Zadaci za vježbu, drugi dio

1 **Zadatak:** Kako bi se automobil kretao vodoravnom cestom brzinom iznosa $v_0 = 60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ njegov motor mora raditi snagom $P_0 = 5\,\mathrm{kW}$. Pretpostavljajući da je sila otpora razmjerna kvadratu brzine automobila, odredi najveću brzinu koju automobil može postići na vodoravnoj cesti ako je najveća snaga njegovog motora $P_{\max} = 50\,\mathrm{kW}$.

Postupak: Snaga je jednaka umnošku iznosa brzine tijela i komponente sile u smjeru gibanja. Na vodoravnoj cesti pri brzini v_0 imamo

$$P_0 = F_0 v_0,$$

dok je prema pretpostavci zadatka

$$F_0 = k v_0^2.$$

Pri maksimalnoj snazi motora imamo

$$P_{\max} = F_{\max} v_{\max}, \qquad F_{\max} = k v_{\max}^2.$$

Eliminacijom k, F_0 i $F_{\max}$ iz gornjeg sustava jednadžbi slijedi

$$v_{\max} = v_0 \left(\frac{P_{\max}}{P_0}\right)^{1/3}.$$

Za zadane vrijednosti $v_{\max} \simeq 129.3\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

Rješenje: $v_{\max} = v_0 (P_{\max}/P_0)^{1/3} \simeq 129.3\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

2 Zadatak: Sitno tijelo mase $m = 1\,\mathrm{kg}$ obješeno je s pomoću tanke bezmasene niti o čvrsto uporište, otklonjeno je iz ravnotežnog položaja tako da nit zatvara kut $\alpha_0 = 45^\circ$ s uspravnim pravcem, te je pušteno u gibanje iz mirovanja (njihanje). Odredi napetost niti u trenutku u kojem tijelo prolazi ravnotežnim položajem. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: U trenutku kada tijelo prolazi ravnotežnim položajem ono se giba kružnom putanjom polumjera ℓ brzinom iznosa v_0 pri čemu na njega napetost niti iznosa T usmjerena prema središtu zakrivljenosti putanje te gravitacijska sila iznosa mg suprotnog smjera. Zbroj tih dviju sila mora po iznosu biti jednak potrebnoj centripetalnoj sili,

$$F_{\mathrm{cp}} = \frac{mv_0^2}{\ell} = T - mg,$$

odnosno

$$T = m\left(\frac{v_0^2}{\ell} + g\right).$$

Brzinu v_0 odredit ćemo na osnovu očuvanja mehaničke energije,

$$E = E_{\mathrm{pot.}} + E_{\mathrm{kin.}} = mgh + \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell(1 - \cos\alpha) + \frac{mv_0^2}{2}.$$

gdje je $h = \ell(1-\cos\alpha)$ visina tijela u odnosu na ravnotežni položaj pri otklonu α. Pri maksimalnom otklonu $v = 0$ pa imamo

$$E = mg\ell(1 - \cos\alpha_0),$$

dok u ravnotežnom položaju $h = 0$ pa imamo

$$E = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Izjednačavanjem gornjih energija slijedi

$$v_0^2 = 2g\ell(1 - \cos\alpha_0).$$

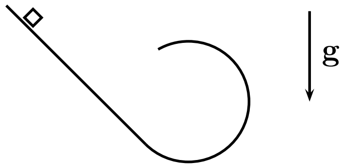
Konačno,

$$T = mg(3 - 2\cos\alpha_0).$$

Za zadane vrijednosti $T \simeq 15.56\,\mathrm{N}$.

Rješenje: $T = mg(3 - 2\cos\alpha_0) \simeq 15.56\,\mathrm{N}$

3 Zadatak: Sitno tijelo klizi bez trenja niz kosinu koja u svom podnožju prelazi u kružnu petlju polumjera zakrivljenosti R. Po ulasku u petlju tijelo nastavlja kliziti po njenoj unutrašnjoj strani. Odredi najmanju visinu u odnosu na najnižu točku petlje s koje valja pustiti tijelo da klizi niz kosinu želimo li da pri prolasku kroz najvišu točku petlje ono ne izgubi kontakt s podlogom (stropom).



