8 Zadatak: Krenuvši iz mirovanja, sitno tijelo se spušta iz točke A prema točki B tako da prvi dio puta prevaljuje klizeći niz kosinu nagiba α, a ostatak puta prevaljuje klizeći po vodoravnoj polozi. Vodoravna udaljenost između točaka A i B veća je od visinske razlike među njima, a iznos brzine kojom tijelo klizi po vodoravnom dijelu puta jednak je iznosu brzine koju je tijelo imalo pri dnu kosine. Odredi nagib α tako da čitavo gibanje traje što je moguće kraće. Sile otpora smatramo zanemarivim.

Postupak: Neka je h visinska razlika između točaka A i B, a $d > h$ neka je vodoravna udaljenost među njima. Označimo li s b duljinu baze kosine tada je duljina puta koji tijelo prevaljuje klizeći niz kosinu

$$s_1 = \sqrt{h^2 + b^2},$$

dok je duljina vodoravnog dijela puta

$$s_2 = d - b.$$

Za vrijeme klizanja niz kosinu prisutna je akceleracija iznosa

$$a_1 = g \sin \alpha = gh/s_1,$$

gdje je α nagib kosine, a koristili smo $\sin \alpha = h/s_1$. S obzirom da tijelo kreće iz mirovanja trajanje klizanja niz kosinu je

$$t_1 = \sqrt{2s_1/a_1} = \sqrt{2(b^2 + h^2)/gh}.$$

Iznos brzine pri dnu kosine, a time i na vodoravnom dijelu putanje je

$$v_2 = a_1 t_1 = \sqrt{2gh},$$

te je trajanje gibanja po vodoravnom dijelu putanje

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{d - b}{\sqrt{2gh}}.$$

Ukupno trajanje putovanja je

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{\sqrt{2gh}} \left(2\sqrt{b^2 + h^2} + (d - b) \right),$$

Ekstremalnu vrijednost gornjeg izraza pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} t = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2gh}} \left(\frac{2b}{\sqrt{b^2 + h^2}} - 1 \right),$$

koji je ispunjen za duljinu baze kosine

$$b = h/\sqrt{3}.$$

Da je riječ o minimumu potvrđuje druga derivacije vremena t po parametru b,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}b^2} t = \cdots = \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\frac{h}{b^2 + h^2} \right)^{3/2},$$

koja je veća od nule za sve vrijednosti $b \geq 0$. Nadalje, s obzirom da dobivena duljina baze kraća od ukupne vodoravne udaljenosti, t.j. za dobivenu vrijednost vrijedi $b < h$ dok prema zadatku imamo $h < d$, smatramo ju rješenjem zadanog problema. Konačno, traženi kut nagiba kosine je

$$\alpha = \arctan \frac{h}{b} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Rješenje: $\alpha = \pi/3$

12 Zadatak: n sitnih tijela ukupne mase M povezano je s pomoću n bezmasenih nerastezljivih niti jednake duljine tako da tijela i niti čine pravilni n-terokut s polumjerom opisane kružnice R. Kad se taj n-terokut vrti oko osi koja je okomita na ravninu n-terokuta i prolazi njegovim središtem, napetosti niti tijelima osiguravaju potrebnu centripetalnu silu. Odredi napetost niti ako se n-terokut vrti kutnom brzinom ω te pronađi limes tog izraza kad n teži u beskonačno. (Traženi limes opisuje napetost tankog obruča mase M i polumjera R pri vrtnji kutnom brzinom ω.)

Postupak: Kako bi se tijelo mase $m = M/n$ vrtjelo kutnom brzinom ω putanjom polumjera zakrivljenosti R na njega mora djelovati centripetalna sila iznosa

$$F_{\text{cp.}} = m\omega^2 R = M\omega^2 R/n.$$

Tu silu osiguravaju dvije napete niti koje, svaka sa svoje strane, s tangentom na kružnicu zatvaraju kut $\alpha = \pi/n$. Slijedi da iznos zbroja projekcija dvaju sila u smjeru središta n-terokuta možemo napisati kao

$$F_{\text{cp}} = 2T_n \sin[\pi/n],$$

gdje je T_n napetost niti. Slijedi

$$T_n = \frac{M\omega^2 R}{2n \sin[\pi/n]}.$$

Kad n teži u beskonačno imamo

$$T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \frac{M\omega^2 R}{2n \sin[\pi/n]} = \frac{M\omega^2 R}{2\pi}.$$

Rješenje: $T_n = M\omega^2 R/2n \sin[\pi/n]$, $T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n = M\omega^2 R/2\pi$

13 Zadatak: Sitno tijelo obješeno je s pomoću tanke nerastezljive niti duljine ℓ o čvrsto uporište i giba se opisujući kružnicu polumjera $r < \ell$ u vodoravnoj ravnini (tzv. stožasto njihalo). Odredi frekvenciju vrtnje te njen limes za $r/\ell \to 0$.

