Zadaci za vježbu, peti dio

1 Zadatak: Odredi temperaturu do koje je potrebno zagrijati zrak u balonu kako bi on lebdio ako je ukupna masa opreme i letača (ne računajući masu zraka u balonu) $m_\mathrm{b} = 600\,\mathrm{kg}$, volumen balona je $V_\mathrm{b} = 2800\,\mathrm{m}^3$, a temperatura vanjskog zraka je $T_0 = 20^\circ\mathrm{C}$. (Gustoća zraka pri temperaturi $20^\circ\mathrm{C}$ je $\rho_0 = 1.2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Tlak vrućeg zraka unutar balona jednak je atmosferskom tlaku.)

Postupak: Balon lebdi ako je njegova težina uravnotežena uzgonom u atmosferi. Težina balona se sastoji od težine same opreme i od težine zraka u balonu te njen iznos možemo napisati kao

$$G = m_\mathrm{b} g + \rho V_\mathrm{b} g,$$

gdje je ρ gustoća vrućeg zraka. Iznos sile uzgona je

$$F_\mathrm{u} = \rho_0 V_\mathrm{b} g,$$

gdje je ρ_0 gustoća vanjskog zraka. Gustoću zraka možemo općenito napisati kao

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{pM}{RT},$$

gdje smo njprije masu zraka m napisali kao produkt množine n i srednje molarne mase M, a zatim smo iskoristili jednadžbu stanja idealnog plina, $pV = nRT$. S obzirom da su ovdje vrući zrak unutar balona i vanjski zrak pri jednakom tlaku slijedi

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T_0}{T}.$$

Konačno, uvrštavanjem gornjeg omjera u $G = F_\mathrm{u}$ slijedi

$$m_\mathrm{b} g + \rho_0 \frac{T_0}{T} V_\mathrm{b} g = \rho_0 V_\mathrm{b} g,$$

odnosno

$$T = \frac{T_0}{1 - \frac{m_\mathrm{b}}{\rho_0 V_\mathrm{b}}},$$

što za zadane vrijednosti daje $T \simeq 357\,\mathrm{K} \simeq 83.7^\circ\mathrm{C}$.

Rješenje: $T = T_0/(1 - m_\mathrm{b}/\rho_0 V_\mathrm{b}) \simeq 83.7^\circ\mathrm{C}$.

2 Zadatak: Vaga na kojoj se nalazi posuda s vodom pokazuje vrijednost mase $m_1 = 3.8\,\mathrm{kg}$. Uronimo li u vodu kruto tijelo mase $m_\mathrm{t} = 1.1\,\mathrm{kg}$ obješeno o tanku nit tako da ono ne dodiruje dno posude, ali tako da bude u cijelosti potopljeno, vaga pokazuje vrijednost mase $m_2 = 4.2\,\mathrm{kg}$. Odredi gustoću krutog tijela. (Gustoća vode $\rho_\mathrm{v} = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.)

Postupak: Na uronjeno tijelo volumena V_t voda djeluje silom uzgona čiji je iznos

$$F_\mathrm{u} = \rho_\mathrm{v} V_\mathrm{t} g,$$

gdje je ρ_v gustoća vode. Na osnovu trećeg Newtonovog aksioma zaključujemo da silom istog iznosa, ali suprotnog smjera, tijelo djeluje na vodu. Stoga razlika u masama koje pokazuje vaga

$$m_2 - m_1 = \frac{1}{g} F_\mathrm{u} = \rho_\mathrm{v} V_\mathrm{t}.$$

Tražena gustoća tijela je

$$\rho_\mathrm{t} = \frac{m_\mathrm{t}}{V_\mathrm{t}} = \rho_\mathrm{v} \frac{m_\mathrm{t}}{m_2 - m_1},$$

što za za zadane vrijednosti daje $\rho_\mathrm{t} = 2750\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Rješenje: $\rho_\mathrm{t} = \rho_\mathrm{v} m_\mathrm{t}/(m_2 - m_1) = 2750\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$

3 Zadatak: U uspravno postavljenoj cilindričnoj posudi površine vodoravnog presijeka $S = 100\,\mathrm{cm}^2$ nalazi se voda na kojoj pluta komad stiropora, a na stiroporu se nalazi aluminijski uteg mase $m_{\mathrm{Al}} = 200\,\mathrm{g}$. U nekom se trenutku "čamac prevrne"; Uteg tone na dno posude, a stiropor ostaje plutati. Odredi za koliko se spustila razina vode u posudi. (Gustoća aluminija $\rho_{\mathrm{Al}} = 2.7\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, gustoća vode $\rho_{\mathrm{voda}} = 1.0\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$.)

