Zadaci za vježbu, prvi dio

1 Zadatak: Položaj čestice u ravnini $z = 0$ opisan je vektorom

$$\mathbf{r}[t] = v_0 t\,\mathbf{i} + A\sin[2\pi v_0 t/\lambda]\,\mathbf{j},$$

gdje su $v_0 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $A = 1\,\mathrm{m}$ i $\lambda = 5\,\mathrm{m}$ konstante. Odredi maksimalne iznose brzine i akceleracije koje čestica postiže tokom ovog gibanja.

Postupak: Vektor brzine čestice je derivacija vektora položaja po vremenu,

$$\mathbf{v}[t] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}[t] = v_0\,\mathbf{i} + A(2\pi v_0/\lambda)\cos[2\pi v_0 t/\lambda]\,\mathbf{j},$$

a iznos brzine je modul tog vektora,

$$v[t] = |\mathbf{v}[t]| = \sqrt{\mathbf{v}[t]\cdot\mathbf{v}[t]} = \sqrt{v_0^2 + A^2(2\pi v_0/\lambda)^2\cos^2[2\pi v_0 t/\lambda]}.$$

Iznos brzine je najveći kad je $\cos[2\pi v_0 t/\lambda] = \pm 1$, odnosno

$$v_{\max} = v_0\sqrt{1 + (2\pi A/\lambda)^2} \simeq 3.212\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Vektor akceleracije je derivacija vektora brzine po vremenu,

$$\mathbf{a}[t] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}[t] = -A(2\pi v_0/\lambda)^2\sin[2\pi v_0 t/\lambda]\,\mathbf{j},$$

a iznos akceleracije je

$$a[t] = |\mathbf{a}[t]| = \sqrt{\mathbf{a}[t]\cdot\mathbf{a}[t]} = A(2\pi v_0/\lambda)^2\left|\sin[2\pi v_0 t/\lambda]\right|.$$

Iznos akceleracije ne najveći pri $\sin[2\pi v_0 t/\lambda] = \pm 1$, odnosno

$$a_{\max} = A(2\pi v_0/\lambda)^2 \simeq 6.316\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Rješenje: $v_{\max} = v_0\sqrt{1 + (2\pi A/\lambda)^2} \simeq 3.212\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $a_{\max} = A(2\pi v_0/\lambda)^2 \simeq 6.316\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

2 Zadatak: Položaj čestice u prostoru dan je vektorom

$$\mathbf{r}[t] = R\left(\cos[\omega t]\,\mathbf{i} + \sin[\omega t]\,\mathbf{j}\right) + V t\,\mathbf{k},$$

gdje je t vrijeme, R, ω i V su konstante, a $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ su jedinični vektori pravokutnog koordinatnog sustava. Odredi duljinu puta koju čestica prevali duž vlastite putanje u vremenskom intervalu od $t_1 = 0$ do $t_2 = 2\pi/\omega$.

Postupak: Element prevaljenog puta je

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\mathbf{r}| = |\mathbf{v}\,\mathrm{d}t| = |\mathbf{v}|\,\mathrm{d}t = v\,\mathrm{d}t.$$

Brzina čestice je

$$\mathbf{v}[t] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}[t] = R\omega\left(-\sin[\omega t]\,\mathbf{i} + \cos[\omega t]\,\mathbf{j}\right) + V\,\mathbf{k},$$

a njen je iznos

$$v[t] = |\mathbf{v}[t]| = \sqrt{\mathbf{v}[t]\cdot\mathbf{v}[t]} = \sqrt{(R\omega)^2 + V^2}.$$

Prevaljeni put u intervalu od t_1 do t_2 je

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} v[t]\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi/\omega} \sqrt{(R\omega)^2 + V^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\omega}\,\sqrt{(R\omega)^2 + V^2}.$$

Rješenje: $s = (2\pi/\omega)\sqrt{(R\omega)^2 + V^2}$

3 Zadatak: Fenjer koji proizvodi tanak vodoravan snop svjetlosti visi na niti te se jednoliko okreće oko uspravne osi čineći 30 okretaja u minuti. Snop svjetlosti pada na ravan uspravan zid koji je od fenjera udaljen $D = 2\,\mathrm{m}$. Odredi brzinu svijetle mrlje na zidu u trenutku kada snop pada na zid pod kutem $\phi = 45^\circ$ u odnosu na okomicu.