Postupak: Ako tijelo pri prolasku kroz najvišu točku petlje ne gubi kontakt s podlogom ono se giba kružnom putanjom te zbroj reakcije podloge i gravitacijske sila koja djeluje na tijelo (obje sile okomite na putanju) mora biti po iznosu biti jednak potrebnoj centripetalnoj sili,

$$F_{\text{cp}} = \frac{mv^2}{R} = N + mg,$$

gdje je v brzina kojom se tijelo giba. Pustimo li tijelo u gibanje s visine H u odnosu na najnižu točku petlje, njegovu brzinu pri visini $h < H$ možemo odrediti na osnovu očuvanja mehaničke energije energije,

$$E = E_{\text{pot.}} + E_{\text{kin.}} = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mgH,$$

iz čega slijedi

$$v^2 = 2g(H - h),$$

odnosno u najvišoj točki petlje gdje je $h = 2R$,

$$v^2 = 2g(H - 2R).$$

Iznos sile reakcije podloge u toj točki slijedi kao

$$N = \frac{2mg(H - 2R)}{R} - mg = \frac{mg}{R}(2H - 5R).$$

Nas zanima granični slučaj u kojem reakcija podloge iščezava. Slijedi

$$H_{\text{min}} = \frac{5R}{2}.$$

Rješenje: $H_{\text{min}} = 5R/2$.

4 Zadatak: Tijelo miruje na vodoravnoj podlozi po kojoj može klizati bez trenja, a vodoravnom oprugom konstante $k = 50\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ je povezano s čvrstim uporištem. U nekom trenutku na tijelo počne djelovati vodoravna sila stalnog iznosa $F_0 = 3\,\mathrm{N}$ usmjerena tako da rasteže oprugu. Odredi maksimalnu kinetičku energiju koju će tijelo postići prije nego što se zaustavi.

Postupak: Neka se ishodište x-osi podudara s početnim položajem tijela, a njen smjer sa smjerom u kojem se tijelo počinje gibati (smjerom rastezanja opruge). Ukupnu silu koja djeluje na tijelo pri položaju x možemo napisati kao

$$F[x] = F_0 - kx.$$

Radi se o konzervativnoj sili kojoj odgovara potencijalna energija

$$E_{\text{pot.}}[x] = -\int_0^x F[x']\,\mathrm{d}x' = -F_0 x + \frac{1}{2}\,kx^2.$$

Ukupna energija je očuvana veličina čiju vrijednost određujemo na osnovu početnih uvjeta $x[t_0] = 0$ i $v_x[t_0] = 0$,

$$E = E_{\text{kin.}} + E_{\text{pot.}} = \frac{1}{2}mv_x^2 - F_0 x + \frac{1}{2}\,kx^2 = 0.$$

Kinetička energija postiže svoj maksimum pri položaju pri kojem potencijalna energija ima minimum,

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} E_{\text{pot.}}[x] = -F_0 + kx,$$

koji je ispunjen kada se tijelo nalazi pri položaju

$$x = \frac{F_0}{k}.$$

Kinetička energija pri tom položaju je

$$E_{\text{kin.}} = -E_{\text{pot.}} = F_0 \frac{F_0}{k} - \frac{1}{2}\,k \left(\frac{F_0}{k}\right)^2 = \frac{F_0^2}{2k}.$$

Za zadane vrijednosti $E_{\text{kin.}} = 0.09\,\mathrm{J}$.

Rješenje: $E_{\text{kin.}} = F_0^2/2k = 0.09\,\mathrm{J}$

5 Zadatak: Tijelo mase $m = 1\,\mathrm{kg}$ leži na vodoravnoj podlozi s kojom ima koeficijent trenja $\mu = 0.1$ i vodoravnom oprugom konstante $k = 100\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ je pričvršćeno za uporište. Tijelo puštamo u gibanje iz mirovanja iz točke u kojoj je opruga sabijena tako da djeluje silom iznosa $F_0 = 10\,\mathrm{N}$. Odredi duljinu puta koji će tijelo prevaliti do trenutka u kojem je pušteno u gibanje do trenutka u kojem će se ono po prvi puta zaustaviti. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Postavimo x-os tako da njena pozitivna orijentacija odgovara smjeru rastezanja opruge, a $x = 0$ neka odgovara položaju tijela u kojem sila opruge iščezava. Neka je

$$x_0 = -\frac{F_0}{k}$$

koordinata položaja iz kojeg tijelo kreće u gibanje, a $x_1 > x_0$ neka je koordinata položaja u kojem će se po prvi puta zaustaviti. U trenutku u kojem tijelo puštamo u gibanje ukupna se energija sustava sastoji isključivo od potencijalne energije sabijene opruge,

