Rješenja zadataka iz ljetnog ispitnog roka iz Fizike 1
utorak, 03. 07. 2012.

Zadaci

1. Na mirno vozilo mase m=100 kg u trenutku t_0=0 s počne djelovati sila stalnog smjera i iznosa ovisnog o vremenu, $F(t)=F_0e^{At}$, gdje su F_0=100 N i A=0.1 m^{-1} konstante. Sila prestane djelovati u trenutku t_1=10 s. Odredite udaljenost koju će vozilo prevaliti od trenutka t_0 do trenutka t_2=20 s.
(8 bodova)

Rješenje:

Iz Newtonovog zakona:

$$m\frac{dv}{dt}=F_0 e^{At}$$

Integrirajući se dobije ovisnost brzine i puta o vremenu

$$v(t)=\frac{F_0}{mA}\left(e^{At}-1\right)$$
$$s(t)=\frac{F_0}{mA^2}\left(e^{At}-1\right)-\frac{F_0}{mA}t$$

-Za prvih 10 sekundi prijeđeni put je:

$s(10)\approx 72$m

-Zadnjih 10 sekundi tijelo se giba jednoliko, brzinom:

$v(10)=10(e^1-1)\approx 17{,}2$ m/s

i prelazi put od

$s_{jednoliko}=v(10)\cdot 10 = 172$m

Ukupan put je 72 m + 172 m = 244 m

2. Satelit GPS sustava za pozicioniranje se giba oko Zemlje po kružnici tako da obiđe Zemlju dva puta u jednom danu. Na kojoj visini iznad površine Zemlje satelit kruži? $G_N=6{,}67\cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-1}, $M_Z=5{,}97\cdot 10^{24}$ kg, R_Z=6378 km.
(6 bodova)

Rješenje:

$2\cdot T$=1 dan

$$T=2\frac{\pi}{\omega}=0{,}5\,dana=0{,}5\cdot 24\cdot 60\cdot 60\mathrm{s}$$

$$\omega=2\frac{\pi}{T}=\frac{2\pi}{0{,}5\cdot 24\cdot 60\cdot 60}s^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{m_{sat.} v^2}{r} = m_{sat.} \omega^2 r = G_N \frac{m_{sat.} M_Z}{r^2}$$
$$\Rightarrow r^3 = G_N \frac{m_{sat.} M_Z}{\omega^2}$$
$$\Rightarrow r = 26618882\, m \approx 26619\, km$$

Satelit je dakle na visini od približno 26619 km od središta Zemlje. Stoga je visina na kojoj kruži

$h = r - R_Z$ = 26619 km - 6378 km ≈20240 km

3. Koliki rad, u jedinicama p_0V_0, obavlja kisik pri adijabatskoj ekspanziji početnog volumena V_0 i tlaka p_0 do dvostruko većeg volumena $2V_0$?
(6 bodova)

Rješenje:

Rad koji plin obavlja pri ekspanziji od volumena V_0 do volumena $2V_0$ dan je izrazom:

$$W = \int_{V_0}^{2V_0} p dV.$$

U adijabatskom procesu vrijedi pV^κ =const, što nam omogućava da tlak u bilo kojem "trenutku" izrazimo preko volumena i određenih konstanti:

$$p = p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^\kappa,$$

iz čega, nakon integracije, slijedi izraz za rad

$$W = \frac{p_0V_0}{\kappa - 1}\left[1 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^{1-\kappa}\right].$$

Molekula kisika se sastoji od dva atoma, što znači da ima 5 stupnjeva slobode (3 translacijska i 2 rotacijska). Ovaj podatak definira C_V, $C_V = 5/2R$, te iz Mayerove relacije $C_p - C_V = R$ dobijemo da je $C_p = 7/2R$, odnosno vrijednost adijabatske konstante

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{5} = 1.4.$$

Slijedi da je traženi izraz za rad jednak:

$$W = 0.605\, p_0V_0.$$

4. Lopta mase m=200 g se giba horizontalno brzinom v=4,5 m/s i udari u zid od kojega se odbije. Pri sudaru lopta je izgubila 75% kinetičke energije. Izračunajte iznos impulsa sile kojim je zid djelovao na loptu pri sudaru.
(6 bodova)

