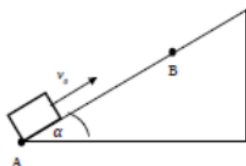
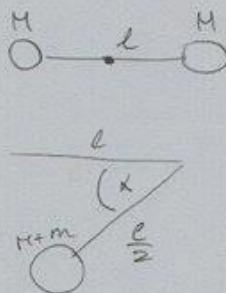


12. Dvije male lopte, svaka mase 0,5 kg, pričvršćene su na krajeve tankog štapa zanemarive mase, duljine 40 cm. Štap može rotirati (bez trenja) oko horizontalne osi koja prolazi kroz centar štapa i okomita je na štap. U početnom trenutku štap je u horizontalnom položaju i miruje kada komadić gline, mase 13 g padne na jednu loptu pričvršćenu na kraj štapa brzinom  $2,4 \text{ ms}^{-1}$  i zalijepi se za nju. Za koji kut će štap biti otklonjen od horizontalnog smjera u trenutku kad se štap zaustavi nakon sudara? (Rj.  $1,079^\circ$ )
13. Na mirno vozilo mase  $m = 100 \text{ kg}$  u trenutku  $t_0 = 0 \text{ s}$  počne djelovati sila stalnog smjera i iznosa ovisnog o vremenu,  $F(t) = F_0 e^{At}$ , gdje su  $F_0 = 100 \text{ N}$  i  $A = 0,1 \text{ m}^{-1}$  konstante. Sila prestane djelovati u trenutku  $t_1 = 10 \text{ s}$ . Odredite udaljenost koju će vozilo prevaliti od trenutka  $t_0$  do trenutka  $t_2 = 20 \text{ s}$ . (Rj. 244 m)
14. Lopta mase  $m = 200 \text{ g}$  se giba horizontalno brzinom  $v = 4,5 \text{ m/s}$  i udari u zid od kojeg se odbije. Pri sudaru lopta je izgubila 75% kinetičke energije. Izračunajte iznos impulsa sile kojim je zid djelovao na loptu pri sudaru. (Rj. 1,35 Ns)
15. U kuglani bacite loptu bez rotacije početnom brzinom 5 m/s. Koeficijent trenja između kugle i podloge je  $\mu = 0,1$ . Nakon koliko vremena će se kugla početi kotrljati bez proklizavanja? (Rj. 1,46 s)
22. Horizontalni, homogeni štap mase  $m_1 = 16 \text{ kg}$  i duljine  $l = 6 \text{ m}$  je pričvršćen za vertikalni zid u točki A, s pomoću zgloba. U točki B na drugom kraju štapa, tankom žicom koja zatvara kut  $\theta = 35^\circ$  s horizontalom, pričvršćen je za zid u točki C. Masa  $m_2 = 24 \text{ kg}$  se može staviti na štap u bilo koju točku štapa. Udaljenost točke štapa gdje se nalazi masa  $m_2$  od zida je  $x$ .
- a) Nadite napetost žice kao funkciju od  $x$ .
- b) Žica može podnijeti maksimalnu napetost 440 N. Koliki je maksimalni  $x$ ?
- (Rj.  $F_N = \frac{g}{l \sin \theta} (xm_2 + \frac{l}{2} m_1)$ ;  $x = 2,216 \text{ m}$ )
23. Na rubu obale visine 2 m iznad površine jezera stoji čovjek i želi skočiti u jezero. Ispod mjesta na obali gdje stoji čovjek, na razini površine vode nalazi se stijena čiji je rub na horizontalnoj udaljenosti 3 m od čovjeka. Da bi preskočio ovu stijenu, čovjek se odluči udaljiti od ruba obale i trčanjem dostići brzinu potrebnu da preskoči ovu stijenu. Čovjek stane mirno na nekoj udaljenosti od ruba obale i počne trčati prema rubu obale akceleracijom koja je proporcionalna s vremenom:  $a(t) = t \cdot 1 \text{ ms}^{-3}$  te kada dode do ruba obale, skoči u horizontalnom smjeru brzinom koju je postigao trčanjem. S kolike najmanje udaljenosti od ruba obale čovjek treba početi trčati da bi preskočio stijenu i sigurno skočio u vodu? Zanimariti otpor zraka. (Rj. 4,8 m)
24. Predmet gurnemo iz podnožja kosine (točka A) brzinom  $v_0 = 5 \text{ m/s}$  duž kosine. Nagib kosine je  $\alpha = 30^\circ$ . Predmet duž kosine prijeđe put  $s = 1,6 \text{ m}$  (do točke B) gdje se zaustavi nakon čega se ponovo vraća niz kosinu. Ako je sila trenja konstantna, koliki je koeficijent trenja? Koju brzinu tijelo ima kad se ponovo nađe u podnožju kosine (točka A)? (Rj. 0,34; 2,55 m/s)