Postupak: Tokom vrtnje fenjera svijetla se mrlja na zidu giba duž vodoravnog pravca koji uzimamo kao x-os. Ishodište $x = 0$ neka je točka pravca koja je najbliža fenjeru. Opišemo li orijentaciju fenjera kutom ϕ, pri čemu $\phi = 0$ odgovara orijentaciji frnjera pri kojoj snop svjetlosti pada okomito na zid (svijetla mrlja pri $x = 0$), onda se svijetla mrlja za općenit kut ϕ nalazi pri

$$x = D\,\mathrm{tg}\phi.$$

S obzirom da se fenjer vrti stalnom kutnom brzinom

$$\omega = 30 \times 2\pi\,\mathrm{rad\,min^{-1}} = \pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}},$$

kut možemo napisati kao $\phi = \omega t$, odnosno, položaj svijetle mrlje je

$$x = D\,\mathrm{tg}\omega t.$$

Brzina svijetle mrlje je

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{D\omega}{\cos^2\omega t}.$$

Za $\phi = 45^\circ$ imamo $\cos\omega t = \cos\phi = 2^{-1/2}$, odnosno

$$v = \frac{D\omega}{1/2} = 2D\omega,$$

što za zadane vrijednosti daje $v \simeq 12.57\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Rješenje: $v = 2D\omega \simeq 12.57\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

4 Zadatak: Nespretnom putniku koji se naginjao kroz prozor vlaka iz ruke je iskliznula pivska boca, pala na peron s visine $h = 2\,\mathrm{m}$ i razbila se. Činilo mu se da je boca pala vertikalno. Odredi kut koji je u referentnom sustavu promatrača koji je mirovao na peronu brzina boce zatvarala s okomicom na tlo u trenutku prije nego što se boca razbila ako se vlak u trenutku pada boce gibao brzinom $v_0 = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: U referentnom sustavu vlaka postavljamo pravokutni koordinatni sustav tako da se ishodište nalazi u točki iz koje boca počinje padati, x'-os je vodoravna i gleda "prema naprijed", a y'-os je uspravna i gleda uvis. Položaj boce tokom pada opisan je izrazom

$$\mathbf{r}'[t] = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2\,\mathbf{j},$$

a njena brzina je

$$\mathbf{v}'[t] = -g(t - t_0)\,\mathbf{j}.$$

Trenutak $t = t_1$ u kojem boca udara o pod slijedi iz uvjeta $\mathbf{r}'[t_1] = -h$ kao

$$t_1 = t_0 + \sqrt{2h/g},$$

te je brzina boce neposredno prije udara o pod

$$\mathbf{v}'[t_1] = -\sqrt{2gh}\,\mathbf{j}.$$

U referentnom sustavu promatrača koji miruje na peronu postavljamo koordinatni sustav tako da se on u trenutku $t = t_0$ podudara s koordinatnim sustavom koji se giba s vlakom. položaj čestice u sustavu vlaka $\mathbf{r}'$ i položaj iste čestice u sustavu mirnog promatrača $\mathbf{r}$ povezani su izrazom

$$\mathbf{r}[t] = v_0(t - t_0)\,\mathbf{i} + \mathbf{r}'[t],$$

dok su brzine povezane izrazom

$$\mathbf{v}[t] = v_0\,\mathbf{i} + \mathbf{v}'[t].$$

U trenutku neposredno prije udara predmeta o pod imamo

$$\mathbf{v}[t_1] = v_0\,\mathbf{i} - \sqrt{2gh}\,\mathbf{j}.$$

Kut α koji vektor $v[t_1]$ zatvara s uspravnim pravcem možemo odrediti iz

$$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{\mathbf{v}[t_1]\cdot\mathbf{i}}{\mathbf{v}[t_1]\cdot\mathbf{j}} = \frac{v_0}{\sqrt{2gh}}.$$