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2.$$

Do trenutka u kojem će se tijelo ponovo zaustaviti dio te energije će se utrošiti na savladavanje sile trenja, a ostatak će ponovo biti prisutan u obliku potencijalne energije opruge,

$$E = \mu mg(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}kx_1^2.$$

Izjednačavanjem gornjih izraza za energiju imamo

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \mu mg\,(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}kx_1^2.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe po x_1 slijedi

$$x_1 = -x_0 - 2\mu mg/k$$

te kao drugo, ovdje nezanimljivo, rješenje $x_1 = x_0$. Konačno, prevaljeni put je

$$s = x_1 - x_0 = -2x_0 - 2\mu mg/k = \frac{2}{k}(F_0 - \mu mg).$$

Za zadane vrijednosti $s \simeq 0.180\,\mathrm{m}$.

Rješenje: $s = (2/k)(F_0 - \mu mg) \simeq 0.180\,\mathrm{m}$

6 Zadatak: Na vodoravnu transportnu traku koja se kreće stalnom brzinom iznosa $v_0 = 0.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ odozgo sipi pijesak stalnim masenim tokom $\mu = 30\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$. Odredi snagu motora potrebnu za održavanje trake u gibanju zanemarujući sve sile otpora.

Postupak: Snaga je umnožak iznosa brzine i komponente sile u smjeru gibanja. Ovdje je, prema Newtonovom aksiomu, vodoravna sila jednaka promjeni vodoravne komponente količine gibanja pijeska u jedinici vremena,

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m\, v_0}{\Delta t},$$

gdje je Δm masa pijeska koja je u vremenu Δt pala na traku i biva ubrzana do brzine iznosa v_0. Slijedi

$$F = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\, v_0 = \mu v_0,$$

gdje je μ zadani maseni tok pijeska. Konačno, snaga je

$$P = F v_0 = \mu v_0^2.$$

Za zadane vrijednosti $P \simeq 10.8\,\mathrm{W}$.

Rješenje: $P = \mu v_0^2 \simeq 10.8\,\mathrm{W}$.

7 Zadatak: Vlak mase $m = 500\,\mathrm{t}$ se u početnom trenutku gibao brzinom iznosa $v_0 = 10\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, a narednih ga je $\Delta t = 30\,\mathrm{s}$ lokomotiva ubrzavala duž vodoravne pruge djelujući stalnom snagom $P = 2\,\mathrm{MW}$. Odredi duljinu prevaljenog puta u tom intervalu vremena te iznos konačne brzine. Učinak svih sila otpora smatramo zanemarivim.

Postupak: Rad koji lokomotiva obavlja počevši od trenutka $t = t_0$ povećava kinetičku energiju vlaka. Možemo pisati

$$W = P(t - t_0) = E_{\mathrm{kin.}}[t] - E_{\mathrm{kin.}}[t_0] = \frac{m}{2}\left(v^2[t] - v^2[t_0]\right),$$

gdje je $v[t_0] = v_0$ početna brzina vlaka. Slijedi

$$v[t] = \sqrt{v_0^2 + \frac{2P}{m}(t - t_0)},$$

te kao konačnu brzinu u trenutku $t_1 = t_0 + \Delta t$ imamo

$$v_1 = v[t_1] = v[t_0 + \Delta t] = \sqrt{v_0^2 + \frac{2P}{m}\Delta t}.$$

Prevaljeni put računamo integrirajući $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned} s = \int_{t_0}^{t_1} v\,\mathrm{d}t &= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left(v_0^2 + \frac{2P}{m}(t - t_0)\right)^{1/2} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\Delta t} \left(v_0^2 + \frac{2P}{m}t'\right)^{1/2} \mathrm{d}t' \\ &= \frac{2}{3}\,\frac{m}{2P}\left(v_0^2 + \frac{2P}{m}t'\right)^{3/2}\Bigg|_0^{\Delta t} \\ &= \frac{m}{3P}\left(\left(v_0^2 + \frac{2P}{m}\Delta t\right)^{3/2} - v_0^3\right) \end{aligned}$$

Za zadane vrijednosti $v_1 \simeq 56.7\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, $s \simeq 323.1\,\mathrm{m}$.

