Zadaci za vježbu, četvrti dio

1 Zadatak: Čestica mase m se giba u polju privlačne centralne sile (npr. gravitacijske sile). Neka su r_1 i r_2 najmanja i najveća udaljenost od centra sile koje čestica postiže tokom gibanja, a v_2 neka je iznos brzine čestice u trenutku u kojem se ona nalazi na udaljnosti r_2. Odredi rad koji centralna sila obavi nad česticom od trenutka u kojem se čestica nalazi na udaljenosti r_2 do trenutka u kojem se ona nalazi na udaljenosti r_1.

Postupak: Prema teoremu o radu i kinetičkoj energiji obavljeni rad jednak je promjeni kinetičke energije čestice,

$$W = (E_{\text{kin.}})_1 - (E_{\text{kin.}})_2 = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2),$$

gdje je v_1 za sada nepoznat iznos brzine čestice u trenutku u kojem se ona nalazi na udaljnosti r_1. Iznos brzine v_1 odredit ćemo na osnovu očuvanja kutne količine gibanja čestice u polju centralne sile,

$$L = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = |\mathbf{r} \times (m\mathbf{v})| = konst.$$

S obzirom da je u trenutku kada se čestica nalazi bilo na najmanjoj bilo na najvećoj udaljenosti od centra sile njena brzina $\mathbf{v}$ okomita na vektor $\mathbf{r}$, vrijedi

$$L = mr_1v_1 = mv_2r_2,$$

iz čega slijedi

$$v_1 = \frac{r_2}{r_1}v_2.$$

Obavljeni rad slijedi kao

$$W = \frac{mv_2^2}{2}\left((r_2/r_1)^2 - 1\right).$$

Rješenje: $W = mv_2^2\left((r_2/r_1)^2 - 1\right)/2$

2 Zadatak: Dvije zvijezde se gibaju po kružnim orbitama oko središta mase čitavog sustava brzinama stalnih iznosa v_1 i v_2. Polumjer jedne od orbita je r_1. Odredite polumjer druge orbite i mase obiju zvijezda. (Rezultate izrazi preko v_1, v_2 i r_1.)

Postupak: Iz jednakosti perioda slijedi polumjer orbite druge zvijezde,

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{2\pi r_2}{v_2}, \qquad r_2 = \frac{v_2}{v_1} r_1.$$

Centripetalna sila odgovorna za kružno gibanje zvijezda realizirana je njihovim međusobnim gravitacijskim privlačenjem,

$$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = G_\mathrm{N} \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{m_2 v_2^2}{r_2},$$

iz čega slijedi

$$m_{1,2} = \frac{(r_1 + r_2)^2}{G_\mathrm{N}} \frac{v_{2,1}^2}{r_{2,1}},$$

odnosno uz korištenje izraza za r_2,

$$m_1 = \frac{r_1 v_2}{G_\mathrm{N} v_1} (v_1 + v_2)^2, \qquad m_2 = \frac{r_1}{G_\mathrm{N}} (v_1 + v_2)^2.$$

Rješenje: $r_2 = v_2 r_1 / v_1$, $m_1 = r_1 (v_2/v_1)(v_1 + v_2)^2 / G_\mathrm{N}$, $m_2 = r_1 (v_1 + v_2)^2 / G_\mathrm{N}$

3 Zadatak: Odredi jakost gravitacijskog polja u točki koja se nalazi na osi tankog homogenog diska mase M i polumjera R na udaljenosti z od njegova središta.

Postupak: Jakost gravitacijskog polja $\mathbf{g}$ dobit ćemo s pomoću općenitih relacija

$$\mathbf{g}[\mathbf{r}] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{r}}\Phi[\mathbf{r}], \qquad \Phi[\mathbf{r}] = -G_\mathrm{N}\int \frac{\mathrm{d}m}{r'},$$

gdje je Φ gravitacijski potencijal, a r' je udaljenost elementa mase $\mathrm{d}m$ od točke $\mathbf{r}$. Element mase diska oblika prstena polumjera s i širine $\mathrm{d}s$ može se napisati kao umnožak površinske gustoće mase $\sigma = M/(R^2\pi)$ i elementa površine $\mathrm{d}S = 2s\pi\,\mathrm{d}s$,

$$\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S = \frac{M}{R^2\pi}\,2s\pi\,\mathrm{d}s = \frac{2M}{R^2}\,s\,\mathrm{d}s,$$

dok je udaljenost od prstena do točke na osi diska koja je udaljna z od njegova središta

$$r' = \sqrt{s^2+z^2}.$$

Potencijal u točkama na osi diska računamo integrirajući po svim prstenovima od kojih se disk sastoji,

$$\Phi[z] = -G_\mathrm{N}\frac{2M}{R^2}\int_0^R \frac{s\,\mathrm{d}s}{\sqrt{s^2+z^2}} = -G_\mathrm{N}\frac{2M}{R^2}\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right).$$

