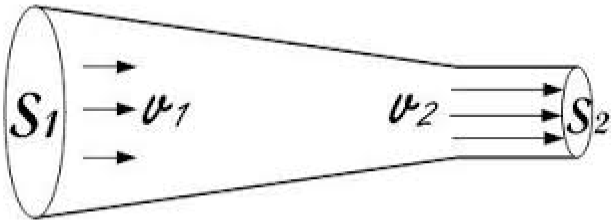
# Fizika 1 završni (odabrani izvodi)

## Jednadžba kontinuiteta

Zbog zakona očuvanja mase količina mase koja se promijeni u vremenu, mora biti stalna.




$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t}$$

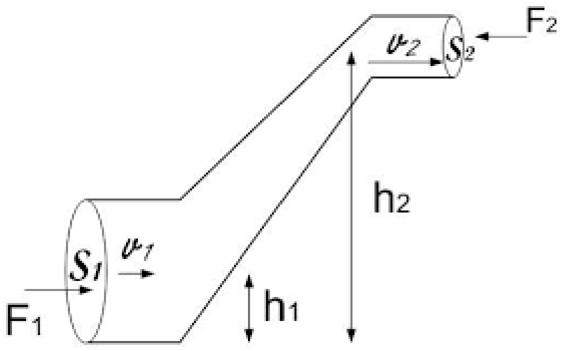
$$\frac{\rho \cdot \Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\rho \cdot \Delta V_2}{\Delta t}$$

$$\frac{\rho \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t}{\Delta t} = \frac{\rho \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t}{\Delta t}$$

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

---

## Bernoullijeva jednadžba




$$\Delta W_1 = \Delta W_2 + \Delta K + \Delta U$$

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta V$$

Sila:

$$F = p \cdot S$$

Put na kojem djeluje sila:

$$s = v \cdot \Delta t$$

Slijedi:

$$p_1 \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = p_2 \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot (v_2^2 - v_1^2) + \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$

Interludij:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Slijedi:

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) + \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$$

---

## Jednadžba adijabate

$$dQ = 0 = dU + dW$$

Zamijenom:

$$dU = n \cdot C_v \cdot dT$$

$$dW = p \cdot V$$

Idealni plin:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Deriviranjem prethodnog izraza:

$$p \cdot dV + dp \cdot V = n \cdot R \cdot dT$$

$$dT = \frac{p \cdot dV + dp \cdot V}{n \cdot R}$$

Kada sve ubacimo:

$$0 = n \cdot C_v \cdot \frac{p \cdot dV + dp \cdot V}{n \cdot R} + p \cdot dV$$

Množimo s $\frac{R}{p \cdot V \cdot C_v}$

$$0 = \frac{C_v + R}{C_v} \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p}$$

$$\kappa = \frac{C_v + R}{C_v}$$

Dobili smo dif. jednadžbu adijabatskog procesa:

$$\kappa \cdot \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}$$

Integracjom se dobiva:

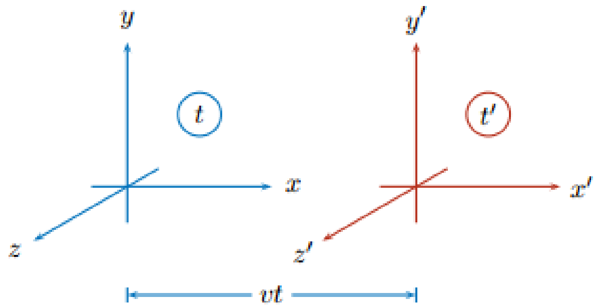
$$\kappa \cdot ln(\frac{V_2}{V_1}) = -ln(\frac{p_2}{p_1})$$

$$ln(\frac{V_2}{V_1})^{\kappa} = ln(\frac{p_1}{p_2})$$

$$\frac{V_2{}^{\kappa}}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

---

## Lorentzove transformacije




Lorentzove transformacije možemo izvesti u sljedeća četiri koraka:

1. Razmatranjem koordinata čestice koja miruje u jednom od dva referentna okvira dolazimo do do općenitog oblika transformacije $x$, $x'$, $t$ i $t'$ koordinata. Ako čestica miruje u $\mathcal{S}'$, njena je $x'$-koordinata stalna u vremenu, dok se u donosu na $\mathcal{S}$ ona giba brzinom iznosa $v$ u pozitivnom smjeru $x$-osi, što znači da je veličina $x - vt$ stalna u vremenu. S obzirom da Lorentzova transformacija mora biti linearna transformacija, zaključujemo da ona mora imati oblik
$$x' = \gamma(x - vt), \tag{B.1}$$
gdje je $\gamma$ za sada nepoznati koeficijent koja ne ovisi o koordinatama događaja, ali može ovisiti o iznosu relativne brzine $v$. Ponavljajući isti argument za česticu koja miruje u $\mathcal{S}$, a u $\mathcal{S}'$ se giba brzinom iznosa $v$ u negativnom smjeru $x'$-osi, nalazimo
$$x = \gamma(x' + vt'), \tag{B.2}$$
gdje je $\gamma$ ista za sada nepoznati koeficijent kao i u (B.1).

2. Razmatranjem koordinata fotona (čestice koja se u svim referentnim okvirima giba brzinom svjetlosti $c$) koji je u trenutku $t = t' = 0$ iz ishodišta odalsan u smjeru $x$ odnosno $x'$-osi određujemo koeficijent $\gamma$ u transformacijama (B.1) i (B.2). Koordinate fotona su
$$x = ct, \qquad x' = ct'. \tag{B.3}$$

S obzirom da općenite transformacije (B.1) i (B.2) moraju vrijediti i za foton koji razmatramo, koordinate (B.3) uvrštavamo u (B.1) i (B.2) te nakon algebarskih manipulacija nalazimo $\gamma^2 = \pm 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, gdje odabiremo pozitivan predznak kako bi transformacije (B.1) i (B.2) težile prema Galilejevim transformacijama kad $v \to 0$. Zaključujemo da je koeficijent $\gamma$ dan izrazom

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{B.4}$$

čime je je oblik transformacija (B.1) i (B.2) u potpunosti određen.

3. Transformaciju vremenske koordinate nalazimo eliminacijom $x$ odnosno $x'$-koordinate iz sustava (B.1) i (B.2), što vodi na

$$t' = \gamma\left(t - (1-\gamma^{-2})x/v\right), \qquad t = \gamma\left(t' + (1-\gamma^{-2})x'/v\right). \tag{B.5}$$

Koristeći (B.4), gornje se izraze može sažetije napisati u obliku

$$t' = \gamma(t - vx/c^2), \qquad t = \gamma(t' + vx'/c^2). \tag{B.6}$$

4. Transformacije $y$ i $y'$ koordinata nalazimo razmatranjem fotona koji se u $\mathcal{S}$ giba u smjeru pozitivne $y$-osi. Ako je foton odaslan u trenutku $t = t' = 0$ iz ishodišta, koordinate njegovog položaja u $\mathcal{S}$ su

$$x = 0, \qquad y = ct, \qquad z = 0, \tag{B.7}$$

dok u $\mathcal{S}'$ mora vrijediti

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = ct', \qquad z' = 0. \tag{B.8}$$

Koristeći transformacije (B.1) i (B.6) koordinate $x'$ i $t'$ u gornjem izrazu možemo izraziti preko koordinata $x$ i $t$ što vodi na $y' = ct$ te nakon usporedbe s (B.7) zaključujemo

$$y' = y. \tag{B.9}$$

S obzirom da se istovjetno razmtranje može provesti i za foton koji ze giba u smjeru $z$-osi, također mora vrijediti