Za zadane vrijednosti $\mathrm{tg}\alpha \simeq 0.6385$, $\alpha \simeq 32.56°$

Rješenje: $\mathrm{tg}\alpha = v_0/\sqrt{2gh}$, $\alpha \simeq 32.56°$

5 Zadatak: Odredi najmanju brzinu kojom atletičar mora baciti kuglu ako želi da njen domet na vodoravnoj podlozi bude $d = 20\ \mathrm{m}$. (Zanemari visinu atletičara i sile otpora, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Putanja kugle izbačene brzinom iznosa v_0 iz točke $x = y = 0$ pod kutem α u odnosu na vodoravnu x-os (y-os je uspravna) može se napisati kao

$$y = xu - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+u^2), \quad \text{gdje je} \quad u = \mathrm{tg}\alpha.$$

Ako kugla pada na tlo u točki $x = d$, $y = 0$, imamo

$$0 = du - \frac{gd^2}{2v_0^2}(1+u^2),$$

iz čega slijedi izraz za brzinu izbačaja

$$v_0^2 = \frac{gd}{2}\,\frac{1+u^2}{u}.$$

Minimum v_0^2 u odnsou na u pronalazimo uvjetom

$$0 \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}v_0^2 = \frac{gd}{2}\,\frac{u^2-1}{u^2},$$

što je ispunjeno za

$$u = \mathrm{tg}\alpha = 1.$$

Uvrštavanjem $u = 1$ u izraz za v_0^2 slijedi

$$(v_0^2)_{\min} = gd.$$

Za zadane vrijednosti

$$(v_0)_{\min} = \sqrt{gd} \simeq 14\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Rješenje: $(v_0)_{\min} = \sqrt{gd} \simeq 14\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

6 Zadatak: Odredi trajanje leta zračnog broda (zeppelina) od grada A do grada B koji se nalazi $d = 160\,\mathrm{km}$ sjeverno u odnosu na grad A, ako brzina broda u odnosu na zrak iznosi $v' = 80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, a prisutan je vjetar iz smjera sjeveroistoka brzine iznosa $V = 40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

Postupak: Neka je $\mathbf{v}'$, $v' = |\mathbf{v}'|$, brzina broda u odnosu na zrak, a $\mathbf{V}$, $V = |\mathbf{V}|$, neka je brzina zraka u odnosu na tlo. Brzina broda u odnosu na tlo može se napisati kao zbroj tih dviju brzina,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}.$$

Odredimo li iznos te brzine, $v = |\mathbf{v}|$, trajanje putovanja biti će

$$t = d/v.$$

Kako bismo odredili v pišemo

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}.$$

Jednakost kvadrata modula vektora s lijeve i s desne strane daje

$$v'^2 = v^2 - 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{V} + V^2.$$

Označimo li s θ kut što ga zatvaraju vektori $\mathbf{v}$ (smjer brzine broda u odnosu na tlo, dakle prema sjeveru) i vektor $\mathbf{V}$ (smjer gibanja zraka u odnosu na tlo, dakle prema jugoistoku) možemo pisati

$$v'^2 = v^2 - 2vV\cos\theta + V^2,$$

iz čega rješavanjem kvadratne jednadžbe slijedi

$$v_{1,2} = V\cos\theta \pm \sqrt{v'^2 - (V\sin\theta)^2} = v'\left(\beta\cos\theta \pm \sqrt{1-(\beta\sin\theta)^2}\right),$$

gdje smo uveli oznaku

$$\beta = V/v'.$$

U našem slučaju $\theta = {}^{3\pi}\!/_{4}$, $\beta = 1/2$, pa vidimo da jedino rješenje s pozitivnim predznakom ispred korijena (v_1) ima pozitivnu vrijednost. Konačno, trajanje putovanja je

$$t = \frac{d}{v_1} = \frac{d}{v'}\,\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}-1},$$

što za zadane vrijednosti daje $t \simeq 3.43\,\mathrm{h}$.

Rješenje: $t = (d/v')2\sqrt{2}/(\sqrt{7}-1) \simeq 3.43\,\mathrm{h}$

7 Zadatak: Sanduk smo vezali konopom i pokušavamo ga vući stalnom brzinom po vodoravnoj podlozi s kojom on ima koeficijent trenja μ. Odredi kut koji konop mora zatvarati s podlogom ako želimo da napetost konopa bude što je moguće manja.