Gravitacijsko polje na osi diska ima, zbog simetrije, isključivo komponentu u smjeru same osi, a na udaljenosti z od središta diska jakost polja slijedi kao

$$g[z] = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Phi[z]\right| = G_\mathrm{N}\frac{2M}{R^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+(R/z)^2}}\right).$$

Rješenje: $g[z] = 2MG_\mathrm{N}R^{-2}\big(1-1/\sqrt{1+(R/z)^2}\big)$

4 **Zadatak:** U automobilu koji se kreće duž zavoja brzinomjer pokazuje stalan iznos brzine $v = 100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, a dinamometar na kojem "mirno" visi uteg mase $m = 1\,\mathrm{kg}$ pokazuje silu iznosa $F = 12\,\mathrm{N}$. Odredi polumjer zakrivljenosti zavoja. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Jednadžba gibanja tijela mase m u neinercijalnom referentnom sustavu $\mathcal{S}'$ koji akcelerira akceleracijom $\mathbf{A}$ u odnosu na inercijalni referentni sustav $\mathcal{S}$ općenito glasi

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{A},$$

gdje je $\mathbf{a}'$ akceleracija u sustavu $\mathcal{S}'$, $\mathbf{F}$ je stvarna sila koja djeluje na česticu, a član $-m\mathbf{A}$ se naziva pseudosilom. Ovdje sustav $\mathcal{S}'$ vezujemo uz automobil čija je akceleracija usmjerena prema središtu zakrivljenosti zavoja, iznos akceleracije je $A = v^2/R$, a R je polumjer zakrivljenosti zavoja. Postavimo li koordinatni sustav tako da je x'-os vodoravna i gleda prema središtu zakrivljenosti zavoja, a y'-os je uspravna i usmjerena prema gore, imamo

$$\mathbf{A} = \frac{v^2}{R}\,\mathbf{i},$$

dok stvarnu silu na tijelo koja se sastoji od napetosti dinamometra i gravitacijske sile pišemo kao

$$\mathbf{F} = T(\cos\alpha\,\mathbf{j} + \sin\alpha\,\mathbf{i}) - mg\,\mathbf{j},$$

gdje je α kut koji dinamometar zatvara s uspravnim pravcem. S obzirom da masa u automobilu mirno visi imamo $\mathbf{a}' = 0$ te se jednadžba gibanja svodi na vektorsku jednadžbu

$$0 = T(\cos\alpha\,\mathbf{j} + \sin\alpha\,\mathbf{i}) - mg\,\mathbf{j} - \frac{mv^2}{R}\,\mathbf{i},$$

odnosno raspisano po komponentama

$$\frac{mv^2}{R} = T\sin\alpha, \qquad mg = T\cos\alpha.$$

Eliminacijom kuta α slijedi

$$R = \frac{mv^2}{T\sin\alpha} = \frac{mv^2}{T\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{mv^2}{T\sqrt{1-(mg/T)^2}} = \frac{mv^2}{\sqrt{T^2-(mg)^2}}.$$

Za zadane vrijednosti

$$R \simeq 111.6\,\mathrm{m}.$$

Rješenje: $R = mv^2/\sqrt{T^2-(mg)^2} \simeq 111.6\,\mathrm{m}$

5 Zadatak: Saonice klize niz kosinu uz faktor trenja μ, a u saonicama na niti "mirno" visi sitno tijelo. Odredi tangens kuta koji nit zatvara s okomicom na kosinu.