Postupak: Plutajuće tijelo istiskuje volumen vode koji masom odgovara masi plutajućeg tijela. Prije "prevrtanja čamca" masa plutajućeg tijela je

$$m_1 = m_{\mathrm{st.}} + m_{\mathrm{Al}},$$

a tome odgovara volumen istisnute vode

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_{\mathrm{voda}}} = \frac{m_{\mathrm{st.}} + m_{\mathrm{Al}}}{\rho_{\mathrm{voda}}}.$$

Nakon "prevrtanja čamca" i potonuća utega volumen istisnute vode je zbroj volumena utega i volumena istisnutog plutajućim stiroporom,

$$V_2 = V_{\mathrm{Al}} + \frac{m_{\mathrm{st.}}}{\rho_{\mathrm{voda}}} = \frac{m_{\mathrm{Al}}}{\rho_{\mathrm{Al}}} + \frac{m_{\mathrm{st.}}}{\rho_{\mathrm{voda}}}.$$

Razlika volumena istisnute vode do koje dolazi "prevrtanjem čamca" je

$$\Delta V = V_2 - V_1 = m_{\mathrm{Al}} \left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{Al}}} - \frac{1}{\rho_{\mathrm{voda}}} \right),$$

a odgovarajuća razlika razine vode u posudi je

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{m_{\mathrm{Al}}}{S} \left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{Al}}} - \frac{1}{\rho_{\mathrm{voda}}} \right).$$

Za zadane vrijednosti $\Delta h \simeq -1.259\,\mathrm{cm}$.

Rješenje: $\Delta h = m_{\mathrm{Al}}(1/\rho_{\mathrm{Al}} - 1/\rho_{\mathrm{voda}})/S \simeq -1.259\,\mathrm{cm}$

4 Zadatak: Pri dnu cilindrične, uspravno postavljene, odozgo otvorene posude promjera $D = 0.4\,\mathrm{m}$ probušen je kružni otvor promjera $d = 1\,\mathrm{cm}$ kroz koji voda iz posude slobodno istječe u atmosferu. U početnom trenutku visina vode u posudi je $H_0 = 0.2\,\mathrm{m}$ iznad njezina dna. Odredi nakon koliko će vremena sva voda iz posude isteći. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Neka je h visina vode u posudi, $v_1 = -\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$ neka je iznos brzine spuštanja površine, a v_2 neka je iznos brzine istjecanja vode pri dnu posude. Jednadžba kontinuiteta $Sv = const.$ primijenjena pri površini vode u posudi i pri njenom dnu daje uvjet $S_1 v_1 = S_2 v_2$, gdje je $S_1 = D^2\pi/4$ i $S_2 = d^2\pi/4$, odnosno

$$v_1 = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{S_2}{S_1}\,v_2 = \frac{d^2}{D^2}\,v_2.$$

Nadalje, Bernoullijeva jednadžba $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = const.$ primijenjena pri površini vode u posudi (lijeva strana) i pri njenom dnu (desna strana) daje uvjet

$$p_{\mathrm{atm.}} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = p_{\mathrm{atm.}} + \frac{1}{2}\rho v_2^2,$$

gdje s obzirom na $v_1 \ll v_2$ zanemarujemo član s v_1^2 te dobivamo izraz za brzinu istjecanja kroz otvor pri dnu,

$$v_2 = \sqrt{2gh},$$

(što je tzv. Torricellijev zakon istjecanja). Slijedi

$$v_1 = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}.$$

Provodimo separaciju varijabli

$$-\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g}\,\mathrm{d}t,$$

a nakon integracije od početnog stanja ($t = 0$, visina vode $h = H$) do konačnog stanja ($t = T$, $h = 0$) imamo

$$-2\sqrt{h}\,\Big|_H^0 = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g}\,t\,\Big|_0^T,$$

iz čega slijedi trajanje istjecanja vode iz posude,

$$T = \frac{D^2}{d^2}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Za zadane vrijednosti $T \simeq 323.1\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $T = (D/d)^2\sqrt{2h/g} \simeq 323.1\,\mathrm{s}$