Postupak: Na sanduk djeluju gravitacijska sila iznosa mg usmjerena prema dole, reakcija podloge iznosa N usmjerena prema gore, sila trenja iznosa μN usmjerena suprotno smjeru gibanja, te napetost konopa iznosa T. Kako bi se sanduk gibao stalnom brzinom te sile moraju biti u ravnoteži. Za vertikalnu komponentu imamo

$$\sum F_y = -mg + N + T\sin\alpha = 0$$

gdje je α kut koji konop zatvara s podlogom. Za horizontalnu komponentu imamo

$$\sum F_x = T\cos\alpha - \mu N = 0.$$

Eliminacijom N iz gornjeg sustava slijedi napetost konopa

$$T = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Minimum napetosti T u odnosu na kut α pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{\mu mg}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2}(-\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

koji je ispunjen za

$$\mu = \mathrm{tg}\alpha.$$

Rješenje: $\alpha = \arctan\mu$

8 Zadatak: Krenuvši iz mirovanja, sitno tijelo se spušta iz točke A prema točki B tako da prvi dio puta prevaljuje klizeći niz kosinu nagiba α, a ostatak puta prevaljuje klizeći po vodoravnoj polozi. Vodoravna udaljenost između točaka A i B veća je od visinske razlike među njima, a iznos brzine kojom tijelo klizi po vodoravnom dijelu puta jednak je iznosu brzine koju je tijelo imalo pri dnu kosine. Odredi nagib α tako da čitavo gibanje traje što je moguće kraće. Sile otpora smatramo zanemarivim.

Postupak: Neka je h visinska razlika između točaka A i B, a $d > h$ neka je vodoravna udaljenost među njima. Označimo li s b duljinu baze kosine tada je duljina puta koji tijelo prevaljuje klizeći niz kosinu

$$s_1 = \sqrt{h^2 + b^2},$$

dok je duljina vodoravnog dijela puta

$$s_2 = d - b.$$

Za vrijeme klizanja niz kosinu prisutna je akceleracija iznosa

$$a_1 = g \sin\alpha = gh/s_1,$$

gdje je α nagib kosine, a koristili smo $\sin\alpha = h/s_1$. S obzirom da tijelo kreće iz mirovanja trajanje klizanja niz kosinu je

$$t_1 = \sqrt{2s_1/a_1} = \sqrt{2(b^2 + h^2)/gh}.$$

Iznos brzine pri dnu kosine, a time i na vodoravnom dijelu putanje je

$$v_2 = a_1 t_1 = \sqrt{2gh},$$

te je trajanje gibanja po vodoravnom dijelu putanje

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{d - b}{\sqrt{2gh}}.$$

Ukupno trajanje putovanja je

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{\sqrt{2gh}} \left(2\sqrt{b^2 + h^2} + (d - b) \right),$$

Ekstremalnu vrijednost gornjeg izraza pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} t = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2gh}} \left(\frac{2b}{\sqrt{b^2 + h^2}} - 1 \right),$$

koji je ispunjen za duljinu baze kosine

$$b = h/\sqrt{3}.$$

Da je riječ o minimumu potvrđuje druga derivacije vremena t po parametru b,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}b^2} t = \cdots = \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\frac{h}{b^2 + h^2} \right)^{3/2},$$

koja je veća od nule za sve vrijednosti $b \geq 0$. Nadalje, s obzirom da dobivena duljina baze kraća od ukupne vodoravne udaljenosti, t.j. za dobivenu vrijednost vrijedi $b < h$ dok prema zadatku imamo $h < d$, smatramo ju rješenjem zadanog problema. Konačno, traženi kut nagiba kosine je

$$\alpha = \arctan \frac{h}{b} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Rješenje: $\alpha = \pi/3$