Postupak: Ako je α kut koji kosina zatvara s vodoravnom ravninom onda je iznos akceleracije saonica koje uz koeficijent trenja μ klize niz kosinu

$$A = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

U referentnom sustavu $\mathcal{S}'$ vezanom uz saonice uvodimo koordinatni sustav tako da x'-os gleda u smjeru relativnog gibanja saonica u odnosu na kosinu, a y' os je okomita na kosinu i gleda prema gore. Jednadžba gibanja tijela mase m u tom sustavu glasi

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{A} = \mathbf{F} - mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\mathbf{i} = 0,$$

gdje je $\mathbf{F}$ stvarna sila koja djeluje na tijelo, a s obzirom da tijelo mrno visi u saonicama imamo $\mathbf{a}' = 0$. Stvarna sila $\mathbf{F}$ se ovdje sastoji od napetosti niti T na kojoj tijelo visi te od gravitacijske sile. Označimo li s β kut koji nit zatvara s y'-osi (okomicom na kosinu) možemo pisati

$$\mathbf{F} = T(-\sin\beta\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j}) + mg(\sin\alpha\,\mathbf{i} - \cos\alpha\,\mathbf{j}).$$

Uvrštavanjem u jednadžbu gibanja te raspisivanjem po komponentama slijedi

$$mg\mu\cos\alpha = T\sin\beta, \qquad mg\cos\alpha = T\cos\beta,$$

te dijeljenjem prve jednadžbe drugom slijedi

$$\mathrm{tg}\beta = \mu.$$

Rješenje: $\mathrm{tg}\beta = \mu$

6 Zadatak: Homogena kugla miruje na vodoravnoj podlozi koja u nekom trenutku počne ubrzavati akceleracijom iznosa A u vodoravnom smjeru. Odredi akceleraciju središta kugle u odnosu na mirni referentni sustav ako pri njenu gibanju ne dolazi do proklizavanja po podlozi.

Postupak: Akceleraciju središta mase kugle u odnosu na mirni (inercijalni) referentni sustav možemo napisati kao

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} + \mathbf{a}',$$

gdje je $\mathbf{a}'$ je akceleracija središta mase kugle u odnosu na ubrzani (neinercijalni) sustav vezan uz podlogu, a $\mathbf{A}$ je akceleracija podloge u odnosu na mirni sustav. Jednadžba gibanja čestice mase m u ubrzanom sustavu glasi

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{A},$$

gdje je $\mathbf{F}$ stvarna sila, a član $-m\mathbf{A}$ je tzv. pseudosila. Gibanje kugle mase M i polumjera R u danom trenutku možemo opisati kao vrtnju kugle oko vodoravne osi koja prolazi dodirnom točkom kugle i podloge, a okomita je na smjer relativnog gibanja podloge u odnosu na mirni sustav. Pritom u odnosu na odabranu os jedino pseudosila stvara moment sile te možemo pisati

$$I\alpha' = I\frac{a'}{R} = RMA,$$

gdje je α' iznos kutne akceleracije, a' je iznos akceleracije središta kugle, a

$$I = MR^2 + \frac{2}{5}MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$$

je moment tromosti kule određen s pomoću teorema o paralelnim osima. Slijedi

$$a' = \frac{5}{7}A.$$

S obzirom da kugla u referentnom sustavu podloge ubrzava "unazad" u odnosu na smjer u kojem podloga ubrzava u odnsou na mirni sustav, iznos akceleracije središta kugle u odnosu na mirni sustav možemo napisati kao

$$a = A - a' = \frac{2}{7}A.$$

Rješenje: $a = 2A/7$

7 Zadatak: Odredi iznos brzine i količine gibanja elektrona ubrzanog iz mirovanja razlikom električnog potencijala $U = 500\,\mathrm{kV}$. (Masa elektrona $m = 511\,\mathrm{keV}\,c^{-2}$.)

Postupak: Prolaskom kroz razliku potencijala U električna sila je ubrzavajući česticu mase m i naboja q obavila je rad $W = qU$ koji je, prema teoremu o radu i kinetičkoj energiji, jednak promjeni kinetičke energije čestice. S obzirom da je početna kinetička energija jednaka nuli imamo

$$W = q\,U = E_{\text{kin.}} = E - mc^2,$$

gdje je E relativistička energija čestice, a mc^2 je njena energija mirovanja. Koristeći izraz za relativističku energiju

$$E = \gamma mc^2, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta = \frac{v}{c},$$

slijedi

$$\gamma = 1 + \frac{qU}{mc^2}, \qquad \beta^2 = 1 - \left(\frac{mc^2}{mc^2 + qU}\right)^2,$$

odnosno

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{mc^2 + qU}\right)^2}.$$

Količinu gibanja možemo računati na osnovu relativističkog izraza $p = \gamma mv$, ili jednostavnije s pomoću opće relacije

