kontinuiteta može se iz razlike tlakova Δp na širem i užem presjeku cijevi izračunati brzina i protok fluida. Napišemo li Bernoullijevu jednadžbu za širi i uži presjek cijevi dobivamo:

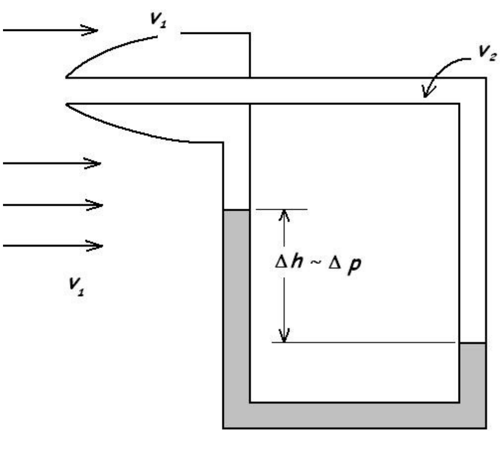
$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \Leftrightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \Leftrightarrow \frac{2\Delta p}{\rho} = v_2^2 - v_1^2 \;(1)$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2} \;(2)$$

Uvrštavanjem relacije (2) u (1) dobivamo izraz za brzinu fluida:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left[\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 - 1\right]}}$$

3. Pitot – Prandtlova cijev:



U toj cijevi mjerenjem dinamičkog tlaka možemo odrediti brzinu strujanja plina. Manometar ove cijevi ima takav oblik da mjeri razliku ukupnog i statičkog tlaka, jer je jedan njegov otvor u smejru strujanja fluida. U tom se otvoru fluid zaustavlja, te je brzina $v_2 = 0$, i iz Bernoullijeve jednadžbe dobivamo:

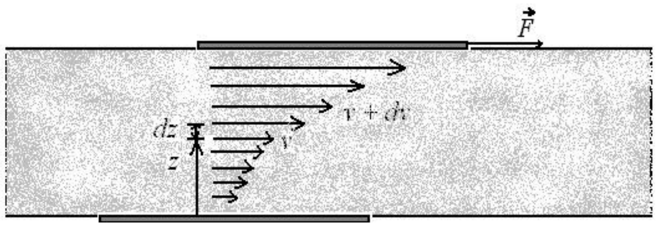
$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 \Leftrightarrow \Delta p = \frac{\rho v_1^2}{2}$$

Odatle je:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}\,.$$

2.5. VISKOZNOST

Pri protjecanju realnog fluida međumolekularne sile uzrokuju unutrašnje trenje ili viskoznost.
Zamislimo sloj fluida između dviju ploča od kojih je jedna (donja) nepomična, a na gornju (pomičnu) djelujemo tangencijalnom silom F tako da se ploča giba jednoliko.



Kada se ploča giba, ona povlači za sobom sloj fluida, a taj sloj silama djeluje na susjedni, itd. Najbrže će se gibati sloj uz gornju ploču, dok će sljedeći slojevi imati sve manju brzinu. Takvo gibanje fluida u slovjeima nazivamo laminarnim ili slojevitim strujanjem.
Kada se ploča na koju djelujemo stalnom silom F giba jednoliko, sila unutrašnjeg trenja uravnotežuje vanjsku silu F.
Sila unutrašnjeg trenja ovisi ovo površini dodirnih slojeva S, vrsti fluida i promjeni brzine od sloja do sloja, tzv. gradijentu brzine dv/dz.
Sila unutrašnjeg trenja između dva susjedna sloja fluida, čija je površina S i koji su međusobno udaljeni dz, jest:

$$F_{tr} = \eta S \frac{dv}{dz},$$

gdje je η koeficijent dinamičke viskoznosti, koja ovisi o vrsti fluida i temperaturi.

