2 2. domaća zadaća

2.1 Zadatak 1

Položaj česticce mase m u (x, y) ravnini opisan je vektorom:

$$\vec{r} = A_x \cos[\omega_x t]\vec{i} + A_y \sin[\omega_y t]\vec{j}$$

$A_x, A_y, \omega_x, \omega_y$ su konstante, no nisu zadane. Treba izvesti izraz za silu koja djeluje na tu česticu. Ovdje nam je problematičan dio što, za razliku od ovakvoga zadatka u prvoj zadaći, konstante nisu zadane i ne traži se numeričko rješenje, već vektor sile $\vec{F}$.

Naši podaci i skice: Nemamo zadanih podataka, ali iz funkcije vidimo da gibanje nije niti pravocrtno niti jednoliko kružno (osim ako sve konstante nisu jednake jedan, tada vektor smjera opisuje kružnicu).
U prethodnoj zadaći izveli smo relacije

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t)$$

Dakle, primjećujemo da iz našeg vektora $\vec{r}$ možemo dobiti vektor akceleracije čestice. Drugi Newtonov zakon kaže da je promjena količine gibanja u vremenu jednaka sili koja na tijelo djeluje. Sjetimo se da je količina gibanja $\vec{p}$ definicijski jednaka umnožku mase i brzine:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Promjena, tj. derivacija te količine gibanja u vremenu je jednaka sili (Newton 2):

$$\vec{F} = \frac{dp}{dt}$$

Količinu gibanja p definicijski zapisujemo s $m\vec{v}$:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Konstantu m možemo izvući iz derivacije:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Gledajući relaciju $\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t)$, možemo supstituirati:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Sada smo uspješno povezali vektor akceleracije i silu - a znamo da vektor akceleracije možemo dobiti deriviranjem vektora položaja da bi smo dobili brzinu, a zatim deriviranjem te brzine da bi smo dobili akceleraciju. Sjetimo se da vektore možemo rastaviti na komponente - ako gledamo zapis položaja kao: $\vec{r}(t) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ onda taj vektor možemo derivirati po komponentama. Prvo računamo derivaciju $\frac{d}{dt}a_x$, pa derivaciju $\frac{d}{dt}a_y$. Dakle ako nam je $v_x = \frac{d}{dt}a_x$, $v_y = \frac{d}{dt}a_y$ onda je konačni izraz za brzinu:

$$\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

Pa izračunajmo derivaciju vektora $\vec{r}$:

$$v_x = \frac{d}{dt}a_x$$

$$v_x = \left(A_x \cos(\omega_x t)\right)'$$

$$v_x = A_x \cdot (-\sin(\omega_x t)) \cdot (\omega_x t)'$$

$$v_x = -A_x\omega_x \sin(\omega_x t)$$

$$v_y = \frac{d}{dt}a_x$$

$$v_y = \left(A_y \sin(\omega_y t)\right)'$$

$$v_y = A_y \cos(\omega_y t) \cdot (\omega_y t)'$$

$$v_y = A_y\omega_y \cos(\omega_y t)$$

Sjetimo se, A_x, ω_x su konstante pa ih u deriviranju možemo tretirati kao brojeve.
Ovime smo dobili vektor brzine:

$$\vec{v} = \left[-A_x\omega_x \sin(\omega_x t)\right]\vec{i} + \left[A_y\omega_y \cos(\omega_y t)\right]\vec{j}$$

Sada računamo vektor akceleracije - ponovnim deriviranjem vektora brzine po komponentama (sve relacije već imamo definirane i izvedene gore):

$$a_x = \frac{d}{dt}a_x$$
$$a_x = \big(- A_x\omega_x \sin(\omega_x t)\big)'$$
$$a_x = -A_x\omega_x \cos(\omega_x t)\cdot(\omega_x t)'$$
$$a_x = -A_x\omega_x^2 \cos(\omega_x t)$$

$$a_y = \frac{d}{dt}a_x$$
$$a_y = \big(A_y\omega_y \cos(\omega_y t)\big)'$$
$$a_x = A_y\omega_y \cdot(-\sin(\omega_x t))\cdot(\omega_x t)'$$
$$a_x = -A_y\omega_y^2 \sin(\omega_x t)$$