Rješenje:

Impuls sile jednak je promjeni količine gibanja:

$I=F\Delta t=p_1'-p_1$,

gdje su p_1 i p_1' količine gibanja lopte prije i poslije sudara.
Brzinu poslije sudara nalazimo iz kinetičke energije. Lopta pri sudaru gubi 75% kinetičke energije, dakle kinetička energija poslije sudara je

$E_k' = 0.25\ E_k = E_k/4$

odnosno, za iznose brzina vrijedi:

$$\frac{mv'^2}{2}=\frac{1}{4}\frac{mv^2}{2}$$
$$v'^2=\frac{1}{4}v^2$$
$$v'=\frac{1}{2}v$$

Brzine lopte prije i poslije sudara su u suprotnom smjeru, pa je $p' = -p/2$.
Konačno, iznos impulsa sile kojim je zid djelovao na loptu je:

$I = p'-p = mv'+mv = 3mv/2$=(3/2)(0,2 kg) (4,5 m/s) = 1,35 kg m/s = 1,35 Ns

5. U kuglani bacite loptu bez rotacije početnom brzinom 5 m/s. Koeficijent trenja između kugle i podloge je μ = 0,1. Nakon koliko vremena će se kugla početi kotrljati bez proklizavanja?
(8 bodova)

Rješenje:

Zadana je početna (linearna) brzina $v(0)=v_0$ i početna kutna brzina $\omega_0 = 0$.
Kotrljanje bez proklizavanja se dogodi kada su obodna brzina $v_{obodna} = \omega R$ i linearna brzina centra mase v_{CM} jednake. Nazovimo trenutak u kojem se to dogodi $t=T$:

$v_{CM}(T)=\omega(T)R$.

Horizontalna sila koja djeluje na kuglu je samo sila trenja, pa je ubrzanje centra mase:

$-ma_{CM} = F_{tr}$
$ma_{CM} = -\mu mg$
$a_{CM} = -\mu g.$

Uz to ubrzanje (usporavanje) i početnu brzinu, brzina centra mase je:

$v_{CM}(t) = -a_{CM}t+A$
$v_{CM}(0) = A = v_0$
$v_{CM}(t) = v_0 - \mu g\, t.$

Moment sile trenja ubrzava rotaciju:

$I\alpha = RF_{tr}$

$(2/5)mR^2\alpha = R\mu mg$

$\alpha = (5/2)\mu gR$.

Za danu kutnu akceleraciju i početni uvjet (nema rotacije), slijedi da je kutna brzina:

$\omega(t) = \alpha t + B$
$\omega(0) = 0 = B$
$\omega(t) = (5/2)\, \mu g\, t$.

Trenutak T u kojem su v_{obodna} i v_{CM} jednake:

$(5/2)\, \mu g\, T = v_0 - \mu g\, T$
$(7/2)\, \mu g\, T = v_0$
$T = 2v_0/(7\, \mu g)$.

Za zadane brojeve, T= 1,46 s.

6. Pion (m_π=273 m_e) koji miruje raspada se u mion (m_μ=207 m_e) i neutrino (m_ν=0). Izračunajte kinetičke energije (u jedinicama MeV) i količine gibanja (u jedinicama MeV/c) miona i neutrina (m_e masa elektrona).
(6 bodova)

Rješenje:

$p_1+p_2=0$
$E_1+E_2=E$

$$T_1=E_1-m_1c^2=c^2\frac{(M-m_1)^2-m_2^2}{2M}$$

$$T_2=E_2-m_2c^2=c^2\frac{(M-m_2)^2-m_1^2}{2M}$$

itd.

$$T_{\mu}=T_1=4.1\,MeV$$
$$T_{\nu}=T_2=29.7\,MeV$$

$$p_{\mu}=p_{\nu}=29.7\,MeV/c$$