Kinematička viskoznost je omjer dinamičke viskoznosti i gustoće fluida:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}.$$

2.6. LAMINARNO I TURBULENTNO STRUJANJE. REYNOLDSOV BROJ

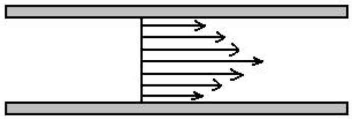
Pri manjim brzinama realni fluid struji laminarno. Ako brzina fluida postane veća od neke kritične brzine v_k, strujanje iz laminarnog prelazi u turbulentno. Pri tom nastaje miješanje slojeva fluida, čestice prelaze iz jednog sloja u drugi i nastaju vrtlozi. Kritična brzina ovisi o viskoznosti i gustoći fluida te o obliku cijevi kroz koju fluid struji, ondnosno o obliku tijelu što se giba kroz fluid. Hoće li fluid teći laminarno ili turbulentno, može se odrediti pomoću bezdimenzionalnog parametra koji se zove Reynoldsov broj:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta},$$

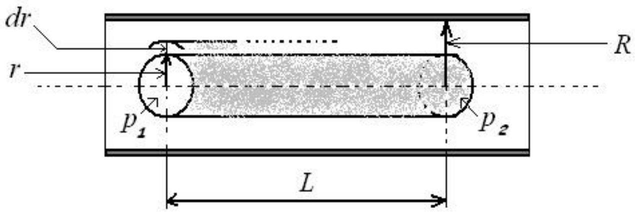
gdje je ρ gustoća fluida, η dinamičk viskoznost i v brzina strujanja fluida, a l je karakteristična dužina koja je, npr., za cijev kružnog presjeka jednaka promjeru, za kvadratni presjek jedan stranici kvadrata i sl.
Protjecanje fluida je laminarno ako je Reynoldsov broj manji od kritičnog Re_k, dok je za $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_k$ protjecanje turbulentno. Za strujanje kroz cijevi Rek je oko 2300, strujanje preko ravne ploče Re_k je oko 400000 itd.

2.7. PROTJECANJE REALNOG FLUIDA KROZ CIJEV. POISEUILLEOV ZAKON

Kada realni fluid struji kroz usku cijev, najveća je brzina u sredini cijevi, dok se prema krajevima brzina smanjuje, te je uz samu stjenku cijevi nula.



Kada realni fluid struji uz neku zapreku (ili se neko tijelo giba u fluidu), tada se uz azpreku stvara tzv. granični sloj fluida, čija brzina nije jednaka brzini fluida daleko od zapreke. Tik uz zapreku čestice fluida se jedva miču, malo dalje njihova se brzina povećava, a ubrzo dosežu brzinu koju bi imale kada ne bi postojala zapreka. Slično se oko tijela koje se giba u fluidu formira granični sloj u kojemu zbog trenja čestice gube na brzini, to više što su bliže tijelu. Određeni sloj fluida pranja uz tijelo i giba se zajedno s njim, povlačeći za sobom susjedne slojeve. Slojevi fluida koji su dalje od tijela gibaju se sve sporije, a na određenoj udaljenosti (tj. izvan graničnog sloja) fluid miruje.
Izvedimo izraze za raspodjelu brzina i protok u uskoj cijevi polumjera R (koji je manji nego debljina graničnog sloja) kroz koju struji realna tekućina dinamičke viskoznosti η.



Sila koja djeluje na sloj fluida u obliku valjka polumjera r i dužine L nastaje zbog razlike tlakova i iznosi:

$$F = r^2\pi(p_1 - p_2).$$

Sila trenja kojom taj sloj tekućine djeluje na susjedni sloj iznosi:

$$F_{tr} = \eta S\frac{dv}{dr} = \eta 2r\pi L\frac{dv}{dr}.$$

Zbroj tih sila je jednak nuli: $\vec{F} + \vec{F}_{tr} = 0$. Odatle je:

$$r^2\pi(p_1 - p_2) = -\eta 2r\pi L\frac{dv}{dr} \Leftrightarrow r\Delta p dr = -\eta 2L dv \Leftrightarrow -\frac{\Delta p}{2\eta L} r dr = dv \Leftrightarrow -\frac{\Delta p}{2\eta L}\int_0^R r dr = \int_v^0 dv$$

$$-\frac{\Delta p}{2\eta L}\frac{R^2 - r^2}{2} = -v \Leftrightarrow v = \frac{\Delta p\left(R^2 - r^2\right)}{4\eta L}$$