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2,$$

iz koje dobivamo

$$p = \frac{qU}{c}\sqrt{1 + \frac{2mc^2}{qU}}.$$

Za elektron $q = e$ (elementarni naboj), te za zadane vrijednosti

$$v = 0.8629\,c, \qquad p = 872.3\,\mathrm{keV}\,c^{-1}.$$

Rješenje: $v = 0.8629\,c$, $p = 872.3\,\mathrm{keV}\,c^{-1}$

8 Zadatak: Putnička agencija oglasila je putovanje do zvijezde udaljene deset godina svjetlosti (D) koje za putnike prema njihovu vlastitu vremenu traje samo pet godina ($\Delta t'$). Odredi brzinu svemirskog broda s kojim bi se takvo putovanje moglo ostvariti.

Postupak: Neka je $\mathcal{S}$ referentni sustav u kojem polazište i odredište miruju, a $\mathcal{S}'$ neka je sustav vezan uz brod koji se u odnosu na $\mathcal{S}$ giba brzinom iznosa v. Koordinate polaska broda u sustavu $\mathcal{S}$ možemo napisati kao

$$x_0 = 0, \qquad t_0 = 0,$$

dok koordinate dolaska broda u odredište možemo napisati kao

$$x_1 = D, \qquad t_1 = \frac{D}{v},$$

gdje je D udaljenost između polazišta i odredišta. Koordinate tih događaja možemo napisati u sustavu $\mathcal{S}'$ s pomoću Lorenzovih transformacija,

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Koordinate polaska u sustavu $\mathcal{S}'$ su

$$x'_0 = 0, \qquad t'_0 = 0,$$

dok su koordinate dolaska u odredište

$$x'_1 = 0, \qquad t'_1 = \frac{D}{v}\sqrt{1-(v/c)^2}.$$

Prema vremenu u sustavu $\mathcal{S}'$ trajanje putovanja je

$$\Delta t' = t'_1 - t'_0 = \frac{D}{v}\sqrt{1-(v/c)^2},$$

što odgovara vlastitu vremenu putnika koji u tom sustavu miruje, odnosno trajanju putovanja kako je oglašeno. Slijedi da relativna brzina sustava $\mathcal{S}'$ u odnosu na sustav $\mathcal{S}$, odnosno brzina broda, mora biti

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{c\,\Delta t'}{D}\right)^2}}.$$

Za zadane vrijednosti $D = 10\,\mathrm{god}\,c$, $\Delta t' = 5\,\mathrm{god}$, dobivamo $v \simeq 0.894\,c$.

Rješenje: $v = c/\sqrt{1 + (c\,\Delta t'/D)^2} \simeq 0.894\,c$

9 Zadatak: U nekom se referentnom sustavu dva svemirska broda gibaju brzinama jednakih iznosa $v = 0.75\,c$, ali duž međusobno okomitih pravaca. Odredi iznos relativne brzine jednog broda u odnosu na drugi, odnosno, iznos brzine jednog broda u referentnom sustavu u kojem onaj drugi miruje.

Postupak: U referentnom sustavu $\mathcal{S}$ u kojem je gibanje opisano komponente vektora brzine prvog broda možemo napisati kao

$$u_{1x} = v, \qquad u_{1y} = u_{1z} = 0,$$

dok za drugi brod pišemo

$$u_{2x} = 0, \qquad u_{2y} = v, \qquad u_{2z} = 0.$$

Uvedemo li sustav $\mathcal{S}'$ koji se giba s prvim brodom, dakle brzinom iznosa v u smjeru x-osi, komponente vektora brzine ćemo dobiti s pomoću transformacija

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \qquad u'_{y,z} = \frac{u_{y,z}\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 - u_x v/c^2}.$$

Za prvi brod slijedi $u'_{1x} = u'_{1y} = u'_{1z} = 0$, a za drugi imamo

$$u'_{2x} = -v, \qquad u'_{2y} = v\sqrt{1-(v/c)^2}, \qquad u'_{2z} = 0.$$

Iznos brzine drugog broda u sustavu $\mathcal{S}'$ je

$$u'_2 = \sqrt{(u'_{2x})^2 + (u'_{2y})^2 + (u'_{2z})^2} = v\,\sqrt{2-(v/c)^2}.$$

Za zadane vrijednosti $u'_2 \simeq 0.899\,c$.

Rješenje: $u'_2 = v\,\sqrt{2-(v/c)^2} \simeq 0.899\,c$