Rješenje: $s = (m/3P)((v_0^2 + (2P/m)\Delta t)^{3/2} - v_0^3) \simeq 323.1\,\mathrm{m}$, $v_1 = (v_0^2 + (2P/m)\Delta t)^{1/2} \simeq 56.7\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

8 Zadatak: Dvije čestice se gibaju duž dva usporedna pravca razmaknuta a u suprotnim smjerivima. Mase čestica su m_1 i m_2, a iznosi njihovih brzina su v_1 i v_2. Odredi iznos ukupne kutne količine gibanja čestica u referentnom sustavu središta mase.

Postupak: Položaje i brzine čestica u referentnom sustavu laboratorija možemo napisati kao

$$\mathbf{r}_1 = v_1 t\,\mathbf{i}\,, \qquad \mathbf{v}_1 = v_1\,\mathbf{i}\,, \qquad \mathbf{r}_2 = -v_2 t\,\mathbf{i} + a\,\mathbf{j}\,, \qquad \mathbf{v}_2 = -v_2\,\mathbf{i}.$$

čemu odgovaraju položaj i brzina središta mase

$$\mathbf{r}_{\text{cm}}[t] = \frac{m_1\mathbf{r}_1[t] + m_2\mathbf{r}_2[t]}{m_1+m_2} = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1+m_2}\,t\,\mathbf{i} + \frac{m_2 a}{m_1+m_2}\,\mathbf{j}\,,$$

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1+m_2}\,\mathbf{i}\,.$$

Položaje i brzine čestica u odnosu na središte mase sada možemo napisati kao

$$\mathbf{r}_1^* = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{m_2(v_1+v_2)}{m_1+m_2}\,t\,\mathbf{i} - \frac{m_2 a}{m_1+m_2}\,\mathbf{j}\,, \qquad \mathbf{v}_1^* = \frac{m_2(v_1+v_2)}{m_1+m_2}\,\mathbf{i}\,,$$

$$\mathbf{r}_2^* = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{\text{cm}} = -\frac{m_1(v_1+v_2)}{m_1+m_2}\,t\,\mathbf{i} + \frac{m_2 a}{m_1+m_2}\,\mathbf{j}\,, \qquad \mathbf{v}_1^* = -\frac{m_1(v_1+v_2)}{m_1+m_2}\,\mathbf{i}\,.$$

Ukupna količina gibanja u referentnom sustavu središta mase je

$$\mathbf{L}_\Sigma^* = \mathbf{L}_1^* + \mathbf{L}_2^* = \mathbf{r}_1^* \times \mathbf{p}_1^* + \mathbf{r}_2^* \times \mathbf{p}_2^* = \mathbf{r}_1^* \times m_1\mathbf{v}_1^* + \mathbf{r}_2^* \times m_2\mathbf{v}_2^*.$$

Koristeći gornje izraze za $\mathbf{r}_{1,2}^*$ i $\mathbf{v}_{1,2}^*$ slijedi

$$\mathbf{L}_\Sigma^* = \frac{m_1 m_2 a(v_1+v_2)}{m_1+m_2}\,\mathbf{k}.$$

Traženi iznos ukupne količine gibanja je modul gornjeg vektora,

$$L_\Sigma^* = \frac{m_1 m_2 a(v_1+v_2)}{m_1+m_2}.$$

Rješenje: $L_\Sigma^* = m_1 m_2 a(v_1+v_2)/(m_1+m_2)$

9 Zadatak: Dva jednaka svemirska broda čije su mase $m = 100\,\mathrm{t}$ povezana su užetom zanemarive mase i kruže oko njihova središta mase brzinama iznosa $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (napetost užeta brodovima osigurava centripetalnu silu). Odredi rad koji posade brodova moraju obaviti ako polaganim zatezanjem užeta žele prepoloviti udaljenost među brodovima.