Sjetimo se, A_x, ω_x su konstante pa ih u deriviranju možemo tretirati kao brojeve.
Sada ovo možemo ukomponirati u kompletan vektor akceleracije:

$$\vec{a} = \big[- A_x\omega_x^2 \cos(\omega_x t)\big]\vec{i} + \big[- A_y\omega_y^2 \sin(\omega_x t)\big]\vec{j}$$

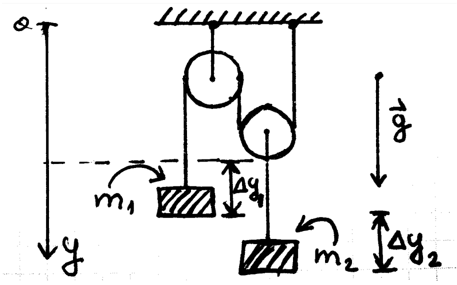
I ovime smo dobili vektor akceleracije, koji moramo množiti masom da dobijemo vektor brzine:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{F} = m\Big[\big[- A_x\omega_x^2 \cos(\omega_x t)\big]\vec{i} + \big[- A_y\omega_y^2 \sin(\omega_x t)\big]\vec{j}\Big]$$
$$\vec{F} = \big[- mA_x\omega_x^2 \cos(\omega_x t)\big]\vec{i} + \big[- mA_y\omega_y^2 \sin(\omega_x t)\big]\vec{j}$$
$$\vec{F} = -mA_x\omega_x^2 \cos(\omega_x t)\vec{i} - mA_y\omega_y^2 \sin(\omega_x t)\vec{j}$$

2.2 Zadatak 2

Ovaj zadatak zadan je u dosta varijacija - tako da će objašnjenje biti što opširnije, pogotovo jer se na prvi pogled ovo može činiti malo nelogičnim. Zadatak kaže:
Ako se u sustavu prema slici zanemaruju mase niti, koloture i sile otpora, za koji slučaj masa m_1 ubrzava prema dolje. Mi ćemo generalno naći omjer mase m_1 i m_2 za granični slučaj - omjer masa u trenutku kad masa m_3 počinje ubrzavati.
Napomena: Ovaj zadatak je klasičan na blicevima i konceptualnim pitanjima na MI i učenici koji ne prate predavanja često "nasjednu".

Naša skica: Skica sustava je dana u zadatku:



Prvo što nam padne napamet - čim težina G_1 mase m_1 pređe težinu G_2 mase m_2 mislimo da će se tijelo početi gibati jer je očito da je jedna sila veća od druge - i odmah primjenjujemo Newtona. No nažalost ova tvrdnja nije istinita.
Sagledajmo prvo ukoliko prisilimo m_1 na gibanje (npr. ako snažno povučemo m_1), što će se dogoditi: m_1 će se očito gibati i u nekom vremenu Δt napraviti pomak Δy_1. No idemo sada zamisliti kako će se micati m_2, tj. što nam je potrebno da pokrenemo desnu koloturu (koja će se dizati zajedno s m_2, jer su vezani). Ukoliko povučemo nit na kojoj visi m_1 za neki Δy_1 druga kolotura će se podići samo za $\frac{\Delta y_1}{2}$ - jer je dvostruko vezana s niti na kojoj visi m_1. Dakle:

$$\Delta y_2 = \frac{\Delta y_1}{2}$$

$$\Delta y_1 = 2\Delta y_2$$

Ovo možemo generalizirati i na beskonačno mali pomak dy, jer Δy_2 ne ovisi o veličini pomaka Δy_1:

$$dy_1 = 2dy_2$$

Ovaj izraz sada moramo proširiti tako da uključuje i masu - jer tražimo omjer masa, a ne vremena, pa obe strane dijelimo s dt:

$$\frac{dy_1}{dt} = 2\frac{dy_2}{dt}$$

Primjećujemo $v = \frac{dy}{dt}$ (po definiciji već 10 puta izvedenoj):

$$v_1 = 2v_2$$

Također primijetimo da ne radimo s vektorima nego sa skalarima brzine, pa nije potrebno uračunati smjer gibanja. Također, ako su brzina i pomak u istom omjeru, onda je i akceleracija (dobije se dijeljenjem s vremenom t):

$$a_1 = 2a_2$$

No, ipak, moramo poštivati zakon očuvanja energije - promjene količina gibanja ovih tijela će biti jednake:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

$$m_1 \cdot 2v_2 = m_2 v_2$$

Dakle:

$$2m_1 = m_2$$

Da bi masa m_1 ubrzala prema dolje mora biti najmanje dvostruko veća od mase m_2, tj. $m_1 \geq 2m_2$. Naravno, vrijedi i obrnuto: da bi masa m_1 ubrzala prema dolje mora biti barem dvostruko veća od mase m_2, tj. $m_2 \geq 2m_1$.

2.3 Zadatak 3

Kratko i slatko: malo igranja mjernim jedinicama, dolazi u puno varijacija - zadatak će biti riješen s generalnim postupkom na jednom primjeru:
Sila koja djeluje na česticu čija je brzina $\vec{v}$ opisana je izrazom:

$$F[\vec{v}] = -b\vec{v}$$

gdje je b konstanta. Odredi **fizikalnu dimenziju** (mjernu jedinicu) konstante b i zapiši je u obliku

$$M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}$$

gdje su α, β, γ realni eksponenti a M, L, T fizikalne dimenzije mase, duljine i vremena. U odgovoru se moraju odabrati vrijednosti eksponenata α, β, γ. Mi znamo da se mjerne jedinice s obe strane moraju poklapati - inače kršimo jednadžbu. Također i znamo da je mjerna jedinica za silu $F = ma$ izražena kao $[F] = [m][a] \Rightarrow [N] = [kg][\frac{m}{s^2}]$ tj. $kgms^{-2}$.
U zapisu $M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}$ to je:

$$M^1L^1T^{-2}$$

Što nam čini zapis za silu. Slično tome, zapis za brzinu je:

$$M^0L^1T^{-1}$$

. Ako zapis $M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}$ za konstantu b označimo s X, moramo jednostavno riješiti jednadžbu koja izjednačava zapis lijeve i desne strane:

$$M^1L^1T^{-2} = X \cdot M^0L^1T^{-1}$$

Skratimo L^1 i ignoriramo $M^0 = 1$:

$$M^1T^{-2} = X \cdot T^{-1}$$

Iz čega slijedi:

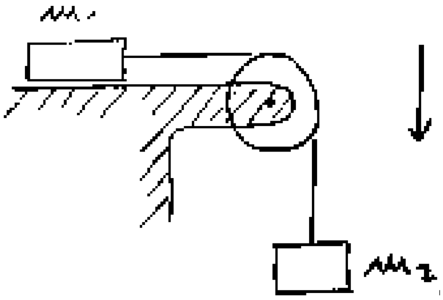
$$X = \frac{M^1T^{-2}}{T^{-1}} = M^1T^1$$

Ako sad iščitamo eksponente dobivamo: $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -1$.

2.4 Zadatak 4

Klasični zadatak iz mehanike, vrlo jednostavan - rješenje će biti kratko i jasno. Dana je podloga, kolotura i traži se ukupna akceleracija sustava.
Zadani su $m_1 = 8.9kg$, $m_2 = 4kg$, $\mu = 0.12$ - ne zaboravimo da ne zanemarujemo trenje m_1 s podlogom.
Napomena: vrijednost g u Merlin ne uvrštavati kao 10.

