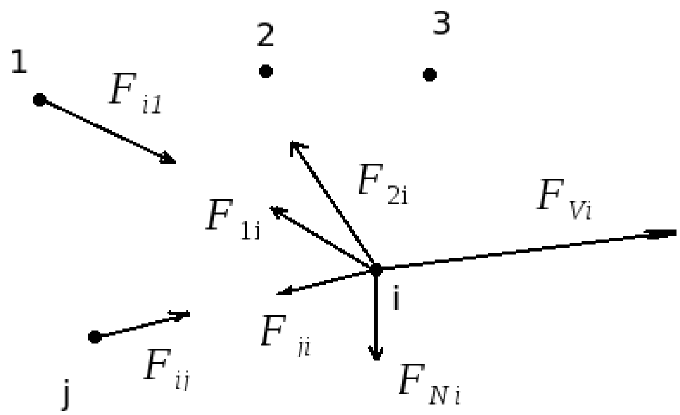
SUSTAV MATERIJALNIH TOČAKA



$m_1\vec{a}_1=\vec{F}_{V1}+\vec{F}_{21}+\vec{F}_{21}+.....\vec{F}_{N1}$
$m_2\vec{a}_2=\vec{F}_{V2}+\vec{F}_{12}+\vec{F}_{32}+.....\vec{F}_{N2}$
$m_n\vec{a}_n=\vec{F}_{VN}+\vec{F}_{1N}+\vec{F}_{2N}+...\vec{F}(n-1)N$
$\sum_{i=1}^{n} a_1\vec{a}_i=\sum_{I=1}^{N}\vec{F}_{Vi}+F_{12}+\vec{F}_{21}+...+F_{\overrightarrow{(N-1)N}}+F_{\overrightarrow{nN-1}}=0$ sile se ponište
$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{Vi}=\vec{F}_v$
$\sum_{ij=1}^{N}\vec{F}_{ij}=0 \quad (\quad i\neq j \quad)$

$\boxed{\vec{F}_v=M\vec{a}}$

CENTAR MASE

- želimo definirati fiktivnu točku u prostoru u kojoj će biti sadržana masa M koja se ponaša kao točka
- treba odrediti di se ta točka nalazi (centar mase)

$\vec{r_{CM}}=?$
1. $m_1 \quad (x_{1,}y_{1,}z_1)$
2. $m_2 \quad (x_{2,}y_{2,}z_2)$
3. ....

$x_{CM}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+....+m_nx_n}{M}$
$M=\sum_{i=1}^{N} m_i$

$$x_{cm}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M}$$

$$y_{cm}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M}$$

$$z_{cm}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M}$$

- točki sustava pridružimo neku točku koja ovisi o broju čestica i masi svake čestice

$$\vec{r_{CM}}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}$$

- uzmemo da imamo N čestica u homogenom polju $\vec{g}=konst.$

$U=\sum_{i=1}^{N} m_i z_i g=g\sum_{i=1}^{N} m_i z_i=M z_{CM} g$ - gravitacijska potencijalna energija

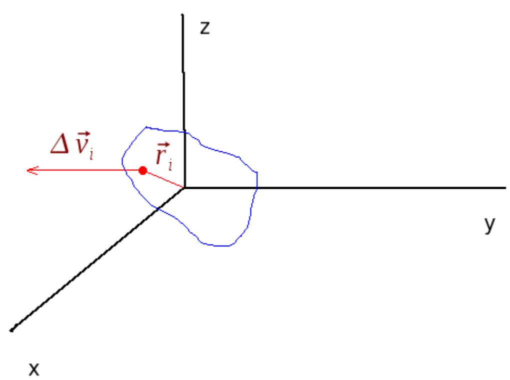
- ako skoči u zrak neko tijelo isto je kao da centar mase skoči
- kruto tijelo (ne da se deformirati, udaljenost između čestica je konstantan)

GUSTOĆA

GUSTOĆA = $\rho(\vec{r})$

$$M=\int_V (\vec{r})\,dV$$

$$dm=SdV$$



-podijelimo volumen na N dijelova , svaki dio ima volumen ΔV_i i masu $\Delta m_i=\rho\,\Delta V_i$

$$\vec{r_{CM}}\approx\frac{\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{r_{CM}}=\frac{1}{M}\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\Delta m_i=\frac{1}{M}\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\rho_i\Delta V_i=\int_V \vec{r}\,\rho\,dV$$

$$\vec{r_{Cm}}=\frac{1}{M}\int_V \vec{r}\,\rho\,dV$$

$$x_{CM}=\frac{1}{M}\int_V x\,\rho\,dV$$

$$\rho=konst$$

$$x_{CM}=\frac{1}{\rho V}\rho\int_V x\,dV$$

$$x_{CM}=\frac{\int_V xdV}{V}$$

- ako je masa simetrično raspoređena oko točke onda je ta točka centar mase
- ako je oko pravca onda je točka negdje na pravcu
- ako imamo homogeni štap onda je na sredini štapa centar