Postupak: U ovom sustavu očuvana veličina je ukupna kutna količina gibanja, a rad koji posada obavlja zatezanjem užeta jednak je promjeni kinetičke energije gibanja svemirskih brodova. Iznos ukupne količine gibanja dvaju brodova mase m koji su povezani užetom duljine ℓ te se gibaju po kružnici polumjera $r = \ell/2$ brzinama iznosa v možemo napisati kao

$$L = 2rp = 2(\ell/2)mv = \ell mv.$$

S obzirom na očuvanje kutne količine gibanja slijedi

$$\ell v = \ell' v',$$

gdje su s lijeve strane veličine u početnom, a s desne (označene s $'$) strane su veličine u konačnom stanju sustava. Rad možemo pisati

$$W = \Delta E_{\mathrm{kin.}} = E'_{\mathrm{kin.}} - E_{\mathrm{kin.}} = 2\,\frac{mv'^2}{2} - 2\,\frac{mv^2}{2} = m(v'^2 - v^2).$$

Koristeći

$$v' = \frac{\ell}{\ell'}\,v = 2v,$$

slijedi

$$W = m\left((2v)^2 - v^2\right) = 3mv^2.$$

Za zadane vrijednosti $W = 30\,\mathrm{MJ}$.

Rješenje: $W = 3mv^2 = 30\,\mathrm{MJ}$

10 Zadatak: U vreću pijeska mase $M = 20\,\mathrm{kg}$ koja mirno visi na užetu tako da je udaljenost njena težišta od objesišta $\ell = 5\,\mathrm{m}$ vodoravno se prema težištu ispali puščano zrno mase $m = 15\,\mathrm{g}$. Zrno se "zaustavi" u vreći, a vreća se (sa zrnom u sebi) nastavi njihati s kutom maksimalnog otklona $\alpha = 4^\circ$. Odredi brzinu puščanog zrna prije nego što se ono zabilo u vreću. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Zabijanje zrna mase m i brzine v u mirnu vreću mase M shvaćamo kao savršeno neelastični sudar te na osnovu očuvanja količine gibanja imamo

$$p = mv = (M+m)V,$$

gdje je V brzina vreće sa zrnom nakon što se zrno u njoj "zaustavilo". Na osnovu očuvanja mehaničke energije slijedi da maksimalni otklon vreće sa zrnom nastupa kada se početna kinetička energija u cijelosti pretvori u gravitacijsku potencijalnu energiju. Možemo pisati

$$E = \frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh = (M+m)g\ell(1-\cos\alpha).$$

Eliminacijom V iz gornjeg sustava slijedi

$$v^2 = 2g\ell\left(\frac{M+m}{m}\right)^2(1-\cos\alpha) \simeq 2g\ell\left(\frac{M}{m}\right)^2(1-\cos\alpha).$$

Za zadane vrijednosti $v \simeq 652.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Rješenje: $v = ((M+m)/m)(2g\ell(1-\cos\alpha))^{1/2} \simeq 652.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

11 Zadatak: Dva tijela čije su mase m_1 i m_2 mogu slobodno (bez trenja) klizati duž vodoravne tračnice. Ako se tijelo m_1 savršeno elastično sudari s tijelom mase m_2 koje je do tada mirovalo, tijela se nakon sudara gibaju u suprotnim smjerovima brzinama jednakih iznosa. Odredi omjer masa $q = m_1/m_2$.

Postupak: U savršeno elastičnom čeonom sudaru u referentnom sustavu središta mase vrijedi

$$\mathbf{v}^*_{1,2}{}' = -\mathbf{v}^*_{1,2}.$$

Prelaskom u laboratorijski sustav gornja relacija glasi

$$\mathbf{v}_{1,2}{}' - \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = -(\mathbf{v}_{1,2} - \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}),$$

odnosno

$$\mathbf{v}'_{1,2} = 2\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} - \mathbf{v}_{1,2},$$

gdje je $\mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$ brzina središta mase. Ovdje imamo

$$\mathbf{v}'_1 = 2\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} - \mathbf{v}_1, \qquad \mathbf{v}'_2 = 2\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = -\mathbf{v}'_1.$$

Eliminacijom $\mathbf{v}'_{1,2}$ slijedi

$$\mathbf{v}_1 = 4\mathbf{v}_{\mathrm{cm}}.$$

Koristeći

$$\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1\mathbf{v}_1}{m_1 + m_2}$$

slijedi

$$q = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}.$$

Rješenje: $q = 1/3$

12 Zadatak: Bilijarska kugla nalijeće na mirnu bilijarsku kuglu jednake mase. Ako se prva kugla odbije pod kutom θ_1 u odnosu na smjer svog gibanja prije sudara, odredi kut koji zatvara smjer gibanja druge kugle nakon sudara sa smjerom gibanja prve kugle prije sudara. Sudar smatramo savršeno elastičnim.