Naša skica: Skica sustava je dana u zadatku:



Pa krenimo - ako svaki sustav gledamo izvana, ili će se gibati konstantnom brzinom (ili stajati) ili će ubrzavati. Ovaj će sustav ubrzavati, a prema Newtonu 2 znamo da će ubrzavati akceleracijom:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Ovdje nam je $\vec{F}$ vanjska sila na sustav - sila koja bi djelovala na sustav da je on jedna točka, a m je ukupna masa sustava. Ukupnu masu znamo, $m_1 + m_2$ - moramo dobiti samo ukupnu silu.
Znamo da nam na m_2 djeluje sila $G_2 = m_2 g$, a na m_1 djeluje sila trenja $T = m_1 g \mu$. Ukupna sila na sustav biti će razlika tih dviju sila - iako nisu kolinearne zbog koloture će trenje djelovati direktno suprotno težini. Dakle ukupna sila na sustav nam je:

$$F = G_1 - T = m_2 g - m_1 g \mu$$

Prema Newtonu 2, akceleracija je onda:

$$\vec{a} = \frac{m_2 g - m_1 g \mu}{m_1 + m_2}$$

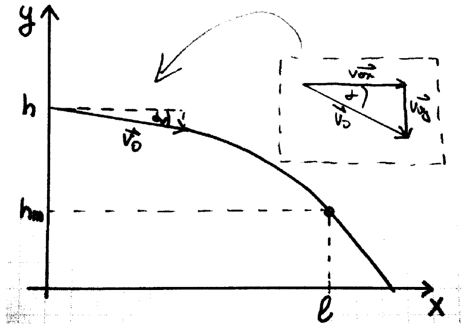
Uvrštavanjem jednostavno dobivamo:

$$a = 2.229 kgms^{-2}$$

2.5 Zadatak 5

Pri servisu tenisač reketom udara lopticu kada se nalazi na visini h iznad tla i daje joj početnu brzinu pod kutem od α ispod horizontale. Ako loptica treba preći mrežu na horizontalnoj udeljenosti l, koja je minimalna brzina koja je potrebna da bi loptica prešla mrežu? Visina mreže na mjestu prelaska je h_m. Pri računanju zanemarite otpor zraka. Zadani su nam podaci $h = 2.92$, $\alpha = 8°$, $l = 8m$, $h_m = 0.92m$.
Zadatak će biti riješen izvođenjem izraza, ne uvrštavanjem u formulu - jer postoji mnogo varijacija tog zadatka.

Naša skica: Graf gibanja loptice:



Bez obzira na zadatak, da bi smo išta odredili potrebne su nam jednadžbe gibanja - tj. svi vektori (brzina, akceleracija, položaj). Da imamo vektor položaja mogli bi smo brzo deriviranjem izvesti ostala dva - no nemamo niti jedan od tih vektora. Pa koji vektor imamo u potpunosti zadan? Imamo, naravno vektor akceleracije, g, što naš ukupni vektor akceleracije čini:

$$\vec{a}[t] = 0\vec{i} - g\vec{j} + 0\vec{k}$$

Ovo je ovako jer imamo akceleraciju samo u $-y$ smjeru. Također, ako se deriviranjem iz brzine dobiva akceleracija, a integriranje je operacija suprotna deriviranju, onda integriranjem akceleracije dobivamo brzinu. No sjetimo se temeljne definicije integrala:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Gdje je $F(x)$ primitivna funkcija koju tražimo, a C konstanta integracije. Dakle, ukoliko integriramo akceleraciju dobiti ćemo brzinu - ali će nam C biti nepoznat. Ta konstanta C upravo je početno stanje brzine, tj. vrijednosti koju tražimo. Dakle ako integriramo akceleraciju da dobijemo brzinu onda je $C = v_0$, ako integriramo brzinu da dobijemo vektor položaja onda je $C = r_0$ - dakle konstanta integracije C vrijednosti koju tražimo upravo je početno stanje te vrijednosti. Pa postavimo prvo te početne uvjete:

$$\vec{r}[0] = 0\vec{i} + h\vec{j} + 0\vec{k}$$

Znači u početnom trenutku smo na položaju $(0, h, 0)$ što možemo iščitati iz grafa. Početna brzina (upravo nju tražimo) je:

$$\vec{v}[0] = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + 0\vec{k}$$

Objašnjenje - tenisač udara lopticu koso dolje - daje joj x i y komponente brzine v_x i v_y. Ove vrijednosti moramo malo ljepše izraziti - pomoću ukupne početne brzine v_0, a ne samo po komponentama. Gledajući trokut gore desno u skici vidimo: $\sin\alpha = \frac{|v_y|}{|v_0|}$, $\cos\alpha = \frac{|v_x|}{|v_0|}$. Dakle x komponenta brzine nam je:

$$\vec{v_x} = |v_0|\cos\alpha\vec{i}$$

A y komponenta je, analogno:

$$\vec{v_y} = -|v_0|\sin\alpha\vec{j}$$

Minus na y komponenti nikako ne smijemo previdjeti - to bi značilo da loptici dajemo brzinu prema gore, ne prema dolje. ukupni početni vektor brzine onda možemo zapisati kao:

$$\vec{v}[0] = |v_0|\cos\alpha\vec{i} - |v_0|\sin\alpha\vec{j} + 0\vec{k}$$

Sada imamo sve konstante integracije koje ćemo koristiti i možemo krenuti izvoditi vektor položaja loptice u vremenu. Pretpostavit ćemo da se loptica giba točno po putanji na grafu - tj. da prolazi kroz točku koja je vrh mreže. Uz tu pretpostavku dobiti ćemo točan iznos početne brzine v_0.

Krenimo od temeljne definicije za akceleraciju:

$$\vec{a}[t] = \frac{d}{dt}\vec{v}[t]$$

Zamijenimo strane ovom izrazu:

$$\frac{d}{dt}\vec{v}[t] = \vec{a}[t]$$

Ako ovaj izraz integriramo:

$$\int \frac{d}{dt}\vec{v}[t]dt = \int \vec{a}[t]dt$$

Zatim prijetimo da se integral i derivacija poništavaju:

$$\vec{v}[t] = \int \vec{a}[t]dt$$

Rastavimo akceleraciju na komponente, i izbacimo van $\vec{i}$, $\vec{j}$, $veck$:

$$\vec{v}[t] = \int [0\vec{i} - g\vec{j} + 0\vec{k}dt$$

Ovo dalje rastavimo na tri zasebna integrala:

$$\vec{v}[t] = (\int 0dt)\vec{i} + (-\int gdt)\vec{j} + (\int 0dt)\vec{k}$$

Od integrala uz $\vec{i}$ i $\vec{k}$ ostaju samo konstante integracije C, tj. v_x i v_z:

$$\vec{v}[t] = v_x\vec{i} + (-\int gdt)\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Idemo sada odvojeno integrirati komponentu uz $\vec{j}$:

$$-\int gdt = -g\int dt = -gt + C = -gt + v_y$$

Ovo nam daje kompletan vektor $\vec{v}[t]$ (uz $v_z = 0$ jer je tenisač lopti dao brzinu samo u osima x i y):

$$\vec{v}[t] = v_x\vec{i} + (v_y - gt)\vec{j} + 0\vec{k}$$

Supstituirajmo sad v_x i v_y s izrazima koje smo dobili gore iznad (početna brzina u smjeru x i y:

$$\vec{v}[t] = |v_0|\cos\alpha\vec{i} + (-|v_0|\sin\alpha - gt)\vec{j} + 0\vec{k}$$

Analogno načinu po kojem smo dobili izraz za brzinu integracijom akceleracije sada ćemo dobiti izraz za položaj integracijom dobivene brzine:

$$\vec{r}[t] = \int \vec{v}[t]dt$$

Odmah ćemo integral rastaviti na tri komponente:

$$\vec{r}[t] = (\int |v_0|\cos\alpha dt)\vec{i} + (\int -|v_o|\sin\alpha - gtdt)\vec{j} + (\int 0dt)\vec{k}$$