GIBANJE CENTRA MASE

$$\vec{r_{CM}}\approx\frac{\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i\vec{r}_i}{M}$$

$M\vec{r_{CM}}=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i$ - deriviramo po vremenu

$$M\frac{d\vec{r_{CM}}}{dt}=M\vec{v_{CM}}=\vec{p_{CM}}=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i$$

$$\vec{v_{CM}}=\frac{\sum_{i=1}^{N}m_i v_i}{M}\qquad \vec{p_{CM}}=\sum_{I=1}^{N}m_i\vec{v}_i$$

$$M\frac{d\vec{v_{CM}}}{dt}=M\vec{a_{CM}}=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{a}_i=\vec{F}_V$$

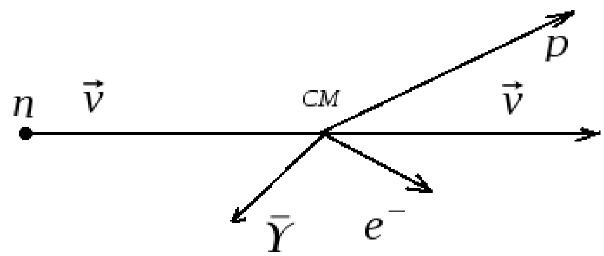
$M\vec{a_{CM}}=\vec{F}_v$ - svodi se na rješavanje jednadžbe gibanja za centar mase

Centar mase sustava giba se kao da je u njemu koncentrirana ukupna masa sustava i kao da sve vanjske sile djeluju u toj točki

$\vec{F}_V = 0$

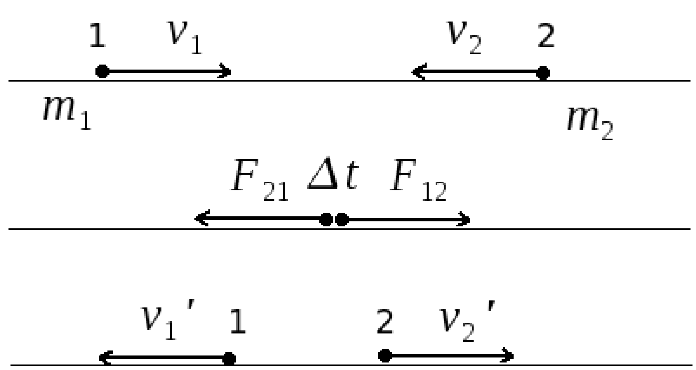
$\vec{v_{CM}} = konsts$

- ako je rezultanta svih vanjskih sila = 0 centar mase ili miruje ili se giba konstantnom brzinom po pravcu



ZAKON OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA

- gledamo izolirani sustav čestica



$\vec{F}_v = 0$

- čestica 1 dobije impuls sile

$\vec{I}_1 = \vec{F}_{21} \Delta t \qquad \vec{I}_1 = \Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \vec{p}_1$

$\vec{I}_2 = \vec{F}_{12} \Delta t \qquad \vec{I}_2 = \Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_2' - \vec{p}_2$

$\vec{I}_1 = \vec{F}_{21} \Delta t = -\vec{F}_{12} \Delta t = -\vec{I}_2$

$\vec{I}_1 = \Delta \vec{p}_1 = -\vec{I}_2 = -\Delta \vec{p}_2$

$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$

$m_1 \vec{v}_1' - m_2 \vec{v}_1 = -(m_2 \vec{v}_2' - m_2 \vec{v}_2)$

$m_1 \vec{v} + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$

– ako uzmemo N čestica

$$\vec{F}_v = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \frac{d}{dt}\sum m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum \vec{p}_i \quad =1 \quad \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_1 = konst$$

– ukupna količina gibanja zatvorenog sustava konstantna je bez obzira na to kakvi se procesi i međudjelovanja događaju u sustavu.

SUDARI

– centralni sudari (vektori brzina prije i poslije sudara nalaze se na istom pravcu
– elastični (pretpostavlja se da je sačuvana i kinetička energija)
– ne elastični (sraz, čestice se spoje, kinetička energija nije očuvana)

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 v_1^{'} + m_2 v_2^{'} \quad (*)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^{'2}}{2} + \frac{m_2 v_2^{'2}}{2} \quad (**)$$

(xx) $m_1(v_1^2 - v_1^{'2}) = m_2(v_2^2 - v_2^{'2})$

$$v_1^2 \cdot v_1^{'2} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_1^{'2}) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_1^{'2})$$

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1^{'}) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_1^{'}) = m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_2^{'}) \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_2^{'})$$

(x) $m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1^{'}) = m_2(\vec{v}_2^{'} - \vec{v}_2)$

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1^{'}) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_1^{'}) = m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1^{'}) \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_2^{'})$$

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_1^{'}) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_1^{'} - \vec{v}_2^{'} \cdot \vec{v}_2) = 0$$

ili je $\vec{v}_1 - \vec{v}_1^{'} = 0$ - znači da sudara nije ni bilo pa nije dobro

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_1^{'} - \vec{v}_2^{'} - \vec{v}_2 = 0$$