5 Zadatak: Odredi koeficijent viskoznosti meda ako je izmjereno da kuglica mase $m = 20\,\mathrm{g}$ i promjera $2r = 2\,\mathrm{cm}$ u posudi s medom tone brzinom stalnog iznosa $v = 2\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$, a gustoća ispitivanog meda iznosi $\rho_\mathrm{m} = 1.36\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Jednadžba gibanja kuglice mase m i volumena $V = \frac{4}{3}r^3\pi$ koja brzinom iznosa v vertikalno tone u fluidu gustoće ρ_m i viskoznosti η_m može se napisati kao

$$ma = mg - F_\mathrm{u} - F_\eta[v],$$

gdje je mg iznos gravitacijske sile na kuglicu,

$$F_\mathrm{u} = \rho_\mathrm{m} V g = 4\pi r^3 \rho_\mathrm{m} g/3$$

je iznos sile uzgona, a

$$F_\eta[v] = 6\pi\eta r v$$

je iznos tzv. Stokesove sile otpora pri sporom gibanju kugle kroz viskozni fluid. Kada kuglica tone brzinom stalnog iznosa njena je akceleracija jednaka nuli (sile su u ravnoteži) te iz gornjih jednadžbi slijedi

$$\eta = \frac{1}{v}\left(\frac{mg}{6\pi r} - \frac{2r^2\rho_\mathrm{m} g}{9}\right).$$

Za zadane vrijednosti $\eta \simeq 37.2\,\mathrm{Pa\,s}$.

Rješenje: $\eta = (mg/6\pi r - 2r^2\rho_\mathrm{m} g/9)/v \simeq 37.2\,\mathrm{Pa\,s}$

6 Zadatak: U stijenku uspravno postavljene, cilindrične, odozgo otvorene posude u kojoj se nalazi voda zabodemo medicinsku iglu kroz koju voda počne istjecati. Odredi vrijeme nakon kojeg će se razina vode u posudi nad iglom smanjiti na polovinu početne vrijednosti ako je promjer posude $2R = 10\,\mathrm{cm}$, unutarnji promjer igle je $2r = 0.6\,\mathrm{mm}$, a duljina igle je $\ell = 5\,\mathrm{cm}$. (Gustoća vode $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, viskozitet vode $\eta = 0.001\,\mathrm{Pa\,s}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Volumni tok tekućine viskoziteta η kroz (tanku) cijev duljine ℓ i promjera $2r$ opisan je tzv. Poiseuilleovim zakonom,

$$q_{\mathrm{V}} = \frac{\pi r^4}{8\eta\ell}\,\Delta p,$$

gdje je Δp razlika tlakova na jednom i na drgom kraju cijevi. Ovdje uzimamo da je riječ o razlici hidrostatskog tlaka $p_{\mathrm{atm.}} + \rho g h$ u posudi, gdje je h razina vode iznad igle, i atmosferskog tlaka $p_{\mathrm{atm.}}$ izvan posude, dakle

$$\Delta p = \rho g h.$$

Volumni tok vode kroz cijev se može povezati s promjenom volumena vode u posudi, $V = Sh$, odnosno, s brzinom spuštanja razine vode u posudi,

$$q_{\mathrm{V}} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Sh) = -S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t},$$

gdje je $S = R^2\pi$ površina presjeka posude. Slijedi

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{q_{\mathrm{V}}}{S} = -\frac{r^4\rho g h}{8\eta\ell R^2}.$$

Separacijom varijabli gornju diferencijalnu jednadžbu možemo napisati kao

$$\frac{\mathrm{d}h}{h} = -\frac{r^4\rho g}{8\eta\ell R^2}\,\mathrm{d}t,$$

te integracijom počevši od $h = H$ u trenutku $t = 0$ do $h = H/2$ u trenutku $t = T$ imamo

$$\ln h\,\Big|_H^{H/2} = -\frac{r^4\rho g}{8\eta\ell R^2}\,t\,\Big|_0^T,$$

odnosno,

$$T = \frac{8\eta\ell R^2\ln 2}{r^4\rho g}.$$

Za zadane vrijednosti $T \simeq 2.42\,\mathrm{h}$.