Postupak: Na tijelo djeluju gravitacijska sila iznosa mg i napetost niti iznosa T koje zajedno daju centripetalnu silu iznosa $m\omega^2 r$, gdje je ω kutna brzina, a r je polumjer putanje. S obzirom da tijelo ne akcelerira u uspravnom smjeru projekcija ukupne sile na uspravni pravac jednaka je nuli,

$$T\cos\phi - mg = 0,$$

dok je projekcija ukupne sile na vodoravnu ravninu po iznosu jednaka centripetalnoj sili,

$$T\sin\phi = m\omega^2 r,$$

gdje je ϕ kut koji nit zatvara s uspravnim pravcem. Eliminacijom T iz gornjih jednadžbi slijedi

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{\omega^2 r}{g},$$

a s obzirom da iz geometrije imamo

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{r}{\sqrt{\ell^2 - r^2}},$$

slijedi

$$\omega^2 = \frac{g}{\sqrt{\ell^2 - r^2}} = \frac{g}{\ell}\left(1 - (r/\ell)^2\right)^{-1/2}.$$

Za $r/\ell \to 0$ imamo

$$\lim_{r/\ell \to 0} \omega^2 = \frac{g}{\ell}.$$

Rješenje: $\omega = \sqrt{g/\ell}\left(1 - (r/\ell)^2\right)^{-1/4}$, $\lim_{r/\ell \to 0} \omega = \sqrt{g/\ell}$

14 Zadatak: Raketni motor ubrzava raketu time što u suprotnom smjeru izbacuje plin brzinom iznosa v u odnosu na raketu. Masa rakete umanjuje se za masu izbačenog plina. Ako je raketa krenula iz mirovanja, odredi brzinu koju će imati u trenutku u kojem će njena masa iznositi jednu trećinu početne mase.

Postupak: Promjena količine gibanja plina mora biti suprotna promjeni količine gibanja rakete (Newtonovi zakoni). Promjenu količine gibanja mase koja pri izbacivanju plina mase Δm ostaje u raketi možemo napisati kao

$$\Delta \mathbf{p}_{\text{raketa}} = (M - \Delta m)(\mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}) - (M - \Delta m)\mathbf{V} \simeq M\,\Delta \mathbf{V},$$

gdje je M masa rakete, $\mathbf{V}$ je brzine rakete, a zanemarili smo član $\Delta m\,\Delta \mathbf{V}$. Tome odgovara promjena količine gibanja izbačenog plina

$$\Delta \mathbf{p}_{\text{plin}} = \Delta m\,(\mathbf{V} + \mathbf{v}) - \Delta m\,\mathbf{V} = \Delta m\,\mathbf{v},$$

gdje je $\mathbf{v}$ relativna brzina izbacivanja plina. S obzirom da mora biti $\Delta \mathbf{p}_{\text{raketa}} = -\Delta \mathbf{p}_{\text{plin}}$ slijedi

$$M\,\Delta \mathbf{V} = -\Delta m\,\mathbf{v}.$$

Također moramo uvažiti da izbacivanje plina smanjuje masu rakete pa pišemo

$$\Delta m = -\Delta M.$$

Pišući u diferencijalnom obliku, ograničavajući razmatranje isključivo na pravac duž kojeg se raketa giba, te uz separaciju varijabli dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\mathrm{d}V_x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}M}{M}$$

koju ćemo integrirati od početnog (0) do konačnog (1) stanja. Slijedi

$$V_{1x} = V_{0x} + v_x \ln\left[\frac{M_1}{M_0}\right].$$

U našem slučaju $V_{0x} = 0$, $M_0/M_1 = 3$, te slijedi $V_{1x} = -v_x \ln 3$

Rješenje: $V = v \ln 3$