Integrirajmo prvo izraz za smjer $\vec{j}$:

$$\int -|v_o|\sin\alpha - gtdt = \int -|v_0|\sin\alpha dt + \int -gtdt$$

Izvučemo konstante van:

$$-|v_0|\sin\alpha\int dt - g\int tdt = -|v_0|\sin\alpha t - g\frac{t^2}{2} + C$$

Koristimo samo jednu konstantu integracije C - nije potrebno za svaki integral po jednu i supstituiramo je početnom vrijednosti vektora $\vec{r}$ u smjeru $\vec{j}$:

$$-|v_0|\sin\alpha t - g\frac{t^2}{2} + 2.92$$

Vratimo ovu dobivenu vrijednost nazad u vektor položaja koji pokušavamo izračunati:

$$\vec{r}[t] = (\int |v_0|\cos\alpha dt)\vec{i} + (-|v_0|\sin\alpha t - g\frac{t^2}{2} + 2.92)\vec{j} + (\int 0dt)\vec{k}$$

Integral u smjeru $\vec{i}$ je jednostavan, nakon izvlačenja konstanti:$|v_0|\cos\alpha\int dt = |v_0|\cos\alpha t + C$

Početna vrijednost vektora $\vec{r}$ u smjeru $\vec{i}$ je jednaka nuli, dakle C zanemarujemo, pa supstituirajmo dobiveni izraz u konačni izraz za vektor $\vec{r}$:

$$\vec{r}[t] = |v_0| \cos \alpha t \vec{i} + (-|v_0| \sin \alpha t - g\frac{t^2}{2} + 2.92)\vec{j} + (\int 0dt)\vec{k}$$

U smjeru $\vec{k}$ nakon integriranja ostaje nam samo C, a početnog položaja u smjeru $\vec{k}$ nismo imali (čak nismo niti definirali z os) - što daje ovaj konačni izraz za vektor $\vec{r}$:

$$\vec{r}[t] = |v_0| \cos \alpha t \vec{i} + (-|v_0| \sin \alpha t - g\frac{t^2}{2} + 2.92)\vec{j} + 0\vec{k}$$

Sada imamo potpuni vektor položaja $\vec{r}$ u ovisnosti o vremenu. Što sada? Pa, moramo pogledati za koje vrijednosti $|v_0|$ i t lopta prolazi kroz točku $(8, 0.92)$ jer su nam upravo to koordinate vrha mreže. Kako ćemo to otkriti? Odgovor je jednostavno. Komponenta $\vec{i}$ vektora smjera položaja mora biti jednaka željenoj x osi, a komponenta $\vec{j}$ mora biti jednaka željenoj y osi:

$$|v_0| \cos \alpha t = 8 \qquad -|v_0| \sin \alpha t - g\frac{t^2}{2} + 2.92 = 0.92$$

Pošto nam treba samo vrijednost $|v_0|$ možemo iz prve jednadžbe izraziti t i potom ga supstituirati u drugu jedndadžbu:

$$t = \frac{8}{|v_0| \cos \alpha}$$

Nakon supstitucije:

$$-|v_0| \sin \alpha \frac{8}{|v_0| \cos \alpha} - g\frac{(\frac{8}{|v_0| \cos \alpha})^2}{2} + 2.92 = 0.92$$

Nakon malo sređivanja i skraćivanja izraza:

$$-4 \tan \alpha \cos^2 \alpha |v_0|^2 + |v_0|^2 \cos^2 \alpha = 16g$$

$$|v_0|^2(-4 \tan \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 16g$$

Sjetimo se da znamo α, time znamo i $\cos \alpha$ i $\tan \alpha$, a znamo i g (u Merlin ne uvrštavati kao 10), te onda dobivamo:

$$|v_0|^2(0.429356) = 156.96$$

Iz čega zaključujemo:

$$|v_0| = 19.1199ms^{-1}$$

Kraj priče i
Sretan Uskrs!