1 1. domaća zadaća

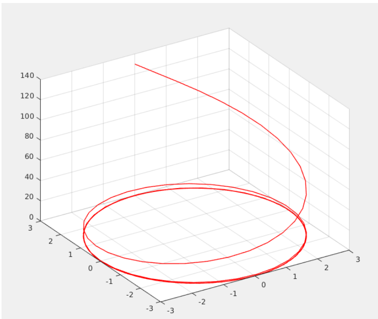
1.1 Zadatak 1

Čestica kruži nad ravninom $z = 0$ i sve joj se više približava. Njen položaj može se opisati vektorom:

$$\vec{r}(t) = R \sin [\omega t]\vec{i} + R \cos [\omega t]\vec{j} + H \exp [-\lambda t]\vec{k}$$

R, H, ω, λ su zadane konstante. Treba izvesti izraz za vektor brzine čestice, a nakon toga izraz za iznos brzine. Kao rješenje zadatka traži se iznos brzine u nekom trenutku t_0.
Također treba spomenuti, radi jasnoće, da je H početna visina iznad ravnine $z = 0$ (ta ravnina je zapravo ravnina (x, y), tj. skup točaka gdje $z = 0$). R je polumjer kruženja, a ω je kutna brzina. No, to je zapravo nebitno jer su to konstante vrijednosti - jedina varijabla nam je vrijeme t.

Naši podaci i skica: Podaci (konstante) i putanja čestice:



$R = 3m$

$H = 130m$

$\omega = 2 \, rad s^{-1}$

$\lambda = 1s$

$t_0 = 1s$

Sada nam je definirano sve potrebno, pa krenimo. Kao što znamo (iz Iljićeve skripte) brzina je omjer pomaka Δr i duljine vremenskog intervala Δt u kojem je pomak nastupio. No, ovo vrijedi samo za jednoliko pravocrtno gibanje. Za sva ostala gibanja, da bi ova definicija vrijedila, Δt mora biti beskonačno maleno, jer ako je vrijeme konačno tijelo može beskonačno mnogo puta promijeniti svoju putanju, a brzina koju dobijemo bit će samo prosječna brzina, a ne i trenutna. Dakle, mi moramo uzeti limes $\Delta t \to 0$.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Prema definiciji vektora položaja (a i intuitivno) govorimo da je $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$. Ako ovo uvrstimo u gornji limes dobivamo:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

Vrlo brzo primjećujemo da je ovo zapravo definicija derivacije. Dakle:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$$

Sada kad smo svjesni ove temeljne definicije, vidimo da za dobivanje izraza brzine iz zadanog vektora položaja, moramo taj vektor derivirati po vremenu t. Prije toga, samo par napomena o derivaciji vektora. Ako gledamo zapis položaja kao: $\vec{r}(t) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ onda taj vektor možemo derivirati po komponentama. Prvo računamo derivaciju $\frac{d}{dt}a_x$, pa derivaciju $\frac{d}{dt}a_y$ i isto to za komponentu a_z. Dakle ako nam je $v_x = \frac{d}{dt}a_x$, $v_y = \frac{d}{dt}a_y$, $v_z = \frac{d}{dt}a_z$ onda je konačni izraz za brzinu:

$$\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

I još jedna brza napomena prije računa, o notaciji $exp(-\lambda t)$: $exp(x) = e^x$, dakle:

$$H \exp [-\lambda t]\vec{k} = He^{-\lambda t}\vec{k}$$

Pa izračunajmo te tri (jednostavne) derivacije:

$$v_x = \frac{d}{dt}a_x \qquad v_y = \frac{d}{dt}a_y \qquad v_z = \frac{d}{dt}a_z$$

$$v_x = \big(R\sin(\omega t)\big)' \qquad v_y = \big(R\cos(\omega t)\big)' \qquad v_z = \big(He^{-\lambda t}\big)'$$