9 Zadatak: Tijelo se nalazi pri dnu kosine nagiba $\alpha = 30^\circ$ s kojom ima koeficijent dinamičkog trenja $\mu_{\mathrm{din.}} = 0.2$. Pokrenemo li tijelo u gibanje (klizanje) uz kosinu početnom brzinom iznosa $v_0 = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ono će se nakon nekog vremena zaustaviti, a nakon toga će početi kliziti unazad. Odredi nakon koliko vremena će se tijelo vratiti u polaznu točku. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Koordinatni sustav postavljamo tako da je x-os paralelna kosini i usmjerena je niz nju, a ishodište se nalazi u točki u kojoj u trenutku $t = t_0$ počinje gibanje. x-komponenta akceleracije tijela dana je poznatim izrazima

$$a_\pm = g(\sin\alpha \pm \mu_{\mathrm{din.}}\cos\alpha),$$

gdje gornji predznak $(+)$ odgovara klizanju tijela uz kosinu, a donji predznak $(-)$ odgovara klizanju niz kosinu. x-komponentu brzine i x-koordinatu položaja tijela za vrijeme klizanja tijela uz kosinu možemo napisati kao

$$v[t] = v[t_0] + a_+(t - t_0), \qquad x[t] = x[t_0] + v[t_0](t - t_0) + \frac{a_+}{2}(t - t_0)^2,$$

gdje je $v[t_0] = -v_0$ i $x[t_0] = 0$. Trenutak $t = t_1$ u kojem se tijelo zaustavlja slijedi iz uvjeta $v[t_1] = 0$,

$$t_1 = t_0 + \frac{v_0}{a_+},$$

te za položaj tijela u tom trenutku imamo

$$x[t_1] = -\frac{v_0^2}{2a_+}.$$

Za vrijeme klizanja tijela niz kosinu imamo

$$x[t] = x[t_1] + v[t_1](t - t_1) + \frac{a_-}{2}(t - t_1)^2 = -\frac{v_0^2}{2a_+} + \frac{a_-}{2}(t - t_1)^2.$$

Trenutak $t = t_2$ u kojem se tijelo nalazi u početnom položaju slijedi iz uvjeta $x[t_2] = 0$,

$$t_2 = t_1 + \frac{v_0}{\sqrt{a_+ a_-}}.$$

Konačno, ukupno trajanje uspinjanja i silaska je

$$t_2 - t_0 = \frac{v_0}{a_+} + \frac{v_0}{\sqrt{a_+ a_-}} = \frac{v_0}{a_+}\left(1 + \sqrt{\frac{a_+}{a_-}}\right).$$

Za zadane vrijednosti $t_2 - t_0 \simeq 1.844\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $t = (v_0/a_+)(1 + \sqrt{a_+/a_-})$, $a_\pm = g(\sin\alpha \pm \mu_{\mathrm{din.}}\cos\alpha)$, $t \simeq 1.844\,\mathrm{s}$.

10 **Zadatak:** Svemirski brod mase $m = 10\,\mathrm{t}$ na koji ne djeluju sile giba se duž pravca brzinom stalnog iznosa $v = 1\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Skretanje broda bez promjene iznosa brzine ostvaruje se uključivanjem bočnog motora koji na brod djeluje silom stalnog iznosa $F = 10\,\mathrm{kN}$ i smjera koji je u svakom trenutku okomit na putanju broda. Po isključenju motora brod se nastavlja gibati duž (novog) pravca. Koliko dugo mora biti uključen motor kako bi brod skrenuo za kut $\Delta\phi = 60°$?

Postupak: Motor djeluje silom okomitom na smjer putanje što znači da ta sila ima ulogu centripetalne sila. Označavamo

$$F = F_{\mathrm{cp}}.$$

S obzirom da je ovdje centripetalna sila stalnog iznosa, te pretpostavljajući da se gibanje odvija u ravnini, putanja broda je segment kružnice. Pravac početnog (konačnog) gibanja broda tangenta je na kružnicu u točki u kojoj se motor uključuje (isključuje). Kut koji odgovara segmentu kružnice jednak je kutu što ga zatvaraju pravac početnog i pravac konačnog gibanja broda. Masa broda m, iznos brzine v, kutna brzina gibanja po kružnici

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t},$$

polumjer kružnice R, te iznos centripetalne sile, povezani su poznatom relacijom

$$F_{\mathrm{cp}} = m\omega^2 R = \frac{mv^2}{R}.$$

Slijedi

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{F_{\mathrm{cp}}}{mv},$$

odnosno

$$\Delta\phi = \int_0^{\Delta t} \frac{F_{\mathrm{cp}}}{mv}\,\mathrm{d}t = \frac{F_{\mathrm{cp}}}{mv}\,\Delta t.$$

Traženo vrijeme je

$$\Delta t = \frac{mv}{F_{\mathrm{cp}}}\,\Delta\phi.$$

Za zadane vrijednosti $\Delta t \simeq 17.45\,\mathrm{min}$.