Postupak: Sudar promatramo u sustavu u kojem druga kugla miruje prije sudara. U svakom sudaru očuvana je količina gibanja pa imamo

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v}_1' + m\mathbf{v}_2',$$

a u savršeno elastičnom sudaru očuvana je i kinetička energija

$$E_{\text{kin.}} = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1'^{\,2}}{2} + \frac{mv_1'^{\,2}}{2}$$

(veličine označene s $'$ odnose se na stanje nakon sudara.) Gornji izrazi čine sustav

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2', \qquad v_1^2 = v_1'^{\,2} + v_2'^{\,2}.$$

Kvadriranjem prve jednadžbe dobivamo

$$v_1^2 = v_1'^{\,2} + 2\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' + v_2'^{\,2},$$

te oduzimanjem druge jednadžbe slijedi

$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' = 0,$$

što znači da su brzine $\mathbf{v}_1'$ i $\mathbf{v}_2'$ međusobno okomite, odnosno, ako $\mathbf{v}_1'$ s $\mathbf{v}_1$ zatvara kut θ_1, onda $\mathbf{v}_2'$ s $\mathbf{v}_1$ zatvara kut

$$\theta_2 = {}^{\pi}\!/_{2} - \theta_1.$$

Može se razmotriti i slučaj u kojem je uvjet $\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' = 0$ ispunjen time što je jedna od brzina nakon sudara jednaka nuli. Ako $\mathbf{v}_1' = 0$, onda $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1$, što odgovara čeonom savršeno elastičnom sudaru čestica jednakih masa, te kut θ_1 nije dobro definiran. Ako $\mathbf{v}_2' = 0$, onda $\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1$, dakle sudar se "nije dogodio," te kut θ_2 nije dobro definiran.

Rješenje: $\theta_2 = {}^{\pi}\!/_{2} - \theta_1$

13 Zadatak: Tijelo mase $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ brzinom iznosa $v_1 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ udara u mirno tijelo mase $m_2 = 4\,\mathrm{kg}$ te se od njega odbija unazad brzinom iznosa v_1'. U sudaru se oslobađa toplina u iznosu od $20\,\mathrm{J}$. Odredi iznos brzine v_1'.

Postupak: Oslobođena toplina odgovara gubitku kinetičke energije u sustavu. Koristeći opću relaciju

$$E_{\mathrm{kin.}} - E'_{\mathrm{kin.}} = (1-k^2)\frac{m_1 m_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2}{2(m_1+m_2)}$$

računamo koeficijent restitucije,

$$k^2 = 1 - \frac{2(E_{\mathrm{kin.}} - E'_{\mathrm{kin.}})(m_1+m_2)}{m_1 m_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2} = 1 - \frac{2(E_{\mathrm{kin.}} - E'_{\mathrm{kin.}})(m_1+m_2)}{m_1 m_2 v_1^2}.$$

brzinu $\mathbf{v}_1'$ računamo iz opće relacije za čeoni sudar

$$\mathbf{v}_1' = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2} - k\frac{m_2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{m_1+m_2}.$$

Slijedi

$$\mathbf{v}_1' = \frac{m_1\mathbf{v}_1}{m_1+m_2} - k\frac{m_2\mathbf{v}_1}{m_1+m_2} = \frac{m_1 - k m_2}{m_1+m_2}\,\mathbf{v}_1.$$

Za zadane vrijednosti

$$k^2 = 0.5, \qquad \mathbf{v}_1' \simeq -0.366\,\mathbf{v}_1, \qquad v_1' = |\mathbf{v}_1'| \simeq 3.66\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Rješenje: $k^2 = 1 - 2(E_{\mathrm{kin.}} - E'_{\mathrm{kin.}})(m_1+m_2)/(m_1 m_2 v_1^2) = 0.5$, $v_1' = |m_1 - k m_2| v_1/(m_1+m_2) \simeq 3.66\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.