$$v_x = \big(3\sin(2t)\big)' \qquad v_y = \big(3\cos(2t)\big)' \qquad v_z = \big(130e^{-1t}\big)'$$

$$v_x = 3\cos(2t)\cdot(2t)' \qquad v_y = -3\sin(2t)\cdot(2t)' \qquad v_z = 130e^{-t}\cdot(-t)'$$

$$v_x = 6\cos(2t) \qquad v_y = -6\sin(2t) \qquad v_z = -130e^{-t}$$

Sada kad imamo sve potrebne vrijednosti, iz izraza:

$$\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

možemo u potpunosti konstruirati vektor brzine supstituirajući odgovarajuće vrijednosti:

$$\vec{v}(t) = 6\cos(2t)\vec{i} - 6\sin(2t)\vec{j} - 130e^{-t}\vec{k}$$

Ovime smo izveli izraz za brzinu čestice. Sada moramo izvesti izraz za iznos brzine čestice, što je vrlo jednostavno jer je iznoz brzine samo modul (duljina) vektora brzine. Dakle:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{36\cos^2(2t) + 36\sin^2(2t) + 130^2e^{-2t}}$$

Ovaj izraz moguće je pojednostavniti korištenjem identiteta $sin^2x + cos^2x = 1$, čime se dobiva:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{36 + 130^2e^{-2t}}$$

Da bi dobili traženu vrijednost brzine u t_0, jednostavno uvrstimo $t_0 = 1s$ u izraz za iznos brzine, čime dobijemo konačno rješenje:

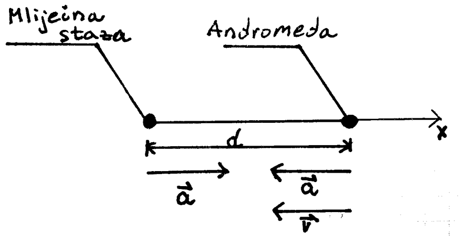
$$|\vec{v}(1)| = \sqrt{36 + 130^2e^{-2\cdot 1}}$$

$$|\vec{v}(1)| = 48.199[ms^{-1}]$$

1.2 Zadatak 2

Naša galaksija i susjedna galaksija Andromeda gibaju se jedna prema drugoj. Na Zemlji je izmjerena brzina v Andromede prema nama. Izmjerena je i udaljenost d naše galaksije i Andromede. Prema trenutnim metodama mjerenja akceleracije procjenjuje se da su akceleracije jedne galaksije prema drugoj jednake i iznosa a. Pretpostavimo da se galaksije gibaju jedna prema drugoj duž pravca koji prolazi njihovim središtima i da se iznos akceleracije a ne mijenja kroz vrijeme. Nakon kojeg će se vremena t, izraženog u milijardama godina (gigagodinama) naše dvije galaksije sudariti?
Zadane su vrijednosti v, d, a .

Naši podaci i skica: Podaci o gibanju i skica gibanja:



$$V = 111\ kms^{-1} = 111 \times 10^{3}\ ms^{-1}$$
$$d = 730\, kpc = 2.25254 \times 10^{22}\ m$$
$$a = 3{,}3 \times 10^{-15}\ kms^{-2} = 3{,}3 \times 10^{-12}\ ms^{-2}$$