Rješenje: $\Delta t = mv\Delta\phi/F_{\mathrm{cp}} \simeq 17.45\,\mathrm{min}$

11 Zadatak: Tanki homogeni štap duljine $\ell = 1\,\mathrm{m}$ i mase $m = 10\,\mathrm{kg}$ vrti se kutnom brzinom $\omega = 10\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ oko osi koja prolazi njegovim polovištem i okomita je na njega. Odredi napetost štapa u njegovom polovištu.

Postupak: Napetost štapa u njegovu polovištu prisutna je kako bi osigurala potrebnu centripetalnu silu za kružno gibanje obaju polovica štapa. Izračunat ćemo potrebnu centripetalnu silu. Element mase štapa možemo napisati kao

$$\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}r,$$

gdje je

$$\mu = m/\ell$$

linijska gustoća mase štapa, a $\mathrm{d}r$ je element duljine štapa. Kako bi se element mase štapa $\mathrm{d}m$ gibao po kružnici polumjera r kutnom brzinom ω na njega mora djelovati centripetalna sila iznosa

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{cp}} = a_{\mathrm{cp}}\mathrm{d}m = \omega^2 r\,\mathrm{d}m.$$

Štap ćemo zamisliti kao niz elemenata mase $\mathrm{d}m$ te ćemo integracijom izračunati ukupnu centripetalnu na jednu polovicu štapa,

$$F_{\mathrm{cp}} = \int \mathrm{d}F_{\mathrm{cp}} = \int \omega^2 r\,\mathrm{d}m = \int_{r=0}^{\ell/2} \omega^2 r\,\mu\,\mathrm{d}r = \frac{\mu\omega^2 r^2}{2}\bigg|_0^{\ell/2} = \frac{\mu\omega^2\ell^2}{8} = \frac{m\omega^2\ell}{8}.$$

Centripetalna sila koju smo izračunali odgovara napetosti štapa u njegovu polovištu. Za zadane vrijednosti $T = F_{\mathrm{cp}} \simeq 1234\,\mathrm{N}$.

Rješenje: $T = m\omega^2\ell/8 \simeq 1234\,\mathrm{N}$

12 Zadatak: n sitnih tijela ukupne mase M povezano je s pomoću n bezmasenih nerastezljivih niti jednake duljine tako da tijela i niti čine pravilni n-terokut s polumjerom opisane kružnice R. Kad se taj n-terokut vrti oko osi koja je okomita na ravninu n-terokuta i prolazi njegovim središtem, napetosti niti tijelima osiguravaju potrebnu centripetalnu silu. Odredi napetost niti ako se n-terokut vrti kutnom brzinom ω te pronađi limes tog izraza kad n teži u beskonačno. (Traženi limes opisuje napetost tankog obruča mase M i polumjera R pri vrtnji kutnom brzinom ω.)

Postupak: Kako bi se tijelo mase $m = M/n$ vrtjelo kutnom brzinom ω putanjom polumjera zakrivljenosti R na njega mora djelovati centripetalna sila iznosa

$$F_{\mathrm{cp.}} = m\omega^2 R = M\omega^2 R/n.$$

Tu silu osiguravaju dvije napete niti koje, svaka sa svoje strane, s tangentom na kružnicu zatvaraju kut $\alpha = \pi/n$. Slijedi da iznos zbroja projekcija dvaju sila u smjeru središta n-terokuta možemo napisati kao

$$F_{\mathrm{cp}} = 2T_n \sin[\pi/n],$$

gdje je T_n napetost niti. Slijedi

$$T_n = \frac{M\omega^2 R}{2n\sin[\pi/n]}.$$

Kad n teži u beskonačno imamo

$$T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \frac{M\omega^2 R}{2n\sin[\pi/n]} = \frac{M\omega^2 R}{2\pi}.$$

Rješenje: $T_n = M\omega^2 R/2n\sin[\pi/n]$, $T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n = M\omega^2 R/2\pi$

13 Zadatak: Sitno tijelo obješeno je s pomoću tanke nerastezljive niti duljine ℓ o čvrsto uporište i giba se opisujući kružnicu polumjera $r < \ell$ u vodoravnoj ravnini (tzv. stožasto njihalo). Odredi frekvenciju vrtnje te njen limes za $r/\ell \to 0$.