Volumen je tekućine koja u vremenu t protekne kroz određeni presjek cijevi:

$$dV = dSdl = 2r\pi drvt = 2\pi vtrdr \Leftrightarrow \int_V dV = 2\pi vt\int_0^R rdr = \frac{2\Delta p\pi t}{4\eta L}\int_0^R \left(R^2 - r^2\right)rdr = \frac{2\Delta p\pi t}{4\eta L}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{\Delta p\pi t}{8\eta L}R^4$$

Protok je tada jednak:

$$q_v = \frac{V}{t} = \frac{\frac{\Delta p\pi t}{8\eta L}R^4}{t} = \frac{\Delta p\pi}{8\eta L}R^4.$$

To je Poiseuilleov zakon laminarnog protjecanja realne tekućine kroz uske cijevi.

2.8. OTPOR SREDSTAVA

Kada se tijelo giba kroz idealni fluid nema otpora sredstva. Strujnice su simetrično raspoređene s obje strane tijela. Kada se tijelo giba kroz realni fluid, pojavljuje se otpor sredstva koji ovisi o veličini (obliku) tijela, vrsti fluida i o brzini gibanja tijela. Ako je strujanje laminarno, taj otpor nastaje zbog unutrašnjeg tijela u fluidu, dok se pri turbulentnom strujanju otpor povećava zbog stvaranja vrtloga.
Pri malim brzinama (mali Reynoldsovi brojevi) otpor sredstva razmjeran je brzini i dinamičkoj viskoznosti i ovisi o obliku tijela. Stokes je npr. pronašao da na kuglicu polumjera *r* koja se giba kroz viskozni fluid konstantnom brzinom *v* djeluje sila trenja:

$$F_{tr} = 6\pi\eta rv\,.$$

Taj zakon vrijedi samo za male brzine (npr. za $\mathrm{Re} = \dfrac{2r\rho v}{\eta} < 0.1$).

Kada su brzine veće od kritične, otpor sredstva uglavnom nastaje zbog razlike tlakova, jer je sila zbog razlike tlakova bitno veća od sile viskoznog trenja. Silu otpora sredstva možemo pisati u obliku:

$$F_{ot} = \frac{1}{2} c_{ot} \rho v^2 S\,,$$

gdje je c_{ot} otporni broj, *S* čeona površina tijela izložena strujanju fluida, ρ gustoća i *v* brzina fluida.

Kada se tijelo, npr. avionsko krilo, nalazi u struji fluida, uz silu otpora sredstva $\vec{F}_{ot}$ (čiji je smjer u smjeru strujanja fluida) pojavljuje se i aerodinamički uzgon okomito na smjer strujanja. On nastaje zbog cirkualcije zraka oko tijela, a ovisi o obliku tijela i nagibu profila prema struji zraka. Na slici je prikazan aerodinamički uzgon $\vec{F}_u$, otpor zraka $\vec{F}_{ot}$ i rezultantna sila $\vec{F} = \vec{F}_{ot} + \vec{F}_u$ na avionsko krilo. Analogno otporu, i $\vec{F}_u$ možemo prikazati formulom:

$$F_u = \frac{1}{2} c_u \rho v^2 S\,,$$

te je ukupna sila koja djeluje pri jednolikom gibanju tijela kroz fluid:

$$F = \sqrt{F_{ot}^2 + F_u^2} = \frac{1}{2} c\rho v^2 S, \quad c = \sqrt{c_{ot}^2 + c_u^2}\,.$$

2.9. MAGNUSOV EFEKT

Na tijelo koje rotira u struji fluida djeluje sila okomito na smjer strujanja.