Zadaci za vježbu, treći dio

1 Zadatak: Homogena vodoravna greda duljine $L = 6\,\mathrm{m}$ i mase $M = 80\,\mathrm{kg}$ leži na dvama osloncima, a na njoj stoji čovjek mase $m = 60\,\mathrm{kg}$. Udaljenost lijevog oslonca od lijevog kraja grede je $x_1 = 1.5\,\mathrm{m}$, udaljenost desnog oslonca od lijevog kraja grede je $x_2 = 5.5\,\mathrm{m}$, a čovjek je od lijevog kraja grede udaljen $x_3 = 4.5\,\mathrm{m}$. Odredi iznose sila kojima oslonci djeluju na gredu. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Pravokutni koordinatni sustav postavljamo tako da se ishodište podudara s lijevim krajem grede koja leži na pozitivnom dijelu x-osi, a y-os je uspravna i usmjerena prema gore. Uz tako postavljen koordinatni sustav oslinci se nalaze pri $x = x_1$ i $x = x_2$, čovjek stoji pri $x = x_3$, a težište (središte mase) grede se nalazi pri $x = L/2$. Prema prvom uvjetu statike zbroj svih vanjskih sila koje djeluju na tijelo jednak je nuli. Ovdje razmotrimo samo uspravnu komponentu zbroja vanjskih sila koje djeluju na gredu,

$$\sum \left(\mathbf{F}^{(\mathrm{ext.})}\right)_y = -Mg - mg + F_1 + F_2 = 0,$$

gdje su F_1 i F_2 traženi iznosi sila kojima oslonci djeluju na gredu. Prema drugom uvjetu statike tijela zbroj momenata svih vanjskih sila koje na njega djeluju djeluju jednak je nuli. Ovdje je dovoljno razmotriti z-komponentu momenata,

$$\sum \left(\mathbf{M}^{(\mathrm{ext.})}\right)_z = -MgL/2 - mgx_3 + F_1x_1 + F_2x_2 = 0.$$

Iz gornjeg sustava slijedi

$$F_{1,2} = \pm\frac{(M+m)x_{2,1} - ML/2 - mx_3}{x_2 - x_1}\,g.$$

Za zadane vrijednosti

$$F_1 \simeq 637.7\,\mathrm{N}, \qquad F_2 \simeq 735.7\,\mathrm{N}.$$

Rješenje: $F_{1,2} = \pm((M+m)x_{2,1} - ML/2 - mx_3)g/(x_2 - x_1)$, $F_1 \simeq 637.7\,\mathrm{N}$, $F_2 \simeq 735.7\,\mathrm{N}$

2 Zadatak: Kvadar pritišćemo uz uspravan zid s kojim on ima koeficijent statičkog trenja $\mu = 0.5$ kako on ne bi klizio prema dolje. Primijenjujujemo silu iznosa F čiji smjer s okomicom na zid zatvara kut α. Odredi kut α za koji je potreban najmanji iznos sile F.

Postupak: Osim sile iznosa F kojom djelujemo na kvadar, na njega djeluju gravitacijska sila iznosa mg, reakcija zida iznosa N, te sila statičkog trenja iznosa $F_{\text{tr.}}$ za koju uzimamo da djeluje prema gore, tj. pretpostavljamo da sila trenja pomaže pri savladavanju gravitacijske sile. Prema prvom uvjetu statike zbroj svih vanjskih sila koje djeluju na tijelo mora iščezavati. Zbroj vodoravnih komponenata vanjskih sila je

$$F \cos\alpha - N = 0,$$

gdje je N iznos sile reakcije kojom zid djeluje na kvadar. Zbroj uspravnih komponenata vanjskih sila je

$$F \sin\alpha + F_{\text{tr.}} - mg = 0,$$

gdje je

$$F_{\text{tr.}} \leq \mu N$$

iznos sile statičkog trenja. Koristeći najveći mogući iznos sile trenja, $F_{\text{tr.}} = \mu N$, iz gornjeg sustava slijedi

$$F = \frac{mg}{\mu \cos\alpha + \sin\alpha}.$$

Kut α za koji sila F ima minimum nalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{mg(\mu \sin\alpha - \cos\alpha)}{(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)^2},$$

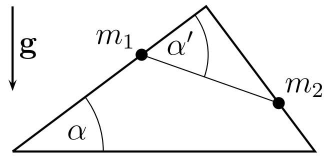
koji je ispunjen za

$$\mathrm{tg}\alpha = \mu^{-1}.$$

Za zadanu vrijednost koeficijenta trenja imamo $\alpha \simeq 63.4°$.