Rješenje: $T = 8\eta\ell R^2\ln 2/r^4\rho g \simeq 2.42\,\mathrm{h}$

7 Zadatak: Cilindrični uspravno postavljen spremnik za vodu ukupne visine $H = 5\,\mathrm{m}$ napunjen je vodom do visine $h_0 = 3\,\mathrm{m}$ u odnosu na dno, a u preostalom dijelu se nalazi zrak pri atmosferskom tlaku. Odredi visinu nad dnom spremnika do koje će se spustiti površina vode u spremniku ako pri dnu otvorimo maleni otvor, a spremnik je odozgo zatvoren. Pretpostavljamo da je temperatura zraka stalna. (Atmosferski tlak $p_0 = 101.325\,\mathrm{kPa}$, gustoća vode $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Voda će teći kroz otvor sve dokle je njen tlak s unutarnje strane otvora veći od atmosferskog tlaka s vanjske strane otvora, a prestat će teći kada (ako) se ti tlakovi izjednače. Tlak vode pri dnu spremnika možemo napisati kao zbroj tlaka zraka nad tekućinom i hidrostatskog tlaka,

$$p_\mathrm{v} = p_\mathrm{z} + \rho g h,$$

gdje je h visina površine vode nad dnom. Opišemo li zrak jednadžbom stanja idealnog plina, $pV = nRT$, s obzirom da pretpostavljamo da je njegova temperatura konstantna slijedi da je njegov tlak obrnuto razmjeran volumenu koji on zauzima. Nadalje, s obzirom da je volumen razmjeran visini koju stupac zraka zauzima u spremniku, možemo pisati

$$\frac{p_\mathrm{z}}{p_0} = \frac{V_0}{V_\mathrm{z}} = \frac{H - h_0}{H - h}.$$

Uvjet jednakosti tlaka s unutrašnje i s vanjske strane otvora, $p_\mathrm{v} = p_0$, vodi na

$$p_0 = p_0 \frac{H - h_0}{H - h} + \rho g h,$$

što je kvadratna jednadžba u varijabli h. Slijedi

$$h_{1,2} = \left(\frac{p_0}{2\rho g} + \frac{H}{2}\right)\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\rho g h_0/p_0}{(1 + \rho g H/p_0)^2}}\right).$$

Uočavamo da je h_1 (rješenje s pozitivnim predznakom ispred korijena) veće od $p_0/2\rho g$, što je visina stupca vode kada je nad njom vakuum, a to znači da h_1 ne predstavlja fizikalno rješenje razmatranog problema. Stoga kao rješenje odabiremo h_2 (negativni predznak ispred korijena) koje za zadane vrijednosti daje

$$h = \left(\frac{p_0}{2\rho g} + \frac{H}{2}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\rho g h_0/p_0}{(1 + \rho g H/p_0)^2}}\right) \simeq 2.396\,\mathrm{m}.$$

Rješenje: $h = (p_0/2\rho g + H/2)\left(1 - \sqrt{1 - (4\rho g h_0/p_0)/(1 + \rho g H/p_0)^2}\right) \simeq 2.396\,\mathrm{m}$

8 Zadatak: Odredi masu leda temperature $T_1 = -10°\mathrm{C}$ i masu vode temperature $T_2 = 20°\mathrm{C}$ čijim se miješanjem, po supostavi termodinamičke ravnoteže, dobiva $m_{\text{uk.}} = 10\,\mathrm{kg}$ vode temperature $T_{\text{kon.}} = 5°\mathrm{C}$. (Specifični toplinski kapacitet vode $c_{\text{voda}} = 4.20 \times 10^3\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, specifični toplinski kapacitet leda $c_{\text{led}} = 2.11 \times 10^3\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, specifična toplina taljenja leda $\ell_{\text{t}} = 3.34 \times 10^5\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$.)

Postupak: Promjenu topline toplije komponente sustava, a je ovdje voda mase m_{voda} i temperature T_2, pišemo kao

$$\Delta Q_2 = m_{\text{voda}} c_{\text{voda}} (T_{\text{kon.}} - T_2) < 0.$$

Promjena topline hladnije komponente je

$$\Delta Q_1 = m_{\text{led}} c_{\text{led}} (T_0 - T_1) + m_{\text{led}} \ell_{\text{t}} + m_{\text{led}} c_{\text{voda}} (T_{\text{kon.}} - T_0) > 0,$$

gdje prvi član na desnoj strani predstavlja toplinu potrebnu za zagrijavanje leda od početne temperature do temperature tališta $T_0 = 0°\mathrm{C}$, drugi član predstavlja toplinu taljenja leda, a treći član predstavlja toplinu potrebnu za zagrijavanje nastale vode (tekućine) do konačne temperature. S obzirom na načelo očuvanja energije mora vrijediti