Postupak: Na tijelo djeluju gravitacijska sila iznosa mg i napetost niti iznosa T koje zajedno daju centripetalnu silu iznosa $m\omega^2 r$, gdje je ω kutna brzina, a r je polumjer putanje. S obzirom da tijelo ne akcelerira u uspravnom smjeru projekcija ukupne sile na uspravni pravac jednaka je nuli,

$$T\cos\phi - mg = 0,$$

dok je projekcija ukupne sile na vodoravnu ravninu po iznosu jednaka centripetalnoj sili,

$$T\sin\phi = m\omega^2 r,$$

gdje je ϕ kut koji nit zatvara s uspravnim pravcem. Eliminacijom T iz gornjih jednadžbi slijedi

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{\omega^2 r}{g},$$

a s obzirom da iz geometrije imamo

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{r}{\sqrt{\ell^2 - r^2}},$$

slijedi

$$\omega^2 = \frac{g}{\sqrt{\ell^2 - r^2}} = \frac{g}{\ell}\left(1 - (r/\ell)^2\right)^{-1/2}.$$

Za $r/\ell \to 0$ imamo

$$\lim_{r/\ell \to 0} \omega^2 = \frac{g}{\ell}.$$

Rješenje: $\omega = \sqrt{g/\ell}\left(1 - (r/\ell)^2\right)^{-1/4}$, $\lim_{r/\ell\to 0}\omega = \sqrt{g/\ell}$

14 Zadatak: Raketni motor ubrzava raketu time što u suprotnom smjeru izbacuje plin brzinom iznosa v u odnosu na raketu. Masa rakete umanjuje se za masu izbačenog plina. Ako je raketa krenula iz mirovanja, odredi brzinu koju će imati u trenutku u kojem će njena masa iznositi jednu trećinu početne mase.

Postupak: Promjena količine gibanja plina mora biti suprotna promjeni količine gibanja rakete (Newtonovi zakoni). Promjenu količine gibanja mase koja pri izbacivanju plina mase Δm ostaje u raketi možemo napisati kao

$$\Delta\mathbf{p}_{\mathrm{raketa}} = (M - \Delta m)(\mathbf{V} + \Delta\mathbf{V}) - (M - \Delta m)\mathbf{V} \simeq M\,\Delta\mathbf{V},$$

gdje je M masa rakete, $\mathbf{V}$ je brzine rakete, a zanemarili smo član $\Delta m\,\Delta\mathbf{V}$. Tome odgovara promjena količine gibanja izbačenog plina

$$\Delta\mathbf{p}_{\mathrm{plin}} = \Delta m\,(\mathbf{V} + \mathbf{v}) - \Delta m\,\mathbf{V} = \Delta m\,\mathbf{v},$$

gdje je $\mathbf{v}$ relativna brzina izbacivanja plina. S obzirom da mora biti $\Delta\mathbf{p}_{\mathrm{raketa}} = -\Delta\mathbf{p}_{\mathrm{plin}}$ slijedi

$$M\,\Delta\mathbf{V} = -\Delta m\,\mathbf{v}.$$

Također moramo uvažiti da izbacivanje plina smanjuje masu rakete pa pišemo

$$\Delta m = -\Delta M.$$

Pišući u diferencijalnom obliku, ograničavajući razmatranje isključivo na pravac duž kojeg se raketa giba, te uz separaciju varijabli dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\mathrm{d}V_x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}M}{M}$$

koju ćemo integrirati od početnog (0) do konačnog (1) stanja. Slijedi

$$V_{1x} = V_{0x} + v_x \ln\left[\frac{M_1}{M_0}\right].$$

U našem slučaju $V_{0x} = 0$, $M_0/M_1 = 3$, te slijedi $V_{1x} = -v_x \ln 3$

Rješenje: $V = v \ln 3$