25. Dvije glinene kugle mase 0,3 kg i 0,2 kg ovješene su na nitima jednake duljine  $l$  i vise jedna tik do druge. Kugle su zatim otklonjene iz položaja ravnoteže tako da se teža kugla otkloni ulijevo za  $50^\circ$ , a lakša kugla se otkloni udesno za  $25^\circ$ . Kugle se zatim puste, tako da se savršeno neelastičan sraz dogodi točno u položaju ravnoteže. Nakon sudara pronađite maksimalni kut otklona tako slijepljenih kugli! (Rj.  $18,9^\circ$ )
26. Homogeni valjak momenta tromosti  $I$  počinje rotirati u fluidu pod utjecajem stalnog vanjskog momenta sile  $M = I\alpha$ . Pretpostavite da je moment sile otpora sredstva proporcionalan kutnoj brzini vrtnje  $M_{ot} = -b\omega$ . Pronađite vremensku ovisnost kutne brzine  $\omega(t)$ . U limesu kada vrijeme ide u beskonačnost pronađite graničnu kutnu brzinu kojom se valjak jednoliko vrti. Uzmite da je  $I = 1 \text{ kgm}^2$ ,  $\alpha = 10 \text{ s}^{-2}$ ,  $b = 0,5 \text{ Nms}$ . (Rj.  $20 \text{ s}^{-1}$ )

$M = 0,5 \text{ kg}$   
 $l = 0,4 \text{ m}$   
 $m = 13 \text{ g}$   
 $v = 2,4 \text{ m/s}$   
 $\alpha = ?$



$$\sin \alpha = \frac{h}{l} \rightarrow h = \sin \alpha \cdot \frac{l}{2}$$

Zakon očuvanja momenta impulsa

$$(1) \quad L = I\omega = \frac{l}{2} \cdot m \cdot v \rightarrow \omega = \frac{l}{2} \frac{m \cdot v}{I}$$

Zakon očuvanja energije

$$(2) \quad mgh = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$(1) \rightarrow (2) \quad mgh = \frac{I_{uc} l^2 m^2 v^2}{8 I_{uc}^2}$$

$$mg \cdot \sin \alpha \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2 m v^2}{4 \cdot 8 I_{uc}}$$

$I = mr^2 \rightarrow$  točkastog tijela

$$\left. \begin{aligned} I &= M \left( \frac{l}{2} \right)^2 \\ I' &= m \left( \frac{l}{2} \right)^2 \end{aligned} \right\} I_{uc} = 2M \left( \frac{l}{2} \right)^2 + m \left( \frac{l}{2} \right)^2$$

$$g \cdot \sin \alpha = \frac{l m v^2}{4 \left( \frac{l}{2} \right)^2 (2M + m)}$$

$$\sin \alpha = \frac{m v^2}{g l (2M + m)}$$

$$\sin \alpha = 0,01884$$

$$\alpha = 1,079^\circ$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$13) \quad m = 100 \text{ kg}$$

$$t_0 = 0 \text{ s}$$

$$F(t) = F_0 e^{At}$$

$$F_0 = 100 \text{ N}$$

$$A = 0,1 \text{ s}^{-1}$$

$$t_1 = 10 \text{ s}$$

$$t_2 = 20 \text{ s}$$

$$s(t_2) = ?$$

$$F(t) = m a(t)$$

$$\frac{dv}{dt} = a$$

$$F_0 e^{At} = m a = \frac{dv}{dt} \quad m \left| \cdot \frac{dt}{m} \right.$$

$$\int_{v(0)}^{v(t)} dv = \frac{F_0}{m} \int_0^t e^{At} dt$$

$$v(t) = -\frac{F_0}{Am} + \frac{F_0}{m} \frac{e^{At}}{A}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{F_0}{Am} (e^{At} - 1)$$