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0.$$

Nadalje, pišući

$$m_{\text{voda}} = m_{\text{uk.}} - m_{\text{led}},$$

iz gornjih relacija slijedi

$$m_{\text{led}} = \frac{m_{\text{uk.}} c_{\text{voda}} (T_2 - T_{\text{kon.}})}{c_{\text{led}}(T_0 - T_1) + \ell_{\text{t}} + c_{\text{voda}}(T_2 - T_0)},$$

što za zadane vrijednosti daje masu leda $m_{\text{led}} \simeq 1.43\,\mathrm{kg}$, odnosno masu vode $m_{\text{voda}} = m_{\text{uk.}} - m_{\text{led}} \simeq 8.57\,\mathrm{kg}$.

Rješenje: $m_{\text{led}} = m_{\text{uk.}} c_{\text{voda}} (T_2 - T_{\text{kon.}}) / (c_{\text{led}}(T_0 - T_1) + \ell_{\text{t}} + c_{\text{voda}}(T_2 - T_0)) \simeq 1.43\,\mathrm{kg}$

9 **Zadatak:** Termički izoliran cilindar, zatvoren na oba kraja, podijeljen je pomičnim klipom u dva dijela; A i B. U početnom stanju u oba dijela cilindra se nalazi idealni dvoatomni plin ($\kappa = 7/5$). Početno stanje plina u dijelu A je $p_{\rm A0} = 200\,{\rm kPa}$ i $V_{\rm A0} = 1\,{\rm L}$, u dijelu B je $p_{\rm B0} = 100\,{\rm kPa}$ i $V_{\rm B0} = 1\,{\rm L}$, a klip je zakočen kako se ne bi pomakao uslijed razlike tlakova. Preselimo li klip iz početnog položaja do položaja u kojem su tlakovi izjednačeni, odredi nove volumene dijelova A i B, te tlak plinova. Pretpostavljamo da je proces u plinovima adijabatski.

Postupak: Obzirom da su procesi adijabatski imamo $pV^\kappa = const.$, odnosno,

$$p_{\rm A0}V_{\rm A0}^\kappa = p_{\rm A1}V_{\rm A1}^\kappa = p_{\rm A1}(V_{\rm A0} + \Delta V)^\kappa,$$

$$p_{\rm B0}V_{\rm B0}^\kappa = p_{\rm B1}V_{\rm B1}^\kappa = p_{\rm B1}(V_{\rm B0} - \Delta V)^\kappa,$$

gdje se varijable s oznakom 1 odnose na stanje nakon pomicanja klipa. Dijeleći gornju jednadžbu donjom, uz oznaku $V_0 = V_{\rm A0} = V_{\rm B0}$ i koristeći $p_{\rm A1} = p_{\rm B1}$, imamo

$$\frac{p_{\rm A0}}{p_{\rm B0}} = \left(\frac{1 + \Delta V/V_0}{1 - \Delta V/V_0}\right)^\kappa,$$

odnosno uz $p_{\rm A0}/p_{\rm B0} = 2$ i $\kappa = 7/5$,

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{(p_{\rm A0}/p_{\rm B0})^{1/\kappa} - 1}{(p_{\rm A0}/p_{\rm B0})^{1/\kappa} + 1} = \frac{2^{5/7} - 1}{2^{5/7} + 1} \simeq 0.2427.$$

Konačni volumeni su

$$V_{\rm A1} = V_0\left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right) \simeq 1.243\,{\rm L}, \qquad V_{\rm B1} = V_0\left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right) \simeq 0.7574\,{\rm L}.$$

Konačni tlakovi su

$$p_1 = p_{\rm A1} = p_{\rm B1} = p_{\rm B0}\left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right)^{-\kappa} \simeq 147.6\,{\rm kPa}.$$

Rješenje: $V_{\rm A1} \simeq 1.243\,{\rm L}$, $V_{\rm B1} \simeq 0.7574\,{\rm L}$, $p_{\rm A1} = p_{\rm B1} \simeq 147.6\,{\rm kPa}$

10 Zadatak: Idealni dvoatomni plin u početnom stanju pri tlaku $p_1 = 100\,\mathrm{kPa}$ zauzima volumen $V_1 = 10\,\mathrm{dm}^3$. Plin najprije adijabatski ekspandira do trostruko većeg volumena, a zatim se izobarno komprimira do volumena jednakog početnom. Odredi rad koji plin obavi u čitavom procesu.

