Rješenja zadataka jesenskog ispitnog roka iz Fizike 1
četvrtak, 5. 9. 2013.

1. Automobil mase m = 1500 kg se giba brzinom v_0 = 200 km/h, nakon čega se ugasi motor. Izračunajte za koliko se vremena automobil zaustavi ako pri zaustavljanju na njega djeluje stalna sila trenja F_{tr} = 150 N i sila otpora zraka $F_{otp} = S\rho C_d v^2$, gdje je v brzina automobila, a S = 2,5 m^2, ρ = 1,15 kg/m^3, C_d = 0,25.

Naputak: Integral $\int \frac{dx}{A+Bx^2} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \arctan\left(\sqrt{\frac{B}{A}}x\right)$.

(8 bodova)

Rješenje:

Drugi Newtonov zakon za dani automobil nakon prestanka rada motora:

$$m\frac{dv}{dt} = -F_{\mathrm{tr}} - F_{\mathrm{otp}} \ ,$$

ili, skraćeno:

$$m\frac{dv}{dt} + A + Bv^2 = 0 \ ,$$

uz pokrate $A \equiv \frac{F_{\mathrm{tr}}}{m}$ i $B \equiv \frac{S\rho C_d}{m}$.

Odvojimo varijable: sve s brinom v na lijevu stranu, a vrijeme t na desnu:

$$\frac{dv}{A+Bv^2} = -dt \ .$$

Integriramo s odgovarajućim granicama:

$$\frac{1}{\sqrt{AB}} \arctan\left(\sqrt{\frac{B}{A}}v(t')\right)\Bigg|_{v(0)}^{v(t)} = -t'\big|_0^t \ ,$$

te uvrstimo granice:

$$\frac{1}{\sqrt{AB}} \arctan\left(\sqrt{\frac{B}{A}}v(t)\right) - \frac{1}{\sqrt{AB}} \arctan\left(\sqrt{\frac{B}{A}}v_0\right) = -t \ .$$

Uvodimo još jednu pokratu radi kraćeg zapisa: $C \equiv \arctan\left(\sqrt{\frac{B}{A}}v_0\right) = 1.3164$. Konačno imamo jednadžbu gibanja:

$$v(t) = \sqrt{\frac{A}{B}} \tan\left(C - \sqrt{AB}\cdot t\right) \ .$$

Brzina je nula kada vrijedi:

$$C = t_{\mathrm{zaust.}}\sqrt{AB} \ ,$$

te za vrijeme zaustavljanja imamo $t_{\mathrm{zaust.}} = C/\sqrt{AB} = 190.17$ s.

2. Na glatkoj vodoravnoj površini leži kugla mase m_2=4,5 kg spojena preko opruge konstante k=125 N/m s čvrstim zidom. Metak mase m_1=10 g i brzine v_1=2160 km/h zabija se u kuglu i ostaje u njoj. Koliko se stisne opruga? **(6 bodova)**

Rješenje:

$$p_{prije} = m_1 v_1 = p_{poslije} = (m_1 + m_2) v_2$$

Slijedi

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 1{,}33 \text{ m/s}$$

Zakon očuvanja energije nalaže

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2^2 = \frac{1}{2} k x^2$$

Naposljetku,

$$x = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) v_2^2}{k}} = 0{,}253 \text{ m}$$

3. Puni valjak čiji se centar mase giba brzinom 1 m/s počinje se kotrljati bez klizanja uz kosinu nagiba 30°. Nakon koliko vremena će se valjak zaustaviti? **(6 bodova)**

Rješenje:

Newtonove jednadžbe za translaciju (T) i rotaciju (R) su:

T:

$$ma = -G \sin \beta - F_{TR}$$

Gdje je m masa tijela, G težina tijela, F_{TR} je sila trenja.

R:

$$I \alpha = - F_{TR} R$$

Gdje je I moment tromosti valjka, R je polumjer valjka.

Kombinirajući jednadžbe za translaciju, rotaciju i uvjet kotrljanja bez klizanja ($a = \alpha R$)

Dobije se:

$$a = -2 g \sin(\beta)$$

Vrijeme zaustavljanja se dobije iz formule

$$v(t) = v_o - a t$$

i uvjet da je $v(t) = 0$

Vrijeme je onda:

$$t = v_o / [2g \sin(\beta)]$$

$$\boldsymbol{t = 0{,}1\text{s}}$$

4. Odredite energiju potrebnu za prijenos tijela mase 100 kg s planeta Zemlje mase $2{,}85 \cdot 10^{24}$ kg i polumjera 6400 km na planet Mars dvostruko manjeg polumjera i desetine mase planeta Zemlje. (Zanemarite gubitke na savladavanje atmosfera planeta) **(6 bodova)**

Rješenje:

Enegija se dobije tako da se oduzmu gravitacijski potencijali koje ima tijelo na površini Zemlje i Marsa.

Gravitacijski potencijal na površini planeta je:

$$\varphi = G\, m / R$$

Gdje je G gravitacijska konstanta, m je masa planeta, R je polumjer planeta.
Energija potrebna da se tijelo prenese sa planeta na planet je:

$$E = G\, m_{TIJELO}(m_{ZEMLJE}/R_{ZEMLJE} - m_{MARS}/R_{MARS})$$

$$\boldsymbol{E = 2.\ 37\ \mathbf{GJ}}$$

5. Spremnik velike površine napunjen je vodom do dubine 0,30 m. Rupa površine 6,5 cm^2 na dnu spremnika omogućava da voda istječe. Na kojoj udaljenosti ispod dna spremnika je površina presjeka mlaza vode jednaka polovici površine rupe? **(6 bodova)**

Rješenje:

$$\rho g D = \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$v = \sqrt{2 g D}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2{,}426\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$A_1 v = A_2\, v_2$$

$$A_1 v = \frac{1}{2} A_1\, v_2$$

$$v_2 = 2v$$

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \frac{\rho (2v)^2}{2}$$

$$\frac{v^2}{2} + g h = \frac{4 v^2}{2}$$

$$g h = \frac{3}{2} v^2$$

$$h = \frac{3}{2}\,\frac{v^2}{g}$$

$$h = 0{,}9\,\mathrm{m}$$

6. Koliki rad treba obaviti pri adijabatskoj kompresiji jednoatomnog plina početnog obujma V_0=0,2 m^3 i tlaka p_0=4x10^5 Pa do polovice njegovog početnog obujma? **(8 bodova)**

Rješenje:

$$\boldsymbol{W = \int_{V_0}^{V_0/2} p\,dV}$$

Proces je adijabatski stoga

$$\boldsymbol{pV^{\kappa} = const.}$$

$$\boldsymbol{p_0 V_0^{\kappa} = pV^{\kappa}}$$

$$\kappa = 5/3$$

Rad možemo izraziti na sljedeći način

$$W = p_0 V_0^{\kappa} \int_{V_0}^{V_0/2} \frac{dV}{V^{\kappa}}$$

Slijedi

$$\boldsymbol{W = \frac{p_0 V_0^{\kappa}}{1-\kappa}\left[\left(\frac{V_0}{2}\right)^{1-\kappa} - V_0^{1-\kappa}\right]}$$

$$\boldsymbol{W = \frac{p_0 V_0}{1-\kappa}\left(2^{2/3}-1\right) = 70488\ \mathrm{J}}$$