$$\int_0^s ds = \frac{F_0}{Am} \int_0^t (e^{At} - 1) dt$$

$$s(t) = \frac{F_0}{Am} (e^{At} - 1) - \frac{F_0}{Am} \cdot t$$

$$s(t_1) = 72 \text{ m} \rightarrow s_1$$

$$v_1 = v(t_1) = \frac{F_0}{Am} (e^{At} - 1) = 17,2 \text{ m/s}$$

$$\rightarrow F = 0$$

$$s = v_1 \cdot t$$

$$s(t_2) = v_1 \cdot t_2 = 172 \text{ m}$$

$$s_1 + s_2 = 244 \text{ m}$$



14)  $m = 200g$   
 $v = 4,5 m/s$   
 $-75\% E_k$

$$\frac{1}{4} \frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2}$$

$$v' = \pm \frac{1}{2} v$$

$$\vec{v}' = -\frac{1}{2} \vec{v}$$

$$J = \vec{p} - \vec{p}' = mv + mv' = mv + \frac{1}{2}mv = \frac{3}{2}mv = 1,35 Ns$$

15)  $v_0 = 5 m/s$   
 $\mu = 0,1$   
 $t = ?$

$$v_{cm} = R \cdot \omega = v_T$$

$$ma = -F_{fr} = -\mu mg$$

$$a = -\mu g$$

$$\frac{dv}{dt} = -\mu g$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = -\mu g \int_0^t dt$$

$$v(t) = -\mu g t + v_0$$

↳ v centra mase

$$|\Sigma| = +R F_{fr} = +R \mu mg$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = +R \mu mg \quad I = \frac{2}{5} m R^2$$

$$\frac{2}{5} m R^2 \int_0^{\omega} d\omega = +R \mu mg \int_0^t dt$$

$$\omega(t) = \frac{5}{2} \frac{\mu t g}{R}$$

$$V_{cm}(t_1) = R \omega(t_1)$$

$$-\mu g t_1 + v_0 = \frac{5}{2} \mu g t_1$$

$$\mu g t_1 + \frac{5}{2} \mu g t_1 = v_0$$

$$\mu g \left(\frac{7}{2}\right) t_1 = v_0$$

$$t = \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g}$$

$$t_1 = 1.46s$$

$$26) I = 1 \text{ kg m}^2$$

$$M = I a \quad (a = 10 \text{ s}^{-2})$$

$$\tau_{\text{torp}} = -b \omega \quad (b = 0.5 \text{ Nms})$$

$$\omega(t) = ?$$

$$\omega(t = \infty) = ?$$

$$I \cdot \dot{\omega} = \tau + \tau_{\text{torp}}$$

$$I \cdot \dot{\omega} = I a - b \omega$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = I a - b \omega \quad | \cdot dt$$

$$I \int_0^{\omega(t)} \frac{d\omega}{I a - b \omega} = \int_0^t dt$$

$$\left| \begin{array}{l} I a - b \omega = y \\ dy = -b d\omega \end{array} \right|$$

$$-\frac{1}{b} \int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{b} \ln y$$

$$-\frac{1}{b} \ln(I a - b \omega) \Big|_0^{\omega} = t$$

$$\ln(1a - bw) \Big|_0^w = -\frac{b}{1}t$$

$$\ln(1a - bw) - \ln 1a = \ln \frac{1a - bw}{1a} = -\frac{b}{1}t$$

$$1a - bw = 1a e^{-\frac{b}{1}t}$$

$$w(t) = \frac{1a}{b} (1 - e^{-\frac{b}{1}t})$$

$$w(t \rightarrow \infty) = \frac{1a}{b} (1 - e^{-\infty})$$

$$= \frac{1a}{b} = \frac{1 \text{ kg m}^3 \cdot 10 \text{ s}^{-2}}{0,5 \text{ Nm}} = 20 \text{ s}^{-1}$$

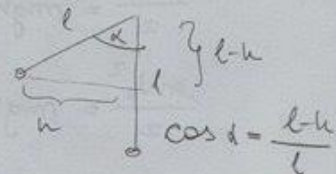
$$25) m_1 = 0,3 \text{ kg}$$

$$m_2 = 0,2 \text{ kg}$$

$$l$$

$$\alpha_1 = 50^\circ$$

$$\alpha_2 = 25^\circ$$



$$h = l(1 - \cos \alpha)$$

$$mgh = E_p = E_u$$

$$\frac{mv^2}{2} = E_k = E_u$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

$$v^2 = 2gh$$

$$v^2 = 2g(l(1 - \cos \alpha))$$

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} \rightarrow v_1 \text{ ; } v_2$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot v$$

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v$$

$$\frac{m_1 \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_1)} - m_2 \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_2)}}{m_1 + m_2} = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} \quad /: \sqrt{2gl}$$