Sada imamo definirane sve vrijednosti, pa krenimo s objašnjenjem. Vrlo je bitno svesti sve mjerne jedinice u standardne SI jedinice, gdje je najbitnija jedinica kiloparsek - jedan parsek je nešto više od 2 svjetlosne godine i jednak je $3.085677 \cdot 10^{16}$ metara. Zatim crtamo skicu gibanja: za računanje najjednostavnije je pretpostaviti da jedna galaksija miruje, a druga se giba prema njoj (stavimo se u **referentni okvir** jedne od galaksija, recimo naše. Ako mi mirujemo onda se Andromeda giba prema nama brzinom v (jer smo je mi na Zemlji izmjerili, dakle iz našeg referentnog okvira), no akceleracija nije a već $2a$ - iz zadatka se vidi da mi akceleriramo akceleracijom a prema Andromedi, i ona prema nama također akceleracijom a. Ako se držimo pretpostavke da mi mirujemo, dakle naša akceleracija je nula, moramo našu akceleraciju nadodati na akceleraciju Andromede (zbroj vektora). Pošto se u ovom slučaju gibanje odvija samo po jednoj osi, Andromedina akceleracija **iz našeg referentnog okvira** je zapravo $2a$, što znači da od sad baratamo akceleracijom $a = 6.6 \cdot 10^{-15}[ms^{-2}]$.
Također valja primijetiti da je brzina v zapravo početna brzina, jer je pitanje za koliko će se gigagodina (od ovog trenutka) galaksije sudariti, što znači da je ovaj trenutak $t = 0$ i da je trenutna brzina gibanja Andromede zapravo početna brzina gibanja v_0. Dalje, prepoznajemo da je gibanje jednoliko ubrzano pravocrtno, tj. $a = konst.$
Također znamo (iz prethodnog zadatka) izraz:

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \vec{v}(t)$$

Znamo i da je akceleracija definirana kao promjena brzine Δv u vremenu Δt, ali znamo da je to samo srednja akceleracija jer ako je Δt konačno velik, tada brzina može beskonačno mnogo puta promijeniti smjer i iznos, dakle moramo uzeti limes $\Delta t \to 0$. Isto kao i u prethodnom zadatku, nakon što smo izraz sveli na definiciju derivacije dobivamo:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t)$$

Primjećujemo da je brzina prva derivacija puta a akceleracija prva derivacija brzine - dakle akceleracija je druga derivacija puta.
Od vektora imamo zadan jedino vektor akceleracije, dakle jedini izraz koji sada možemo upotrijebiti je:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t)$$

Izračunati ćemo vektor brzine iz ovog izraza integriranjem:

$$\int \vec{a}(t)dt = \int \frac{d}{dt}\vec{v}(t)dt$$

Sjetimo se da je integral derivacije funkcije ta funkcija i zamijenimo strane u izrazu pa dobivamo:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt$$

Zatim se sjetimo da je (samo u slučaju jednolikog ubrzanog pravocrtnog gibanja) akceleracija konstanta, pa je možemo izvući ispred integrala:

$$\vec{v}(t) = \vec{a}\int dt$$

$$\vec{v}(t) = \vec{a}t + C$$

U ovom slučaju konstanta integracije C je zapravo početna brzina v_0:

$$\vec{v}(t) = \vec{a}t + v_0$$

Sada imamo izraz koji povezuje početnu brzinu, funkciju brzine i akceleraciju, no i dalje ne znamo funkciju brzine u vremenu. U pomoć nam priskače izraz iz prethodnog zadatka, tj. činjenica da je funkcija brzine jednaka derivaciji puta:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$$

U ovaj izraz uvrštavamo gore dobivenu funkciju $\vec{v}(t)$:

$$\vec{a}t + v_0 = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$$

Odavde ćemo izvući vektor položaja $\vec{r}(t)$ integriranjem:

$$\int(\vec{a}t + v_0)dt = \int\frac{d}{dt}\vec{r}(t)dt$$

Opet, integral derivacije funkcije je sama funkcija, pa zamijenimo strane i dobivamo:

$$\vec{r}(t) = \int(\vec{a}t + v_0)dt$$

I dalje integriramo:

$$\vec{r}(t) = \int\vec{a}tdt + \int v_0dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{a}\int tdt + v_0\int dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{a}\frac{t^2}{2} + C_1 + v_0t + C_2$$