Rješenje: $\mathrm{tg}\alpha = \mu^{-1}$, $\alpha \simeq 63.4°$.

3 Zadatak: Žičani okvir u obliku pravokutnog trokuta postavljen je u uspravnoj ravnini tako da je njegova hipotenuza vodoravna, a pravi kut gleda uvis. Mase m_1 i m_2 klize bez trenja po katetama, a povezane su bezmasenom niti (vidi sliku). Sustav miruje u ravnotežnom položaju. Odredi kut α' koji nit zatvara s katetom po kojoj klizi masa m_1, ako ta kateta s hipotenuzom zatvara kut α.



Postupak: Ravnotežni položaj masa je onaj u kojem je gravitacijska potencijalna energija minimalna. Najprije ćemo izraziti potencijalnu energiju preko odgovarajućeg parametra, a zatim pronaći minimum. Neka je $a_{1,2}$ udaljenosti masa $m_{1,2}$ od gornjeg vrha žičanog trokuta, a ℓ neka je duljina niti. Položaji masa $m_{1,2}$ i gornji vrh žičanog trokuta čine pravkutan trokut te vrijedi

$$a_1^2 + a_2^2 = \ell^2.$$

Gravitacijsku potencijalnu energiju masa sada možemo napisati kao

$$\begin{aligned} E_{\text{pot.}} &= -m_1 g\, a_1 \sin\alpha - m_2 g\, a_2 \sin[\pi/2 - \alpha] \\ &= -m_1 g\, a_1 \sin\alpha - m_2 g \sqrt{\ell^2 - a_1^2}\, \cos\alpha. \end{aligned}$$

Ekstrem pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}E_{\text{pot.}}}{\mathrm{d}a_1} = -m_1 g\, \sin\alpha + \frac{m_2 g\, a_1 \cos\alpha}{\sqrt{\ell^2 - a_1^2}},$$

koji je ispunjen za

$$a_1 = \frac{m_1 \ell \sin\alpha}{\sqrt{m_2^2 \cos^2\alpha + m_1^2 \sin^2\alpha}}.$$

Konačno iz geometrije trokuta imamo

$$\cos\alpha' = \frac{a_1}{\ell} = \frac{m_1 \sin\alpha}{\sqrt{m_2^2 \cos^2\alpha + m_1^2 \sin^2\alpha}} = \left(1 + (m_2/m_1)^2 \cot^2\alpha\right)^{-1/2}.$$

Rješenje: $\cos\alpha' = (1 + (m_2/m_1)^2 \cot^2\alpha)^{-1/2}$

4 Zadatak: Odredi moment tromosti homogenog stošca polumjera baze R i mase M u odnosu na njegovu os simetrije.

Postupak: Moment tromosti tijela u odnosu na neku os definiran je izrazom

$$I = \int s^2 \, \mathrm{d}m = \int s^2 \rho \, \mathrm{d}V,$$

gdje je s udaljenost elementa mase $\mathrm{d}m = \rho \, \mathrm{d}V$ od osi. Stožac visine H i polumjera base R možemo shvatiti kao niz šupljih cilindara tankih stijenki koji su umetnuti jedan u drugog tako da u potpunosti ispunjuju unutrašnjost stošca. Visina stošca čiji polumjera je s može se napisati kao

$$h = H(1 - s/R).$$

Ako je debljina njegove stijenke $\mathrm{d}s$, onda njegov volumen možemo napisati kao umnožak njegovog oplošja $2s\pi h$ i debljine stijenke,

$$\mathrm{d}V = 2s\pi h \, \mathrm{d}s = 2s\pi H(1 - s/R) \, \mathrm{d}s.$$

Volumen stošca dobivamo integralom

$$V = \int \mathrm{d}V = \int_0^R 2s\pi H(1 - s/R) \, \mathrm{d}s = \cdots = \frac{1}{3} R^2 \pi H,$$