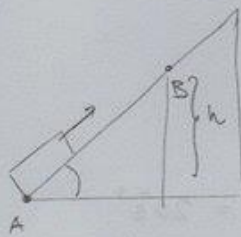


$$\left( \frac{m_1 \sqrt{1 - \cos \alpha_1} - m_2 \sqrt{1 - \cos \alpha_2}}{m_1 + m_2} \right)^2 = 1 - \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = 1 - \left( \frac{m_1 \sqrt{1 - \cos \alpha_1} - m_2 \sqrt{1 - \cos \alpha_2}}{m_1 + m_2} \right)^2$$

$$\alpha = 18,9^\circ$$

24)



$$v_0 = 5 \text{ m/s}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$s = 1,6 \text{ m}$$

$$\mu = ?$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{s}$$

$$h = s \cdot \sin \alpha$$

$$F_{fr} = \mu mg \cos \alpha$$

$$(1) \quad \frac{mv_0^2}{2} = mgh + F_{fr} s$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \mu mg \cos \alpha s$$

$$\frac{v_0^2}{2} = g \cdot s \cdot \sin \alpha + \mu g \cdot \cos \alpha s$$

$$\frac{\frac{v_0^2}{2} - g \sin \alpha \cdot s}{g \cos \alpha} = \mu$$

$$\mu = 0,34$$

$$(II) \quad mg \sin \alpha \cdot s = \frac{mv^2}{2} + \mu g \cos \alpha \cdot s$$

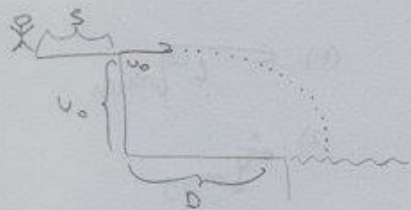
$$\frac{v^2}{2} = g \sin \alpha \cdot s - \mu g \cos \alpha \cdot s$$

$$v = \sqrt{2gs (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$$

$$= 2,5 \text{ m/s}$$

23)  $y_0 = 2\text{m}$

$a(t) = t \text{ m/s}^3$



$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + y_0$$

$$x(t) = v_0 t \rightarrow t = \frac{x}{v_0}$$

$$y(x) = -\frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2} + y_0$$

$$y(x = x_0) = 0$$

$$-\frac{g}{2} \frac{x_0^2}{v_0^2} = -y_0$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2} \frac{x_0^2}{y_0}} = \sqrt{\frac{g}{2y_0}} \cdot x_0$$

$$a = t$$

$$\frac{dv}{dt} = t$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{t^2}{2}$$

$$v(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$s(t) = \frac{t^3}{6}$$

$$v_0 = v(t_0) = \frac{t_0^2}{2}$$

$$t_0 = \sqrt{2v_0}$$

$$\rightarrow s(t_0) = \frac{(\sqrt{2v_0})^3}{6}$$

$$= 4,8\text{m}$$



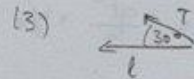
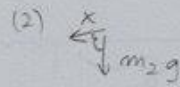
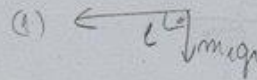
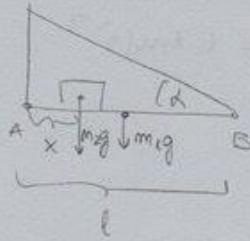
22)  $m_1 = 16 \text{ kg}$

$l = 6 \text{ m}$

$\alpha = 35^\circ$

$m_2 = 24 \text{ kg}$

$T = ?$



$$\sum \tau_i = 0$$

$$\frac{l}{2} \times m_1 g + x \times m_2 g + l \times T = 0$$

$$\frac{l}{2} m_1 g \sin 30^\circ \hat{z} + x \cdot m_2 g \cdot \sin 30^\circ \hat{z} - l T \sin \alpha \hat{z} = 0 \quad / \hat{z} \quad (\hat{z} \cdot \hat{z} = 1)$$

$$l T \sin \alpha = \frac{l}{2} m_1 g + x m_2 g \quad / : l \sin \alpha$$

$$T(x) = \frac{\frac{l}{2} m_1 g}{l \sin \alpha} + \frac{x m_2 g}{l \sin \alpha}$$

$$F = T(x) = 440 \text{ N}$$

$$x = \frac{T(l \sin \alpha) - \frac{l}{2} m_1 g}{m_2 g} = 2.216 \text{ m}$$