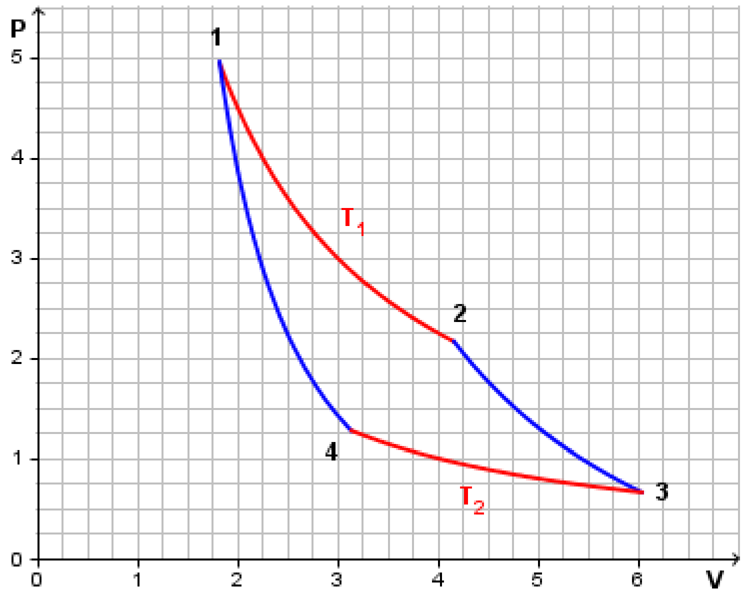
$$z' = z. \tag{B.10}$$

Lorentzove transformacije su sadržane u relacijama (B.1), (B.2), (B.4) (B.6), (B.9) i (B.10), koje ovdje ponavljamo zbog preglednosti. Transformacije kojima su koordinate u $\mathcal{S}'$ izražene preko koordinata u $\mathcal{S}$ su

$$x' = \gamma(x - vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \gamma(t - vx/c^2), \tag{B.11}$$

---

# Carnotov kružni proces




$$W_{1,2} = nRT_H \cdot ln(\frac{V_2}{V_1}) = Q_H > 0$$

$$W_{2,3} = \frac{nR}{\kappa - 1}(T_H - T_C) > 0$$

$$W_{3,4} = nRT_H \cdot ln(\frac{V_4}{V_3}) = Q_C < 0$$

$$W_{4,1} = \frac{nR}{\kappa - 1}(T_C - T_H) < 0$$

$$W = Q_H + Q_C$$

---

Izvod za korisnost

$$p_2 \cdot V_2^{\kappa} = p_3 \cdot V_3^{\kappa}$$

$$p_1 \cdot V_1^{\kappa} = p_4 \cdot V_4^{\kappa}$$

Koristimo ovo za sve tlakove:

$$p_2 = n \cdot R \cdot T_H \cdot V_2^{-1}$$

Podijelimo sljedeće dvije jednandžbe:

$$n \cdot R \cdot T_H \cdot V_2^{\kappa-1} = n \cdot R \cdot T_C \cdot V_3^{\kappa-1}$$

$$n \cdot R \cdot T_H \cdot V_1^{\kappa-1} = n \cdot R \cdot T_C \cdot V_4^{\kappa-1}$$

Dobivamo:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

Podijelimo $Q_H$ i $Q_C$ iz kružnog procesa i iskoristimo $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$:

$$\left|\frac{Q_H}{Q_C}\right| = \frac{T_H}{T_C}$$

$$\frac{Q_H}{Q_C} = -\frac{T_H}{T_C}$$

$$\eta = \frac{dobiveno}{uloženo} = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H+Q_C}{Q_H} = 1 + \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

---

## Mayerova relacija

Gledamo izobarni proces:

$$dQ = dU + p \cdot dv = n \cdot C_p \cdot dT$$

Za idealni plin

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Derivacijom toga:

$$p \cdot dV + dp \cdot V = n \cdot R \cdot dT$$

Za izobarni proces vrijedi $dp \cdot V = 0$.

Dakle:

$$p \cdot dV = n \cdot R \cdot dT$$

Koristeći:

$$dU = n \cdot C_v \cdot dT$$

Dobivamo:

$$dQ = n \cdot C_v \cdot dT + n \cdot R \cdot dT = n \cdot C_p \cdot dT$$

Dijelimo s $n \cdot dT$

$$C_p = C_v + R$$