Ovdje su nam konstante integracije C_1 i C_2 zapravo početni pomak r_0:

$$\vec{r}(t) = \vec{a}\frac{t^2}{2} + v_0t + r_0$$

Naravno, ovdje smo jako pojednostavili račun jer smo zanemarili da su ove funkcije zapravo vektori (vektorski račun nije nam potreban jer se gibamo po samo jednoj osi, za više osi odvojeno integriramo komponente uz $\vec{i}$,$\vec{j}$ i $\vec{k}$). Ovim računom dobili smo formulu:

$$r = a\frac{t^2}{2} + v_0t + r_0$$

Ovdje možemo reći da $r_0 = 0$ jer gledamo iz vlastitog referentnog okvira i Andromeda nema početni pomak (u trenutku smo $t = 0$), pa nam preostaje:

$$r = a\frac{t^2}{2} + v_0t$$

Nama treba vrijeme, pa dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$a\frac{t^2}{2} + v_0t - r = 0$$

Bitno je zapamtiti da mi baratamo akceleracijom $2a$, pa je $\frac{a}{2}$ zapravo a:

$$at^2 + v_0t - r = 0$$

Uvrštavanjem vrijednosti u kvadratnu jednadžbu dobiva se jedno pozitivno rješenje $t = 6.7495 \cdot 10^{16}$ sekundi što je (nakon dijeljenja sa 60 za minute, pa opet s 60 za sate, sa 24 za dane, sa 365 za godine i sa 10^9 za gigagodine) 2.14 gigagodina.

1.3 Zadatak 3

Ovaj zadatak su eliminacijska pitanja - o odnosu vektora položaja i vektora brzine te akceleracije. U ovakvim zadacima samo je bitno zapamtiti da akceleracija može biti tangencijalna i centripetalna (tj. imati komponentu paralelnu s putanjom i brzinom i okomitu na putanju i brzinu). Brzina je uvijek tangencijalna na putanju i smjer je uvijek tangencijalan na putanju, dakle brzina i smjer su paralelni, dok akceleracija nije (tj. može biti i okomita).

1.4 Zadatak 4

Ukoliko je tijelo na položaju $z = 5\text{cm}$ odrediti moguće predznake početne brzine i akceleracije tako da se tijelo u nekom trenutku zaustavi.
Ovo je jednostavan zadatak, ako su i akceleracija pozitivna i početna brzina pozitivna tijelo se očito nikada neće zaustaviti, isto ako su i negativne (tijelo će ubrzavati u negativnom smjeru, a početna brzina mu je negativna, pa se nikada neće zaustaviti, već će iz $z = 5$ proći kroz ishodište, i ići u sve negativnije vrijednosti). Jedino ako su predznaci suprotni (počentna brzina je negativna, a tijelo akcelerira pozitivno ili je početna brzinia pozitivna a tijelo akcelerira negativno), jer će se onda u nekom trenutku t tijelo zaustaviti i promijeniti smjer.

1.5 Zadatak 5

U ovom zadatku zadano je više vektora položaja $\vec{r}(t)$, a pitanje je u kojima je od njih akceleracija različita od nule. Teži način rješavanja je deriviranje svake komponente svakog vektora položaja i gledati je li druga derivacija različita od nule. No većina ih se može vidjeti "od oka": ako je vektor položaja zapisan kao $\vec{r}(t) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ gledamo svaku komponentu (a_x, a_y, a_z) odvojeno i ako one sadrže samo linearnu komponentu t, ili je ne sadrže uopće onda je akceleracija nula. Na primjer:

$$\vec{r}(t) = 5\vec{i} + 2t\vec{j} + 10t\vec{k}$$

Ovdje je akceleracija nula jer će druga derivacija dati nulu. No ako komponenta sadrži t^2 to znači da će akceleracija biti konstantna tj. različita od nule. Na primjer:

$$\vec{r}(t) = 5\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 10t\vec{k}$$

će imati akceleraciju različitu od nule. Također ako komponenta sadrži $\sin t$, $\cos t$,... ili neku racionalnu funckiju, npr. $\frac{1}{1+t}$ tada će akceleracija biti različita od nule (i ovisiti o t, dakle neće biti konstantna).