što je poznati rezultat iz geometrije, a omogućuje nad da volumnu gustoću mase stošca izrazimo kao

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{R^2 \pi H}.$$

Sada možemo pristupiti integriranju momenta tromosti,

$$I = \int_0^R s^2 \, \frac{3M}{R^2 \pi H} \, 2s\pi H(1 - s/R) \, \mathrm{d}s = \cdots = \frac{3}{10} M R^2.$$

Rješenje: $I = 3MR^2/10$

5 Zadatak: Tanka homogena vodoravna greda mase m oslonjena je na dva oslonca koji se nalaze pod samim krajevima grede. U nekom trenutku jedan se od oslonaca naglo ukloni i greda se počne gibati. Odredi silu kojom preostali oslonac djeluje na gredu u trenutku netom nakon što je jedan solonac uklonjen.

Postupak: Netom nakon uklanjanja oslonca pod jednim krajem grede, gibanje grede možemo shvatiti kao njenu vrtnju oko suprotnog kraja. Jednadžbu gibanja za vrtnju grede duljine ℓ oko njenog kraja možemo napisati kao

$$I\alpha = M,$$

gdje je $I = m\ell^2/3$ moment tromosti u odnosu na os koja prolazi krajem grede, α je iznos kutne akceleracije, a $M = mg(\ell/2)$ je iznos momenta gravitacijske sile u odnosu na kraj grede. Slijedi

$$\alpha = \frac{3g}{2\ell}.$$

Prema tome je iznos akceleracije središta mase

$$a_{\rm cm} = \alpha\,\frac{\ell}{2} = \frac{3g}{4}.$$

S druge strane, jednadžbu gibanja središta mase može se napisati kao

$$ma_{\rm cm} = mg - F,$$

gdje je F iznos sile u osloncu. Izjednačavanjem akceleracije središta mase dobivene iz dviju jednadžbi gibanja slijedi

$$F = mg - ma_{\rm cm} = mg\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{mg}{4}.$$

Rješenje: $F = mg/4$

6 Zadatak: Neposredno nakon što je primila udarac štapom, homogena bilijarska kugla se giba kližući po vodoravnoj podlozi brzinom iznosa $v_0 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ bez vrtnje. Odredi duljinu puta koji kugla prevali od trenutka u kojem primi udarac do trenutka u kojem nastupi kotrljanje bez klizanja ako je faktor trenja između kugle i podloge $\mu = 0.1$.

Postupak: Sila trenja uslijed klizanja kugle po podlozi dovodi do vrtnje kugle oko vodoravne osi okomite na smjer gibanja. Istovremeno, ta sila usporava gibanje središta mase kugle. Sila trenja nestaje u trenutku u kojem se zadovoljava uvjet kotrljanja bez klizanja; Kutna brzina vrtnje kugle više ne raste, a brzina središta mase više se ne smanjuje. Postavimo li koordinatni sustav tako da x-os gleda u smjeru gibanja, a y os gleda uvis, jednadžba gibanja središta kugle glasi u vremenskom intervalu od trenutka t_0 kada je kugla primila udarac do trenutka t_1 kada klizanje prestaje, jednadžba gibanja središta mase glasi

$$ma_x = -F_{\mathrm{tr.}} = -\mu m g,$$

gdje je m masa kugle, a $F_{\mathrm{tr.}} = \mu m g$ je iznos sile trenja. Tome odgovara brzina središta mase

$$v_x[t] = v_x[x_0] + a(t - t_0) = v_0 - \mu g(t - t_0),$$

odnosno položaj

$$x[t] = x[t_0] + v_0(t - t_0) - \frac{\mu g}{2}(t - t_0)^2.$$

Jednadžba gibanja za vrtnju kugle oko osi kroz njeno središte glasi

$$I^* \alpha_z = M_z = -RF_{\mathrm{tr.}} = -R\mu m g,$$

gdje je $I^* = \frac{2}{5}mR^2$ moment tromosti homogene kugle mase m i polumjera R u odnosu na os kroz njeno središte. Tome odgovara kutna brzina

$$\omega_z[t] = \omega_z[t_0] + \alpha_z(t - t_0) = -\frac{R\mu m g}{I^*}(t - t_0) = -\frac{5\mu g}{2R}(t - t_0).$$