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -(\vec{v}_1^{'} - \vec{v}_2^{'}) \quad (***)$$

– relativna brzina primicanja kuglica prije sudara jednaka je po iznosu a suprotna po smjeru relativnoj brzini odmicanja kuglica poslije sudara
– relativne brzine promijenile su samo smjer a ne iznos
– ako je $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ tada nema sudara

(x) + (***) sa dvije jednadžbe i 2 nepoznanice izračunati brzine koje čestice imaju poslije sudara

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1} \text{ ' } m_2$$

provjera

1. $m_1 = m_2 = m$

$$\vec{v}_2 = 0 \qquad \vec{v}_1 //$$

$$\vec{v}_1' = 0 \qquad \vec{v}_2' = \frac{2m\vec{v}_1}{2\text{m}} = \vec{v}_1$$

2. $m_1 \ll m_2$

$$\frac{m_1}{m_2} \ll 1 \qquad \vec{v}_1 \vec{v}_2 = 0$$

$$\vec{v}_1' = \frac{(\frac{m_1}{m_2} - 1)\vec{v}_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} = \vec{v}_1 \qquad \vec{v}_2 = \frac{2\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = 0$$

3. $m_1 \gg m_2 \qquad \vec{v}_2 = 0 \qquad \vec{v}_1$

$$\vec{v}_1' = \frac{(1 - \frac{m_2}{m_1})\vec{v}_1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \vec{v}_1 \qquad \vec{v}_2' = \frac{2\vec{v}_1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = 2\vec{v}_1$$

SAVRŠENO NEELASTIČAN SRAZ

– naći brzinu tijela koje nastaje sljepljivanjem dva početna tijela

$$m_1 \qquad m_2 \qquad \vec{v}_1 \qquad \vec{v}_2$$

konačno: $(m_1 + m_2) \qquad \vec{v} = ?$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

$$v' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$q = E_{KK} - E_{KP}$$

$$q = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}^2 - (\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2}) = \frac{1}{2}(m_2 + m_2)\cdot(\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2})^2 - (\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2})$$

$$=\frac{1}{2}\cancel{(m_2+m_2)}\cdot(\frac{m_1^2\vec{v}_1{}^2+2m_1\vec{v}_1m_2\vec{v}_2+m_2^2\vec{v}_2{}^2}{(m_1+m_2)^2})-(\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1{}^2+\frac{1}{2}m_2\vec{v}_2{}^2)$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{\cancel{m_1^2\vec{v}_1{}^2}+2m_1\vec{v}_1m_2\vec{v}_2+\cancel{m_2^2\vec{v}_2{}^2}-\cancel{m_1^2\vec{v}_1{}^2}-m_1m_2\vec{v}_2{}^2-m_1m_2\vec{v}_1{}^2-\cancel{m_2^2\vec{v}_2{}^2}}{m_1+m_2}]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{2m_1\vec{v}_1m_2\vec{v}_2-m_1m_2\vec{v}_2{}^2-m_1m_2\vec{v}_1{}^2}{m_1+m_2}]=\frac{1}{2}-(m_1+m_2)(\vec{v}_2{}^2-2\vec{v}_1\vec{v}_2+\vec{v}_1{}^2)$$

$$\boxed{=\frac{-m_1m_2}{2\mathrm{m}_1+m_2}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2}$$

SUDARI IZ CENTRA MASE

m_1 $\vec{v}_1$ m_2 $\vec{v}_2$

- prilikom sudara brzina centra mase se ne mijenja

$$v_{\vec{CM}}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{v}_1=\vec{v}_1+v_{\vec{CM}}$$

$$\vec{v}_2=\vec{v}_2+v_{\vec{CM}}$$

$$\vec{v}_1=\vec{v}_1-v_{\vec{CM}}$$

$$\vec{v}_2=\vec{v}_2-v_{\vec{CM}}$$

- ukupna količina gibanja u sustavu centru mase je jednaka 0

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=m_1\vec{v}_1-m_1v_{\vec{CM}}+m_2\vec{v}_2-m_2v_{\vec{CM}}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2-(m_1+m_2)v_{\vec{CM}}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2-m_1\vec{v}_2-m_2\vec{v}_2=0$$

- izraziti kinetičku energiju čestica u laboratorijskom sustavu preko sustava centra mase

$E_k=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=¿$ (iskoristimo svojstvo i ukupnu količinu gibanja u sustavu centre mase)

$$¿\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{CM}^2+\frac{1}{2}m_1v_1^2m_2v_2^2$$

- razložiti na kinetičku energiju centra mase i kinetička energija čestica u odnosu na centar mase

- sad v_1 prikažemo sa relacijom za brzinu centra mase $v_1=v_2$ i uvrstimo za E_k i dobijemo

$$E_k=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{\vec{CM}}^2+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2$$

- ako je sudar ne elastičan onda je drugi dio maksimalna količina energije koja se može promijeniti (dvije čestice mogu izgubiti) i to je jednako relaciji za Q