Postupak: Rad u adijabatskom dijelu procesa od stanja '1' do stanja '2' opisan je izrazom

$$W_{12} = \frac{nR}{\kappa - 1}(T_1 - T_2) = \frac{nRT_1}{\kappa - 1}(1 - T_2/T_1) = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1}\Big(1 - (V_1/V_2)^{\kappa-1}\Big),$$

gdje smo koristili jednadžbu stanja idealnog plina u početnom stanju, $p_1 V_1 = nRT_1$, te relaciju $TV^{\kappa-1} = \mathrm{konst.}$ koja u adijabatskom procesu povezuje temperaturu i volumen. Tlak na kraju adijabatskog dijela procesa slijedi iz relacije $pV^\kappa = \mathrm{konst.}$ kao

$$p_2 = p_1 (V_1/V_2)^\kappa.$$

Rad koji plin obavlja u izobarnom dijelu procesa je

$$W_{23} = p_2(V_3 - V_2).$$

Koristeći gore dobiveni izraz za tlak p_2 te s obzirom da je $V_3 = V_1$ pišemo

$$W_{23} = p_1(V_1/V_2)^\kappa (V_1 - V_2) = p_1 V_1 (V_1/V_2)^\kappa (1 - V_2/V_1).$$

Ukupni rad u procesu je

$$W_{123} = W_{12} + W_{23} = p_1 V_1 \left(\frac{1 - (V_1/V_2)^{\kappa-1}}{\kappa - 1} + (V_1/V_2)^\kappa (1 - V_2/V_1)\right).$$

Konačno, s obzirom da je $V_2 = 3V_1$ te uz $\kappa = 7/5$ za dvoatomni plin, dobivamo

$$W_{123} = p_1 V_1 \frac{45 - 19 \times 3^{3/5}}{18} \simeq 0.4594\, p_1 V_1.$$

Za zadane vrijednosti početnog tlaka i volumena, $W_{123} = 459.4\,\mathrm{J}$.

Rješenje: $W = p_1 V_1 (45 - 19 \times 3^{3/5})/18 \simeq 459.4\,\mathrm{J}$

11 Zadatak: U cilindru s pomičnim klipom se nalazi idealni plin adijabatske konstante κ, početnog volumena V_0, temperature T_0 i tlaka p_0. Plin se najprije pod djelovanjem klipa adijabatski komprimira do upola manjeg volumena nakon čega se pri stalnom volumenu hladi do temperature jednake početnoj. Nakon toga se plin izotermno ekspandira do početnog volumena. Odredi ukupan rad koji klip obavi nad plinom tokom ovog kružnog procesa.

Postupak: Pri adijabatskom procesu od početnog stanja 0 do stanja 1 plin obavlja rad

$$W_{01} = \frac{nR}{\kappa - 1}(T_0 - T_1).$$

Temperatura T_1 u adijabatskom procesu može se izraziti kao

$$T_1 = T_0 \left(V_0/V_1\right)^{\kappa-1} = T_0 2^{\kappa-1},$$

pa imamo

$$W_{01} = \frac{nR}{\kappa - 1} T_0 \left(1 - 2^{\kappa-1}\right) = \frac{p_0 V_0}{\kappa - 1}\left(1 - 2^{\kappa-1}\right).$$

Pri izohornom zagrijavanju od stanja 1 do stanja 2 plin ne obavlja rad, $W_{12} = 0$. Pri izotermnoj ekspanziji od stanja 2 do konačnog stanja 0 plin obavlja rad

$$W_{20} = nRT_0 \ln \frac{V_0}{V_2} = p_0 V_0 \ln 2.$$

Ukupan rad koji plin obavi u procesu je

$$W_{\mathsf{plin}} = W_{01} + W_{12} + W_{20} = \frac{p_0 V_0}{\kappa - 1}\left(1 - 2^{\kappa-1}\right) + p_0 V_0 \ln 2.$$

Rad koji obavi klip ima obrnuti predznak u odnosu na rad plina,

$$W_{\mathsf{klip}} = -W_{\mathsf{plin}} = p_0 V_0 \left(\frac{2^{\kappa-1} - 1}{\kappa - 1} - \ln 2\right).$$

Rješenje: $W_{\mathsf{klip}} = p_0 V_0 \left((2^{\kappa-1} - 1)/(\kappa - 1) - \ln 2\right)$