Klizanje kugle prestaje u trenutku $t = t_1$ u kojem se zadovoljava uvjet kotrljanja bez klizanja,

$$v_x[t_1] = -\omega_z[t_1]R,$$

odnosno

$$v_0 - \mu g(t_1 - t_0) = \frac{5\mu g}{2}(t_1 - t_0),$$

iz čega slijedi

$$t_1 - t_0 = \frac{2v_0}{7\mu g}.$$

Prevaljeni put od trenutka t_0 do trenutka t_1 je

$$s = x[t_1] - x[t_0] = v_0\,\frac{2v_0}{7\mu g} - \frac{\mu g}{2}\left(\frac{2v_0}{7\mu g}\right)^2 = \frac{12v_0^2}{49\mu g}.$$

Za zadane vrijednosti $s \simeq 1\,\mathrm{m}$.

Rješenje: $s = 12v_0^2/(49\mu g) \simeq 1\,\mathrm{m}$

7 Zadatak: Dva sitna tijela kojima su mase m_1 i m_2 pričvršćena su na krajevima tankog homogenog štapa duljine L i mase M. Na kojoj udaljenosti od kraja štapa na kojem se nalazi tijelo mase m_1 prolazi os okomita na štap, a u odnosu na koju čitav sustav ima najmanji moment tromosti?

Postupak: Moment tromosti štapa u odnosu na os koja je okomita na štap i prolazi njegvim središtem mase (polovištem) je

$$I^* = \frac{1}{12}ML^2.$$

Primjenom teorema o paralelnim osima računamo moment tromosti štapa u odnosu na paralelnu os udaljenu a od njgova kraja,

$$I[a] = M\left(\frac{L}{2} - a\right)^2 + I^*,$$

a dodamo li mase na njegove krajeve, moment tromosti je

$$\begin{aligned} I_{12}[a] &= I[a] + m_1 a^2 + m_2(L-a)^2 \\ &= (M + m_1 + m_2)a^2 - (M + 2m_2)La + \frac{1}{3}(M + 3m_2)L^2 \end{aligned}$$

Minimum gornjeg momenta tromosti nalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} I_{12}[a] = 2(M + m_1 + m_2)a - (M + 2m_2)L,$$

iz čega slijedi

$$a = \frac{(M + 2m_2)L}{2(M + m_1 + m_2)}.$$

Rješenje: $a = (M/2 + m_2)L/(M + m_1 + m_2)$

8 Zadatak: Preko koloture koju možemo smatrati homogenim diskom polumjera R i mase M i koji se može bez otpora okretati oko nepomične vodoravne osi prebačena je nerastezljiva nit zanemarive mase na čijim su krajevima utezi masa m_1 i m_2. Pustimo li sustav u gibanje nit pokreće koloturu pri čemu ne dolazi do proklizavanja. Odredi napetost onog dijela niti na kojem visi masa m_1.

Postupak: Postavimo li koordinatni sustav tako da vodoravna x-os gleda udesno, y-os gleda uvis, a os vrtnje koloture se podudara sa z-osi jednadžbe gibanja utega glase

$$m_1 a_{1y} = T_1 - m_1 g, \qquad m_2 a_{2y} = T_2 - m_2 g,$$

gdje su $T_{1,2}$ napetosti dijelova niti na kojima utezi vise. Uzimajući da tijelo mase m_1 visi s lijeve strane jednadžbu gibanja za vrtnju koloture možemo napisati kao

$$I^* \alpha_z^* = M_{1z}^* + M_{2z}^* = RT_1 - RT_2 = R(T_1 - T_2),$$

gdje je $I^* = MR^2/2$ moment tromosti homogenog diska u odnosu na os. S obzirom na uvjet nerastezljivosti niti te na uvjet da nit ne proklizuje po koloturi imamo

$$-a_{1y} = R\alpha_z^* = a_{2y}.$$

Eliminacijom $a_{1,2}$, α, I^* i T_2 iz gornjih jednadžbi slijedi

$$T_1 = \frac{Mm_1 + 4m_1 m_2}{M + 2m_1 + 2m_2}\, g.$$

Rješenje: $T_1 = (Mm_1 + 4m_1 m_2)g/(M + 2m_1 + 2m_2)$

9 Zadatak: Tanki homogeni štap duljine ℓ i mase M na čijem je jednom kraju pričvršćena čestica mase m vrti se kutnom brzinom iznosa ω oko čvrste osi koja prolazi njegovim polovištem. Čestica je zatim malom eksplozijom izbačena sa štapa u smjeru okomitom na štap i na os, nakon čega se štap nastavlja vrtjeti oko nepromijenjene osi u nepromijenjenom smjeru, ali kutnom brzinom dvostruko većeg iznosa. Odredi iznos brzine čestice u odnosu na kraj štapa netom nakon eksplozije.

Postupak: Riječ je o vrtnji štapa i čestice oko čvrste osi bez prisustva vanjskih sila pa zaključujemo da je projekcija kutne količine gibanja na tu os očuvana veličina. Koordinatni sustav postavljamo tako da se z-os podudara s osi vrtnje te tako da se u trenutku eksplozije kraj štapa s česticom mase m nalazi na pozitivnoj strani x-osi. Takvim smo izborom osigurali da neposredno prije eksplozije, te nakon nje, čestica mase m ima isključivo y-komponentu brzine različitu od nule. Neposredno prije eksplozije, pišući kutnu brzinu štapa kao $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k}$, gdje je iznos $\omega = |\omega_z|$ zadana veličina, zatim pišući položaj kraja štapa s masom m kao $\mathbf{r} = (\ell/2)\mathbf{i}$ te njegovu brzinu kao $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, ukupna kutna količina gibanja je

$$\mathbf{L} = I^*\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = I^*\omega_z\mathbf{k} + (\ell/2)\mathbf{i} \times m(\omega_z\mathbf{k} \times (\ell/2)\mathbf{i}) = (I^* + m\ell^2/4)\omega_z\mathbf{k},$$

gdje je $I^* = M\ell^2/12$ moment tromosti štapa u odnosu na os koja prolazi njegovim polovištem. Očivana z-komponenta ukupne kutne količine gibanja slijedi kao

$$L_z = \frac{M + 3m}{12}\,\ell^2\omega_z.$$

Netom nakon eksplozije imamo

$$\mathbf{L}' = I^*\boldsymbol{\omega}' + \mathbf{r} \times m\mathbf{v}',$$

gdje je $\boldsymbol{\omega}'$ kutna brzina štapa, a brzinu čestice $\mathbf{v}'$ možemo napisati kao

$$\mathbf{v}' = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r} + \mathbf{u}',$$

gdje je $\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r} = (\omega'_z\ell/2)\mathbf{j}$ brzina kraja štapa, a $\mathbf{u}' = u'_y\mathbf{j}$ je tražena brzina čestice u odnosu na kraj štapa. Za z-komponentu dobivamo

$$L'_z = \frac{M + 3m}{12}\omega'_z + \frac{m\ell}{2}u'_y,$$

a na osnovu očuvanja, $L_z = L'_z$, imamo

$$u'_y = (M/m + 3)\ell(\omega_z - \omega'_z)/6.$$

Ovdje imamo $\omega'_z = 2\omega_z$, te iznos vektora slijedi kao

$$u' = |u'_y| = (M/m + 3)\ell\omega/6.$$

Rješenje: $u' = (M/m + 3)\ell\omega/6$