12 Zadatak: Masu $m = 10\,\mathrm{kg}$ vode želimo ohladili s temperature $T_{\mathrm{C1}} = 290\,\mathrm{K}$ na temperaturu $T_{\mathrm{C2}} = 280\,\mathrm{K}$. Odredi koliki bi rad trebalo obaviti kako bismo vodu ohladili pokrećući infinitezimalni Carnotov toplinski stroj koji kao topliji spremnik koristi okolinu temperature $T_{\mathrm{H}} = 300\,\mathrm{K}$. (Toplinski kapacitet tzv. infinitezimalnog Carnotovog stroja dovoljno je malen da temperaturu toplinskih spremnika tokom jednog ciklusa možemo smatrati stalnom. Specifični toplinski kapacitet vode $c = 4180\,\mathrm{J\,K^{-1}\,kg^{-1}}$.)

Postupak: U kružnom procesu infinitezimalnog kapaciteta vrijedi $\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q$, gdje je $\mathrm{d}W$ rad koji stroj obavi, a $\mathrm{d}Q$ je toplina koju stroj dobiva iz spremnika spremnicima. U našem će slučaju oba diferencijala biti negativna jer se stroj vrti u "obrnutom" smjeru; Mi obavljamo rad nad strojem, a on spremnicima predaje više topline nego što iz njih uzima. U Carnotovom procesu koji koristi spremnike temperatura T_{H} i T_{C} možemo pisati

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q = \mathrm{d}Q_{\mathrm{H}} + \mathrm{d}Q_{\mathrm{C}},$$

pri čemu vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}Q_{\mathrm{C}}} = -\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{C}}}.$$

U našem slučaju temperatura okoline T_{H} je stalna, a temperatura vode T_{C} će se postupno smanjivati. Toplinu koju stroj dobiva iz vode ili predaje vodi možemo napisati kao

$$\mathrm{d}Q_{\mathrm{C}} = -mc\,\mathrm{d}T_{\mathrm{C}}.$$

Na osnovu gornjih relacija možemo pisati

$$\mathrm{d}W = \left(-\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{C}}} + 1\right)\mathrm{d}Q_{\mathrm{C}} = mc\left(\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{C}}} - 1\right)\mathrm{d}T_{\mathrm{C}},$$

što ćemo integrirati od početne do konačne vrijednosti temperature vode,

$$W = mc\int_{T_{\mathrm{C1}}}^{T_{\mathrm{C2}}}\left(+\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{C}}} - 1\right)\mathrm{d}T_{\mathrm{C}} = mcT_{\mathrm{H}}\ln\frac{T_{\mathrm{C2}}}{T_{\mathrm{C1}}} + mc(T_{\mathrm{C1}} - T_{\mathrm{C2}}).$$

Za zadane vrijednosti $W \simeq 22\,\mathrm{kJ}$.

Rješenje: $W = mc(T_{\mathrm{H}}\ln[T_{\mathrm{C2}}/T_{\mathrm{C1}}] - (T_{\mathrm{C1}} - T_{\mathrm{C2}})) \simeq 22\,\mathrm{kJ}$

13 Zadatak: Infinitezimalni Carnotov toplinski stroj (stroj u jednom ciklusu obavlja infinitezimalni rad $\mathrm{d}W$) djeluje crpeći toplinu iz toplinskog spremnika početne temperature T_{H0} i predajući je toplinskom spremniku početne temperature $T_{\mathrm{C0}} < T_{\mathrm{H0}}$ gdje su spremnici tijela jednakih masa m i jednakih specifičnih toplinskih kapaciteta c. Stroj će raditi sve dok se temperature spremnika ne izjednače. Odredi konačnu temperaturu spremnika i ukupan rad koji će stroj obaviti.

Postupak: Prema prvom zakonu termodinamike, element rada obavljen u kružnom procesu infinitezimalnog kapaciteta je

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q = \mathrm{d}Q_{\mathrm{H}} + \mathrm{d}Q_{\mathrm{C}},$$

a ako se radi o Carnotovom procesu vrijedi relacija

$$\frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}Q_{\mathrm{C}}} = -\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{C}}}.$$

gdje su $\mathrm{d}Q_{\mathrm{H}}$ i $\mathrm{d}Q_{\mathrm{C}}$ elementi topline preuzeti iz spremnika čije su temperature T_{H} i T_{C}. S obzirom da su spremnici jednakih toplinskih kapaciteta možemo pisati

$$\mathrm{d}Q_{\mathrm{H,C}} = -mc\,\mathrm{d}T_{\mathrm{H,C}}.$$

te iz gornjih izraza slijedi

$$\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{H}}} = -\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{C}}}{T_{\mathrm{C}}}.$$

Integracijom od početnog stanja gdje je $T_{\mathrm{H}} = T_{\mathrm{H0}}$ i $T_{\mathrm{C}} = T_{\mathrm{C0}}$ do konačnog stanja gdje imamo $T_{\mathrm{H}} = T_{\mathrm{C}} = T$ slijedi

$$\ln\frac{T}{T_{\mathrm{H0}}} = -\ln\frac{T}{T_{\mathrm{C0}}},$$

odnosno

$$T = \sqrt{T_{\mathrm{H0}}T_{\mathrm{C0}}}.$$

Ukupni obavljeni rad slijedi iz integracijom elementa rada od početnog stanja do konačnog stanja

$$\begin{aligned} W = \int \mathrm{d}W = \int \mathrm{d}Q = \int \mathrm{d}Q_{\mathrm{H}} + \int \mathrm{d}Q_{\mathrm{C}} = \int_{T_{\mathrm{H0}}}^{T} mc\,\mathrm{d}T_{\mathrm{H}} + \int_{T_{\mathrm{C0}}}^{T} mc\,\mathrm{d}T_{\mathrm{C}} \\ = mc\,(T_{\mathrm{H0}} + T_{\mathrm{C0}} - 2T). \end{aligned}$$

Koristeći gore izvedeni izraz za konačnu temperaturu, rad možemo napisati kao

$$W = mc\left(\sqrt{T_{\mathrm{H0}}} - \sqrt{T_{\mathrm{C0}}}\right)^2.$$

Rješenje: $T = \sqrt{T_{\mathrm{H0}}T_{\mathrm{C0}}}$, $W = mc\left(\sqrt{T_{\mathrm{H0}}} - \sqrt{T_{\mathrm{C0}}}\right)^2$

14 Zadatak: Dva tijela čije su mase m i specifični toplinski kapaciteti c, a početne temperature su im T_{10} i T_{20}, dovedena su u termički kontakt. Odredi konačnu temperaturu po supostavljanju termalne ravnoteže te promjenu entropije čitavog sustava pretpostavljajući da je on izoliran od okoline.

Postupak: S obzirom da je sustav izoliran od okoline ukupna toplina se ne mijenja pa pišemo

$$0 = \mathrm{d}Q = \mathrm{d}Q_1 + \mathrm{d}Q_2 = mc\,\mathrm{d}T_1 + mc\,\mathrm{d}T_2.$$

Konačnu temperaturu T dobit ćemo integracijom gornjeg izraza od početnih temperatura T_{10} i T_{20} do termperature T,

$$0 = \int_{T_{10}}^{T} mc\,\mathrm{d}T_1 + \int_{T_{20}}^{T} mc\,\mathrm{d}T_2,$$

što daje

$$0 = mc(T - T_{10}) + mc(T - T_{20}),$$

odnosno,

$$T = \frac{T_{10} + T_{20}}{2}.$$

Promjenu entropije možemo napisati kao

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}S_1 + \mathrm{d}S_2 = \frac{\mathrm{d}Q_1}{T_1} + \frac{\mathrm{d}Q_2}{T_2} = \frac{mc\,\mathrm{d}T_1}{T_1} + \frac{mc\,\mathrm{d}T_2}{T_2},$$

a ukupnu promjenu koja nastupa od početnog do konačnog stanja dovibamo integracijom gornjeg izraza,

$$\Delta S = \int_{T_{10}}^{T} \frac{mc\,\mathrm{d}T_1}{T_1} + \int_{T_{20}}^{T} \frac{mc\,\mathrm{d}T_2}{T_2},$$

što daje

$$\Delta S = mc\,\ln\frac{T}{T_{10}} + mc\,\ln\frac{T}{T_{20}},$$

odnosno, uz ranije izvedeni izraz za konačnu temperaturu,

$$\Delta S = mc\,\ln\left[\frac{1}{4}\left(1 + \frac{T_{20}}{T_{10}}\right)\left(1 + \frac{T_{10}}{T_{20}}\right)\right].$$

Rješenje: $T = (T_{10} + T_{20})/2$, $\Delta S = mc\,\ln[(1 + T_{20}/T_{10})(1 + T_{10}/T_{20})/4]$